Розрахунково-графічне завдання №1

Онищенко О. А. КНТ-122

1. Розв’язати диференційні рівняння першого порядку

Умова

1. $(1-e^x)\sin(y)y' = e^x\cos^3(y)$
2. $xy' = y + \sqrt{x^2+y^2}$
3. $y' + y\cot(x) = \dfrac{\cos^2(x)}{\sin^3(x)}$
4. $2xy^2 = x\dfrac{y'}{\ln(x)} + \dfrac{y}{\ln(x)}$

Рішення 1

Розв'яжемо диференціальне рівняння першого порядку:

$$(1-e^x)\sin(y)y' = e^x\cos^3(y)$$

Ми можемо переписати це рівняння так:

$$(1-e^x)\sin(y)dy = e^x\cos^3(y)dx$$

Тепер ми можемо розділити змінні:

$$\frac{\sin(y)}{\cos^3(y)}dy = \frac{e^x}{1-e^x}dx$$

Інтегруючи обидві частини, отримаємо:

$$\int \frac{\sin(y)}{\cos^3(y)}dy = \int \frac{e^x}{1-e^x}dx$$

Ліва частина є стандартним інтегралом, який можна розв'язати підстановкою $u=\cos(y)$, $du = -\sin(y)dy$. Права частина також є стандартним інтегралом, який можна розв'язати за допомогою підстановки $v = 1-e^x$, $dv = -e^x dx$.
Отже, маємо:

$$-\int \frac{du}{u^3} = -\int \frac{dv}{v}$$

Розв'язавши ці інтеграли, отримаємо:

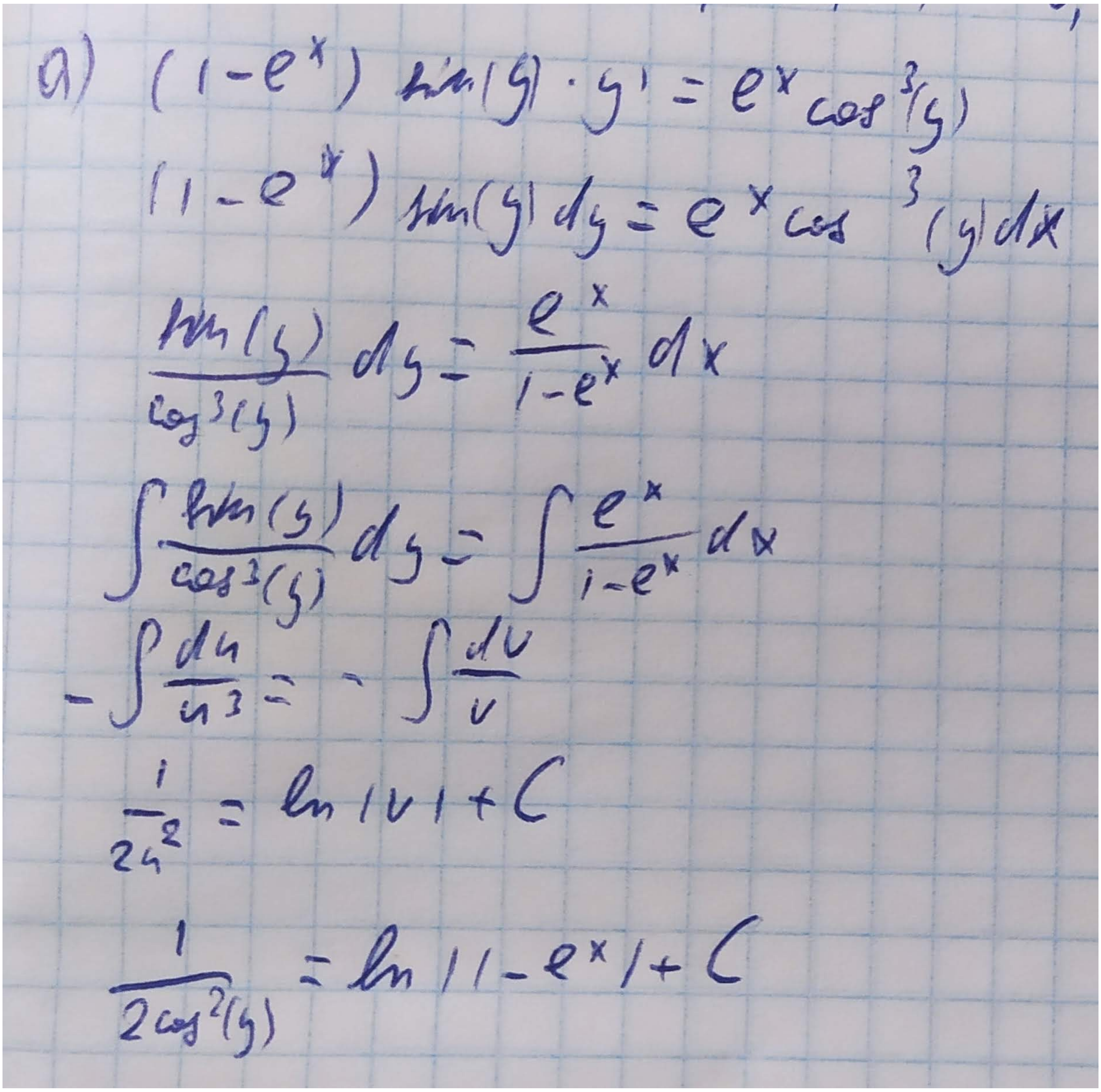
$$\frac{1}{2u^2} = \ln|v| + C$$

Підставивши назад u і v, отримаємо загальний розв'язок:

$$\frac{1}{2\cos^2(y)} = \ln|1 - e^x| + C$$

Це і є розв'язок даного диференціального рівняння.

Рішення 1 в зошиті



a) $(1-e^x)\sin(y)\cdot y' = e^x\cos^3(y)$

$(1-e^x)\sin(y)\,dy = e^x\cos^3(y)\,dx$

$\frac{\sin(y)}{\cos^3(y)}dy = \frac{e^x}{1-e^x}dx$

$\int\frac{\sin(y)}{\cos^3(y)}dy = \int\frac{e^x}{1-e^x}dx$

$-\int\frac{du}{u^3} = -\int\frac{dv}{v}$

$\frac{1}{2u^2} = \ln|v| + C$

$\frac{1}{2\cos^2(y)} = \ln|1-e^x| + C$

Рішення 2

Розв'яжемо диференціальне рівняння першого порядку:

$$xy' = y + \sqrt{x^2 + y^2}$$

Ми можемо переписати його у вигляді:

$$xy' - y = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Тепер ми можемо розділити змінні:

$$\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}dy = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}dx$$

Інтегруючи обидві частини, отримаємо:

$$\int \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}dy = \int \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}dx$$

Ліва частина є стандартним інтегралом, який можна розв'язати підстановкою $u = x$, $du = dx$. Права частина також є стандартним інтегралом, який можна розв'язати підстановкою $v = y$, $dv = dy$.
Отже, маємо

$$\int \frac{du}{\sqrt{u^2+v^2}} = \int \frac{dv}{\sqrt{u^2+v^2}}$$

Розв'язуючи ці інтеграли, отримаємо:

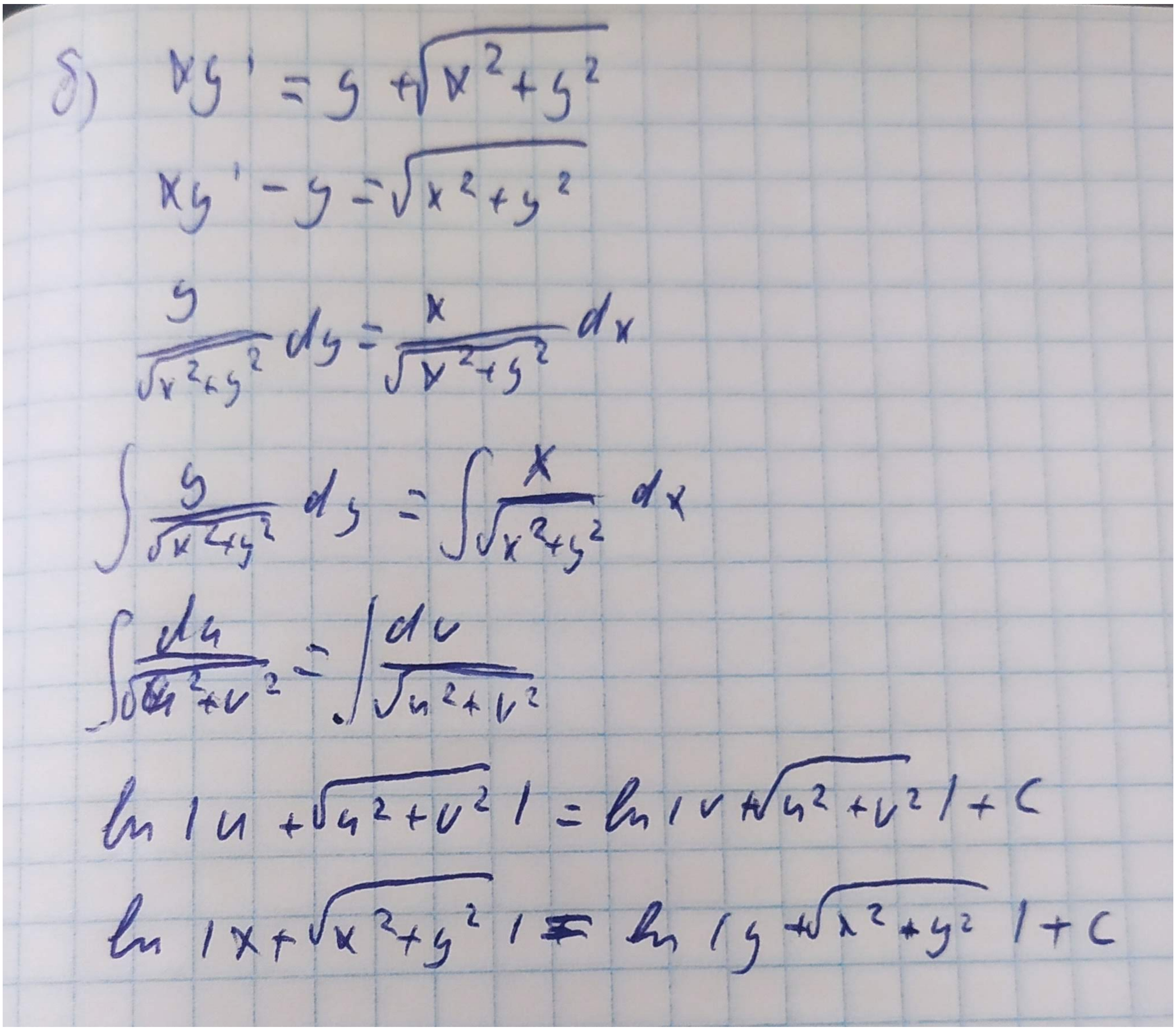
$$\ln|u + \sqrt{u^2+v^2}| = \ln|v + \sqrt{u^2+v^2}| + C$$

Підставивши назад u і v, отримаємо загальний розв'язок:

$$\ln|x + \sqrt{x^2+y^2}| = \ln|y + \sqrt{x^2+y^2}| + C$$

Це і є розв'язок даного диференціального рівняння.

Рішення 2 в зошиті



Рішення 3

Розв'яжемо диференціальне рівняння першого порядку:

$$y' + y\cot(x) = \frac{\cos^2(x)}{\sin^3(x)}$$

Ми можемо переписати це як:

$$y' + y\cot(x) - \frac{\cos^2(x)}{\sin^3(x)} = 0$$

Це лінійне неоднорідне диференціальне рівняння першого порядку. Загальний розв'язок такого рівняння має вигляд:

$$y = e^{-\int P(x)dx}\left(\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C\right)$$

де $(P(x) = \cot(x))$ і $(Q(x) = -\frac{\cos^2(x)}{\sin^3(x)})$.

Отже, маємо:

$$y = e^{-\int \cot(x)dx} \left(\int -\frac{\cos^2(x)}{\sin^3(x)} e^{\int \cot(x)dx} dx + C \right)$$

Розв'язавши ці інтеграли, отримаємо загальний розв'язок:

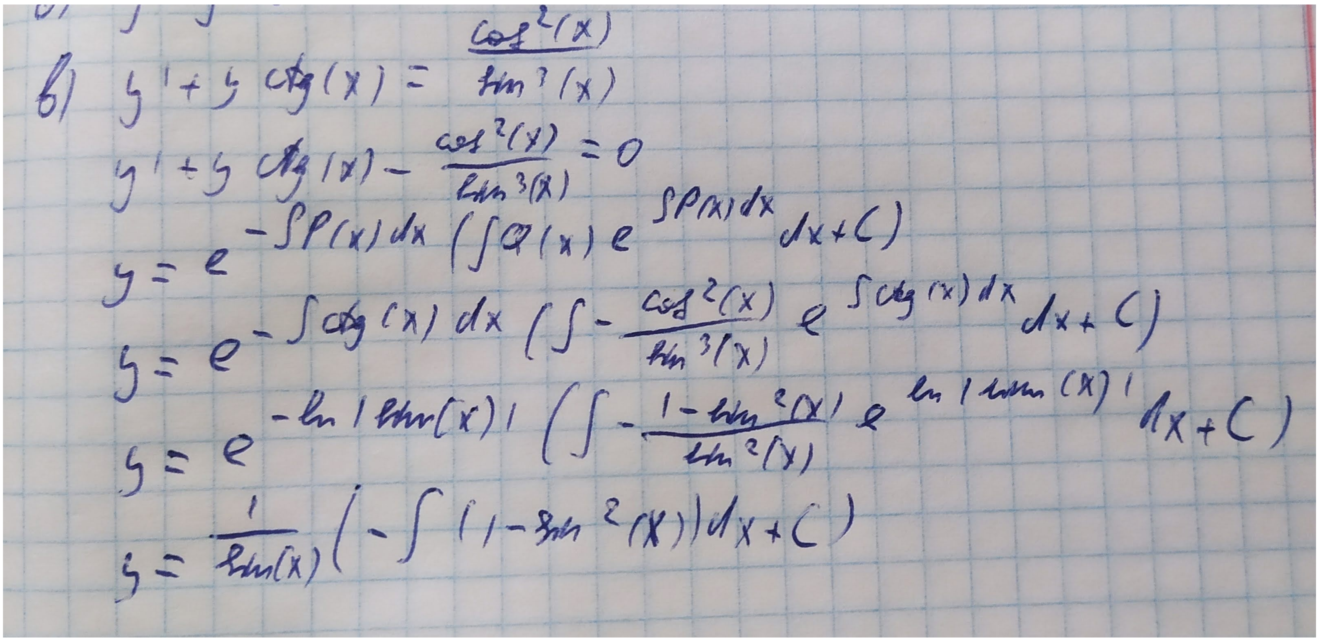
$$y = e^{-\ln|\sin(x)|} \left(\int -\frac{1-\sin^2(x)}{\sin^2(x)} e^{\ln|\sin(x)|} dx + C \right)$$

Спрощуючи, отримаємо:

$$y = \frac{1}{\sin(x)} \left(-\int (1-\sin^2(x)) dx + C \right)$$

Це і є розв'язок даного диференціального рівняння.

Рішення 3 в зошиті



в) $y' + y\,\mathrm{ctg}(x) = \frac{\cos^2(x)}{\sin^3(x)}$

$y' + y\,\mathrm{ctg}(x) - \frac{\cos^2(x)}{\sin^3(x)} = 0$

$y = e^{-\int P(x)dx} \left(\int Q(x) e^{\int P(x)dx} dx + C \right)$

$y = e^{-\int \mathrm{ctg}(x)dx} \left(\int -\frac{\cos^2(x)}{\sin^3(x)} e^{\int \mathrm{ctg}(x)dx} dx + C \right)$

$y = e^{-\ln|\sin(x)|} \left(\int -\frac{1-\sin^2(x)}{\sin^2(x)} e^{\ln|\sin(x)|} dx + C \right)$

$y = \frac{1}{\sin(x)} \left(-\int (1-\sin^2(x)) dx + C \right)$

Рішення 4

Розв'яжемо диференціальне рівняння першого порядку:

$$2xy^2 = x\frac{y'}{\ln(x)} + \frac{y}{\ln(x)}$$

Ми можемо переписати це як:

$$2xy^2 - \frac{xy}{\ln(x)} = x\frac{y'}{\ln(x)}$$

Тепер ми можемо розділити змінні:

$$\frac{y'}{\ln(x)} = \frac{2y^2 - \frac{y}{\ln(x)}}{x}$$

Проінтегрувавши обидві частини, отримаємо:

$$\int \frac{y'}{\ln(x)} dx = \int \frac{2y^2 - \frac{y}{\ln(x)}}{x} dx$$

Ліва частина є стандартним інтегралом, який можна розв'язати підстановкою $u = y$, $du = y' dx$. Права частина також є стандартним інтегралом, який можна розв'язати за допомогою підстановки $v = x$, $dv = dx$.
Отже, маємо

$$\int \frac{du}{\ln(u)} = \int \frac{2v^2 - \frac{1}{\ln(v)}}{v} dv$$

Розв'язуючи ці інтеграли, отримаємо:

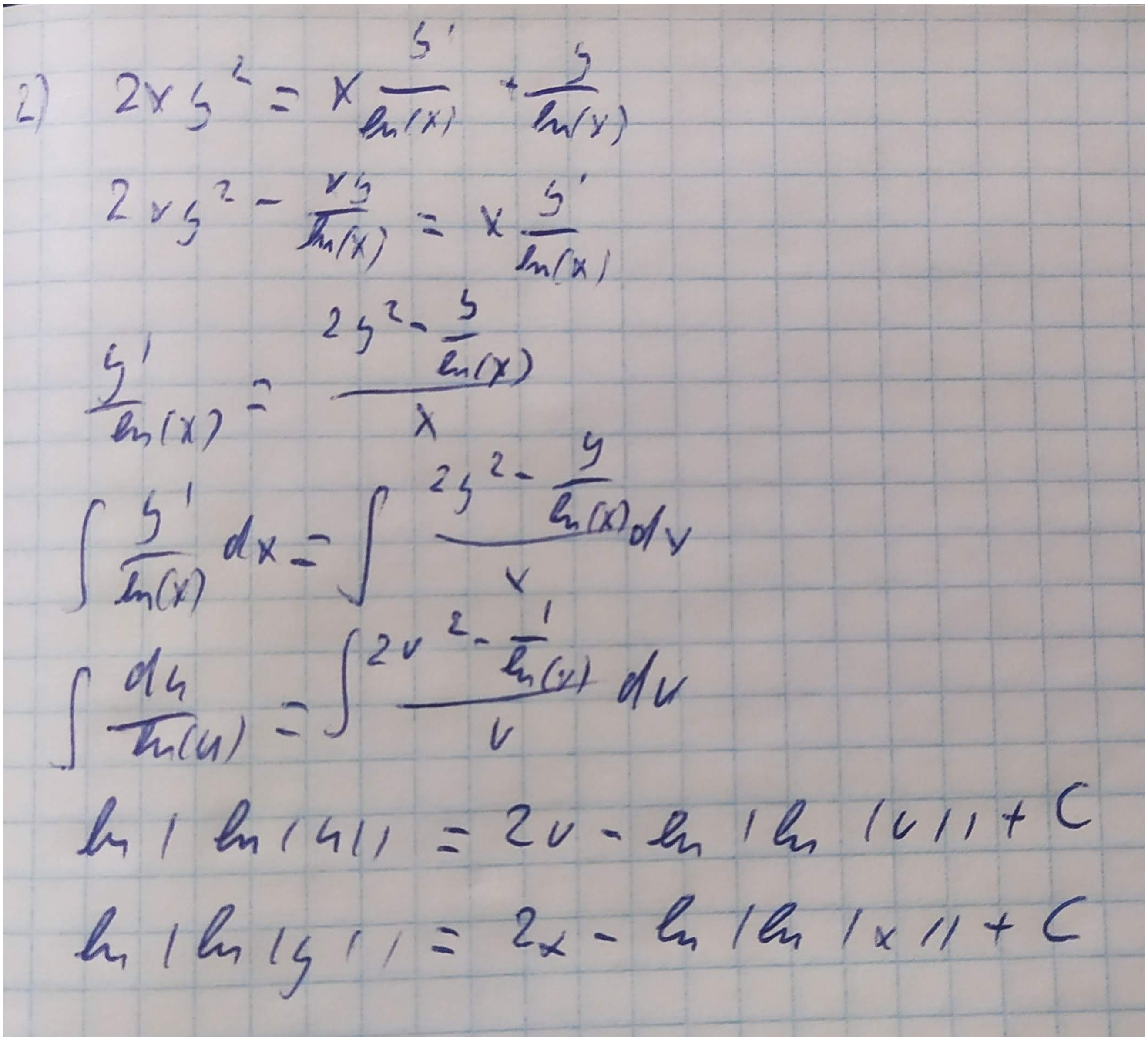
$$\ln|\ln|u|| = 2v - \ln|\ln|v|| + C$$

Підставивши назад u і v, отримаємо загальний розв'язок:

$$\ln|\ln|y|| = 2x - \ln|\ln|x|| + C$$

Це і є розв'язок даного диференціального рівняння.

Рішення 4 в зошиті



2) $2xy^2 = x\frac{y'}{\ln(x)} + \frac{y}{\ln(x)}$

$2xy^2 - \frac{xy}{\ln(x)} = x\frac{y'}{\ln(x)}$

$\frac{y'}{\ln(x)} = \frac{2y^2 - \frac{y}{\ln(x)}}{x}$

$\int \frac{y'}{\ln(x)} dx = \int \frac{2y^2 - \frac{y}{\ln(x)}}{x} dx$

$\int \frac{du}{\ln(u)} = \int \frac{2v^2 - \frac{1}{\ln(v)}}{v} dv$

$\ln|\ln(u)| = 2v - \ln|\ln|v|| + C$

$\ln|\ln|y|| = 2x - \ln|\ln|x|| + C$

2. Розв'язати диференційні рівняння вищих порядків

Умова

1. $y\ln(y) \times y'' + (y')^2 = 0, \qquad y(0) = e \quad y'(0) = 1$
2. $y'' + 4y = \cot 2x$
3. $y'' + 2y' + 5y = 8.5\cos(2x) + 40e^5x, \qquad y(0) = 1\frac{7}{17} \quad y'(0) = 8\frac{5}{17}$

Рішення 1

Рішення 2

Рішення 3

3. Розв'язати систему диференційних рівнянь

Умова

$$\begin{cases} x' = 4x + y \\ y' = x + 4y - e^t \end{cases}$$

Рішення

Дана система диференціальних рівнянь має вигляд:

$$\begin{cases} x' = 4x + y \\ y' = x + 4y - e^t \end{cases}$$

Це система лінійних однорідних диференціальних рівнянь. Ми можемо записати її у матричній формі наступним чином:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ e^t \end{pmatrix}$$

Характеристичне рівняння матриці має вигляд:

$$\lambda^2 - 8\lambda + 15 = 0$$

Розв'язання цього рівняння дає нам два власних значення, $\lambda_1 = 3$ і $\lambda_2 = 5$. Відповідні власні вектори $v_1 = (1, -1)^T$ і $v_2 = (1, 1)^T$.

Отже, загальний розв'язок однорідної системи (без доданка e^t) має вигляд:

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = c_1 e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + c_2 e^{5t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Для знаходження конкретного розв'язку неоднорідної системи можна скористатися методом невизначених коефіцієнтів. Ми вгадуємо розв'язок виду $y_p(t) = Ae^t$, і підставляємо його у друге рівняння для знаходження A. Це дає нам

$$Ae^t + 4Ae^t - e^t = Ae^t \Rightarrow A = \frac{1}{5}$$

Отже, конкретний розв'язок має вигляд $y_p(t) = \frac{1}{5}e^t$, а відповідне значення $x_p(t)$ можна знайти з першого рівняння:

$$x_p(t) = \frac{1}{5}e^t - y_p(t) = 0$$

Отже, загальний розв'язок неоднорідної системи має вигляд:

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = c_1 e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + c_2 e^{5t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{5}e^t \end{pmatrix}$$

де c_1 і c_2 - константи, що визначаються початковими умовами.

Рішення в зошиті