

函数的极限

seeker

2023 年 2 月 21 日

1 自变量趋于无穷大时

Definition 1 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$, $\forall \varepsilon > 0, \exists X > 0$, 当 $|x| > X$ 时, 恒有 $|f(x) - A| < \varepsilon$ 。

Theorem 1

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) &= A \\ \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A \end{aligned} \quad (1)$$

反过来说, 当 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ 时, 我们称 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ 不存在。同时, 在数列中, 若 $n \rightarrow \infty$, 我们约定为 $n \rightarrow +\infty$ 。在数列中,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(n) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$$

该式无法反推: 对于 $f(x) = \sin x\pi$, 数列 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(n) = 0$, 但是函数 $f(x)$ 的极限不存在, 这是由于数列只取 $1, 2, \dots, n$ 等正整数。

2 自变量趋向于有限值时

Definition 2 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A, \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, 当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 恒有 $|f(x) - A| < \varepsilon$ 。

注:

1. ε 具有任意性, δ 具有存在性

2. 定义 2 在几何上的意义为, 对于 $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, 存在 ε , 使得 $y = f(x) \in (A - \varepsilon, A + \varepsilon)$ 。
3. $x \rightarrow x_0$, $x! = x_0$ 。也就是说, $\lim_{x \rightarrow x_0}$ 与 $f(x_0)$ 无关。
4. $0 < |x - x_0| < \delta$, $|f(x) - A| < \varepsilon$, 即 $f(x) = A$ 可以成立。这里的微小定义会引出一些问题。

3 例题

1. 由于 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, 是否可以得到

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x \sin \frac{1}{x})}{x \sin \frac{1}{x}} = 0$$

解: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x \sin \frac{1}{x})}{x \sin \frac{1}{x}} = 0$ 不存在。令 $x \sin \frac{1}{x} = t$, 则

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x \sin \frac{1}{x})}{x \sin \frac{1}{x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} \end{aligned} \quad (2)$$

由于 $x \rightarrow 0$ 时, 存在 x_0 使得 $t = 0$, 也就是说, $x \rightarrow 0$ 并不代表着 $\sin \frac{1}{x} \rightarrow 0$, 因此极限不存在。

2. 根据函数极限的定义证明: 函数 $f(x)$ 当 $x \rightarrow x_0$ 时极限值存在的充分必要条件是左极限、右极限各自存在并且相等。

证:

必要性 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, 当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 有 $|f(x) - A| < \varepsilon$ 。

当 $0 < x - x_0 < \delta$ 时, $|f(x) - A| < \varepsilon$, 即为 $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = A$;

当 $0 < x_0 - x < \delta$ 时, $|f(x) - A| < \varepsilon$, 即为 $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = A$;

充分性 反过来即可。

3. 给出 $x \rightarrow \infty$ 时, 函数的极限的局部有界性定理, 并加以证明。

答: 若 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$, \exists 常数 $X > 0, M > 0$, 使得 $|x| > X$ 时, $|f(x)| \leq M$ 。

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A \\ \Rightarrow \exists \delta > 0, |f(x) - A| < \varepsilon \end{aligned} \quad (3)$$

令 $\varepsilon = 1$, 则

$$\begin{aligned} |f(x)| - |A| &\leq |f(x) - A| < \varepsilon = 1 \\ \Rightarrow |f(x)| &< 1 + |A| \end{aligned} \quad (4)$$

令 $M = 1 + |A|$, $N = \delta$, 则 $\exists M, N > 0$, 在 $x > |X|$ 时, 使得 $|f(x)| < M$ 。