Αυτορυθμιζόμενα Δυαδικά Δένδρα Αναζήτησης

Βησσαρίων Φυσικόπουλος

2008

Αυτορυθμιζόμενα Δυαδικά Δένδρα Αναζήτησης

Βησσαρίων Φυσικόπουλος

Ορισμός Προβλήματος

Μια πρώτ

Βέλτιστος Offline Αλγόριθμος

Splay Trees

Access Lemma (Άνω Φράγμα)

alance Theorem

atic Optimality

atic Finger Theorem

rking Set Theorem

ιότητες Splay Tree

Jenue .

........

Jynamic i niger

Ανοικτά Προβλήματο

Αναφορέι

έλτιστος Offlin

Splay Trees

Access Lemma (Άνω Φράγμα)

Balance Theorer

tatic Optimalit heorem

Static Finger I neorer

Working Set Theor

διότητες Splay

Deque

Dynamic Fin

Ανοικτά Προβλήμ

Αναφορές

- Δυαδικό Δένδρο Εύρεσης Τ
- ightharpoonup n κόμβοι-στοιχεία $1,2,\ldots,n$ (συμμετρική διάταξη)
- lacktriangle σ: ακολουθία m αιτήσεων κάποιων στοιχείων του T
- lacktriangledown $cost_j$ (χόστος αίτησης j ενός στοιχείου i)=d(i) (βάθος του χόμβου i στο T)
- Αυθαίρετου πλήθους επαναζυγιστικές πράξεις στο Τ μετά από κάθε αίτηση με σταθερό κόστος
- ightharpoonup Κόστος Αλγορίθμου: $cost_{alg\, orithm_A} = \sum_{j=1}^m cost_j$
- online αλγόριθμος άγνωστη σ, offline αλγόριθμος γνωστή σ
- ▶ Competitive Ratio: $cost_{online}(\sigma) \leq CR \cdot cost_{offline}(\sigma) + k$
- ► Competitive Ratio c: c-competitive

Μια πρώτη λύση

Βέλτιστος Offlin Αλγόριθμος

Splay Trees

Access Lemma (Άνω Ρράγμα)

Salance I neorem

Static Optima Theorem

static ringer Theore

Working Set Theor

διότητες Spla

Deque

Dynamic Finger

Ανοικτά Προβλήματ

Αναφορές

Τέλος

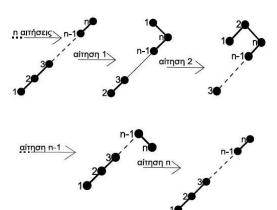
ightharpoonup Οποιοδήποτε Ισοζυγισμένο Δυαδικό Δένδρο Εύρεσης T είναι $O(\log n)$ -competitive

- Αυτορυθμιζόμενα Δένδρα. Φυσικός αλγόριθμος: μετά από την ικανοποίηση μιας αίτησης του στοιχείου i, μετακινούμε το i στη ρίζα
- Ερώτημα: τι πράζεις θα χρησιμοποιήσει ο αλγόριθμος για να μετακινήσει ένα στοιχείο στη ρίζα;
- Απλή λύση: Ο αλγόριθμος move to root μεταχινεί το στοιχείο που προσπελάστηκε στη ρίζα εκτελώντας μια σειρά από rotations



Μια πρώτη λύση (Κάτω Φράγμα)

- lacktriangle Έστω η αχολουθία $\sigma^k=1,2,\ldots,n$ στο T
- Μετά τις πρώτες n αιτήσεις το T εκφυλίζεται σε ένα αριστερό μονοπάτι.
- ightharpoonup Στη συνέχεια κάθε αίτηση έχει κόστος n.



Αυτορυθμιζόμενα Δυαδικά Δένδρα Αναζήτησης

Βησσαρίων Φυσικόπουλος

Ορισμός Προβλήματος

Μια πρώτη λύση

Βέλτιστος Offline Αλγόριθμος

Splay Tree:

Access Lemma (Άνω Φράγμα)

alance Theorem

tatic Optimality Theorem

tatic ringer i neore

vorking Set Theore

no cipees 5

Deque

Dynamic Finger

Ανοικτά Προβλήμα

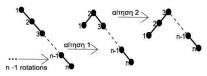
Αναφορές

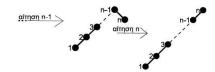
Τέλος

 \blacktriangleright move to root αλγόριθμος: amortized cost n για μεγάλο k

Βέλτιστος Offline Αλγόριθμος

- lacksquare Έστω η ακολουθία $\sigma^k=1,2,\ldots,n$ στο T
- $ightharpoonup \Sigma$ ε n-1 rotations ο αλγόριθμος εκφυλίζει το T σε ένα δεξί μονοπάτι.
- Στη συνέχεια κάθε αίτηση έχει κόστος 1.





- ightharpoonup βέλτιστος offline αλγόριθμος: amortized cost $=2-rac{1}{n}$
- ightharpoonup Συμπέρασμα: Ο αλγόριθμος $move\ to\ root$ είναι $\Theta(n)$ -competitive

Αυτορυθμιζόμενα Δυαδικά Δένδρα Αναζήτησης

Βησσαρίων Φυσικόπουλος

Ορισμός Προβλήματος

Βέλτιστος Offline Αλγόριθμος

Splay Trees

Access Lemma (Άνω Φοάντια)

Balance Theorem

Static Optimality Theorem

static i inger Theorei

-ISIÁTETTO SENIOV Tre

eque

ynamic Finger

Αυκωρρός

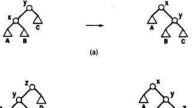
Αναφορές

έλος

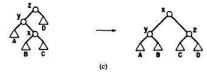


Splay Trees (Sleator χαι Tarjan [2])

splay πράζεις: (a) zig, (b) zig-zig, (c) zig-zag







- ▶ splaying αλγόριθμος:
 - 1. Επτελεί ένα ψάζιμο στο δένδρο T για το ζητούμενο στοιχείο i
 - 2. Χρησιμοποιώντας splay πράζεις ανεβάζει το i στη ρίζα \mathbb{R}^{n}

Αυτορυθμιζόμενα Δυαδικά Δένδρα Αναζήτησης

Βησσαρίων Φυσικόπουλος

Ορισμός Προβλήματος

- Μια πρώτι

Βέλτιστος Offlin

Splay Trees

ccess Lemma (Άνω γράγμα)

Balance Theore

Static Optimalis Theorem

atic Finger Theore

working set Theore

cque

Jynamic Finger

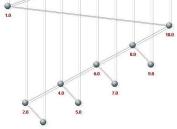
Αναφορές

.....

000

Βελτίωση προηγούμενου παραδείγματος

- ightharpoonup Η αχολουθία $\sigma^k=1,2,\ldots,n$ στο T αν το T είναι splay tree
- Μετά τις πρώτες n αιτήσεις το T εχφυλίζεται σε ένα αριστερό μονοπάτι.
- Αλλά μετά την αίτηση του 1 το splay δένδρο είναι πιο



ισορροπημένο

Θεώρημα

(Scanning [2, 3]): Σε ένα splay δένδρο n κόμβων, μια ακολουθία n προσπελάσεων που προσπελαύνει ένα διαφορετικό στοιχείο κάθε φορά με βάση τη συμμετρική διάταξη έχει συνολικό χρόνο προσπέλασης O(n).

Αυτορυθμιζόμενα Δυαδικά Δένδρα Αναζήτησης

Βησσαρίων Φυσικόπουλος

Ορισμός Προβλήματος

Μια πρώτη

Βέλτιστος Offline

Splay Trees

ccess Lemma (Άνω ·ράγμα)

alance I heorem

static Optimality Theorem

Working Set Theorem

-ISIÁTETTO SENIOV Tre

eaue

Dynamic Finge

Ανοικτά Προβλήμ

Αναφορές

Access Lemma

Ορισμοί

- lacktriangle Σε κάθε κόμβο i αντιστοιχίζουμε ένα θετικό βάρος w_i
- $ightharpoonup size: s_i = \sum_{j \in T_i} w_j$
- $ightharpoonup rank: r_i = \log s_i$
- lacktriangle συνάρτηση δυναμικού $\Phi = \sum_{i \in \mathit{T}} r_i$

Λήμμα

([2]) Το κόστος της αίτησης στον κόμβο x είναι το πολύ $3(r_t-r_x)+1$ όπου t η ρίζα του δένδρου.

Σκιαγράφηση Απόδειξης

- ightharpoonup φράσσουμε το $cost_j+\Phi_j-\Phi_{j-1}$ για κάθε splay πράξη
- Χρησιμοποιούμε
 - 1. ιδιότητες που προχύπτουν από το σχήμα των πράξεων splay
 - 2. ιδιότητα των λογαρίθμων: $\max_{\substack{x+y \leq 1 \\ x,y \geq 0}} (\log x + \log y) = -2$
- Σ υνολικό κόστος προσπέλασης ακολουθίας: $\sum_{j=1}^{m} cost_j + \sum_{i=1}^{n} \log s_i \sum_{i=1}^{n} \log w_i$

Αυτορυθμιζόμενα Δυαδικά Δένδρα Αναζήτησης

Βησσαρίων Φυσικόπουλος

Ορισμός Προβλήματος

Μια πρώτι

Βέλτιστος Offlini Αλγόριθμος

Splay Trees

Access Lemma (Άνω Φράγμα)

Balance Theorem

Static Optimal

heore m

Working Set Theore

SIÁTETEC Splay Tr

едие

νοικτά Προβλήματ

Αναφορές

Γέλος

Access Lemma ('Av

- · · · · · - ·

Balance Theorem

atic Optimality heorem

Static Finger Theorer

Vorking Set Theore

Ιδιότητες Splay Τ

Deque

Dynamic Finger

Ανοικτά Προβλήματο

Αναφορές

Tálos

Θεώρημα

([2]) Σε ένα splay δένδρο n κόμβων, μια ακολουθία m προσπελάσεων έχει συνολικό χρόνο προσπέλασης $O((m+n)\log n+m)$.

Σχιαγράφηση Απόδειξης

- $ightharpoonup w_i = 1/n$ άρα $W = \sum_{i=1}^n w_i = 1$
- ightharpoonup χόστος μιας προσπέλασης: $3(r_t-r_x)+1=3\lograc{W}{\sum_{i\in T_x}w_i}+1=3\log n+1$
- ightarrow μέγιστη μείωση δυναμιχού: $\log s_i \log w_i \leq \log \frac{W}{w_i} \leq n \log n$
- lacksquare συνολικό κόστος: $m(3\log n+1)+\Phi_m-\Phi_0=O((m+n)\log n+m)$

$$O\left(m + \sum_{i=1}^{n} f(i) \log\left(\frac{m}{f(i)}\right)\right)$$

Σχιαγράφηση Απόδειξης

- $ightharpoonup w_i = f(i)/m \ lpha
 ho lpha \ W = 1$
- ightharpoonup κόστος μιας προσπέλασης: $3\log(m/f(i))+1$
- ightharpoonup μείωση δυναμικού: $\sum_{i=1}^n \log rac{m}{f(i)}$
- ightharpoonup συνολικό κόστος: $\sum_{i=1}^n 3f(i)\log\frac{m}{f(i)} + \sum_{i=1}^n\log\frac{m}{f(i)} + m$

Αυτορυθμιζόμενα Δυαδικά Δένδρα Αναζήτησης

Βησσαρίων Φυσικόπουλος

Ορισμός Προβλήματος

Μια πρώτη λύση

έλτιστος Offline

Splay Trees

ccess Lemma (Άνω ράγμα)

lance Theorem

Static Optimality Theorem

tatic ringer Theorem

orking Set Theorem

vnamic Fin

Ανοικτά Προβλήμο

Αναφορές

Γέλος

Αυτορυθμιζόμενα

Βέλτιστος Offlin Αλγόριθμος

Splay Tree

ccess Lemma (Άνι ράγμα)

Static Optimalit

Static Finger Theorem

orking Set Theore

Ιδιότητες Splay Tree

Deque

Dynamic Finge

Ανοικτά Προβλήματ

Αναφορές

Táloc

Θεώρημα

([2]) Σε ένα splay δένδρο n χόμβων, μια αχολουθία m προσπελάσεων i_1,i_2,\ldots,i_m , όπου έχουμε αριθμήσει τα στοιχεία από 1 μέχρι n με βάση τη συμμετριχή διάταξη χαι s ένα σταθερό στοιχείο, έχει συνολιχό χρόνο προσπέλασης

$$O(n \log n + m + \sum_{k=1}^{m} \log(|i_k - s| + 1))$$

Σχιαγράφηση Απόδειξης

- s ένα σταθερό στοιχείο
- $\begin{array}{l} \blacktriangleright \ \, w_i = \frac{1}{(|i-s|+1)^2} \, \acute{a}\rho\alpha \\ W = \sum_{i=1}^n \frac{1}{((|i-s|+1)^2} \le 2 \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k^2} = O(1) \end{array}$
- ightharpoonup χόστος k προσπέλασης: $6\log(|i_k-s|+1)+1$
- \blacktriangleright μέγιστη μείωση δυναμικού: $2\sum_{i=1}^n \log n = 2n \log n$ αφού $w_i \leq 1/n^2$

- ► Έστω 1,..., m αιτήσεις
- ightharpoonup j αίτηση, στοιχείο i
- t(j) = πλήθος διαφορετικών στοιχείων που προσπελάστηκαν στο χρονικό διάστημα μεταζύ των 2 τελευταίων προσπελάσεων του στοιχείου i
- ightharpoonup π.χ. για την ακολουθία $1,3,2,4,3,5,6,\ldots$ t(7)=5 και t(5)=2

Θεώρημα

([2]) Σε ένα splay δένδρο η κόμβων, μια ακολουθία m προσπελάσεων όπου έχουμε αριθμήσει τα στοιχεία από 1 μέχρι η με βάση τη συμμετρική διάταξη έχει συνολικό χρόνο προσπέλασης

$$O(n \log n + m + \sum_{j=1}^{m} \log(t(j) + 1))$$

Αυτορυθμιζόμενα Δυαδικά Δένδρα Αναζήτησης

Βησσαρίων Φυσικόπουλος

Ορισμός Προβλήματος

Μια πρώτη λύση

Βέλτιστος Offline

..... T.....

piay frees

ccess Lemma (Άνω ράγμα)

lance Theorem

atic Optimai heorem

acie i iliger i licorelli

Working Set Theorem

ιότητες Splay Τ

Deque

Dynamic Finger

Ανοικτά Προβλήματ

Αναφορές

Working Set Theorem

Σχιαγράφηση Απόδειξης

- $\triangleright \beta \acute{\alpha} \rho \eta$: $1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \dots, \frac{1}{k^2}, \dots, \frac{1}{n^2}$
- πιο πρόσφατα προσπελάσιμος κόμβος βάρος 1
- ► Έστω j αίτηση, i στοιχείο, ανακατατάξεις στα βάρη ως εξής:
 - $m{w}_k' = rac{1}{\sqrt{rac{1}{w_k}}+1}$ για κάθε κόμβο k που $w_k > w_i$
- Για κάθε κόμβο i
 - $ightharpoonup s_i = \sum_{i=1}^n 1/i^2, \ \alpha \nu \ i \ \rho \ell \zeta \alpha$
 - s_i μειώνεται ή παραμένει σταθερό, αν i εσωτεριχός χόμβος
 - Συμπέρασμα: οι ανακατατάξεις στα βάρη μειώνουν ή διατηρούν σταθερό το δυναμικό

Working Set Theorem (3)

Σχιαγράφηση Απόδειξης

(συνέχεια...)

$$W = \sum_{i=1}^{n} 1/k^2 = O(1)$$

- ightharpoonup $\acute{lpha}
 angle w_i = rac{1}{(t(j)+1)^2}$
- συνολικό κόστος των προσπελάσεων

$$O(\sum_{j=1}^{m} \log(t(j)+1))$$

μείωση δυναμικού είναι το πολύ

$$\sum_{i=1}^{n} \log \frac{W}{w_i} = \sum_{i=1}^{n} \log(t(j) + 1)^2 = O(n \log n)$$

Αυτορυθμιζόμενα Δυαδικά Δένδρα Αναζήτησης

Βησσαρίων Φυσικόπουλος

Ορισμός Προβλήματος

Μια πρώτη

Βέλτιστος Offline

Splay Tree

ccess Lemma (Άνω

alance Theorem

itatic Optimali: Theorem

atic Finger Theorem

Working Set Theorem

tntsc Splay Tree

Deaue

lynamic Fin

Ανοικτά Προβλήματ

Αναφορές

Ιδιότητες Splay Tree

1. Ισοζυγισμένο Δυαδικό Δένδρο Αναζήτησης

[Balance Theorem]

2. Βέλτιστο Στατικό Δυαδικό Δένδρο (θεωρία πληροφορίας)
[Static Optimality Theorem]

3. Finger Δένδρο Αναζήτησης

[Static Finger Theorem]

- Finger Δένδρο Αναζήτησης: αναζήτηση ενός στοιχείου που απέχει απόσταση d από την αρχή ή το τέλος της λίστας γίνεται σε χρόνο $O(\log d)$.
- 4. Χρόνος Προσπέλασης Στοιχείου $i = \log(1 + workingset(i))$ [Working Set Theorem]
 - \blacktriangleright working set(i) = πλήθος διαφορετικών στοιχείων που προσπελάστηκαν από την τελευταία προσπέλαση του i
 - Όταν ένα στοιχείο προσπελαστεί το κόστος της επόμενης προσπέλασης του αυζάνει λογαριθμικά με το πλήθος των διαφορετικών στοιχείων που προσπελαύνονται

Αυτορυθμιζόμενα Δυαδικά Δένδρα Αναζήτησης

Βησσαρίων Φυσικόπουλος

Ορισμός Προβλήματος

Μια πρώτη λύ

Βέλτιστος Offlin Αλγόριθμος

Splay Trees

ccess Lemma (Άνω ράγμα)

lance Theorem

itatic Optima Theorem

Static Finger Theorem Working Set Theorem

Ιδιότητες Splay Tree

eque

Dynamic Fing

Ανοικτά Προβλήμ

Αναφορές

Γέλος

Βέλτιστος Offlin

Splay Tree

Access Lemma (Άνα Φράγμα)

alance Theoren

Theore m

static ringer Theore

orking Set Theor

διότητες Spla

Deque

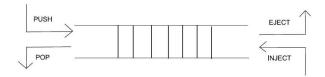
Dynamic Finger

Ανοικτά Προβλήματ

Αναφορές

Tá) o a

► Deque (διπλή ουρά)



- ightharpoonup i θέση ουράς=i στοιχείο <math>T(συμμετρική διάταξη)
- πράξεις deque : PUSH, POP, INJECT, EJECT

POP Εφαρμόζουμε splay πράξεις στο πιο αριστερό φύλλο του T και τον αφαιρούμε από το T.

PUSH Ο κόμβος που εισάγεται γίνεται η νέα ρίζα του T με αριστερό παιδί κενό και δεξί παιδί την παλιά ρίζα.

Deque (2)

Ειχασία

(**Deque [4]**) Το χόστος της εκτέλεσης μιας ακολουθίας m πράξεων διπλής ουράς σε ένα οποιοδήποτε δυαδικό δένδρο n κόμβων χρησιμοποιώντας splay πράξεις είναι O(m+n).

Θεώρημα

(Restricted Deque[4]) Μια ακολουθία m οποιωνδήποτε πράξεων POP, PUSH και INJECT σε μια διπλή ουρά υλοποιημένη με ένα splay δένδρο που περιέχει αρχικά n κόμβους έχει συνολικό χρόνο εκτέλεσης O(n+m).

Αυτορυθμιζόμενα Δυαδικά Δένδρα Αναζήτησης

Βησσαρίων Φυσικόπουλος

Ορισμός Προβλήματος

Μια πρώτη λύση

λγόριθμός

Splay Tree

λccess Lemma (Άνω Þράγμα)

alance Theoren

itatic Optima Theorem

itatic Finger Theorem

orking Set Theorem

διότητες Splay Tree

Deque

Dynamic Finger

Ανοικτά Προβλήματο

Αναφορές

Βέλτιστος Offline Αλγόριθμος

Splay Tree

Access Lemma (Άνω Þράγμα)

alance Theorem

tatic Optimali heorem

tatic Finger Theoren

orking Set Theoren

ότητες Splay

)eque

Dynamic Finger

Ανοιντά Ποοβλήματα

Αναφορές

Γέλος

Ο Cole στο [1] αποδεικνύει μια απο τις 3 εικασίες του [2]

Θεώρημα

(Dynamic Finger [2]) $\Sigma \varepsilon$ ένα splay δένδρο n κόμβων, μια ακολουθία m προσπελάσεων έχει συνολικό χρόνο προσπέλασης

$$O(m+n+\sum_{j=1}^{m-1}\log(|i_{j+1}-i_j|+1))$$

όπου i_j το στοιχείο $i\in [1,m]$ που προσπελαύνεται κατά την j αίτηση.

Ανοιχτά Προβλήματα

Αυτορυθμιζόμενα Δυαδικά Δένδρα Αναζήτησης

Βησσαρίων Φυσικόπουλος

Ορισμός Προβλήματος

Μια πρώτη λύση

ιλγόριθμος

Splay Trees

Access Lemma (Άνι Φράγμα)

alance Theorem

atic Optimal heorem

tatic Finger Theore

orking Set Theo

отутьс Бріау

Deque

Dynamic Finger

Ανοικτά Προβλήματα

Αναφορές

F6) a.a.

Ειχασία

(Dynamic Optimality [2]) Το splay δένδρο ε(ναι έχει λόγο ανταγωνισμού O(1).

Ειχασία

(Traversal [2]) Έστω T_1 , T_2 δύο δυαδικά δένδρα αναζήτησης με n ακριβώς ίδιους κόμβους το καθένα. Έστω ότι προσπελαύνουμε τους κόμβους του T_1 με βάση την προδιάταξη τους στο T_2 , και εφαρμόζουμε σε αυτούς τις splay πράξεις τότε ο συνολικός χρόνος προσπέλασης είναι O(n).

Αναφορές



R. Cole.

On the dynamic finger conjecture for splay trees. part ii: The proof.

30:44-85, 2000.



D. D. Sleator and R. E. Tarjan.

Self-adjusting binary search trees.

J. Assoc. Comput. Mach., 32(3):652-686, 1985.



R. Sundar.

Twists, turns, cascades, deque conjecture, and scanning theorem.

In *FOCS*, pages 555–559, 1989.



R. E. Tarjan.

Sequential access in splay trees takes linear time.

Combinatorica, 5(4):367-378, 1985.

Αυτορυθμιζόμενα Δυαδικά Δένδρα Αναζήτησης

Βησσαρίων Φυσικόπουλος

Ορισμός Προβλήματος

Μια πρώτη

έλτιστος Offline .λγόριθμος

Splay Trees

ccess Lemma (Άνω ράγμα)

lance Theorem

tatic Optimali Theorem

static ringer Theorem

orking Set Theorem

and and other

Deque

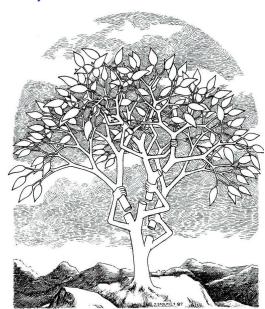
Dynamic Fing

Ανοικτά Προβλήματ

Αναφορές

TALA

Τέλος...



Αυτορυθμιζόμενα Δυαδικά Δένδρα Αναζήτησης

Βησσαρίων Φυσικόπουλος

ρισμός Προβλήματος

Μια πρώτη λύση

βέλτιστος Offlin

Splay Trees

cess Lemma (Άνο άγμα)

lance Theore

tatic Optimality Theorem

atic Finger Theore

orking Set Theorem

διότητες Spl

Deque

Oynamic Finger

Ανοικτά Προβλήμα