函数的极限

seeker

2023 年 3 月 13 日

1 自变量趋于无穷大时

Definition 1 $\lim_{x\to\infty} f(x) = A$，$\forall\varepsilon > 0, \exists X > 0$，当 $|x| > X$ 时，恒有 $|f(x) - A| < \varepsilon$。

Theorem 1

$$\begin{aligned} &\lim_{x\to\infty} f(x) = A \\ \Leftrightarrow &\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = A \end{aligned} \tag{1}$$

反过来说，当 $\lim_{x\to-\infty} f(x)! = \lim_{x\to} f(x)$ 时，我们称 $\lim_{x\to\infty}$ 不存在。同时，在数列中，若 $n \to \infty$，我们约定为 $n \to +\infty$。

在数列中，

$$\lim_{x\to\infty} f(x) \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} f(n)$$

该式无法反推：对于 $f(x) = \sin x\pi$，数列 $\lim_{n\to\infty} f(n) = 0$，但是函数 $f(n)$ 的极限不存在，这是由于数列只取 $1, 2, ...n$ 等正整数。

2 自变量趋向于有限值时

Definition 2 $\lim_{x\to x_0} f(x) = A$,$\forall\varepsilon > 0$, $\exists\delta > 0$，当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时，恒有 $|f(x) - A| < \varepsilon$。

注：

1. ε 具有任意性，δ 具有存在性

2. 定义 2 在几何上的意义为，对于 $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$，存在 ε，使得 $y = f(x) \in (A - \varepsilon, A + \varepsilon)$。

3. $x \to x_0$，$x! = x_0$。也就是说，$\lim_{x \to x_0}$ 与 $f(x_0)$ 无关。

4. $0 < |x - x_0| < \delta$，$|f(x) - A| < \varepsilon$，即 $f(x) = A$ 可以成立。这里的微小定义会引出一些问题。

3 例题

1. 由于 $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$，是否可以得到

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x \sin \frac{1}{x})}{x \sin \frac{1}{x}} = 0$$

解：$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x \sin \frac{1}{x})}{x \sin \frac{1}{x}} = 0$ 不存在。令 $xsin\frac{1}{x} = t$，则

$$\begin{aligned} &\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x \sin \frac{1}{x})}{x \sin \frac{1}{x}} \\ =&\lim_{x \to 0} \frac{\sin t}{t} \end{aligned} \tag{2}$$

由于 $x \to 0$ 时，存在 x_0 使得 $t = 0$ ，则 $x \to 0 \neq \sin \frac{1}{x} \to 0$，因此极限不存在。

2. 根据函数极限的定义证明：函数 $f(x)$ 当 $x \to x_0$ 时极限储存在的充分必要条件是左极限、右极限各自存在并且相等。

证：

必要性 若 $\lim_{x \to x_0} f(x) = A$，$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0,$ 当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 有 $|f(x) - A| < \varepsilon.$
当 $0 < x - x_0 < \delta$ 时，$|f(x) - A| < \varepsilon$，即为 $\lim_{x \to x_0^+} = A$；
当 $0 < x_0 - x < \delta$ 时，$|f(x) - A| < \varepsilon$，即为 $\lim_{x \to x_0^-} = A$；

充分性 反过来即可。

3. 给出 $x \to \infty$ 时，函数的极限的局部有界性定理，并加以证明。

答：若 $\lim_{x \to \infty} f(x) = A$，$\exists$ 常数 $X > 0, M > 0$，使得 $|x| > X$ 时，$|f(x)| <= M$.

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = A$$
$$\Rightarrow \exists\delta > 0, |f(x) - A| < \varepsilon \tag{3}$$

令 $\varepsilon = 1$，则

$$|f(x)| - |A| <= |f(x) - A| < \varepsilon = 1$$
$$\Rightarrow |f(x)| < 1 + |A| \tag{4}$$

令 $M = 1 + |A|$，$N = \delta$，则 $\exists M, N > 0$，在 $x > |X|$ 时，使得 $|f(x)| < M$。

4. (这题是常用极限，但是我认为武证明的比书好)

   证明：$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n$ 存在极限

   有均值不等式：

$$a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_n \le (\frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n})^n$$

   可得：

$$(1+\frac{1}{n})^n$$
$$=(1+\frac{1}{n})^n * 1 \le \frac{(1+n+1)}{n+1} = (\frac{1}{n+1})^{n+1} \tag{5}$$

   原式为单调增序列，为证数列存在极限，只需证明有界：

$$\frac{1}{4}\cdot(1+\frac{1}{n})^n$$
$$=(1+\frac{1}{n})^n \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \le \frac{(1+n+1)}{n+2} = 1 \tag{6}$$
$$(1+\frac{1}{n})^n \le 4$$

5. 求 $\lim_{n\to\infty}[\frac{1}{1*2} + \frac{1}{2*3} + ... + \frac{1}{n(n+1)}]^2$.

解：

$$\begin{aligned}
&\lim[\frac{1}{1*2}+\frac{1}{2*3}+...+\frac{1}{n(n+1)}\\
=&(1-\frac{1}{2})+(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})+...+(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1})\\
=&1-\frac{1}{n+1},\\
\text{原式}=&\lim_{n\to\infty}(1-\frac{1}{n+1})^n\\
=&\lim_{n\to\infty}[(1+(-\frac{1}{n+1}))^{-(n+1)}]^{\frac{n}{-n-1}}\\
=&e^{-1}.
\end{aligned} \tag{7}$$

6. 证明：当 $x>0$ 时，$\frac{1}{1+x}<\ln(1+\frac{1}{x})<\frac{1}{x}$。

7. 证明：数列 $\sqrt{2},\sqrt{2+\sqrt{2}},\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}...$ 的极限存在；

   解：令 x_n 表示数列，由题意可得：$x_{n+1}=\sqrt{x_n+2}$。

   - 有界性 $x_n<2$。

     $i=1$ 时，$x_1=\sqrt{2}<2$；

     假设 $i=k$ 满足 $x_k<2$，则

     $$x_{k+1}=\sqrt{x_k+2}<2$$

     ，即 $x_{k+1}<2$

   - 单调性

     $$\begin{aligned}
     &x_{k+1}-x_k\\
     =&\sqrt{2+x_k}-k\\
     &2+x_k-k^2\\
     =&-(x_k+\frac{1}{2})+\frac{9}{4}(x_k<2)
     \end{aligned} \tag{8}$$

     原式大于 0，所以该数列单调。

8. 假设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[0,1]$ 上连续，并且对 $[0,1]$ 上任一点 x 有 $0\le f(x)\le 1$. 试证明 $[0,1]$ 中必存在一点 c。使得 $f(c)=c$（c 称 $f(x)$ 的不动点）.

证：设 $F(x) = f(x) - x$，则 $F(0) = f(0) \geq 0$,$F(1) = f(1) - 1 \leq 0$.

若 $F(0) = 0$ 或 $F(1) = 0$，则 0 或 1 即位 $f(x)$ 的不动点；

若 $F(0) > 0$ 且 $F(1) < 0$, 则由零点定理，必存在 $c \in (0, 1)$，使得 $F(c) = 0$，这时 c 为 $f(x)$ 的不动点。