1 リスト構造

1.1 リスト構造の例

Mathematica において，最も重要なデータ構造は**リスト構造**である。“リスト"とは { } に囲まれた数字や文字，記号の集まりである。最も重要なリスト構成コマンドは Table である。幅広い応用があり，プログラミングの際にも不可欠である。以下に挙げる例を通して，使い方を理解してほしい。

```
In[1]:= Table[i,{i,1,10}]
Out[1]= {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10}

In[2]:= Table[k^2,{k,1,10}]
Out[2]= {1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100}
```

Out[2] と同じ結果は，次のようにしても得られる。

```
In[3]:= %1^2
Out[3]= {1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100}
```

すなわち，Out[1] の出力で得られたリストの，それぞれの成分を 2 乗したものを並べたリストを作ったわけである。

同様にして，1 から 10 までの平方根を一度に計算できる。

In[4]:= Sqrt[%1]

Out[4]= $\left\{1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, 2, \sqrt{5}, \sqrt{6}, \sqrt{7}, 2\sqrt{2}, 3, \sqrt{10}\right\}$

近似値に直してみよう。

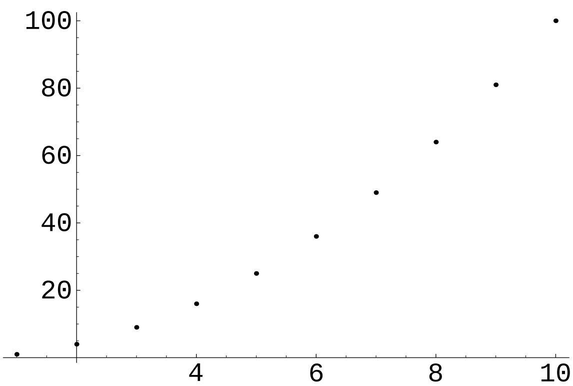
```
In[5]:= N[%]
Out[5]= {1.,1.41421,1.73205,2.,2.23607,2.44949,2.64575,2.82843,3.,3.16228}
```

各要素がリストであるようなリストを作ることもできる。

```
In[6]:= Table[{i,i^2},{i,1,10}]
Out[6]= {{1,1},{2,4},{3,9},{4,16},{5,25},{6,36},{7,49},{8,64},{9,81},{10,100}}
```

このように {x,y} という形のリストを並べたリストの場合，ListPlot を用いると，平面上の点 (x, y) の集まりとみなして図示できる。

```
In[7]:= ListPlot[%6]
```




```
Out[7]= - Graphics -
```

ここまでの例では動く変数は1つのみであるが，２つ以上の変数を動かすこともできる。

```
In[8]:= a = Table[x[j]^(i-1), {i,1,3}, {j,1,3}]
```
Out[8]= {{1,1,1}, {x[1],x[2],x[3]}, {$x[1]^2$,$x[2]^2$,$x[3]^2$}}

結果を見ると分かるようにこれは各要素がリストであるようなリストである。ここで結果を a に代入しているので、これ以後は a という名前を利用することができる[1]。

1.2 リストの表示について

リストに対してはその表示を見やすくする命令がある[2]。たとえば，前回にも説明したように，

`MatrixForm[a]`　もしくは　`a//MatrixForm`

と入力すると，3次正方行列のように表示される。

```
In[9]:= MatrixForm[a]
Out[9]//MatrixForm=
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x(1) & x(2) & x(3) \\ x(1)^2 & x(2)^2 & x(3)^2 \end{pmatrix}$$

今の場合，リスト a に対応する行列の行列式は，有名なヴァンデルモンドの行列式である。行列式を Det で計算して因数分解してみよう。

```
In[10]:= Factor[Det[a]]
Out[10]= -(x[1]-x[2])(x[1]-x[3])(x[2]-x[3])
```

線形代数で学ぶ結果が，確かに得られることが分かる。

また，

`TableForm[a]`　もしくは　`a//TableForm`

と入力すると，表のような形で出力される。TableForm を用いて，九九の表を作ってみよう。

```
In[11]:= TableForm[Table[a*b, {a,1,9}, {b,1,9}]]
Out[11]//TableForm=
```

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

[1]以前にも説明したように，今の場合は %8 としても，a と同じ内容を呼び出すことができる。
[2]表示が変わるだけでデータの構造が変わるわけではない。

このようにして得られた表を LaTeX でそのまま使える形にするには，(上の表なら) 次のようにすればよい。

```
   In[12]:= TeXForm[TableForm[Table[a*b, {a,1,9}, {b,1,9}]]]
 Out[12]//TeXForm=
            \matrix{
               1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \cr
                      ..... (中略) .....
               9 & 18 & 27 & 36 & 45 & 54 & 63 & 72 & 81 \cr  }
```

ただし，この出力はそのままでは使えない。`\matrix{ ..... }` という書き方は使えないので，テキストモードなら `tabular` 環境,

```
\begin{tabular}{cc...} ..... \end{tabular}
```

数式モードなら `array` 環境

```
\begin{array}{cc...} ..... \end{array}
```

に書き換える。(他の部分はそのままで大丈夫)。つまり，`tabular` 環境なら，

```
\begin{tabular}{ccccccccc} ← 各行の要素の個数だけ c(または r,l)
 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \cr
        ..... (中略) .....
 9 & 18 & 27 & 36 & 45 & 54 & 63 & 72 & 81 \cr
\end{tabular}
```

とすればよい。(“`\cr`” は以前に用いられていた改行命令で，現在の LaTeX の “`\\`” と同じ。)

2 Mathematica による数学的実験

Mathematica を用いると，手計算ではかなりの時間がかかる計算を，一瞬で実行することができる。そうした結果から，数学的に新しい結果が見出される場合がある。

2.1 和の公式 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^m$

ここでは，自然数の m 乗和

$$\sum_{k=1}^{n} k^m = 1^m + 2^m + \cdots + n^m$$

に関する公式の性質を調べてみよう。$m = 1, 2, 3$ の場合に関しては，高校で次の公式を学んだことと思う。

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2}n(n+1), \quad \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1), \quad \sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2$$

これらの公式を見ると，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^m$ は変数 n の多項式で表されることが予想される。さらによく見ると，多項式の次数は $m+1$ であり，最高次の係数は $\dfrac{1}{m+1}$ であることが予想される。

上述の予想が正しいことを，$m = 1, 2, \ldots, 10$ で確かめてみよう。まず，和の公式であるが，Mathematica には和を取る命令 `Sum` が用意されている。例えば，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2$ ならば，次のような入出力になる。

```
In[13]:= Sum[k^2, {k,1,n}]
```

Out[13]= $\frac{1}{6}\,\mathrm{n}\,(1+\mathrm{n})(1+2\,\mathrm{n})$

得られる結果を `n` の多項式とみなして，最高次の次数を取り出してみよう。この目的には `Coefficient` という命令が使える。

```
Coefficient[多項式, 変数, 次数]
```

例えば，$\sum k^2$ の場合，最高次の次数は 3 なので，その係数を取り出すには，次のようにすればよい。

```
In[14]:= Coefficient[Sum[k^2, {k,1,n}], n, 3]
```

Out[14]= $\frac{1}{3}$

`In[14]` のように，複数の命令を組み合わせて利用する場合には，改行を適宜入れて書いたほうが，構造が分かりやすい (C 言語の場合と同様)。

```
Coefficient[
  Sum[k^2, {k,1,n}], n, 3
]
```

`In[14]` と `Table` 命令とを組み合わせると，$m = 1, 2, \ldots, 10$ での最高次の係数を並べることができる。

```
In[15]:= Table[
            Coefficient[
              Sum[k^m, {k,1,n}], n, m+1
            ], {m,1,10}
         ]
```

Out[15]= $\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \frac{1}{8}, \frac{1}{9}, \frac{1}{10}, \frac{1}{11}\right\}$

`TeXForm` を用いれば，この結果を LaTeX で利用できる形にすることができる。

```
In[16]:= TeXForm[%15]
Out[16]//TeXForm=
          \{ \frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\frac{1}{5},
            \frac{1}{6},\frac{1}{7},\frac{1}{8},\frac{1}{9},
            \frac{1}{10},\frac{1}{11}\}
```

2.2 整数論に関連する命令

Mathematica を用いると，整数の持つ性質を調べることもできる。

[整数の割り算] (小学生割り算)

`Quotient[m, n]` は，`n` と `m` の整数商を与える。また，`Mod[m, n]` は，`m` を `n` で割った余りを与える。

例：$7 \div 3 = 2$ 余り 1
`Quotient[7,3]` は商 `2` を返し，`Mod[7,3]` は余り `1` を返す。

[n を法とする方程式]

`Solve` では，自然数 n に対して，mod n での方程式を解くこともできる。

例：$5x \equiv 6 \mod 7$ を満たす $x \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ を求める。

```
Solve[{5 x == 6, Modulus == 7}, Mode -> Modular]
    ⇒ {{Modulus -> 7, x -> 4}}
```

解がない場合には，“`x -> **`” という部分が出てこない。

3 今日の課題

次の問題を考える。

【課題問題 1】(和の公式の係数)

$f_m(n) = \sum_{k=1}^{n} k^m$ は変数 n の $(m+1)$ 次多項式である。多項式 $f_m(n)$ の ℓ 次の係数を $C_\ell^{(m)}$ とする。

(1) $m = 1, 2, \ldots, 15$ に対する $C_m^{(m)}$ の値を求めるための Mathematica の命令，およびそれを入力して得られる出力を記せ。さらに，得られた結果から一般項を予想せよ。

(2) $m = 1, 2, \ldots, 15$ に対する $C_{m-1}^{(m)}$ の値を求めるための Mathematica の命令，およびそれを入力して得られる出力を記せ。さらに，得られた結果から一般項を予想せよ。

【課題問題 2】(ある m を法とする積)

1.2 節の九九の表を参考にして，$m = 6$ および 7 を法とする積 ab $(1 \le a, b \le m-1)$ の表を，それぞれ作成せよ。

この問題に対して，次ページのような出力が得られるように LaTeX で記述し，PDF ファイルを作成して CHORUS で提出せよ。ただし，枠で囲まれた部分については，該当する Mathematica の命令，計算結果を記入する。

計算機１・２ 第8回 課題

学籍番号: ******** 氏名: ********

平成19年6月12日

課題１ 和の公式の係数

(1) $m = 1, \ldots, 15$ に対して $C_m^{(m)}$ を求める命令

ここにはMathematicaに入力する命令を記す

出力結果と予想される一般項

$$\left\{ \boxed{\text{ここにはMathematicaの出力}} \right\}, \quad C_m^{(m)} = \boxed{\text{自分で予想}}$$

(2) $m = 1, \ldots, 15$ に対して $C_{m-1}^{(m)}$ を求める命令

ここにはMathematicaに入力する命令を記す

出力結果と予想される一般項出力結果と予想される一般項

$$\left\{ \boxed{\text{ここにはMathematicaの出力}} \right\}, \quad C_{m-1}^{(m)} = \begin{cases} 0 & (m = 1) \\ \boxed{\text{ここを予想}} & (m \neq 1) \end{cases}$$

課題２ mod 6, mod 7の積の表

mod 6 の積

出力結果を表に

mod 7 の積

出力結果を表に

7を法とする積の表では、各行、各列に1,2,...,6が1回ずつ現れているが、6を法とする表ではそうなっていない。これは、7が素数であり、6が合成数であるためである。