函数的极限

seeker

2023 年 3 月 13 日

1 自变量趋于无穷大时

Definition 1 $\lim_{x\to\infty} f(x) = A$，$\forall\varepsilon > 0, \exists X > 0$，当 $|x| > X$ 时，恒有 $|f(x) - A| < \varepsilon$。

Theorem 1

$$\begin{aligned} &\lim_{x\to\infty} f(x) = A \\ \Leftrightarrow &\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = A \end{aligned} \tag{1}$$

反过来说，当 $\lim_{x\to-\infty} f(x)! = \lim_{x\to} f(x)$ 时，我们称 $\lim_{x\to\infty}$ 不存在。同时，在数列中，若 $n\to\infty$，我们约定为 $n\to+\infty$。

在数列中，

$$\lim_{x\to\infty} f(x) \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} f(n)$$

该式无法反推：对于 $f(x) = \sin x\pi$，数列 $\lim_{n\to\infty} f(n) = 0$，但是函数 $f(n)$ 的极限不存在，这是由于数列只取 $1, 2, ...n$ 等正整数。

2 自变量趋向于有限值时

Definition 2 $\lim_{x\to x_0} f(x) = A$,$\forall\varepsilon > 0$, $\exists\delta > 0$，当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时，恒有 $|f(x) - A| < \varepsilon$。

注：

1. ε 具有任意性，δ 具有存在性

2. 定义 2 在几何上的意义为，对于 $x \in (x_0-\delta, x_0+\delta)$，存在 ε，使得 $y=f(x) \in (A-\varepsilon, A+\varepsilon)$。
3. $x \to x_0$，$x! = x_0$。也就是说，$\lim_{x\to x_0}$ 与 $f(x_0)$ 无关。
4. $0<|x-x_0|<\delta$，$|f(x)-A|<\varepsilon$，即 $f(x)=A$ 可以成立。这里的微小定义会引出一些问题。

3 例题

1. 由于 $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$，是否可以得到

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x\sin\frac{1}{x})}{x\sin\frac{1}{x}}=0$$

解：$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x\sin\frac{1}{x})}{x\sin\frac{1}{x}}=0$ 不存在。令 $xsin\frac{1}{x}=t$，则

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x\sin\frac{1}{x})}{x\sin\frac{1}{x}}\\=&\lim_{x\to 0}\frac{\sin t}{t}\end{aligned} \tag{2}$$

由于 $x\to 0$ 时，存在 x_0 使得 $t=0$ ，则 $x\to 0 \neq \sin\frac{1}{x}\to 0$，因此极限不存在。

2. 根据函数极限的定义证明：函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时极限储存在的充分必要条件是左极限、右极限各自存在并且相等。

证：

必要性 若 $\lim_{x\to x_0}f(x)=A$，$\forall\varepsilon>0, \exists\delta>0,$ 当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时, 有 $|f(x)-A|<\varepsilon.$

当 $0<x-x_0<\delta$ 时，$|f(x)-A|<\varepsilon$，即为 $\lim_{x\to x_0^+}=A$；

当 $0<x_0-x<\delta$ 时，$|f(x)-A|<\varepsilon$，即为 $\lim_{x\to x_0^-}=A$；

充分性 反过来即可。

3. 给出 $x\to\infty$ 时，函数的极限的局部有界性定理，并加以证明。

答：若 $\lim_{x\to\infty}f(x)=A$，$\exists$ 常数 $X>0, M>0$，使得 $|x|>X$ 时，$|f(x)|<=M.$

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to\infty} f(x)=A\\ \Rightarrow&\exists\delta>0,|f(x)-A|<\varepsilon\end{aligned} \tag{3}$$

令 $\varepsilon=1$，则

$$\begin{aligned}&|f(x)|-|A|<=|f(x)-A|<\varepsilon=1\\ \Rightarrow&|f(x)|<1+|A|\end{aligned} \tag{4}$$

令 $M=1+|A|$，$N=\delta$，则 $\exists M,N>0$，在 $x>|X|$ 时，使得 $|f(x)|<M$。

4. (这题是常用极限，但是我认为武证明的比书好)

   证明：$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n$ 存在极限

   有均值不等式：

$$a_1\cdot a_2\cdot...\cdot a_n\le(\frac{a_1+a_2+...+a_n}{n})^n$$

   可得：

$$\begin{aligned}&(1+\frac{1}{n})^n\\ =&(1+\frac{1}{n})^n*1\le\frac{(1+n+1)}{n+1}=(\frac{1}{n+1})^{n+1}\end{aligned} \tag{5}$$

   原式为单调增序列，为证数列存在极限，只需证明有界：

$$\begin{aligned}&\frac{1}{4}\cdot(1+\frac{1}{n})^n\\ =&(1+\frac{1}{n})^n\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\le\frac{(1+n+1)}{n+2}=1\\ &(1+\frac{1}{n})^n\le4\end{aligned} \tag{6}$$

5. 求 $\lim_{n\to\infty}[\frac{1}{1*2}+\frac{1}{2*3}+...+\frac{1}{n(n+1)}]^2$.

解：

$$
\begin{aligned}
&\lim[\frac{1}{1*2}+\frac{1}{2*3}+...+\frac{1}{n(n+1)}\\
=&(1-\frac{1}{2})+(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})+...+(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1})\\
=&1-\frac{1}{n+1},\\
\text{原式}=&\lim_{n\to\infty}(1-\frac{1}{n+1})^n\\
=&\lim_{n\to\infty}[(1+(-\frac{1}{n+1}))^{-(n+1)}]^{\frac{n}{-n-1}}\\
=&e^{-1}.
\end{aligned} \tag{7}
$$

6. 证明：当 $x>0$ 时，$\frac{1}{1+x}<\ln(1+\frac{1}{x})<\frac{1}{x}$。

7. 证明：数列 $\sqrt{2},\sqrt{2+\sqrt{2}},\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}...$ 的极限存在；

   解：令 x_n 表示数列，由题意可得：$x_{n+1}=\sqrt{x_n+2}$。

   - 有界性 $x_n<2$。

     $i=1$ 时，$x_1=\sqrt{2}<2$；

     假设 $i=k$ 满足 $x_k<2$，则

     $$x_{k+1}=\sqrt{x_k+2}<2$$

     ，即 $x_{k+1}<2$

   - 单调性

     $$
     \begin{aligned}
     &x_{k+1}-x_k\\
     =&\sqrt{2+x_k}-k\\
     &2+x_k-k^2\\
     =&-(x_k+\frac{1}{2})+\frac{9}{4}(x_k<2)
     \end{aligned} \tag{8}
     $$

     原式大于 0，所以该数列单调。

8. 假设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[0,1]$ 上连续，并且对 $[0,1]$ 上任一点 x 有 $0\leq f(x)\leq 1$. 试证明 $[0,1]$ 中必存在一点 c。使得 $f(c)=c$（c 称 $f(x)$ 的不动点）.

证：设 $F(x)=f(x)-x$，则 $F(0)=f(0)\geq 0$,$F(1)=f(1)-1\leq 0$.

若 $F(0)=0$ 或 $F(1)=0$，则 0 或 1 即位 $f(x)$ 的不动点；

若 $F(0)>0$ 且 $F(1)<0$, 则由零点定理，必存在 $c\in(0,1)$，使得 $F(c)=0$，这时 c 为 $f(x)$ 的不动点。

9. 证明指数为基数的代数方程

$$a_0x^{2n+1}+a_1x^{2n}+...+a_{2n}x+a_{2n+1}=0$$

至少有一实根，其中 $a_0,a_1,...,a_{2n+1}$ 均为常数，$n\in N$.

证：当 $|x|$ 充分大时，函数 $f(x)=a_0x^{2n+1}+a_1x^{2n}+...+a_{2n}x+a_{2n+1}$ 取决于 a_0 与 x 是否同号，如果同号则 $f(x)>0$，否则 $f(x)<0$。

由于在充分打的区间的两端处异号，由零点定理可得：存在某一点处必为零，故 $f(x)$ 必有一实根.