

导数与微分

seeker

2023 年 3 月 21 日

1 题目

1. 证明当 $x > 0$ 时,

$$\frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x.$$

证: 设 $f(x) = \ln(1+x)$, 显然 $f(x)$ 在区间 $[0, x]$ 上满足拉格朗日中值定理的条件, 根据定理, 应有

$$f(x) - f(0) = f'(\varepsilon)(x - 0), 0 < \varepsilon < x.$$

$$f(0) = 0, f'(t) = \frac{1}{1+t} \Rightarrow f(x) = f'(\varepsilon)(x - 0),$$

即

$$\ln(1+x) = \frac{x}{\varepsilon+1} (0 < \varepsilon < x).$$

易得:

$$\frac{x}{1+x} < \frac{x}{\varepsilon+1} < x.$$