МИНИСТЕРСТВО

НАРОДНОГО ОБРАЗОВАНИЯ РСФСР

16-АЯ ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ПО МАТЕМАТИКЕ

IУ этап

Первый день

1990г.

Составители сборника: Агаханов Н.Х., Букин К.А., Калинин А.Ю., Коновалов С.П., Купцов Л.П., Нестеренко Ю.В., Канунникова Г.А., Резниченко С.В., Терешин Д.А., Уроев В.М.

Редактор: Смирнова В.К.

При составлении сборника использованы задачи, рекомендованные для республиканских математических олимпиад Центральным Оргкомитетом Всесоюзных олимпиад школьников.

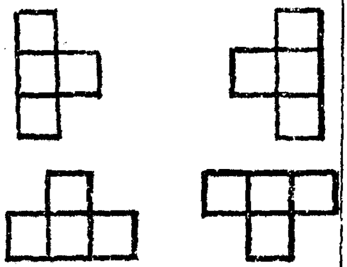
9-й класс

Первый день

1. Среди двадцати пяти внешне одинаковых монет 3 фальшивых и 22 настоящих. Все настоящие монеты имеют равные весе. Все фальшивые монеты также имеют равные веса, причем фальшивая монета легче настоящей. Как с помощью двух взвешиваний на чашечных весах без гирь найти шесть настоящих монет?

2. Числа a, b, c, d, p, q связаны соотношением $ab+cd=2pq$. Докажите, что если $ac \geqslant p^2 > 0$, то $bd \leqslant q^2$.

3. Дана шахматная доска размером $n \times n$, $n \geqslant 3$. Одним ходом разрешается выбрать в любом месте доски какую-нибудь из фигур, показанных на рисунке, и изменить цвет всех ее клеток на противоположный. Можно ли за несколько ходов добиться того, чтобы у всех клеток доски цвет изменился на противоположный? Решите задачу для случаев:



а) $n=8$; б) $n=9$; в) $n=10$.

4. В квадрате со стороной 12 расположены 1990 точек. Докажите, что существует равносторонний треугольник со стороной 11, в котором расположены по крайней мере 498 из этих точек.

10 - й класс

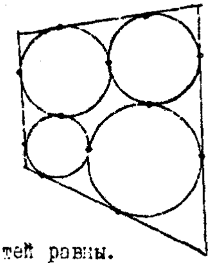
Первый день

1. Докажите, что для любых положительных чисел а, в, с справедливо неравенство

$$\sqrt{ab(a+b)}+\sqrt{bc(b+c)}+\sqrt{ac(a+c)}>\sqrt{(a+b)(b+c)(a+c)}.$$

2. Внутри круга расположены 100 точек, ни одна из которых не совпадает с центром круга и никакие две из которых не лежат на одном радиусе. а). Докажите, что существует круговой сектор с углом $\frac{2\pi}{11}$ радиан, в котором лежат ровно 10 из данных точек. б) Верно ли, что найдется круговой сектор с углом $\frac{2\pi}{11}$ радиан, в котором лежат ровно 11 точек? (Считается, что радиусы, ограничивающие сектор, принадлежат этому сектору).

3. Внутри четырехугольника расположены четыре окружности, каждая из которых касается двух сторон четырехугольника и двух окружностей так, как показано на рисунке. Известно, что в четырехугольник можно вписать окружность. Докажите, что по крайней мере две из данных окружностей равны.



4. Тройки чисел (x_n, y_n, z_n), $n=1,2,\ldots$, строятся по следующему правилу: $x_1=\frac{1}{2}$, $y_1=3$, $z_1=7$;

$$x_{n+1}=\frac{2x_n}{x_n^2-1},\quad y_{n+1}=\frac{2y_n}{y_n^2-1},\quad z_{n+1}=\frac{2z_n}{z_n^2-1},\quad n\geqslant 1.$$

а) Докажите, что указанный процесс построения троек может быть неограниченно продолжен.

б) Может ли на некотором шаге получиться тройка чисел (x,y,z), для которой выполняется равенство $x+y+z=0$?

II-й класс

Перый день

I. Среди двадцати пяти внешне одинаковых монет 3 фальшивых и 22 настоящих. Все настоящие монеты имеют равные веса. Все фальшивые монеты также имеют равные веса, причем фальшивая монета легче настоящей. Как с помощью двух взвешиваний на чашечных весах без гирь найти шесть настоящих монет?

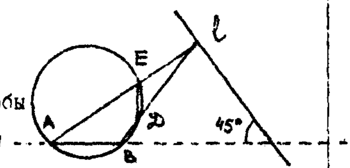
2. Докажите, что для произвольного треугольника справедливо неравенство

$$a\cos A + b\cos B + c\cos C \le p,$$

где а,в,с - стороны треугольника, А,В, С - противолежащие им углы, р - полупериметр.

3. Даны 8 кубиков с ребром I, произвольные 24 грани которых окрашены в белый цвет, а остальные 24 грани - в черный. Докажите, что из этих кубиков можно сложить куб, на поверхности которого будет поровну белых и черных квадратиков со стороной I.

4. В окружность радиуса I дана хорда АВ, длина которой меньше $\sqrt{2}$. Прямая ℓ, образующая с хордой угол 45°, не пересекает данную окружность (см. рис.).



С помощью циркуля и линейки на прямой ℓ постройте точку С так, чтобы отрезки ЕД и АВ были перпендикулярны (Е и Д - точки пересечения отрезков СА и СВ с окружностью).

Решения задач для 9-го класса

Первый день

I. Отложим какую-нибудь монету, а из оставшихся 24 монет выберем произвольным образом I2 и положим их на одну из чашек весов, остальные I2 монет положим на другую чашку.

Если весы уравновесились, то отложенная монета является фальшивой, а на каждой чашке весов лежит ровно по одной фальшивой монете. Снимем монеты с одной из чашек и переложим на нее какие-нибудь 6 монет с другой чашки. Тогда на той чашке, которая перетянет, будут лежать 6 настоящих монет, а на другой 5 настоящих и одна фальшивая.

Предположим теперь, что при первом взвешивании одна из чашек весов перевесила. Тогда на этой чашке находится не более одной фальшивой монеты. Снимем монеты с другой чашки весов и переложим на нее какие-нибудь 6 монет с первой чашки. Если весы уравновесились, то на каждой чашке находятся 6 настоящих монет (таким образом, в этом случае с помощью двух взвешиваний можно найти даже I2 настоящих монет). Если же какая-то чашка весов перетянет, то на ней лежат 6 настоящих монет, а на другой чашке - 5 настоящих и одна фальшивая.

2. Предположим, что $bd > q^2$. Тогда $4abcd =$

$$= 4(ac)(bd) > (2pq)^2 = (ab+cd)^2 = (ab)^2 + (cd)^2 + 2abcd,$$

откуда $(ab)^2 + (cd)^2 + 2abcd < 4abcd$ т.е. $(ab-cd)^2 < 0$, что невозможно.

3. Ответ: можно, если $n = 2k$ (случаи а) и в)) и нельзя, если $n = 2k+1$ (случай б)).

Пусть сначала $n = 2k$. Если $k = 2m$ (случай а)), то рассматриваемую шахматную доску $4m \times 4m$ можно разбить на квадраты 4 х 4, каждый из которых разбивается на 4 данные в условии фигуры так, как показано на рис. I. Следовательно, в случае $k = 2m$ требуемую раскраску получить можно.

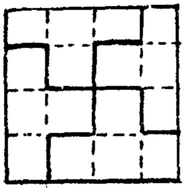


Рис. I

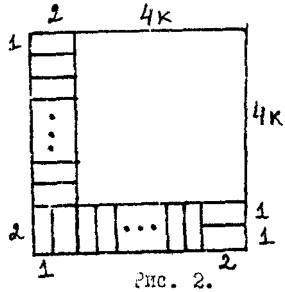
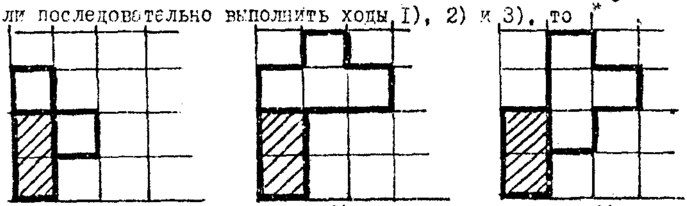


Рис. 2.

Если же $k=2m+1$ (случай в), то рассматриваемую шахматную доску $(4m+2)\times(4m+2)$ можно разбить на шахматную доску $4m\times 4m$, перекраску которой можно осуществить указанным выше способом, и " уголок", которой можно разбить на доминошки (рис.2). Алгоритм перекрашивания доминошки приведен на рис.3. Если последовательно выполнить ходы I), 2) и 3), то



I) 2) 3)

Рис. 3.

цвет у обеих клеток заштрихованной доминошки изменится на противоположный, а у всех остальных клеток доски $(4m+2)\times(4m+2)$ цвет не изменится. Следовательно, и в случае $k=2m+1$ требуемую раскраску получить можно.

Рассмотрим теперь доску размером $(2k+1)\times(2k+1)$ клетки которой каким-то образом (необязательно в шахматном порядке) покрашены в белый и черный цвет. Обозначим через d разность между числом черных и числом белых клеток этой доски.

Легко проверить, что при каждом ходе d изменяется на число, кратное четырем.

Шахматную доску $(2k+1)\times(2k+1)$ можно замостить доминошками так, что останется одна свободная клетка. Поскольку каждая доминошка накрывает одну черную и одну белую клетки, разность d для рассматриваемой шахматной доски $(2k+1)\times(2k+1)$ равна либо I, либо – I. Пусть, для определенности, $d=1$. Если у всех клеток рассматриваемой шахматной доски изменить цвет на противоположный, то разность d просто поменяет знак, т.е. станет равна – I. Как показано, за один ход разность изменяется на число, кратное 4, поэтому за несколько ходов она не может стать равно – I. Следовательно, в случае $n=2k+1$ за несколько ходов требуемую раскраску получить нельзя.

4. Так как $497\cdot 4 < 1990$, то достаточно доказать, что данный квадрат можно покрыть четырьмя равносторонними треугольниками со стороной I.

Пусть O – центр квадрата АВСД со стороной I2, T – середина стороны АД, а равносторонний треугольник MKN со стороной II расположен так, как показано на рис. 4.

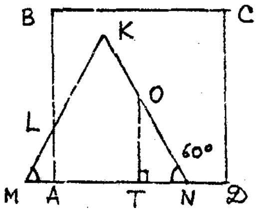


Рис. 4.

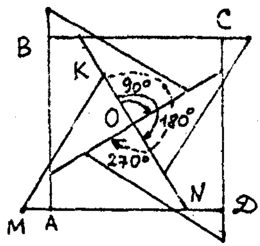


Рис. 5.

Тогда $N\mathcal{D} = T\mathcal{D} - TN = T\mathcal{D} - OT\cdot \operatorname{ctg} 60^\circ = 6 - \frac{6}{\sqrt{3}}$, $MA = MN - AN = MN - (A\mathcal{D} - N\mathcal{D}) = 5 - \frac{6}{\sqrt{3}}$. Следовательно, $AL = MA\cdot \operatorname{tg} 60^\circ = 5\sqrt{3} - 6 < N\mathcal{D}$, и поэтому треугольник и три треугольника, полученные из него поворотами вокруг точки O на 90°, 180° и 270°, полностью покрывают квадрат АВСД (рис. 5).

Решения задач для IO - го класса

Первый день

I. Возведя обе части данного неравенства в квадрат, получим равносильное неравенство $ab(a+b)+bc(b+c)+ac(a+c)+$

$$+2\left(\sqrt{ab^2c(a+b)(b+c)}+\sqrt{abc^2(a+c)(b+c)}+\sqrt{a^2bc(a+b)(a+c)}\right)>(a+b)(b+c)(a+c),$$

или, поскольку $(a+b)(b+c)(a+c)=ab(a+b)+bc(b+c)+ac(a+c)+2abc$,

$$2\left(b\sqrt{ac(a+b)(b+c)}+c\sqrt{ab(a+c)(b+c)}+a\sqrt{bc(a+b)(a+c)}\right)>2abc.$$

Последнее неравенство очевидно, так как $\sqrt{ac(a+b)(b+c)}>\sqrt{ac\cdot a\cdot c}=ac.$

2. а) Разобьем круг на II равных секторов. Если при этом в какой-то сектор попадут ровно IO точек, то утверждение доказано. Предположим, что такого сектора нет, т.е. в любом секторе находятся или не менее II точек, или не более 9 точек. Докажем, что в таком случае найдется сектор, содержащий не менее II точек, и сектор, содержащий не более 9 точек.

Сектор, содержащий не менее II точек, существует, поскольку в противном случае, число точек в круге было бы не более 9·II<IOO. Предположим, что нет сектора, содержащего не более 9 точек, т.е. в каждом секторе не менее II точек. Занумеруем как-то рассматриваемые II секторов. Пусть n_k, где k= I, 2,..., II - число точек, попавших в k-ый сектор, m - число точек, лежащих на ограничивающих эти секторы радиусах. По условию $m\leq 11$, по предположению $n_k\geq 11$ при каждом k= 1,2, ... , II, поэтому число точек в круге, равное $n_1+n_2+\dots+n_{11}-m$, не меньше II·II - II= = IIO>IOO. Получили противоречие.

Итак, если среди рассматриваемых II секторов нет сектора, содержащего ровно IO точек, то обязательно есть хотя бы один сектор, содержащий не менее II точек, и хотя бы один сектор, содержащий не более 9 точек. Начнем вращать вокруг центра круга тот сектор, в котором находятся не более 9 точек до тех пор, пока он не совместится с сектором в котором находятся не менее II точек. В каждый момент времени число точек, находящихся во вращающемся секторе, может измениться не более, чем на I. Следовательно, наступает такой момент, когда во вращающемся секторе окажутся ровно 10 точек. Утверждение пункта а) задачи доказано.

б) Вообще говоря, не верно. Разобьем круг на 10 секторов с углом $\frac{2\pi}{11}$ радиан и 10 секторов с углом $\frac{\pi}{55}$ радиан так, чтобы каждый маленький сектор находился между двумя большими. Внутри каждого маленького сектора расположим 10 точек так, чтобы никакие две из них не лежали на одном радиусе. Тогда, очевидно, в любом секторе с углом $\frac{2\pi}{11}$ радиан будут находиться не более 10 точек.

3. Пусть АВСД данный четырехугольник, O_1, O_2, O_3, O_4 – центры данных окружностей, r_1, r_2, r_3, r_4 – их радиусы, K_i, L_i, M_i, N_i $(i=1,2)$, – точки касания окружностей со сторонами четырехугольника (рис. 6). Так как в четырехугольник АВСД можно вписать окружность, то

АВ + СД = ВС + АД.

По свойству касательных к окружности $AK_1 = AN_2$, $BK_2 = BL_1$, $CL_2 = CM_1$, $DM_2 = DN_1$.

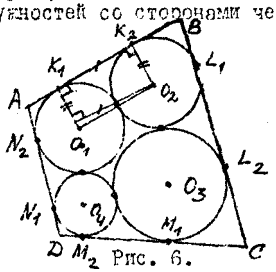


Рис. 6.

Следовательно,

$K_1K_2 + M_1M_2 = L_1L_2 + N_1N_2$. Так как $K_1O_1 = r_1$, $K_2O_2 = r_2$, $O_1O_2 = r_1 + r_2$, то (см. рис.6)

$K_1K_2 = \sqrt{O_1O_2^2 - (K_1O_1 - K_2O_2)^2} = \sqrt{(r_1+r_2)^2 - (r_1-r_2)^2} = 2\sqrt{r_1r_2}$.

Аналогично находим, что $L_1L_2 = 2\sqrt{r_2r_3}$, $M_1M_2 = 2\sqrt{r_3r_4}$, $N_1N_2 = 2\sqrt{r_1r_4}$ и, значит, $2\sqrt{r_1r_2} + 2\sqrt{r_3r_4} = 2\sqrt{r_2r_3} + 2\sqrt{r_1r_4}$, или $(\sqrt{r_1} - \sqrt{r_3})(\sqrt{r_2} - \sqrt{r_4}) = 0$.

Отсюда следует, что либо $r_1 = r_3$, либо $r_2 = r_4$, т.е. по крайней мере две из данных окружностей равны.

4. а) В силу правила построения троек достаточно доказать, что ни на каком шаге не может появиться тройка, в которой хотя бы одно из чисел по модулю равно 1. Заметим, что, поскольку, все числа в исходной тройке рациональные, при описанном способе построения троек могут получиться только такие тройки, в которых все числа рациональные. Предположим, что на некотором шаге из тройки (а,в,с) получена тройка (А,В,С), в которой од-

но из чисел A, B или C по модулю равно I. Пусть, например, $|A|=1$. Тогда выполняется одно из равенств $\frac{2a}{a^2-1}=1$ или $\frac{2a}{a^2-1}=-1$, т.е. число a является корнем уравнения $t^2-2t-1=0$ или уравнения $t^2+2t-1=0$. Получили противоречие, поскольку корни указанных уравнений являются иррациональными числами, а число a, как отмечалось, рациональное. Утверждение пункта а) задачи доказано.

б) <u>Ответ</u> : не может.

Докажем, что если числа a, в, c по модулю не равны I и удовлетворяют равенству a + в + c = авс, то выполняется равенство $\frac{2a}{a^2-1}+\frac{2b}{b^2-1}+\frac{2c}{c^2-1}=\frac{2a}{a^2-1}\cdot\frac{2b}{b^2-1}\cdot\frac{2c}{c^2-1}$. (I)
Иными словами, если в некоторой тройке сумма чисел равна их произведению, то этим же свойством обладает и тройка, полученная из нее по указанному в условии задачи правилу.

Приведем левую часть равенства (I) к общему знаменателю. Числитель получившейся дроби будет равен P (a, в, c) =
$$=2a(b^2-1)(c^2-1)+2b(a^2-1)(c^2-1)+2c(a^2-1)(b^2-1)=2a(b^2c^2-b^2-c^2+1)+$$
$$+2b(a^2c^2-a^2-c^2+1)+2c(a^2b^2-a^2-b^2+1)=2(a+b+c)+2abc(ab+bc+ac)-$$
$$-2a(b^2+c^2)-2b(a^2+c^2)-2c(a^2+b^2).$$
Так как a + в + c = авс, то $abc(ab+bc+ac)=(a+b+c)(ab+bc+ac)=$ $=3abc+a(b^2+c^2)+b(a^2+c^2)+c(a^2+b^2)$ и поэтому $P(a,b,c)=8abc$. Следовательно, левая часть равенства (I) равна $\frac{8abc}{(a^2-1)(b^2-1)(c^2-1)}$ т.е. равна правой части.

Так как для исходной тройки ($\frac{1}{2}$, 3, 7) сумма чисел $\frac{1}{2}+3+7$ равна их произведению $\frac{1}{2}\cdot3\cdot7$, то из доказанного утверждения следует, что у получающейся из нее по указанному правилу тройки, а также у всех последующих троек, сумма чисел равна их произведению. Предположим теперь, что на некотором шаге получилась тройка (x, y, z), для которой выполняется равенство $x+y+z=0$. Тогда выполняется также равенство $xyz=0$ т.е. хотя бы одно из чисел, входящих в тройку, равно нулю. Очевидно, однако, что если в исходной тройке нет нуля, то он не появится ни на каком шаге. Получили противоречие. Следовательно, тройка (x, y, z), для которой $x+y+z=0$, не может появиться ни на каком шаге.

Решения задач для II-го класса

Первый день

I. Отложим какую-нибудь монету, а из оставшихся 24 монет выберем произвольным образом I2 и положим их на одну из чашек весов, остальные I2 монет положим на другую чашку.

Если весы уравновесятся, то отложенная монета является фальшивой, а на каждой чашке весов лежит ровно по одной фальшивой монете. Снимем монеты с одной из чашек и переложим на неё какие-нибудь 6 монет с другой чашки. Тогда на той чашке, которая перетянет, будут лежать 6 настоящих монет, а на другой - 5 настоящих монет и одна фальшивая.

Предположим теперь, что при первом взвешивании одна из чашек весов перевесила. Тогда на этой чашке находится не более одной фальшивой монеты. Снимем монеты с другой чашки весов и переложим на неё какие-нибудь 6 монет с первой чашки. Если весы уравновесятся, то на каждой чашке находятся 6 настоящих монет (таким образом, в этом случае с помощью двух взвешиваний можно найти даже I2 настоящих монет). Если же какая-то чашка весов перетянет, то на ней лежат 6 настоящих монет, а на другой чашке - 5 настоящих и одна фальшивая.

2. Докажем, что справедливо неравенство $a\cos A+b\cos B\leq c$, причем равенство имеет место только, если $a=b$. Так как $c=a\cos B+b\cos A$, то это неравенство равносильно неравенству $a\cos A+b\cos B\leq a\cos B+b\cos A$, или $(a-b)(\cos A-\cos B)\leq 0$. Последнее неравенство справедливо, поскольку в треугольнике против большей стороны лежит больший угол, а функция $\cos x$ является монотонно убывающей на отрезке $[0;\pi]$. Ясно также, что равенство возможно только при $a=b$.

Аналогично доказывается, что справедливы неравенства

$a\cos A+c\cos C\leq b$ и $b\cos B+c\cos C\leq a$.

Складывая почленно эти неравенства и неравенство $a\cos A+b\cos B\leq c$, получаем требуемое неравенство. Равенство имеет место только для равностороннего треугольника.

Замечание. Можно показать, что левая часть данного неравенства представляет собой периметр треугольника с вершинами в основаниях высот данного треугольника, а правая часть, очевидно, - периметр треугольника, образованного средними линиями данного треугольника. Доказанное утверждение, следовательно, вытекает из задачи Шварца: докажите, что из всех треугольников, вписанных в данный треугольник, наименьший периметр имеет ортотреугольник.

3. Составим куб 2 x 2 x 2 произвольным образом. Пусть на его поверхности оказалось m белых и n черных квадратов I x I (будем называть их видимыми). Тогда $m+n=24$ и число $d=m-n$ четно. Если $d=0$, то задача решена. Покажем, что если $d \neq 0$, то поворотами кубиков I x I x I можно добиться того, что d станет равным нулю. Действительно, нетрудно проверить, что справедливы следующие утверждения:

I) После поворота любого кубика I x I x I на 90° вокруг прямой, соединяющей центры его противоположных граней, ровно I невидимый квадратик становится видимым и, соответственно, I видимый квадратик становится невидимым. Число d при этом либо вовсе не изменяется, либо изменяется на 2.

2) Для каждого кубика I x I x I можно указать 3 таких последовательных поворота, после выполнения которых все его видимые грани станут невидимыми, а все невидимые - видимыми.

Если с каждым из 8 кубиков I x I x I проделать по 3 поворота, указанных в пункте 2), то число d изменит свой знак. Таким образом, после одного из поворотов число d равно нулю, что и требовалось доказать.

4. Пусть C - искомая точка, P - точка пересечения прямых AB и l, A_1 и B_1 - точки, симметричные точкам A и B относительно прямой l (рис. 7). Тогда углы $\angle CB_1A_1$ и $\angle CBA$ равны. Обозначим $\alpha = \angle CB_1A_1$. По условию $DE \perp AB$, по построению $\angle A_1PA = 2\angle CPA = 90°$, поэтому $A_1B_1 \parallel DE$.

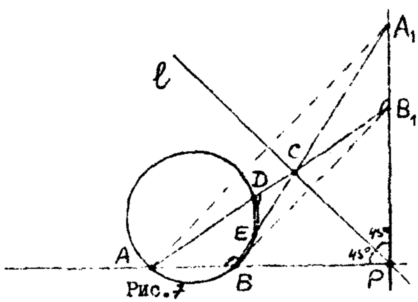
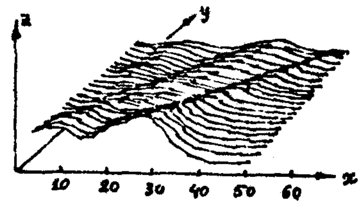


Рис. 7

Покажем, что $\angle CDE = \alpha$. Действительно, $\angle CDE = 180° - \angle ADE$. Так как четырёхугольник $ABED$ - вписанный, то $\angle ADE + \angle ABE = 180°$. Следовательно, $\angle CDE = \angle ABE = \alpha$. Таким образом, $DE \parallel A_1B_1$ и $\angle CDE = \angle CB_1A_1$. Отсюда следует, что точка B_1 лежит на прямой DC. Действительно, если прямая DC пересекает прямую A_1P в точке B_2, отличной от B_1, то $\angle CB_2A_1 = \angle CDE = \angle CB_1A_1$, что невозможно по свойству внешнего угла треугольника.

Итак, точка B_1 лежит на прямой DC, как и точка A. Следовательно, точка C является точкой пересечения прямых ℓ и AB_1. Прямая AB_1 может быть построена с помощью циркуля и линейки.

МИНИСТЕРСТВО
НАРОДНОГО ОБРАЗОВАНИЯ РСФСР



16-АЯ ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ПО МАТЕМАТИКЕ

IУ этап

Второй день

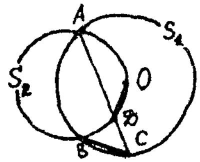
1990г.

4 этап. 1990. 9-ый класс

5. Найдите все положительные значения a, для которых оба корня уравнения $a^2x^2+ax+1-7a^2=0$ являются целыми числами.

6. Из квадрата $n \times n$ вырезана одна угловая клетка IxI. На какое наименьшее число равновеликих треугольников можно разрезать получившуюся фигуру ?

7. Окружности S_1 и S_2 пересекаются в точках А и В, центр O окружности S_1 лежит на окружности S_2 (см. рис.). Хорда АС окружности S_1 пересекает окружность S_2 в точке Д. Докажите, что отрезки ОД и ВС перпендикулярны.



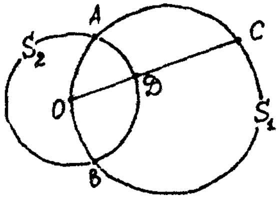
8. Среди сторон и диагоналей выпуклого пятиугольника АВСДЕ нет параллельных отрезков. На стороне АВ рисуется стрелка, направленная в сторону точки пересечения прямых АВ и СЕ. На стороне ВС рисуется стрелка, направленная в сторону точки пересечения прямых ВС и АД. Аналогичным образом рисуются стрелки на сторонах СД, ДЕ, ЕА. Докажите, что в сторону одной из вершин пятиугольника направлены две из нарисованных стрелок.

4 этап. 1990. 10-ый класс

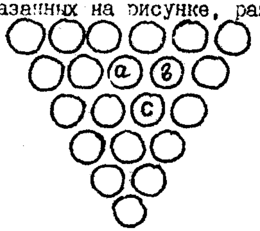
Второй день

5. На доске написаны несколько положительных чисел таких, что сумма всех их попарных произведений равна 1. Докажите, что можно стереть одно число так, что сумма оставшихся чисел будет меньше $\sqrt{2}$.

6. Окружности S_1 и S_2 пересекаются в точках А и В, причём центр О окружности S_2 лежит на окружности S_1 (см. рис.). Хорда ОС пересекает окружность S_2 в точке Д. Докажите, что точка Д является точкой пересечения биссектрис треугольника АВС.



7. Можно ли в кружочках, показанных на рисунке, разместить натуральные числа от 1 до 21 так, чтобы в любой строке, кроме первой, каждое число было равно модулю разности двух стоящих над ним чисел (т.е. $c=|a-b|$)?



8. Даны n векторов, обладающих следующим свойством: для некоторого натурального p модуль суммы любых p из данных векторов равен модулю суммы остальных $n-p$ векторов.

а) Докажите, что если $p \neq \frac{n}{2}$, то сумма всех данных векторов равна нулю.

б) Верно ли, что сумма всех данных векторов равна нулю, если $p = n/2$?

4 этап. 1990. II-ый класс

Второй день

5. Найдите все натуральные числа x, y, удовлетворяющие уравнению $7^x - 3\cdot 2^y = 1$.

6. Точки Д и Е лежат на сторонах АВ и ВС треугольника АВС, точки К и М делят отрезок ДЕ на три равные части. Прямые ВК и ВМ пересекают сторону АС в точках Т и Р. Докажите, что $TP \leqslant AC/3$.

7. Дана пирамида с вершиной S и высотой SM. Радиусы сфер, описанных около тетраэдров $SMAB$, $SMBC$, $SMCД$, где А, В, С, Д - вершины многоугольника, лежащего в основании пирамиды, равны. Можно ли утверждать, что данная пирамида правильная, если её основанием является:

а) квадрат АВСД ?

б) правильный пятиугольник АВСДЕ ?

8. В клетках прямоугольной таблицы записаны положительные числа. Для каждой строки находится сумма всех записанных в ней чисел, а затем вычисляется произведение Р всех таких сумм. Докажите, что если в каждом столбце переставить числа по неубыванию так, чтобы наименьшее число стояло в первой строке, а наибольшее - в последней, то произведение Р для новой таблицы не будет превосходить первоначальное значение.

РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ДЛЯ ДЕВЯТОГО КЛАССА

Второй день

9.5. Ответ: $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}$.

Необходимым условием существования корней данного уравнения является условие неотрицательности его дискриминанта. В рассматриваемом случае получаем неравенство $a^2-4a^2(1-7a^2)\geqslant 0$, из которого следует, что $\frac{1}{a^2}\leq\frac{28}{3}$, $\frac{1}{a}\leq\sqrt{\frac{28}{3}}$ (напомним, что $a>0$). По теореме Виета сумма корней уравнения равна $-1/a$. Так как корни – целые числа, то $-1/a$ – целое число. Так как $a>0$, то $1/a$ – натуральное число. Единственными натуральными числами $1/a$, удовлетворяющими найденному выше неравенству $\frac{1}{a}\leq\sqrt{\frac{28}{3}}$, являются числа I,2,3. Таким образом, искомые значения a принадлежат множеству $\{1; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}\}$.

Проверкой убеждаемся, что значения $a=1$, $a=1/2$, $a=1/3$ удовлетворяют условию задачи.

9.6. Ответ: $2(n+1)$.

Рассмотрим треугольники, имеющие общие точки с границей AB + BC (см. рис. 8) выреза IxI. Хотя бы у одного такого треугольника имеется сторона, длина которой не больше I, а высота, опущенная на эту сторону, имеет длину не больше $n-1$. Поэтому площадь такого треугольника не превосходит $(n-1)/2$.

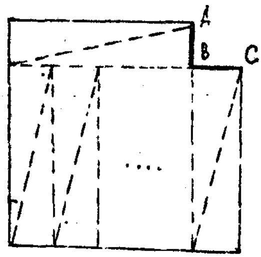


Рис. 8

По условию задачи все треугольники равновелики. Если S – их площади, N – их число, то $N\cdot S=n^2-1$, т.е. $S=\frac{n^2-1}{N}$. Так как в силу доказанного выше справедливо неравенство $S\leq\frac{n-1}{2}$, то получаем неравенство $\frac{n^2-1}{N}\leq\frac{n-1}{2}$. Отсюда следует, что $N\geqslant 2(n+1)$, т.е. искомое наименьшее число треугольников не меньше $2(n+1)$.

Равенство $N=2(n+1)$ легко реализуется: см. разбиение на рис. 8 . Следовательно минимум N равен $2(n+1)$.

9.7. Обратимся к ситуации, изображённой на рис. 9 . Проведём отрезки AB, OB и OC. Углы BAД и BOД равны, так как вписаны в окружность S_2 и опираются на хорду BД. С другой стороны $\angle$BAД = $\angle$BAC = $\frac{1}{2}\cdot\angle$BOC, поскольку угол BAC вписан в окружность S_1 и опирается на хорду BC, а угол BOC является центральным в этой же окружности и опирается на ту же хорду BC.

Отсюда $\angle$ BOД = $\angle$ BAД = $\angle$ BAC = $\frac{1}{2}\cdot\angle$BOC. Так как $\angle$BOД +

$+\angle ДОС = \angle BOC$, а $\angle BOД = \frac{1}{2}\angle BOC$, то $\angle ДОС = \frac{1}{2}\angle BOC$, т.е. $\angle BOД = \angle ДОС$. Следовательно ОД – биссектриса в равнобедренном треугольнике ВОС (ибо ВО = ОС), а отсюда следует, что $ОД \perp BC$.

Случай, изображённый на рис. 10 рассматривается аналогично. В этом случае $\angle ДОВ = 180^\circ - \angle ДАВ$, $\angle ДАВ = \angle CAB = \frac{1}{2}\angle BOC$, и поэтому $\angle ДОС = 360^\circ - \angle ДОВ - \angle BOC = 360^\circ - (180^\circ - \angle ДАВ) - 2\cdot\angle ДАВ = 180^\circ - \angle ДАВ$. Мы видим, что $\angle ДОВ = \angle ДОС$, т.е. ДО – биссектриса угла ВОС. А так как ОВ = ОС, то отсюда следует, что $ДО \perp BC$.

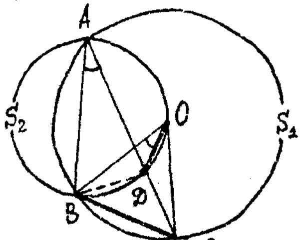


Рис. 9

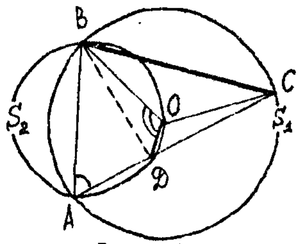


Рис. 10

9.8. Рассмотрим пять треугольников, вершинами которых являются тройки последовательных вершин пятиугольника. Среди них имеется треугольник наименьшей площади (таких треугольников может быть и несколько). Возьмём один такой треугольник. Пусть, для определённости, это будет треугольник АВС (см. рис. 11).

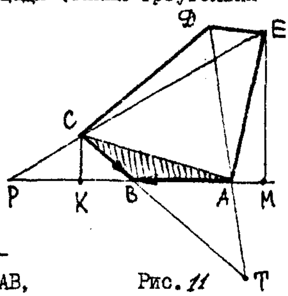


Рис. 11

Покажем, что в сторону вершины В направлены две из нарисованных стрелок.

Опустим из точек С и Е перпендикуляры СК и ЕМ на прямую АВ. Поскольку $S_{ABC} \le S_{ABE}$, то $\frac{1}{2}\cdot CK\cdot AB \le \frac{1}{2}\cdot EM\cdot AB$, т.е. $CK \le EM$. Равенство СК = ЕМ не может иметь место: при СК = ЕМ прямая СЕ была бы параллельна прямой АВ, что противоречит условию задачи. Следовательно $CK < EM$. А это значит, что прямые ЕС и АВ пересекаются в точке Р, лежащей на продолжении АВ за точку В, т.е. стрелка на АВ направлена в сторону В.

Аналогично из неравенства $S_{ABC} \le S_{BCД}$ и условия задачи получаем, что прямые ДА и СВ пересекаются в точке Т, лежащей на продолжении СВ за точку В, т.е. стрелка на СВ направлена в сторону точки В.

РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ДЛЯ ДЕСЯТОГО КЛАССА

Второй день

10.5. Покажем, что если с доски стереть наибольшее из написанных чисел (одно из наибольших, если таковых чисел несколько), то сумма оставшихся чисел будет меньше $\sqrt{2}$.

Пусть x_1 – наибольшее из написанных чисел $x_1, x_2, \dots, x_n$. Тогда

$$(x_2+x_3+\dots+x_n)^2 = x_2^2+x_3^2+\dots+x_n^2 + 2x_2(x_3+\dots+x_n) + \\ +2x_3(x_4+\dots+x_n) + \dots + 2x_{n-1}x_n . \qquad (1)$$

Так как $x_k^2 \le x_k x_1 < 2x_k x_1$, то оценив квадраты в правой части равенства (1), получаем неравенство

$$(x_2+x_3+\dots+x_n)^2 < 2x_1(x_2+\dots+x_n) + 2x_2(x_3+\dots+x_n) + \dots + 2x_{n-1}x_n =$$

=(удвоенная сумма всех попарных произведений чисел $x_1, x_2, \dots, x_n$)= 2. Следовательно $(x_2+x_3+\dots+x_n)^2 < 2$, т.е. $x_2+x_3+\dots+x_n < \sqrt{2}$.

10.6. Рассмотрим ситуацию, изображённую на рис. 12.

Проведём отрезки АС, АД, АВ и ОВ. Докажем, что АД – биссектриса угла ВАС. Действительно, углы ВОС и ВАС равны как вписанные в окружность S_1 и опирающиеся на одну и ту же хорду ВС. С другой стороны $\angle ВАД = \frac{1}{2}\cdot\angle ВОД$, ибо угол ВОД является центральным в окружности S_2, опирающимся на хорду ВД, а угол ВАД вписан в S_2 и опирается на ту же хорду. Следовательно $\angle ВАД = \frac{1}{2}\cdot\angle ВОД = \frac{1}{2}\cdot\angle ВАС = \angle ДАС$, т.е. АД – биссектриса треугольника АВС.

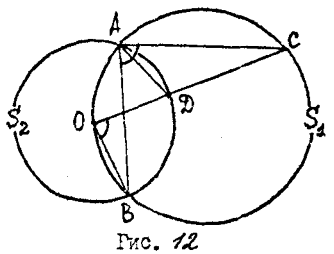


Рис. 12

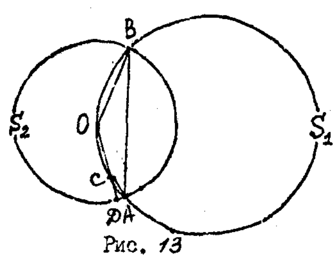


Рис. 13

Заменив в предыдущих рассуждениях точку А на точку В, точно так же доказываем, что ВД – биссектриса треугольника АВС. Отсюда следует, что Д – точка пересечения биссектрис треугольника АВС.

В ситуации, изображённой на рис. 13, доказательство осуществляется аналогичным образом.

10.7. Ответ: нельзя.

Предположим, что существует требуемое размещение чисел от I до 2I. Покажем, что тогда сумма всех записанных в кружочках чисел должна быть чётным числом. Эта сумма равна сумме восемнадцати чисел, записанных в кружочках шести треугольников, указанных на рис. 14 , и трёх чисел x, y, z .

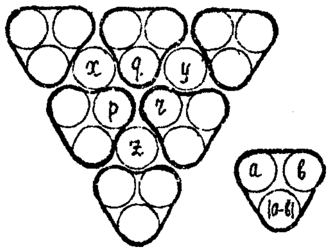


Рис. 14

Сумма трёх чисел, записанных в произвольном треугольнике, вида, указанного выше, всегда чётна, поскольку

$$a+b+|a-b| = \begin{cases} 2a, & \text{если } a \geqslant b, \\ 2b, & \text{если } a \leqslant b. \end{cases}$$

Чётной будет и сумма $x+y+z$. Действительно (см. рис.), число $x+y+z = (x+p+q) - (p+q) + (y+q+r) - (q+r) + (z+r+p) - (r+p) = (x+p+q) + (y+q+r) + (z+r+p) - 2(p+q+r)$ равно сумме чётных чисел.

Итак, сумма всех записанных в кружочках чисел равна сумме чётных чисел, равных суммам чисел, записанных в кружочках шести выделенных на рис. треугольников, и чётного числа $x+y+z$, т.е. является чётным числом.

С другой стороны эта сумма равна $I+2+3+\ldots+2I = 23I$, т.е нечётна. Пришли к противоречию.

10.8. а) Пусть $\overline{a}_1, \overline{a}_2, \ldots, \overline{a}_n$ – данные векторы, $\overline{u} = \overline{a}_1 + \overline{a}_2 + \ldots + \overline{a}_n$ – их сумма. Предположим, что $\overline{u} \neq \overline{0}$. Отложив от некоторой точки A вектор $\overline{u}$, обозначим конечную точку полученного вектора через B. Поскольку $\overline{u} \neq \overline{0}$, то точки а A и B не совпадают.

Пусть $\overline{a}_{i_1}, \overline{a}_{i_2}, \ldots, \overline{a}_{i_p}$ – некоторые p векторов из $\overline{a}_1, \overline{a}_2, \ldots, \overline{a}_n$. Пусть $\overrightarrow{AC} = \overline{a}_{i_1} + \overline{a}_{i_2} + \ldots + \overline{a}_{i_p}$. Тогда вектор $\overrightarrow{CB}$ равен сумме остальных $(n-p)$ векторов из $\overline{a}_1, \ldots, \overline{a}_n$.

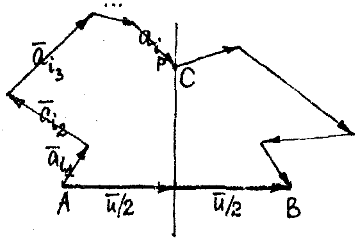


Рис. 15

В силу условия задачи $|\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{CB}|$. Это значит, что точка C лежит на серединном перпендикуляре к отрезку AB (см. рис. 15). Обозначим через $\overline{v}$ некоторый ненулевой вектор, перпендикулярный к $\overline{u}$.

Поскольку точка C лежит на серединном перпендикуляре к AB, то справедливо равенство

$$\bar a_{i_1}+\bar a_{i_2}+\ldots+\bar a_{i_p}=\frac{\bar u}{2}+k\bar v, \quad (I)$$

k – некоторое число (зависящее, вообще говоря, от набора номеров $i_1,i_2,\ldots,i_p$). Точно так же для набора $\bar a_{i_2},\bar a_{i_3},\ldots,\bar a_{i_p},\bar a_j$ из р векторов имеем равенство

$$\bar a_{i_2}+\bar a_{i_3}+\ldots+\bar a_{i_p}+\bar a_j=\frac{\bar u}{2}+\ell\bar v,$$

ℓ – некоторое число (также зависящее, вообще говоря, от набора номеров $i_2,\ldots,i_p,j$). Вычитая полученные равенства, получаем равенство $\bar a_j-\bar a_{i_1}=(\ell-k)\bar v$, справедливое для любых номеров j и i_1 . Это значит, что разности $\bar a_j-\bar a_i$ коллинеарны вектору $\bar v$, при любых i,j . Полагая $i=1$, $j=2,\ldots,n$, запишем соответствующие равенства: $\bar a_2=\bar a_1+\alpha_2\bar v$, $\bar a_3=\bar a_1+\alpha_3\bar v$, $\ldots$, $\bar a_n=\bar a_1+\alpha_n\bar v$. Сложив эти равенства с вектором $\bar a_1$, получаем равенство

$$\bar a_1+\bar a_2+\ldots+\bar a_n=\bar u=n\bar a_1+\beta\bar v \quad (2)$$

где $\beta=\alpha_2+\alpha_3+\ldots+\alpha_n$.

С другой стороны (см. (I))

$$\bar a_1+\bar a_2+\ldots+\bar a_p=\frac{\bar u}{2}+m\bar v, \quad (3)$$

т.е. $\bar u=2(\bar a_1+\ldots+\bar a_p)-2m\bar v=2p\bar a_1+q\bar v$.

Сравнивая (2) и (3) и пользуясь единственностью разложения вектора на плоскости по двум неколлинеарным векторам, получаем равенство $n=2p$, что противоречит условию задачи. Следовательно, вектор $\bar u=\overrightarrow{AB}$ не может быть отличен от нуля.

б) При $p=n/2$ сумма $\bar u$ всех данных векторов может быть отлична от нуля. Рассмотрим на плоскости некоторую прямую ℓ, возьмём на ней точку О. Отложим от этой точки по одну сторону от прямой ℓ векторы $\bar a_1,\bar a_2,\ldots,\bar a_p$, а по другую- векторы $\bar a_n,\bar a_{n-1},\ldots,\bar a_{p+1}$, такие, что векторы $\bar a_j$ и $\bar a_{n-j+1}$ симметричны относительно прямой ℓ , $1\le j\le p$. Кроме того, векторы $\bar a_1,\bar a_2,\ldots,\bar a_p$ возьмём так, чтобы их концы лежали на прямой m , перпендикулярной ℓ и не проходящей через О. Тогда $\bar a_j+\bar a_{n-j+1}=\bar d$, $1\le j\le p$, вектор $\bar d$ параллелен ℓ , $\bar d\ne\bar 0$. Ясно, что $\bar a_1+\ldots+\bar a_n=p\bar d\ne\bar 0$.

Покажем, что $|\bar a_{i_1}+\bar a_{i_2}+\ldots+\bar a_{i_p}|=|\bar u-\bar a_{i_1}-\bar a_{i_2}-\ldots-\bar a_{i_p}|$, каковы бы ни были номера $i_1,i_2,\ldots,i_p$.

Действительно, пусть $\bar S_1=\bar a_{i_1}+\bar a_{i_2}+\ldots+\bar a_{i_p}$, $\bar S_2=\bar u-\bar S_1$. В сумму $\bar S_1$ входят:

I) k пар симметричных векторов ($0\le k\le p/2$),

2) $p-2k$ векторов таких, что симметричные им вектора

входят в $\overline{S}_2$. Но тогда в $\overline{S}_2$ входят $p-2K$ "непарных" векторов, а остальные векторы входят парами (вектор и его симметричный), причём число таких векторов будет равно $p-(p-2K)=2K$, т.е. в $\overline{S}_2$ входит ровно K пар симметричных векторов. Следовательно

$$\overline{S}_1 = K\overline{d} + \overline{a}_{i_1} + \overline{a}_{i_2} + \ldots + \overline{a}_{i_{p-2K}},$$

$$\overline{S}_2 = K\overline{d} + \overline{a}_{n-i_1+1} + \overline{a}_{n-i_2+1} + \ldots + \overline{a}_{n-i_{p-2K}+1}.$$

Отсюда вытекает, что векторы $\overline{S}_1$ и $\overline{S}_2$ симметричны и $|\overline{S}_1| = |\overline{S}_2|$.

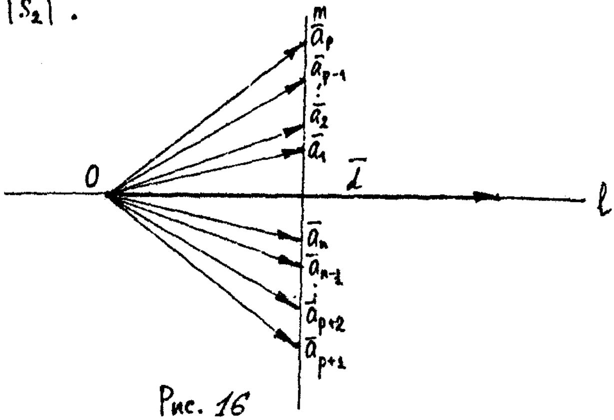


Рис. 16

РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ДЛЯ ОДИННАДЦАТОГО КЛАССА

Второй день

II.5. Ответ: (I,I) и (2,4)

Данное в условии задачи уравнение равносильно уравнению $\frac{7^x-1}{7-1} = 2^{y-1}$, или

$$7^{x-1}+7^{x-2}+\ldots+7+1 = 2^{y-1}. \qquad (I)$$

Отсюда вытекает, что $y \geq I$. Пара x=I, y=I является решением уравнения (I).

Если $y > I$, то справа в (I) стоит чётное число, а слева - сумма нечётных чисел в количестве x. Следовательно, x -чётное число. Но в этом случае уравнение (I) можно записать в виде $(7+1)(7^{x-2}+7^{x-4}+\ldots+7^2+1) = 2^{y-1}$, или

$$7^{x-2}+7^{x-4}+\ldots+7^2+1 = 2^{y-4}. \qquad (2)$$

Отсюда вытекает, что $y \geq 4$. Пара x=2, y=4 является решением уравнения (2).

При $y > 4$ справа в (2) стоит чётное число, а слева - сумма нечётных в количестве x/2. Следовательно x/2 - чётное число, т.е. x делится на 4. Но в этом случае уравнение (2) можно записать в виде $(7^2+1)(7^{x-4}+7^{x-8}+\ldots+7^4+1) = 2^{y-4}$, или

$$50\cdot(7^{x-4}+7^{x-8}+\ldots+7^4+1) = 2^{y-4}. \qquad (3)$$

Левая часть этого уравнения делится на 5, а правая - нет. Следовательно, уравнение (3) при $y > 4$ не имеет решений в натуральных числах. То же самое утверждение имеет место, очевидно, и для уравнения (2) и для уравнения, данного в условии задачи.

Итак единственными решениями данного уравнения в натуральных числах являются пары (I,I) и (2,4).

II.6. Проведём отрезки MF, KC, ДН, параллельные AC (рис. 17). Поскольку ДК=КМ=МЕ, то EF=FG=GH. Из подобия треугольников EMF, EKG и EДН следует, что KG = 2·MF, ДН = 3·MF, EG = 2·EF, EH = 3·EF.

Из подобия треугольников ИНВ и MFB получаем равенство

$$ИН = \frac{BH\cdot MF}{BF}.$$

Из подобия треугольников EHB и KGE получаем ра-

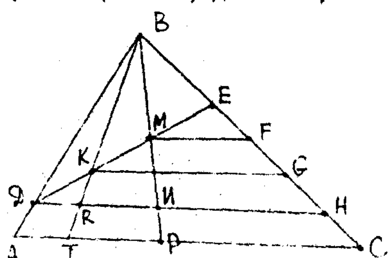


Рис. 17

венство $RH = \dfrac{BH \cdot KG}{BG}$.

Отсюда

$$RU = RH - UH = \frac{BH \cdot KG}{BG} - \frac{BH \cdot MF}{BF} = BH\left(\frac{KG}{BE+EG} - \frac{MF}{BE+EF}\right) =$$

$$= BH\left(\frac{2 \cdot MF}{BE+2 \cdot EF} - \frac{MF}{BE+EF}\right) = MF \cdot \frac{(BE+3EF) \cdot BE}{(BE+2EF) \cdot (BE+EF)}.$$

Так как $\dfrac{TP}{AC} = \dfrac{RU}{DH}$, то $\dfrac{TP}{AC} = \dfrac{MF}{3 \cdot MF} \cdot \dfrac{(BE+3 \cdot EF)BE}{(BE+2EF) \cdot (BE+EF)} =$

$$= \frac{1}{3} \; \frac{(BE)^2 + 3BE \cdot EF}{(BE)^2 + 3 \cdot BE \cdot EF + 2(EF)^2}.$$

Поскольку $(BE)^2 + 3BE \cdot EF \le (BE)^2 + 3 \cdot BE \cdot EF + 2(EF)^2$, то $\dfrac{TP}{AC} \le \dfrac{1}{3}$, причём равенство имеет место тогда и только тогда, когда $EF = 0$ (в этом случае ДЕ $\parallel$ АС).

II.7. Ответ: а) пирамида SАВСД правильная;
б) пирамида SАВСДЕ не обязана быть правильной.

Пусть O_1, O_2, O_3 – центры сфер, описанных около тетраэдров. Эти точки равноудалены от точек S и М и, значит, лежат в плоскости α, проходящей через середину отрезка SM и перпендикулярной ему. По условию SM высота пирамиды. Следовательно плоскость α параллельна плоскости основания пирамиды. Это означает, что точки O_1, O_2, O_3 равноудалены от плоскости АВС ($O_1O_1' = O_2O_2' = O_3O_3'$, где O_1', O_2', O_3' – проекции точек O_1, O_2, O_3 на плоскость АВС). По условию $O_1A = O_1B = O_1M = O_2B = O_2C = O_2M = O_3C = O_3Д = O_3M$, следовательно $O_1'A = O_1'B = O_1'M = O_2'B = O_2'C = O_2'M = O_3'C = O_3'Д = O_3'M$, т.е. O_1', O_2', O_3' – центры окружностей равного радиуса, описанных около треугольников АВМ, ВСМ и СДМ. По теореме синусов

$$\sin(\angle AMB) = \sin(\angle BMC) = \sin(\angle CMA) = \frac{AB}{2 \cdot O_1'A},$$

т.е. каждый из этих углов принимает значения α или $\pi - \alpha$, где α – некоторый угол.

а) Докажем, что точка М совпадает с точкой О, О – центр квадрата АВСД.

Пусть $\angle AMB = \angle CMД = \alpha$. Тогда точка М лежит на оси симметрии KL квадрата АВСД (рис. 18). Если $\angle BMC = \alpha$, то MK = MP (MP $\perp$ AB) и, значит , M = 0.

Если $\angle BMC = \pi - \alpha$, то точка M лежит на AC и, значит, M = 0.

Пусть теперь $\angle AMB = \angle BMC = \alpha$, $\angle CMД = \pi - \alpha$. Тогда треугольник AMB равен треугольнику CMB, т.е.точка M является точкой пересечения диагоналей квадрата, M = 0.

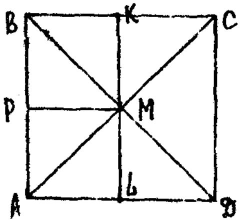


Рис. 18

Итак, всегда M центр квадрата АВСД. Это значит, что пирамида SАВСД правильная.

б) Покажем, что в этом случае пирамида SАВСДЕ не обязана быть правильной. Пусть, например, точка M - точка пересечения диагоналей AC и ВД и ВД (рис. 19). Тогда $\angle AMB = \angle CMД = \alpha$, $\angle BMC = \pi - \alpha$ и поэтому, как показано выше, радиусы сфер, описанных около данных тетраэдров, будут равны друг другу.

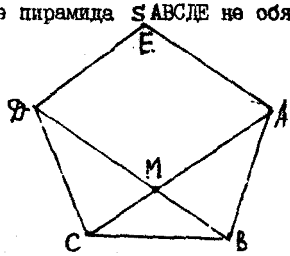


Рис. 19

II.8. Число P, очевидно, не изменяется при перестановке строк в таблице. Условимся строки таблицы нумеровать сверху вниз, а места в строке - слева направо. Также слева направо будем нумеровать столбцы таблицы.

Выберем строку с самой маленькой суммой элементов и поставим её на первое место (если таких строк несколько, то на первое место поставим любую из них).

Далее будем использовать следующую операцию: если в к-ой строке (к > I) на i-ом месте стоит число x и это число меньше числа y, стоящего в I-ой строке на том же i-ом месте, то числа x и y меняем местами.

После применения этой операции:

I) сумма элементов первой строки останется наименьшей среди сумм элементов по строкам,

2) произведение P для полученной таблица не увеличится.

Доказательство свойства I) очевидно.

Для доказательства свойства 2) введём числа: S_k - сумма элементов к-ой строки до выполнения операции, $\tilde{S}_k$ -такая же сумма элементов к-ой строки после выполнения операции, $1 \leq k \leq n$.

Так как $\tilde{S}_1 = S_1 - y + x$, $\tilde{S}_k = S_k + y - x$, то

$$S_1 S_k - \tilde{S}_1 \tilde{S}_k = S_1 S_k - (S_1 - y + x)(S_k + y - x) =$$

$$= (y-x)(S_k - S_1) + (x-y)^2 \geq 0$$

поскольку $y > x$, $S_k \geq S_1$. Но тогда $P = S_1 S_2 \ldots S_n \geq \geq \tilde{P} = \tilde{S}_1 S_2 \ldots S_{k-1} \tilde{S}_k S_{k+1} \ldots S_n$, т.е. число P не увеличивается.

Применим описанную операцию ко всем элементам таблицы. При этом сумма S_1 останется наименьшей, а число P не увеличится. После конечного числа применений этой операции будет получена таблица, у которой самый маленький элемент каждого столбца стоит в первой строке.

Зафиксировав первую строку и более не трогая её, аналогичным образом преобразуем таблицу, составленную 2-ой, 3-ей,... n-ой строками. Вновь преобразуем её к таблице, в которой самый маленький элемент каждого столбца стоит во второй строке. И т.д. В конце концов, применив операцию конечное число раз, мы упорядочим элементы каждого столбца по неубыванию сверху вниз и придём к таблице, о которой говорится в условии задачи. При этом число P не увеличится, так как всякий раз выполняется свойство 2).

Заметим в заключение, что способов получения итоговой таблицы много, но сама итоговая таблица определяется однозначно.

Тип. ЦШУУ Зак.62 Тир.450