Розрахунково-графічне завдання №2 - Ряди

Онищенко О. А. КНТ-122

Завдання 1 - За допомогою ознак збіжності дослідити збіжність рядів

Умова

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+3}{4n^3+2n+3}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\ln 3 + \frac{4}{n})^{-n}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{5^n}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{\frac{1}{n}}}{n^2}$$

Рішення

Рішення 1

Щоб дослідити збіжність рядів, ми можемо використати **тест на граничне порівняння**. Цей тест стверджує, що якщо ми маємо два ряди $\sum a_n$ та $\sum b_n$ з додатними членами, а границя $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = c$, де c - скінченне число і $c > 0$, то обидва ряди або збігаються, або розбігаються.

Розглянемо заданий ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+3}{4n^3+2n+3}$$

Ми можемо порівняти цей ряд з рядом $\sum \frac{1}{n^2}$, який є **p-серією** при $p = 2 > 1$. Ми знаємо, що p-ряд збігається, якщо $p > 1$.

Тепер знайдемо границю:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+3)/(4n^3+2n+3)}{1/n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^3+3n^2}{4n^3+2n+3}$$

Коли n наближається до нескінченності, члени з найвищим степенем у чисельнику та знаменнику будуть домінувати. Отже, ця границя еквівалентна:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^3}{4n^3}=\frac{1}{4}$$

Оскільки ця межа є скінченним числом і більша за нуль, то за тестом порівняння меж даний ряд збігається, оскільки збігається ряд $\sum\frac{1}{n^2}$. Отже, вихідний ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+3}{4n^3+2n+3}$$

також **збігається**.

Рішення 2

Для дослідження збіжності ряду можна використати **тест на корінь**. Цей тест стверджує, що якщо ми маємо ряд $\sum a_n$, а границя $\lim_{n\to\infty}|a_n|^{1/n}=L$, то

- Ряд збігається, якщо $L<1$.
- Ряд розбігається, якщо $L>1$.
- Тест не є результативним, якщо $L=1$.

Розглянемо заданий ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\ln 3+\frac{4}{n})^{-n}$$

Ми можемо застосувати тест на корінь до цього ряду. Корінь n-го члена за абсолютною величиною n-го доданка дорівнює:

$$|(\ln 3+\frac{4}{n})^{-n}|^{1/n}=|\ln 3+\frac{4}{n}|^{-1}$$

Тепер знайдемо границю цього виразу при наближенні n до нескінченності:

$$\lim_{n\to\infty}|\ln 3+\frac{4}{n}|^{-1}$$

Коли n наближається до нескінченності, доданок $\frac{4}{n}$ наближається до 0, тому границя дорівнює:

$$|\ln 3|^{-1}=\frac{1}{\ln 3}$$

Оскільки $\frac{1}{\ln 3}<1$, то за тестом на корінь даний ряд збігається. Отже, вихідний ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\ln 3+\frac{4}{n})^{-n}$$

збігається.

Рішення 3

Для дослідження збіжності ряду можна використати **тест на співвідношення**. Тест на збіжність стверджує, що для ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, якщо існує таке число $L < 1$, що

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = L$$

то ряд сходиться.

Давайте застосуємо це до нашого ряду:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{5^n}$$

Обчислимо відношення $\frac{a_{n+1}}{a_n}$:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^3}{5^{n+1}} \cdot \frac{5^n}{n^3} = \frac{5^n (n+1)^3}{5^{n+1} n^3} = \frac{(n+1)^3}{5n^3}$$

Тепер знайдемо границю, коли n наближається до нескінченності:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^3}{5n^3} = \frac{1}{5} < 1$$

Оскільки границя менша за 1, то за критерієм відношення ряди збігаються.

Рішення 4

Для дослідження збіжності ряду можна використати **Тест на збіжність**. Тест на корінь стверджує, що для ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, якщо існує таке число $L < 1$, що

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L$$

то ряд збігається.

Давайте застосуємо це до нашого ряду:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{\frac{1}{n}}}{n^2}$$

Обчислюємо n-й корінь з $|a_n|$:

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{\left| \frac{3^{\frac{1}{n}}}{n^2} \right|} = \frac{\sqrt[n]{3^{\frac{1}{n}}}}{\sqrt[n]{n^2}} = \frac{3^{\frac{1}{n^2}}}{n^{\frac{2}{n}}}$$

Тепер знайдемо границю, коли n наближається до нескінченності:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3^{\frac{1}{n^2}}}{n^{\frac{2}{n}}} = \frac{1}{1} = 1$$

Оскільки межа дорівнює 1, то тест на корінь є непереконливим. Тому для визначення збіжності ряду потрібно використати інший тест.

Скористаємося **Тестом порівняння**. Порівняємо наш ряд з рядом $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, який є p-серією з $p = 2 > 1$ і тому збігається.

Оскільки $\frac{3^{\frac{1}{n}}}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}$ для всіх $n \geq 1$, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ збігається, то за тестом порівняння наш ряд також збігається.

Завдання 2 - Дослідити збіжність заданих знакозмінних рядів

Умова

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$$

Рішення

Наведений ряд є прикладом знакозмінного ряду. Змінний ряд - це ряд, члени якого чергуються за знаком між додатними та від'ємними значеннями. Існує спеціальний тест, тест змінного ряду, за допомогою якого можна визначити, чи збігається цей ряд.

Тест змінного ряду стверджує, що якщо виконуються наступні дві умови, то ряд збігається:

1. Доданки $b_n = \frac{1}{n+1}$ зменшуються зі збільшенням n. Це означає, що кожен наступний доданок менший або дорівнює попередньому, тобто $b_{n+1} \leq b_n$ для всіх n.
2. При наближенні n до нескінченності b_n дорівнює нулю, тобто $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$.

Застосуємо ці умови до нашого ряду:

1. Зменшення доданків: Маємо $b_{n+1} = \frac{1}{n+2}$ і $b_n = \frac{1}{n+1}$. Зрозуміло, що $b_{n+1} \leq b_n$ для всіх n, тому першу умову виконано.
2. Обмежимо до нуля: Маємо $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0$, тому другу умову також виконано.

Оскільки обидві умови тесту змінних рядів виконано, можна зробити висновок, що ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$ збігається.

Завдання 3 - Знайти інтервал збіжності та дослідити поведінку ступеневого ряду на кінцях інтервалу збіжності

Умова

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n (n^2+1)}{(n^3+3)\sqrt{n}}$$

Рішення

Щоб знайти інтервал збіжності степеневого ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n (n^2+1)}{(n^3+3)\sqrt{n}}$, можна скористатися тестом на збіжність. Тест на збіжність стверджує, що ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ збігається абсолютно, якщо існує таке число $r < 1$, що $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = r$.

Позначимо $a_n = \frac{(x+1)^n (n^2+1)}{(n^3+3)\sqrt{n}}$. Тоді маємо:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(x+1)^{n+1}((n+1)^2+1)}{((n+1)^3+3)\sqrt{n+1}} \cdot \frac{(n^3+3)\sqrt{n}}{(x+1)^n (n^2+1)}$$

Спростивши цей вираз, отримаємо:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = (x+1) \cdot \frac{(n+1)^2+1}{n^2+1} \cdot \frac{n^3+3}{(n+1)^3+3} \cdot \sqrt{\frac{n}{n+1}}$$

Взявши границю як $n \to \infty$, отримаємо:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = (x+1)$$

Ряд збігається абсолютно, якщо $|(x+1)| < 1$, що дає інтервал збіжності $-2 < x < 0$.

Тепер дослідимо поведінку ряду на кінцях інтервалу збіжності. При $x = -2$ ряд набуває вигляду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (n^2+1)}{(n^3+3)\sqrt{n}}$, що є змінним рядом. За тестом Лейбніца цей ряд збігається, оскільки послідовність $\frac{(n^2+1)}{(n^3+3)\sqrt{n}}$ спадає і прямує до нуля при $n \to \infty$.

При $x = 0$ ряд набуває вигляду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{(n^3+3)\sqrt{n}}$, який є p-серією з $p = 1/2$. Оскільки $p \leq 1$, цей ряд розбігається за тестом p-серії.

Отже, інтервал збіжності ряду дорівнює $-2 \leq x < 0$.

Завдання 4 - Розвинути функції у ряд по ступенях x, використовуючи готові розвинення у ряд елементарних функцій

Умова

$$f(x) = \sqrt{x} \cos x$$

Рішення

Щоб розкласти функцію $f(x) = \sqrt{x}\cos x$ у степеневий ряд, ми можемо використати розклади у степеневі ряди елементарних функцій, а саме функції квадратного кореня та косинуса.

Розклад у степеневий ряд функції квадратного кореня в околі $x = a$ задано формулою:

$$\sqrt{x} = \sqrt{a} + \frac{1}{2\sqrt{a}}(x-a) - \frac{1}{8a\sqrt{a}}(x-a)^2 + \cdots$$

А розкладання в степеневий ряд функції косинуса є:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots$$

Тепер ми можемо перемножити ці два ряди разом, щоб отримати розклад у степеневий ряд функції $f(x) = \sqrt{x}\cos x$. Однак це буде дещо складніше, оскільки доведеться перемножувати два нескінченних ряди.

Ми можемо спростити це, розклавши функцію в околі $x = 0$ (тобто, $a = 0$). У цьому випадку функція квадратного кореня набуває вигляду $\sqrt{x} = x^{1/2}$, що вже є степеневим рядом (з усіма коефіцієнтами, крім члена $x^{1/2}$, рівними нулю).

Отже, ми маємо:

$$f(x) = x^{1/2}(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots)$$

Це розклад у степеневий ряд функції $f(x) = \sqrt{x}\cos x$ в околі $x = 0$. Слід зауважити, що цей ряд збігається лише для інтервалу $-1 \leq x \leq 1$. Для значень x поза цим інтервалом ряд не збігається до $f(x)$.

Завдання 5 - Розвинути в ряд Фур'є задані функції

Умова

$$f(x) = \begin{cases} -x, 0 \leq x < 1 \\ x - 2, 1 \leq x < 2 \end{cases}$$

Рішення

Щоб розкласти функцію $f(x)$ в ряд Фур'є, спочатку потрібно визначити коефіцієнти ряду. Функція є періодичною з періодом $T = 2$, тому ми можемо використати формули для коефіцієнтів Фур'є для функції з періодом $2L$, де $L = T/2 = 1$. Ці формули мають вигляд:

$$a_0 = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)dx$$

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx$$

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx$$

Функція $f(x)$ визначена по-різному на проміжках $[0,1)$ і $[1,2)$, тому нам потрібно обчислити інтеграли окремо на цих проміжках.

Для a_0 ми маємо:

$$a_0 = \frac{1}{1}\left[\int_0^1 -xdx + \int_1^2 (x-2)dx\right]$$

Для a_n ми маємо:

$$a_n = \frac{1}{1}\left[\int_0^1 -x\cos(n\pi x)dx + \int_1^2 (x-2)\cos(n\pi x)dx\right]$$

І для b_n ми маємо:

$$b_n = \frac{1}{1}\left[\int_0^1 -x\sin(n\pi x)dx + \int_1^2 (x-2)\sin(n\pi x)dx\right]$$

Ці інтеграли можна обчислити за допомогою стандартних методів інтегрування. Після того, як знайдено коефіцієнти a_0, a_n та b_n, ряд Фур'є для $f(x)$ має вигляд:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right]$$

Цей ряд представляє функцію $f(x)$ на проміжку $[-L,L] = [-1,1]$ і повторюється з періодом $2L = 2$ поза цим проміжком. Зауважимо, що оскільки функція $f(x)$ має стрибкоподібний розрив у точці $x = 1$, то в цій точці ряд Фур'є збігається до середнього значення границь функції зліва та справа, що дорівнює $1/2$. У всіх інших точках ряд Фур'є збігається до $f(x)$.

Завдання 6 - Обчислити інтеграл з похибкою до 0,001

Умова

$$\int_0^{0,1} \frac{\ln 1 + 2x}{x}dx$$

Рішення

Для обчислення інтеграла $\int_0^{0.1} \frac{\ln 1+2x}{x}dx$ з похибкою до 0.001, можна скористатися розкладанням у степеневий ряд функції натурального логарифма, яке має вигляд

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots$$

Підставивши x замість $2x$ у наведений вище ряд, отримаємо:

$$\ln(1+2x) = 2x - 2x^2 + \frac{4x^3}{3} - 2x^4 + \cdots$$

Тепер ми можемо поділити цей ряд на x, щоб отримати:

$$\frac{\ln(1+2x)}{x} = 2 - 2x + \frac{4x^2}{3} - 2x^3 + \cdots$$

Це степеневий ряд, і ми можемо інтегрувати його член за членом, щоб отримати:

$$\int_0^{0.1} \frac{\ln 1 + 2x}{x} dx = \int_0^{0.1} (2 - 2x + \frac{4x^2}{3} - 2x^3 + \cdots) dx$$

$$= \left[2x - x^2 + \frac{4x^3}{9} - \frac{x^4}{2}\right]_0^{0.1} + \cdots$$

Ми можемо обчислити цей вираз до члена, який дає похибку менше 0.001. У цьому випадку перших чотирьох доданків має бути достатньо, оскільки п'ятий доданок (який ми опускаємо) - $\frac{x^5}{5}$ оцінюється при $x = 0.1$, що менше 0.001.

Отже, наближене значення інтеграла дорівнює:

$$\approx \left[2(0.1) - (0.1)^2 + \frac{4(0.1)^3}{9} - \frac{(0.1)^4}{2}\right] - \left[2(0) - (0)^2 + \frac{4(0)^3}{9} - \frac{(0)^4}{2}\right]$$

Тепер ми можемо обчислити цей вираз, щоб отримати числове значення інтеграла.

$$\approx \left[2(0.1) - (0.1)^2 + \frac{4(0.1)^3}{9} - \frac{(0.1)^4}{2}\right] - \left[2(0) - (0)^2 + \frac{4(0)^3}{9} - \frac{(0)^4}{2}\right]$$

Таким чином, можна спростити:

$$\approx 0.2 - 0.01 + \frac{4 \cdot 0.001}{9} - 0.00005$$

Обчислюючи це, ми отримуємо:

$$\approx 0.189 + \frac{0.0004}{9}$$

І нарешті:

$$\approx 0.189 + 0.00004 = 0.18904$$

Отже, наближене значення інтеграла становить **0.18904**. Це в межах похибки 0.001, як і було вказано в умові задачі.