Розрахунково-графічне завдання №1

Онищенко О. А. КНТ-122

1. Розв’язати диференційні рівняння першого порядку

Умова

1. $(1-e^x)\sin(y)y' = e^x\cos^3(y)$
2. $xy' = y + \sqrt{x^2+y^2}$
3. $y' + y\cot(x) = \dfrac{\cos^2(x)}{\sin^3(x)}$
4. $2xy^2 = x\dfrac{y'}{\ln(x)} + \dfrac{y}{\ln(x)}$

Рішення 1

Розв'яжемо диференціальне рівняння першого порядку:

$$(1-e^x)\sin(y)y' = e^x\cos^3(y)$$

Ми можемо переписати це рівняння так:

$$(1-e^x)\sin(y)dy = e^x\cos^3(y)dx$$

Тепер ми можемо розділити змінні:

$$\frac{\sin(y)}{\cos^3(y)}dy = \frac{e^x}{1-e^x}dx$$

Інтегруючи обидві частини, отримаємо:

$$\int\frac{\sin(y)}{\cos^3(y)}dy = \int\frac{e^x}{1-e^x}dx$$

Ліва частина є стандартним інтегралом, який можна розв'язати підстановкою $u=\cos(y)$, $du=-\sin(y)dy$. Права частина також є стандартним інтегралом, який можна розв'язати за допомогою підстановки $v = 1-e^x$, $dv=-e^x dx$.

Отже, маємо:

$$-\int\frac{du}{u^3} = -\int\frac{dv}{v}$$

Розв'язавши ці інтеграли, отримаємо:

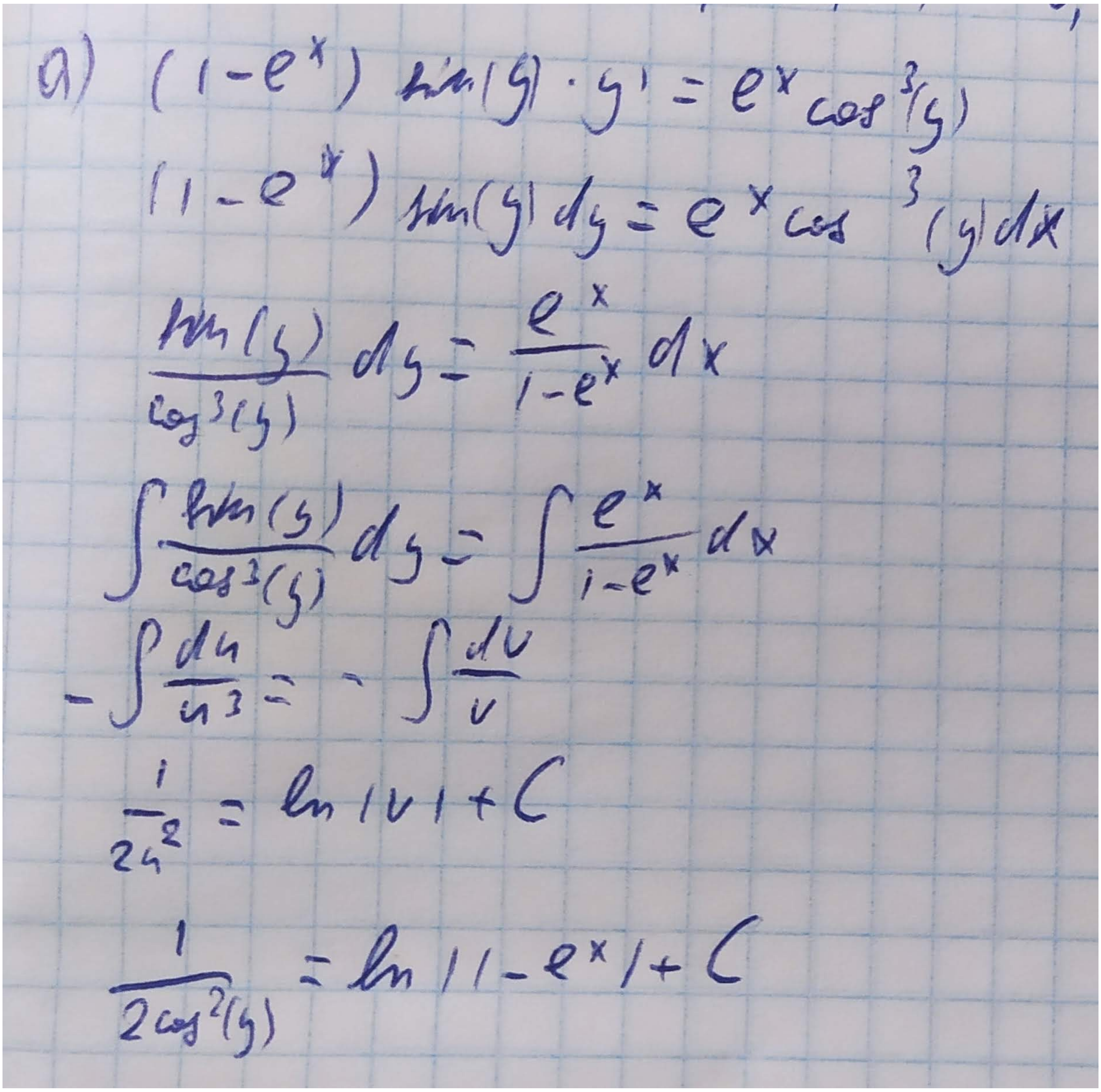
$$\frac{1}{2u^2} = \ln|v| + C$$

Підставивши назад u і v, отримаємо загальний розв'язок:

$$\frac{1}{2\cos^2(y)} = \ln|1 - e^x| + C$$

Це і є розв'язок даного диференціального рівняння.

Рішення 1 в зошиті



a) $(1-e^x)\sin(y)\cdot y' = e^x\cos^3(y)$

$(1-e^x)\sin(y)\,dy = e^x\cos^3(y)\,dx$

$\frac{\sin(y)}{\cos^3(y)}dy = \frac{e^x}{1-e^x}dx$

$\int\frac{\sin(y)}{\cos^3(y)}dy = \int\frac{e^x}{1-e^x}dx$

$-\int\frac{du}{u^3} = -\int\frac{dv}{v}$

$\frac{1}{2u^2} = \ln|v| + C$

$\frac{1}{2\cos^2(y)} = \ln|1-e^x| + C$

Рішення 2

Розв'яжемо диференціальне рівняння першого порядку:

$$xy' = y + \sqrt{x^2 + y^2}$$

Ми можемо переписати його у вигляді:

$$xy' - y = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Тепер ми можемо розділити змінні:

$$\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}dy = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}dx$$

Інтегруючи обидві частини, отримаємо:

$$\int \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}dy = \int \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}dx$$

Ліва частина є стандартним інтегралом, який можна розв'язати підстановкою $u = x$, $du = dx$. Права частина також є стандартним інтегралом, який можна розв'язати підстановкою $v = y$, $dv = dy$.

Отже, маємо

$$\int \frac{du}{\sqrt{u^2+v^2}} = \int \frac{dv}{\sqrt{u^2+v^2}}$$

Розв'язуючи ці інтеграли, отримаємо:

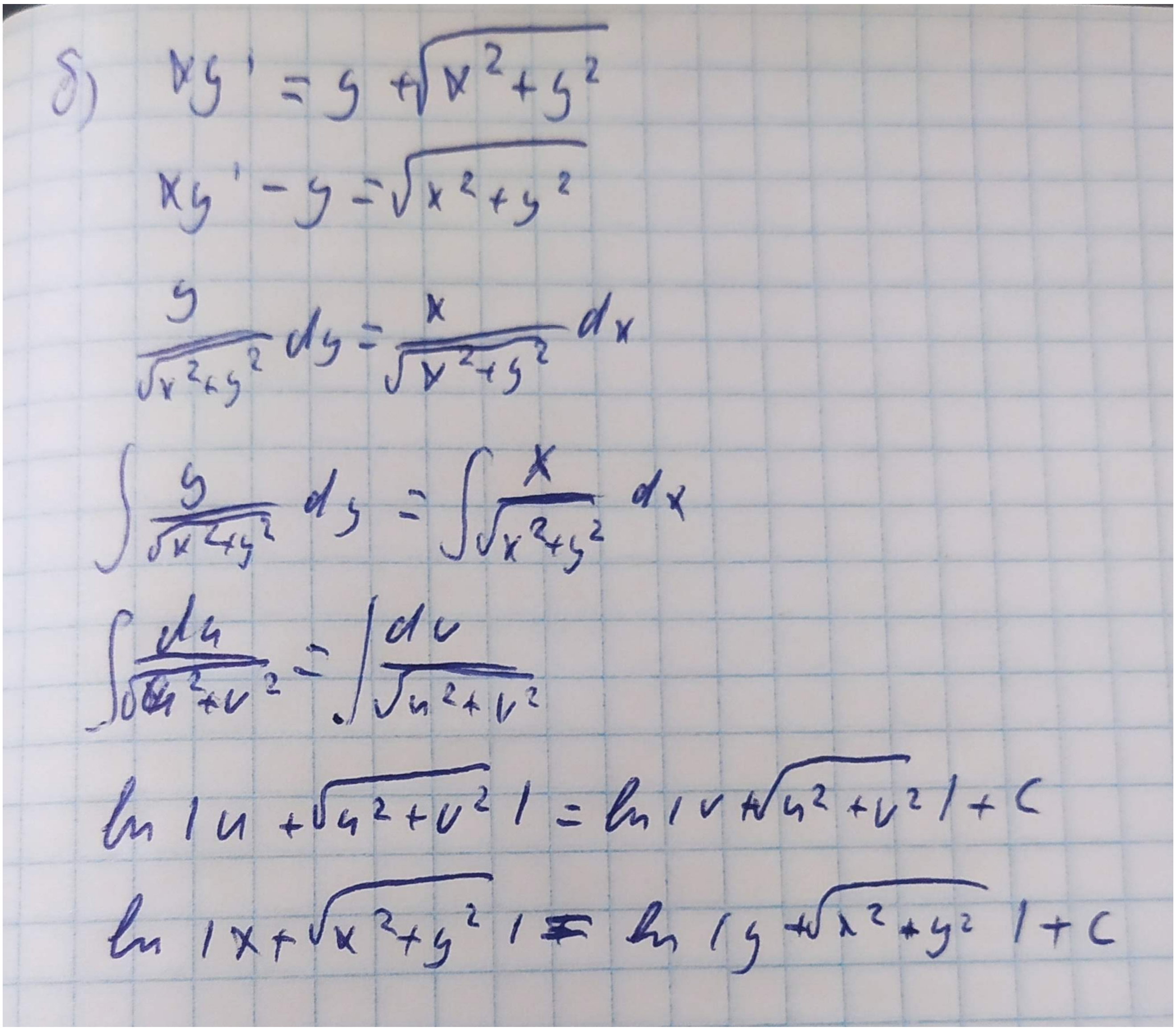
$$\ln|u + \sqrt{u^2+v^2}| = \ln|v + \sqrt{u^2+v^2}| + C$$

Підставивши назад u і v, отримаємо загальний розв'язок:

$$\ln|x + \sqrt{x^2+y^2}| = \ln|y + \sqrt{x^2+y^2}| + C$$

Це і є розв'язок даного диференціального рівняння.

Рішення 2 в зошиті



б) $xy' = y + \sqrt{x^2+y^2}$

$xy' - y = \sqrt{x^2+y^2}$

$\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} dy = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} dx$

$\int \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} dy = \int \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} dx$

$\int \frac{du}{\sqrt{u^2+v^2}} = \int \frac{dv}{\sqrt{u^2+v^2}}$

$\ln|u+\sqrt{u^2+v^2}| = \ln|v+\sqrt{u^2+v^2}| + C$

$\ln|x+\sqrt{x^2+y^2}| = \ln|y+\sqrt{x^2+y^2}| + C$

Рішення 3

Розв'яжемо диференціальне рівняння першого порядку:

$$y' + y\cot(x) = \frac{\cos^2(x)}{\sin^3(x)}$$

Ми можемо переписати це як:

$$y' + y\cot(x) - \frac{\cos^2(x)}{\sin^3(x)} = 0$$

Це лінійне неоднорідне диференціальне рівняння першого порядку. Загальний розв'язок такого рівняння має вигляд:

$$y = e^{-\int P(x)dx}\left(\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C\right)$$

де $(P(x) = \cot(x))$ і $(Q(x) = -\frac{\cos^2(x)}{\sin^3(x)})$.

Отже, маємо:

$$y = e^{-\int \cot(x)dx} \left(\int -\frac{\cos^2(x)}{\sin^3(x)} e^{\int \cot(x)dx} dx + C \right)$$

Розв'язавши ці інтеграли, отримаємо загальний розв'язок:

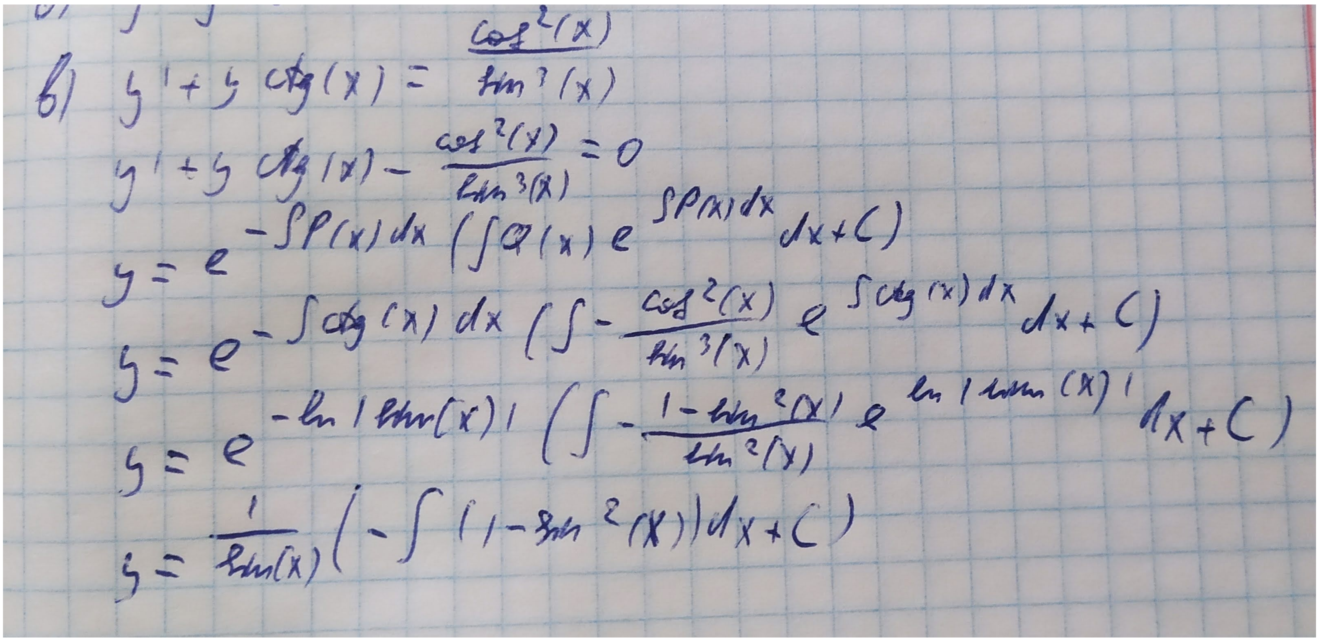
$$y = e^{-\ln|\sin(x)|} \left(\int -\frac{1-\sin^2(x)}{\sin^2(x)} e^{\ln|\sin(x)|} dx + C \right)$$

Спрощуючи, отримаємо:

$$y = \frac{1}{\sin(x)} \left(-\int (1-\sin^2(x)) dx + C \right)$$

Це і є розв'язок даного диференціального рівняння.

Рішення 3 в зошиті



в) $y' + y\,\mathrm{ctg}(x) = \frac{\cos^2(x)}{\sin^3(x)}$

$y' + y\,\mathrm{ctg}(x) - \frac{\cos^2(x)}{\sin^3(x)} = 0$

$y = e^{-\int P(x)dx} \left(\int Q(x) e^{\int P(x)dx} dx + C \right)$

$y = e^{-\int \mathrm{ctg}(x)dx} \left(\int -\frac{\cos^2(x)}{\sin^3(x)} e^{\int \mathrm{ctg}(x)dx} dx + C \right)$

$y = e^{-\ln|\sin(x)|} \left(\int -\frac{1-\sin^2(x)}{\sin^2(x)} e^{\ln|\sin(x)|} dx + C \right)$

$y = \frac{1}{\sin(x)} \left(-\int (1-\sin^2(x)) dx + C \right)$

Рішення 4

Розв'яжемо диференціальне рівняння першого порядку:

$$2xy^2 = x\frac{y'}{\ln(x)} + \frac{y}{\ln(x)}$$

Ми можемо переписати це як:

$$2xy^2 - \frac{xy}{\ln(x)} = x\frac{y'}{\ln(x)}$$

Тепер ми можемо розділити змінні:

$$\frac{y'}{\ln(x)} = \frac{2y^2 - \frac{y}{\ln(x)}}{x}$$

Проінтегрувавши обидві частини, отримаємо:

$$\int \frac{y'}{\ln(x)} dx = \int \frac{2y^2 - \frac{y}{\ln(x)}}{x} dx$$

Ліва частина є стандартним інтегралом, який можна розв'язати підстановкою $u = y$, $du = y'dx$. Права частина також є стандартним інтегралом, який можна розв'язати за допомогою підстановки $v = x$, $dv = dx$.

Отже, маємо

$$\int \frac{du}{\ln(u)} = \int \frac{2v^2 - \frac{1}{\ln(v)}}{v} dv$$

Розв'язуючи ці інтеграли, отримаємо:

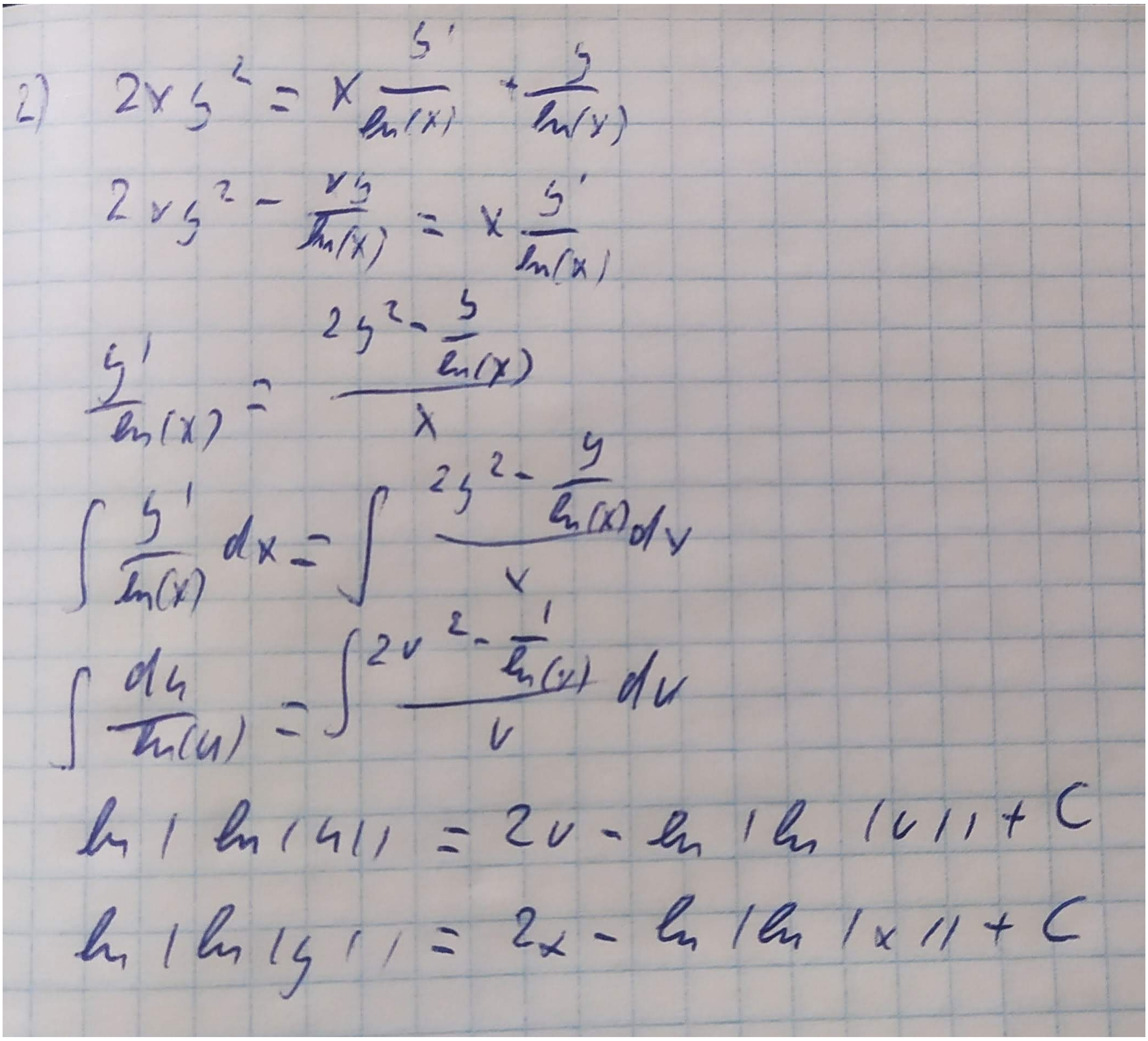
$$\ln|\ln|u|| = 2v - \ln|\ln|v|| + C$$

Підставивши назад u і v, отримаємо загальний розв'язок:

$$\ln|\ln|y|| = 2x - \ln|\ln|x|| + C$$

Це і є розв'язок даного диференціального рівняння.

Рішення 4 в зошиті



2) $2xy^2 = x\frac{y'}{\ln(x)} + \frac{y}{\ln(x)}$

$2xy^2 - \frac{xy}{\ln(x)} = x\frac{y'}{\ln(x)}$

$\frac{y'}{\ln(x)} = \frac{2y^2 - \frac{y}{\ln(x)}}{x}$

$\int \frac{y'}{\ln(x)} dx = \int \frac{2y^2 - \frac{y}{\ln(x)}}{x} dx$

$\int \frac{du}{\ln(u)} = \int \frac{2v^2 - \frac{1}{\ln(v)}}{v} dv$

$\ln|\ln(u)| = 2v - \ln|\ln|v|| + C$

$\ln|\ln|y|| = 2x - \ln|\ln|x|| + C$

2. Розв'язати диференційні рівняння вищих порядків

Умова

1. $y\ln(y) \times y'' + (y')^2 = 0, \qquad y(0) = e \quad y'(0) = 1$
2. $y'' + 4y = \cot(2x)$
3. $y'' + 2y' + 5y = 8.5\cos(2x) + 40e^5 x, \qquad y(0) = 1\frac{7}{17} \quad y'(0) = 8\frac{5}{17}$

Рішення 1

Розв'яжемо дане диференціальне рівняння:

$$y\ln(y)y'' + (y')^2 = 0, \qquad y(0) = e \quad y'(0) = 1$$

Зробимо підстановку $y' = t(y)$, потім $y'' = t'(y)y'$.

Підставивши їх у вихідне рівняння, отримаємо

$$y\ln(y)t'(y)(t(y)) + t(y)^2 = 0$$

Це нелінійне звичайне диференціальне рівняння першого порядку. Ми можемо розв'язати його шляхом відокремлення змінних та інтегрування:

$$\frac{t'(y)}{t(y)} = -\frac{1}{y\ln(y)}$$

Інтегруючи обидві частини відносно y, отримаємо:

$$\ln|t(y)| = -\ln|\ln(y)| + C_1$$

Піднісши обидві частини до степеня, отримаємо:

$$t(y) = \frac{C_2}{\ln(y)}$$

Підставивши назад $t(y) = y'$, отримаємо відокремлюване рівняння:

$$y' = \frac{C_2}{\ln(y)}$$

Відокремивши змінні і проінтегрувавши, отримаємо:

$$\int ydy = C_2\int\frac{1}{\ln(y)}dy$$

Інтеграл у правій частині є неелементарним, але його можна виразити через спеціальні функції. Втім, для розв'язання задачі про початкові значення не обов'язково знаходити його явний вигляд.

Застосовуючи початкові умови $y(0) = e$ і $y'(0) = 1$, ми можемо знайти константи C_1 і C_2. На жаль, не маючи явного вигляду інтеграла, ми не можемо знайти ці константи.

Тому розв'язок диференціального рівняння є неявним і має вигляд:

$$\int ydy = C_2\int\frac{1}{\ln(y)}dy + C_3$$

де C_2 і C_3 - константи, що визначаються початковими умовами.

Рішення 2

Дане диференціальне рівняння є неоднорідним лінійним диференціальним рівнянням другого порядку зі сталими коефіцієнтами. Загальний розв'язок такого рівняння є сумою загального розв'язку відповідного однорідного рівняння та окремого розв'язку неоднорідного рівняння.

Однорідне рівняння має вигляд $y'' + 4y = 0$. Характеристичним поліномом цього рівняння є $r^2 + 4 = 0$, який має комплексні корені $r = \pm 2i$. Отже, загальний розв'язок однорідного рівняння має вигляд $y_h(x) = A\cos(2x) + B\sin(2x)$.

Неоднорідна частина рівняння має вигляд $\cot(2x)$. Ми можемо вгадати конкретний розв'язок у вигляді $y_p(x) = x(a\cos(2x) + b\sin(2x))$. Підставивши це в неоднорідне рівняння і прирівнявши коефіцієнти, знайдемо, що $a = 0$ і $b = -\frac{1}{4}$.

Отже, загальний розв'язок неоднорідного рівняння має вигляд
$y(x) = A\cos(2x) + B\sin(2x) - \dfrac{1}{4}x\sin(2x)$.

Це загальний розв'язок даного диференціального рівняння. Константи A і B можна визначити з початкових умов, але вони не задані.

Рішення 3

Дане диференціальне рівняння є неоднорідним лінійним диференціальним рівнянням другого порядку зі сталими коефіцієнтами. Загальний розв'язок такого рівняння є сумою загального розв'язку відповідного однорідного рівняння та окремого розв'язку неоднорідного рівняння.

Однорідне рівняння має вигляд $y'' + 2y' + 5y = 0$. Характеристичним поліномом цього рівняння є $r^2 + 2r + 5 = 0$, який має комплексні корені $r = -1 \pm 2i$. Отже, загальний розв'язок однорідного рівняння має вигляд $y_h(x) = e^{-x}(A\cos(2x) + B\sin(2x))$.

Неоднорідна частина рівняння складається з двох доданків: $8.5\cos(2x)$ та $40e^{5x}$. Ми можемо знайти окремий розв'язок для кожного доданка окремо, а потім додати їх разом.

Для члена $8.5\cos(2x)$ ми можемо вгадати конкретний розв'язок у вигляді $y_p(x) = a\cos(2x) + b\sin(2x)$. Підставивши це в неоднорідне рівняння і прирівнявши коефіцієнти, знайдемо, що $a = 0$ і $b = -\frac{17}{10}$.

Для члена $40e^{5x}$ ми можемо вгадати конкретний розв'язок у вигляді $y_p(x) = ce^{5x}$. Підставивши це у неоднорідне рівняння, знайдемо, що $c = \frac{8}{9}$.

Отже, загальний розв'язок неоднорідного рівняння має вигляд
$y(x) = e^{-x}(A\cos(2x) + B\sin(2x)) - \dfrac{17}{10}\sin(2x) + \dfrac{8}{9}e^{5x}$.

Використовуючи початкові умови $y(0) = 1\frac{7}{17}$ і $y'(0) = 8\frac{5}{17}$, ми можемо знайти A і B. Це дає нам $A = 1\frac{7}{17}$ і $B = 8\frac{5}{17} + \frac{17}{10} + \frac{40}{9}$.

Отже, розв'язок диференціального рівняння має вигляд:

$$y(x) = e^{-x}\left[\left(1\frac{7}{17}\right)\cos(2x) + \left(8\frac{5}{17} + \frac{17}{10} + \frac{40}{9}\right)\sin(2x)\right] - \frac{17}{10}\sin(2x) + \frac{8}{9}e^{5x}$$

3. Розв'язати систему диференційних рівнянь

Умова

$$\begin{cases} x' = 4x + y \\ y' = x + 4y - e^t \end{cases}$$

Рішення

Дана система диференціальних рівнянь має вигляд:

$$\begin{cases} x' = 4x + y \\ y' = x + 4y - e^t \end{cases}$$

Це система лінійних однорідних диференціальних рівнянь. Ми можемо записати її у матричній формі наступним чином:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ e^t \end{pmatrix}$$

Характеристичне рівняння матриці має вигляд:

$$\lambda^2 - 8\lambda + 15 = 0$$

Розв'язання цього рівняння дає нам два власних значення, $\lambda_1 = 3$ і $\lambda_2 = 5$. Відповідні власні вектори $v_1 = (1, -1)^T$ і $v_2 = (1, 1)^T$.

Отже, загальний розв'язок однорідної системи (без доданка e^t) має вигляд:

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = c_1 e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + c_2 e^{5t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Для знаходження конкретного розв'язку неоднорідної системи можна скористатися методом невизначених коефіцієнтів. Ми вгадуємо розв'язок виду $y_p(t) = Ae^t$, і підставляємо його у друге рівняння для знаходження A. Це дає нам

$$Ae^t + 4Ae^t - e^t = Ae^t \Rightarrow A = \frac{1}{5}$$

Отже, конкретний розв'язок має вигляд $y_p(t) = \frac{1}{5}e^t$, а відповідне значення $x_p(t)$ можна знайти з першого рівняння:

$$x_p(t) = \frac{1}{5}e^t - y_p(t) = 0$$

Отже, загальний розв'язок неоднорідної системи має вигляд:

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = c_1 e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + c_2 e^{5t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{5}e^t \end{pmatrix}$$

де c_1 і c_2 - константи, що визначаються початковими умовами.

Рішення в зошиті

$$\begin{cases} x' = 4x + y \\ y' = x + 4y - e^t \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ e^t \end{pmatrix}$$

$$\lambda^2 - 8\lambda + 15 = 0$$

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(x) \end{pmatrix} = C_1 e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + C_2 e^{5t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$Ae^t + 4Ae^t - e^t = Ae^t \Rightarrow A = \frac{1}{3}$$

$$x_p(t) = \frac{1}{3} e^t - y_p(t) = 0$$

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = C_1 e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + C_2 e^{5t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{3} e^t \end{pmatrix}$$