1 ГРАНИЦІ ФУНКЦІЇ

1.1 Границя числової послідовності

Назвемо послідовністю множину чисел, пронумерованих натуральними числами, розташованими у порядку зростання. Іншими словами, якщо кожному натуральному числу n за певним правилом ставиться у відповідність число a_n, то множину чисел $\{a_1, a_2, \ldots\ldots, a_n, \ldots\}$ називають числовою послідовністю. Або, коротко, послідовністю.

Послідовність позначається $\{a_n\}$. Послідовність вважається заданою, якщо відома формула, за якою знаходять загальний член a_n.

Наприклад, $a_n = \dfrac{n}{n+2}$,

тобто $a_1 = \dfrac{1}{3}$; $a_2 = \dfrac{2}{4}$; $a_3 = \dfrac{3}{5}$; …; $a_n = \dfrac{n}{n+2}$; … .

Послідовність є функцією цілочислового аргументу.

Визначення 1.1. Послідовність називається обмеженою зверху, якщо існує таке число $M > 0$, що $|a_n| \le M$ для усіх $n \in N$. (Запис $n \in N$ означає, що *n* належить множині натуральних чисел).

Визначення 1.2. Послідовність називається обмеженою знизу, якщо існує таке M, що $a_n \ge M$, для усіх $n \in N$.

Визначення 1.3. Число А називається границею числової послідовності $\{a_n\}$, якщо для довільного наперед заданого числа $\varepsilon > 0$, яке може бути яким завгодно малим, існує такий номер $N = N(\varepsilon)$ (залежний від обраного ε), що для усіх значень $n \ge N$ буде виконуватися нерівність: $|a_n - A| < \varepsilon$.

Запис $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$ означає: границя послідовності $\{a_n\}$ дорівнює *A* коли *n* прямує до нескінченності.

Якщо послідовність має скінченну границю, то вона називається збіжною. В усіх інших випадках вона називається розбіжною.

Властивості границі числової послідовності:

1 Якщо послідовність має границю, то ця границя є єдиною.

2 Послідовність, що має границю, є обмеженою.

3 Теорема існування границі монотонної обмеженої послідовності (теорема Вейєрштрасса): якщо послідовність $\{a_n\}$ неспадна і обмежена зверху, $a_n \le M$, то послідовність має границю. Якщо послідовність $\{a_n\}$ не зростає і обмежена знизу, то вона має границю.

4 Нехай послідовність $\{x_n\}$ має границю, яка дорівнює *a*, послідовність $\{y_n\}$ має границю, яка дорівнює *b*, тоді справедливі такі рівності:

$$\lim(x_n \pm y_n) = \lim x_n \pm \lim y_n = a \pm b.$$

$$\lim(x_n \cdot y_n) = \lim x_n \cdot \lim y_n = a \cdot b.$$

$$\lim \frac{y_n}{x_n} = \frac{\lim y_n}{\lim x_n} = \frac{a}{b},\ b \neq 0$$

$$\lim x_n^{y_n} = \lim x_n^{\lim y_n} = a^b$$

5 Якщо $\lim x_n \leq \lim y_n$, то $a \leq b$.

6 Якщо $x_n \leq z_n \leq y_n$ і $\lim x_n = a;\ \lim y_n = a$, то $\lim z_n = a;$

Визначення 1.4. Послідовність $\{a_n\}$ називається нескінченно малою, якщо $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$.

Приклад 1.1. Написати перші чотири члени послідовності $\left\{a_n = \dfrac{1}{1+n^2}\right\}$.

Розв'язання

при n = 1 $a_1 = \dfrac{1}{1+1^2} = \dfrac{1}{2};$ при n = 2 $a_2 = \dfrac{1}{1+2^2} = \dfrac{1}{5};$

при n = 3 $a_1 = \dfrac{1}{1+3^2} = \dfrac{1}{10};$ при n = 4 $a_2 = \dfrac{1}{1+4^2} = \dfrac{1}{17}.$

Тобто перші чотири члени послідовності $\{a_n\}$:

$$\left\{\frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{10}, \frac{1}{17}, ...\right\}.$$

Приклад 1.2. Написати формулу загального члена послідовності : $\left\{\dfrac{1}{2}, \dfrac{3}{4}, \dfrac{5}{6}, \dfrac{7}{8}, ...\right\}$.

Розв'язання

Проаналізуємо чисельники. Ці числа є непарними, які можна записати у вигляді (2n – 1). Аналогічно знаменники – парні числа, тому вони будуть записані у вигляді 2n, тобто маємо послідовність

$$\left\{a_n = \frac{2n-1}{2n}\right\}.$$

Приклад 1.3. Показати, що при $n \to \infty$ послідовність $\left\{\frac{7}{3}, \frac{10}{5}, \ldots \frac{3n+4}{2n+1}, \ldots\right\}$ має границю $\frac{3}{2}$.

Розв'язання

Скористуємось визначенням 1.3.

Побудуємо $a_n - \frac{3}{2} = \frac{3n+4}{2n+1} - \frac{3}{2} = \frac{5}{2(2n+1)}$. Визначимо, при якому значенні n виконується нерівність $\frac{5}{2(2n+1)} < \varepsilon$. Розв'язуючи цю нерівність, отримаємо $n > \frac{5}{4\varepsilon} - \frac{1}{2}$. Наприклад при ε = 0,1 нерівність $\left|a_n - \frac{3}{2}\right| < \varepsilon$ виконується при n > 12.

До поняття числової послідовності ми ще повернемось при вивченні теми «Ряди». Методи пошуку границь числових послідовностей цілком співпадають з методами пошуку границь неперервних змінних, що будуть розглянуті в наступних розділах.

1.2 Границя змінної величини

Якщо змінна величина x_n пробігає значення послідовності $\{x_n\}$, то вона є дискретною змінною. І границю такої змінної знаходять за визначенням 1.3.

Якщо змінна величина x набуває усіх числових значень деякого скінченого проміжку X, то вона є неперервною змінною.

Визначення 1.5. Число x_0 називають границею змінної x, якщо для довільного числа ε > 0 існує таке значення x', починаючи з якого для усіх наступних значень x виконується нерівність $|x - x_0| < \varepsilon$, і пишуть

$$\lim x = x_0, \text{ або } x \to x_0.$$

Визначення 1.6. Якщо для довільного числа M>0 існує таке значення x', починаючи з якого усі наступні значення x задовольняють нерівність $|x| > M$, то кажуть, що змінна x прямує до нескінченності і пишуть

$$\lim x = \infty, \text{ або } x \to \infty.$$

Таку змінну називають нескінченно великою змінною.

Зауваження. З виразом ∞ не можна поводитись, як з числом, це – лише символ, який характеризує певну змінну величину.

1.3 Границя функції в точці

Визначення 1.7. Число A є границею функції $f(x)$ при $x \to x_0$, якщо для кожного $\varepsilon > 0$ існує таке $\delta = \delta(\varepsilon)$, що при $0 < |x - x_0| < \delta$, буде виконуватись нерівність: $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Записується границя функції $f(x)$: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$

Приклад 1.4. Доведемо, що $\lim\limits_{x \to 2}(3x+1) = 7$. Дійсно, нехай задане довільне $\varepsilon > 0$; для того, щоб виконувалась нерівність $|(3x+1) - 7| < \varepsilon$, необхідне виконання таких нерівностей:

$$|3x - 6| < \varepsilon. \ |x-2| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \Rightarrow \quad -\frac{\varepsilon}{3} < x - 2 < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Порівнюючи вираз $|x-2| < \frac{\varepsilon}{3}$ з виразом $|x - x_0| < \delta$, маємо, що $x_0 = 2; \delta = \frac{\varepsilon}{3}$. Таким чином, при кожному ε для усіх значень x, що задовольняють нерівності $|x-2| < \frac{\varepsilon}{3} = \delta$, значення функції $3x+1$ буде відрізнятися від числа 7 менше ніж на ε. А це і означає, що 7 є границею функції при $x \to 2$.

З виразу $|x - x_0| < \delta$ легко отримати: $-\delta < x - x_0 < \delta$; звідки $x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$.

Цей інтервал $(x_0 - \delta; x_0 + \delta)$ називають дельта-околом точки x_0.

Ці поняття можна проілюструвати (рис. 1.1)

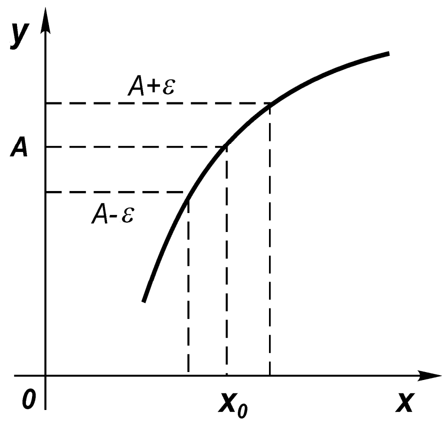

Рисунок 1.1 – Поняття околу точки.

Зауваження. Функція необов'язково має границю у точці.

Приклад 1.5. Візьмемо точку перетину функції $y = \sin\frac{1}{x}$ з віссю Ox. (рис. 1.2). $\sin\frac{1}{x} = 0 \Rightarrow \frac{1}{x} = \pi n;\ x = \frac{1}{\pi n}$,

де $n = 0, 1, 2, \ldots$.

Який би ми не взяли окіл навколо точки O, функція приймає всі значення від –1 до 1, і «загнати» значення функції в ε - окіл будь-якої точки при малому ε неможливо, тому функція $f(x)$ не має границі в точці O.

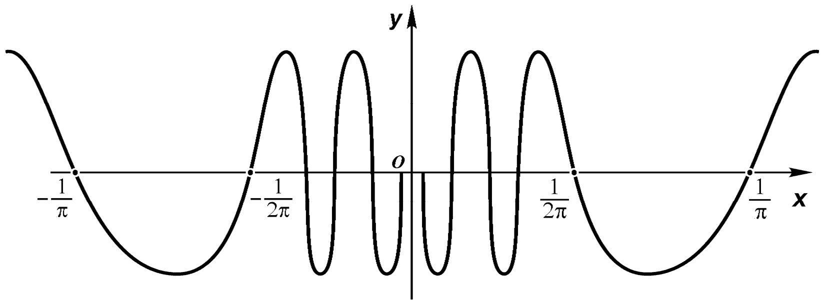

Рисунок 1.2 – Графік функції $y = \sin\frac{1}{x}$

Визначення 1.8. Число A_1 назвемо границею функції $f(x)$ в точці x_0 справа (правосторонньою границею), якщо для кожного $\varepsilon > 0$ існує таке $\delta > 0$, що при всіх *x*, які задовольняють нерівності $x_0 < x < x_0 + \delta$, виконується нерівність: $|f(x) - A_1| < \varepsilon$.

Позначається правостороння границя так: $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = A_1$;

можна записати: $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = A_1$, якщо

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists\ \delta > 0 : x_0 < x < x_0 + \delta \Rightarrow |f(x) - A_1| < \varepsilon.$$

Визначення 1.9. Число A_2 називається границею функції $f(x)$ в точці x_0 зліва (лівосторонньою границею), якщо для кожного $\varepsilon > 0$ існує таке $\delta > 0$, що при всіх *x*, які задовольняють нерівності $x_0 - \delta < x < x_0$, виконується нерівність: $|f(x) - A_2| < \varepsilon$.

Лівостороння границя позначається так: $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = A_2$;

можна записати: $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = f(x_0 - 0)$.

Скорочено $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = A_2$, якщо

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists\ \delta > 0 : x_0 - \delta < x < x_0 \Rightarrow |f(x) - A_2| < \varepsilon.$$

Властивості односторонніх границь

Якщо існує границя функції в точці, то існують обидві односторонні границі.

Але, якщо існують односторонні границі, це не означає, що існує границя функції в точці.

Для того щоб існувала границя функції в точці x_0, необхідно і достатньо, щоб існували обидві односторонні границі і щоб ці границі були рівні між собою: $f(x_0+0)=f(x_0-0)$.

Визначення 1.10. Число A називається границею функції $f(x)$ при $x\to\infty$, якщо для будь-якого додатного ε існує $N>0$ таке, що при усіх $|x|>N$, виконується нерівність: $|f(x)-A|<\varepsilon$.

Позначається: $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A$.

Наприклад, візьмемо функцію $y=\dfrac{1}{x^2}$ (рис. 1.3).

Якщо $|x|>\dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$, то $\left|\dfrac{1}{x^2}-0\right|<\varepsilon$.

$N=\dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$

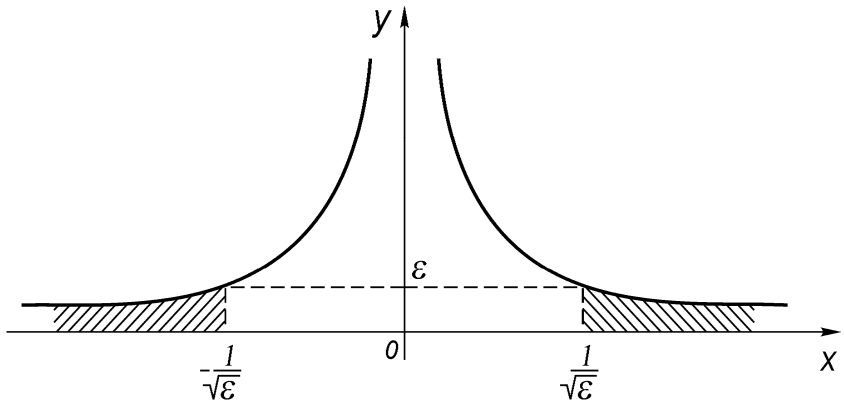

Рисунок 1.3 – Окіл нескінченно великої точки.

Множина x, яка задовольняє нерівності $|x|>N$, називається околом нескінченно великої точки: $|x|>N$, $U(\infty)$ (рис. 1.3).

Визначення 1.11. Число A називається границею функції $f(x)$ при $x\to a$, якщо для кожного $\varepsilon>0$ існує окіл точки *a* такий, що при всіх *x*, які належать околу, ($x\neq a$), виконується нерівність: $|f(x)-A|<\varepsilon$.

Властивості границь функції є такими ж, як і властивості границь числової послідовності:

1 Якщо функція має границю, то ця границя є єдиною.

2 Границя сталої дорівнює цій сталій .$\lim\limits_{x\to x_0} C=C$.

3 Нехай при $x \to x_0$ функція f(x) має границю, яка дорівнює *a*, а функція g(x) має границю, яка дорівнює *b*, тоді справедливі такі рівності:

$$\lim_{x\to x_0}(f(x)\pm g(x)) = \lim_{x\to x_0} f(x) \pm \lim_{x\to x_0} g(x) = a \pm b.$$

$$\lim_{x\to x_0}(f(x)\cdot g(x)) = \lim_{x\to x_0} f(x) \cdot \lim_{x\to x_0} g(x) = a \cdot b.$$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)} = \frac{a}{b},\ \ b \neq 0.$$

$$\lim_{x\to x_0} f(x)^{g(x)} = \lim_{x\to x_0} f(x)^{\lim\limits_{x\to\infty} g(x)} = a^b.$$

4 Якщо $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \le \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$, то: $a \le b$.

5 Якщо $f(x) \le h(x) \le g(x)$ і $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a$; $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = a$, то $\lim\limits_{x\to x_0} h(x) = a$;.

6 Перша стандартна границя $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = 1.$

7 Друга стандартна границя $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = e.$

1.4 Нескінченно малі та нескінченно великі функції. Поняття еквівалентних функцій. Основні еквівалентності

Визначення 1.12. Функція $\alpha(x)$ при $x \to x_0$ називається нескінченно малою, якщо її границя дорівнює нулю. $\lim\limits_{x\to x_0} \alpha(x) = 0$.

Властивості нескінченно малих функцій:

1 Для того щоб функція $f(x)$ при $x \to x_0$ мала границю A, необхідно і достатньо, щоб $f(x)$ можна було записати у вигляді:

$$f(x) = A + \alpha(x)\ ,$$

де $\alpha(x)$ – нескінченно мала функція при $x \to x_0$.

2 Сума скінченої кількості нескінченно малих функцій є нескінченно малою функцією.

3 Добуток нескінченно малої при $x \to x_0$ функції на функцію, обмежену в околі точки x_0, є нескінченно малою функцією.

4 Добуток двох нескінченно малих функцій при $x \to x_0$ є нескінченно малою функцією.

Нехай функції $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ є нескінченно малими при $x \to x_0$.

5 Нескінченно малі $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ називаються нескінченно малими одного порядку, якщо:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=C\neq 0,\quad \text{де } C-\text{const},$$

6 Якщо $\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=0$, то нескінченно мала $\alpha(x)$ називається нескінченно малою більш високого порядку, ніж $\beta(x)$. При цьому нескінченно мала $\beta(x)$ є нескінченно малою більш низького порядку, чим $\alpha(x)$.

7 Якщо $\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\infty$, то нескінченно мала $\alpha(x)$ називається нескінченно малою більш низького порядку, ніж $\beta(x)$.

8 Якщо $\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{[\beta(x)]^k}=C\neq 0$, то нескінченно мала $\alpha(x)$ називається нескінченно малою *k-го* порядку в порівнянні з нескінченно малою $\beta(x)$.

9 Дві нескінченно малі функції $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ називаються еквівалентними при $x\to x_0$, якщо :

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1.$$

Еквівалентність позначається так: $\alpha(x)\sim\beta(x)$.

З першої стандартної границі $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ маємо: $\sin x\sim x$.

Визначення 1.13. Функція $f(x)$ при $x\to x_0$ називається нескінченно великою, якщо для будь-якого як завгодно великого додатного числа M існує окіл точки x_0 $U(x_0)$ такий, що при усіх $x\in U(x_0)$, $x\neq x_0$ виконується нерівність: $|f(x)|>M$ або скорочено: $\lim_{x\to x_0}f(x)=\infty$.

Властивості нескінченно великих функцій:

1 Якщо функція є нескінченно великою, то вона є необмеженою. Зворотне твердження невірне, тобто необмежена функція не обов'язково є нескінченно великою.

Наприклад, якщо взяти функцію $y=x\sin x$ (рис. 1.4), вона не є нескінченно великою, але є необмеженою.

2 Дві нескінченно великі функції $A(x)$ і $B(x)$ називаються еквівалентними при $x\to x_0$, якщо :

$$\lim_{x\to x_0}\frac{A(x)}{B(x)}=1.$$

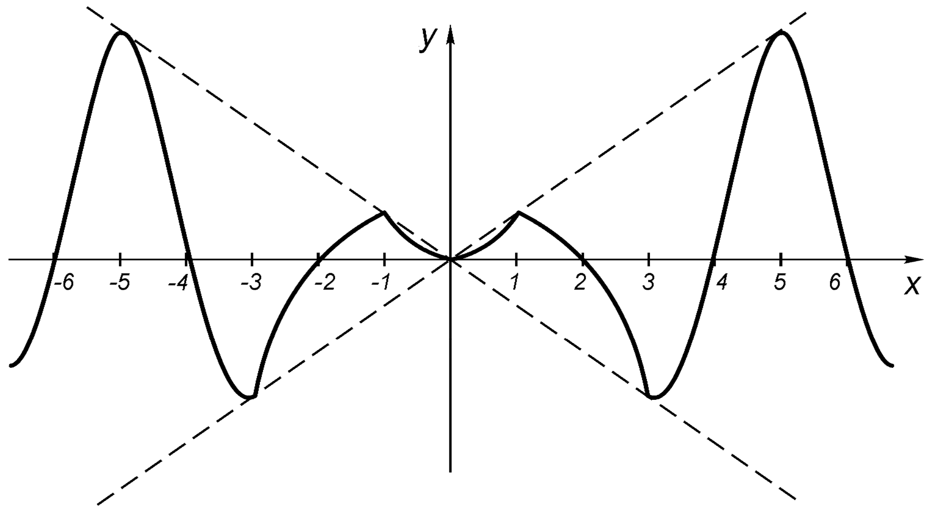

Рисунок 1.4 – Графік функції $y = x\sin x$.

3 Поліном степеня n $a_0x^n + a_1x^{n-1} + ...a_n$ при $x \to \infty$ є еквівалентним своєму члену з найбільшим степенем, або

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + ...a_n \sim a_0x^n.$$

4 Якщо функція $\alpha(x)$ є нескінченно малою при $x \to x_0$, тоді функція $\beta(x) = \dfrac{1}{\alpha(x)}$ є нескінченно великою при $x \to x_0$ і навпаки: якщо функція $\beta(x)$ нескінченно велика при $x \to x_0$, тоді $\alpha(x) = \dfrac{1}{\beta(x)}$ є нескінченно .малою при $x \to x_0$.

Наведемо основні еквівалентності, які є наслідками першої та другої стандартних границь:

1 $\sin\alpha(x) \sim \alpha(x)$ – власне перша стандартна границя,

та її наслідки:

2 $\operatorname{tg}\alpha(x) \sim \alpha(x)$;

3 $\arcsin\alpha(x) \sim \alpha(x)$;

4 $\operatorname{arctg}\alpha(x) \sim \alpha(x)$;

наслідки другої стандартної границі:

5 $e^{\alpha(x)} - 1 \sim \alpha(x)$;

6 $a^{\alpha(x)} - 1 \sim \alpha(x)\ln a$;

7 $(1 + \alpha(x))^n - 1 \sim \alpha(x)n$;

8 $\ln(1 + \alpha(x)) \sim \alpha(x)$.

1.5 Приклади на знаходження границь

За допомогою розглянутих властивостей можна знаходити деякі границі.

Приклад 1.6. Знайти границю

$$\lim_{x\to 1}\frac{4x}{x^2+3}.$$

Розв'язання

На основі згаданих властивостей і рівності $\lim_{x\to 1} x = 1$ маємо

$$\lim_{x\to 1}\frac{4x}{x^2+3}=\frac{\lim_{x\to 1}(4x)}{\lim_{x\to 1}(x^2)+3}=\frac{4\lim_{x\to 1}(x)}{(\lim_{x\to 1}(x))^2+3}=\frac{4}{1^2+3}=1.$$

Цей самий результат можна дістати, підставляючи у вираз граничне значення x. Тому сформулюємо **перше правило** обчислення границь:

- підставити у вираз граничне значення x. Якщо отримане скінченне число, границя знайдена.

Зауваження. Не завжди можна під знак границі підставляти граничне значення аргументу. Такі функції, для яких це можна робити, називаються неперервними і будуть розглянуті далі.

Приклад 1.7. Знайти границю

$$\lim_{x\to 2}\frac{2-x}{x^2-4}.$$

Розв'язання

Підставляючи x = 2 у вираз, дістанемо $\frac{0}{0}$. Таку ситуацію називають невизначеністю, оскільки після знаходження границь чисельника і знаменника обидві дорівнюють нулю, а границя усього виразу може бути як конкретним числом, так і нескінченністю, або взагалі може не існувати. Знайти подібну границю означає розкрити невизначеність. Є інші види невизначеностей: $\frac{\infty}{\infty}$, $\infty-\infty$, $0\cdot\infty$, 1^∞ тощо.

Друге правило обчислення границь:

У виразі під знаком границі можна виконувати будь-які спрощення, що не суперечать правилам алгебри. Повернемось до прикладу 1.7.

Приклад 1.8. Знайти границю:

$$\lim_{x\to 2}\frac{2-x}{x^2-4}.$$

Розв'язання

Розкладемо знаменник на множники. У чисельнику винесемо за дужки число -1.

$$\lim_{x\to 2}\frac{2-x}{x^2-4}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=\lim_{x\to 2}\frac{-(x-2)}{(x-2)(x+2)}=\lim_{x\to 2}\frac{-1}{(x+2)}=-\frac{1}{4}.$$

У фігурних дужках після умови задачі будемо надалі вказувати вид невизначеності.

У більш складних випадках пошуку границь для функції виду

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}=\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\ldots+b_{m-1}x+b_m},$$

якщо $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}=\left\{\frac{0}{0}\right\}$ у чисельнику і знаменнику виділяють множник $x-x_0$, поки не позбуваються невизначеності.

Приклад 1.9. Знайти границю

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^5-1}{x^3-1}.$$

Розв'язання

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^5-1}{x^3-1}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1)}{(x-1)(x^2+x+1)}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{x^4+x^3+x^2+x+1}{x^2+x+1}=\frac{5}{3}.$$

Приклад 1.10. Знайти границю

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+4}-2}{x}.$$

Розв'язання

Домножимо чисельник і знаменник дробу на суму $\sqrt{x+4}+2$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+4}-2}{x}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+4}-2}{x}\cdot\frac{\sqrt{x+4}+2}{\sqrt{x+4}+2}=\lim_{x\to 0}\frac{x+4-4}{x\left(\sqrt{x+4}+2\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\left(\sqrt{x+4}+2\right)}=\frac{1}{4}.$$

Третє правило обчислення границь:

У виразі під знаком границі замість будь-якої функції можна підставляти еквівалентну їй іншу функцію.

Приклад 1.11. Знайти границю

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+5x^2)}{x\,\mathrm{arctg}x}$$

Розв'язання

Скористаємось еквівалентностями 4 і 8:

$$\left|\begin{array}{l}\ln(1+5x^2)\sim 5x^2\\ \mathrm{arctg}x\sim x\end{array}\right|.$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+5x^2)}{x\,\mathrm{arctg}x}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=\lim_{x\to 0}\frac{5x^2}{x\cdot x}=5.$$

Ці правила можна використовувати одночасно.

Приклад 1.12. Знайти границю

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 5x}{x^2}.$$

Розв'язання

Використаємо відому тригонометричну формулу $2\sin^2\alpha=1-\cos 2\alpha$ і першу еквівалентність:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 5x}{x^2}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{5x}{2}}{x^2}=2\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin\frac{5x}{2}}{x}\right)^2=2\left(\frac{5}{2}\right)^2=\frac{25}{2}.$$

Приклад 1.13. Знайти границю:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos 2x-\cos 4x}{3x^2}.$$

Розв'язання

Використаємо відому тригонометричну формулу $\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\sin\frac{\alpha+\beta}{2}$ і першу еквівалентність:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos 2x-\cos 4x}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin x\sin 3x}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2x3x}{3x^2}=2.$$

Розглянемо границю функції

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + \ldots + b_{m-1}x + b_m}$$

у випадку, коли $x \to \infty$. У цьому випадку для пошуку границі використовують третю властивість нескінченно великих функцій. У загальному випадку її можна записати у вигляді:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} =$$

$$= \begin{cases} \infty, \text{якщо } n > m \\ \dfrac{a_0}{b_0}, \text{ якщо } n = m. \\ 0, \quad \text{якщо } n < m \end{cases}$$

Приклад 1.14. Знайти границю

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^5 + 2x^3 + 1}{4x^5 + x^2 - x - 1}.$$

Розв’язання

Використаємо наведену узагальнену формулу $n = m = 5$:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^5 + 2x^3 + 1}{4x^5 + x^2 - x - 1} = \left\{\frac{\infty}{\infty}\right\} = \frac{3}{4}.$$

Приклад 1.15. Знайти границю

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[5]{n^3 + 2} + \sqrt[3]{n}}{\sqrt[4]{n^3 + 2} + n}.$$

Розв’язання

Степінь чисельника $n = 3/5$ менший ніж степінь знаменника $m = 3/4$, тому

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[5]{n^3 + 2} + \sqrt[3]{n}}{\sqrt[4]{n^3 + 2} + n} = \left\{\frac{\infty}{\infty}\right\} = 0.$$

Приклад 1.16. Знайти границю

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2 + 8x + 3} - \sqrt{x^2 + 4x + 3}\right)$$

Розв'язання

Домножимо і поділимо розглянутий вираз на $\left(\sqrt{x^2+8x+3}+\sqrt{x^2+4x+3}\right)$:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+8x+3}-\sqrt{x^2+4x+3}\right)=\{\infty-\infty\}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+8x+3}-\sqrt{x^2+4x+3}\right)\frac{\sqrt{x^2+8x+3}+\sqrt{x^2+4x+3}}{\sqrt{x^2+8x+3}+\sqrt{x^2+4x+3}}=$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+8x+3-x^2-4x-3}{\sqrt{x^2+8x+3}+\sqrt{x^2+4x+3}}=\lim_{x\to\infty}\frac{4x}{x+x}=2.$$

Тут враховані еквівалентності:

$$\sqrt{x^2+8x+3}\sim\sqrt{x^2}=x; \qquad \sqrt{x^2+4x+3}\sim\sqrt{x^2}=x.$$

У випадках невизначеності 1^∞ використовують другу стандартну границю.

Приклад 1.17. Знайти границю

$$\lim_{x\to 0}(1+3x)^{\frac{1}{x}}.$$

Розв'язання

$$\lim_{x\to 0}(1+3x)^{\frac{1}{x}}=\{1^\infty\}=\lim_{x\to 0}(1+3x)^{3\cdot\frac{1}{3x}}=\lim_{x\to 0}\left((1+3x)^{\frac{1}{3x}}\right)^3=e^3,$$

Приклад 1.18. Знайти границю

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{\alpha}{x}\right)^{\beta x}.$$

Розв'язання

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{\alpha}{x}\right)^{\beta x}=\{1^\infty\}=\lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{\alpha}{x}\right)^{\frac{x}{\alpha}\alpha}\right)^{\beta}=\left(\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{\alpha}{x}\right)^{\frac{x}{\alpha}}\right)^{\alpha\beta}=e^{\alpha\beta}.$$

На основі перетворень, що застосовані у прикладах 1.16 і 1.17, можна розв'язувати більш складні задачі.

Приклад 1.19. Знайти границю

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x-3}{2x+1}\right)^{4x-2}.$$

Розв’язання

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x-3}{2x+1}\right)^{4x-2}=\{1^\infty\}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-4}{2x+1}\right)^{4x-2}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-4}{2x+1}\right)^{\frac{2x+1}{-4}\cdot\frac{-4}{2x+1}(4x-2)}=\lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{-4}{2x+1}\right)^{\frac{2x+1}{-4}}\right)^{\frac{-4}{2x+1}(4x-2)}=\lim_{x\to\infty}e^{-\frac{4(4x-2)}{2x+1}}=$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to\infty}-\frac{4(4x-2)}{2x+1}}=e^{-\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4(2-\frac{1}{x})}{1+\frac{1}{2x}}}=e^{-8}.$$

Приклад 1.20. Знайти границю

$$\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}.$$

Розв’язання

$$\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}=\{1^\infty\}=\lim_{x\to 0}(1+(\cos x-1))^{\frac{1}{x^2}}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(1+2\sin^2\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to 0}\left(1+2\sin^2\frac{x}{2}\right)^{-\frac{1}{2\sin^2\frac{x}{2}}\cdot\frac{-2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(1+2\sin^2\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to 0}\left[\left(1+2\sin^2\frac{x}{2}\right)^{-\frac{1}{2\sin^2\frac{x}{2}}}\right]^{\frac{-2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}}=$$

$$e^{-2\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{x}\right)^2}=e^{-2\left(\frac{1}{2}\right)^2}=e^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{e}}.$$

У загальному вигляді, якщо $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=1;\quad \lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=\infty;$ то

$$\lim_{x\to x_0}[f(x)]^{\varphi(x)}=\{1^\infty\}=\lim_{x\to x_0}\left[(1+(f(x)-1))^{\frac{1}{f(x)-1}}\right]^{\varphi(x)[f(x)-1]}=$$

$$\left|\begin{array}{l} f(x)-1=\alpha(x) \\ \alpha(x)\to 0 \ \text{ при } \ x\to x_0 \end{array}\right|=\left[\lim_{\alpha(x)\to 0}(1+\alpha(x))^{\frac{1}{\alpha(x)}}\right]^{\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)[f(x)-1]}=$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)[f(x)-1]}.$$

2 НЕПЕРЕРВНІСТЬ ФУНКЦІЇ

2.1 Неперервність функції у точці

Визначення 2.1. Функція f(x) називається неперервною в точці $x = x_0$, якщо:

1) функція визначена в точці x_0 і в деякому її околі, тобто існує значення $f(x_0)$;

2) існує границя $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$;

3) і ця границя дорівнює $A = f(x_0)$.

Визначення 2.2. Функція f(x) називається неперервною в точці x_0, якщо:

1) функція визначена в точці x_0 і в деякому її околі;

2) існує границя приросту функції, коли $\Delta x \to 0$ (приріст аргументу прямує до нуля): $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y$;

3) і ця границя дорівнює нулю: $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$.

Таким чином, функція неперервна в точці x, якщо: $\lim\limits_{\Delta x \to x_0} f(x) = f(x_0)$. Візьмемо значення $x = x_0 + \Delta x$ (рис. 2.1).

Розглянемо границю $\lim\limits_{\Delta x \to 0} f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = 0$,

тобто $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \left[f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)\right] = 0$ або $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$.

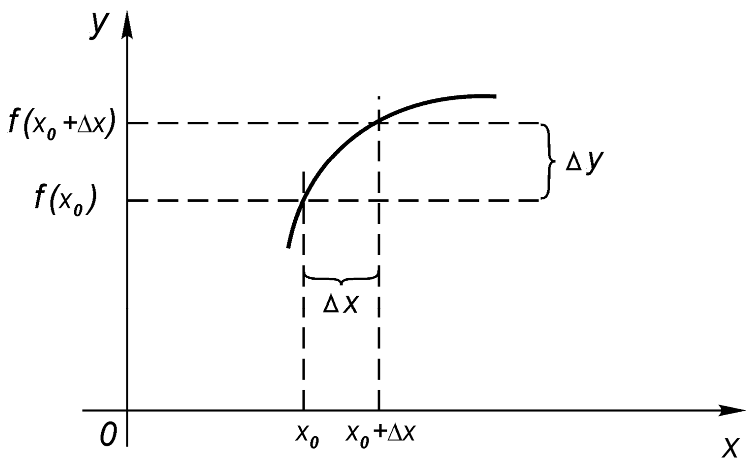

Рисунок 2.1

Розглянемо неперервність основних елементарних функцій:

1) $y = x^a$ – степенева;

2) $y = a^x$ – показникові;

3) $y = \log_a x$ – логарифмічна;

4) $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = tgx$, $y = arctgx$ – тригонометричні.

Усі вони є функціями неперервними в області визначення.

Приклад 2.1. Показати неперервність функції $y = x^2$.

Розв'язання

$$\Delta y = (x + \Delta x)^2 - x^2 = x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2 - x^2 = 2x\Delta x + \Delta x^2.$$

$\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim\limits_{\Delta x \to 0} (2x\Delta x + \Delta x^2) = 0$. Функція $y = x^2$ неперервна на всій числовій вісі.

Приклад 2.2. Показати неперервність функції $y = \sin x$.

Розв'язання

$$\Delta y = y(x + \Delta x) - y(x) = \sin(x + \Delta x) - \sin(x) = 2\sin\frac{x + \Delta x - x}{2};$$

$$\cos\frac{x + \Delta x + x}{2} = 2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\frac{2x + \Delta x}{2} = 2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right).$$

$\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim\limits_{\Delta x \to 0} 2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) = 0$. Функція $y = \sin x$ неперервна при усіх $x \in R$.

Визначення 2.3. Функція $y = f(x)$ називається неперервною зліва у точці x_0, якщо:

1) вона визначена в точці x_0 і у деякому лівому півоколі $(x_0 - \Delta x, x_0)$ і існує границя:

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = f(x_0 - 0) = f(x_0);$$

2) існує границя приросту функції $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} \Delta y$, яка дорівнює нулю:

$$\lim_{x \to x_0 - 0} \Delta y = 0.$$

Визначення 2.4. Функція $y = f(x)$ називається неперервною справа у точці x_0, якщо:

1) вона визначена в точці x_0 і у деякому правому півоколі $(x_0, x_0 + \Delta x)$ і існує границя:

$$\lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = f(x_0 + 0) = f(x_0);$$

2) існує границя приросту функції $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} \Delta y$, яка дорівнює нулю:

$$\lim_{x \to x_0 + 0} \Delta y = 0.$$

Точки, у яких порушується хоча б одна з умов неперервності функції, називаються точками розриву, тобто це точки, у яких функція:

1) або не визначена;
2) або не існує границі $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$;

3) або $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0)$.

Точки розриву ділять на точки першого і другого роду.

Визначення 2.5. Точка розриву x_0 називається точкою розриву першого роду, якщо в цій точці існують обидві скінченні односторонні границі. Точки розриву першого роду бувають усувного і неусувного розриву.

Розрив неусувний, якщо:

$$\lim_{x \to x_0 + 0} f(x) \neq \lim_{x \to x_0 - 0} f(x) \qquad f(x_0 - 0) \neq f(x_0 + 0),$$

але в точці x_0 функція або не існує, або не визначена.

Визначення 2.6. Точка x_0 називається точкою розриву другого роду, якщо в цій точці функція $f(x)$ не має принаймні однієї з односторонніх границь, або хоча б одна одностороння границя дорівнює нескінченності.

Приклад 2.3. Знайти точки розриву функції $y = \frac{x}{|x|}$, дослідити їх характер.

Розв'язання

При $x = 0$ функція невизначена. Тому $x = 0$ – точка розриву.

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{якщо } x > 0 \\ -x, & \text{якщо } x < 0 \\ 0, & \text{якщо } x = 0 \end{cases}.$$

Побудуємо графік функції (рис. 2.2).

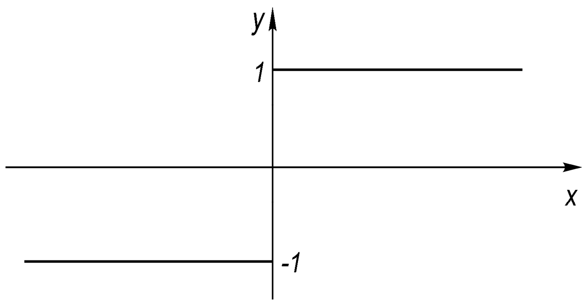

Рисунок 2.2 – Графік функції $y = \frac{x}{|x|}$

Легко бачити: $\lim\limits_{x \to 0+0} y(x) = 1;\ \lim\limits_{x \to 0-0} y(x) = -1.$

Висновок:

$x = 0$ – точка розриву 1-го роду. Розрив неусувний.

Приклад 2.4. Знайти точки розриву функції $y = \frac{\sin x}{x}$, дослідити їх характер.

Розв’язання

$$\lim_{x \to 0-0} \frac{\sin x}{x} = 1, \text{ тобто } f(0-0) = 1 \text{ зліва;}$$

$$\lim_{x \to 0+0} \frac{\sin x}{x} = 1, \text{ тобто } f(0+0) = 1 \text{ справа;}$$

$$f(0-0) = f(0+0);$$

$$f(0) = \frac{0}{0} \text{ не існує.}$$

У цьому випадку точка $x_0 = 0$ є точкою усувного розриву. Точка $x_0 = 0$ – точка розриву першого роду (див. рис. 2.3).

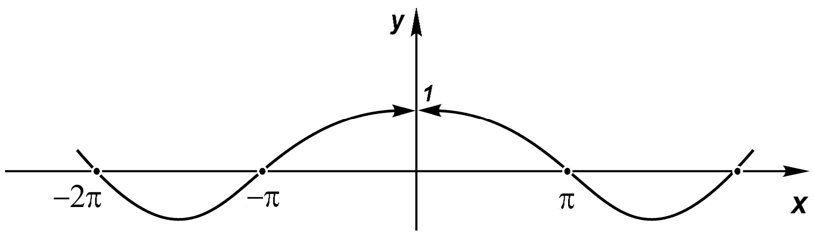

Рисунок 2.3 – Графік функції $y = \frac{\sin x}{x}$.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{при } x \neq 0 \\ 1 & \text{при } x \neq 0 \end{cases},$$

тобто у точці $x_0 = 0$ існують значення функції як граничної зліва і справа.

Приклад 2.5. Знайти точки розриву функції $y = \frac{1}{x}$, дослідити їх характер.

Розв’язання

$$\lim_{x \to 0+0} \frac{1}{x} = +\infty;$$

$$\lim_{x \to 0-0} \frac{1}{x} = -\infty.$$

Побудуємо графік (рис. 2.4).

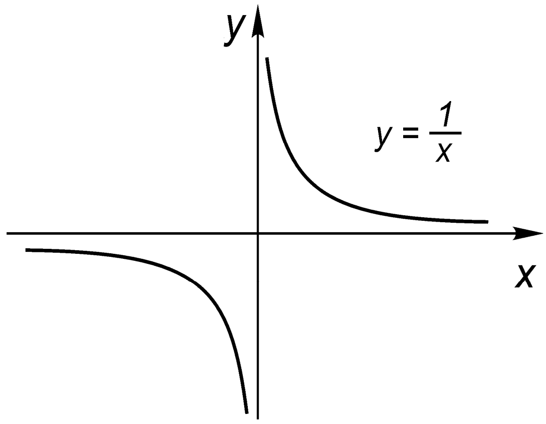

Рисунок 2.4 – Графік функції $y = \dfrac{1}{x}$.

$x = 0$ – точка розриву другого роду.

Приклад 2.6. Знайти точки розриву функції, $y = 2^{\frac{1}{x-3}}$ дослідити їх характер.

Розв'язання

$x = 3$ – точка розриву

Розглянемо границю зліва:

$$\lim_{x \to 3-0} y(x) = \lim_{x \to 3-0} 2^{\frac{1}{x-3}} = 2^{-\infty} = \frac{1}{2^{\infty}} = 0 .$$

Розглянемо границю справа:

$$\lim_{x \to 3+0} y(x) = \lim_{x \to 3+0} 2^{\frac{1}{x-3}} = 2^{\infty} = \frac{1}{2^{-\infty}} = \infty .$$

Побудуємо схематичний графік (рис. 2.5).

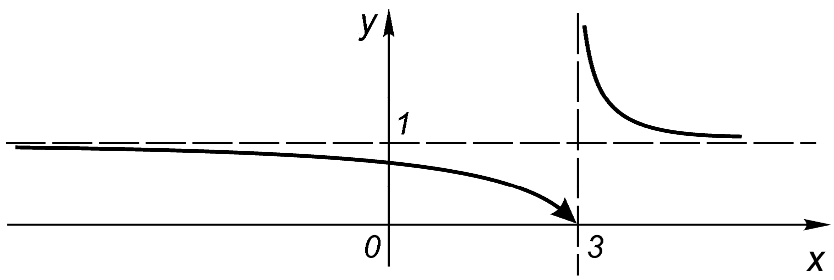

Рисунок 2.5 – Графік функції $y = 2^{\frac{1}{x-3}}$

Легко бачити, що точка $x = 3$ – точка розриву другого роду.

Приклад 2.7. Знайти точки розриву функції, дослідити їх характер.

$$f(x)=\begin{cases} x & \text{при } x<-2 \\ -x+1 & \text{при } -2\le x\le 1, \\ x^2-1 & \text{при } x>1 \end{cases}$$

Розв’язання

Розглянемо границі зліва і справа точок x = -2, і x = 1:

$$\lim_{x\to -2-0} f(x)=\lim_{x\to -2-0} x=-2;$$

$$\lim_{x\to -2+0} f(x)=\lim_{x\to -2+0} (-x+1)=3;$$

$$f(-2)=2+1=3;$$

$$f(-2-0)\ne f(-2+0).$$

Висновок: у точці x = *-2* існує розрив першого роду.

$$\lim_{x\to 1-0} f(x)=\lim_{x\to 1-0} (-x+1)=0;$$

$$\lim_{x\to 1+0} f(x)=\lim_{x\to 1+0} (x^2-1)=0;$$

$$f(1)=0;$$

$$f(1-0)=f(1+0)=f(1=0).$$

Висновок: у точці x = 1 функція неперервна.
Побудуємо графік (рис. 2.6).

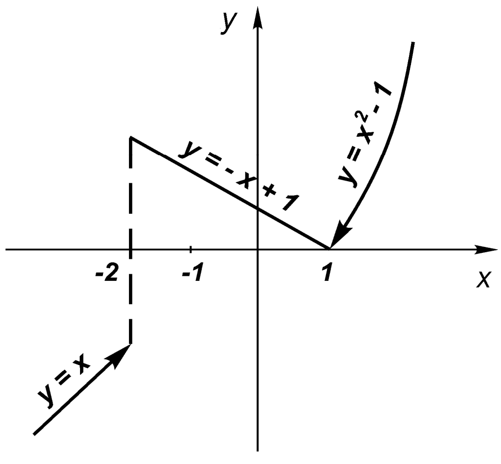

Рисунок 2.6 – Графік функції з прикладу 2.7

Властивості неперервних у точці функцій:

1 Алгебраїчна сума скінченої кількості неперервних функцій є функція неперервна.

2 Добуток скінченої кількості неперервних функцій є функція неперервна.

3 Частка двох неперервних функцій є функція неперервна, за умови, що знаменник є відмінним від нуля у відповідній точці.

4 Якщо функція $u = \varphi(x)$ неперервна в точці x_0, а функція $y = f(u)$ неперервна у відповідній точці $u_0 = \varphi(x_0)$, то складена функція $y = f[\varphi(x)]$ буде неперервною в точці x_0.

5 Будь-яка елементарна функція є неперервною в будь-якій точці області визначення.

2.2 Неперервність функції на інтервалі

Визначення 2.7. Функція $f(x)$ називається неперервною на інтервалі $(a;b)$, якщо вона неперервна в кожній точці цього інтервалу.

Визначення 2.8. Функція називається неперервною на відрізку $[a;b]$, якщо вона неперервна в кожній точці цього відрізка і неперервна в точці $x = a$ справа, і в точці $x = b$ зліва.

Визначення 2.9. Якщо для усіх $x \in [a;b]$ виконується нерівність $f(x) < f(x_1)$, де $x_1 \in [a;b]$, то $f(x_1) = M$ називається найбільшим значенням функції на відрізку.

Визначення 2.10. Якщо для усіх $x \in [a;b]$ виконується нерівність $f(x) \geq f(x_1)$, де $x_1 \in [a;b]$, то $f(x_1) = m$ називається найменшим значенням функції на відрізку.

Властивості неперервних на відрізку функцій:

1) якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a;b]$, то принаймні в одній точці цього відрізка вона приймає найбільше значення *M* і принаймні в одній точці – найменше значення m (теорема Вейєрштрасса);

2) нехай функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a;b]$ і на кінцях цього відрізка приймає значення різних знаків, тоді між точками a і b знайдеться принаймні одна точка $x = c$, у якій функція перетворюється на нуль: $f(c) = 0$, при $a < c < b$ (перша теорема Больцано-Коші);

3) якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a;b]$ і $f(a) = A$, $f(b) = B$, і $A \neq B$, то для будь-якого числа C, яке знаходиться між *A* і *B*, знайдеться принаймні одна точка $c \in [a;b]$ така, що $f(c) = C$ (друга теорема Больцано-Коші).

2.3 Асимптоти кривої

Визначення 2.11. Пряма *a* називається асимптотою кривої $y = f(x)$, якщо при наближенні точки, яка рухається вздовж кривої, до нескінченності відстань від точки кривої до цієї прямої наближається до нуля (рис. 2.7).

Асимптоти діляться на похилі і вертикальні.

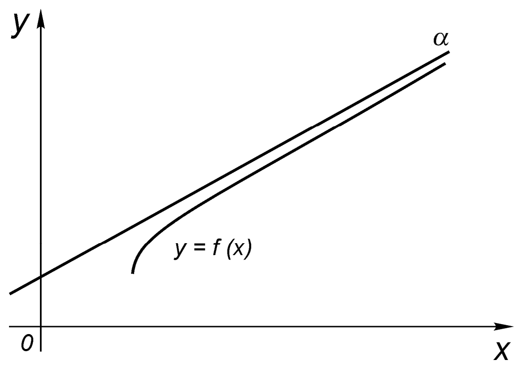

Рисунок 2.7

Визначення 2.12. Пряма $x = a$ називається вертикальною асимптотою кривої $y = f(x)$, якщо $\lim\limits_{x \to a \pm 0} f(x) = \pm\infty$.

Приклад 2.8. Знайти вертикальну асимптоту функції

$$y = \frac{1}{x}.$$

Розв'язання

Знайдемо $\lim\limits_{x \to +0} \frac{1}{x} = +\infty$, $\lim\limits_{x \to -0} \frac{1}{x} = -\infty$.

Висновок: $x = 0$ – вертикальна асимптота(рис. 2.4).

Приклад 2.9. Знайти вертикальну асимптоту функції

$$y = \log_a x$$

Розв'язання

Знайдемо $\lim\limits_{x \to 0} \log_a x = -\infty$.

Висновок: $x = 0$ – вертикальна асимптота (рис. 2.8)

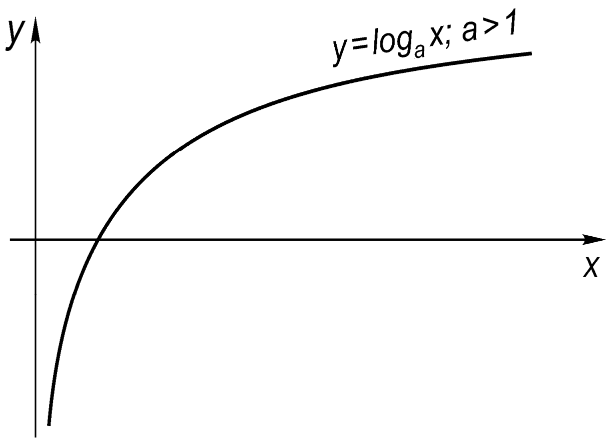

Рисунок 2.8 – Графік функції $y = \log_a x$.

Приклад 2.10. Знайти вертикальні асимптоти функції

$$y=\frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}$$

Розв'язання

Область визначення функції $x^2-1>0 \quad \Rightarrow \quad x^2>1; |x|>1$, або $x\in(-\infty;-1)\cup(1;+\infty)$ (рис. 2.9).

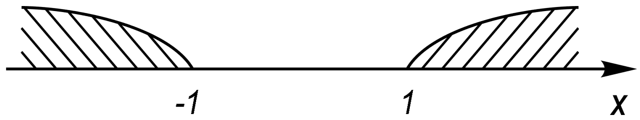

Рисунок 2.9

Знайдемо

$$\lim_{x\to-1-0}\frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}=+\infty\ , \qquad \lim_{x\to-1+0}\frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}=+\infty$$

Висновок: вертикальні асимптоти x = -1 і x = 1.

Рівняння похилої асимптоти будемо шукати у вигляді:

$$y=kx+b$$

де $k=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=0 \qquad\qquad b=\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-kx]=0$.

Якщо хоча б однієї з границь не існує, то крива похилої асимптоти не має.

Зауваження. Усі викладені вище міркування справедливі і при $x\to-\infty$. Випадки $x\to+\infty$ і $x\to-\infty$ варто розглядати окремо.

$$k_1=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=0 \qquad b_1=\lim_{x\to+\infty}[f(x)-k_1x]=0$$

$$k_2=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=0 \qquad b_2=\lim_{x\to-\infty}[f(x)-k_2x]=0$$

(тобто можливі лівостороння асимптота при $x\to-\infty$, і правостороння асимптота при $x\to+\infty$).

Якщо $k=0$, то

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}f(x),$$

тому $y=b$ – рівняння горизонтальної асимптоти. Оскільки це рівняння є окремим випадком загального рівняння прямої, то можна розрізняти не три, а два види асимптот: вертикальні і невертикальні.

Приклад 2.11. Знайти асимптоти кривої

$$y=\frac{x^3}{x^2-4x+3}$$

1 Знаходимо вертикальні асимптоти.
Знайдемо точки розриву.

$$x^2-4x+3=0 \qquad x_1=1; \quad x_2=3;$$

$$x^2-4x+3=(x-1)(x-3);$$

$$\lim_{x\to 1+0}\frac{x^3}{x^2-4x+3}=\lim_{x\to 1+0}\frac{x^3}{(x-1)(x-3)}=-\infty;$$

$$\lim_{x\to 1-0}\frac{x^3}{x^2-4x+3}=\lim_{x\to 1-0}\frac{x^3}{(x-1)(x-3)}=+\infty;$$

$$\lim_{x\to 3+0}\frac{x^3}{x^2-4x+3}=\lim_{x\to 3+0}\frac{x^3}{(x-1)(x-3)}=-\infty;$$

$$\lim_{x\to 3-0}\frac{x^3}{x^2-4x+3}=\lim_{x\to 3-0}\frac{x^3}{(x-1)(x-3)}=+\infty.$$

Маємо дві вертикальні асимптоти $x = 1$ і $x = 3$.
2 Знаходимо похилі асимптоти:

$$k_1=\lim_{x\to+\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3}{x^3-4x^2+3x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{1-\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}}=1;$$

$$b_1=\lim_{x\to+\infty}(y-k_1x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^3}{x^2-4x+3}-x\right)=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3-x^3+4x^2-3x}{x^2-4x+3}=\lim_{x\to+\infty}\frac{4x^2-3x}{x^2-4x+3}=$$

$$k_2=\lim_{x\to-\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{1-\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}}=1;$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{4-\frac{3}{x}}{1-\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}}=4;$$

$$b_2=\lim_{x\to-\infty}(y-k_2x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{4-\frac{3}{x}}{1-\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}}=4.$$

Маємо похилу асимптоту $y = x + 4$.

Приклад 2.12. Знайти асимптоти кривої

$$y = \frac{1}{1 - e^x}.$$

1 $x = 0$ – вертикальна асимптота, тому що

$$\lim_{x \to 0-0} \frac{1}{1 - e^x} = +\infty \ ;$$

$$\lim_{x \to 0+0} \frac{1}{1 - e^x} = -\infty \ ;$$

2 Похилі асимптоти:

а) $k_1 = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{y}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{(1 - e^x)x} = 0;$

$$b_1 = \lim_{x \to +\infty} (y - k_1 x) = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{1 - e^2} \right) = 0.$$

Висновок: при $x \to +\infty$ графік функції має горизонтальну асимптоту $y = 0$;

б) $k_2 = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{y}{x} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{(1 - e^x)x} = 0;$

$$b_2 = \lim_{x \to -\infty} (y - k_2 x) = \lim_{x \to -\infty} \left(\frac{1}{1 - e^2} \right) = 1.$$

Висновок: при $x \to -\infty$ графік функції має горизонтальну асимптоту $y = 1$.

Графік функції має дві горизонтальні асимптоти: лівосторонню y = 1 і правобічну y = 0.

~~2.4 Завдання для самостійної роботи~~

~~**1 Теоретичні питання** необхідно вивчити самостійно з використанням курсу лекцій та підручників.~~

~~1) Дати означення неперервності функції у точці.~~

~~2) Який розрив називається розривом першого роду?~~

~~3) Який розрив називається розривом другого роду?~~

~~4) Яка функція називається неперервною на проміжку?~~

~~5) Сформулювати властивості функцій, неперервних на відрізку. Самостійно або за допомогою лекцій з'ясувати геометричний зміст цих властивостей.~~

~~6) Що називається асимптотою кривої?~~

~~7) Як знайти вертикальну асимптоту?~~

~~8) Як знайти невертикальну асимптоту?~~