1 Mathematica の基本的入力

今回は，Mathematica を用いて，数学的な問題を解いてみよう。まずは，そのために用いる命令を確認しておく。

1.1 基本的な命令

```
In[1]:= (2 3 + 7 4^5)/6
```

Out[1]= $\frac{3587}{3}$

《注意 1》 掛け算は，半角空白でも * でも，どちらでも良い。

```
In[2]:= N[%1]

Out[2]= 1195.67
```

《注意 2》 式をまとめるカッコには ( ) しか使ってはいけない ({ } , [ ] はダメ)。

```
In[3]:= N[%1,10]

Out[3]= 1195.666667
```

《注意 3》 N[%1,10] は，Out[1] の結果を全 10 桁の精度で表示する。

[文字への式の割り当て] 例えば

```
f = x + 1
```

とすれば，文字 f に x+1 が割り当てられ，以降 f を入力すると全て x+1 を表す

```
Clear[f]
```

[式の展開] 例えば $(x+1)^3$ のような式を展開するには，Expand を使う。

In[4]:= Expand[(x+1)^3]
Out[4]= $1+3x+3x^2+x^3$

[因数分解] 与えられた数式を因数分解するには，Factor を使う。

In[5]:= Factor[x^4 + 4]
Out[5]= $(2-2x+x^2)(2+2x+x^2)$

上記のものは，前回にも紹介した。これらに加えて，**「置き換え」**という操作が重要である。次の例を見てもらいたい。

In[6]:= f = x^3 + 1
Out[6]= $1+x^3$
In[7]:= ReplaceAll[f,{x->x+1}]
Out[7]= $1+(1+x)^3$
In[8]:= Clear[f]

In[7] のように，

ReplaceAll[式，文字 -> 置き換えたい文字]

とすればよい。

《参考》 In[7] は，

```
f/.x->x+1
```

としても同じことである。こちらのほうが，タイプする量は少ない。

1.2 方程式を解く

Mathematica を用いて，代数方程式を解くこともできる(いつもできるとは限らない)。例を見てみよう。

In[8]:= Solve[x^2 -5 x + 2 == 0, x]

Out[8]= $\left\{\left\{x \to \frac{1}{2}\left(5-\sqrt{17}\right)\right\}, \left\{x \to \frac{1}{2}\left(5+\sqrt{17}\right)\right\}\right\}$

連立方程式の場合は，次のようにする。

In[9]:= Solve[{x + 3 y == 2, 2 x + 5 y == 7}, {x,y}]

Out[9]= $\{\{x \to 11, y \to -3\}\}$

パラメータを含んでもよい。

In[10]:= Solve[{x == 1+2 a y, y == 9+2 x}, {x,y}]

Out[10]= $\left\{\left\{x \to -\frac{1+18a}{-1+4a}\right\}, \left\{y \to -\frac{11}{-1+4a}\right\}\right\}$

より多くの例を「ヘルプ」で見ることができる。

連立一次方程式の場合は，LinearSolve という専用の命令が用意されている。これは，正方行列 A を係数行列とする連立一次方程式 $A\vec{x}=\vec{b}$ を解くものである。

LinearSolve[A, b]

結果は，$\vec{x}$ がリストの形で返される。

1.3 行列の計算

Mathematica では，行列を扱うこともできる。Mathematica で行列を定義するには，例えば次のようにする。

In[8]:= A = {{2,5,9},{4,7,10}}

Out[8]= {{2,5,9}, {4,7,10}}

これで $\begin{pmatrix} 2 & 5 & 9 \\ 4 & 7 & 10 \end{pmatrix}$ という行列を定義したことになる。Out[8] だと行列っぽく見えないが，次のようにすればそれらしく出力される。

```
MatrixForm[A]
```

このようにして定義した行列に対して，足し算，かけ算等も

行列の足し算： `A + B`
行列の掛け算： `A.B`

などとして計算できる (A, B は適当に定義された行列とする)。ここで，**行列の掛け算の場合は，“.” という記号を用いる**ことを注意しておく。

また，A が正方行列で行列式がゼロでないならば，

```
Inverse[A]
```

と入力することで逆行列を求めることができる。しかし，

```
A^(-1)
```

だと，逆行列ではなく，各成分の逆数を取った行列が出力される。例を見ておこう。

```
In[9]:= A = {{2,5,9},{4,7,10},{3,4,5}}
Out[9]= {{2,5,9}, {4,7,10},{3,4,5}}
```

```
In[10]:= Inverse[A]
```

Out[10]= $\left\{\left\{1,-\frac{11}{5},\frac{13}{5}\right\},\left\{-2,\frac{17}{5},-\frac{16}{5}\right\},\left\{1,-\frac{7}{5},\frac{6}{5}\right\}\right\}$

```
In[11]:= A^(-1)
```

Out[11]= $\left\{\left\{\frac{1}{2},\frac{1}{5},\frac{1}{9}\right\},\left\{\frac{1}{4},\frac{1}{7},\frac{1}{10}\right\},\left\{\frac{1}{3},\frac{1}{4},\frac{1}{5}\right\}\right\}$

正方行列に対しては，固有値，固有ベクトルを求めることもできる。次のような命令が用意されている。

`Eigenvalues[A]`	行列 A の固有値を求める。
`Eigenvectors[A]`	行列 A の固有ベクトルを求める。
`Eigensystem[A]`	行列 A の固有値，固有ベクトルをまとめて求める。

これらをどのように使うかは，次節の例題を解く過程で見てもらうことにする。

1.4 線形代数の問題

次のような線形代数の問題を，Mathematica を用いて解いてみよう。

【例題 1】 2 次正方行列 $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ および 2 次正方行列 P と，実数 α, β $(\alpha > \beta)$ に対して，$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$ が成立している。

(1) P, α, β を求めよ。

(2) 自然数 n に対して A^n を求めよ。

【Mathematica を用いた解答例】

(入出力の番号は，これ以降再度 1 から始めることにする。)

まずは行列 A を定義する。

```
In[1]:= A = {{4,2},{1,3}}
Out[1]= {{4,2},{1,3}}
```

固有値を求める。

```
In[2]:= Eigenvalues[A]
Out[2]= {5,2}
```

よって，$\alpha = 5, \beta = 2$ であることが分かる。次に，固有ベクトルを求める。

```
In[3]:= {u,v} = Eigenvectors[A]
Out[3]= {{2,1},{-1,1}}
```

こうすると，u に {2,1} が，v に {-1,1} が割り当てられる。これらが固有ベクトルであることを，実際に計算して確認してみよう。

```
In[4]:= A.u - 5 u
Out[4]= {0,0}
In[5]:= A.v - 2 v
Out[5]= {0,0}
```

これで，$A\boldsymbol{u} = 5\boldsymbol{u}$, $A\boldsymbol{v} = 2\boldsymbol{v}$ が成立することが示された。

(**《注》** 上の A.u の計算において，Mathematica は {2,1} を「縦ベクトル」として解釈して計算している。これに対し，例えば

```
{2,1}.A
```

と入力すれば，{2,1} を「横ベクトル」として解釈して計算することになる。)

次に，固有ベクトル $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ を並べて行列 P を作る。

```
In[6]:= P = Transpose[{u,v}]  (転置をとっていることに注意！)
Out[6]= {{2,1},{-1,1}}
```

行列 P によって A が対角化されることをチェックしよう。

```
In[7]:= B = Inverse[P].A.P
Out[7]= {{5,0},{0,2}}
```

確かに対角化されている (便宜的に，対角化の結果を B とおいた)。こうしておけば，A^n を求めるのは容易である。すなわち，$A^n = (PBP^{-1})^n = PB^nP^{-1}$ であるので，

```
In[8]:= Simplify[P.(B^n).Inverse[P]]
```

Out[8]= $\left\{\left\{\frac{1}{3}(-3\,0^n + 2^n + 2\,5^n), 0^n - \frac{2^{1+n}}{3} + \frac{2\,5^n}{3}\right\}, \left\{\frac{1}{3}(-2^n + 5^n), \frac{1}{3}(3\,0^n + 2^{1+n} + 5^n)\right\}\right\}$

出力では 0^n が 0 にならずに残る。

(《注》Mathematica は，`A^n` と入力すると各成分を n 乗した結果を出力してくるので，数学的な A^n ではない。)

次に，対角化されない例を計算してみよう。(要するに,「ジョルダン標準形」の計算である。)

【例題 2】 $A = \begin{bmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ に対して，以下の問いに答えよ。

(1) 行列 A の全ての固有値，固有ベクトルを求めよ。

(2) 行列 A の固有方程式は重解を持つ。それを α，対応する固有ベクトルを $\boldsymbol{u}$ とするとき，

$$(A - \alpha I)\boldsymbol{v} = \boldsymbol{u}$$

を満たすベクトル $\boldsymbol{v}$ を求めよ。

(3) 適当な正則行列 P を用いると，

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \beta \end{bmatrix}$$

という形にすることができる。このような P の例を挙げよ。

【Mathematica を用いた解答例】 (ここでは，入力のみを書くことにする。)

行列 A を定義し，固有値，固有ベクトルを求める。

```
A = {{5,-1,-1},{1,2,0},{3,-1,1}}
Eigenvalues[A]
Eigenvectors[A]
```

すると，固有値は 3 (重解), 2 であり，重解 3 に対応する固有ベクトルは 1 次元しかないことが分かる。

固有値 3 に対する固有ベクトルは，$\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ であるので，次に

$$(A - 3E)\vec{v} = \vec{u}$$

を満たすベクトル $\vec{v}$ を求める。

```
v = LinearSolve[A - 3 IdentityMatrix[3], u]
```

このようにして求めた $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ を並べれば変換行列 P が得られる。結果は，次のようになる。

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

2　今日の課題

次の問題を考える。

【課題問題】 $A = \begin{pmatrix} 5 & -8 & 5 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ に対して，以下の問いに答えよ。

(1)　A の固有方程式が三重解を持つことを示せ。また，その固有値，固有ベクトルを求めよ。

(2)　(1) の三重解を α，対応する固有ベクトルを $\boldsymbol{u}$ とおく。このとき，

$$(A - \alpha I)\boldsymbol{v} = \boldsymbol{u}$$

となるベクトル $\boldsymbol{v}$ を求めよ。

(3)　(2) の $\boldsymbol{v}$ に対して，

$$(A - \alpha I)\boldsymbol{w} = \boldsymbol{v}$$

となるベクトル $\boldsymbol{w}$ を求めよ。

(4)　(1)–(3) の $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$ を並べた行列 $P = (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})$ に対して，$P^{-1}AP$ を求めよ。

この問題に対して，次のようにタイトル，氏名等を記入した上で，1.4 節の例題 2 に対する解答をを参考にして，Mathematica による解答例を作成せよ。

[注 1] 言葉での適宜説明をはさみつつ，Mathematica に入力する命令を記述していくこと (例題 2 に対する解答 (5 ページ) のような感じ)。

[注 2] 途中の出力は書かなくてよいが，行列 P の具体的な形は明記すること。

説明は LaTeX で記述し，PDF ファイルを作成して CHORUS で提出せよ。

計算機１・２ 第7回 課題

学籍番号: ********　　氏名: ********

平成 19 年 6 月 5 日

Mathematica を用いて解く手順を説明する。
