logique et REPRÉSENTATION des connaissances

Compte-rendu du sixième TME : à l'assaut de la logique épistémique sous LoTREC.

21 novembre 2019

E/////// D////////, L/////// S///////

Vérification de formules dans la logique S5-minimale

Pour chaque formule, on utilise la génération automatique de prémodèles sous la logique S5-minimale.
Il est nécessaire de l'avoir donnée sous sa forme normale conjonctive (les seuls opérateurs permis étant *and* et *not*).

$Kp \rightarrow \neg K\neg Kp \equiv \neg Kp \vee \neg K\neg Kp \equiv \neg(Kp \wedge K\neg Kp) \equiv$ not and nec P nec not nec P
est satisfiable et de plus valide. Son arbre a toutes ses feuilles ouvertes, celui de sa négation, toutes ses feuilles fermées.

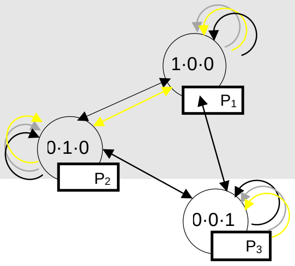
$Kp \wedge KK\neg p \equiv$ and nec P nec nec not P est insatisfiable. L'arbre construit a toutes ses feuilles fermées.

$Kp \rightarrow KK\neg p \equiv \neg Kp \vee KK\neg p \equiv \neg(Kp \wedge \neg KK\neg p) \equiv$ imp nec P nec nec not P
est satisfiable sans être valide : l'arbre construit a toutes ses feuilles ouvertes, mais celui de sa négation en a aussi.

Trois dames dans l'escalier

Soit (1,0,0) le monde où c'est un fait que *A a le papillon sur la tête*, ce qu'on note P1.
Les autres mondes et faits possibles sont déclinés sur le même modèle.
Pour travailler en logique S5, il est obligatoire de créer les arcs de réflexivité,
et de garder en tête que les relations ajoutées devront être symétriques.

↓ Trois femmes dans l'escalier. Chacune peut surveiller les crânes perchés sur toutes les marches qui suivent la sienne. Ci-dessus, les relations d'accessibilité entre les mondes, selon chacune des trois agentes : A en gris, B en jaune, C en noir. Ici, les faits sont strictement différents selon les mondes, donc, plus les mondes accessibles sont nombreux, moins un agent a de certitudes.



1

edit rule: ExampleofModelandFormula ≫

createNewNode (1,0,0)
createNewNode (0,1,0)
createNewNode (0,0,1)
} trois mondes possibles

link (1,0,0) (1,0,0) A
link (1,0,0) (1,0,0) B
link (1,0,0) (1,0,0) C
link (0,1,0) (0,1,0) A
link (0,1,0) (0,1,0) B
link (0,1,0) (0,1,0) C
link (0,0,1) (0,0,1) A
link (0,0,1) (0,0,1) B
link (0,0,1) (0,0,1) C
} relations de réflexivité

link (1,0,0) (0,1,0) B
link (0,1,0) (1,0,0) B
} hésitation ponctuelle de B

link (1,0,0) (0,1,0) C
link (0,1,0) (1,0,0) C
link (1,0,0) (0,0,1) C
link (0,0,1) (1,0,0) C
link (0,1,0) (0,0,1) C
link (0,0,1) (0,1,0) C
} hésitation généralisée de C

add (1,0,0) P1
add (0,1,0) P2
add (0,0,1) P3
} faits réels : position du papillon

add w isItTrue φ, etc.

≫ click: Build Premodels

On se rend compte sur le schéma que A n'a pas d'incertitudes (sa relation d'accessibilité ne comporte rien d'autre que les relations de réflexivité minimales). Elle sait exactement où se trouve le papillon, ce qui revient à être omnisciente. Elle est la seule. Les autres hésitent.

Vérifier une formule φ dans tous les mondes d'un modèle, c'est ajouter un isItTrue φ à tous les nœuds existants. Elle sera toujours vraie dans ce modèle si et seulement si tous les nœuds créés portent la mention [Yes] après son évaluation.

2

→ φ_1 : est-il vrai que *A peut toujours savoir si elle a le papillon sur la tête ?*

$\equiv \mathcal{M} \vDash K_A P_1 \vee K_A \neg P_1$ ≡ ≡ ≡ ≡ ≡ ≡ ≡ $\forall w \in \mathcal{M}$, isItTrue or nec A P1 nec A not P1 = [Yes]
et les trois isItTrue sont toutes positives : φ_1 est donc bien toujours vraie.

→ φ_2 : est-il vrai que *C ne peut jamais savoir si elle a le papillon sur la tête ?*

$\equiv \mathcal{M} \vDash \neg(K_C P_3 \vee K_C \neg P_3)$ ≡ ≡ ≡ ≡ ≡ ≡ ≡ $\forall w \in \mathcal{M}$, isItTrue not or nec C P3 nec C not P3 = [Yes]
et les trois isItTrue sont toutes positives : φ_2 est donc bien toujours vraie.

3

→ φ_3 : *B peut-elle savoir si elle a le papillon sur la tête ?* Peut-on en déduire que c'est le cas *si C a le papillon sur la tête ?*

$\equiv \exists w \in \mathcal{M} \mid \mathcal{M}, w \vDash K_B P_2 \vee K_B \neg P_2$ ≡ ≡ ≡ $\exists w \in \mathcal{M}$ | isItTrue or nec B P2 nec B not P2 = [Yes].
Il suffit qu'il existe une possibilité, donc qu'au moins un monde réponde [Yes] à la question.
Comme c'est le cas du monde (0,0,1), φ_3 est vraie. Aussi, ce monde (0,0,1) est celui où C a le papillon sur la tête (P_3), d'où la déduction $\mathcal{M} \vDash \varphi_4 : P_3 \rightarrow K_B P_2 \vee K_B \neg P_2$.
Pour les autres mondes, cette même formule φ_4 est bien sûr vraie ex falso.

→ *φ_5 : est-il vrai que A sait que C ne sait pas si elle a un papillon sur la tête ?*

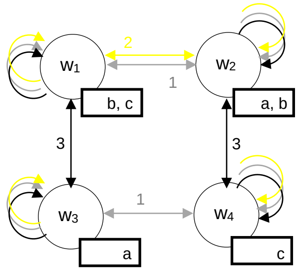
$\mathcal{M} \vDash K_A(\neg(K_C P_3 \vee K_C \neg P_3))$ ≡ ≡ ≡ ≡ ≡ ≡ $\forall w \in \mathcal{M}$, isItTrue nec A not or nec C P3 nec C not P3 = [Yes]
et les trois isItTrue sont toutes positives : φ_5 est donc bien toujours vraie.

→ *φ_6 : est-il vrai que quand B sait si elle a le papillon sur la tête, alors A sait qu'elle le sait ?*

$\mathcal{M} \vDash (K_B P_2 \vee K_B \neg P_2) \rightarrow K_A(K_B P_2 \vee K_B \neg P_2)$
≡ $\forall w \in \mathcal{M}$, isItTrue or not or nec B P2 nec B not P2 nec A or nec B P2 nec B not P2 = [Yes]
Trois isItTrue positives, donc φ_6 est vraie : A est encore une fois au courant de ce qui se passe.

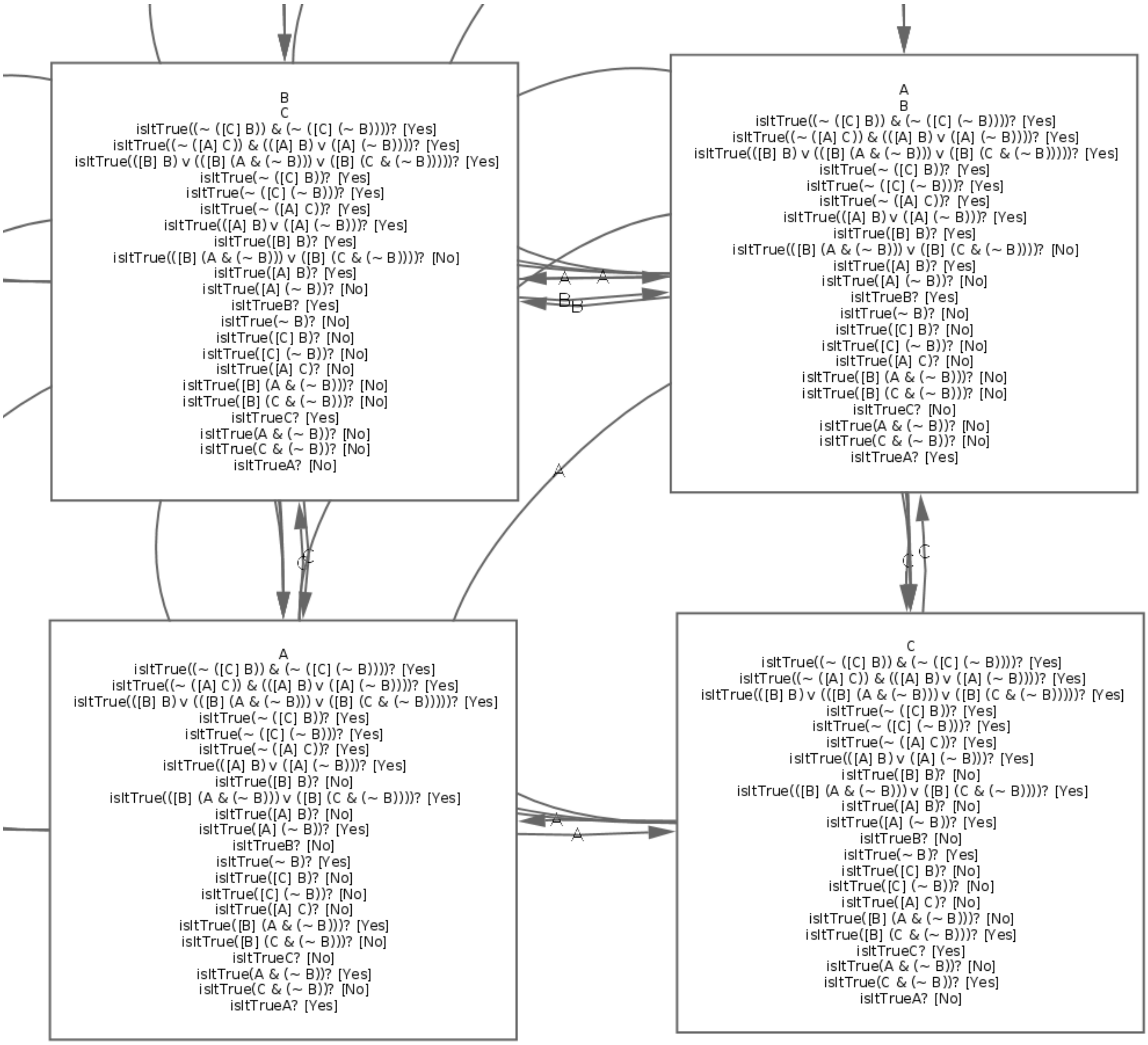
Définition d'un modèle

Le modèle $\mathcal{M}$ ci-contre a été complété avec les relations d'accessibilité de trois agents : 1 en gris, 2 en jaune, 3 en noir. Garder en tête que toute relation ajoutée doit être symétrique et assurer la transitivité sur $\mathcal{M}$: l'existence d'un chemin indirect entre w et w' nécessite d'avoir aussi créé un chemin direct. $\mathcal{M}$ vérifie désormais :



$\mathcal{M} \vDash \neg K_1 c \wedge (K_1 b \vee K_1 \neg b)$ (dans chaque monde, 1 a au moins un monde accessible où ¬c, et tous les mondes accessibles sont accordés sur la situation de b),
$\mathcal{M} \vDash K_2 b \vee K_2(a \wedge \neg b) \vee K_2(c \wedge \neg b)$ (dans chaque monde, 2 n'a accès qu'à des mondes où b, ou bien n'a accès qu'à des mondes où a sans b, ou bien n'a accès qu'à des mondes où c sans b),
et $\mathcal{M} \vDash \neg K_3 b \wedge \neg K_3 \neg b$ (dans chaque monde, 3 a au moins un monde accessible où ¬b, et au moins un monde accessible où b).

Tout cela se contrôle manuellement, et LoTREC le confirme : les trois formules sont vraies dans les quatre mondes. Ci-dessous, pour le plaisir, une capture d'écran particulièrement… esthétique.



conclusion

Ce sixième TME nous a permis de mieux comprendre les mécanismes de la logique épistémique, en rapprochant tout simplement sa modalité K(nows) de l'opérateur □ (noté *nec*), désormais familier. Il a été plus facile d'appréhender la multiplicité des relations d'accessibilité – qui divergent selon les agents, et permettent donc de faire la différence entre leurs personnalités, leurs états mentaux – en automatisant le raisonnement. La syntaxe de K(nows) différant très peu de celle de □ sur le papier, elle est aussi similaire sur machine : il a suffi d'indiquer, en supplément, l'agent concerné par chaque chose sue (*nec p* vs. *nec A p*). Peu de nouveauté, donc, en termes de fonctionnalités logicielles ; et malgré tout, LoTREC a une fois de plus été un allié efficace.

Cette logique S5 dite *épistémique* est une logique K à laquelle on a ajouté trois axiomes. Ils forcent les relations d'accessibilité à être réflexives, symétriques et transitives. On exprime ainsi la possibilité, pour un agent, de réfléchir sur son propre savoir, et bien d'autres choses encore. Les contraintes supplémentaires engendrées par les axiomes de S5 demandent un certaine patience lors de la création d'un modèle (le nombre de liens à ajouter étant démultiplié), patience qui sera vite récompensée par la puissance interprétative qu'elles permettent de déployer. Après une série de tests de satisfiabilité classiques, construits indépendamment de tout monde, il a en effet de nouveau été possible de créer des modèles sur-mesure et de les analyser pour approfondir un exemple vu en TD. A plusieurs reprises, la méthode des tableaux de LoTREC a permis de valider ou d'invalider des hypothèses sur la distribution de l'information entre les agents : savent-ils que *a* ? savent-ils si *a* ? savent-ils que leurs voisins savent quelque chose ? Toutes ces interrogations s'expriment facilement grâce à des modalités K récursives.