МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Національний університет "Запорізька політехніка"

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

для самостійної роботи та виконання лабораторних робіт

для студентів факультету КНТ всіх форм навчання

з дисципліни

“КОМП'ЮТЕРНА ДИСКРЕТНА МАТЕМАТИКА”

2022

Методичні вказівки для самостійної роботи та виконання лабораторних робіт для студентів факультету КНТ всіх форм навчання з дисципліни “Комп'ютерна дискретна математика” / Укл.: Т.І. Левицька, І. С. Пожуєва – Запоріжжя: НУ"ЗП", 2022. - 124 с.

Укладачі: Т.І. Левицька, доцент, к.т.н.
І.С. Пожуєва, доцент, к.т.н.

Експерт спеціальності: М.М. Касьян, доцент, к.т.н.

Рецензент: Ю.В. Мастиновський, професор, к.т.н.

Відповідальний за випуск: Т. І. Левицька, доцент, к.т.н.

Рекомендовано до видання НМК
факультету КНТ ЗНТУ
Протокол № 7 від 28.02.2022

Затверджено на засіданні кафедри
прикладної математики ЗНТУ
Протокол № 6 від 24.01.2022

ЗМІСТ

ВСТУП

Завдання до лабораторних робіт складені у відповідності до програми з курсу "Комп'ютерна дискретна математика" багатоступеневої підготовки фахівців і використовуються при проведенні занять зі студентами 1-го курсу факультету комп'ютерних наук і технологій ЗНТУ в ході вивчення курсу. Протягом 3-х тижнів проводиться одна лабораторна робота.

Метою лабораторного практикуму є закріплення теоретичних знань по дисципліні «Комп'ютерна дискретна математика» та придбання практичних навичок по моделюванню об'єктів різного типу і операцій над ними.

У вказівках приведені основні теоретичні данні та формули, приклади розв’язування задач. Приведено 30 варіантів лабораторних робіт, кожний з яких має практичні задачі за темами: множини, комбінаторика, графи, що відповідає програмі з курсу комп'ютерної дискретної математики для спеціальностей факультету КНТ. Номер варіанту визначається за номером студента в журналі відвідування занять. Наведено завдання для комп'ютерної реалізації задачі, що відповідає темі лабораторної роботи.

Особливості написання комп'ютерних програм. При виконанні цього завдання студент може використовувати «С»-подібну мову програмування JavaScript. Інтерфейс програм може бути створений з використанням мови HTML. Взагалі студент вільний у виборі мови програмування. Робота над таким міні-проектом включає в обов'язковому порядку створення блок-схеми й складання електронного звіту. Остаточні результати блок-схеми, коду програми й тестового приклада представляються студентом викладачеві в надрукованому виді.

При оформленні роботи в обов'язковому порядку у звіті повинні міститись:

1. тема роботи;
2. розв'язання завдання № 1;
3. постановка задачі із завдання № 2;
4. блок-схема програми;
5. код програми;
6. тестовий приклад, можливо з перевіркою деяких задач завдання № 1 за допомогою розробленої програми.

Обов'язковою умовою захисту лабораторної роботи є демонстрація роботи створеної програми викладачеві.

Тестування й налагодження програм може проводитись на платформі https://jsfiddle.net. Інструментарій для зображення блок-схем перебуває на сайті https://www.draw.io/.

Довідкові матеріали по JavaScript:

http://javascript.ru

https://learn.javascript.ru/

Також програму Notepad++ для створення програм мовою JavaScript можна скачати на офіційному сайті https://notepad-plus-plus.org/

Лабораторна робота № 1.
МОДЕЛЮВАННЯ ОСНОВНИХ ОПЕРАЦІЙ ДЛЯ ДВОХ ЧИСЛОВИХ МНОЖИН ТА ПОБУДОВА МАТРИЦІ БІНАРНОГО ВІДНОШЕННЯ

ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ ТА ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ

Множина – це сукупність деяких об'єктів (елементів множини), виділених за певною ознакою з інших об'єктів. При цьому повинно бути дано повний опис класу всіх об'єктів, які розглядаються (універсальна множина U). Факт належності елемента a множині A позначається $a \in A$. Запис $a \notin A$ означає, що елемент a універсальної множини не належить множині A. Якщо для всіх елементів множини A і тільки для них виконується властивість P, то це позначають $A = \left\{ a \mid P(a) \right\}$. Інколи вдається перелічити всі елементи множини A. Тоді наводять повний перелік усіх різних елементів множини: $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$.

Множина, яка не має жодного елемента, називається *порожньою* і позначається $\varnothing$.

Якщо кожен елемент множини A є елементом множини B, то A називається *підмножиною* множини B, що позначають $A \subset B$. Вважається, що порожня множина є підмножиною будь-якої множини, а також $A \subset A$.

Множина всіх підмножин множини A називається *булеаном* і позначається $P(A)$, або 2^A. Потужність скінченної множини дорівнює кількості її елементів, позначається $|A|$. Потужність порожньої множини дорівнює 0.

Якщо $|A| = n$, то $|P(A)| = 2^n$.

<u>Приклад.</u> $\{1, 4, 5\} \subset \{-1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 7\}$, але

$$\{1, 4, 5\} \notin \{-1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 7\}$$

<u>Приклад.</u> Знайти булеан множини $A = \{ a, b, c \}$.

Розв'язання.

Потужності множин $|A| = 3$, $|P(A)| = 8$. Булеан має вигляд

$$P(A) = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}, \{a,b,c\}\}.$$

Дві множини A і B *рівні* між собою, якщо $A \subset B$ і $B \subset A$.

Над множинами можна виконувати операції: об'єднання, переріз, доповнення, різницю, симетричну різницю, декартів добуток.

Об'єднання - $A \cup B = \{ x \mid x \in A \vee x \in B \}$,

переріз - $A \cap B = \{ x \mid x \in A \wedge x \in B \}$,

доповнення - $\overline{A} = \{ x \mid x \notin A \}$,

різниця - $A \setminus B = \{ x \mid x \in A \wedge x \notin B \}$,

симетрична різниця - $A \Delta B = \{ x \mid (x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \in B \wedge x \notin A) \}$.

Тут використано логічні знаки: $\vee$ - «або» (диз'юнкція) , $\wedge$ - «і» (кон'юнкція).

<u>Приклад.</u> Виконати дії над множинами $A = \{1,2,3,4\}$ і $B = \{3,4,5,6,7\}$.

Розв'язання.

$A \cup B = \{1,2,3,4,5,6,7\}$, $A \cap B = \{3,4\}$, $A \setminus B = \{1,2\}$, $A \Delta B = \{1,2,5,6,7\}$.

<u>Приклад.</u> Довести логічним методом, що для довільних множин A і B виконується тотожність $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.

Розв'язання.

Нехай $x \in \overline{A \cup B} \Rightarrow x \notin (A \cup B) \Rightarrow (x \notin A) \wedge (x \notin B) \Rightarrow$ $\Rightarrow x \in \overline{A} \wedge x \in \overline{B} \Rightarrow x \in \overline{A} \cap \overline{B}$. Таким чином, доведено, що $\overline{A \cup B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$. Повторюючи міркування в зворотному порядку, одержимо $\overline{A} \cap \overline{B} \subset \overline{A \cup B}$, що доводить тотожність.

Пріоритет виконання операцій у спадному порядку – доповнення, переріз, об'єднання, різниця, симетрична різниця.

<u>Приклад.</u> Зобразити на діаграмі Ейлера-Вена множину, яку задано за допомогою операцій: $A \cup C \,\Delta\, B \setminus A \cap C$.

Розв’язання.

З врахуванням порядку виконання операцій (дивись пріоритет операцій): 1) $A \cap C$ (рис.1.1), 2) $A \cup C$ (рис.1.2), 3) $B \setminus A \cap C$ (рис.1.3), 4) $A \cup C \,\Delta\, B \setminus A \cap C$ (рис.1.4).

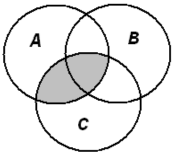


Рисунок 1.1

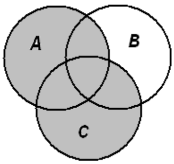


Рисунок 1.2

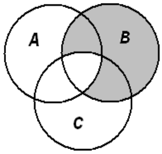


Рисунок 1.3

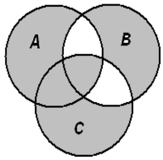


Рисунок 1.4

<u>Приклад.</u> За допомогою дій над множинами описати множину, зображену на рис.1.5.

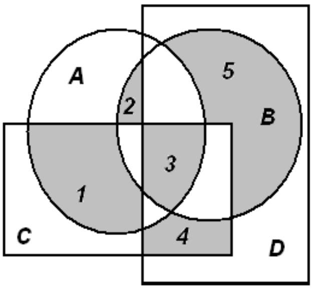


Рисунок 1.5

Розв’язання.

Виділена частина є об’єднанням п’ятьох частин. Опишемо кожну окремо: 1) $A \cap C \setminus B \setminus D$, 2) $A \cap B \setminus D \setminus C$, 3) $A \cap B \cap C \cap D$, 4) $C \cap D \setminus A \setminus B$, 5) $B \setminus A \setminus C$. Тому результат буде мати вигляд $(A \cap C \setminus B \setminus D) \cup (A \cap B \setminus D \setminus C) \cup (A \cap B \cap C \cap D) \cup (C \cap D \setminus A \setminus B) \cup (B \setminus A \setminus C)$.

<u>Закони алгебри множин</u>:

1. $A \cup B = B \cup A$, $A \cap B = B \cap A$ комутативність;
2. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$, $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ асоціативність;
3. $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$,
   $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$ дистрибутивність;
4. $A \cup \varnothing = A$, $A \cap \varnothing = \varnothing$ властивості порожньої множини;
5. $A \cup U = U$, $A \cap U = A$ властивості універсума;

6. $A \cup \overline{A} = U$, $A \cap \overline{A} = \varnothing$ властивості доповнення;
7. $A \cup A = A$, $A \cap A = A$ ідемпотентність;
8. $\overline{\overline{A}} = A$ інволюція;
9. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$, $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ закони де Моргана;
10. $(A \cup B) \cap A = A$, $(A \cap B) \cup A = A$ закон поглинання;
11. $A \setminus B = A \cap \overline{B}$ заміна різниці;
12. $A \Delta B = (A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A})$ заміна симетричної різниці.

Приклад. Спростити вираз, використовуючи закони алгебри множин $\overline{A \setminus B \cup C} \cap A \cup B$.

Розв’язання.

$$\overline{A \setminus B \cup C} \cap A \cup B = \overline{A \cap \overline{B \cup C}} \cap A \cup B =$$
$$(\overline{A} \cup \overline{\overline{B \cup C}}) \cap A \cup B = (\overline{A} \cup B \cup C) \cap A \cup B =$$
$$= [(\overline{A} \cap A) \cup ((B \cup C) \cap A)] \cup B = [\varnothing \cup (B \cap A) \cup (C \cap A)] \cup B =$$
$$= (B \cap A) \cup (C \cap A) \cup B = ((B \cap A) \cup B) \cup (C \cap A) = B \cup (C \cap A).$$

Декартів добуток множин A і B (позначається $A \times B$) – це множина всіх упорядкованих пар елементів (a,b), де $a \in A$, $b \in B$:

$$A \times B = \{(a,b) | a \in A \,\&\, b \in B\},$$ де $\&$ - логічна зв'язка "і".

При цьому вважається, що $(a_1, b_1) = (a_2, b_2)$ тоді і тільки тоді, коли $a_1 = a_2$, $b_1 = b_2$.

Потужність декартова добутку дорівнює $|A \times B| = |A| \cdot |B|$.

Приклад. Довести тотожність $(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D)$.

Розв’язання.

Нехай $(x, y) \in (A \times B) \cap (C \times D) \Leftrightarrow$

$(x, y) \in (A \times B) \,\&\, (x, y) \in (C \times D) \Leftrightarrow$

$(x \in A \,\&\, y \in B) \,\&\, (x \in C \,\&\, y \in D) \Leftrightarrow$

$(x \in A \,\&\, x \in C) \,\&\, (y \in B \,\&\, y \in D) \Leftrightarrow$

$(x \in A \cap C) \,\&\, (y \in B \cap D) \Leftrightarrow (x, y) \in (A \cap C) \times (B \cap D)$.

Бінарним відношенням R називається підмножина декартова добутку $A \times B$ (тобто $R \subset A \times B$).

Якщо пара (a,b) належить відношенню R, то пишуть $(a,b) \in R$, або aRb.

Областю визначення бінарного відношення $R \subset X \times Y$ називається множина $\delta_R = \{x \mid \exists y \ (x,y) \in R\}$, а *областю значень* – множина $\rho_R = \{y \mid \exists x \ (x,y) \in R\}$ ($\exists$ - існує).

Для скінченних множин бінарне відношення $R \subset A \times B$ зручно задавати за допомогою *матриці відношення* $R_{m \times n} = (r_{ij})$, де $m = |A|$, $n = |B|$. Елементами матриці є значення $r_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ якщо } (a_i, b_j) \in R \\ 0, \text{ якщо } (a_i, b_j) \notin R \end{cases}$.

Приклад. Знайти матрицю відношення $R \subset M \times 2^M$, де $R = \{(x,y) \mid x \in M \ \& \ y \subset M \ \& \ x \in y \ \& \ |\, y \,| > x + 1\}$,

$M = \{x \mid x \in Z \ \& \ |\, x \,| \le 1\}$, Z - множина цілих чисел.

Розв'язання.

Згідно з означенням матриці відношення, розв'язок має вигляд

	$\varnothing$	{-1}	{0}	{1}	{-1,0}	{-1,1}	{0,1}	{-1,0,1}
-1	0	1	0	0	1	1	0	1
0	0	0	0	0	1	0	1	1
1	0	0	0	0	0	0	0	1

Приклад. Зобразити відношення графічно, де R - множина дійсних чисел, та знайти його область визначення та область значень:

1. $\alpha_1 = \{(x,y) \mid (x,y) \in R^2 \ \& \ |2x + y| \le 4 \ \& \ x \ge 0\}$;

2. $\alpha_2 = \{(x,y) \mid (x,y) \in R^2 \ \& \ x^2 + 2x - y^2 \le 0\}$.

Розв'язання.

Зображення відношення α_1 зводиться до графічного розв'язання системи нерівностей $\begin{cases} 2x + y \le 4 \\ 2x + y \ge -4 \end{cases}$. Розв'язок цієї системи з врахуванням останньої умови зображено на рис. 1.6. Область визначення $\delta_{\alpha_1} = [0;\infty)$, область значень $\rho_{\alpha_1} = (-\infty;4]$.

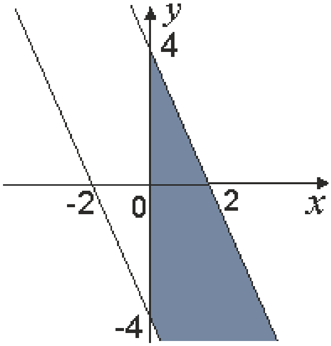


Рисунок 1.6

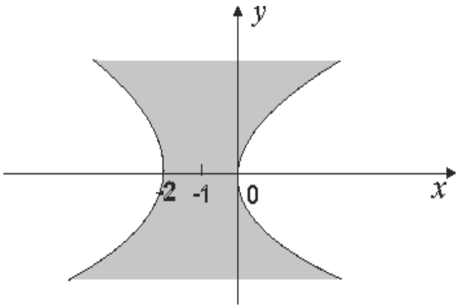


Рисунок 1.7

Для побудови області, яка відповідає відношенню α_2, знаходимо границю цієї області $x^2 + 2x - y^2 = 0$, або $(x+1)^2 - y^2 = 1$. Це є рівняння гіперболи з центром симетрії в точці (-1; 0) та дійсною та уявною піввісями, рівними 1. Тому відношенню α_2 відповідає частина площини, зображена на рис. 1.7. Область визначення $\delta_{\alpha_2} = R$, область значень $\rho_{\alpha_2} = R$.

<u>Види бінарних відношень</u>.

Нехай задано бінарне відношення R на множині A^2: $R \subseteq A \times A = \{(a,b) \mid a \in A, b \in A\}$.

1. Бінарне відношення R на множині A називається *рефлексивним*, якщо для будь якого $a \in A$ виконується aRa, тобто $(a,a) \in \mathrm{R}$. Головна діагональ матриці рефлексивного відношення складається з одиниць. Граф рефлексивного відношення обов’язково має петлі у кожній вершині.

2. Бінарне відношення R на множині A називається *антирефлексивним*, якщо для будь якого $a \in A$ не виконується aRa, тобто $(a,a) \notin R$. Головна діагональ матриці антирефлексивного відношення складається з нулів. Граф антирефлексивного відношення не має петель.

3. Бінарне відношення R на множині A називається *симетричним*, якщо для будь яких $a,b \in A$ з aRb слідує bRa, тобто якщо $(a,b) \in R$, то і $(b,a) \in R$. Матриця симетричного відношення симетрична відносно головної діагоналі. Граф симетричного відношення не є орієнтованим.

4. Бінарне відношення R на множині A називається *антисиметричним*, якщо для будь яких $a,b \in A$ з aRb та bRa слідує що $a = b$. Тобто якщо $(a,b) \in R$ і $(b,a) \in R$, то $a = b$. Матриця антисиметричного відношення не має жодної пари одиниць, які знаходяться на симетричних місцях по відношенню до головної діагоналі. У графа антисиметричного відношення вершини з'єднуються тільки однією напрямною дугою.

5. Бінарне відношення R на множині A називається *транзитивним*, якщо для будь яких $a,b,c \in A$ з aRb та bRc слідує, що aRc. Тобто якщо $(a,b) \in R$ і $(b,c) \in R$, то $(a,c) \in R$. Матриця транзитивного відношення характеризується тим, що якщо елемент матриці $\sigma_{ij} = 1$ та $\sigma_{jm} = 1$, то обов'язково $\sigma_{im} = 1$. Граф транзитивного відношення такий, що якщо з'єднані дугами, наприклад, перша-друга та друга-третя вершини, то обов'язково є дуга з першої в третю вершину.

6. Бінарне відношення R на множині A називається *антитранзитивним*, якщо для будь яких $a,b,c \in A$ з aRb та bRc слідує що не виконується aRc. Тобто якщо $(a,b) \in R$ і $(b,c) \in R$, то $(a,c) \notin R$. Матриця антитранзитивного відношення характеризується тим, що якщо елемент матриці $\sigma_{ij} = 1$ та $\sigma_{jm} = 1$, то обов'язково $\sigma_{im} = 0$. Граф антитранзитивного відношення такий, що якщо з'єднані дугами, наприклад, перша-друга та друга-третя вершини, то обов'язково немає дуги з першої в третю вершину.

<u>Приклад.</u> На множині $A = \{1,2,3,4,5\}$ задано відношення $R = \{(a,b) \mid a,b \in A, (a+b) - \textit{парне число}\}$. Визначити тип даного відношення.

Розв'язання.

Матриця даного відношення має вигляд: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Вочевидь, що дане відношення є:

- рефлексивним (вздовж головної діагоналі знаходяться одиниці);

- симетричним ($\sigma_{13} = \sigma_{31}, \sigma_{24} = \sigma_{42}$ та інші);

- транзитивним ($(1,3) \in R$, $(3,5) \in R \Rightarrow (1,5) \in R$; $(1,5) \in R$, $(5,3) \in R \Rightarrow (1,3) \in R$ та інші).

<u>Приклад.</u> Які властивості на множині $A = \{a, b, c, d\}$ має бінарне відношення $R = \{(a,b), (b,d), (a,d), (b,a), (b,c)\}$.

Розв’язання.

Матриця даного відношення має вигляд: $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Дане відношення є:

- антирефлексивним (вздовж головної діагоналі знаходяться нулі);

- не симетричним, так як $\sigma_{23} = 1$, а $\sigma_{32} = 0$;

- не антисиметричним, так як $\sigma_{12} = \sigma_{21} = 1$;

- не транзитивним, тому що $\sigma_{12} = 1$, $\sigma_{23} = 1$ та $\sigma_{13} = 0$.

Функцією з множини X на множину Y називається всюди визначена бінарна відповідність, при якому кожен елемент множини X зв’язаний з єдиним елементом множини Y. Функція записується наступним чином: якщо $f \subset X \times Y$, то $f : X \to Y$. Множину X називають областю визначення, а Y – множиною значень функції.

Областю значень функції називається підмножина в Y, яка складається з образів всіх елементів $x \in X$. Вона позначається символом $f(X)$.

Оскільки для кожного $x \in X$ існує єдиним образом визначений $y \in Y$, такий що $(x, y) \in f$, то записують $y = f(x)$ та говорять, що функція f відображує множину X на множину Y, а $f(x)$ називають образом x при відображенні f або значенням функції, яка відповідає аргументу x.

Види функціональних відношень

1. Функція називається ін’єктивною (ін’єкцією), якщо з умови $f(x_1) = f(x_2)$ слідує, що $x_1 = x_2$ для будь-яких $x_1, x_2 \in X$. Функція ін’єктивна тоді і тільки тоді, коли для будь-яких $x_1, x_2 \in X$ якщо $x_1 \neq x_2$, то $f(x_1) \neq f(x_2)$, тобто для різних аргументів функція f приймає різні значення.

2. Функція називається сюр’єктивною (сюр’єкцією), якщо для кожного $y^* \in Y$ знайдеться такий $x^* \in X$, що $y^* = f(x^*)$.

3. Функція називається бієктивною (бієкцією), якщо вона ін’єктивна та сюр’єктивна одночасно. Таку функцію ще називають взаємно-однозначним відображенням.

Приклад. Визначити, які з зображених функцій ін’єктивні, сюр’єктивні або бієктивні.

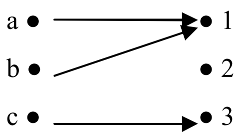


Рисунок 1.8

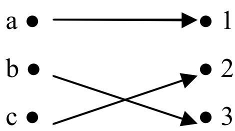


Рисунок 1.9

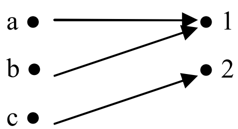


Рисунок 1.10

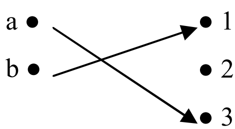


Рисунок 1.11

Розв'язання.

1. Рисунок 1.8. Дана функція не ін'єктивна, тому що значення $1 \in Y$ відповідає a та $b \in X$. Функція не є сюр'єктивною, тому що у елемент $2 \in Y$ нічого не переходить;

2. Рисунок 1.9. Дана функція ін'єкнивна, тому що різним аргументам відповідають різні значення. Функція сюр'єктивна, тому що множина її значень співпадає з областю значень. У даному випадку маємо бієктивну функцію;

3. Рисунок 1.10. Дана функція не інє'ктивна, тому що значення 1 функція приймає як для a так і для b. Функція сюр'єктивна, тому що множина Y співпадає з областю значень функції, тобто для кожного $y \in Y$ існує відповідний аргумент x з області визначення, що $y = f(x)$;

4. Рисунок 1.11. Дана функція ін'єктивна, но не сюр'єктивна.

ІНДИВІДУАЛЬНІ ЗАВДАННЯ

Завдання №1. Використовуючи теоретичні відомості, розв'язати наступні задачі за своїм варіантом:

Варіант № 1

1. Для даних скінченних множин $A = \{1,2,3,4,5,6,7\}$, $B = \{4,5,6,7,8,9,10\}$, $C = \{2,4,6,8,10\}$ та універсума $U = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$ знайти множину, яку задано за допомогою операцій: а) $(A \cap B) \cup C$; б) $(A \cup C) \setminus \overline{B}$.

2. На множинах задачі 1 побудувати булеан множини $\overline{(B \setminus \overline{A}) \cup C}$. Знайти його потужність.

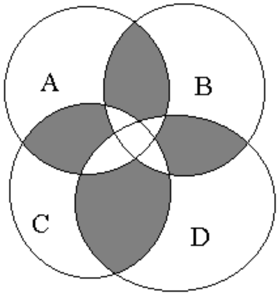
3. Логічним методом довести тотожність:

$$A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus (A \cap C).$$

4. Зобразити на діаграмі Ейлера-Венна множину:

$$((A \cap B) \Delta C) \setminus (A \cup C).$$

5. Множину зображено на діаграмі. Записати її за допомогою операцій.



6. Спростити вигляд множини, яка задана за допомогою операцій, застосовуючи закони алгебри множин (у відповідь множини можуть входити не більше одного разу):

$$\overline{A \cap B \cap C} \cup (A \cap B) \cup \overline{C}\ .$$

7. Чи є вірною рівність $(A \times B) \cap (A \times C) = A \times (B \cap C)$?

8. Знайти матрицю відношення $R \subset M \times 2^M$, де $M = \{1, 2, 3\}$: $R = \{(x, y) \mid x \in M \ \&\ y \subset M \ \&\ |y| = x\}$.

9. Зобразити відношення графічно:
$\alpha = \{(x, y) \mid (x, y) \in R^2 \ \&\ |x - 2y| \le 3\}$, де R - множина дійсних чисел.

10. Визначити множину (якщо це можливо), на якій дане відношення є: а) функціональним; б) бієктивним:

$\alpha = \{(x, y) \mid (x, y) \in R^2 \ \&\ \sqrt{(x + y)^2} = 9\}$.

Варіант № 2

1. Для даних скінченних множин $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $B = \{4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$, $C = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ та універсума $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ знайти множину, яку задано за допомогою операцій: а) $A \cup \overline{B \cap C}$; б) $(A \setminus C) \Delta B$.

2. На множинах задачі 1 побудувати булеан множини $(\overline{B}\, \Delta\, C) \cap A$. Знайти його потужність.

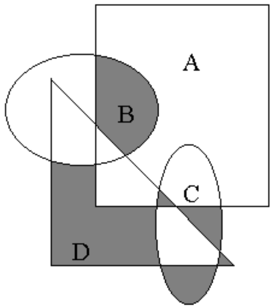
3. Логічним методом довести тотожність:

$$\left(A\cap B\right)\setminus\left(A\cap C\right)=\left(A\cap B\right)\setminus C .$$

4. Зобразити на діаграмі Ейлера-Венна множину:

$$((A\setminus B)\Delta(C\setminus B))\cup B .$$

5. Множину зображено на діаграмі. Записати її за допомогою операцій.



6. Спростити вигляд множини, яка задана за допомогою операцій, застосовуючи закони алгебри множин (у відповідь множини можуть входити не більше одного разу): $(A\setminus B)\cup(A\cap B\cap C)$.

7. Чи є вірною рівність $(A\cap B)\times(C\cap D)=(A\times C)\cap(B\times D)$?

8. Знайти матрицю відношення $R\subset 2^A\times 2^B$: $R=\{(x,y)\big|\, x\subset A\,\&\, y\subset B\,\&\, |x|=|y|\,\&\, x\cap y=\varnothing\}$, де $A=\{1,2\}$, $B=\{1,3,5\}$.

9. Зобразити відношення графічно:

$\alpha=\{(x,y)\big|\,(x,y)\in R^2\,\&\, x^2-2x+y^2\le 3\}$, де R - множина дійсних чисел.

10. Визначити множину (якщо це можливо), на якій дане відношення є: а) функціональним; б) бієктивним:

$\alpha=\{(x,y)\big|\,(x,y)\in R^2\,\&\, y=\ln|x|\,\}$.

Варіант № 3

1. Для даних скінченних множин $A=\{1,2,3,4,5,6,7\}$, $B=\{5,6,7,8,9,10\}$, $C=\{1,2,3,8,9,10\}$ та універсума

$U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ знайти множину, яку задано за допомогою операцій: а) $\overline{B} \cup \overline{C}$; б) $\overline{A \Delta C}$.

2. На множинах задачі 1 побудувати булеан множини $\overline{(C \setminus A) \cup (A \setminus B)}$. Знайти його потужність.

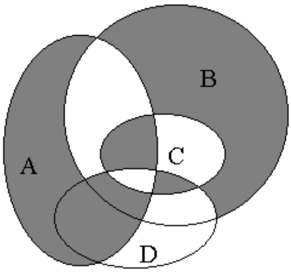
3. Логічним методом довести тотожність:

$$\left(A \cup B\right) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C).$$

4. Зобразити на діаграмі Ейлера-Венна множину:

$$(A \setminus (C \setminus B)) \cap (C \Delta A).$$

5. Множину зображено на діаграмі. Записати її за допомогою операцій.



6. Спростити вигляд множини, яка задана за допомогою операцій, застосовуючи закони алгебри множин (у відповідь множини можуть входити не більше одного разу): $(A \setminus B) \Delta A$.

7. Чи є вірною рівність $(A \cap B) \times (A \cap C) = A \times (B \cap C)$?

8. Знайти матрицю відношення $R \subset M \times 2^M$, де $M = \{1, 2, 3\}$:
$R = \{(x, y) | x \in M \,\&\, x \in y \,\&\, y \subset M \,\&\, |y| = x\}$.

9. Зобразити відношення графічно:
$\alpha = \{(x, y) | (x, y) \in R^2 \,\&\, |x + 1| \geq y\}$, де R - множина дійсних чисел.

10. Визначити множину (якщо це можливо), на якій дане відношення є: а) функціональним; б) бієктивним:
$\alpha = \{(x, y) | (x, y) \in R^2 \,\&\, y = |\ln(x - 1)|\}$.

Варіант № 4

1. Для даних скінченних множин $A=\{1,2,3,4,5,6,7\}$, $B=\{4,5,6,7,8,9,10\}$, $C=\{2,4,6,8,10\}$ та універсума $U=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$ знайти множину, яку задано за допомогою операцій: а) $B\setminus(C\setminus A)$; б) $\overline{B}\Delta\overline{C}$.

2. На множинах задачі 1 побудувати булеан множини $\overline{(A\setminus B)\cup C}\cap A$. Знайти його потужність.

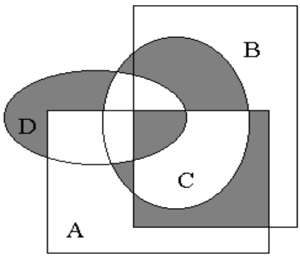
3. Логічним методом довести тотожність:

$$A\setminus(B\cup C)=(A\setminus B)\setminus C.$$

4. Зобразити на діаграмі Ейлера-Венна множину:

$$(C\Delta A\cap B\cup C)\cup(B\setminus A).$$

5. Множину зображено на діаграмі. Записати її за допомогою операцій.



6. Спростити вигляд множини, яка задана за допомогою операцій, застосовуючи закони алгебри множин (у відповідь множини можуть входити не більше одного разу): $((A\Delta B\cup C)\cup\overline{A})\cap C$.

7. Чи є вірною рівність: $(A\cap B)\times C=(A\times C)\cap(B\times C)$?

8. Знайти матрицю відношення $R\subset M\times 2^{M}$: $R=\{(x,y)\,|\,x\in M\ \&\ y\subset M\ \&\ |\,y\,|=|\,x\,|\,\}$, де $M=\{x\,|\,x\in Z\ \&\ |\,x\,|\le 1\}$, Z - множина цілих чисел.

9. Зобразити відношення графічно:

$\alpha=\{(x,y)\,|\,(x,y)\in R^{2}\ \&\ |4+2x|=y\,\}$, де R - множина дійсних чисел.

10. Визначити множину (якщо це можливо), на якій дане відношення є: а) функціональним; б) бієктивним:

$\alpha = \{(x, y) \mid (x, y) \in R^2 \ \& \ (x + y)^2 = 4\}$.

Варіант № 5

1. Для даних скінченних множин $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $B = \{4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$, $C = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ та універсума $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ знайти множину, яку задано за допомогою операцій: а) $A \cap B \cup C$; б) $\overline{A} \Delta \overline{C}$.

2. На множинах задачі 1 побудувати булеан множини $C \setminus (\overline{A} \cup \overline{B}) \cap C$. Знайти його потужність.

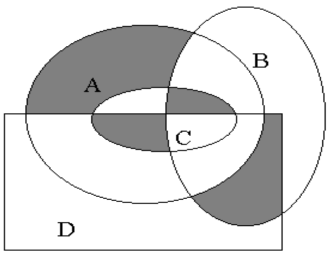
3. Логічним методом довести тотожність:

$$A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C).$$

4. Зобразити на діаграмі Ейлера-Венна множину

$$B \cap (A \Delta (C \setminus B)) \setminus A.$$

5. Множину зображено на діаграмі. Записати її за допомогою операцій.



6. Спростити вигляд множини, яка задана за допомогою операцій, застосовуючи закони алгебри множин (у відповідь множини можуть входити не більше одного разу): $((A \Delta B) \setminus C) \cap \overline{B} \cup (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

7. Чи є вірною рівність $(A \times B) \cap (C \times D) = (A \times D) \cap (C \times B)$?

8. Знайти матрицю відношення $R \subset M \times 2^M$: $R = \{(x, y) \mid x \in M \ \& \ y \subset M \ \& \ |y| < x + 2\}$,

де $M = \{x \mid x \in Z \ \& \ |x| \le 1\}$, Z - множина цілих чисел.

9. Зобразити відношення графічно:
$\alpha = \{(x, y) \mid (x, y) \in R^2 \ \& \ (x + y)^2 = 4\}$, де R - множина дійсних чисел.

10. Визначити множину (якщо це можливо), на якій дане відношення є: а) функціональним; б) бієктивним:
$\alpha = \{(x, y) \mid (x, y) \in R^2 \ \& \ xy = 2\}$.

Варіант № 6

1. Для даних скінченних множин $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $B = \{5, 6, 7, 8, 9, 10\}$, $C = \{1, 2, 3, 8, 9, 10\}$ та універсума $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ знайти множину, яку задано за допомогою операцій: а) $(A \cap C) \cup B$; б) $B \Delta C$.

2. На множинах задачі 1 побудувати булеан множини $C \setminus (\overline{A} \cup \overline{C}) \cap B$. Знайти його потужність.

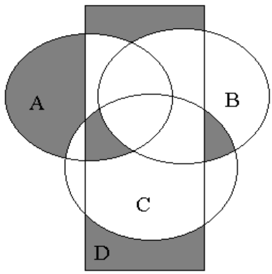
3. Логічним методом довести тотожність:

$$A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus C.$$

4. Зобразити на діаграмі Ейлера-Венна множину:

$$((C \cup A) \Delta B) \setminus (A \cup C).$$

5. Множину зображено на діаграмі. Записати її за допомогою операцій.



6. Спростити вигляд множини, яка задана за допомогою операцій, застосовуючи закони алгебри множин (у відповідь множини можуть входити не більше одного разу): $(A \Delta B \cap C) \cup B$.

7. Чи є вірною рівність: $(A \times B) \cap (C \times D) = (A \times C) \cap (B \times D)$?

8. Знайти матрицю відношення $R \subset 2^B \times A$:
$R = \{(x,y) \mid x \subset B \,\&\, y \in A \,\&\, |x| = \frac{y}{2}\}$,
де $B = \{1,2\}$, $A = \{y \mid y \in Z \,\&\, 1 \le y \le 4\}$, Z - множина цілих чисел.

9. Зобразити відношення графічно:
$\alpha = \{(x,y) \mid (x,y) \in R^2 \,\&\, |x| \le |y|\}$, де R - множина дійсних чисел.

10. Визначити множину (якщо це можливо), на якій дане відношення є: а) функціональним; б) бієктивним:
$\alpha = \{(x,y) \mid (x,y) \in R^2 \,\&\, (x+y)^3 = 5\}$.

Варіант № 7

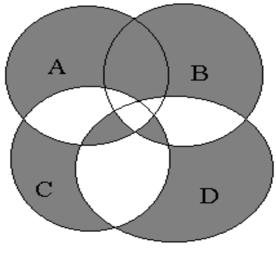
1. Для даних скінченних множин $A = \{1,2,3,4,5,6,7\}$, $B = \{4,5,6,7,8,9,10\}$, $C = \{2,4,6,8,10\}$ та універсума $U = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$ знайти множину, яку задано за допомогою операцій: а) $A \Delta B$; б) $B \cap \overline{C} \cap \overline{A}$.

2. На множинах задачі 1 побудувати булеан множини $\overline{A \Delta C} \cap B$. Знайти його потужність.

3. Логічним методом довести тотожність:
$$A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C).$$

4. Зобразити на діаграмі Ейлера-Венна множину:
$$((A \setminus B) \cap (C \setminus B)) \Delta B.$$

5. Множину зображено на діаграмі. Записати її за допомогою операцій.



6. Спростити вигляд множини, яка задана за допомогою операцій, застосовуючи закони алгебри множин (у відповідь множини можуть входити не більше одного разу):

$$((A \cup B)\Delta C) \cup (B \cap C) \cup (A \cap C).$$

7. Чи є вірною рівність: $(A \cap B) \times (C \cap D) = (A \times D) \cap (B \times C)$?

8. Знайти матрицю відношення $R \subset 2^A \times 2^B$: $R = \{(x, y) \mid x \subset A \,\&\, y \subset B \,\&\, x \subset y\}$, де $A = \{1,2\}$, $B = \{1,2,4\}$.

9. Зобразити відношення графічно:

$\alpha = \{(x, y) \mid (x, y) \in R^2 \,\&\, x^2 - 2x + y^2 = 8\}$, де R - множина дійсних чисел.

10. Визначити множину (якщо це можливо), на якій дане відношення є: а) функціональним; б) бієктивним:

$\alpha = \{(x, y) \mid (x, y) \in R^2 \,\&\, y = (x-2)^{-2}\}$.

Варіант № 8

1. Для даних скінченних множин $A = \{1,2,3,4,5,6,7\}$, $B = \{4,5,6,7,8,9,10\}$, $C = \{1,3,5,7,9\}$ та універсума $U = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$ знайти множину, яку задано за допомогою операцій: а) $(A \cup C) \setminus B$; б) $\overline{A \Delta C}$.

2. На множинах задачі 1 побудувати булеан множини $(\overline{A} \Delta C) \setminus B$. Знайти його потужність.

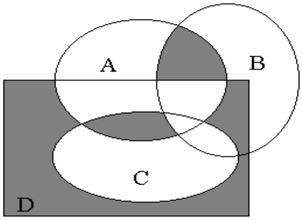
3. Логічним методом довести тотожність:

$$A \cap (B \Delta C) = (A \cap B) \Delta (A \cap C).$$

4. Зобразити на діаграмі Ейлера-Венна множину:

$$(A \cup B \Delta C) \setminus (A \cup C).$$

5. Множину зображено на діаграмі. Записати її за допомогою операцій.



6. Спростити вигляд множини, яка задана за допомогою операцій, застосовуючи закони алгебри множин (у відповідь множини можуть входити не більше одного разу):

$$(A \cap \overline{B}) \cup (A \cap B \cap C) \cup \overline{A \cap C}\,.$$

7. Чи є вірною рівність $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$?

8. Знайти матрицю відношення $R \subset M \times 2^M$, де $M = \{1,2,3\}$: $R = \{(x, y) \mid x \in M \ \& \ y \subset M \ \& \ |y| < x \}$.

9. Зобразити відношення графічно:

$\alpha = \{(x, y) \mid (x, y) \in R^2 \ \& \ x + y^2 = 4\}$, де R - множина дійсних чисел.

10. Визначити множину (якщо це можливо), на якій дане відношення є: а) функціональним; б) бієктивним:

$\alpha = \{(x, y) \mid (x, y) \in R^2 \ \& \ y = |x^3| \}$.

Варіант № 9

1. Для даних скінченних множин $A = \{1,2,3,4,5,6,7\}$, $B = \{5,6,7,8,9,10\}$, $C = \{1,2,3,8,9,10\}$ та універсума $U = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$ знайти множину, яку задано за допомогою операцій: а) $(\overline{B} \setminus C) \cup B$; б) $(B \cap \overline{A}) \Delta C$.

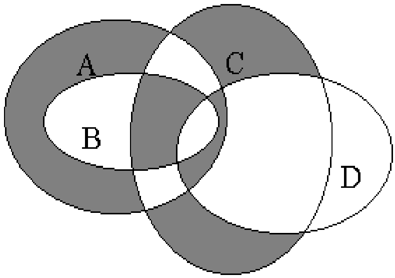
2. На множинах задачі 1 побудувати булеан множини $B \setminus ((A \setminus B) \Delta C)$. Знайти його потужність.

3. Логічним методом довести тотожність: $A \Delta (A \Delta B) = B$**.**

4. Зобразити на діаграмі Ейлера-Венна множину:

$$(((A \cap B) \Delta C) \setminus A) \Delta B\,.$$

5. Множину зображено на діаграмі. Записати її за допомогою операцій.



6. Спростити вигляд множини, яка задана за допомогою операцій, застосовуючи закони алгебри множин (у відповідь множини можуть входити не більше одного разу): $\overline{\overline{A} \cap \overline{B}} \cup (A \cap C) \cup \overline{C \setminus B}$.

7. Чи є вірною рівність $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$?

8. Знайти матрицю відношення $R \subset M \times 2^M$: $R = \{(x, y) \mid x \in M \;\&\; y \subset M \;\&\; |\,y\,| - 1 = x\}$,

де $M = \{x \mid x \in Z \;\&\; |\,x - 1\,| < 2\}$, Z - множина цілих чисел.

9. Зобразити відношення графічно:
$\alpha = \{(x, y) \mid (x, y) \in R^2 \;\&\; x - y^2 > 0\}$, де R - множина дійсних чисел.

10. Визначити множину (якщо це можливо), на якій дане відношення є: а) функціональним; б) бієктивним:
$\alpha = \{(x, y) \mid (x, y) \in R^2 \;\&\; y = \sqrt{1 - x^2}\}$.

Варіант № 10

1. Для даних скінченних множин $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $B = \{4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$, $C = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ та універсума $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ знайти множину, яку задано за допомогою операцій: а) $\overline{A \cap B}$; б) $(A \setminus C) \cup (B \setminus A)$.

2. На множинах задачі 1 побудувати булеан множини $C \setminus \overline{A \cap C}$. Знайти його потужність.

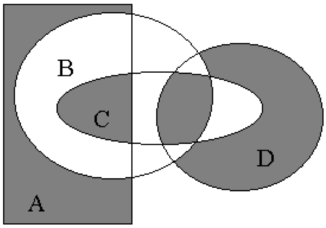
3. Логічним методом довести тотожність:

$$(A \cap C) \setminus B = (A \setminus B) \cap (C \setminus B).$$

4. Зобразити на діаграмі Ейлера-Венна множину:

$$(C \setminus A) \Delta (B \cup (A \setminus C \cap B)).$$

5. Множину зображено на діаграмі. Записати її за допомогою операцій.



6. Спростити вигляд множини, яка задана за допомогою операцій, застосовуючи закони алгебри множин (у відповідь множини можуть входити не більше одного разу): $(A \cap C \,\Delta\, B) \setminus A$.

7. Чи є вірною рівність

$(A \cup B) \times (C \cup D) = (A \times C) \cup (B \times C) \cup (A \times D) \cup (B \times D)$?

8. Знайти матрицю відношення $R \subset 2^A \times 2^B$: $R = \{(x, y) \mid x \subset A \,\&\, y \subset B \,\&\, y \subset x\}$, де $A = \{2,4\}$, $B = \{1,2,4\}$.

9. Зобразити відношення графічно:

$\alpha = \{(x, y) \mid (x, y) \in R^2 \,\&\, |y - 4x| < 2\}$, де R - множина дійсних чисел.

10. Визначити множину (якщо це можливо), на якій дане відношення є: а) функціональним; б) бієктивним:

$\alpha = \{(x, y) \mid (x, y) \in R^2 \,\&\, y = e^{x-1}\}$.

Варіант № 11

1. Для даних скінченних множин $A = \{1,2,3,4,5,6,7\}$, $B = \{4,5,6,7,8,9,10\}$, $C = \{1,3,5,7,9\}$ та універсума $U = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$ знайти множину, яку задано за допомогою операцій: а) $A \cap (B \cup C)$; б) $\overline{B} \Delta \overline{C}$.

2. На множинах задачі 1 побудувати булеан множини $(\overline{C}\Delta B)\cap A$. Знайти його потужність.

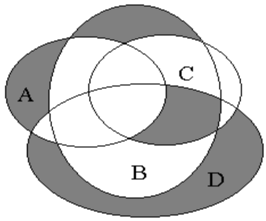
3. Логічним методом довести тотожність:

$$A\setminus(B\cap C)=(A\setminus B)\cup(A\setminus C)\,.$$

4. Зобразити на діаграмі Ейлера-Венна множину:

$$((B\cap C)\Delta A)\setminus C)\Delta B\,.$$

5. Множину зображено на діаграмі. Записати її за допомогою операцій.



6. Спростити вигляд множини, яка задана за допомогою операцій, застосовуючи закони алгебри множин (у відповідь множини можуть входити не більше одного разу):

$$(A\cup B)\cap\overline{C}\cup(\overline{A\cap B}\cap C)\cup(A\cap B\cap C)\,.$$

7. Чи є вірною рівність $(A\cup B)\times(C\cup D)=(A\times C)\cup(B\times D)$?

8. Знайти матрицю відношення $R\subset M\times 2^M$, де $M=\{1,2,3\}$: $R=\{(x,y)\big|\, x\in M\ \&\ y\subset M\ \&\big|\,y\,\big|>x\ \}$.

9. Зобразити відношення графічно: $\alpha=\{(x,y)\big|\ (x,y)\in R^2\ \&\ \big|\,x+3\,\big|\geq\big|\,y\,\big|\}$, де R - множина дійсних чисел.

10. Визначити множину (якщо це можливо), на якій дане відношення є: а) функціональним; б) бієктивним: $\alpha=\{(x,y)\big|\ (x,y)\in R^2\ \&\ x+\sqrt{y^2}\ =1\ \}$.

Варіант № 12

1. Для даних скінченних множин $A=\{1,2,3,4,5,6,7\}$, $B=\{5,6,7,8,9,10\}$, $C=\{1,2,3,8,9,10\}$ та універсума

$U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ знайти множину, яку задано за допомогою операцій: а) $(A \setminus C) \cap \overline{B}$; б) $\overline{C} \Delta B$.

2. На множинах задачі 1 побудувати булеан множини $A \setminus (\overline{B} \Delta \overline{C})$. Знайти його потужність.

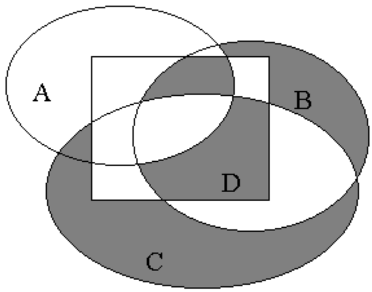
3. Логічним методом довести тотожність:

$$(A \setminus B) \setminus C = (A \setminus C) \setminus (B \setminus C).$$

4. Зобразити на діаграмі Ейлера-Венна множину:

$$((A \cup B) \cup (C \Delta B)) \setminus (A \setminus B).$$

5. Множину зображено на діаграмі. Записати її за допомогою операцій.



6. Спростити вигляд множини, яка задана за допомогою операцій, застосовуючи закони алгебри множин (у відповідь множини можуть входити не більше одного разу): $(A \Delta \overline{B \cap C}) \cup A$.

7. Чи є вірною рівність $(A \cup B) \times (A \cup C) = A \times (B \cup C)$?

8. Знайти матрицю відношення $R \subset 2^A \times 2^B$: $R = \{(x, y) | \ x \subset A \ \& \ y \subset B \ \& |x| + |y| = 3\}$, де $A = \{1, 2\}$, $B = \{1, 3, 5\}$.

9. Зобразити відношення графічно:
$\alpha = \{(x, y) | \ (x, y) \in R^2 \ \& \ x^2 + y^2 = 9\}$, де R - множина дійсних чисел.

10. Визначити множину (якщо це можливо), на якій дане відношення є: а) функціональним; б) бієктивним:
$\alpha = \{(x, y) | \ (x, y) \in R^2 \ \& \ |x| + y = 1\}$.

Варіант № 13

1. Для даних скінченних множин $A=\{1,2,3,4,5,6,7\}$, $B=\{4,5,6,7,8,9,10\}$, $C=\{2,4,6,8,10\}$ та універсума $U=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$ знайти множину, яку задано за допомогою операцій: а) $A\cap(B\cup C)$; б) $\overline{B\Delta C}$.

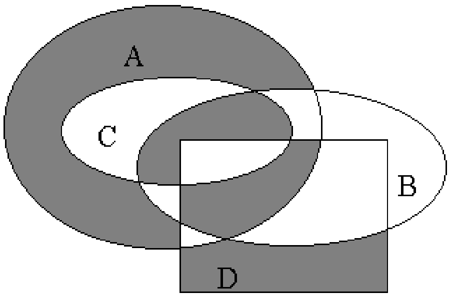
2. На множинах задачі 1 побудувати булеан множини $C\setminus(B\setminus\overline{C})\cap A$. Знайти його потужність.

3. Логічним методом довести тотожність: $\overline{A\cup B}\cap A=\varnothing$.

4. Зобразити на діаграмі Ейлера-Венна множину:

$$(B\cup C)\Delta A\setminus(B\cap C).$$

5. Множину зображено на діаграмі. Записати її за допомогою операцій.



6. Спростити вигляд множини, яка задана за допомогою операцій, застосовуючи закони алгебри множин (у відповідь множини можуть входити не більше одного разу): $(A\cap\overline{B})\,\Delta\,(\overline{A}\cap B)$.

7. Чи є вірною рівність $(A\times B)\cup(C\times D)=(A\cup C)\times(B\cup D)$?

8. Знайти матрицю відношення $R\subset M\times 2^M$:

$R=\{(x,y)\big|\ x\in M\ \&\ x\in y\ \&\ y\subset M\ \&\ |\,y\,|>x\ \}$,

де $M=\{x\big|\ x\in Z\ \&\ |\,x\,|\le 1\}$, Z - множина цілих чисел.

9. Зобразити відношення графічно:

$\alpha=\{(x,y)\big|\ (x,y)\in R^2\ \&\ (x-y)^2=9\}$, де R - множина дійсних чисел.

10. Визначити множину (якщо це можливо), на якій дане відношення є: а) функціональним; б) бієктивним:
$\alpha = \{(x,y) \mid (x,y) \in R^2 \ \& \ y = (\sqrt{x})^4 \}$.

Варіант № 14

1. Для даних скінченних множин $A = \{1,2,3,4,5,6,7\}$, $B = \{4,5,6,7,8,9,10\}$, $C = \{1,3,5,7,9\}$ та універсума $U = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$ знайти множину, яку задано за допомогою операцій: а) $(\overline{B} \cap C) \cap \overline{A}$; б) $\overline{(A \setminus C) \cup B}$.

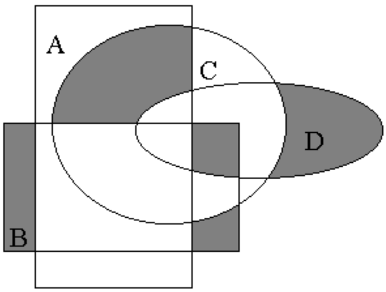
2. На множинах задачі 1 побудувати булеан множини $B \setminus ((A \cup B) \setminus C)$. Знайти його потужність.

3. Логічним методом довести тотожність: $\overline{A \cap B} \cap A = A \setminus B$.

4. Зобразити на діаграмі Ейлера-Венна множину:

$$(A \setminus B \setminus C) \cup (B \cap C) \Delta A .$$

5. Множину зображено на діаграмі. Записати її за допомогою операцій.



6. Спростити вигляд множини, яка задана за допомогою операцій, застосовуючи закони алгебри множин (у відповідь множини можуть входити не більше одного разу): $(A \cap B \cap C) \cup \overline{A} \cup \overline{B}$.

7. Чи є вірною рівність
$A \times (B \cap C \cup D) = (A \times B) \cap (A \times C) \cup (A \times D)$?

8. Знайти матрицю відношення $R \subset 2^A \times 2^B$: $R = \{(x, y) \mid x \subset A \,\&\, y \subset B \,\&\, |\,y\,| > |\,x\,|\}$, де $A = \{1,3\}$, $B = \{2,4\}$.

9. Зобразити відношення графічно:
$\alpha = \{(x, y) \mid (x, y) \in R^2 \,\&\, |\,6 - 3y| = x\}$, де R - множина дійсних чисел.

10. Визначити множину (якщо це можливо), на якій дане відношення є: а) функціональним; б) бієктивним:
$\alpha = \{(x, y) \mid (x, y) \in R^2 \,\&\, |x| + |y| = 4\}$.

Варіант № 15

1. Для даних скінченних множин $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $B = \{5, 6, 7, 8, 9, 10\}$, $C = \{1, 2, 3, 8, 9, 10\}$ та універсума $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ знайти множину, яку задано за допомогою операцій: а) $(A \cap \overline{B}) \cup C$; б) $\overline{A} \Delta C$.

2. На множинах задачі 1 побудувати булеан множини $(A \setminus (\overline{C} \cap B)) \cap C$. Знайти його потужність.

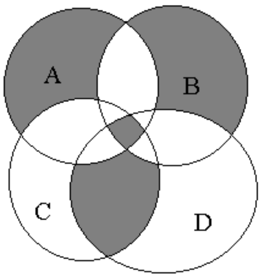
3. Логічним методом довести тотожність:

$$\overline{A \cap B \cap C} \cap C = C \setminus (A \cap B).$$

4. Зобразити на діаграмі Ейлера-Венна множину:

$$(A \cap C \cup B) \Delta (A \Delta B).$$

5. Множину зображено на діаграмі. Записати її за допомогою операцій.



6. Спростити вигляд множини, яка задана за допомогою операцій, застосовуючи закони алгебри множин (у відповідь множини можуть входити не більше одного разу): $(A \cap C \,\Delta\, B) \setminus B$.

7. Чи є вірною рівність:
$(A \times (B \cap C)) \cap ((A \cap B) \times C) = (A \times C) \cap (B \times B)$?

8. Знайти матрицю відношення $R \subset M \times 2^M$, де $M = \{1, 2, 3\}$:
$R = \{(x, y) \,|\, x \in M \;\&\; y \subset M \;\&\, |\, y \,| \le x \}$.

9. Зобразити відношення графічно:
$\alpha = \{(x, y) \,|\; (x, y) \in R^2 \;\&\; x + y^2 - 1 > 0\}$, де R - множина дійсних чисел.

10. Визначити множину (якщо це можливо), на якій дане відношення є: а) функціональним; б) бієктивним:
$\alpha = \{(x, y) \,|\; (x, y) \in R^2 \;\&\; y = x + |x| \}$.

Варіант № 16

1. Для даних скінченних множин $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $B = \{4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$, $C = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ та універсума $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ знайти множину, яку задано за допомогою операцій: а) $(C \setminus A) \cup (B \setminus A)$; б) $(B \setminus \overline{C}) \cap A$.

2. На множинах задачі 1 побудувати булеан множини $\overline{B \Delta C} \setminus C$. Знайти його потужність.

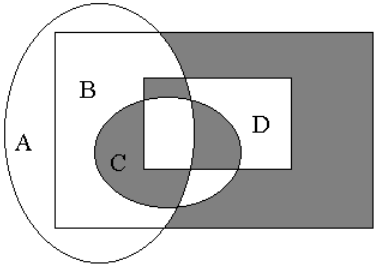
3. Логічним методом довести тотожність:

$$\overline{A \setminus B} \cap C = (C \setminus A) \cup (B \cap C).$$

4. Зобразити на діаграмі Ейлера-Венна множину:

$$(A \cap B \Delta C) \cup (B \setminus (A \setminus C)).$$

5. Множину зображено на діаграмі. Записати її за допомогою операцій.



6. Спростити вигляд множини, яка задана за допомогою операцій, застосовуючи закони алгебри множин (у відповідь множини можуть входити не більше одного разу): $(\overline{A} \Delta \overline{B}) \cup C \cup B$.

7. Чи є вірною рівність $A \times (B \setminus C) = (A \times C) \setminus (B \times C)$?

8. Знайти матрицю відношення $R \subset 2^M \times M$, де $M = \{1,3,5\}$:

$R = \{(x, y) \big| \ x \subset M \ \& \ y \in M \ \& \ y \in x \ \& \big| \ x \ \big| = \dfrac{y+1}{2} \ \}$.

9. Зобразити відношення графічно:

$\alpha = \{(x, y) \big| \ (x, y) \in R^2 \ \& \ \big|x + 3y\big| \le 6\}$, де R - множина дійсних чисел.

10. Визначити множину (якщо це можливо), на якій дане відношення є: а) функціональним; б) бієктивним:

$$\alpha = \{(x, y) \big| \ (x, y) \in R^2 \ \& \ x + (\sqrt{y})^2 = 1 \ \}.$$

Варіант № 17

1. Для даних скінченних множин $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $B = \{4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$, $C = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ та універсума $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ знайти множину, яку задано за допомогою операцій: а) $(A \cup B) \setminus C$; б) $\overline{C \cup A} \cap B$.

2. На множинах задачі 1 побудувати булеан множини $C \setminus \overline{(A \setminus C) \cup B}$. Знайти його потужність.

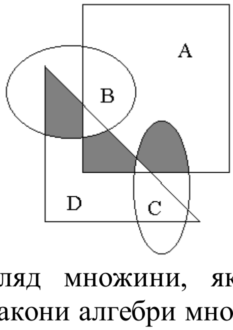
3. Логічним методом довести тотожність:

$$(A \cup B \setminus C) \cup (A \cap C) = A \cup (B \setminus C).$$

4. Зобразити на діаграмі Ейлера-Венна множину:

$$((B \cup A) \setminus C) \Delta A \cap B \ .$$

5. Множину зображено на діаграмі. Записати її за допомогою операцій.



6. Спростити вигляд множини, яка задана за допомогою операцій, застосовуючи закони алгебри множин (у відповідь множини можуть входити не більше одного разу): $\overline{\overline{A} \cup B} \cap \overline{C \cap B}$.

7. Чи є вірною рівність $A \times (B \setminus C) = (A \times B) \setminus (A \times C)$?

8. Знайти матрицю відношення $R \subset M \times 2^M$, де $M = \{1,2,3\}$:
$R = \{(x, y) \big| \, x \in M \ \& \ y \subset M \ \& \big| \, y \, \big| \geq x \ \}$.

9. Зобразити відношення графічно:
$\alpha = \{(x, y) \big| \ (x, y) \in R^2 \ \& \left| 2x - 3y \right| \leq 6\}$, де R - множина дійсних чисел.

10. Визначити множину (якщо це можливо), на якій дане відношення є: а) функціональним; б) бієктивним:

$$\alpha = \{(x, y) \big| \ (x, y) \in R^2 \ \& \ y = (x+3)^{-3} \ \} \ .$$

Варіант № 18

1. Для даних скінченних множин $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $B = \{5, 6, 7, 8, 9, 10\}$, $C = \{1, 2, 3, 8, 9, 10\}$ та універсума $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ знайти множину, яку задано за допомогою операцій: а) $A \setminus (\overline{C} \cap B)$; б) $(A \Delta C) \setminus B$.

2. На множинах задачі 1 побудувати булеан множини $\overline{(A\cap\overline{B})\cup C}$. Знайти його потужність.

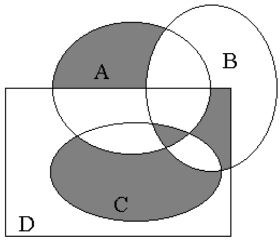
3. Логічним методом довести тотожність:

$$(A\cup B)\setminus(A\cup C)=B\setminus A\setminus C.$$

4. Зобразити на діаграмі Ейлера-Венна множину:

$$((B\cap C)\setminus A)\Delta(B\setminus A).$$

5. Множину зображено на діаграмі. Записати її за допомогою операцій.



6. Спростити вигляд множини, яка задана за допомогою операцій, застосовуючи закони алгебри множин (у відповідь множини можуть входити не більше одного разу): $(\overline{A}\,\Delta\, B)\cup(B\setminus A)$.

7. Чи є вірною рівність $(A\setminus B)\times C=(A\times C)\setminus(B\times C)$?

8. Знайти матрицю відношення $R\subset M\times 2^{M}$: $R=\{(x,y)\,|\,x\in M\ \&\ y\subset M\ \&\ |\,y\,|=x\ \}$,

де $M=\{x|\ x\in Z\ \&\ |\,x\,|\le 1\}$, Z - множина цілих чисел.

9. Зобразити відношення графічно:

$\alpha=\{(x,y)\,|\ (x,y)\in R^{2}\ \&\ |1-2y|=x\}$, де R - множина дійсних чисел.

10. Визначити множину (якщо це можливо), на якій дане відношення є: а) функціональним; б) бієктивним:

$\alpha=\{(x,y)\,|\ (x,y)\in R^{2}\ \&\ y+x^{2}=4\ \}$.

Варіант № 19

1. Для даних скінченних множин $A=\{1,2,3,4,5,6,7\}$, $B=\{4,5,6,7,8,9,10\}$, $C=\{2,4,6,8,10\}$ та універсума $U=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$ знайти множину, яку задано за допомогою операцій: а) $\overline{A\cap C}$; б) $A\cap(B\cap\overline{C})$.

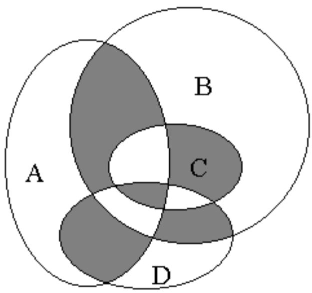
2. На множинах задачі 1 побудувати булеан множини $\overline{(A\setminus C)\cup(B\setminus A)}$. Знайти його потужність.

3. Логічним методом довести тотожність: $A\Delta(A\cap B)=A\setminus B$.

4. Зобразити на діаграмі Ейлера-Венна множину:

$$((C\Delta A)\setminus B)\cup(A\cap C)\Delta B.$$

5. Множину зображено на діаграмі. Записати її за допомогою операцій.



6. Спростити вигляд множини, яка задана за допомогою операцій, застосовуючи закони алгебри множин (у відповідь множини можуть входити не більше одного разу): $(\overline{B}\setminus A)\cup\overline{C\cap A}$.

7. Чи є вірною рівність:
$(A\times B)\setminus(C\times D)=((A\setminus C)\times B)\cup((A\cap C)\times(B\setminus D))$?

8. Знайти матрицю відношення $R\subset 2^M\times M$: $R=\{(x,y)\,|\,x\subset M\ \&\ y\in M\ \&\,|\,x\,|=\dfrac{y+1}{2}\}$, де $M=\{1,2,3\}$.

9. Зобразити відношення графічно:
$\alpha=\{(x,y)\,|\,(x,y)\in R^2\ \&\,|4x+y|>2\}$, де R - множина дійсних чисел.

10. Визначити множину (якщо це можливо), на якій дане відношення є: а) функціональним; б) бієктивним:

$$\alpha = \{(x,y) \mid (x,y) \in R^2 \;\&\; y = \sqrt{x^2+1}\}.$$

Варіант № 20

1. Для даних скінченних множин $A = \{1,2,3,4,5,6,7\}$, $B = \{4,5,6,7,8,9,10\}$, $C = \{1,3,5,7,9\}$ та універсума $U = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$ знайти множину, яку задано за допомогою операцій: а) $A \setminus (B \setminus C)$; б) $\overline{C} \Delta B$.

2. На множинах задачі 1 побудувати булеан множини $(A \cap (B \cup C)) \setminus C$. Знайти його потужність.

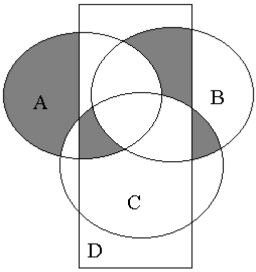
3. Логічним методом довести тотожність:

$$(A \Delta B) \cup (A \cap B) = A \cup B.$$

4. Зобразити на діаграмі Ейлера-Венна множину

$$(A \Delta B) \setminus (A \cap C) \Delta C.$$

5. Множину зображено на діаграмі. Записати її за допомогою операцій.



6. Спростити вигляд множини, яка задана за допомогою операцій, застосовуючи закони алгебри множин (у відповідь множини можуть входити не більше одного разу): $(A \cup \overline{B}) \cap (B \cup A \cap C)$.

7. Чи є вірною рівність:
$((C \times D) \setminus (A \times B)) = ((C \setminus A) \times D) \cup (C \times (D \setminus B))$?

8. Знайти матрицю відношення $R \subset M \times 2^M$, де $M = \{1,2,3\}$:
$R = \{(x,y) \mid x \in M \,\&\, x \in y \,\&\, y \subset M \,\&\, |\,y\,| \le x\,\}$.

9. Зобразити відношення графічно:
$\alpha = \{(x,y) \mid (x,y) \in R^2 \,\&\, |\,1+4x\,| \le y\}$, де R - множина дійсних чисел.

10. Визначити множину (якщо це можливо), на якій дане відношення є: а) функціональним; б) бієктивним:
$\alpha = \{(x,y) \mid (x,y) \in R^2 \,\&\, x = |\,y-2\,|\,\}$.

Варіант № 21

1. Для даних скінченних множин $A = \{1,2,3,4,5,6,7\}$, $B = \{5,6,7,8,9,10\}$, $C = \{1,2,3,8,9,10\}$ та універсума $U = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$ знайти множину, яку задано за допомогою операцій: а) $\overline{B} \setminus (C \setminus \overline{A})$; б) $\overline{B} \Delta \overline{C}$.

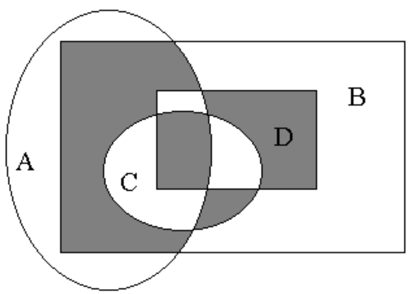
2. На множинах задачі 1 побудувати булеан множини $(\overline{C} \,\Delta\, B) \cap A$. Знайти його потужність.

3. Логічним методом довести тотожність: $(A \cup B) \cap A = A$.

4. Зобразити на діаграмі Ейлера-Венна множину:

$$C \cup (A \Delta (B \setminus C)) \setminus (B \cap C).$$

5. Множину зображено на діаграмі. Записати її за допомогою операцій.



6. Спростити вигляд множини, яка задана за допомогою операцій, застосовуючи закони алгебри множин (у відповідь множини можуть входити не більше одного разу): $(A \cap B \cap C) \cup (\overline{B} \cap C) \cup \overline{C}$.

7. Чи є вірною рівність $(A \setminus B) \times (C \setminus A) = A \times (C \setminus B)$?

8. Знайти матрицю відношення $R \subset 2^A \times 2^B$: $R = \{(x, y) \mid x \subset A \;\&\; y \subset B \;\&\; x \subset y\}$, де $A = \{2,3\}$, $B = \{2,4\}$.

9. Зобразити відношення графічно:
$\alpha = \{(x, y) \mid (x, y) \in R^2 \;\&\; |x| \geq |y|\}$, де R - множина дійсних чисел.

10. Визначити множину (якщо це можливо), на якій дане відношення є: а) функціональним; б) бієктивним:
$\alpha = \{(x, y) \mid (x, y) \in R^2 \;\&\; y = x^2 - x\}$.

Варіант № 22

1. Для даних скінченних множин $A = \{1,2,3,4,5,6,7\}$, $B = \{4,5,6,7,8,9,10\}$, $C = \{2,4,6,8,10\}$ та універсума $U = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$ знайти множину, яку задано за допомогою операцій: а) $(A \cup C) \cap B$; б) $\overline{A \Delta C}$.

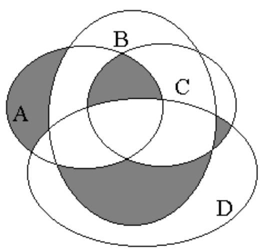
2. На множинах задачі 1 побудувати булеан множини $(A \Delta B) \cap C$. Знайти його потужність.

3. Логічним методом довести тотожність: $(A \cap B) \cup A = A$.

4. Зобразити на діаграмі Ейлера-Венна множину:

$$((A \setminus B) \Delta (A \setminus C)) \cup (B \cap C).$$

5. Множину зображено на діаграмі. Записати її за допомогою операцій.



6. Спростити вигляд множини, яка задана за допомогою операцій, застосовуючи закони алгебри множин (у відповідь множини можуть входити не більше одного разу): $(\overline{A \cup B} \cup A \cup B) \cap C$.

7. Чи є вірною рівність $(A \setminus B) \times (C \setminus A) = (A \times C) \setminus (B \times A)$?

8. Знайти матрицю відношення $R \subset 2^A \times 2^B$:

$R = \{(x, y) | \; x \subset A \;\&\; y \subset B \;\&\; x \cap y \neq \varnothing \}$, де $A = \{1, 2\}$, $B = \{1, 2, 4\}$.

9. Зобразити відношення графічно:

$\alpha = \{(x, y) | \; (x, y) \in R^2 \;\&\; x^2 + y^2 \leq 4\}$, де R - множина дійсних чисел.

10. Визначити множину (якщо це можливо), на якій дане відношення є: а) функціональним; б) бієктивним:

$\alpha = \{(x, y) | \; (x, y) \in R^2 \;\&\; (x + y)^5 = 1\}$.

Варіант № 23

1. Для даних скінченних множин $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $B = \{4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$, $C = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ та універсума $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ знайти множину, яку задано за допомогою операцій: а) $\overline{A} \Delta C$; б) $(B \cap \overline{C}) \setminus A$.

2. На множинах задачі 1 побудувати булеан множини $((A \cup C) \setminus B) \cap C$. Знайти його потужність.

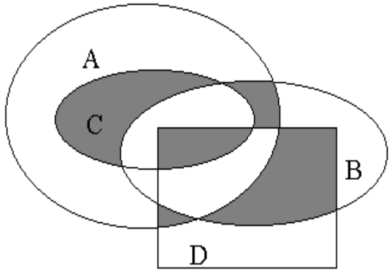
3. Логічним методом довести тотожність:

$$(A \cup B) \Delta (B \cup C) = (A \Delta C) \setminus B.$$

4. Зобразити на діаграмі Ейлера-Венна множину:

$$(B \cup (C \Delta (A \setminus B))) \setminus C.$$

5. Множину зображено на діаграмі. Записати її за допомогою операцій.



6. Спростити вигляд множини, яка задана за допомогою операцій, застосовуючи закони алгебри множин (у відповідь множини можуть входити не більше одного разу): $(A \Delta \overline{B}) \cup (A \cap B \cap C) \cup A$.

7. Чи є вірною рівність:
$((A \setminus B) \setminus C) \times D = (A \times D) \setminus (B \times D) \setminus (C \times D)$?

8. Знайти матрицю відношення $R \subset M \times 2^M$, де $M = \{1, 2, 3\}$:
$R = \{(x, y) \mid x \in M \ \& x \in y \& \ y \subset M \ \& \mid y \mid \geq x \ \}$.

9. Зобразити відношення графічно:
$\alpha = \{(x, y) \mid (x, y) \in R^2 \ \& \ |2y - x| > 4\}$, де R - множина дійсних чисел.

10. Визначити множину (якщо це можливо), на якій дане відношення є: а) функціональним; б) бієктивним:

$\alpha = \{(x, y) \mid (x, y) \in R^2 \ \& \ x + y^3 = 4\}$.

Варіант № 24

1. Для даних скінченних множин $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $B = \{5, 6, 7, 8, 9, 10\}$, $C = \{1, 2, 3, 8, 9, 10\}$ та універсума $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ знайти множину, яку задано за допомогою операцій: а) $\overline{A \cap B} \setminus C$; б) $(A \setminus B) \Delta C$.

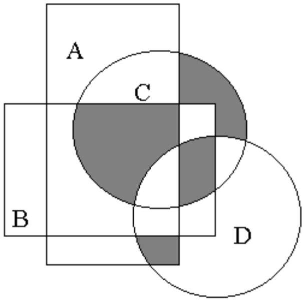
2. На множинах задачі 1 побудувати булеан множини $((\overline{B} \setminus C) \cup B) \cap C$. Знайти його потужність.

3. Логічним методом довести тотожність: $\overline{A \setminus C} \cup \overline{C \setminus B} = U$ **.**

4. Зобразити на діаграмі Ейлера-Венна множину:

$$(((A \cup C)\Delta B) \setminus A)\Delta B .$$

5. Множину зображено на діаграмі. Записати її за допомогою операцій.



6. Спростити вигляд множини, яка задана за допомогою операцій, застосовуючи закони алгебри множин (у відповідь множини можуть входити не більше одного разу): $(C \setminus (A \cap B)) \cup B$.

7. Чи є вірною рівність: $(A\setminus B)\times(C\cap D)=(A\times C)\setminus(B\times D)$?

8. Знайти матрицю відношення $R \subset M \times 2^M$:

$R = \{(x, y) \mid x \in M \,\&\, y \subset M \,\&\, |\, y \,| < x + 1 \}$,

де $M = \{x \mid x \in Z \,\&\, |\, x \,| \le 1\}$, Z - множина цілих чисел.

9. Зобразити відношення графічно:

$\alpha = \{(x, y) \mid (x, y) \in R^2 \,\&\, x^2 + 4y + y^2 \le 0\}$, де R - множина дійсних чисел.

10. Визначити множину (якщо це можливо), на якій дане відношення є: а) функціональним; б) бієктивним:

$$\alpha = \{(x, y) \mid (x, y) \in R^2 \,\&\, y = e^{|x|} \} .$$

Варіант № 25

1. Для даних скінченних множин $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $B = \{4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$, $C = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ та універсума

$U = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$ знайти множину, яку задано за допомогою операцій: а) $\overline{(A \setminus B) \cup C}$; б) $(B \setminus \overline{A})\Delta C$.

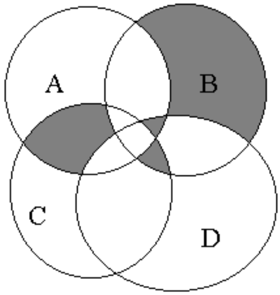
2. На множинах задачі 1 побудувати булеан множини $(\overline{B}\Delta\overline{C}) \cap A$. Знайти його потужність.

3. Логічним методом довести тотожність: $(A \setminus B)\Delta A = A \cap B$ **.**

4. Зобразити на діаграмі Ейлера-Венна множину

$$B \setminus (C\Delta A) \cap (C \setminus A).$$

5. Множину зображено на діаграмі. Записати її за допомогою операцій.



6. Спростити вигляд множини, яка задана за допомогою операцій, застосовуючи закони алгебри множин (у відповідь множини можуть входити не більше одного разу):

$$\overline{A \cup B \cup C} \cup (A \cap B \cap \overline{C}) \cup (\overline{A} \cap B \cap \overline{C}).$$

7. Чи є вірною рівність: $(A \cap B) \times (C \setminus D) = (B \times C) \setminus (A \times D)$?

8. Знайти матрицю відношення $R \subset 2^A \times 2^B$:

$R = \{(x, y) | \, x \subset A \,\&\, y \subset B \,\&\, y \cap x = \varnothing\}$, де $A = \{1,2,3\}$, $B = \{2,4\}$.

9. Зобразити відношення графічно:

$\alpha = \{(x, y) | \, (x, y) \in R^2 \,\&\, |6 - 2x| = y\}$, де R - множина дійсних чисел.

10. Визначити множину (якщо це можливо), на якій дане відношення є: а) функціональним; б) бієктивним:

$\alpha = \{(x, y) | \, (x, y) \in R^2 \,\&\, y\sqrt{x-2} = 1\}$.

Варіант № 26

1. Для даних скінченних множин $A=\{1,2,3,4,5,6,7\}$, $B=\{4,5,6,7,8,9,10\}$, $C=\{1,3,5,7,9\}$ та універсума $U=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$ знайти множину, яку задано за допомогою операцій: а) $(\overline{A\cap B})\setminus C$; б) $(\overline{A}\cup\overline{B})\cap C$.

2. На множинах задачі 1 побудувати булеан множини $\overline{A\cap B\cup C}$. Знайти його потужність.

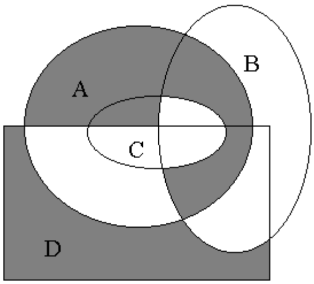
3. Логічним методом довести тотожність:

$$\overline{(A\cup B)\setminus C}=\overline{A\cup B\cup C}\cup C.$$

4. Зобразити на діаграмі Ейлера-Венна множину:

$$(B\cap(C\Delta A))\setminus(C\cap B).$$

5. Множину зображено на діаграмі. Записати її за допомогою операцій.



6. Спростити вигляд множини, яка задана за допомогою операцій, застосовуючи закони алгебри множин (у відповідь множини можуть входити не більше одного разу): $((A\cap\overline{B})\Delta C)\cup A$.

7. Чи є вірною рівність:

$(A\setminus B)\times(C\cup D)=((A\times C)\setminus(B\times C))\cup((A\times D)\setminus(B\times D))$?

8. Знайти матрицю відношення $R\subset M\times 2^M$, де $M=\{1,2,3\}$:

$R=\{(x,y)|\ x\in M\ \&\ x\in y\ \&\ y\subset M\ \&\ |y|<x\}$.

9. Зобразити відношення графічно:

$\alpha=\{(x,y)|\ (x,y)\in R^2\ \&\ (2x-6y)^2=9\}$, де R - множина дійсних чисел.

10. Визначити множину (якщо це можливо), на якій дане відношення є: а) функціональним; б) бієктивним:

$$\alpha = \{(x, y) \mid (x, y) \in R^2 \ \& \ y = x^3 + x\}.$$

Варіант № 27

1. Для даних скінченних множин $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $B = \{5, 6, 7, 8, 9, 10\}$, $C = \{1, 2, 3, 8, 9, 10\}$ та універсума $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ знайти множину, яку задано за допомогою операцій: а) $(\overline{A} \cup \overline{C}) \cap B$; б) $(A \Delta C) \Delta B$.

2. На множинах задачі 1 побудувати булеан множини $\overline{(A \cap C) \cup B}$. Знайти його потужність.

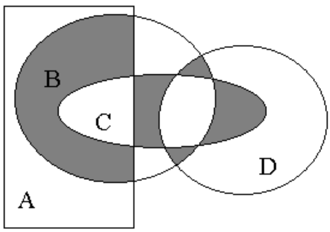
3. Логічним методом довести тотожність:

$$(A \cup \overline{B}) \cap (B \cup A) = A.$$

4. Зобразити на діаграмі Ейлера-Венна множину:

$$((A \cap B \cup C) \Delta B) \Delta A.$$

5. Множину зображено на діаграмі. Записати її за допомогою операцій.



6. Спростити вигляд множини, яка задана за допомогою операцій, застосовуючи закони алгебри множин (у відповідь множини можуть входити не більше одного разу):

$$((B \cup C) \Delta A) \cup (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

7. Чи є вірною рівність $(A \Delta B) \times C = (A \times C) \Delta (B \times C)$?

8. Знайти матрицю відношення $R \subset 2^A \times 2^B$:

$R = \{(x, y) \mid x \subset A \,\&\, y \subset B \,\&\, x \subset y \,\&\, |x| + 1 = |y| \}$, де $A = \{1, 2\}$, $B = \{1, 2, 4\}$.

9. Зобразити відношення графічно:

$\alpha = \{(x, y) \mid (x, y) \in R^2 \,\&\, |x + y| > 1\}$, де R - множина дійсних чисел.

10. Визначити множину (якщо це можливо), на якій дане відношення є: а) функціональним; б) бієктивним:

$\alpha = \{(x, y) \mid (x, y) \in R^2 \,\&\, y = \ln^2 x\}$.

Варіант № 28

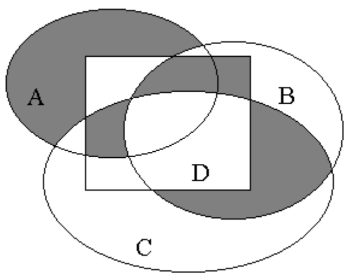
1. Для даних скінченних множин $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $B = \{4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$, $C = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ та універсума $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ знайти множину, яку задано за допомогою операцій: а) $\overline{B} \cap \overline{C}$; б) $(B \setminus \overline{A}) \cup C$.

2. На множинах задачі 1 побудувати булеан множини $\overline{(A \cap B) \cup C}$. Знайти його потужність.

3. Логічним методом довести тотожність: $\overline{A \cap B} \cup A = U$.

4. Зобразити на діаграмі Ейлера-Венна множину $((A \setminus B) \cup (B \setminus C)) \Delta C$.

5. Множину зображено на діаграмі. Записати її за допомогою операцій.



6. Спростити вигляд множини, яка задана за допомогою операцій, застосовуючи закони алгебри множин (у відповідь множини можуть входити не більше одного разу):

$$(A \cap B \cap X) \cup (A \cap B \cap C \cap X \cap Y) \cup (A \cap X \cap \overline{X}).$$

7. Чи є вірною рівність
$(A \times C) \setminus (B \times D) = ((A \setminus B) \times C) \cup (A \times (C \setminus D))$?

8. Знайти матрицю відношення $R \subset M \times 2^M$, де $M = \{1, 2, 3\}$:
$R = \{(x, y) \mid x \in M \,\&\, x \in y \,\&\, y \subset M \,\&\, |y| > x\}$.

9. Зобразити відношення графічно
$\alpha = \{(x, y) \mid (x, y) \in R^2 \,\&\, x^2 + y^2 = 4\}$, де R - множина дійсних чисел.

10. Визначити множину (якщо це можливо), на якій дане відношення є: а) функціональним; б) бієктивним:
$\alpha = \{(x, y) \mid (x, y) \in R^2 \,\&\, y = \sqrt{|x - 3|}\}$.

Варіант № 29

1. Для даних скінченних множин $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $B = \{4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$, $C = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ та універсума $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ знайти множину, яку задано за допомогою операцій: а) $\overline{B} \Delta C$; б) $A \cap \overline{B \cup C}$.

2. На множинах задачі 1 побудувати булеан множини $((A \setminus C) \Delta B) \cap A$. Знайти його потужність.

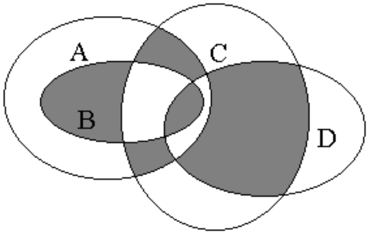
3. Логічним методом довести тотожність:

$$(A \cup B) \Delta C = (A \cup B \cup C) \setminus (A \cap C) \setminus (B \cap C).$$

4. Зобразити на діаграмі Ейлера-Венна множину

$$(A \Delta B \cap C) \Delta (B \setminus C).$$

5. Множину зображено на діаграмі. Записати її за допомогою операцій.



6. Спростити вигляд множини, яка задана за допомогою операцій, застосовуючи закони алгебри множин (у відповідь множини можуть входити не більше одного разу):

$$(A \cap B \cap C) \cup (\overline{A} \cap B \cap C) \cup \overline{B} \cup \overline{C}.$$

7. Чи є вірною рівність $A \times (B \,\Delta\, C) = (A \times B)\,\Delta\,(A \times C)$?

8. Знайти матрицю відношення $R \subset 2^A \times 2^B$:
$R = \{(x, y) \mid x \subset A \,\&\, y \subset B \,\&\, (x \cup y) \subset C\}$, де $A = \{1, 4\}$, $B = \{2, 3, 6\}$, $C = \{2k \mid k \in Z\}$, Z - множина цілих чисел.

9. Зобразити відношення графічно
$\alpha = \{(x, y) \mid (x, y) \in R^2 \,\&\, |2x - 4| \le y\}$, де R - множина дійсних чисел.

10. Визначити множину (якщо це можливо), на якій дане відношення є: а) функціональним; б) бієктивним:
$\alpha = \{(x, y) \mid (x, y) \in R^2 \,\&\, y - 5 = \sqrt{x^2 + 1}\}$.

Варіант № 30

1. Для даних скінченних множин $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $B = \{5, 6, 7, 8, 9, 10\}$, $C = \{1, 2, 3, 8, 9, 10\}$ та універсума $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ знайти множину, яку задано за допомогою операцій: а) $(C \setminus A) \cup (A \setminus B)$; б) $\overline{A \,\Delta\, B}$.

2. На множинах задачі 1 побудувати булеан множини $\overline{\overline{B} \cup \overline{C}}$. Знайти його потужність.

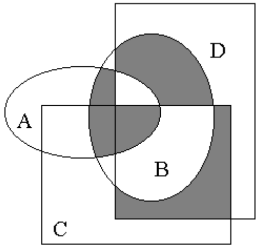
3. Логічним методом довести тотожність:

$$(A \cap B \cap C) \cup (A \setminus B \setminus C) = A \setminus (B \Delta C).$$

4. Зобразити на діаграмі Ейлера-Венна множину:

$$(((A \cap C) \setminus B) \cup B \cap A) \Delta C.$$

5. Множину зображено на діаграмі. Записати її за допомогою операцій.



6. Спростити вигляд множини, яка задана за допомогою операцій, застосовуючи закони алгебри множин (у відповідь множини можуть входити не більше одного разу):

$$(A \cap B \cap C \cap \overline{D}) \cup (\overline{A} \cap C) \cup (\overline{B} \cap C) \cup (C \cap D).$$

7. Чи є вірною рівність $(A \Delta B) \times (B \setminus C) = B \times C$?

8. Знайти матрицю відношення $R \subset M \times 2^M$:

$R = \{(x, y) \mid x \in M \,\&\, y \subset M \,\&\, |\, y \,| > x \}$,

де $M = \{x \mid x \in Z \,\&\, |\, x \,| \le 1\}$, Z - множина цілих чисел.

9. Зобразити відношення графічно:

$\alpha = \{(x, y) \mid (x, y) \in R^2 \,\&\, x + 2y + y^2 = 3\}$, де R - множина дійсних чисел.

10. Визначити множину (якщо це можливо), на якій дане відношення є: а) функціональним; б) бієктивним:

$\alpha = \{(x, y) \mid (x, y) \in R^2 \,\&\, |y| = x^2 \}$.

Завдання №2. Написати програму, яка реалізує одну з основних операцій теорії множин та знаходить матрицю бінарного відношення $\rho \subset A \times B$, де A і B - числові множини. Реалізувати введення цих множин з клавіатури, та виведення на екран результату операції та матриці відношення. Навести різні варіанти тестових прикладів.

Програма може бути написана на будь-якому відомому студентові язику програмування. Робота вважається зарахованою, якщо програма протестована разом з викладачем та отриманий вірний результат під час аудиторних занять. Вимоги до оформлення роботи дивись у вступі.

Операцію та відношення обрати згідно варіанту:

1. $\bigcup$, $\rho = \{(a,b) \mid a \in A \& b \in B \& a > b\}$;

2. $\bigcap$, $\rho = \{(a,b) \mid a \in A \& b \in B \& a < b\}$;

3. $\setminus$, $\rho = \{(a,b) \mid a \in A \& b \in B \& (a+b) \vdots 2\}$;

4. Δ, $\rho = \{(a,b) \mid a \in A \& b \in B \& (2a+1) \vdots b\}$;

5. $\bigcup$, $\rho = \{(a,b) \mid a \in A \& b \in B \& (a+2b) \vdots 3\}$;

6. $\bigcap$, $\rho = \{(a,b) \mid a \in A \& b \in B \& 2a < b\}$;

7. $\setminus$, $\rho = \{(a,b) \mid a \in A \& b \in B \& a < 3b\}$;

8. Δ, $\rho = \{(a,b) \mid a \in A \& b \in B \& (5a-b) \vdots 3\}$;

9. $\bigcup$, $\rho = \{(a,b) \mid a \in A \& b \in B \& a \vdots b\}$;

10. $\bigcap$, $\rho = \{(a,b) \mid a \in A \& b \in B \& (2b+1) \vdots a\}$;

11. $\setminus$, $\rho = \{(a,b) \mid a \in A \& b \in B \& 2a > 3b\}$;

12. Δ, $\rho = \{(a,b) \mid a \in A \& b \in B \& b \vdots a\}$;

13. $\bigcup$, $\rho = \{(a,b) \mid a \in A \& b \in B \& (2a-b) < 3\}$;

14. $\bigcap$, $\rho = \{(a,b) \mid a \in A \& b \in B \& a > 2b\}$;

15. $\setminus$, $\rho = \{(a,b) \mid a \in A \& b \in B \& (a+b+1) \vdots 3\}$;

16. Δ, $\rho = \{(a,b) \mid a \in A \& b \in B \& |a-b| < 2\}$;

17. $\bigcup$, $\rho = \{(a,b) \mid a \in A \& b \in B \& |a+b| > 1\}$;

18. $\bigcap$, $\rho = \{(a,b) \mid a \in A \& b \in B \& 3a > b\}$;

19. $\setminus$, $\rho = \{(a,b) \mid a \in A \,\&\, b \in B \,\&\, (a+b-1) \vdots 2\}$;

20. Δ, $\rho = \{(a,b) \mid a \in A \,\&\, b \in B \,\&\, (2a-b) \vdots 3\}$;

21. $\bigcup$, $\rho = \{(a,b) \mid a \in A \,\&\, b \in B \,\&\, |a-b| > 1\}$;

22. $\bigcap$, $\rho = \{(a,b) \mid a \in A \,\&\, b \in B \,\&\, (3a-b) \vdots 3\}$;

23. $\setminus$, $\rho = \{(a,b) \mid a \in A \,\&\, b \in B \,\&\, (5a+b) \vdots 5\}$

24. Δ, $\rho = \{(a,b) \mid a \in A \,\&\, b \in B \,\&\, (a+b) \vdots 5\}$;

25. $\bigcup$, $\rho = \{(a,b) \mid a \in A \,\&\, b \in B \,\&\, |2a-b| < 2\}$;

26. $\bigcap$, $\rho = \{(a,b) \mid a \in A \,\&\, b \in B \,\&\, 3a > b\}$;

27. $\setminus$, $\rho = \{(a,b) \mid a \in A \,\&\, b \in B \,\&\, (2a+b) > 1\}$;

28. Δ, $\rho = \{(a,b) \mid a \in A \,\&\, b \in B \,\&\, (3a-b) < 1\}$;

29. $\bigcup$, $\rho = \{(a,b) \mid a \in A \,\&\, b \in B \,\&\, |a+b| > 2\}$;

30. $\bigcap$, $\rho = \{(a,b) \mid a \in A \,\&\, b \in B \,\&\, |a-b| < 3\}$.

Лабораторна робота № 2.
ГЕНЕРАЦІЯ КОМБІНАТОРНИХ КОНФІГУРАЦІЙ

ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ ТА ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ

Головна задача комбінаторики – підрахунок та перелік елементів у скінченних множинах.

Правило додавання: якщо елемент – x може бути вибрано n способами, а y- іншими m способами, тоді вибір „ x або y” може бути здійснено (m+n) способами.

Правило добутку: якщо елемент – x може бути вибрано n способами, після чого y - m способами, тоді вибір упорядкованої пари (x,y) може бути здійснено (m*n) способами.

Набір елементів $x_{i1}, x_{i2}, ..., x_{im}$ з множини $X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ називається вибіркою об'єму m з n елементів – *(n,m) – вибіркою*.

Упорядкована (n,m) – вибірка (важливий порядок розміщення елементів), в якій елементи не можуть повторюватися, називається *(n,m)-розміщенням*, кількість всіх можливих розміщень обчислюється за формулою:

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}.$$

Упорядкована (n,m) – вибірка, в якій елементи можуть повторюватися, називається *(n,m) - розміщенням з повторюваннями*, кількість всіх можливих таких розміщень обчислюється за формулою:

$$\overline{A_n^m} = n^m .$$

Неупорядкована (n,m) – вибірка (порядок елементів не важливий), в якій елементи не можуть повторюватися, називається *(n,m) - сполученням*, кількість всіх можливих сполучень обчислюється за формулою:

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}.$$

Неупорядкована (n,m) – вибірка, в якій елементи можуть повторюватися, називається *(n,m) - сполученням з повторюваннями*, кількість всіх можливих таких сполучень обчислюється за формулою:

$$\overline{C_n^m} = C_{n+m-1}^m .$$

A_n^n - називається *перестановкою*, а кількість різних перестановок позначається та обчислюється за формулою:

$$P_n = n!.$$

Якщо в перестановках є однакові елементи, а саме перший елемент присутній n_1 разів, другий елемент - n_2 разів, ... , k-ий елемент - n_k разів, причому $n_1 + n_2 + ... + n_k = n$, то їх називають *перестановками з повторенням* та кількість їх можна знайти за формулою

$$P(n_1, n_2, \ldots, n_k) = \frac{n!}{n_1! n_2! ... n_k!}.$$

Нехай $X = \{X_1, X_2, ..., X_k\}$ - *розбиття множини* X ($|X| = n$) на k підмножин таких, що: $\bigcup_{i=1}^{k} X_i = X, \quad X_i \cap X_j = 0$ *при* $i \neq j, \quad |X_i| = n_i$.

Їх кількість при фіксованих n_i та *упорядкованих* $X_1, X_2, ..., X_k$ обчислюється за формулою:

$$C_n^{n_1, n_2, ..., n_k} = \frac{n!}{n_1! n_2! ... n_k!}$$

Якщо ж множину X ($|X| = n$) потрібно розбити на підмножини, серед яких для усіх i=1,…,n є $m_i \geq 0$ підмножин з i елементами, де $\sum_{i=1}^{n} i * m_i = n$, та при цьому набір підмножин в розбитті *не є упорядкованим*, тоді їх кількість обчислюється за формулою:

$$N(m_1, ..., m_n) = \frac{n!}{m_1! m_2! ... m_n! (1!)^{m_1} (2!)^{m_2} \cdots (n!)^{m_n}}$$

<u>Формула включень та виключень.</u> Нехай X_i- скінченні множини, де i=1,…,n, тоді:

$$|X_1 \cup ... \cup X_n| = (|X_1| + ... + |X_n|) - (|X_1 \cap X_2| + ... + |X_{n-1} \cap X_n|) +$$
$$+ (|X_1 \cap X_2 \cap X_3| + ... + |X_{n-2} \cap X_{n-1} \cap X_n|) - .... +$$
$$+ (-1)^{n+1} |X_1 \cap ... \cap X_n|$$

Наслідок.

$$\left|X \setminus (X_1 \cup \ldots \cup X_n)\right| = |X| - \left(|X_1| + \ldots + |X_n|\right) +$$
$$\left(|X_1 \cap X_2| + \ldots + |X_{n-1} \cap X_n|\right) - \ldots + (-1)^n |X_1 \cap \ldots \cap X_n|$$

Приведемо ще одну форму запису формули включень та виключень. Нехай X – скінченна множина з N елементів, $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ – деякі властивості, якими володіють чи ні елементи з X. Позначимо через $X_i = \{x \in X \mid \alpha_i(x)\}$ - множину елементів в X, які володіють властивістю α_i, а

$N(\alpha_{i1}, \ldots, \alpha_{ik}) = |X_{i1} \cap \ldots \cap X_{ik}| = \left|\{x \in X \mid \alpha_{i1}(x) \wedge \ldots \wedge \alpha_{ik}(x)\}\right|$ - кількість елементів в X, які володіють одночасно властивостями $\alpha_{i1}, \ldots, \alpha_{ik}$, $N_0 = \left|X \setminus (X_1 \cup \ldots \cup X_n)\right|$ - кількість елементів, які не володіють жодною з властивостей $\alpha_{i1}, \ldots, \alpha_{ik}$. Тоді маємо формулу:

$$N_0 = N - S_1 + S_2 - \ldots + (-1)^n S_n,$$

де
$$S_k = \sum_{1 \le i_1 < \ldots < i_k \le n} N(\alpha_{i1}, \ldots, \alpha_{ik}) \quad k = 1,2,\ldots,n.$$

Якщо треба знайти кількість елементів, які володіють рівно m властивостями, тоді використовують наступну формулу:

$$\hat{N}_m = \sum_{k=0}^{n-m} (-1)^k C_{m+k}^m S_{m+k}.$$

Приклади.

1. Кожен день, протягом 10 днів, клієнт брав з картки гроші: а) кожен день різну суму 5, 10, 15,…, 50 грн; б) 3 дні у сумі 100 грн, 5 днів у сумі 50 грн., 2 дня у сумі 20 грн, Скількома способами він це міг зробити?

Розв’язання:

а) усього 10 днів (n=10), і в усі ці дні клієнт брав гроші (m=10), кожен день різну суму, тобто має значення лише в який день була яка сума, тому маємо перестановку: $P_{10} = 10! = 3628800$;

б) в цьому випадку, на відміну від попереднього, в перестановках є однакові елементи, а саме, 100 грн повторюється 3 рази, 50 грн - 5 разів, 20 грн - 2 рази. Тому використовуємо формулу кількості перестановок з повторенням:

$$P_{10}^{3,5,2} = \frac{10!}{3!5!2!} = 2520\,.$$

2. Скільки п'ятицифрових чисел можна утворити з шести цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6?

Розв'язання.

З шести цифр (n=6) необхідно вибрати – п'ять (m=5), причому цифри у числі можуть повторюватися, і має значення в якому порядку вони записані, тому усього можливо утворити: $\overline{A_6^5} = 6^5 = 7776$ чисел.

3. Із 10 робітників фірми директору треба назначити бухгалтера, його помічника, двох менеджерів і трьох кур'єрів. Скількома способами це можливо зробити?

Розв'язання.

З початку з 10 чоловік виберемо бухгалтера – маємо 10 способів, потім з дев'яти залишених чоловік – його помічника – 9 способів, потім з восьми – двох менеджерів - $C_8^2 = \dfrac{8!}{2!(8-2)!} = 28$ способів та з шести, що залишилися, - трьох кур'єрів - $C_6^3 = \dfrac{6!}{3!(6-3)!} = 20$ способів. За теоремою добутку загальна кількість способів буде: 10*9*28*20=50400.

4. Скількома способами можна поставити в одну шеренгу гравців двох команд (по 5 чоловік) так, щоб при цьому два чоловіка однієї команди не стояли поруч?

Розв'язання.

З початку поставимо в шеренгу гравців однієї команди, це можливо зробити – P_5=5!=120 способами. Потім будемо ставити між ними гравців другої команди. Це також можна зробити 5!=120 способами. Але, необхідно ще врахувати, що на початку шеренги може стояти як гравець першої, так і гравець другої команди. Тому, остаточно, за правилом добутку маємо $2*(5!)^2$=28800 варіантів поставити в одну шеренгу гравців двох команд з чередуванням.

5. Скількома способами можна роздати 6 однакових іграшок трьом дітям так, щоб кожен з них отримав хоча б по однієї іграшки?

Розв'язання.

З початку роздамо по одній іграшці кожній дитині, між останніми трьома іграшками введемо два роздільника, так щоб кількість іграшок до першого з них були для першої дитини, кількість іграшок між першим та другим роздільником – для другої дитини, а після другого роздільника – для третьої дитини. Тоді кількість різних способів отримання дітьми іграшок буде дорівнювати кількості можливих варіантів вибору двох міст для роздільників з п'ятьох можливих, тобто - $C_5^2 = \dfrac{5!}{2!(5-2)!} = 10$, таке саме значення можна отримати, якщо поставити у відповідність розподілу 3 однакових іграшок між 3 дітьми сполучення з повторенням $\overline{C_3^3} = C_5^3 = 10$.

6. Скількома способами можна роздати 6 різних предметів трьом особам так, щоб кожна отримала по 2 предмети?

Розв'язання.

Це упорядковане розбиття, де $n=6$, $n_1=n_2=n_3=2$. Тобто можливих способів буде - $C_6^{2,2,2} = \dfrac{6!}{2!2!2!} = 90$.

7. Дев'ятьох робітників одного цеху мають розподілити на групи в 2, 3 і 4 чоловіка для проходження однакових курсів підвищення кваліфікації в різний час, які проходять в різних 7 навчальних закладах, з яких можливо вибрати будь-який. Скількома способами це можна зробити?

Розв'язання.

З початку виберемо 3 навчальних заклади, це можливо зробити $\overline{A_7^3} = 7^3 = 343$ способами, потім розіб'ємо робітників на три групи, це буде не упорядковане розбиття, тобто маємо:

$$N(0,1,1,1,0,0,0,0,0) = \frac{9!}{1!1!1!(2!)^1(3!)^1(4!)^1} = 1260 .$$

Далі за правилом добутку отримаємо – 343 * 1260 = 432180 різних способів.

8. У спортивному клубі займаються 38 чоловік. З них 16 грають у баскетбол, 17 – у хокей, 18 – у волейбол. Баскетболом і хокеєм захоплюється 4 чоловіки, баскетболом і волейболом – 7, волейболом і хокеєм – 5. Скільки чоловік захоплюється одночасно хокеєм, баскетболом і волейболом? Скільки чоловік захоплюється лише одним із цих видів спорту?

Розв'язання.

За формулою включень та виключень маємо:

$N=38$, $N_0=0$, $S_1=16+17+18=51$, $S_2=4+7+5=16$

$N_0 = N - S_1 + S_2 - S_3$, тоді $S_3 = N - S_1 + S_2 - N_0 = 38 - 51 + 16 = 3$ - чоловік захоплюється одночасно хокеєм, баскетболом і волейболом .

Лише одним із цих видів спорту захоплюються:

$$\hat{N}_1 = \sum_{k=0}^{3-1} (-1)^k C_{1+k}^1 S_{1+k} = S_1 - \frac{2!}{1!(2-1)!} S_2 + \frac{3!}{1!(3-1)!} S_3 =$$
$$= 51 - 32 + 9 = 28 \quad \textit{чоловік.}$$

ІНДИВІДУАЛЬНІ ЗАВДАННЯ

Завдання № 1. Використовуючи теоретичні відомості, розв'язати наступні комбінаторні задачі за своїм варіантом:

Варіант № 1

1. У мами було 2 яблука, 3 груші та 2 апельсини. Кожен день вона давала дитині по одному фрукту. Скількома способами вона могла це зробити?

2. Розклад на день містить 5 уроків. Визначити кількість можливих розкладів на день при виборі з 11 дисциплін за умови, що жоден предмет не стоїть у розкладі двічі на день.

3. Скільки наборів із 17 тістечок можна скласти, якщо у продажу їх 4 сорти?

4. Із 15 робітників фірми директору треба назначити бухгалтера, його помічника, двох менеджерів і чотирьох кур'єрів. Скількома способами це можна зробити?

5. Скількома способами можна поставити в одну шеренгу гравців двох футбольних команд (по 6 чоловік) так, щоб при цьому два футболісти першої команди не стояли поруч?

6. Три стрільці мають влучити у 15 мішеней (кожен у п'ять). Скількома способами вони можуть розподілити мішені між собою?

7. В екскурсії брали участь студенти технічного університету. Всі вони були зі значками, або з листівками. Юнаків було 16, а зі значками усього – 24 чоловіки. Дівчат із листівками було стільки ж, скільки й юнаків із значками, дівчат із листівками та значками було – 5. Скільки всього було студентів?

Варіант № 2

1. Кожен день, протягом 10 днів, клієнт брав з картки гроші а) 3 дні у сумі 100 грн, 5 днів у сумі 50 грн., 2 дня у сумі 20 грн; б) кожен день різну суму 5, 10, 15,…, 50 грн. Скількома способами він це міг зробити?

2. Скільки п'ятицифрових чисел можна утворити з дев'яти цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9?

3. Команда з п'яти чоловік виступає на змаганнях, у яких бере учать ще 20 спортсменів. Скількома способами можуть бути розподілені місця, зайняті членами цієї команди, за умови, що жодне з них не може бути поділено, та немає значення, як місця будуть поділені між членами команди?

4. Комісія складається з голови, його заступника, та ще трьох чоловік. Скількома способами можна вибрати таку комісію з 7 чоловік?

5. Скількома способами можна розставити 5 різних книжок з математики і 3 різні книжки з фізики, щоб усі книжки з фізики стояли поруч?

6. Вісім авторів мають писати книгу з шістнадцяти розділів. Скількома способами можна розподілити матеріал між авторами, якщо два чоловіки напишуть по три розділи, чотири – по два та двоє – по одному розділу книги?

7. Якщо відомо, що кожен учень у школі вивчає принаймні одну із іноземних мов, знайдіть загальну кількість учнів у школі, якщо відомо, що англійську мову вивчають 28 учнів, французьку – 23 учні, німецьку – 21 учень, англійську та французьку – 12 учнів, англійську та німецьку – 8 учнів, французьку та німецьку – 7 учнів, всі три мови - 5 учнів.

Варіант № 3

1. У вчителя 4 однакових групи з англійської мови і 3 однакових - з французької. Кожен день він готовиться до однієї мови і проводить заняття в одній групі. Скількома способами він може вести таку підготовку?

2. Садівник протягом трьох днів має посадити 10 дерев десяти різних сортів. Скількома способами він може розподілити за днями свою роботу?

3. У поштовому відділенні продаються листівки 10 сортів. Скількома способами можна купити в ньому 12 листівок?

4. Скільки існує різних нескоротних дробів, чисельниками і знаменниками яких є числа 2, 3, 4, 5, 6, 7, 11, 13, 17, 19?

5. З цифр 1, 2, 3, 5, 6, 8, 9 утворюють різні п'ятицифрові числа, які не мають однакових цифр. Визначити кількість чисел, у яких зустрічаються цифри 6 і 8 одночасно.

6. Скількома способами можна роздати 6 різних предметів трьом особам так, щоб кожна отримала по 2 предмети?

7. У спортивному клубі займаються 38 чоловік. З них 16 грають у баскетбол, 17 – у хокей, 18 – у волейбол. Баскетболом і хокеєм захоплюється 4 чоловіки, баскетболом і волейболом – 7, волейболом і хокеєм – 5. Скільки чоловік захоплюється одночасно хокеєм, баскетболом і волейболом? Скільки чоловік захоплюється лише одним із цих видів спорту?

Варіант № 4

1. Скількома способами можна видати 15 учням: а) 15 різних варіантів білетів; б) 5 білетів першого варіанта, 5 – другого, 5 – третього?

2. Скількома способами можна розділити 6 різних цукерок між трьома дітьми?

3. Скількома способами можна розташувати 12 однакових деталей у трьох різних ящиках?

4. Збори, на яких присутні 40 чоловік, обирають голову, секретаря і трьох членів комісії. Скількома способами це можна зробити?

5. Для учнів класу було куплено 20 білетів у театр на місцях, що знаходяться в одному ряду (на якому 20 місць). Скільки є способів розподілу цих білетів між учнями (10 хлопців та 10 дівчат), щоб два хлопця або дві дівчини не сиділи поруч?

6. Десятьох тенісистів мають розподілити на групи по 2, 3 і 5 спортсменів для поїздки на три турніри, які обираються з 6 можливих. Скількома способами це можна зробити?

7. Знайдіть кількість цілих додатних чисел, що не більше 1000 і не діляться на жодне з чисел 3, 5 і 7.

Варіант № 5

1. Скільки різних кілець, що світяться, можна утворити, розмістивши по колу 10 різнокольорових лампочок (кільця вважати однаковими, якщо послідовність кольорів одна й та сама)?

2. На дев'яти картинках записані цифри 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 (на кожній картці по одній цифрі). Беруть чотири катки і складають з них чотирицифрове число. Скільки різних чисел можна отримати таким чином?

3. Скільки існує трикутників, довжини сторін яких мають одне з таких значень: 4, 5, 6, 7 см?

4. Скільки різних правильних нескоротних дробів можна скласти з чисел 2, 5, 7, 11, 15, 17, 19, 23, 25 так, щоб у кожен дріб входило два числа?

5. Скільки п'ятицифрових чисел можна утворити з цифр 2, 3, 6, 7, 8 (без повторення) так, щоб парні цифри не стояли поруч?

6. Скількома способами можна розкласти 28 різних предметів у чотири однакові ящики так, щоб у кожному з них опинилося по 7 предметів?

7. Знайти кількість цілих додатних чисел, що не більше 1000 і не діляться на жодне з чисел 6, 7 і 15.

Варіант № 6

1. Скільки різних бус можна зробити з 15 різних бусинок?

2. Скільки різних трицифрових натуральних чисел можна скласти з цифр 1, 2, 3, 4, 5, щоб у ньому кожна з цих цифр зустрічалась не більше одного разу?

3. З лабораторії, у якій працює 25 чоловік, 5 співробітників мають поїхати у відрядження. Скільки може бути різних складів цієї групи?

4. Із 12 тенісистів і 6 тенісисток формують три змішані пари (до пари входять по одному тенісисту й одній тенісистці). Скількома способами це можна зробити?

5. На книжковій полиці вміщується тринадцять томів енциклопедії. Скількома способами їх можна розставити так, щоб томи 1 і 2 стояли поруч?

6. У турнірі беруть участь 12 шахістів. Визначити кількість різних розкладів першого туру (розклади вважаються різними, якщо вони відрізняються учасниками; колір та номер столу не враховується)

7. Знайти кількість цілих додатних чисел, що не більше 9000 і не діляться на жодне з чисел 12, 36 і 52.

Варіант № 7

1. Учасники шахового турніру грають у залі, де є 8 столів. Скількома способами можна розмістити 16 шахістів, якщо учасники всіх партій відомі?

2. Скільки трицифрових чисел можна утворити з дев'яти цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9?

3. Скільки можна побудувати різних прямокутних паралелепіпедів, довжини ребер яких виражають натуральними числами від 1 до 10?

4. У вищій лізі чемпіонату України з футболу грають 16 команд. Скільки існує способів розподілення I, II, та III місця та вибору двох команд які перейдуть у першу лігу (дві останні команди)?

5. З цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 утворюють різні п'ятицифрові числа, що не мають однакових цифр. Визначити кількість чисел, у яких зустрічається цифри 5, 3, 4 одночасно, якщо вони не стоять поруч?

6. У шаховому турніру беруть участь 18 шахістів. Визначити кількість різних розкладів першого туру (розклади вважаються різними, якщо вони відрізняються учасниками, колір та номер столу не враховується).

7. Знайти кількість цілих додатних чисел, які змінюються від 101 до 1000 та діляться рівно на два з чисел 3, 6 і 7.

Варіант № 8

1. З букв розрізаної абетки складено слово «конус». Скільки «слів» можна отримати, якщо переставляти букви у цьому слові?

2. Скільки різних чотирицифрових чисел можна скласти з цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 так, щоб у кожному з них була цифра 1? (Цифри в числі не повинні повторюватися).

3. Із групи до складу якої входять 8 хлопчиків і 3 дівчинки, треба сформувати команду з 6 чоловік. Скільки існує способів формування такої команди?

4. Скільки можна скласти різних неправильних нескоротних дробів, чисельниками і знаменниками яких є числа 3, 5, 7, 9, 11, 13, 17, 27?

5. Скількома способами можна переставити букви в слові «обороноздатність», щоб дві букви «о» не стояли поряд?

6. П’ять учнів мають підготовити 10 докладів на семінар (кожен по два). Скількома способами вони можуть розподілити доклади між собою?

7. Студенти ІОТ факультету обов’язково знають хоча б одну мову програмування. Відомо що PASCAL – знають 15 учнів, FORTRAN – 26, C++ - 37, PASCAL та FORTRAN – 11, PASCAL та C++ - 10, PASCAL та FORTRAN – 13; C++, PASCAL та FORTRAN – 7 студентів. Скільки усього студентів на факультеті? Скільки з них знають тільки одну мову програмування?

Варіант № 9

1. Скількома способами можна розставити 4 однакових книжки з алгебри і 5 різних з геометрії так, щоб усі книги з геометрії стояли разом?

2. У класі тридцять учнів. Скількома способами можна серед них вибрати старосту та його заступника?

3. Скільки наборів з 10 цукерок можна скласти, якщо у продажу їх 6 сортів?

4. На площині дано три точки: A, B, C. Проведемо через точку A 5 прямих, через B- 3 прямих, через C- 7 прямих. Причому у сукупності ці прямі є прямими загального положення, тобто жодні дві з них не паралельні і жодні три з них не перетинаються в одній точці (крім точок A, B, C), а також немає прямих, що проходять через дві з цих трьох точок. Знайти кількість трикутників, вершини яких є точками перетину цих прямих і не збігаються з точками A, B, C.

5. З цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 утворюють різні шестицифрові числа, що не мають однакових цифр. Визначити кількість чисел, у яких зустрічаються цифри 6 та 8 одночасно, але вони не стоять поруч.

6. У групі 20 чоловік. Їх необхідно поділити на п'ять коаліцій, в яких повинно бути 3, 3, 3, 4 та 7 чоловік. Скількома способами це можна зробити?

7. У класі навчається 40 учнів. Із них мають трійки з англійської мови 16 учнів, з математики – 12, з фізики – 18. Мають трійки з фізики та англійської мови – 11 учнів, з математики та англійської мови – 8, з математики та фізики – 6. А 3 учня мають трійки по всім цим предметам. Скільки учнів навчаються без трійок з цих предметів? Скільки мають лише по дві трійки з цих предметів?

Варіант № 10

1. Скількома способами можна розставити а) 10 різних книжок на полиці; б) якщо серед них є 5 однакових?

2. З команди у якої 10 плавців, вибирається четвірка, яка бере участь в естафеті з комплексного плавання (тобто кожен пливе своїм стилем). Скількома способами можна вибрати цю естафетну четвірку?

3. Скількома способами можна розташувати 12 однакових ручок у чотири різні пенали?

4. На футбольний турнір треба послати збірну команду в складі: тренер, його помічник, 2 асистенти, 20 футболістів, лікар і 2 масажисти. Тренерський склад може бути відібраний з 10 спеціалістів, футболісти - з 25 спортсменів, лікаря треба вибрати одного з трьох, а масажистів – двох з п'яти. Скількома способами може бути укомплектована така команда?

5. З цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 утворюють різні шестицифрові числа, що не мають однакових цифр. Визначити кількість чисел, у яких зустрічаються цифри 7, 8 одночасно.

6. У групі 21 чоловік. Їх необхідно поділити на три коаліції по 7 чоловік. Скількома способами це можна зробити?

7. На базі відпочинку знаходиться 70 чоловік. З них 27 займаються в драматичному гуртку, 32 співають у хорі, 20 захоплюються спортом. Драмгурток відвідують 10 чоловік з хору, а хор – 6 спортсменів, у драмгуртку 8 спортсменів; 3 спортсмени займаються і в драмгуртку, і в хорі. Скільки чоловік не співають у хорі, не захоплюються спортом та не займаються у драмгуртку? Скільки чоловік займається лише одним з цих гуртків?

Варіант № 11

1. Скількома способами можна розставити 12 стрільців: а) к 12 мішеням; б) 5 к перший мішені, 4 – к другій, 3 – к третій?

2. Із групи, що складається з 15 чоловік вибирають чотирьох учасників естафети 800х400х200х100 м. Скількома способами можна розставити спортсменів на етапах такої естафети?

3. Скількома способами можна вибрати 5 олівців з 11 різних?

4. Ліфт, у якому знаходиться 9 пасажирів, може зупинятись на десяти поверхах. Пасажири виходять групами по два, три і чотири чоловіки. Скількома способами вони можуть вийти, якщо ліфт не повертається на поверх, де він уже був?

5. На книжковій полиці вміщується одинадцять томів енциклопедії. Скількома способами їх можна розставити так, щоб томи 3 і 4 не стояли поруч?

6. Чотири садовода повинні висадити 14 різних дерев. Перший – 3 дерева, другий – 4 дерева, третій – 2 дерева, а четвертий останні дерева. Скількома способами вони можуть розподілити ці дерева між собою?

7. Під час дослідження читацьких смаків студентів виявилось, що 60% читають журнал А, 50% - журнал В, 50% - журнал С, 30% - журнали А і В, 20% - журнали В і С, 40% - журнали А і С, 10% - журнали А, В і С. Скільки відсотків студентів: а) не читає жодного журналу; б) читає тільки 2 журнали; в) читає не менше двох журналів?

Варіант № 12

1. В дитячому садку 10 хлопчиків. Скільки є способів одягнути їх в новорічні костюми: а) якщо є 10 різних костюмів; б) є 2 костюми зайців, 5 - ведмежат і 3 - білочок.

2. Скільки різних чотирицифрових чисел можна скласти з цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, якщо кожну з них використовувати при записи числа лише один раз?

3. У вазі стоїть пронумеровані 10 червоних і 5 рожевих гвоздик. Скількома способами можна вибрати з вази три квітки?

4. У чемпіонаті України з футболу грає 18 команд. Скількома способами можуть розподілитися місця, якщо відомо, що команди «Динамо», «Дніпро», «Шахтар», «Чорноморець» і «Таврія» займуть перші п'ять місць?

5. Скількома способами можна поділити 15 однакових цукерок між п'ятьма дітьми?

6. Дванадцять атлетів треба розподілити на 2 групи по 3 атлета, та 3 групи по 2 атлета для змагань на різні дистанції, при цьому кожна з цих груп може поїхати на змагання в одне з трьох можливих міст. Скількома способами можна розподілити атлетів на необхідні групи та для кожної з них вибрати місто для змагання?

7. На одній з кафедр університету працює 13 чоловік, кожен з яких знає хоча б одну іноземну мову. 10 чоловік знають англійську, 7 – німецьку, 6 – французьку, 5 – англійську та німецьку, 4 – англійську та французьку, 3 – німецьку та французьку. Скільки чоловік: а) знають всі три мови; б) знають тільки дві мови; в) знають лише англійську?

Варіант № 13

1. Чоловік протягом 14 днів мати був прочитати 14 журналів, причому в день він читав лише один журнал. Скількома варіантами він міг прочитати всі журнали?

2. Скільки різних трицифрових натуральних чисел можна скласти з цифр 1, 2, 3, 4, 5 за умови, що в кожне число входить цифра не більше одного разу?

3. Скількома способами можна вибрати трьох чергових з класу, в якому навчається 20 учнів?

4. Скількома способами можна розділити 6 різних іграшок та 5 різних книжок між 3 дітьми?

5. Скількома способами можна поділити 9 однакових яблук та 6 однакових груш між трьома чоловіками?

6. П'ять учнів вирішили написати всі необхідні 15 білетів, які пропонував викладач на екзамен з філософії. При цьому кількість написаних кожним з них білетів розподілили так – перший має написати 4 білета, другий – 3, третій – 2, четвертий – 1, п'ятий – 5. Скількома способами можна розподілити таким чином всі білети між ними?

7. Скільки чотирьохзначних чисел діляться хоча б на одне з чисел 12, 8?

Варіант № 14

1. Скільки різних «слів» можна скласти з слова: а) «січень»; б) «автомат».

2. Скільки різних шестицифрових чисел можна утворити з восьми цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, так щоб у кожному з них була одна цифра 5 та цифри не повторювались?

3. З 10 пронумерованих білих і 8 пронумерованих червоних троянд треба скласти букет, який мав би п'ять квітів. Скількома способами це можна зробити?

4. У речовій лотереї розігрується 8 предметів. Усього в «урні» 50 квитків. Виймається 5 квитків. Скількома способами їх можна вийняти так, щоб тільки два з них були виграшні?

5. Скількома способами можна поділити 8 однакових ручок між чотирма учнями так, щоб у кожного з них було хоча б по однієї?

6. У класі 18 учнів. Для проведення контрольної роботи вчитель повинен кожному з них видати один з чотирьох варіантів. Перший варіант получили 4 учня, другий – 6 учнів, третій – 5 учнів, а четвертий – останні учні класу. Скількома способами учні цього класу могли получити варіанти завдання до контрольної роботи?

7. З колоди взяли 5 карт, які занумеровані числами 1, …,5. Скількома способами можна розкласти їх у рядок так, щоб ні одна карта з номером і не займала і-є місце?

Варіант № 15

1. Скількома способами можна розставити а) 15 чоловік в шеренгу; б) 5 червоних, 3 зелені и 4 сині кубика в ряд?

2. Скільки різних п'ятицифрових чисел можна утворити з семі цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7?

3. На площині 12 точок розміщенні так, що жодні три з них не лежать на одній прямій. Скільки прямих можна провести через ці точки?

4. З лабораторії, у якій працює 25 чоловік, 5 співробітників мають поїхати у відрядження. Скільки може бути різних складів цієї групи, якщо начальник лабораторії і головний інженер одночасно їхати не можуть?

5. Скількома способами можна поділити 10 зошитів у клітку та 12 зошитів у лінійку між шістьома студентами так, щоб по одному зошиту у клітинку та по одному зошиту у лінійку було у кожного?

6. В гуртожиток необхідно поселити у три двомісні кімнати, та чотири трьохмісні кімнати 18 дівчат. Скількома способами можна розподілити дівчат у кімнати, якщо має значення тільки хто з ким буде в однієї кімнаті?

7. У бібліотеці усього 40 різних книг з математики, в яких можуть бути розділи за темами першого, другого та третього семестрів з курсу „Вища математика”. У 28 книгах є інформація за перший семестр, у 24 – за другий, у 15 – за третій; у 18 – за перший та другий, у 11 – за перший та третій, у 9 – за другий та третій; у 7 – за усі семестри. Скільки книг з математики не містять інформації з курсу вища математика? Скільки книг містить інформацію лише за перший семестр?

Варіант № 16

1. Скільки різних «слів» можна скласти з слова: а) «грудень»; б) «робота».

2. Розклад на день містить 4 уроків. Визначити кількість таких можливих розкладів при виборі з 8 дисциплін.

3. Група складається з 10 чоловік. Скільки є способів відправити на екскурсію чотирьох чоловік з цієї групи?

4. Із групи до складу якої входять 7 хлопчиків і 4 дівчинки, треба сформувати команду з 6 чоловік так, щоб вона мала не менше двох дівчат. Скільки існує способів формування такої команди?

5. Скількома способами можна розділити виріб 8 однакових деталей з латуні та 6 однакових деталей зі сталі на трьох станках, які можуть виробляти обидва ці типа деталей, якщо хоча б по одній з цих деталей повинен зробити кожен зі станків?

6. Скількома способами можна розділити 13 різних цукерок на 3 кучки по три цукерки, та одну кучку з чотирьох цукерок?

7. До університету прийшли п’ять вчителів, які читають кожен свій предмет: фізику, хімію, математику, інформатику, історію.

Диспетчерська склала розклад занять на один день по одній парі з цих предметів навмання для кафедри за фамілією вчителя, та навмання для деканату за назвою предмету. Скількома способами можна скласти такий розклад, щоб ні один з вчителів не попав на свій предмет?

Варіант № 17

1. Скількома способами можна розставити а) 10 учнів в колонну; б) 3 кубика и 7 пірамід в ряд?

2. У спортивному класі 15 чоловік займаються легкою атлетикою. На змагання необхідно відправити по одному спортсмену для кросу на 2, 5 та 10 км. Скільки способів вибору спортсменів з цього класу на ці змагання?

3. Чемпіонат, у якому беруть участь 16 команд, проводиться в два кола (тобто кожна з команд двічі зустрічається з кожною з решти команд). Визначити, яку кількість зустрічей має бути проведено.

4. Скількома способами можна вибрати 2 олівця і 3 ручки з 6 різних олівців і 8 ручок?

5. Скількома способами можна поділити 5 однакових сорочок та 4 однакових штанів між двома хлопцями?

6. Скількома способами можна розділити 12 різних цукерок між трьома дітьми, якщо самому старшому маємо дати 3 цукерки, середньому – 4, а самому молодшому - 5?

7. Підкидаються три гральні кістки. Скільки може бути варіантів таких, щоб не виповнилась жодна умова: 1) на всіх кістках випали трійки; 2) на всіх кістках випали попарно різні числа; 3) рівно на однієї з них випала одиниця?

Варіант № 18

1. Скількома способами можна розставити на дошку з 16 квадратів а) 16 різних фішок, так щоб кожна була одна в своєму квадраті; б) якщо серед них було 5 червоних, 5 чорних та 6 білих?

2. На олімпіаду необхідно представити по одному учню за дисциплінами: фізика, математика, хімія, біологія. У класі 20 чоловік. Скількома способами можна вибрати з них учнів для олімпіад, якщо відомо, що Іванов обов'язково повинен там бути?

3. Необхідно сховати у різні 4 шафи 6 дітей, при цьому всі шість вони можуть розміститися і в одному з них. Скількома способами це можна зробити?

4. У вазі стоять пронумеровані 10 червоних і 5 рожевих гвоздик. Скількома способами можна вибрати з вази три квітки так, щоб були як червоні, так і рожеві гвоздики?

5. Садівникові необхідно посадити 7 груш, 8 яблунь та 4 вишні у двох садах. Скільки варіантів може бути такої посадки, якщо хоча б по одному дереву кожного виду він повинен посадити у кожному саду?

6. Скільки різних варіантів розподілу10 спортсменів на пари для ігри у теніс?

7. Відомо, що телефонний номер з 6 цифр не ділиться на жодне з чисел 3, 6, а також не починається з цифри 0. Скільки різних таких номерів телефону може бути?

Варіант № 19

1. Скільки різних «слів» можна скласти з слова: а) «листопад»; б) «креслення».

2. Робочий має зробити за 5 днів 12 різних деталей. Для вироблення кожної з них достатньо 0,5 часу. Скількома способами робочий може розподілити за днями цю роботу, враховуючи, що її можна зробити і за один день?

3. Під час зустрічі 12 чоловік потиснули один одному руки. Скільки рукостискань було?

4. З 7 пронумерованих білих і 8 пронумерованих червоних троянд треба скласти букет, який мав би 2 білі та 3 червоні троянди або 3 біли та 2 червоні. Скількома способами це можна зробити?

5. Скількома способами можна поставити в ряд 7 хлопців та 5 дівчат так, щоб при цьому дві дівчини не стояли поруч?

6. Три робочих повинні зробити 10 різних деталей. Перший – 3 деталі, другий – 2, а третій – 5. Скількома способами вони можуть розподілити між собою роботу?

7. На заводі виробляються деталі трьох типів, яки потрібні для різних видів готової продукції. Відомо що для 50% готової продукції потрібні деталі першого типу, для 40% готової продукції потрібні деталі другого типу, для 35% - третього типу; для 26% готової продукції потрібні деталі першого та другого типу; 21% - першого та третього типу; 18% - другого та третього типу. Скільки відсотків готової продукції потребують всі три типа деталей?

Варіант № 20

1. Скільки різних «слів» можна скласти з слова: а) «книга»; б) «телевізор».

2. Скількома способами можна розділити 8 різних ручок між 4 учнями, якщо кожний з них може остатися і без ручки?

3. У лікарні 15 палат. Лікар веде п'ять з них. Скількома способами він може підібрати собі палати для лікування?

4. Скількома способами можна сформувати групу №1 з трьох учнів і одного викладача, якщо є 80 учнів і 3 викладача; чи групу №2 з п'яти учнів і двох викладачів, якщо є 20 учнів і 3 викладача?

5. Скількома способами можна по кругу поставити 5 різних ляльок та 3 різні м'які іграшки так, щоб при цьому м'які іграшки не стояли поруч?

6. Дев'ятьох студентів необхідно розподілити на три групи по 3 студента, для відправлення цих груп на різні конференції. Конференції проходять у різних п'ятьох містах, з яких необхідно вибрати три. Скількома способами можна відправити цих студентів на можливі конференції?

7. Лікар веде чотири палати з номерами 1,2,3,4. Скільки способів обходу лікарем палат так, щоб порядок заходу лікарем до палати не відповідав її номеру?

Варіант № 21

1. Скількома способами може бути а) утворена черга з 8 чоловік; б) складена матриця розміру (3х3), якщо в ній п'ять нулів, дві одиниці и дві двойки?

2. Скількома способами можна розділити 7 різних видів робіт між 5 робочими, якщо кожний з них може виконати і усі з них?

3. У лікарні 12 палат. Лікар повинен зайти в одну конкретну з них. Скільки способів того, що він не попаде в потрібну йому палату, якщо він заходить в п'ять навмання обраних?

4. У фортепіанному гуртку навчається 10 чоловік, у гуртку художнього слова - 15, у вокальному гуртку - 12 і у фотогуртку – 20 чоловік. Скількома способами можна сформувати трупу з чотирьох читців, трьох піаністів, п'яти співаків і одного фотографа?

5. Скількома способами можна розставити 9 різних книжок на полиці так, щоб дві задані книжки стояли поруч?

6. Два вчителя повинні розподілити між собою групу з 12 чоловік на дві підгрупи по 6 чоловік для проведення лабораторних робіт. Скількома способами вони це можуть зробити?

7. Скільки шестизначних чисел діляться хоча б на одне з чисел 24, 18? Скільки з них діляться рівно на одне з них?

Варіант № 22

1. Скільки різних «слів» можна скласти з слова: а) «сумнів»; б) «космос».

2. Скількома способами можна розподілити перших три місця між 8 учасниками змагання з художньої гімнастики?

3. Скількома способами можна купити у магазині 4 пачки сигарет, якщо на вітрині 10 різних видів?

4. На біржу фірма має відрядити двох брокерів, трьох дилерів і одного менеджера. Скількома способами це можна зробити, якщо до складу фірми входять 15 брокерів, 10 дилерів, і 5 менеджерів?

5. Скількома способами можна розподілити виріб 5 однакових деталей та інших 7 однакових деталей на двох станках, які можуть виробляти обидва ці типа деталей, якщо хоча б по одній деталі повинен зробити кожен зі станків?

6. Скількома способами можна розкласти 9 різних предметів у чотири однакових ящики так, щоб у трьох з них опинилося по 2 предмета, а в одному - 3?

7. Скільки чотирьохзначних чисел діляться хоча б на одне з чисел 2, 12, 16? Скільки з них діляться рівно на два з них?

Варіант № 23

1. Скількома способами можна а) розсадити 12 чоловік на 12 місць; б) повісити в шафу 5 однакових білих сорочок, 3 чорних и 7 синіх?

2. Асистент кафедри ПМ може читати 4 дисципліни, при цьому він повинен читати перших 3 пари протягом двох днів – вівторка та середи. Визначити кількість можливих його розкладів.

3. В університеті 10 комп’ютерних залів. Студент забув у якому з них у нього пара. Скільки існує способів не попасти в потрібний йому зал, якщо він заходить в три навмання обраних?

4. У лотереї розігрується 12 призів. Усього 40 квитків. Виймається 4 квитка. Скількома способами їх можна вийняти так, щоб принаймні два з них були виграшні?

5. На двох дачних ділянках необхідно посадити 3 черешні, 5 яблунь та 6 абрикосів. Скільки варіантів може бути такої посадки, якщо хоча б по одному дереву повинно бути посаджено на кожній ділянці?

6. Скількома способами можна розділити 12 різних ручок на 3 набори по 4 в кожному, а потім ці набори поділити між трьома учнями, при цьому не обов'язково, щоб кожен учень отримав набір?

7. 75% людей люблять м'ясо, 65% - люблять молоко, 52% - люблять рибу. Хоча б один з цих продуктів люблять усі. М'ясо та молоко – люблять 43%, м'ясо та рибу – 36%, молоко та рибу – 28%. Скільки людей люблять усі три продукти?

Варіант № 24

1. Скільки різних «слів» можна скласти з слова: а) «таблиця» ; б) «тактика».

2. На міжвузівську конференцію необхідно представити п'ять студентів з доповідями з п'яти даних тем. У НУ"ЗП" після проведення відбору між студентами усіх факультетів було відібрано 12 кандидатів. Скількома способами серед них можна вибрати п'ятьох студентів для підготовки необхідних докладів з врахуванням розподілу тем?

3. Скільки можна побудувати різних прямокутників, довжини сторін яких виражаються натуральними числами від 1 до 7?

4. У вазі стоїть пронумеровані 12 червоних і 7 рожевих гвоздик. Скількома способами можна вибрати з вази п'ять квітів так, щоб усі вони були одного кольору?

5. Скількома способами можна переставити букви в слові «оборонятися», щоб однакові букви не стояли поряд?

6. Скількома способами можна розділити 10 різних чашок, та 10 різних тарілок на п'ять наборів по дві чашки та дві тарілки?

7. У гардероб здають пальта 5 чоловік. Назад їм вертають пальта навмання. Скільки способів видачі пальт так, щоб не одно з них не досталося хазяїну?

Варіант № 25

1. Скільки різних «слів» можна скласти з слова: а) «стілець»; б) «холодильник».

2. На конференцію необхідно представити три студента з докладами на три данні теми. У групі 11 чоловік. Скількома способами можна розподілити між ними ці доклади, якщо кожний студент не може робити більш одного докладу, а також Петров повинен зробити доклад обов'язково?

3. Скільки існує трикутників, довжини сторін яких мають одне з таких значень: 5, 6, 7, 8, 9 см?

4. Для привітання зі святом дівчат, яких у класі 10, хлопці вирішили купити по п'ять книг двох різних видів із 15, запропонованих видавництвом «Факт». Скільки існує різних способів отримання подарунків дівчатами?

5. Скількома способами можна поставити у колонну 8 чоловіків та 5 жінок так, щоб при цьому жінки стояли поруч?

6. В гуртожиток необхідно поселити у три двохмісні кімнати 6 дівчат, та три трьохмісні кімнати 9 хлопців. Скількома способами це можна зробити, якщо має значення тільки хто з ким буде в одній кімнаті?

7. У кіно продали 6 квитків з номерами місця. Люді займають ці 6 міст, але навмання. Скільки способів посадки людей так, щоб кожен з них не сидів на своєму місці?

Варіант № 26

1. На алеї у рядок саджають дерева. Скількома способами це можна зробити якщо: а) є 8 різних дерев; б) висаджують 5 беріз, 3 тополя, 2 каштана.

2. Скількома способами можна розділити 7 різних іграшок між 3 дітьми, якщо вони можуть остатися і без іграшок?

3. Скільки варіантів покупки 5 коробок цукерок, якщо в магазині є 7 різних видів?

4. Перший станок випустив 10 деталей з котрих 2 браковані, а другий станок випустив 15 деталей з 4 бракованими. Вибираємо станок и 5 деталей зроблених на ньому. Скількома способами можна здійснити цей вибір, щоб отримати рівно 2 браковані деталі?

5. Скількома способами можна по кругу поставити 3 учня першого класу та 5 учнів другого класу так, щоб всі учні першого класу стояли поруч?

6. У вазі стоять пронумеровані 14 червоних гвоздик. Скількома способами можна зробити з них три букета по три гвоздики, та один букет з п'яти гвоздик?

7. Студенти групи університету можуть мати читацький квиток чи пропуск до гуртожитку, хоча б одне обов'язково. Юнаків у групі 14; а студентів, які мають читацький квиток усього – 26. Дівчат з пропуском стільки ж, скільки й юнаків з читацьким квитком, дівчат з читацьким квитком та пропуском до гуртожитку було – 4. Скільки всього було студентів у групі?

Варіант № 27

1. Скільки різних «слів» можна скласти з слова: а) «тайфун» ; б) «піраміда».

2. Учень має чотири вихідних, протягом яких повинен зробити домашню роботу по 6 предметам. Скількома способами він може розподілити за днями виконання домашніх робіт по даним предметам?

3. У командировку необхідно відправити 7 чоловік. Скількома способами це можна зробити, якщо кандидатів – 21?

4. Перший станок випустив 10 деталей з котрих 2 браковані, а другий станок випустив 15 деталей з 4 бракованими. Вибираємо станок и 5 деталей зроблених на ньому. Скількома способами можна здійснити цей вибір, щоб отримати хоча б 2 браковані деталі?

5. Скількома способами можна переставити букви в слові «попередження», щоб однакові букви не стояли поряд?

6. Комісія складається з голови, та ще трьох відділів: перший по прийманню документів з двох чоловік; другий по проведенню письмового екзамену з чотирьох чоловік; третій по перевірці екзаменаційних робіт з трьох чоловік. На кафедрі 10 чоловік, скількома способами можна їх розподілити для утворення цієї комісії?

7. Знайти кількість цілих додатних чисел від 200 до 9000, які діляться рівно на два з чисел 16, 18, 15.

Варіант № 28

1. Викладач може перевірити контрольні роботі 12 студентів у різній послідовності. Скількома різними способами він може це зробити?

2. Скількома способами можна посадити алею з 12 дерев, якщо маємо по 15 дерев 4 видів?

3. Скільки наборів із 8 фруктів можна скласти, якщо у продажу їх 5 різних сортів?

4. Для хлопців, яких було 12, дівчата на 23 лютого вирішили купити ручки трьох різних видів по чотири кожного виду. Всього у магазині їм було запропоновано 10 різних видів. Скільки існує різних способів отримання подарунків хлопцями?

5. Необхідно зробити 18 карток по 6 кожного варіанту для написання контрольної роботі студентами першого курсу. Скількома способами може бути розподілена ця робота між трьома асистентами кафедри, якщо всі завдання на кожен варіант відомі?

6. Як можна розподілити 20 різних бусинок, для створення трьох бус: перше з 8, друге – з 7, та третє – з 5 бусинок?

7. Група з 8 чоловік писала анкету без фамілій. Скільки способів повернення цієї анкети так, щоб не один чоловік не отримав своєї анкети?

Варіант № 29

1. Скільки різних «слів» можна скласти з слова: а) «плита»; б) «шоколад».

2. У змаганнях по футболу беруть участь 10 команд. Скількома способами можна розподілити перших п’ять місць між ними?

3. Скільки існує ромбів, довжини діагоналей яких мають одне з таких значень: 4, 5, 6, 7, 8, 9 см?

4. З колоди карт (36 штук) витягнули 4. Скільки варіантів того, що всі вони однієї масті, або одного пріоритету?

5. Необхідно розсадити 4 хлопців та 7 дівчат на один рядок з 15 міст в театрі. При цьому всі вони повинні сидіти підряд і так, щоб два хлопця не сиділи поруч. Скільки варіантів існує їх розсадити?

6. Скількома способами можна розставити 10 різних книжок на 2 полиці по 5 на кожну з них, з врахуванням розташування їх на полицях?

7. Дано 200 геометричних фігур. Відомо, що 150 з них мають усі прями кути, 120 – мають однакові сторони, 87 – і однакові сторони і усі прями кути. Скільки даних геометричних фігур не буде мати ці дві властивості? Скільки з цих фігур ромбів, які не є квадратами?

Варіант №30

1. Скільки різних «слів» можна скласти з слова: а) «автобус»; б) «конспект».

2. Скількома способами можна вибрати партнерів для танців для 6 дівчат, якщо є 9 хлопців?

3. На змаганні по тенісу виступає команда з восьмі чоловік. Всього у змаганні приймають участь 26 спортсменів. Скількома способами можуть бути розподілені місця, зайняті членами цієї команди, за умови, що жодне з них не може бути поділено, та немає значення, як місця будуть поділені між членами команди?

4. Скільки існує способів розсадити 14 чоловік за 10 парт обов'язково по 2 чоловіка за одну парту? Немає значення з якої сторони один від одного будуть сидіти люди за партою.

5. Скількома способами можна поділити 6 однакових столів та 10 стільців між чотирма аудиторіями, щоб у кожній з них було хоч би по одному столу та одному стільцю?

6. З 9 пронумерованих білих і 10 пронумерованих червоних троянд треба скласти 5 однокольорових букетів: три по 3 білих троянд, та два по 5 червоних. Скількома способами це можна зробити?

7. У класі навчається 35 чоловік. Усі вони у вільний час або плавають у басейні, або грають на скрипці, або працюють у ботанічному саду. 25 чоловік займаються ботанікою, а 5 займаються усім. Один чоловік з класу не грає на скрипці і не любить ботаніку, а два його товариші – ботаніки не вміють плавати, але добрі скрипалі. Скільки в класі скрипалів?

Завдання №2. Написати програму, яка реалізує одну з 6 варіантів комбінацій, а саме розміщення без повторень та з повторенням, сполучення без повторень та з повторенням, перестановки звичайні та з повторенням елементів. Комбінації обрати за номером варіанту згідно позначення їх кількості:

1. A_n^k
2. $\overline{A_n^k}$
3. C_n^k
4. $\overline{C_n^k}$
5. P_n
6. $P(n_1, n_2, \ldots, n_k)$
7. A_n^k
8. $\overline{A_n^k}$
9. C_n^k
10. $\overline{C_n^k}$
11. P_n
12. $P(n_1, n_2, \ldots, n_k)$
13. A_n^k
14. $\overline{A_n^k}$
15. C_n^k
16. $\overline{C_n^k}$
17. P_n
18. $P(n_1, n_2, \ldots, n_k)$
19. A_n^k
20. $\overline{A_n^k}$
21. C_n^k
22. $\overline{C_n^k}$
23. P_n
24. $P(n_1, n_2, \ldots, n_k)$
25. A_n^k
26. $\overline{A_n^k}$
27. C_n^k
28. $\overline{C_n^k}$
29. P_n
30. $P(n_1, n_2, \ldots, n_k)$

Для кожного варіанту далі реалізувати:

1) введення з клавіатури вихідних даних, а саме, натуральних чисел n та k у випадку розміщень та сполучень; значення n для звичайних перестановок, а у випадку перестановок з повтореннями чисел k, n_1, n_2, ..., n_k;

2) виведення обраних комбінацій на екран, а також кількості отриманих комбінацій, тобто підрахувати самі числа A_n^k, $\overline{A_n^k}$, C_n^k, $\overline{C_n^k}$, P_n, $P(n_1, n_2, \ldots, n_k)$ у відповідності до обраної комбінації.

Приклади роботи програм за різними варіантами:

1) Варіант 6. Обираємо за таблицею перестановки з повторенням.

Генерація перестановок з повторенням елементів.
Вихідні дані:
Введіть кількість різних елементів в наборі: k= 2
Введіть кількість повторень елементів в наборі:
n1=2
n2=3
Комбінації:

1 - 11222
2 - 12122
3 - 12212
4 - 12221
5 - 21122
6 - 21212
7 - 21221
8 - 22112
9 - 22121
10 - 22211
Кількість комбінацій - 10. (Якщо не нумеруєте кожну.)

2) Варіант 21. Обираємо за таблицею сполучення без повторень.

Генерація сполучень без повторень елементів.
Вихідні дані:
Введіть загальну кількість елементів: n=5
Введіть кількість елементів в наборі: k= 3
Комбінації:
1 - 123
2 - 124
3 - 125
4 - 134
5 - 135
6 - 145
7 - 234
8 - 235
9 - 245
10 - 345
Кількість комбінацій - 10.

Лабораторна робота № 3.
ОСНОВНІ ОПЕРАЦІЇ НАД ГРАФАМИ. ЗНАХОДЖЕННЯ ОСТОВА МІНІМАЛЬНОЇ ВАГИ ЗА АЛГОРИТМАМИ ПРІМА І КРАСКАЛА ТА ЗНАХОДЖЕННЯ НАЙКОРОТШОГО МАРШРУТУ ЗА АЛГОРИТМОМ ДЕЙКСТРА.

ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ ТА ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ

Теорія графів дає простий, доступний і потужний інструмент побудови моделей прикладних задач, є ефективним засобом формалізації сучасних інженерних і наукових задач у різних областях знань.

Графом G називається пара множин (V, E), де V – множина вершин, занумерованих числами $1, 2, ..., n = v$, $V = \{v\}$; E – множина упорядкованих або неупорядкованих пар $e = (v', v'')$, $v' \in V$, $v'' \in V$, які називаються дугами або ребрами, $E = \{e\}$. При цьому не має принципового значення, як вершини розташовані в просторі або площині і які конфігурації мають ребра.

Неорієнтованим графом G називається граф, у якого ребра не мають напрямку. Такі ребра описуються неупорядкованою парою (v', v''). *Орієнтований граф (орграф)* – це граф, ребра якого мають напрямок та описані упорядкованою парою (v', v''). Упорядковане ребро називають *дугою*. Граф є *змішаним*, якщо наряду з орієнтованими ребрами (дугами) є також і неорієнтовані. При розв'язанні задач змішаний граф зводиться до орграфа.

Кратними (паралельними) називаються ребра, які зв'язують одні і ті ж вершини. Якщо ребро виходить та й входить у дну і ту саму вершину, то таке ребро називається *петлею*.

Мультиграф – граф, який має кратні ребра. *Псевдограф* – граф, який має петлі. *Простий граф* – граф, який не має кратних ребер та петель.

Будь яке ребро e *інцедентно* двом вершинам (v', v''), які воно з'єднує. У свою чергу вершини (v', v'') інцендентні до ребра e. Дві вершини (v', v'') називають *суміжними*, якщо вони належать до одного й того самого ребра e, і *несуміжні* у протилежному випадку. Два *ребра називають суміжними*, якщо вони мають спільну вершину. Відношення суміжності як для вершин, так і для ребер є симетричним відношенням. *Степенем вершини* графа G називається число інцидентних їй ребер.

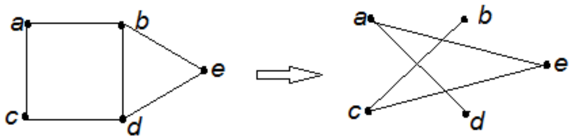
Граф, який не має ребер, називається *порожнім графом*. Граф, у якого не має вершин, називається *нуль-графом*. Вершина графа, яка не інцедентна до жодного ребра, називається *ізольованою*. Вершина графа, яка інцедентна тільки до одного ребра, називається *звисаючою*.

Частина $G' = (V', E')$ графа $G = (V, E)$ називається *підграфом* графа G, якщо $V' \subset V$ і E' складається з тих і тільки тих ребер $e = (v', v'') \in E$, у яких обидві кінцеві вершини $v', v'' \in V'$. Частина $G' = (V', E')$ називається *суграфом* або *остовним підграфом* графа G, якщо виконано умови: $V' = V$, $E' \subset E$.

<u>Операції над графами.</u>

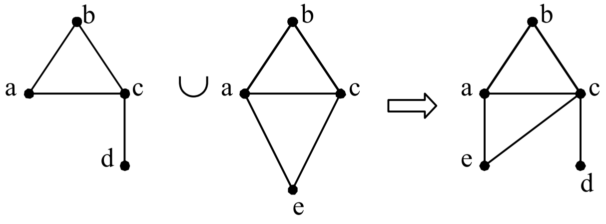
1. *Вилученням ребра* e ($e \in E$) з графа $G = (V, E)$ - є така операція, внаслідок якої отримаємо новий граф G_1 для якого $G_1 = (V, E \setminus \{e\})$.

2. *Доповненням графа* $G = (V, E)$ називається граф $\overline{G} = (V, E')$, якщо він має одну і ту саму кількість вершин та дві його вершини суміжні тоді і тільки тоді коли вони не суміжні в G (тобто ребро $(v_i, v_j) \in E'$ тоді, коли $(v_i, v_j) \notin E$). Наприклад:



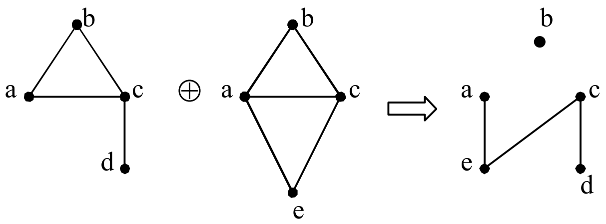
G $\qquad\qquad$ $\overline{G}$

3. *Об'єднанням графів* $G_1 = (V_1, E_1)$ та $G_2 = (V_2, E_2)$ називається граф $G = (V, E) = G_1 \cup G_2$, у якому $V = V_1 \cup V_2$ та $E = E_1 \cup E_2$. Наприклад:



G_1 G_2 $G_1 \cup G_2$

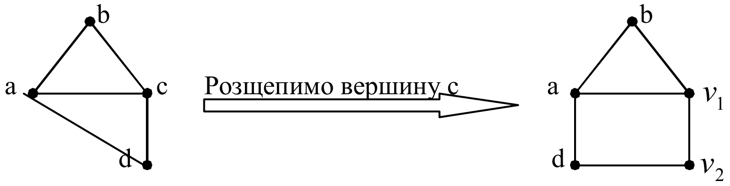
4. *Кільцевою сумою графів* $G_1 = (V_1, E_1)$ та $G_2 = (V_2, E_2)$ називається граф $G = (V, E) = G_1 \oplus G_2$ у якому $V = V_1 \cup V_2$ та $E = E_1 \Delta E_2 = (E_1 \cup E_2) \setminus (E_1 \cap E_2)$. Наприклад:



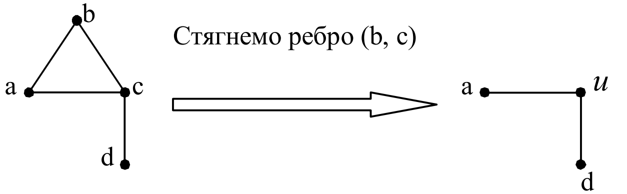
G_1 G_2 $G_1 \oplus G_2$

5. *Розщеплення (роздвоєння) вершини графа*. Нехай v - вершина графа $G = (V, E)$. Множину Γ(v) усіх суміжних з нею вершин довільним чином розіб'ємо на дві множини $N_1(v)$ та $N_2(v)$, так що $N_1(v) \cup N_2(v) = \Gamma(\mathrm{v})$, $N_1(v) \cap N_2(v) = \varnothing$. Видаливши вершину v разом з інцидентними їй ребрами, додамо дві нові вершини v_1 та v_2, які з'єднані ребром (v_1, v_2). Вершину v_1 з'єднаємо ребром з кожною вершиною множини $N_1(v)$, а вершину v_2 - з кожною вершиною

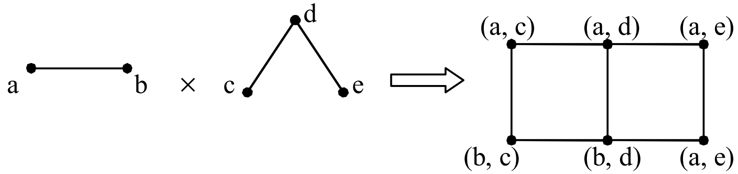
множини $N_2(v)$. Таким чином з графа G отримаємо новий граф G_v^*. Виконана операція називається *розщепленням вершини* v. Наприклад:



6. *Стягнення ребра (дуги)*. Ця операція означає видалення ребра та ототожнення його суміжних вершин. Граф G_1 *стягується до графа* G_2, якщо граф G_2 може бути отриманим з G_1 в результаті деякої скінченної послідовності стягування ребер (дуг). Наприклад:



7. Добутком графів $G_1 = (V_1, E_1)$ та $G_2 = (V_2, E_2)$ називається граф $G = G_1 \times G_2$ у якого $V = V_1 \times V_2$, а множина ребер визначається наступним чином: вершини (u_1, v_1) та (u_2, v_2) суміжні у G тоді і тільки тоді коли 1) $u_1 = u_2$ і v_1 та v_2 суміжні у G_2, або 2) $v_1 = v_2$ і u_1 та u_2 суміжні у G_1. Наприклад:



G_1 G_2 $G_1 \times G_2$

Таблицею (матрицею) суміжності $R=[r_{ij}]$ графа $G=(V,E)$ називається квадратна матриця порядку n (n – число вершин графа), елементи якої r_{ij} (i=1, 2, …, n; j=1, 2, …, n) визначаються наступним чином:

$$r_{ij} = \begin{cases} 1, \textit{якщо існує дуга з } v_i \textit{ в } v_j; \\ 0, \textit{в іншому випадку.} \end{cases}$$

Матриця суміжності повністю визначає структуру графа.

Нехай дано неорієнтований граф $G=(V,E)$. *Маршрутом* довжини $l-1$ з вершини v_1 у v_l називається послідовність $M=\{(v_1,v_2),(v_2,v_3),\ldots,(v_i,v_{i+1}),\ldots,(v_{l-1},v_l)\}$, яка складається з ребер $l=(v_s,v_{s+1})\in E$, при цьому кожні два сусідніх ребра мають спільну кінцеву вершину. Маршрут називається *ланцюгом*, якщо всі його ребра різні. Відкритий ланцюг називається *шляхом*, якщо всі його вершини різні. Замкнений ланцюг називається *циклом*, якщо різні всі його вершини, за винятком кінцевих. Шлях і цикл називаються *гамільтоновими*, якщо вони проходять через усі вершини графа.

Розглянемо зв'язний граф $G=(V,E)$. Для кожної пари вершин (v',v'') знайдемо найкоротший ланцюг $L(v',v'')$, тобто такий, який складається з мінімальної кількості ребер. Довжину цього ланцюга позначимо $d(v',v'')$. Максимальне значення $d(v',v'')$ називається *діаметром* графа. Позначають $d(G)$.

$$d(G)=\max_{v',v''\in V} d(v',v'').$$

Алгоритми знаходження найкоротшого остовного дерева

Алгоритм Прима для даного n-вершинного графа G=(V, E) будує по кроках s=1, 2, …, l≤n–1 зростаюче дерево $D_s=(V_s, E_s)$, $V_s \subset V$, $E_s \subset E$.

S=1. Фіксуємо довільну вершину v_0. Серед усіх ребер, інцидентних вершині v_0 знаходимо найкоротше ребро $e_1=(v_0, v_1)$. Покладемо, що $D_1=(V_1, E_1)$, $V_1=\{v_0, v_1\}$, $E_1=\{e_1\}$ і переходимо до кроку s =2.

Нехай здійснено s<n–1 кроків, у результаті чого в графі G виділено зростаюче дерево $D_s=(V_s, E_s)$. Тоді на кроці (s+1) серед усіх ребер e=(v', v''), таких що $v' \in V_s$, $v'' \in (V \setminus V_s)$, знаходимо найкоротше ребро $e_{s+1}=(v_r, v_{s+1})$ і приєднуємо його до дерева D_s, у результаті чого одержуємо дерево $D_{s+1}=(V_{s+1}, E_{s+1})$, $V_{s+1}= V_s \bigcup \{v_{s+1}\}$, $E_{s+1}= E_s \bigcup \{e_{s+1}\}$. Алгоритм закінчує свою роботу в двох випадках: 1) результативно на кроці s=n–1 у випадку, якщо граф G зв'язний; 2) безрезультатно, якщо G – незв'язний граф.

Алгоритм Краскала. Перший етап – підготовчий. Для даного графа G упорядковуються ребра e∈E у послідовність $e_1, e_2, \dots, e_m$, де $m = |E|$, у порядку неспадання ваг цих ребер:

$$w(e_1) \le w(e_2) \le \dots \le w(e_s) \le \dots \le w(e_m).$$

Другий етап виконується по кроках s=1, 2, …, $m_0 \le m$ у такий спосіб. На кроках s=1, 2 ребра e_1, e_2 з послідовності офарблюються. На кожному наступному кроці s розглядається ребро e_s з послідовності, і воно офарблюється тоді і тільки тоді, коли не утворює циклу з ребрами, пофарбованими на попередніх кроках. У противному випадку ребро e_s умовно викреслюється з графа G =(V, E). Алгоритм закінчує роботу на кроці $s=m_0$, коли пофарбованим виявиться (n–1) по рахунку ребро e_s, де $n = |V|$, тому що саме (n–1) пофарбованих ребер утворюють кістякове дерево n-вершинного графа.

Задача про найкоротший ланцюг. Алгоритм Дейкстра.

Дано n-вершинний графа G=(V, E), у якому виділено пару вершин v_0 , $v^* \in V$, і кожне ребро зважене числом w(e)≥0. Нехай X={x} – множина усіх простих ланцюгів, що з'єднують v_0 з v^*, $x=(V_x, E_x)$.

Цільова функція F(x) $=\sum_{e\in E_x} w(e)\to\min$. Потрібно знайти найкоротший ланцюг, тобто $x_0\in X$: $F(x_0)=\min_{x\in X} F(x)$.

Перед описом алгоритму Дейкстра подамо визначення термінів “k-а найближча вершина і “дерево найближчих вершин”. Перше з цих понять визначається індуктивно так.

1-й крок індукції. Нехай зафіксовано вершину x_0, E_1 – множина усіх ребер $e\in E$, інцидентних v_0. Серед ребер $e\in E_1$ вибираємо ребро $e_1=(v_0, v_1)$, що має мінімальну вагу, тобто $w(e_1)=\min_{e\in E_1} w(e)$. Тоді v_1 називаємо першою найближчою вершиною (НВ), число $w(e_1)$ позначаємо $l_1 = l(v_1)$ і називаємо відстанню до цієї НВ. Позначимо $V_1=\{v_0, v_1\}$ – множину найближчих вершин.

2-й крок індукції. Позначимо E_2 – множину усіх ребер $e=(v', v'')$, $e\in E$, таких що $v'\in V_1$, $v''\in(V\setminus V_1)$. Найближчим вершинам $v\in V_1$ приписано відстані $l(v)$ до кореня v_0, причому $l(v_0)=0$. Введемо позначення: $\overline{V_1}$ – множина таких вершин $v''\in(V\setminus V_1)$, що $\exists$ ребра виду $e=(v, v'')$, де $v\in V_1$. Для всіх ребер $e\in E_2$ знаходимо таке ребро $e_2=(v', v_2)$, що величина $l(v')+w(e_2)$ найменша. Тоді v_2 називається другою найближчою вершиною, а ребра e_1, e_2 утворюють зростаюче дерево для виділених найближчих вершин $D_2=\{e_1, e_2\}$.

(s+1)-й крок індукції. Нехай у результаті s кроків виділено множину найближчих вершин $V_s=\{v_0, v_1, \ldots, v_s\}$ і відповідне їй зростаюче дерево $D_s=\{e_1, e_2, \ldots, e_s\}$. Для кожної вершини $v\in V_s$ обчислена відстань $l(v)$ від кореня v_0 до v; $\overline{V_s}$ – множина вершин $v\in(V\setminus V_s)$, для яких існують ребра вигляду $e=(v_r, v)$, де $v_r\in V_s$, $v\in(V\setminus V_s)$. На кроці s+1 для кожної вершини $v_r\in V_s$ обчислюємо відстань до вершин множини $\overline{V_s}$: $L(s+1)(v_r) = l(v_r) + \min_{v\in\overline{V_s}} w(v_r, v)$, де min береться по всіх ребрах $e=(v_r, v)$, де $v\in\overline{V_s}$, після чого знаходимо min серед величин $L(s+1)(v_r)$. Нехай цей min досягнуто для вершин v_{r_0} і відповідної їй $v\in\overline{V_s}$, що назвемо v_{s+1}. Тоді вершину v_{s+1} називаємо (s+1)-ю НВ, одержуємо множину $V_{s+1}=V_s\cup\{v_{s+1}\}$ і зростаюче дерево

$D_{s+1} = D_s \bigcup (v_{r_0}, v_{s+1})$. (s+1)-й крок завершується перевіркою: чи є чергова НВ v_{s+1} відзначеною вершиною v*, що повинна бути за умовою задачі зв'язано найкоротшим ланцюгом з вершиною v_0 . Якщо так, то довжина шуканого ланцюга дорівнює $l(v_{s+1}) = l(v_{r_0}) + w(v_{r_0}, v_{s+1})$; при цьому шуканий ланцюг однозначно відновлюється з ребер зростаючого дерева D_{s+1}. У противному випадку випливає перехід до кроку s+2. •

Приклад. У графі на рис.3.1 знайти найкоротший ланцюг для виділеної пари вершин v_0 , v*.

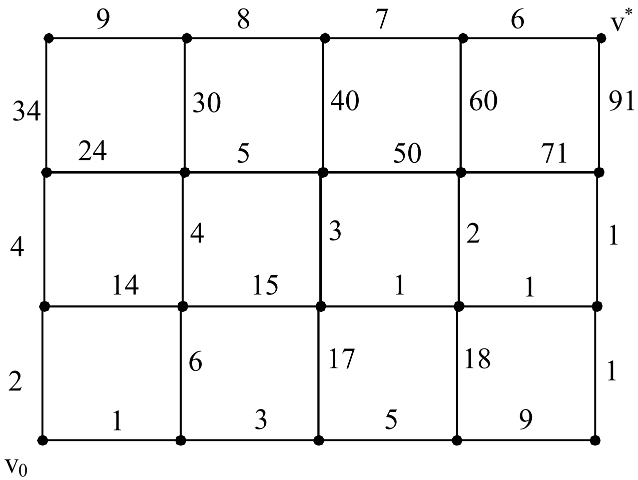


Рисунок 3.1

Розв’язання.

Будемо позначати найближчі вершини v_1, v_2, v_3, … у порядку їхньої появи (див. рис. 3.2): $l(v_1)=1$, $l(v_2)=2$, $l(v_3)=4$, $l(v_4)=6$, $l(v_5)=7$, $l(v_6)=9$, $l(v_7)=11$, $l(v_8)=16$, $l(v_9)=18$, $l(v_{10})=19$, $l(v_{11})=19$, $l(v_{12})=20$, $l(v_{13})=20$, $l(v_{14})=22$, $l(v_{15})=40$, $l(v_{16})=41$, $l(v_{17})=49$, $l(v_{18})=56$, $l(v^*)=62$.

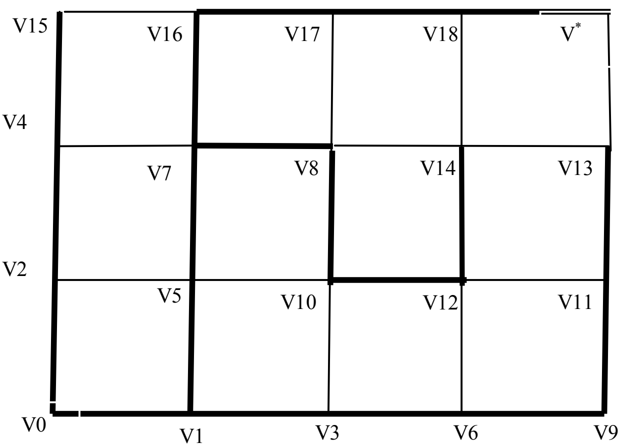


Рисунок 3.2

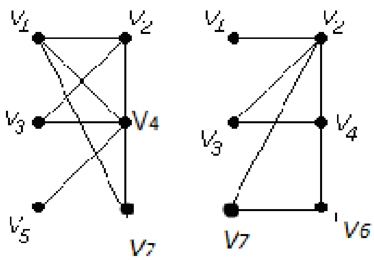
Дерево найближчих вершин виділено на рисунку 3.2 жирними лініями і є кістяковим деревом, тому що містить усі вершини графа. Шуканий найкоротший ланцюг: $[v_0, v_1, v_5, v_7, v_{16}, v_{17}, v_{18}, v^*]$, довжина ланцюга $l = l(v*) = 62$.

ІНДИВІДУАЛЬНІ ЗАВДАННЯ

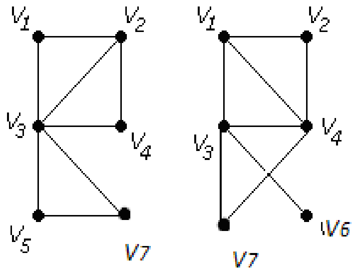
Завдання № 1. Розв'язати на графах наступні задачі:

1. Виконати наступні операції над графами:
1) знайти доповнення до першого графу,
2) об'єднання графів,
3) кільцеву суму G1 та G2 ($G1 \oplus G2$),
4) розщепити вершину у другому графі,
5) виділити підграф A, що складається з 3-х вершин в G1 і знайти стягнення A в G1 (G1\ A),
6) добуток графів.

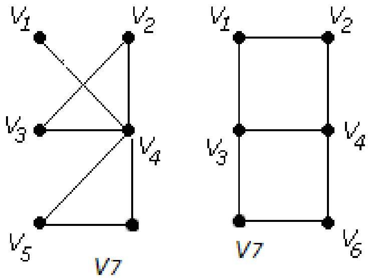
1


V1
V2
V3
V4
V5
V7
V1
V2
V3
V4
V7
V6

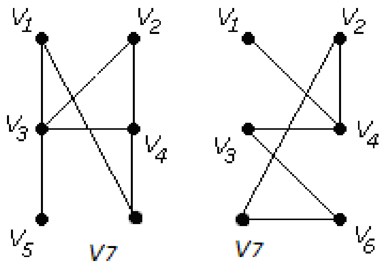
2


V1
V2
V3
V4
V5
V7
V1
V2
V3
V4
V7
V6

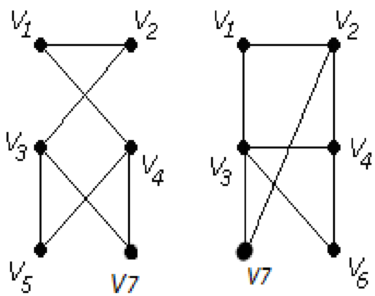
3


V1
V2
V3
V4
V5
V7
V1
V2
V3
V4
V7
V6

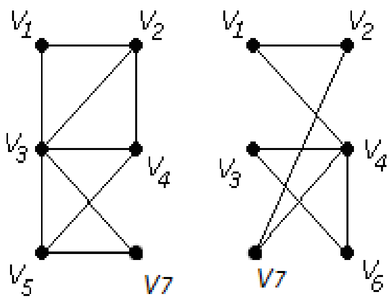
4


V1
V2
V3
V4
V5
V7
V1
V2
V3
V4
V7
V6

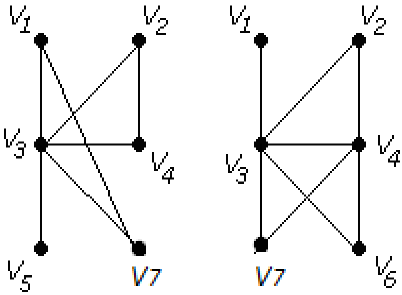
5


V1
V2
V3
V4
V5
V7
V1
V2
V3
V4
V7
V6

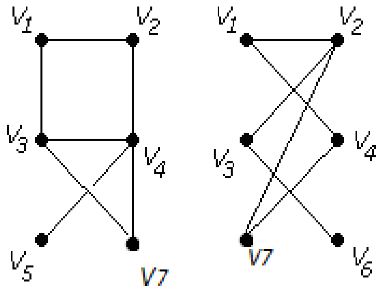
6


V1
V2
V3
V4
V5
V7
V1
V2
V3
V4
V7
V6

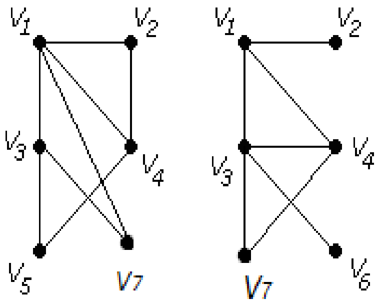
7


V_1
V_2
V_3
V_4
V_5
V_7
V_1
V_2
V_3
V_4
V_7
V_6

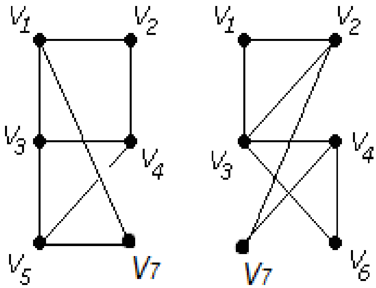
8


V_1
V_2
V_3
V_4
V_5
V_7
V_1
V_2
V_3
V_4
V_7
V_6

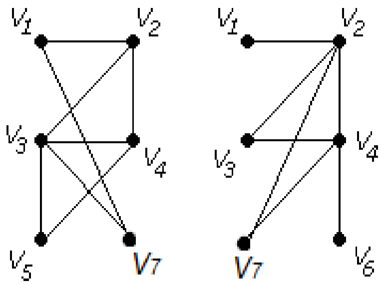
9


V_1
V_2
V_3
V_4
V_5
V_7
V_1
V_2
V_3
V_4
V_7
V_6

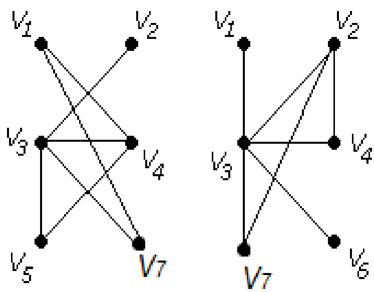
10


V_1
V_2
V_3
V_4
V_5
V_7
V_1
V_2
V_3
V_4
V_7
V_6

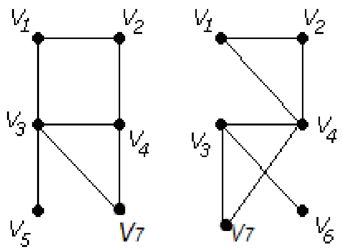
11


V_1
V_2
V_3
V_4
V_5
V_7
V_1
V_2
V_3
V_4
V_7
V_6

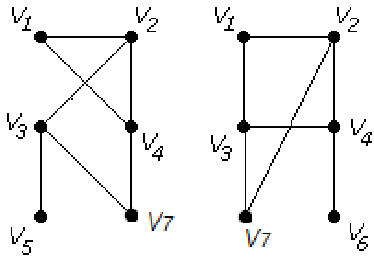
12


V_1
V_2
V_3
V_4
V_5
V_7
V_1
V_2
V_3
V_4
V_7
V_6

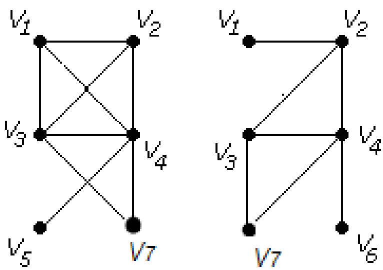
13



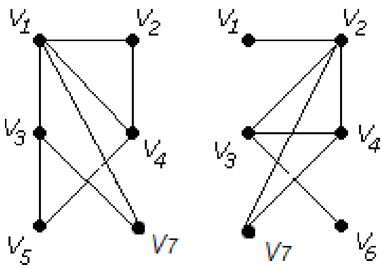
14



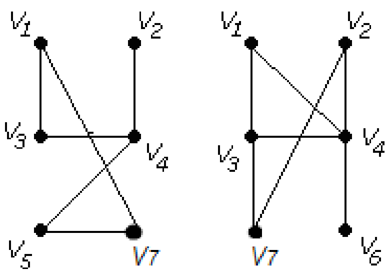
15



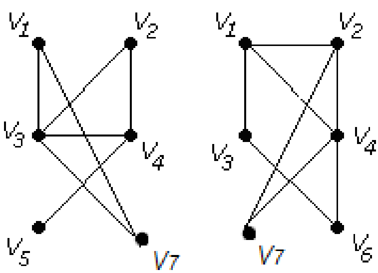
16



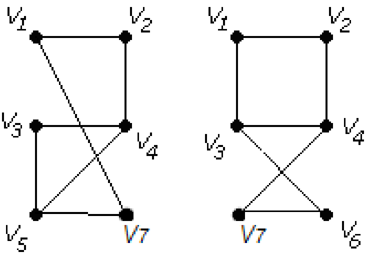
17



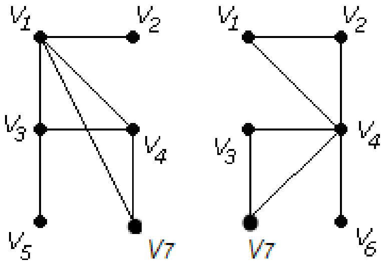
18



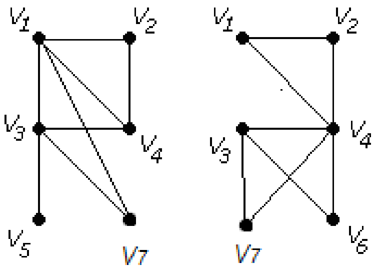
19



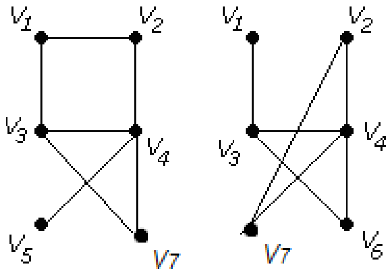
20



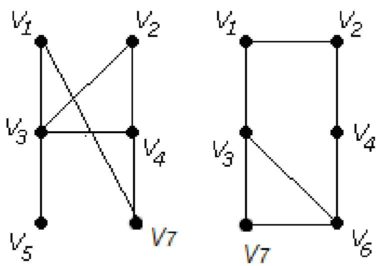
21



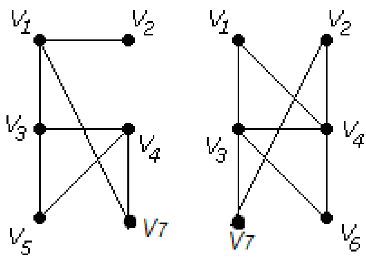
22



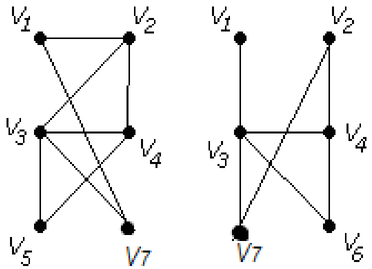
23



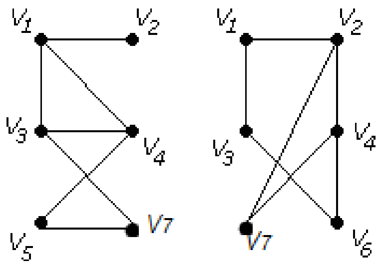
24



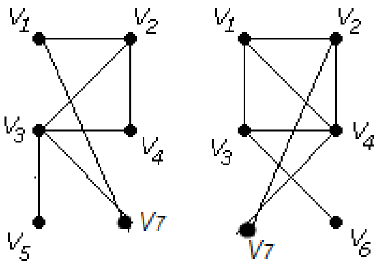
25



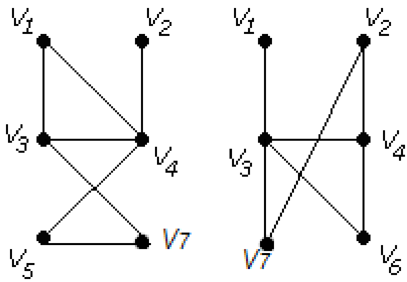
26



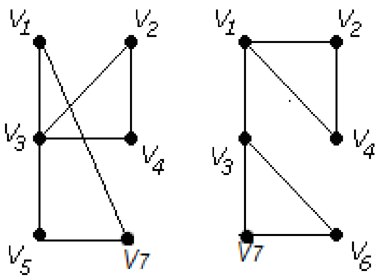
27



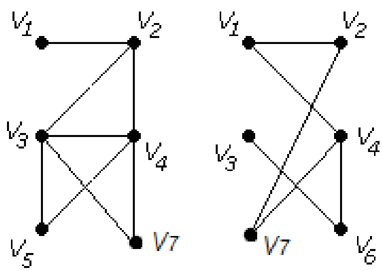
28



29

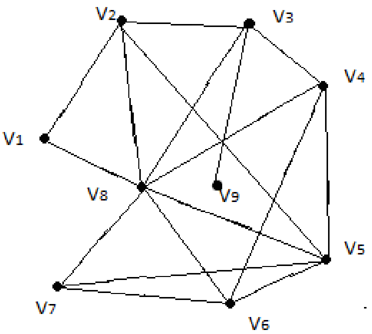


30

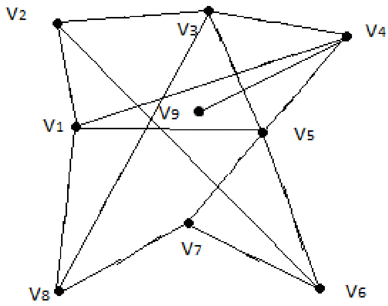


2. Знайти таблицю суміжності та діаметр графа.

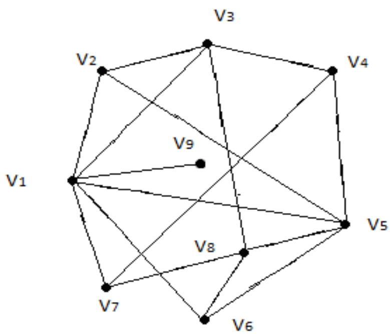
1


V2
V3
V4
V1
V8
V9
V5
V7
V6

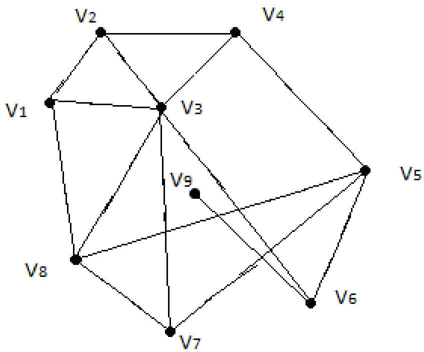
2


V2
V3
V4
V1
V9
V5
V7
V8
V6

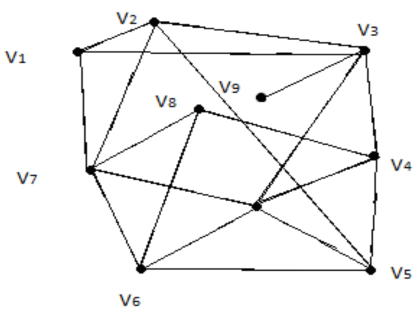
3


V3
V2
V4
V9
V1
V5
V8
V7
V6

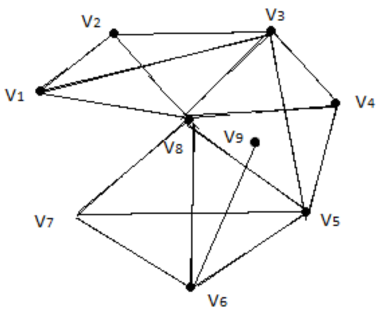
4


V2
V4
V1
V3
V9
V5
V8
V6
V7

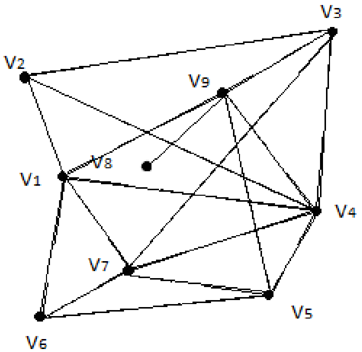
5


V2
V1
V3
V9
V8
V7
V4
V6
V5

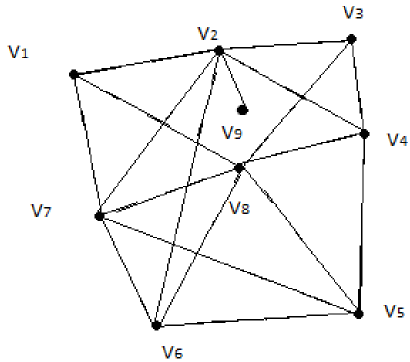
6


V2
V3
V1
V4
V9
V8
V7
V5
V6

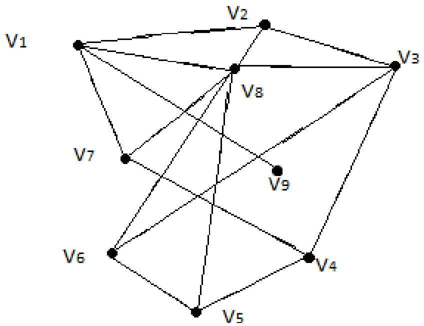
7


V3
V2
V9
V8
V1
V4
V7
V5
V6

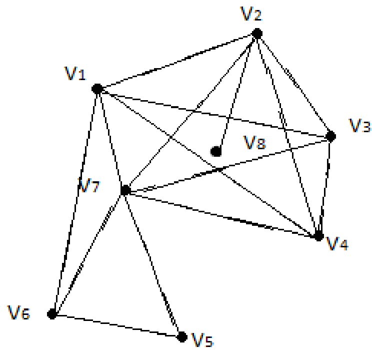
8


V3
V2
V1
V9
V4
V8
V7
V5
V6

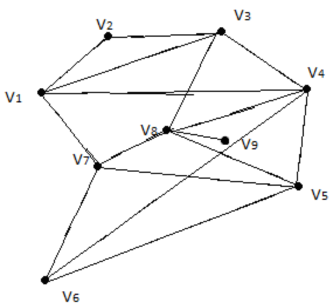
9


V2
V1
V3
V8
V7
V9
V6
V4
V5

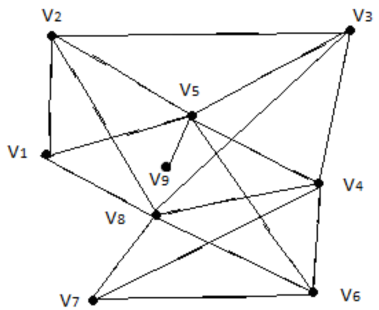
10


V2
V1
V3
V8
V7
V4
V6
V5

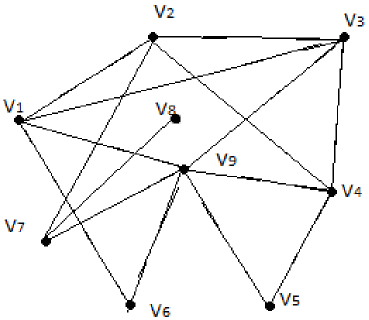
11


V2
V3
V4
V1
V8
V9
V7
V5
V6

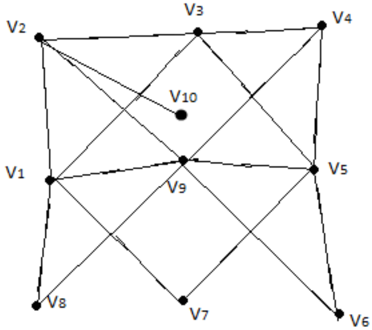
12


V2
V3
V5
V1
V9
V4
V8
V7
V6

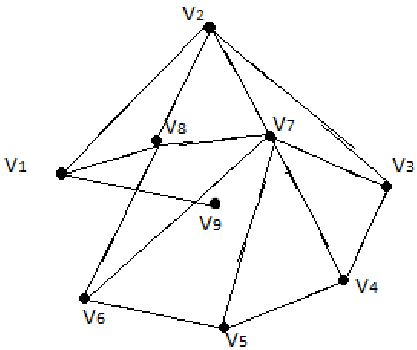
13



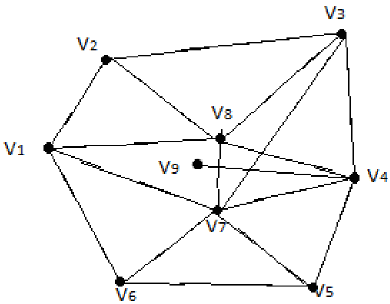
14



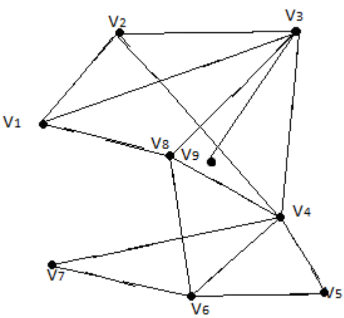
15



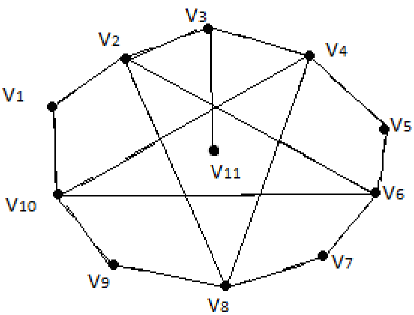
16



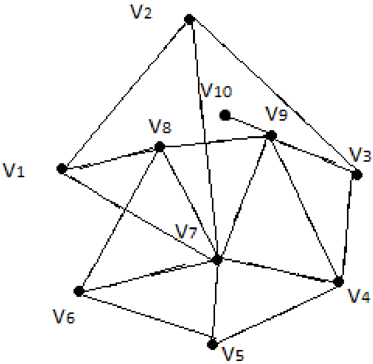
17



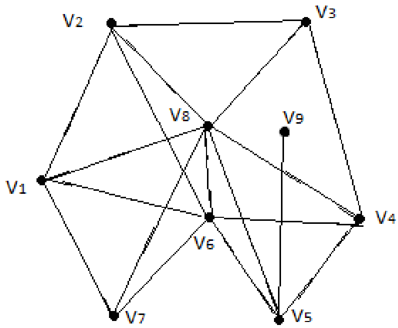
18



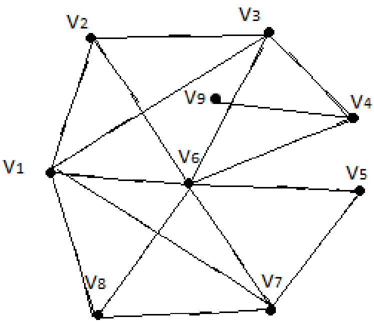
19



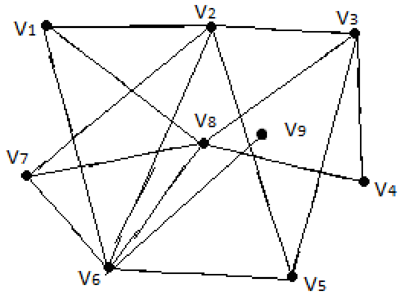
20



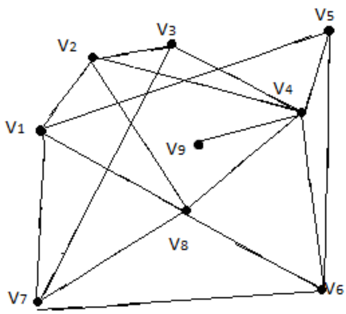
21



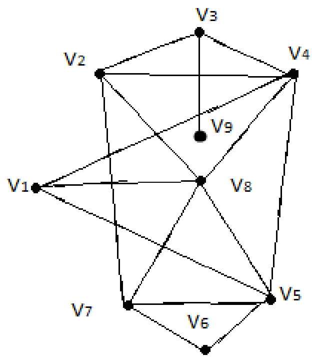
22



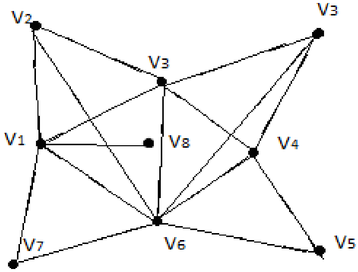
23



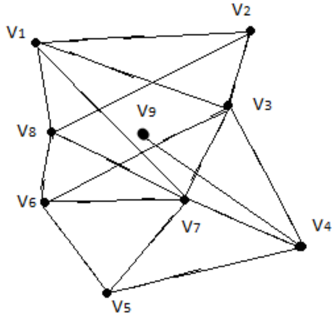
24



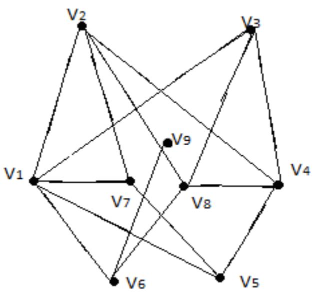
25



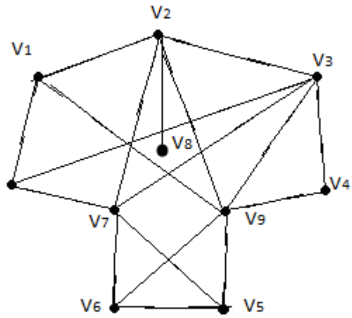
26



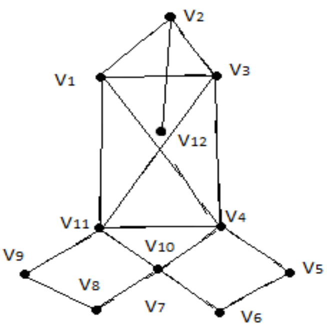
27



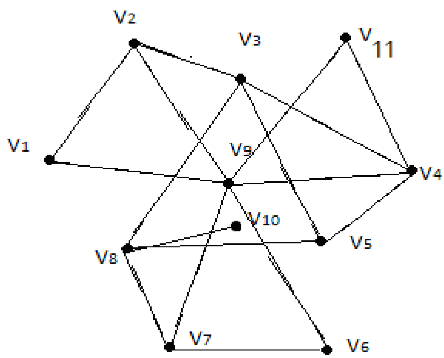
28



29



30

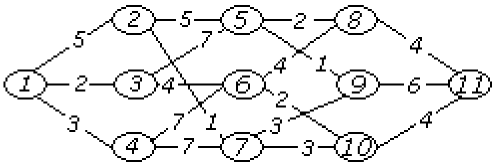


3. Для наступного графа реалізувати 3 алгоритми:

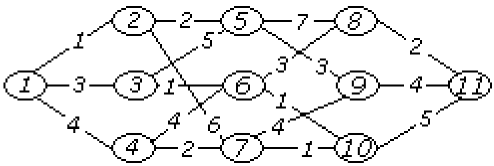
1) Знайти двома методами: Краскала і Прима, мінімальне остовне дерево графа. По крокам розписати вибір ребер за кожним алгоритмом. Знайти вагу остовного дерева.

2) Знайти найкоротший ланцюг між вершинами 1 та 11 методом Дейкстра. Розписати алгоритм по крокам.

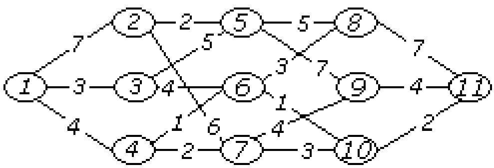
1



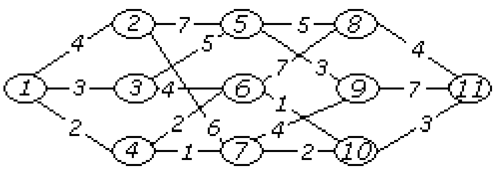
2



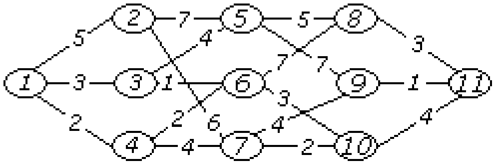
3



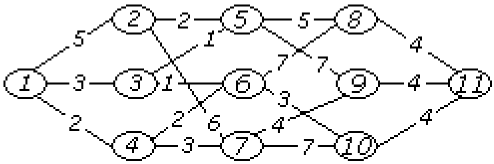
4



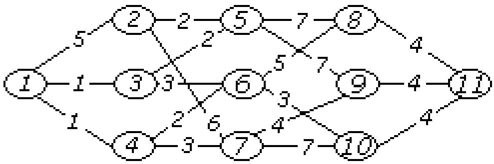
5



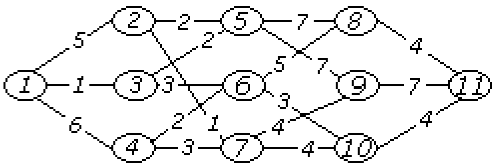
6



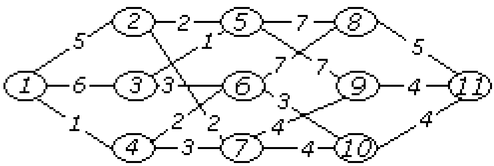
7



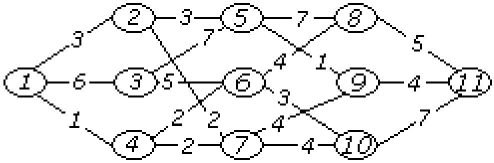
8



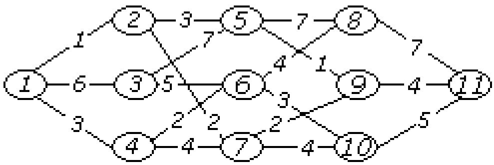
9



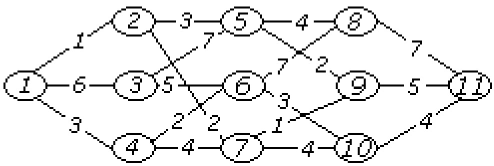
10



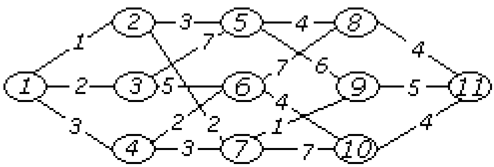
11



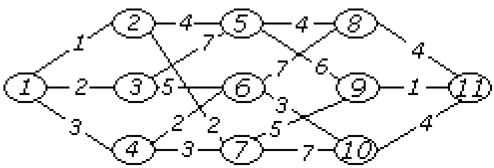
12



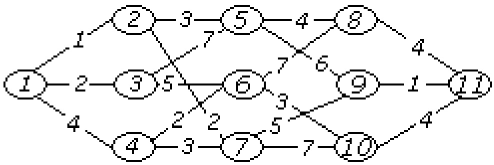
13



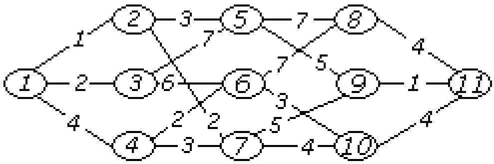
14



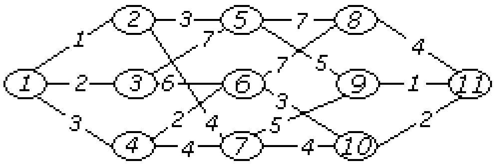
15


2 3 5 4 8
1 7 4
7 6
1 2 3 5 6 9 1 11
3
4 2 2 5 4
4 3 7 7 10

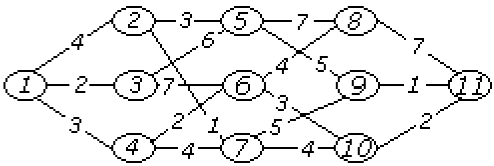
16


2 3 5 7 8
1 7 4
7 5
1 2 3 6 6 9 1 11
3
4 2 2 5 4
4 3 7 4 10

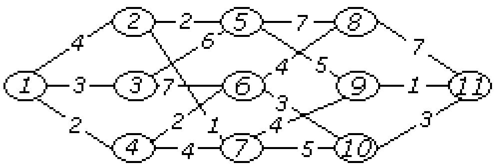
17


2 3 5 7 8
1 7 4
7 5
1 2 3 6 6 9 1 11
3
3 2 4 5 2
4 4 7 4 10

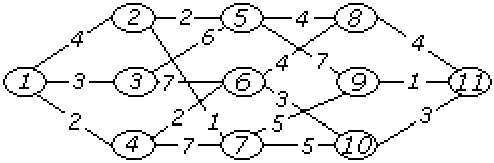
18


2 3 5 7 8
4 6 7
4 5
1 2 3 7 6 9 1 11
3
3 2 1 5 2
4 4 7 4 10

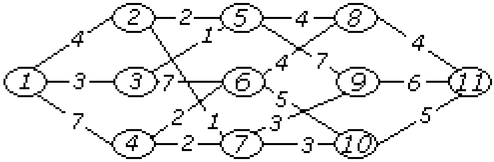
19


2 2 5 7 8
4 6 7
4 5
1 3 3 7 6 9 1 11
3
2 2 1 4 3
4 4 7 5 10

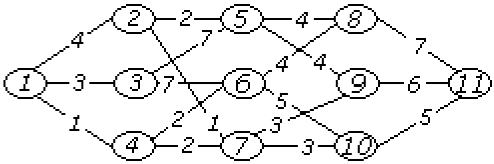
20


2 2 5 4 8
4 6 4
4 7
1 3 3 7 6 9 1 11
3
2 2 1 5 3
4 7 7 5 10

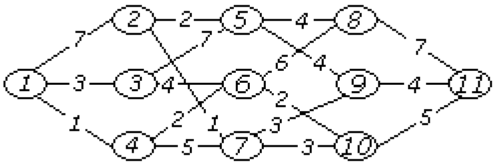
21


2 2 5 4 8
4 1 4
4 7
1 3 3 7 6 9 6 11
5
7 2 1 3 5
4 2 7 3 10

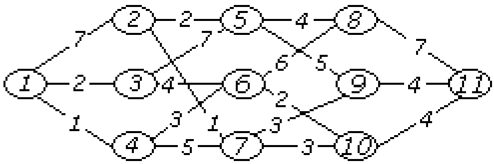
22


2 2 5 4 8
4 7 7
4 4
1 3 3 7 6 9 6 11
5
1 2 1 3 5
4 2 7 3 10

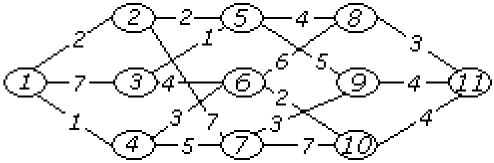
23


2 2 5 4 8
7 7 7
6 4
1 3 3 4 6 9 4 11
2
1 2 1 3 5
4 5 7 3 10

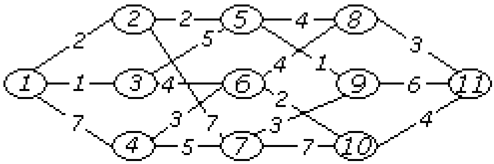
24


2 2 5 4 8
7 7 7
6 5
1 2 3 4 6 9 4 11
2
1 3 1 3 4
4 5 7 3 10

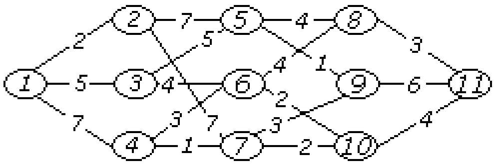
25



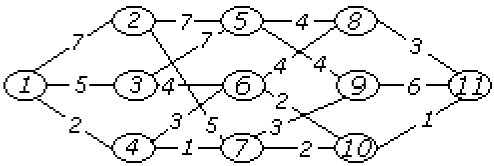
26



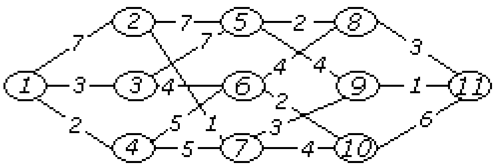
27



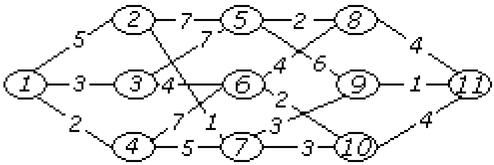
28



29



30



Завдання №2. Написати програму, яка реалізує один з вивчених алгоритмів завдання 1.3: знаходження остовного дерева мінімальної ваги за алгоритмом Прима чи Краскала, алгоритм Дейкстра пошуку найкоротшого ланцюга (обрати за номером варіанту далі). Етапи розв'язання задачі виводити на екран. Протестувати розроблену програму на задачі 3 із завдання № 1.

Вибір алгоритма:

1) Варіанти 1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, 22, 25, 28 - Прима;

2) Варіанти 2, 5, 8, 11, 14, 17, 20, 23, 26, 29 - Краскала;

3) Варіанти 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30 - Дейкстра.

Лабораторна робота № 4.
ПЛОСКІ І ПЛАНАРНІ ГРАФИ. ПОТОКИ В МЕРЕЖАХ

ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ ТА ПРИКЛАДИ РОЗВ’ЯЗАННЯ ЗАДАЧ

Плоскі і планарні графи

Плоским графом називається граф, вершини якого є точками площини, а ребра – неперервними лініями без самоперетинань, що з'єднують відповідні вершини так, що ніякі два ребра не мають спільних точок крім інцидентної їм обом вершини. Граф називається *планарним*, якщо він є ізоморфним плоскому графу.

Гранню плоского графа називається максимальна по включенню множина точок площини, кожна пара яких може бути з'єднана кривою, що не перетинає ребра графа. Границею грані будемо вважати множину вершин і ребер, що належать цій грані.

Алгоритм γ укладання графа G являє собою процес послідовного приєднання до деякого укладеного підграфа $\widetilde{G}$ графа G нового ланцюга, обидва кінці якого належать $\widetilde{G}$. При цьому в якості початкового плоского графа $\widetilde{G}$ обирається будь-який простий цикл графа G. Процес продовжується до тих пір, поки не буде побудовано плоский граф, ізоморфний графові G, або приєднання деякого ланцюга виявиться неможливим. В останньому випадку граф G не є планарним.

Нехай побудоване деяке укладання підграфа $\widetilde{G}$ графа G.

Сегментом S відносно $\widetilde{G}=(\widetilde{V}, \widetilde{E})$ будемо називати підграф графа G одного з наступних виглядів:

1) ребро $e \in E$, $e=(u,v)$, таке, що $e \notin \widetilde{E}$, $u,v \in \widetilde{V}$;

2) зв'язний компонент графа $G \setminus \widetilde{G}$, доповнений всіма ребрами графа G, інцидентними вершинам узятого компонента, і кінцями цих ребер.

Вершину v сегмента S відносно $\widetilde{G}$ будемо називати *контактною*, якщо $v \in \widetilde{V}$ і виділяти на рисунку.

Припустимою гранню для сегмента S відносно $\widetilde{G}$ називається грань Г графа $\widetilde{G}$, що містить усі контактні вершини сегмента S. Через Г(S) будемо позначати множину всіх припустимих граней для S.

Назвемо *α-ланцюгом* простий ланцюг L сегмента S, що містить дві різні контактні вершини і не містить інших контактних вершин.

Тепер формально опишемо алгоритм γ.

0. Виберемо деякий простий цикл *C* графа G і укладемо його на площині; покладемо $\widetilde{G} = C$.

1. Знайдемо грані графа $\widetilde{G}$ і сегменти відносно $\widetilde{G}$. Якщо множина сегментів порожня, то перейдемо до пункту 7.

2. Для кожного сегмента S визначимо множину Г(S).

3. Якщо існує сегмент S, для якого $Г(S)=\varnothing$, то граф G не планарний. Кінець. Інакше перейдемо до п. 4.

4. Якщо існує сегмент S, для якого мається єдина припустима грань Г, то перейдемо до п. 6. Інакше до п. 5.

5. Для деякого сегмента S $Г(S)>1$. У цьому випадку вибираємо довільну припустиму грань Г.

6. Розмістимо довільний α- ланцюг $L\in S$ у грань Г; замінимо $\widetilde{G}$ на $\widetilde{G}\bigcup L$ і перейдемо до п. 1.

7. Побудовано укладання $\widetilde{G}$ графа G на площині. Кінець.

Кроком алгоритму γ будемо вважати приєднання до $\widetilde{G}$ α-ланцюга L.

<u>Приклад.</u> Нехай граф G зображено на рисунку 4.1. Укладемо спочатку цикл C=[1, 2, 3, 4, 1], що розбиває площину на дві грані $Г_1$ і $Г_2$. На рисунку 4.2 зображено граф $\widetilde{G}$=C і сегменти S_1, S_2, S_3 відносно $\widetilde{G}$ з контактними вершинами, що обведені колами. Так як $Г(S_i) = \{Г_1, Г_2\}$ (i=1, 2, 3), то кожний α- ланцюг довільного сегмента можна укладати в будь-яку припустиму для нього грань.

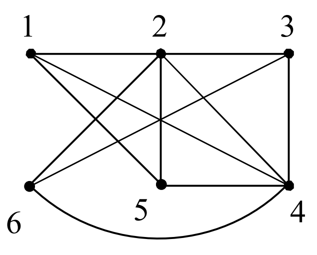


Рисунок 4.1

Помістимо, наприклад, α- ланцюг L=[2, 5, 4] у $Г_1$. Виникає новий граф $\widetilde{G}$ і його сегменти (рис. 4.3). При цьому $Г(S_1)=\{Г_3\}$, $Г(S_2)=\{Г_1, Г_2\}$, $Г(S_3)=\{Г_1, Г_2, Г_3\}$. Укладаємо L=(1, 5) у грань $Г_3$ (рис. 4.4). Перенумеруємо сегменти.

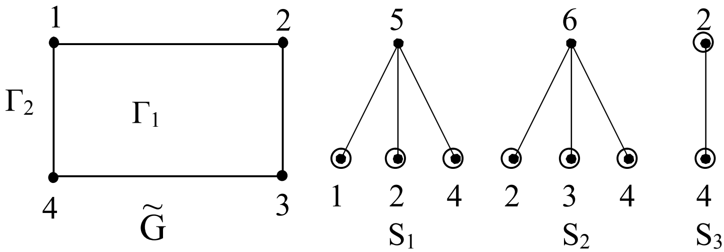


Рисунок 4.2

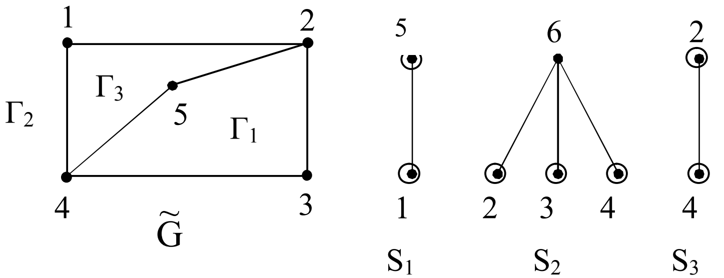


Рисунок 4.3

Тоді $Г(S_1)=\{Г_1, Г_2\}$, $Г(S_2)=\{Г_1, Г_2\}$. Далі укладемо α- ланцюг L=(2, 6, 4) сегмента S_1 у $Г_1$ (рис. 4.5). У результаті маємо $Г(S_1)=\{Г_5\}$, $Г(S_2)=\{Г_1, Г_2, Г_5\}$.

Нарешті, уклавши ребро (6, 3) у $Г_5$, а ребро (2, 4) – наприклад, у $Г_1$, одержуємо укладання графа G на площині (рис. 4.6).

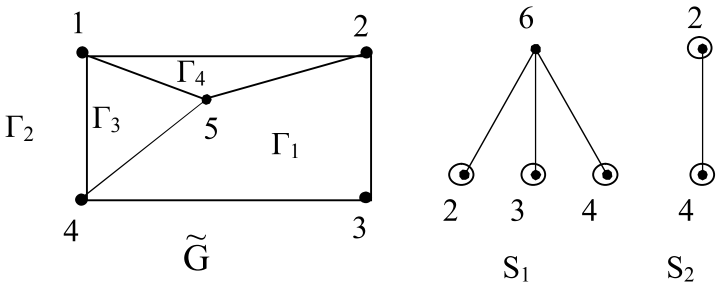


Рисунок 4.4

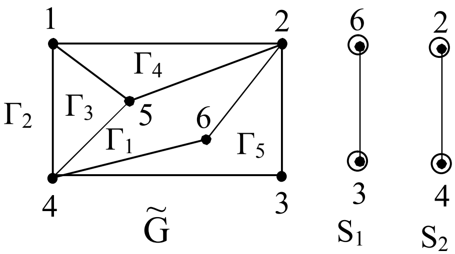


Рисунок 4.5

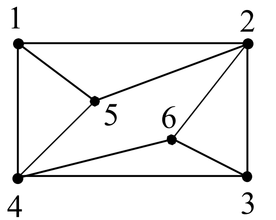


Рисунок 4.6

<u>Потоки в мережах.</u>

<u>Постановка задачі.</u> Маємо зважений орієнтовний граф $G = (V, E)$, ваги $c(e)$ на дугах якого є цілими додатними числами і називаються пропускними спроможностями дуг. В графі виділено дві вершини: $s \in V$, яка називається джерелом (вона інцидентна лише дугам, що виходять з неї), і $t \in V$, яка називається стоком (ця вершина інцидентна лише дугам, що входять у вершину). <u>Потоком</u> з s

в t величини V називається задана на дугах графа невід'ємна функція $f(e)$, яка задовольняє наступним умовам:

$$1)\ \sum_{v'\in\Gamma(v)} f(v,v') - \sum_{v''\in\Gamma^{-1}(v)} f(v'',v) = \begin{cases} V, v = s \\ 0, v \neq s,t \\ -V, v = t \end{cases},$$

де $\Gamma(v)$ - множина вершин суміжних з v через вихідні дуги, $\Gamma^{-1}(v)$ - множина вершин суміжних з v через вхідні дуги;

2) $f(e) \le c(e)$ для всіх $e \in E$.

Тобто потік починається у вершині s та закінчується у вершині t, а в усіх інших вершинах мережі кількість потоку, який входить у вершину дорівнює кількості потоку, який з неї виходить. Крім того, на кожній дузі потік не перевищує її пропускної спроможності.

Нехай $X \subset V$, $s \in X$, $t \notin X$, $\overline{X} = V \setminus X$. Розрізом $(X,\overline{X})$, що відділяє вершини s і t, називається множина дуг, які йдуть з X в $\overline{X}$. Пропускна спроможність розрізу $(X,\overline{X})$ визначається як

$$C(X,\overline{X}) = \sum_{e\in(X,\overline{X})} c(e).$$

Розглянемо у якості прикладу мережу, зображену на рисунку 4.7, де числа біля дуг є їх пропускними спроможностями.

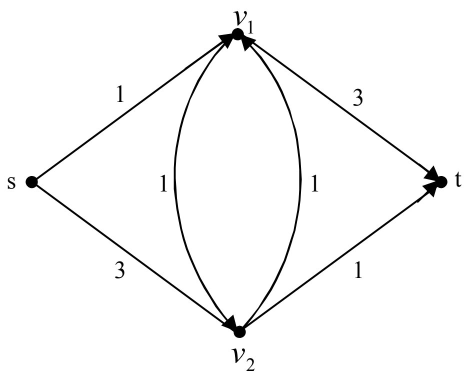


Рисунок 4.7

Нехай $X = \{s, v_1\}$. Тоді $(X, \overline{X}) = \{(s, v_2), (v_1, v_2), (v_1, t)\}$, $c(X, \overline{X}) = 3 + 1 + 3 = 7$.

Потік через розріз $f(X, \overline{X})$ визначається як різниця між сумою потоків по дугам із X в $\overline{X}$ и сумою потоків по дугам із $\overline{X}$ в X

$$f(X, \overline{X}) = \sum_{e \in (X, \overline{X})} f(e) - \sum_{e \in (\overline{X}, X)} f(e).$$

Теорема. *(Ford, Fulkerson). Для будь-якої мережі максимальна величина потоку із s в t дорівнює мінімальної пропускної спроможності розрізу, який розділяє s і t.*

Алгоритм знаходження максимального потоку в мережі.

Виберемо в якості початкового припустимого потоку нульовий по всім дугам потік і будемо його послідовно нарощувати, збільшуючи величину потоку на кожному кроці на $\Delta \geq 1$. За скінченну кількість кроків буде, таким чином, побудовано максимальний потік. Нарощування потоку буде здійснюватися наступним чином. Нехай маємо деякий припустимий потік. Покажемо, як можна його збільшити чи вказати розріз, пропускна спроможність якого дорівнює величині потоку. Будемо шукати такий шлях з s в t, у якому можна йти по дугам як у прямому, так і в зворотному напрямі, але дуги, які проходимо в прямому напрямі, повинні бути ненасиченими $(f(e) < c(e))$, а дуги, які проходимо в зворотному напрямі, повинні бути навантаженими $(f(e) > 0)$. Якщо такий шлях знайдено, то шукаємо мінімум по всім дугам шляху з величин $c(e) - f(e)$ для дуг, що проходилися в прямому напрямі і $f(e)$ для дуг, що проходилися в зворотному напрямі. Нехай цей мінімум дорівнює $\Delta \geq 1$. Будуємо новий потік, збільшуючи потік по дугам в прямому напрямі на Δ и зменшуючи потік по дугам в зворотному напрямі на ту ж саму величину. (Потоки по дугам, що не належать шляху, залишаються без змін).

Новий потік буде припустимим і мати величину на Δ одиниць більше попередньої. Якщо ж вершина t недосяжна подобнім чином із s, то це означає, що існує множина вершин $\overline{X} = V \setminus X$, недосяжних із s, причому $s \in X$, $t \in \overline{X}$. Тому що з множини X неможливо перейти в множину $\overline{X}$ зазначеним вище чином, то всі дуги з $\overline{X}$ в X ненавантажені. Тому потік $f\left(X, \overline{X}\right)$ через розріз $\left(X, \overline{X}\right)$, дорівнює величині потоку в мережі, та дорівнює пропускної спроможності розрізу $\left(X, \overline{X}\right)$. Таким чином буде побудовано максимальний потік.

Приклад. Перше число за дужками на кожній дузі визначає пропускну спроможність, друге число в дужках – потік по дузі.

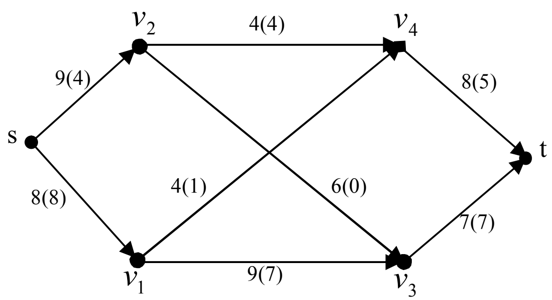


Рисунок 4.8

Зростаючим для потоку шляхом є $(s, v_2, v_3, v_1, v_4, t)$, $\Delta = \min\{9-4, 6-0, 7, 4-1, 8-5\} = 3$.

Новий потік прийме вид

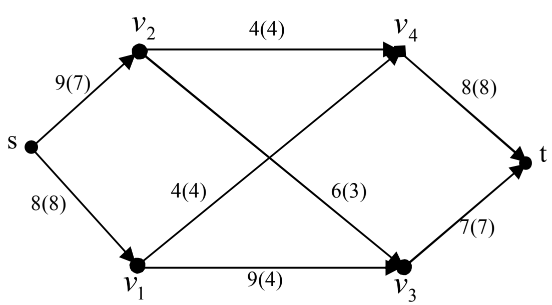


Рисунок 4.9

Спробуємо знову знайти зростаючий для потоку шлях. Із s можна потрапити в v_2, із v_2 - в v_3, із v_3 - в v_1. Ніяких інших вершин мережі з s досягнути не вдається. Тому $X = \{s, v_1, v_2, v_3\}$, $\overline{X} = \{t, v_4\}$ и $\left(X, \overline{X}\right) = \{(v_1, v_4), (v_2, v_4), (v_3, t)\}$ - розріз с пропускною спроможністю 4+4+7=15, рівною величині потоку в мережі. Отже, знайдений потік є максимальним.

<u>Приклад.</u> Знайти максимальний потік для графа, зображеного на рисунку. Вважати дуги орієнтовними зліва направо.

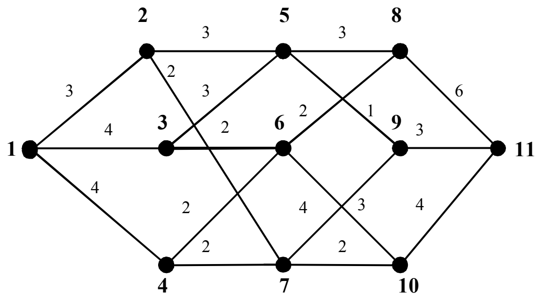


Рисунок 4.10

Спочатку робимо перебір <u>всіх</u> варіантів шляхів, які складаються лише з ненасичених дуг, при цьому рухаємось лише у прямому напрямі. Побудований таким чином потік називається *повним*. Для цього обирають якомога верхні ненасичені дуги.

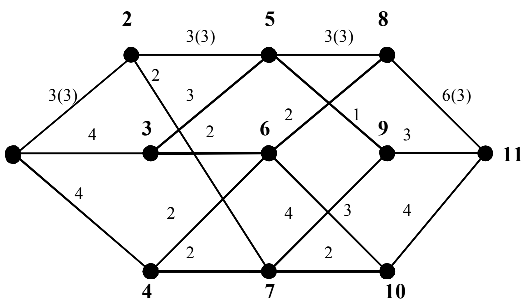


Рисунок 4.11

1) (1, 2, 5, 6, 11), $\Delta=3$; 2) (1, 3, 5, 9, 11), $\Delta=1$; 3) (1, 3, 6, 8, 11), $\Delta=2$; 4) (1, 4, 6, 10, 11), $\Delta=2$; 5) (1, 4, 7, 9, 11), $\Delta=2$.

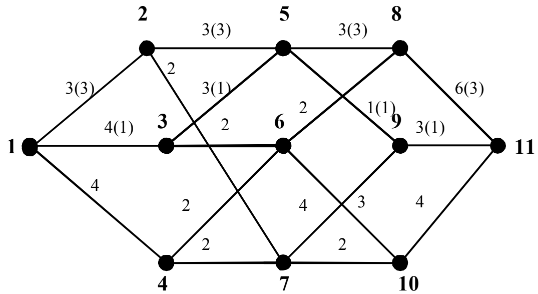


Рисунок 4.12

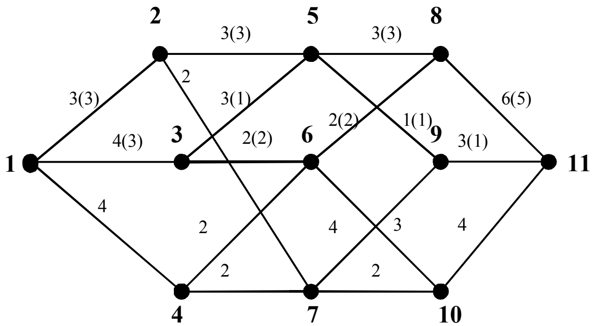


Рисунок 4.13

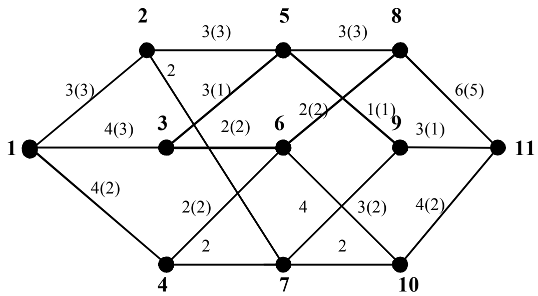


Рисунок 4.14

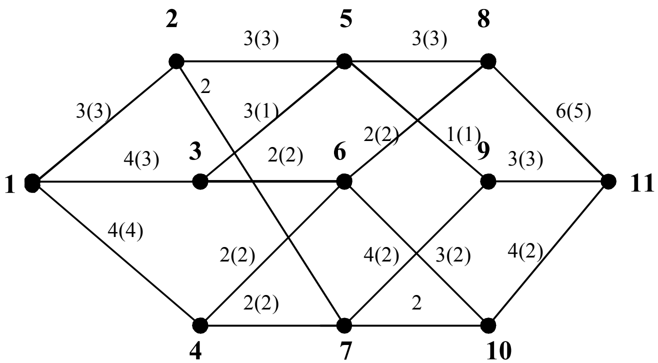


Рисунок 4.15

Значення повного потоку $V = 10$.

Далі шукаємо корегуючий шлях з врахуванням руху у зворотному напрямі описаним раніше методом- (1, 3, 5, 2, 7, 10, 11), Δ=1.

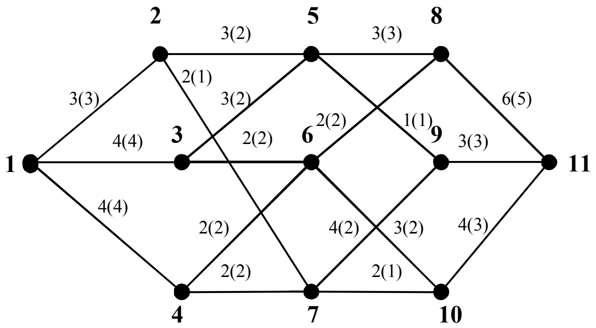


Рисунок 4.16

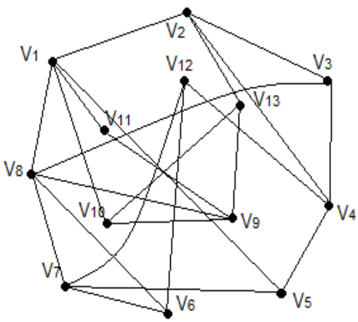
Цей потік є максимальний, оскільки вже 2, 3, 4 вершини є недосяжними, мінімальний розріз складають дуги (1,2), (1,3), (1,4). Величина максимального потоку V=11.

ІНДИВІДУАЛЬНІ ЗАВДАННЯ

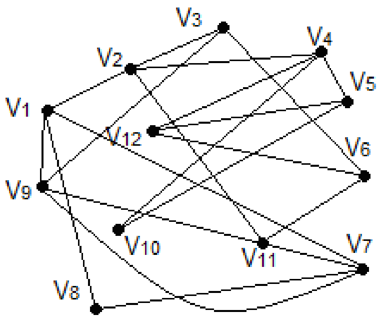
Завдання № 1.

1. За допомогою γ-алгоритма зробити укладку графа у площині, або довести що вона неможлива.

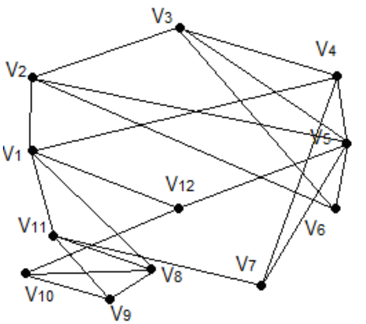
1



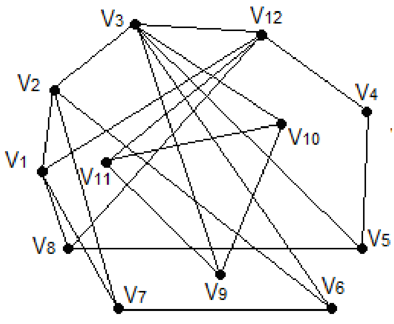
2



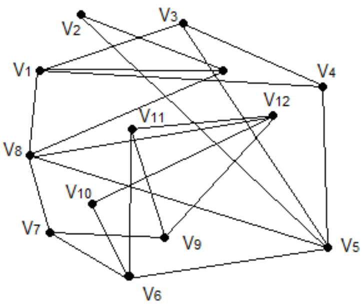
3


V3
V2
V4
V5
V1
V12
V11
V6
V7
V8
V10
V9

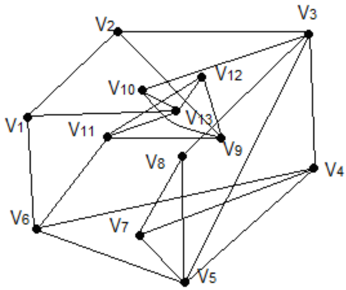
4


V3
V12
V2
V4
V10
V1
V11
V5
V8
V6
V7
V9

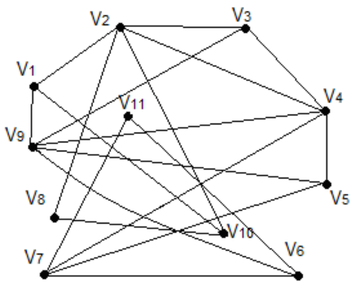
5


V2
V3
V1
V4
V11
V12
V8
V10
V7
V9
V5
V6

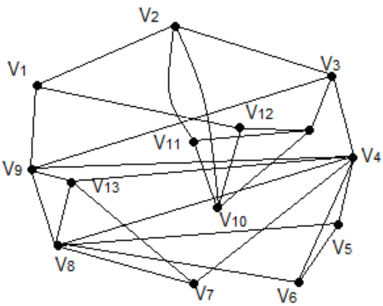
6


V2
V3
V12
V10
V13
V1
V11
V9
V8
V4
V6
V7
V5

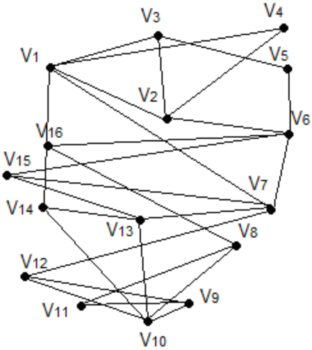
7


V2
V3
V1
V11
V4
V9
V5
V8
V10
V6
V7

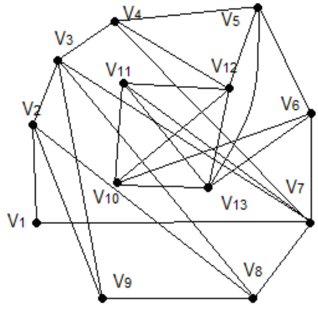
8


V2
V1
V3
V12
V11
V4
V9
V13
V10
V5
V8
V7
V6

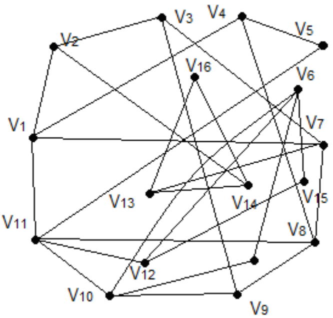
9



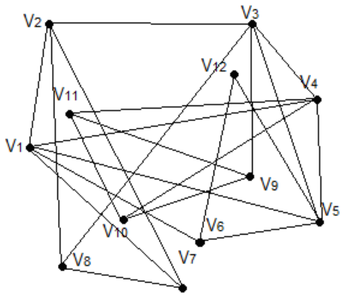
10



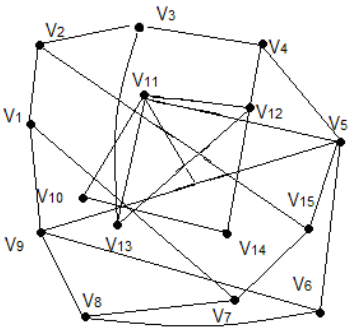
11



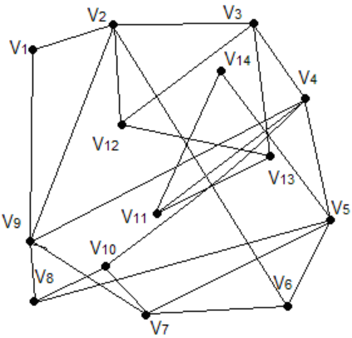
12



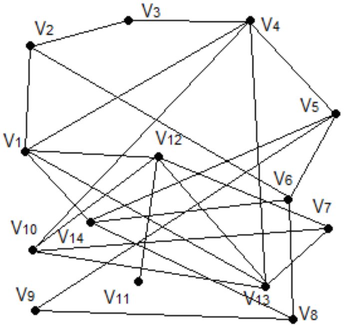
13



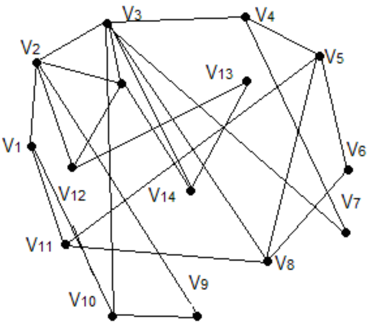
14



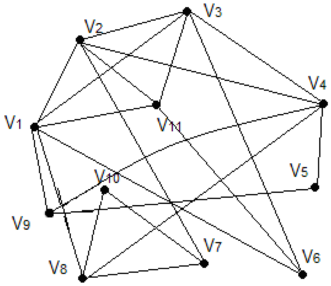
15



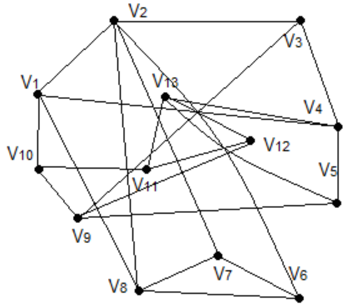
16



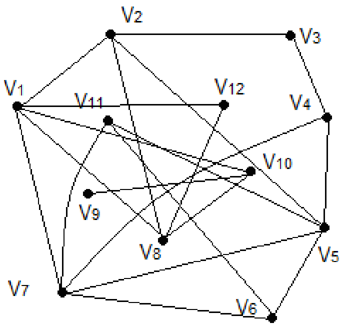
17



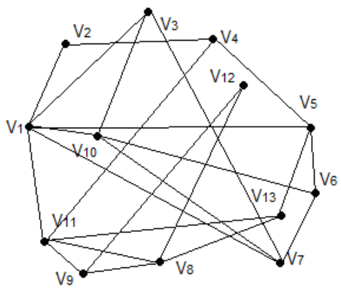
18



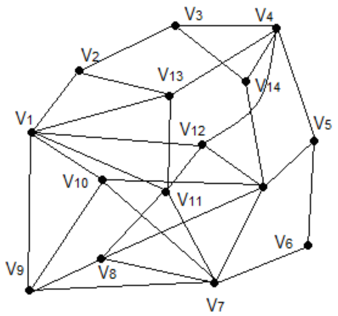
19



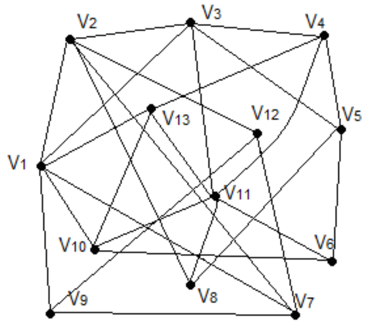
20



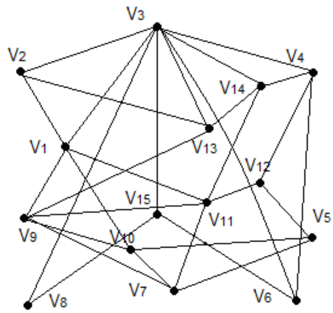
21



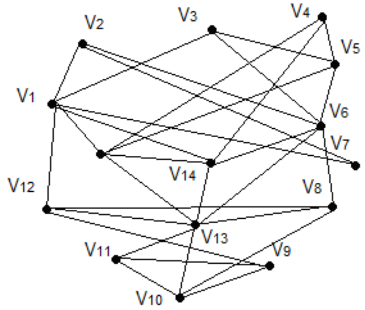
22



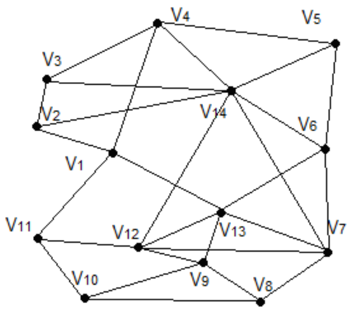
23



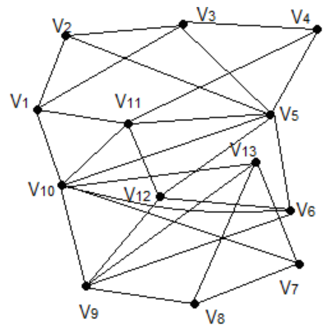
24



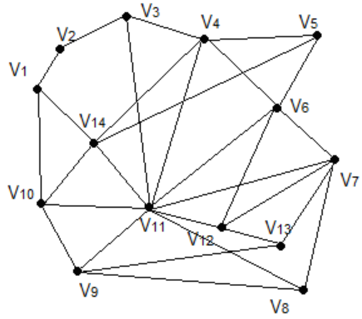
25



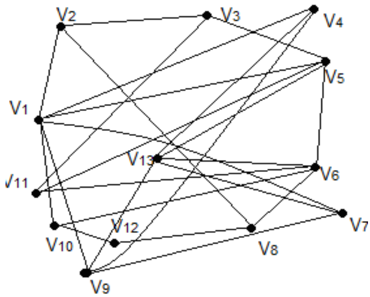
26



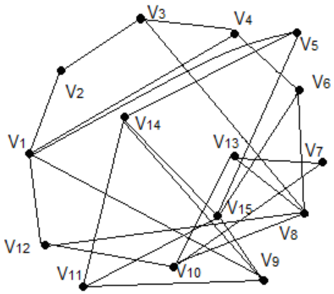
27



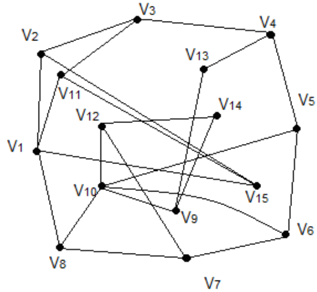
28



29

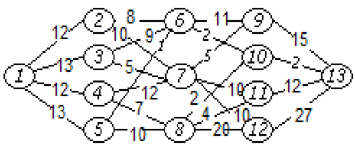


30

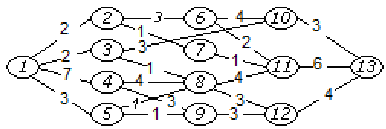


2. Побудувати повний потік, а потім скорегувати його до найбільшого (дуги спрямовані зліва направо).

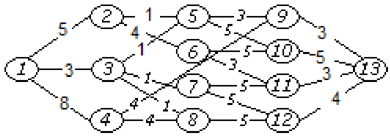
1



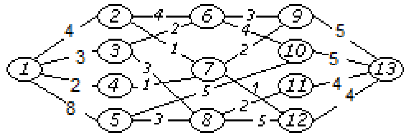
2



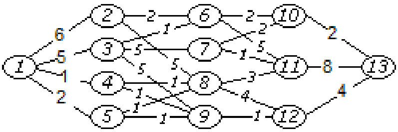
3



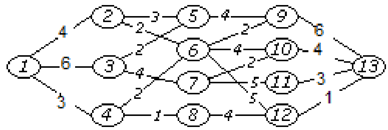
4



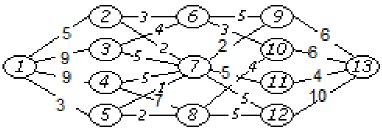
5



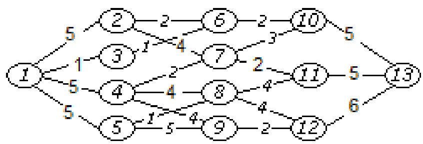
6



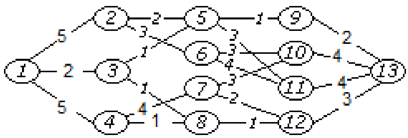
7



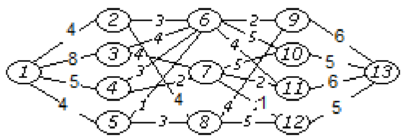
8



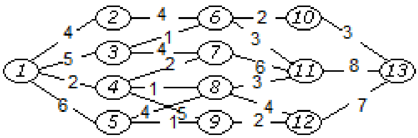
9



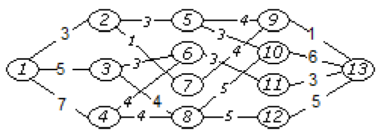
10



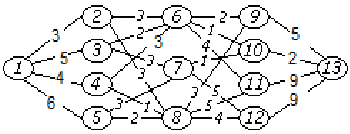
11



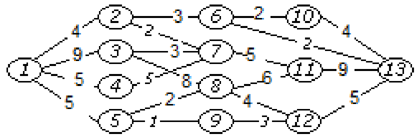
12



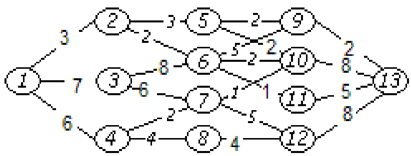
13



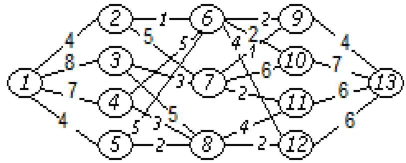
14



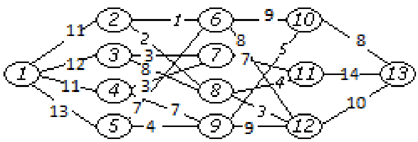
15



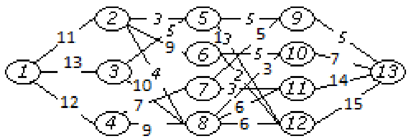
16



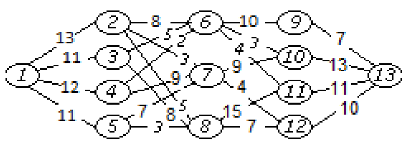
17



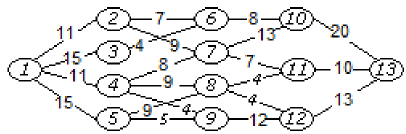
18



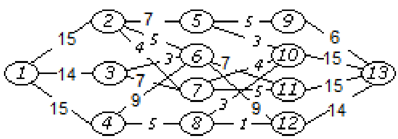
19



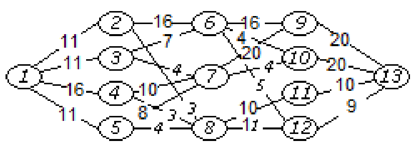
20



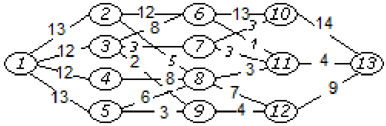
21



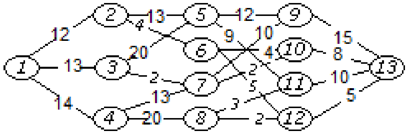
22



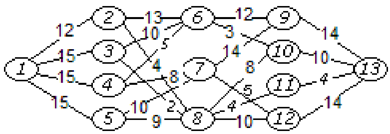
23



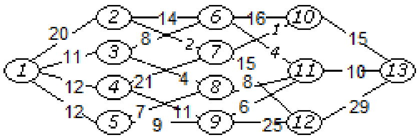
24



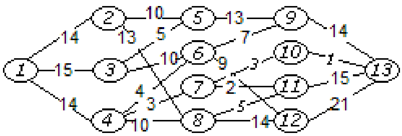
25



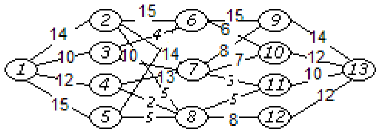
26



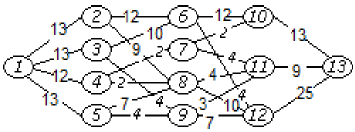
27



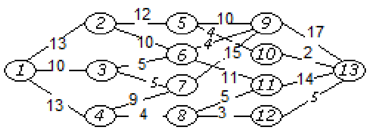
28



29



30



Завдання №2. Написати програму, яка знаходить максимальний потік в мережі. Протестувати зробленою програмою мережу із завдання № 1, задача 2.

ЛІТЕРАТУРА

1. Асеев Г.Г., Абрамов О.М., Ситников Д.Э. Дискретная математика. – К.: Кондор, 2008. – 162 с.

2. Бардачов Ю.М., Соколова Н.А., Ходаков В.Є. Дискретна математика: Підручник. – К.: Вища шк., 2002. – 287с.

3. Бондаренко М.Ф., Білоус Н.В., Руткас А.Г. Комп'ютерна дискретна математика: Підручник. – Харків: Компанія СМІТ, 2004. – 480с.

4. Капитонова Ю.В. и др. Лекции по дискретной математике. – СПб.: БХВ-Петербург, 2004. – 624 с.

5. Капітонова Ю. В., Кривий С. Л., Летичевський О. А., Луцький Г. М., Печурін М. К. Основи дискретної математики: Підручник. – Київ: Наукова думка, 2002. – 578с.

6. Кузнецов О.П., Адельсон-Вольский Г.М. Дискретная математика для инженера. – М.: Энергоатомиздат, 1988. – 480 с.

7. Міхайленко В.М., Федоренко Н.Д., Демченко В.В. Дискретна математика. – К.: Видавництво Європейського університету, 2003. – 317 с.

8. Нефедов В.Н., Осипова В.А. Курс дискретной математики. – М.: Изд-во МАИ, 1992. – 264 с.

9. Новиков Ф.А. Дискретная математика для программистов. – СПб.: Питер, 2000. – 304 с.

10. Оре О. Теория графов. – М.: Наука, 1980. – 336 с.

11. Остапович М.В., Чернишенко С.В., Ротар О.А. Дискретна математика для інформатиків. – Дніпропетровськ: Вид-во ДНУ, 2008. – 183 с.

12. Уилсон Р. Введение в теорию графов. – М.: Мир, 1977. – 207с.

13. Форд Л.Р., Фалкерсон Д.Р. Потоки в сетях. – М.: Мир, 1966.– 229 с.

14. Хаггарти Р. Дискретная математика для программистов. – Москва: Техносфера, 2005. – 400 с.