МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Національний університет "Запорізька політехніка"

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

та розрахунково-графічні завдання для контрольної роботи з вищої математики за темами: інтегральне числення, диференціальні рівняння, теорія рядів

для студентів технічних спеціальностей заочної форми навчання

2023

Методичні вказівки та розрахунково-графічні завдання для контрольної роботи з вищої математики за темами: інтегральне числення, диференціальні рівняння, теорія рядів для студентів технічних спеціальностей заочної форми навчання / Укл.: І.С. Пожуєва, Т.І. Левицька, Г.А. Шишканова. – Запоріжжя: НУ «Запорізька політехніка», 2023. – 88 с.

Містить розрахунково-графічні завдання, теоретичні відомості та приклади виконання завдань з курсу "Вища математика" за темами: інтегральне числення, диференціальні рівняння, теорія рядів для студентів технічних спеціальностей заочної форми навчання.

Експерт
спеціальності: М.М. Касьян, доцент, к.т.н.

Рецензент: О.В. Коротунова, доцент, к.т.н.

Відповідальний
за випуск: І.С. Пожуєва, доцент, к.т.н.

Рекомендовано до видання НМК
факультету КНТ НУ «Запорізька
політехніка»,
Протокол № 1 від 31.08.2023

Затверджено на засіданні кафедри
прикладної математики НУ
«Запорізька політехніка»,
Протокол № 1 від 14.08.2023

ЗМІСТ

.

1 ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ

1.1 Інтегральне числення

1.1.1 Первісна. Невизначений інтеграл.

Функція $F(x)$ називається *первісною* функції $f(x)$ на деякому проміжку, якщо вона диференційована в кожній внутрішній точці цього проміжку, причому $F'(x) = f(x)$ **.**

<u>Теорема.</u> Якщо $F(x)$ - первісна функції $f(x)$ на $[a, b]$, то всяка інша первісна функції $f(x)$ на цьому проміжку має вигляд $F(x) + C$, де C - стала величина.

Сукупність усіх первісних функції $f(x)$ називається невизначеним інтегралом функції $f(x)$ і позначається $\int f(x)\,dx$. Тобто за означенням і попередньою теоремою маємо:

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C ,$$

де $F(x)$ – деяка первісна функції $f(x)$, C – довільна стала.

Операцію знаходження невизначеного інтеграла від даної функції, що є оберненою до операції диференціювання, називають інтегруванням.

Основні властивості:

1. $\left(\int f(x)\,dx\right)' = f(x)$
2. $\int dF(x) = \int F'(x)\,dx = F(x) + C$
3. $\int kf(x)\,dx = k\int f(x)\,dx \quad , \ \forall k \in R$
4. $\int (f_1(x) \pm f_2(x))\,dx = \int f_1(x)\,dx \pm \int f_2(x)\,dx$
5. Якщо $\int f(x)\,dx = F(x) + C$ і $u = \varphi(x)$ - довільна функція, що має неперервну похідну, то $\int f(u)\,du = F(u) + C$.

Таблиця основних інтегралів

1. $\int u^{\alpha} du = \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c$, $\alpha \neq -1$

2. $\int \frac{du}{u} = \ln|u| + c$

3. $\int a^{u} du = \frac{a^{u}}{\ln a} + c$

4. $\int e^{u} du = e^{u} + c$

5. $\int \sin u \, du = -\cos u + c$

6. $\int \cos u \, du = \sin u + c$

7. $\int shu \, du = chu + c$

8. $\int chu \, du = shu + c$

9. $\int \frac{du}{\cos^2 u} = tgu + c$

10. $\int \frac{du}{\sin^2 u} = -ctgu + c$

11. $\int \frac{du}{ch^2 u} = thu + c$

12. $\int \frac{du}{sh^2 u} = -cthu + c$

13. $\int \frac{du}{u^2 + a^2} = \frac{1}{a} arctg \frac{u}{a} + c$

14. $\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \arcsin \frac{u}{a} + c$

15. $\int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{u-a}{u+a}\right| + c$

16. $\int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \ln\left|u + \sqrt{u^2 \pm a^2}\right| + c$

1.1.2 Техніка інтегрування

<u>**Метод безпосереднього інтегрування**</u> - це обчислення інтеграла за допомогою основних властивостей невизначеного інтеграла і таблиці інтегралів.

Приклад:

$$\int\left(3x+\sqrt{x}-\frac{7}{x}\right)dx=\int 3x\,dx+\int\sqrt{x}\,dx-\int 7\frac{dx}{x}=$$

$$=3\int x\,dx+\int x^{\frac{1}{2}}dx-7\int\frac{dx}{x}=3\cdot\frac{x^2}{2}+\frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}-7\ln|x|+c=$$

$$=\frac{3}{2}x^2+\frac{2}{3}x\sqrt{x}-7\ln|x|+c$$

<u>**Метод заміни змінної**</u> **-** ґрунтується на правилі диференціювання складної функції. Скористаємося властивістю інваріантності форми першого диференціала щодо заміни незалежної змінної, відповідно до якої формула $dF=F'(x)dx$ залишається справедливою, як у тому випадку, коли $x-$ незалежна змінна, так і тоді, коли $x-$ диференційована функція іншої незалежної змінної $x=\varphi(t)$. В останньому випадку:

$$dF=F'(\varphi(t))\varphi'(t)dt\ .$$

Якщо при цьому функція $F(x)$ є первісною для функції $f(x)$, тобто $F'(x)=f(x)$, то отримаємо:

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt=F(\varphi(t))+C$$

Ця формула виражає ідею методу заміни змінної: спробувати виділити в підінтегральному виразі деяку функцію і її диференціал, що потім позначається як нова змінна, так що інтеграл по цій новій змінній вже є табличним або обчислюється легко.

Розрізняють, введення функції під знак диференціала, при якому необхідно користуватися формулою $d(u(x))=u'(x)\,dx$.

Приклади: знайти інтеграли введенням функції під знак диференціалу.

1) $\int \frac{dx}{4+(6x+5)^2} = \frac{1}{6}\int \frac{d(6x+5)}{2^2+(6x+5)^2} = \frac{1}{12} arctg\frac{6x+5}{2} + C$.

2) $\int \frac{xdx}{x^2+6} = \frac{1}{2}\int \frac{2xdx}{x^2+6} = \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2+6)}{x^2+6} = \frac{1}{2}\ln(x^2+6) + C$.

3) $\int (7x^2+4)^3 xdx = \frac{1}{14}\int (7x^2+4)^3 d(7x^2+4) = \frac{1}{56}(7x^2+4)^4 + C$.

Приклади: знайти інтеграли методом заміни змінної.

1) $\int x\sqrt{1+x}\,dx$.

Зробимо заміну $\sqrt{1+x} = t$. Звідки $1+x = t^2$, $x = t^2 - 1$. $dx = d(t^2-1) = (t^2-1)'\,dt = 2t\,dt$. Переходячи в інтегралі до нової змінної, будемо мати:

$$\int x\sqrt{1+x}\,dx = \int (t^2-1)\,t\cdot 2t\,dt = 2\int (t^4 - t^2)\,dt =$$

$$= 2\left(\frac{t^5}{5} - \frac{t^3}{3}\right) + c = \left| t = \sqrt{1+x} \right| = 2\left(\frac{\sqrt{(1+x)^5}}{5} - \frac{\sqrt{(1+x)^3}}{3}\right) + c$$

2) $\int \frac{(7\ln x+4)^3}{x}dx = \frac{1}{7}\int (7\ln x+4)^3 \frac{7}{x}dx = \begin{vmatrix} 7\ln x+4=t \\ \frac{7}{x}dx = dt \end{vmatrix} =$

$$= \frac{1}{7}\int t^3 dt = \frac{1}{7}\cdot\frac{t^4}{4} + c = \frac{(7\ln x+4)^4}{28} + c .$$

Метод підстановки - цей метод відрізняється від попереднього тим, що ми не знаходимо в підінтегральному виразі функцію і її похідну для того, щоб замінити цю функцію новою змінною, а самі вводимо нову змінну так, щоб після такої підстановки отримати табличний інтеграл за новою змінною.

Нехай потрібно обчислити інтеграл $I = \int f(x)dx$ і нехай $x = \varphi(t)$, де $\varphi(t)$ – деяка строго монотонна й диференційована функція, так що існує обернена для неї функція $t = \omega(x)$. Тоді підінтегральний вираз можна переписати так:

$$I=\int f(x)dx=\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt=\int u(t)dt=U(t)+C=U(\omega(x))+C\ .$$

Цей ланцюжок формул і називається схемою інтегрування методом підстановки.

Приклад:

$$\int\sqrt{1-x^2}\,dx=\left|\begin{array}{l}x=\sin t\\ dx=d(\sin t)=\cos t dt\\ \sqrt{1-x^2}=\sqrt{1-\sin^2 t}=\cos t\end{array}\right|=\int\cos^2 t\,dt=$$

$$=\frac{1}{2}\int(1+\cos 2t)\,dt=\frac{1}{2}\left(t+\frac{1}{2}\int\cos 2t\,d(2t)\right)=$$

$$=\frac{1}{2}(t+\frac{1}{2}\sin 2t)+c=\left|\begin{array}{l}\sin 2t=2\sin t\cdot\cos t=\\ =2\sin t\cdot\sqrt{1-\sin^2 t}=\\ =2x\sqrt{1-x^2},\ t=\arcsin x\end{array}\right|=$$

$$=\frac{1}{2}\arcsin x+\frac{1}{4}\cdot 2x\sqrt{1-x^2}+c=\frac{1}{2}(\arcsin x+x\sqrt{1-x^2})+c$$

<u>Інтегрування частинами.</u> Нехай маємо дві диференційовані функції $u(x)$ та $v(x)$. Тоді з правила диференціювання добутку двох функцій отримується формула:

$$\int u\,dv=uv-\int v\,du\ ,$$

яка має назву формули інтегрування частинами. Щоб скористатись цією формулою необхідно деяку частину підінтегрального виразу позначити через функцію u , а все що залишилося через $d\,v$. Далі знаходять $d\,u=u'_x\,dx$ та $v=\int d\,v$.

Приклад: $$\int arctgx\,dx=\left|\begin{array}{ll}u=arctgx & dv=dx\\ du=\dfrac{1}{1+x^2}dx & v=\int dx=x\end{array}\right|=$$

$$=arctgx\cdot x-\int\frac{xdx}{1+x^2}=x\cdot arctgx-\tfrac{1}{2}\int\frac{d(1+x^2)}{1+x^2}=$$

$$= x \cdot arctgx - \frac{1}{2}\ln(1 + x^2) + c$$

У деяких випадках для обчислення інтеграла формула інтегрування частинами застосовується кілька разів.

Приклад:

$$\int x^2 e^{-x} dx = \left| \begin{matrix} u = x^2 & dv = e^{-x} dx \\ du = 2xdx & v = \int e^{-x} dx = -\int e^{-x} d(-x) = -e^{-x} \end{matrix} \right| =$$

$$= -x^2 e^{-x} + \int 2xe^{-x} dx = \left| \begin{matrix} u = x & dv = e^{-x} dx \\ du = dx & v = -e^{-x} \end{matrix} \right| =$$

$$= -x^2 e^{-x} + 2(-xe^{-x} + \int e^{-x} dx) = -x^2 e^{-x} - 2xe^{-x} - 2e^{-x} + c =$$

$$= -e^{-x}(x^2 + 2x + 2) + c$$

1.1.3 Інтегрування виразів, що містять квадратний тричлен

До цього класу інтегралів відносяться:

$$J_1 = \int \frac{dx}{ax^2 + bx + c}, \quad J_2 = \int \frac{Ax + B}{ax^2 + bx + c} dx,$$

$$J_3 = \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}, \quad J_4 = \int \frac{Ax + B}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx,$$

де A, B, a, b, c - деякі сталі.

Інтеграли J_1, J_3 за допомогою виділення повного квадрата у квадратному тричлені зводять до табличного, наприклад:

Приклад: $$\int \frac{dx}{x^2 + 2x + 5} = \int \frac{dx}{(x+1)^2 + 4} = \left| \begin{matrix} u = x + 1 \\ du = dx \end{matrix} \right| = \int \frac{du}{u^2 + 4} =$$

$$= \frac{1}{2} arctg \frac{u}{2} + c = \frac{1}{2} arctg \frac{x+1}{2} + c \ .$$

Щоб знайти інтеграли J_2, J_4 необхідно у чисельнику підінтегрального виразу виділити похідну квадратного тричлена знаменника, тобто вираз $2ax + b$. Далі почленно поділивши чисельник на знаменник, переходять до двох інтегралів. У першому інтегралі замість виразу $(2ax+b)dx$ записують $d(ax^2+bx+c)$ та отримують табличний інтеграл. Другий інтеграл – це інтеграл вигляду J_1 чи J_3 .

Приклад:

$$\int \frac{5x-3}{\sqrt{2x^2+4x-5}}dx = \left| \begin{matrix} (2x^2+4x-5)' = 4x+4 \\ d(2x^2+4x-5) = (4x+4)dx \end{matrix} \right| =$$

$$= \int \frac{\frac{5}{4}(4x+4) - \frac{5}{4}\cdot 4 - 3}{\sqrt{2x^2+4x-5}}dx = \frac{5}{4}\int \frac{4x+4}{\sqrt{2x^2+4x-5}}dx -$$

$$-8\int \frac{dx}{\sqrt{2x^2+4x-5}} = \frac{5}{4}\int \frac{d(2x^2+4x-5)}{\sqrt{2x^2+4x-5}} - 8\int \frac{dx}{\sqrt{2}\sqrt{x^2+2x-\frac{5}{2}}}$$

$$= \left| \begin{matrix} \int \frac{du}{\sqrt{u}} = 2\sqrt{u}+c \\ u = 2x^2+4x-5 \end{matrix} \right| = \frac{5}{4}\cdot 2\sqrt{2x^2+4x-5} -$$

$$-4\sqrt{2}\int \frac{dx}{\sqrt{(x+1)^2-1-\frac{5}{2}}} = \left| \begin{matrix} \int \frac{du}{\sqrt{u^2-a^2}} = \ln\left|u+\sqrt{u^2-a^2}\right| + c \\ u = x+1 \end{matrix} \right|$$

$$= \frac{5}{2}\sqrt{2x^2+4x-5} - 4\sqrt{2}\ln\left|x+1+\sqrt{x^2+2x-\frac{5}{2}}\right| + c$$

1.1.4 Інтегрування раціональних функцій

Інтеграли від раціональних функцій завжди виражаються через елементарні функції.

Нехай треба знайти інтеграл виду:

$$\int \frac{P_m(x)}{Q_n(x)}dx \ ,$$

де $P_m(x)$ – багаточлен степеня m , $Q_n(x)$ – багаточлен степеня n .

Дріб називається правильним, якщо $m<n$ і неправильним, коли $m \geq n$. Якщо дріб неправильний, тоді виконавши ділення, дістанемо:

$$\int \frac{P_m(x)}{Q_n(x)}dx = \int W_k(x)dx + \int \frac{R_p(x)}{Q_n(x)}dx \quad ,$$

де $W_k(x)$ - багаточлен степеня $k = m - n$, $R_p(x)$ - степеня $p < n$

Інтеграли від $W_k(x)$ знаходять безпосередньо, а інтеграл від правильного раціонального дробу зводять до суми інтегралів від елементарних дробів:

1) $\dfrac{A}{x-a}$; 2) $\dfrac{A}{(x-a)^k}$, $k \geq 2$; 3) $\dfrac{Ax+B}{x^2+px+q}$, $p^2-4q<0$;

4) $\dfrac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k}$, $k \geq 2$, $p^2-4q<0$.

Правильний раціональний дріб можна представити у вигляді:

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = \frac{A_1}{x-a} + \ldots + \frac{A_k}{(x-a)^k} + \ldots + \frac{B_1x+C_1}{x^2+px+q} + \ldots + \frac{B_lx+C_l}{(x^2+px+q)^l}$$

Для знаходження невизначених коефіцієнтів $A_1, A_2, \ldots, B_l, C_l$ праву частину приводять до спільного знаменника і прирівнюють чисельники початкового та одержаного дробу. Далі користуються методом порівняння коефіцієнтів при однакових степенях x або підстановкою окремих значень.

Приклади:

1). $\displaystyle\int \frac{2x^3+1}{x(x^2+1)}dx$, маємо неправильний раціональний дріб, тому виділимо цілу частину, виконавши ділення:

$$\begin{array}{r|l} 2x^3+1 & x^3+x \\ \cline{2-2} \underline{2x^3+2x} & \quad 2 \\ -2x+1 & \end{array}$$

, тоді:

$$\int \frac{2x^3+1}{x(x^2+1)}dx = \int\left(2 + \frac{-2x+1}{x(x^2+1)}\right)dx = 2x - \int \frac{2x-1}{x(x^2+1)}dx$$

Правильний дріб розкладемо на суму елементарних дробів.

$$\frac{2x-1}{x(x^2+1)}=\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2+1}=\frac{A(x^2+1)+(Bx+C)x}{x(x^2+1)}=$$

$$=\frac{Ax^2+A+Bx^2+Cx}{x(x^2+1)}=\frac{(A+B)x^2+Cx+A}{x(x^2+1)}$$

З порівняння маємо: $2x-1=(A+B)x^2+Cx+A$

$$\begin{array}{c|l} x^2 & A+B=0 \\ x^1 & \quad C=2 \\ x^0 & \quad A=-1 \end{array}$$

Звідсіль маємо: $A=-1$, $B=1$, $C=2$.

$$\int\frac{2x-1}{x(x^2+1)}dx=\int\left(-\frac{1}{x}+\frac{x+2}{x^2+1}\right)dx=-\int\frac{dx}{x}+\int\frac{xdx}{x^2+1}+$$

$$+2\int\frac{dx}{x^2+1}=-\ln|x|+\frac{1}{2}\int\frac{d(x^2+1)}{x^2+1}+2arctgx=$$

$$=-\ln|x|+\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+2arctgx+c$$

Остаточно отримуємо:

$$\int\frac{2x^3+1}{x(x^2+1)}dx=2x+\ln|x|-\frac{1}{2}\ln(x^2+1)-2arctgx+c$$

2). $\displaystyle\int\frac{x+3}{(x-1)(x^2-5x+4)}dx$

$$\frac{x+3}{(x-1)(x^2-5x+4)}=\frac{x+3}{(x-1)^2(x-4)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{C}{x-4}=$$

$$=\frac{A(x-1)(x-4)+B(x-4)+C(x-1)^2}{(x-1)^2(x-4)}$$

$$x+3=A(x-1)(x-4)+B(x-4)+C(x-1)^2$$

$$\begin{array}{c|ccc} x=1 & 4=-3B & , & B=-4/3 \\ x=4 & 7=9C & , & C=7/9 \\ x^2 & 0=A+C & , & A=-C=-7/9 \end{array}$$

$$\int \frac{x+3}{(x-1)(x^2-5x+4)}dx = -\frac{7}{9}\int \frac{dx}{x-1} - \frac{4}{3}\int \frac{dx}{(x-1)^2} + \frac{7}{9}\int \frac{dx}{x-4} =$$

$$= -\frac{7}{9}\ln|x-1| + \frac{4}{3}\cdot\frac{1}{x-1} + \frac{7}{9}\ln|x-4| + c$$

1.1.5 Інтегрування тригонометричних функцій

1. $\int R(\sin x, \cos x)dx$,

де $R(\sin x, \cos x)$ - раціональна функція від $\sin x$ та $\cos x$.

Універсальна тригонометрична підстановка :

$tg\frac{x}{2} = t$, звідки $x = 2arctgt$, $dx = \dfrac{2}{1+t^2}dt$,

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2} \quad , \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \quad .$$

Приклад:

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \left| \, tg\tfrac{x}{2} = t \, \right| = \int \frac{dt}{t} = \ln|\, t \,| + c = \ln\left| \, tg\tfrac{x}{2} \, \right| + c \; .$$

Ця підстановка завжди раціоналізує інтеграл $\int R(\sin x, \cos x)dx$, але часто приводить до раціональних дробів з великими степенями. В окремих випадках можна застосувати інші простіші методи.

2. $\int R(\sin x)\cos x dx = \begin{vmatrix} \sin x = t \\ \cos x dx = dt \end{vmatrix} = \int R(t)dt$

$$\int R(\cos x)\sin x dx = \begin{vmatrix} \cos x = t \\ -\sin x dx = dt \end{vmatrix} = -\int R(t)dt$$

$$\int R(tgx)dx = \begin{vmatrix} tgx = t \; , x = arctgt \\ dx = \dfrac{1}{1+t^2}dt \end{vmatrix} = \int R(t)\frac{dt}{1+t^2}$$

$\int R\left(\sin^{2n} x, \cos^{2m} x \right)dx$ (n чи m – від’ємне)=

$$=\left|\begin{matrix} tgx=t\ ,x=arctgt\ ,dx=\dfrac{dt}{1+t^2} \\ \cos^2 x=\dfrac{1}{1+t^2}\ ,\sin^2 x=\dfrac{t^2}{1+t^2} \end{matrix}\right| = \int R\left(\left(\frac{t^2}{1+t^2}\right)^n,\left(\frac{1}{1+t^2}\right)^m\right)\cdot\frac{dt}{1+t^2} \ .$$

Приклади:

$$1)\int \sin^3 x\cos x dx = \left|\ \sin x = t\ \right| = \int t^3 dt = \frac{t^4}{4}+c=\frac{\sin^4 x}{4}+c$$

$$2)\int \frac{dx}{5-\cos^2 x} = \left|\ tgx=t\ \right| = \int \frac{\dfrac{dt}{1+t^2}}{5-\dfrac{1}{1+t^2}} = \int \frac{dt}{4+5t^2} =$$

$$=\frac{1}{5}\int\frac{dt}{t^2+\frac{4}{5}}=\frac{1}{5}\cdot\frac{\sqrt{5}}{2}arctg\left(\frac{t}{2/\sqrt{5}}\right)+c=\frac{1}{2\sqrt{5}}arctg\left(\frac{\sqrt{5}\,t}{2}\right)+c=$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{5}}arctg\left(\frac{\sqrt{5}\,tgx}{2}\right)+c \quad .$$

3. $\int \sin^m x\cos^n x\,dx$, m,n - цілі числа.

а) хоча б одне з чисел m та n непарне.

Наприклад, нехай $n=2p+1$.

$$\int \sin^m x\cos^{2p+1} x\,dx = \int \sin^m x\cos^{2p} x\cdot\cos x\,dx =$$

$$=\int \sin^m x(1-\sin^2 x)^p d(\sin x) = \left|\ \sin x = t\ \right| = \int t^m(1-t^2)^p dt$$

Приклад:

$$\int\frac{\cos^3 x}{\sin^4 x}dx=\int\frac{\cos^2 x\cdot\cos x}{\sin^4 x}dx=\left|\begin{matrix}\sin x=t,\cos xdx=dt \\ \cos^2 x=1-\sin^2 x=1-t^2\end{matrix}\right|=$$

$$=\int\frac{1-t^2}{t^4}dt=\int\left(\frac{1}{t^4}-\frac{1}{t^2}\right)dt=-\frac{1}{3t^3}+\frac{1}{t}+c=\ -\frac{1}{3\sin^3 x}+\frac{1}{\sin x}+c$$

б) m,n – невід’ємні парні числа.

Тоді застосовують формули зниження степеня

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2} \quad , \quad \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2} \; .$$

Приклад:

$$\int \sin^4 x\, dx = \int \left(\frac{1-\cos 2x}{2} \right)^2 dx = \frac{1}{4} \int (1 - 2\cos 2x + \cos^2 2x) dx =$$

$$= \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{4}\int \frac{1+\cos 4x}{2} dx = \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}\sin 2x +$$

$$+ \frac{1}{8}(x + \frac{1}{4}\sin 4x) + c = \frac{3}{8}x - \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{32}\sin 4x + c$$

в) m, n - парні, одне з чисел від'ємне.

Застосовують підстановку $tgx = t$ такий випадок розглянуто вище.

4. $\int \cos mx \cos nx\, dx$, $\int \sin mx \cos nx\, dx$, $\int \sin mx \sin nx\, dx$.

Для одержання табличних інтегралів виконують перехід від добутку тригонометричних функцій до суми (різниці) тригонометричних функцій за формулами

$$\cos mx \cos nx = \frac{1}{2}(\cos(m+n)x + \cos(m-n)x)$$

$$\sin mx \cos nx = \frac{1}{2}(\sin(m+n)x + \sin(m-n)x)$$

$$\sin mx \sin nx = \frac{1}{2}(\cos(m-n)x - \cos(m+n)x)$$

Приклад: $\int \sin 6x \cos 8x\, dx = \frac{1}{2}\int (\sin 14x + \sin(-2x)) dx =$

$$= \frac{1}{2}\int (\sin 14x - \sin 2x) dx = -\frac{1}{28}\cos 14x + \frac{1}{4}\cos 2x + c \; .$$

1.1.6 Деякі інтеграли від ірраціональних функцій

1. Інтеграли виду $\int R(x, x^{\frac{m}{n}}, ..., x^{\frac{r}{s}})\, dx$ раціоналізуються підстановкою $x = t^k$, де k - спільний знаменник дробів $\frac{m}{n}, ..., \frac{r}{s}$.

2. Інтеграли виду $\int R\left(x,\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m}{n}},\ldots,\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{r}{s}}\right)dx$ раціоналізуються підстановкою $\frac{ax+b}{cx+d}=t^k$, де k - спільний знаменник дробів $\frac{m}{n},\ldots,\frac{r}{s}$.

Приклади:

1) $$\int\frac{dx}{\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}}=\int R(x^{\frac{1}{3}},x^{\frac{1}{2}})dx=\begin{vmatrix} x=t^6,\, dx=6t^5dt \\ x^{\frac{1}{3}}=t^2\ ,\ x^{\frac{1}{2}}=t^3 \end{vmatrix}=$$

$$=\int\frac{6t^5dt}{t^2+t^3}=6\int\frac{t^3dt}{t+1}=6\int(t^2-t+1-\frac{1}{t+1})\,dt=$$

$$=6(\frac{t^3}{3}-\frac{t^2}{2}-\ln|t+1|)+c=\left|\ t=\sqrt[6]{x}\ \right|=2\sqrt{x}-3\sqrt[3]{x}+6\sqrt[6]{x}-$$

$$-6\ln(\sqrt[6]{x}+1)+c\ .$$

2) $$\int\frac{x\,dx}{\sqrt{2x+1}+1}=\int R(x,(2x+1)^{\frac{1}{2}})\,dx=\begin{vmatrix} 2x+1=t^2 \\ x=\dfrac{t^2-1}{2},\, dx=tdt \end{vmatrix}=$$

$$=\int\frac{t^2-1}{2(t+1)}tdt=\frac{1}{2}\int(t-1)tdt=\frac{1}{2}\int(t^2-t)\,dt=\frac{1}{2}\left(\frac{t^3}{3}-\frac{t^2}{2}\right)+c=$$

$$=\left|\ t=\sqrt{2x+1}\ \right|=\frac{1}{6}\sqrt{(2x+1)^3}-\frac{1}{4}(2x+1)+c\ .$$

1.1.7 Обчислення визначеного інтеграла

__**Теорема.**__ Якщо функція $F(x)$ є первісною для неперервної функції $f(x)$, то

$$\int_a^b f(x)\,dx=F(x)\Big|_a^b=F(b)-F(a)\ .$$

Ця формула називається формулою Ньютона – Лейбниця.
Приклади:

$$\int_1^2 x^4 dx = \left.\frac{x^5}{5}\right|_1^2 = \frac{32}{5} - \frac{1}{5} = \frac{31}{5} = 6,2 \;;$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\, dx = \sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \sin\frac{\pi}{2} - \sin 0 = 1 \;.$$

Теорема *(Підстановка у визначеному інтегралі).* Нехай функція $x = \varphi(t)$ відображає однозначно $[\alpha, \beta]$ на $[a, b]$, причому $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$, а також $\varphi'(t)$ - неперервна на $[\alpha, \beta]$ функція, тоді:
$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt \;.$$

Приклад:
$$\int_3^8 \frac{x\,dx}{\sqrt{1+x}} = \left| \begin{array}{ll} \sqrt{1+x} = t & \begin{array}{c|c} x & t \\ \hline 3 & 2 \\ 8 & 3 \end{array} \\ x = t^2 - 1 & \\ dx = 2t\,dt & \end{array} \right| = \int_2^3 \frac{(t^2-1)\,2t\,dt}{t} =$$
$$= 2\left(\frac{t^3}{3} - t\right)\Bigg|_2^3 = 2\left(\frac{27}{3} - 3 - \frac{8}{3} + 2\right) = 2\cdot\frac{16}{3} = \frac{32}{3} \;.$$

Теорема *(Інтегрування частинами визначеного інтеграла):*
Справедлива наступна формула: $\displaystyle\int_a^b u\,dv = (uv)\Big|_a^b - \int_a^b v\,du$.

Приклад:
$$\int_1^e x^2 \ln x\,dx = \left| \begin{array}{ll} u = \ln x\;, & dv = x^2 dx \\ du = \dfrac{dx}{x}\;, & v = \dfrac{x^3}{3} \end{array} \right| =$$
$$= \ln x \cdot \frac{x^3}{3}\Bigg|_1^e - \int_1^e \frac{x^3}{3}\cdot\frac{dx}{x} = \frac{e^3}{3} - \frac{1}{3}\int_1^e x^2 dx = \frac{e^3}{3} - \frac{1}{3}\cdot\frac{x^3}{3}\Bigg|_1^e =$$
$$= \frac{e^3}{3} - \frac{e^3}{9} + \frac{1}{9} = \frac{2}{9}e^3 + \frac{1}{9} \;.$$

1.1.8 Невласні інтеграли

1. Нехай $f(x)$ визначена на проміжку $[a,+\infty)$ і інтегрована на довільному відрізку $[a,b]$. Невласний інтеграл І-го роду від функції $f(x)$ в межах від a до $+\infty$ визначається рівністю:

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)\,dx$$

Якщо ця границя існує, то невласний інтеграл називається збіжним, якщо не існує або дорівнює нескінченності – розбіжним.

Аналогічно визначаються такі невласні інтеграли:

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)\,dx \ ,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)\,dx + \int_{c}^{+\infty} f(x)\,dx$$, де c - деяке число.

Приклади:

1) $$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b\to+\infty}\int_1^b\frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b\to+\infty} arctgx\Big|_1^b =$$

$$= \lim_{b\to+\infty}(arctg\,b - arctg\,1) = \frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} \ .$$

2) $$\int_0^{+\infty} e^x dx = \lim_{b\to+\infty}\int_0^b e^x dx = \lim_{b\to+\infty} e^x\Big|_0^b = \lim_{b\to+\infty}(e^b - e^0) =$$

$$\lim_{b\to+\infty}(e^b - 1) = +\infty \ .$$ Інтеграл розбіжний.

2. Нехай $f(x)\to\infty$ коли $x\to b-0$, також $f(x)$ визначена на $[a,b)$ та інтегрована на $[a,b-\varepsilon]$ $\forall\varepsilon>0$, $b-\varepsilon>a$. Тоді невласний інтеграл ІІ-го роду визначається рівністю:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to+0}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx \ .$$

Якщо границя, яка стоїть у правій частині, існує і дорівнює константі, то невласний інтеграл називають збіжним, інакше – розбіжним.

Аналогічно, якщо $f(x) \to \infty$ при $x \to a+0$ то

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon \to +0} \int_{a+\varepsilon}^b f(x)\,dx \quad .$$

Якщо $f(x) \to \infty$ при $x \to c$, $c \in [a,b]$, то

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx \quad .$$

Приклади:

1) $$\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} = \lim_{\varepsilon \to +0} \int_0^{2-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} = \lim_{\varepsilon \to +0} \arcsin\frac{x}{2}\Big|_0^{2-\varepsilon}$$

$$= \lim_{\varepsilon \to +0} \arcsin\frac{2-\varepsilon}{2} = \frac{\pi}{2}$$

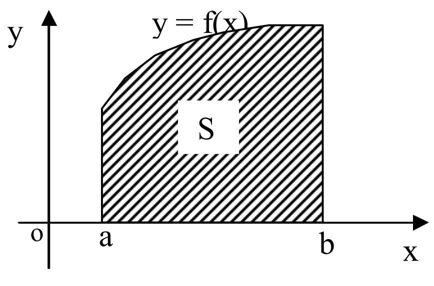
2) $$\int_{-2}^1 \frac{dx}{x^2} = \int_{-2}^0 \frac{dx}{x^2} + \int_0^1 \frac{dx}{x^2}$$

$$\int_{-2}^0 \frac{dx}{x^2} = \lim_{\varepsilon \to +0} \int_{-2}^{-\varepsilon} \frac{dx}{x^2} = \lim_{\varepsilon \to +0}\left(-\frac{1}{x}\right)\Big|_{-2}^{-\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \to +0}\left(\frac{1}{\varepsilon} - \frac{1}{2}\right) = \infty$$ розбіжний.

1.1.9 Застосування визначеного інтеграла

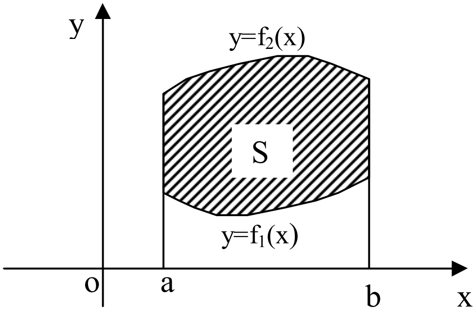
Площа фігури

а)



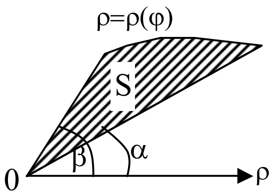
$$S = \int_a^b f(x)\,dx$$

б)



$$S=\int_a^b (f_2(x)-f_1(x))dx$$

в) площа криволінійного сектора



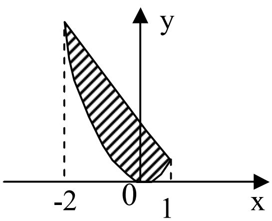
$$S=\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \rho^2(\varphi)d\varphi$$

г) Нехай лінія, що обмежує площу задана параметрично :

$\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \end{cases}$, $t_1 \le t \le t_2$, тоді: $S=\int_{t_1}^{t_2} y(t)\,x'(t)\,dt$.

Приклади:

1). Знайти площу фігури, яка обмежена лініями $y=x^2$, $y=2-x$.



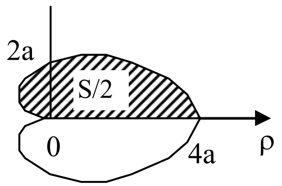
Побудуємо графіки функцій та знайдемо межі інтегрування. Для чого треба розв'язати систему рівнянь $\begin{cases} y=x^2 \\ y=2-x \end{cases}$. Прирівнюючи y одержуємо рівняння $x^2=2-x$, або $x^2+x-2=0$, корені якого $x_1=-2$, $x_2=1$.

Таким чином:

$$S=\int_{-2}^{1}(2-x-x^2)dx=\left.(2x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3})\right|_{-2}^{1}=2-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+4+2-\frac{8}{3}=4{,}5\ .$$

2). Обчислити площу фігури, яка обмежена кардіоїдою $\rho=2a(1+\cos\varphi)$.

$$S=2\cdot\frac{1}{2}\int_{0}^{\pi}\rho^{2}d\varphi=\int_{0}^{\pi}4a^2(1+\cos\varphi)^2d\varphi=$$



$$=4a^2\int_{0}^{\pi}(1+2\cos\varphi+\frac{1+\cos2\varphi}{2})\,d\varphi=$$

$$=4a^2\left.\left(\frac{3}{2}\varphi+2\sin\varphi+\frac{1}{4}\sin2\varphi\right)\right|_{0}^{\pi}=$$

$$=4a^2\cdot\frac{3\pi}{2}=6\pi\ a^2$$

1.2 Диференційні рівняння

Порядком диференційного рівняння називається порядок найвищої похідної від невідомої функції, яка входить у диференційне рівняння.

Загальним розв’язком диференційного рівняння n-го порядку $F(x,y,y',y'',\ldots,y^{n})=0$ називається таке рівняння, в яке входить *x, y* і довільні сталі $C_1,C_2,\ldots,C_n$ та яке дає для *y* вираз, що задовольняє дане диференційне рівняння.

Кожна функція, яку дістаємо з загального розв’язку при окремих значеннях довільних сталих, називається частинним розв’язком.

1.2.1 Диференційні рівняння першого порядку

а) ***Диференційні рівняння з відокремлюваними змінними***.

Рівняння $y'=f(x,y)$ називається диференційним рівнянням з відокремлюваними змінними, якщо функцію $f(x,y)$ можна відобразити, як добуток функцій $\varphi(x)\cdot\psi(y)$.

Приклад: Розв’язати диференційне рівняння:

$$\left(x^2+1\right)\cdot\left(y^2-1\right)+xyy'=0.$$

Виразимо y':

$$y'=-\frac{\left(x^2+1\right)\cdot\left(y^2-1\right)}{xy} \quad\Rightarrow\quad y'=-\frac{\left(x^2+1\right)}{x}\cdot\frac{y^2-1}{y}$$

У нашому випадку $\varphi(x)=-\dfrac{x^2+1}{x}$, а $\psi(y)=\dfrac{y^2-1}{y}$.

Запишемо похідну через диференціали: $y'=\dfrac{dy}{dx}$, отримаємо:

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{x^2+1}{x}\cdot\frac{y^2-1}{y};$$

далі відокремимо змінні: $\dfrac{ydy}{y^2-1}=-\dfrac{x^2+1}{x}dx.$

Після чого, проінтегруємо це рівняння:

$$\int \frac{ydy}{y^2-1} = -\int \frac{x^2+1}{x}dx + \ln C$$

$$\frac{1}{2}\ln\left|y^2-1\right| = -\frac{x^2}{2} - \ln|x| + \ln C \quad \Rightarrow \quad \ln\left|x\sqrt{y^2-1}\right| = -\frac{x^2}{2} + \ln C$$

$$y^2 - 1 = \frac{c}{x}e^{\frac{-x^2}{2}}, \qquad y = \sqrt{1+\frac{c}{x}e^{-x^2/2}}$$ - загальний розв'язок.

б) Однорідні диференційні рівняння.

Диференційне рівняння першого порядку $y'=f(x,y)$ називається однорідним, якщо функція $f(x,y)$ однорідна нульового степеня, тобто $F(xt,yt)=f(x,y)$, де t-const.

За допомогою підстановки $y=ux$, де $u=u(x)$, однорідне диференціальне рівняння зводиться до диференційного рівняння з відокремлюваними змінними.

Приклад : $\left(2y^2 - 3xy\right)y' + y^2 = 0$.

Запишемо це рівняння у вигляді: $y' = \dfrac{3xy - 2y^2}{y^2}$

Маємо: $f(x,y) = \dfrac{3xy - 2y^2}{y^2}$

Перевіримо функцію на однорідність:

$$f(xt, xy) = \frac{3xt \cdot yt - 2(yt)^2}{(yt)^2} = \frac{t^2(3xy - 2y^2)}{t^2y^2} = \frac{3xy - 2y^2}{y^2} = f(x, y)$$

Тобто, маємо однорідне диференційне рівняння. Зробимо заміну:

$$y = ux, \quad y' = u'x + u$$

Тоді задане рівняння матиме вигляд:

$$u'x + u = \frac{3x \cdot ux - 2u^2x^2}{u^2x^2} \quad \Rightarrow \quad u'x + u = \frac{3u - 2u^2}{u^2}$$

$$u'x = \frac{3 - 2u}{u} - u \qquad \Rightarrow \quad u'x = \frac{3 - 2u - u^2}{u}$$

Отримали диференційне рівняння з відокремлюваними змінними.

$$\frac{udu}{u^2+2u-3}=-\frac{dx}{x} \quad\Rightarrow\quad \int\frac{udu}{u^2+2u-3}=-\int\frac{dx}{x}+\ln C$$

$$\frac{1}{2}\int\frac{2u+2-2}{u^2+2u-3}du=-\ln|x|+\ln C$$

$$\frac{1}{2}\int\frac{2u+2}{u^2+2u-3}du-\frac{1}{2}\int\frac{2du}{(u+1)^2-4}=-\ln|x|+\ln C$$

$$\frac{1}{2}\ln\left|u^2+2u-3\right|-\frac{1}{2\cdot 2}\ln\left|\frac{u+1-2}{u+1+2}\right|=-\ln|x|+\ln C$$

$$2\ln\left|u^2+2u-3\right|-\ln\left|\frac{u-1}{u+3}\right|=-4\ln|x|+4\ln C$$

$$\ln\left|\frac{\left(u^2+2u-3\right)^2}{u-1}(u+3)\right|=\ln\frac{C}{x^4}$$

$$\frac{\left(u^2+2u-3\right)^2(u+3)}{u-1}=\frac{C}{x^4}, \qquad u=\frac{y}{x}$$

$$\frac{\left(\frac{y^2}{x^2}+2\frac{y}{x}-3\right)^2}{\frac{y}{x}-1}\left(\frac{y}{x}+3\right)=\frac{C}{x^4}$$

$$\frac{\left(y^2+2xy-3x^2\right)^2}{x^4\,\frac{y-x}{x}}\,\frac{y+3x}{x}=\frac{C}{x^4}$$

$\left(y^2+2xy-3x^2\right)^2(y+3x)=C(y-x)$ - загальний розв’язок.

в) Лінійні диференційні рівняння.

Це диференціальні рівняння виду:

$$y'+p(x)y=q(x)$$

де p(x) і q(x) – задані неперервні в деякому проміжку функції від аргументу x. Таке рівняння лінійне відносно шуканої функції y і її похідної y′.

Розв’язок будемо шукати у вигляді добутку двох функцій u(x) і v(x), тоді:

$$y = u\,v\,, \qquad y' = u'v + uv'.$$

Підставимо y та y' у задане рівняння і знайдемо розв’язок відносно функцій u(x) та v(x).

Приклад : $\quad y' + y\cos x = \frac{1}{2}\sin 2x$

$$y = u \cdot v\,, \quad y' = u'v + uv'$$

$$u'v + uv' + uv\cos x = \frac{1}{2}\sin 2x$$

$$u'v + u\left(v' + v\cos x\right) = \frac{1}{2}\sin 2x$$

Знайдемо розв’язок цього рівняння. Підберемо функцію v так, щоб вираз у дужках дорівнював нулю, матимемо:

$$\begin{cases} v' + v\cos x = 0 \\ u'v = \frac{1}{2}\sin 2x \end{cases}$$

З першого рівняння отримаємо:

$$\frac{dv}{v} = -\cos x dx \qquad \int \frac{dv}{v} = -\int \cos x dx$$

$$\ln|v| = -\sin x \qquad v = e^{-\sin x}$$

Знайдене значення функції v підставимо у друге рівняння:

$$u' \cdot e^{-\sin x} = \frac{1}{2}\sin 2x \qquad \Rightarrow \qquad u' = \frac{1}{2}\sin 2x e^{\sin x}$$

$$u' = \frac{1}{2}\sin 2x \cdot e^{\sin x}dx = \frac{1}{2}\int 2\sin x \cdot \cos x \cdot e^{\sin x}dx + C =$$

$$= \int \sin x \cdot e^{\sin x}d(\sin x) + C = \left\{\begin{matrix} U = \sin x, & dV = e^{\sin x}d(\sin x) \\ dU = d\sin x, & V = e^{\sin x} \end{matrix}\right\} =$$

$$= \sin x e^{\sin x} - \int e^{\sin x}d\sin x = \sin x \cdot e^{\sin x} - e^{\sin x} + C.$$

Тоді:

$$y = uv = e^{-\sin x}\left[\sin x e^{\sin x} - e^{\sin x} + C\right] = \sin x - 1 + Ce^{-\sin x}$$

- загальний розв'язок заданого диференційного рівняння.

Запишемо загальну формулу знаходження функцій u(x) та v(x):

$$v(x) = e^{-\int p(x)dx}; \qquad u(x) = \int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + C$$

Тоді $$y = e^{-\int p(x)dx}\left[\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + C\right].$$

г) Диференційні рівняння Бернуллі.

Це диференціальні рівняння виду:

$$y' + p(x)y = q(x)y''$$

де $n \neq 0$ - дійсне число.

Це рівняння зводиться до лінійного підстановкою $z = y^{-n+1}$,

$z' = (-n+1)y^{-n} \cdot y'$. Поділимо рівняння на y^n і отримаємо:

$$y^{-n} \cdot y' + p(x)y^{-n+1} = q(x),$$

$\dfrac{z'}{-n+1} + p(x)z = q(x)$ - лінійне диференційне рівняння (див. в))

Приклад: $$y' + 2y = y^3 x \quad \Big| \div y^3$$

$$y^{-3}y' + 2y^{-2} = x$$

Зробимо заміну:

$$z = y^{-2}, \qquad z' = -2y^{-3}y'$$

Тоді рівняння матиме вигляд:

$$-\frac{z'}{2} + 2z = x, \qquad \text{або} \qquad z' - 4z = -2x.$$

Позначимо p(x)=-4; q(x)=-2x, та знайдемо функції u(v) та v(x), а потім z=u(x)v(x):

$$v(x) = e^{-\int -4dx} = e^{4x}$$

$$u(x) = \int (-2x)e^{-\int 4xdx}dx + C = -2\int xe^{-4x}dx + C =$$

$$= -2\left(-\frac{1}{4}e^{-4x}x + \frac{1}{4}\int e^{-4x}dx\right) = \frac{1}{2}e^{-4x}x + \frac{1}{8}e^{-4x} + C$$

$$z = u(x)\cdot v(x) = \left(\frac{1}{2}e^{-4x}x + \frac{1}{8}e^{-4x} + C\right)e^{4x} = \frac{1}{2}x + \frac{1}{8} + Ce^{4x}$$

$$y = \frac{1}{\sqrt{z}} \qquad \Rightarrow \quad y = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}x + \frac{1}{8} + Ce^{4x}}}$$

- загальний розв'язок диференційного рівняння.

д) Якщо задана початкова умова $y(x_0) = y_0$ для диференційного рівняння першого порядку, то треба знайти частинний розв'язок, або розв'язати ***задачу Коші***.

Приклад : $\left(x^2 - yx\right)y' + y^2 + yx = 0$, якщо y(1)=1.

Треба знайти загальний розв'язок. Він має вигляд

$$\frac{y}{x} = \ln(yx) + C$$

використовуючи початкові умови, знайдемо С:

$1/1 = \ln(1\cdot 1) + C \Rightarrow C = 1$.

Тоді частинний розв'язок буде мати вигляд:

$$\frac{y}{x} = \ln(yx) + 1$$

$$y = x\ln(yx) + 1$$

1.2.2 Диференційні рівняння другого порядку, що допускають зниження порядку

Диференційні рівняння другого порядку в загальному вигляді представляються так:

$F(x, y, y', y'') = 0$ або $y'' = f(x, y, y')$.

Розглянемо деякі з них, які допускають зниження порядку.

1). Диференціальні рівняння виду $F(x, y', y'') = 0$, функція y – відсутня .

Знижуємо його порядок, роблячи заміну:

$$y' = z(x), \quad y'' = z'(x)$$

$F(x, z, z') = 0$ - диференціальне рівняння першого порядку.

Приклад: $y''\mathrm{tg}x = y' + 1$

Зробимо заміну: $y' = z(x), \qquad y'' = z'(x)$

$z'\mathrm{tg}x = z + 1$ - диференціальне рівняння першого порядку. Його розв'язком є вираз $z = C_1 \sin x - 1$

Підставимо $z = y'$. Матимемо:

$$y' = C_1 \sin x - 1$$

$$y = \int (C_1 \sin x - 1)dx + C_2 = -C_1 \cos x - x + C_2$$

- це і є загальним розв'язком заданого диференційного рівняння другого порядку.

2). Диференційне рівняння виду $F(y, y', y'') = 0$, змінна x – відсутня.

Знижуємо порядок його, роблячи заміну:

$$y' = p(y), \qquad y'' = p'(y)y' = p'(y) \cdot p(y)$$

$F(y, p, pp') = 0$ - диференціальйне рівняння першого порядку.

Приклад: $yy'' + y'^2 = 0$

Зробимо заміну $y' = p(y), \quad y'' = p'(y) \cdot p(y) = p \cdot p'$

$$y \cdot pp' + p^2 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad p(yp' + p) = 0$$

1) $p = 0, \qquad y' = 0 \qquad y = C$;

2) $yp' + p = 0$ - диференційне рівняння першого порядку з відокремлюваними змінними. Його розв'язком є вираз $p = \dfrac{C_1}{y}$.

Підставимо $p = y'$, матимемо $y' = \dfrac{C_1}{y}$.

$$ydy = C_1 dx$$

$$\int ydy = C_1 \int dx + C_2$$

$$\frac{y^2}{2} = C_1 x + C_2$$

$y = \pm\sqrt{2C_1 x + 2C_2}$ - загальний розв'язок заданого диференційного рівняння другого порядку.

1.2.3 Лінійні однорідні диференціальні рівняння (ЛОДР) зі сталими коефіцієнтами

Загальний вигляд:

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{n-1} + ... + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = 0$$

де $a_i, i = 0,1,...,n$ - дійсна числа. Для його розв'язку треба скласти характеристичне рівняння наступного вигляду:

$$a_n k^n + a_{n-1} k^{n-1} + ... + a_2 k^2 + a_1 k + a_0 = 0$$

це алгебраїчне рівняння з невідомими $k_i, i = 1,2,3,...,n.$ Розв'язуємо його відносно $k_{i.}$ Наприклад, для ЛОДР другого порядку із сталими коефіцієнтами:

$$a_2 k^2 + a_1 k + a_0 = 0$$

можуть бути такі випадки значення коренів:

а) $k_1 \neq k_2$ - дійсні числа.

Загальний розв'язок лінійного однорідного диференціального рівняння із сталими коефіцієнтами матиме вигляд

$$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$$

б) $k_1 = k_2 = k$ - дійсне число.

Загальний розв'язок лінійного однорідного диференціального рівняння із сталими коефіцієнтами матиме вигляд

$$y = C_1 e^{kx} + C_2 x e^{kx}$$

в) $k_{1,2} = \alpha \pm \beta i$ - комплексні, попарно спряжені, де α - дійсна частина комплексного числа, β - уявна частина комплексного числа, $i = \sqrt{-1}$ - уявна одиниця.

Загальний розв'язок лінійного однорідного диференціального рівняння із сталими коефіцієнтами матиме вигляд

$$y = e^{\alpha x} ({}_1 C \cos\beta x + C_2 \sin\beta x)$$

Приклад: $y''' + 2y'' - 3y' = 0$.

Складемо характеристичне рівняння:

$$k^3 + 2k^2 - 3k = 0$$

$$k(k^2 + 2k - 3) = 0$$

$$k_1 = 0 \quad k_2 = -3 \quad k_3 = 1$$

$y = C_1e^{0x} + C_2e^{-3x} + C_3e^{x} = C_1 + C_2e^{-3x} + C_3e^{x}$ - загальний розв'язок лінійного однорідного диференціального рівняння із сталими коефіцієнтами.

1.2.4 Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння (ЛНДР) зі сталими коефіцієнтами

Розглянемо диференціальне рівняння другого порядку

$$a_2y'' + a_1y' + a_0y = f(x)$$

a_2, a_1, a_0 - дійсні числа, $f(x) \neq 0$ – неперервна на інтервалі (a, b)

Загальний розв'язок ЛНДР визначається формулою

$$y = C_1y_1(x) + C_2y_2(x) + \overline{y}(x),$$

де $\overline{y}(x)$ - частинний розв'язок заданого ЛНДР, C_1, C_2 - довільні сталі, $y_1(x), y_2(x)$ - частинні розв'язки відповідного ЛОДР.

Розглянемо деякі види функції f(x).

1). $f(x) = P_n(x)e^{\alpha x}$, де $P_n(x)$ - многочлен степеня n, α – будь-яке дійсне число. Тоді частинний розв'язок шукаємо у вигляді:

$$\overline{y}(x) = Q_n(x)e^{\alpha x} \cdot x^s,$$

де $Q_n(x)$ - многочлен того ж самого степеня, що і многочлен $P_n(x)$, але записаний у загальному вигляді, α-відповідає значенню α з функції f(x), S – дорівнює числу збігу α з коренями характеристичного рівняння.

Приклад : $y'' + 3y' = 2e^{-3x}$

Складемо характеристичне рівняння:

$$k^2 + 3k = 0 \qquad k(k+3) = 0$$

$$k_1 = 0 \quad k_2 = -3$$

$$y_{одн} = C_1 + C_2e^{-3x} \qquad \overline{y} = Ae^{-3x} \cdot x\,.$$

Підставимо частинний розв'язок у задане рівняння. Для цього знайдемо:

$$\bar{y}' = -3Ae^{-3x} \cdot x + Ae^{-3x}$$

$$\bar{y}'' = 9Ae^{-3x} \cdot x - 3Ae^{-3x} - 3Ae^{-3x} = 9Ae^{-3x} \cdot x - 6Ae^{-3x}$$

підставимо $\bar{y}, \bar{y}', \bar{y}''$ в задане рівняння, матимемо:

$$9Ae^{-3x} \cdot x - 6Ae^{-3x} - 9Ae^{-3x} \cdot x + 3Ae^{-3x} = 2e^{-3x}$$

$$-3Ae^{-3x} = 2e^{-3x}$$

$$-3A = 2 \qquad A = -\frac{2}{3}$$

Тоді $\bar{y} = -\frac{2}{3}e^{-3x} \cdot x$.

Загальний розв'язок має вигляд: $y = C_1 + C_2e^{-3x} - \frac{2}{3}e^{-3x} \cdot x$.

2). $f(x) = e^{\alpha x}\left[P_n(x)\cos\beta x + Q_m(x)\sin\beta x\right]$

де $P_n(x), Q_m(x)$ - многочлени степенів n та m відповідно, α і β – дійсні числа.

Частинний розв'язок в цьому випадку шукаємо у вигляді:

$$\bar{y}(x) = e^{\alpha x}\left[\bar{P}_k(x)\cos\beta x + \bar{Q}_k(x)\sin\beta x\right]x^s$$

де $\bar{P}_k(x), \bar{Q}_k(x)$ - многочлени однакового степеня $k = \max\{n, m\}$, записані у загальному вигляді, α, β відповідають значенням α і β з функції f(x), S-дорівнює числу збігу $\alpha \pm \beta i$ з коренями характеристичного рівняння.

Приклад: $y'' - y = 5\sin x$

Запишемо характеристичне рівняння

$$k^2 - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad k^2 = 1, \;\; k = \pm 1$$

$$y_{одн} = C_1e^{-x} + C_2e^{x}$$

$$\bar{y} = A\cos x + B\sin x$$

$$\bar{y}' = -A\sin x + B\cos x, \quad \bar{y}'' = -A\cos x - B\sin x$$

Підставимо значення $\bar{y}, \bar{y}', \bar{y}''$ у задане рівняння:

$$-A\cos x - B\sin x - A\cos x - B\sin x = 5\sin x,$$

Прирівняємо коефіцієнти:

$$\begin{array}{r|l} \cos x & -2A = 0; \quad A = 0 \\ \sin x & -2B = 5; \quad B = -\dfrac{5}{2} \end{array}$$

Тоді частинний розв'язок матиме вигляд:

$$\bar{y} = -\frac{5}{2}\sin x.$$

Загальний розв'язок: $y = C_1e^{-x} + C_2e^{x} - \frac{5}{2}\sin x$.

Якщо функція f(x) є сумою декількох функцій, то частинний розв'язок складається з суми частинних розв'язків для кожної функції. Наприклад, $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$. Тоді:

$$\bar{y}(x) = \bar{y}_1(x) + \bar{y}_2(x),$$

де $\bar{y}_1(x)$ - частинний розв'язок ЛНДР:

$$a_2y'' + a_1y' + a_0y = f_1(x)$$

$\bar{y}_2(x)$ - частинний розв'язок ЛНДР:

$$a_2y'' + a_1y' + a_0y = f_2(x)$$

3). В інших випадках застосовується метод варіації довільних сталих (*метод Лагранжа*).

Приклад: $y'' + y = \dfrac{1}{\cos x}$.

Знайдемо розв'язок відповідного лінійного однорідного диференціального рівняння $y'' + y = 0$

Запишемо характеристичне рівняння: $k^2 + 1 = 0$.

$$k^2 = -1, \qquad k_{1,2} = \pm 1$$

$$y_1 = \cos x \quad y_2 = \sin x$$

$$y_{одн} = C_1\cos x + C_2\sin x$$

Загальний розв'язок заданого рівняння шукатимемо у вигляді:

$$y = C_1(x)\cos x + C_2(x)\sin x\ ,$$

де $C_1(x),\ C_2(x)$ - невідомі функції, залежні від змінної x.

Для їх знаходження складемо систему відносно їх похідних:

$$\begin{cases} C_1'(x)y_1 + C_2'(x)y_2 = 0 \\ C_1'(x)y_1' + C_2'(x)y_2' = f(x) \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_1'(x)\cos x + C_2'(x)\sin x = 0 \\ C_1'(x)[-\sin x] + C_2'(x)\cos x = \dfrac{1}{\cos x} \end{cases}$$

Розв'язуючи її відносно $C_1'(x)$ і $C_2'(x)$ отримаємо:

$$C_1'(x) = -\mathrm{tg}x; \quad C_2'(x) = 1$$

$$C_1(x) = -\int \mathrm{tg}x dx + \overline{C}_1 = \ln|\cos x| + \overline{C}_1$$

$$C_2(x) = \int dx + \overline{C}_2 = x + \overline{C}_2$$

Загальний розв'язок ЛНДР матиме вигляд:

$$y = \left(\ln|\cos x| + \overline{C}_1\right)\cos x + \left(x + \overline{C}_2\right)\sin x\ .$$

1.2.5 Системи двох диференціальних рівнянь першого порядку

$$\begin{cases} x' = F_1(x, y, t) \\ y' = F_2(x, y, t) \end{cases}$$

Запишемо розв'язок цієї системи у вигляді алгоритму:

а) продиференціюємо перше рівняння по t;

б) підставимо в нього значення y' з другого рівняння;

в) з першого рівняння системи знайдемо значення y;

г) підставимо його в рівняння п. б);

д) розв'яжемо отримане рівняння відносно x;

є) для знаходження y підставимо знайдене значення x в рівняння п. в).

Приклад: $\begin{cases} x' + 5x + y = e^t \\ y' - x + 3y = e^{2t} \end{cases}$

$$x'' + 5x' + y' = e^t \quad \Rightarrow \quad x'' + 5x' + x - 3y + e^{2t} = e^t$$

$$y = e^t - x' - 5x \quad \Rightarrow \quad x'' + 5x' + x - 3e^t + 3x' + 15x + e^{2t} = e^t$$

$$x'' + 8x' + 16x = 4e^t - e^{2t}$$

$$k^2 + 8k + 16 = 0, \quad (k+4)^2 = 0, \quad k_{1,2} = -4$$

$$x_{одн} = (C_1 + C_2 t)e^{-4t}$$

$$\bar{x} = \bar{x}_1 + \bar{x}_2$$

$$\bar{x}_1 = Ae^t, \quad \bar{x}_1' = Ae^t, \quad \bar{x}_1'' = Ae^t$$

$$Ae^t + 8Ae^t + 16Ae^t = 4e^t$$

$$25Ae^t = 4e^t \quad \Rightarrow \quad A = \frac{4}{25} \quad \Rightarrow \quad \bar{x}_1 = \frac{4}{25}e^t$$

$$\bar{x}_2 = Be^{2t}, \quad \bar{x}_2' = 2Be^{2t}, \quad \bar{x}_2'' = 4Be^{2t}$$

$$4Be^{2t} + 16Be^{2t} + 16Be^{2t} = -e^{2t}$$

$$36Be^{2t} = -e^{2t} \quad \Rightarrow \quad B = -\frac{1}{36} \quad \Rightarrow \quad \bar{x}_2 = -\frac{1}{36}e^{2t}$$

Загальний розв'язок: $x = (C_1 + C_2 t)e^{-4t} + \frac{4}{25}e^t - \frac{1}{36}e^{2t}$.

Знайдемо y. Для цього знайдемо

$$x' = C_2 e^{-4t} - 4(C_1 + C_2 t)e^{-4t} + \frac{4}{25}e^t - \frac{1}{18}e^{2t}$$

$$y = e^t - C_2 e^{-4t} + 4(C_1 + C_2 t)e^{-4t} - \frac{4}{25}e^t + \frac{1}{18}e^{2t} - 5(C_1 + C_2 t)e^{-4t}$$

$$-\frac{4}{5}e^t + \frac{5}{36}e^{2t} = -C_2 e^{-4t} - (C_1 + C_2 t)e^{-4t} + \frac{1}{25}e^t + \frac{7}{36}e^{2t}$$

$$\begin{cases} x = (C_1 + C_2 t)e^{-4t} + \frac{4}{25}e^t - \frac{1}{36}e^{2t} \\ y = -C_2 e^{4t} - (C_1 + C_2 t)e^{-4t} + \frac{7}{36}e^{2t} \end{cases}$$

1.3 Теорія рядів

1.3.1 Знакододатні ряди. Ознаки збіжності

Якщо u_1, $u_2,\ldots u_n,\ldots$ – нескінченна числова послідовність, то вираз $u_1+u_2+\ldots+u_n+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ називається числовим рядом, а величини u_1, u_2, … – членами цього ряду.

Побудуємо допоміжну послідовність частинних сум ряду $S_1=u_1$, $S_2=u_1+u_2$, ..., $S_n=u_1+u_2+\ldots+u_n$, ... Якщо ця послідовність має скінчену границю $S=\lim_{n\to\infty}S_n$, то ряд називається збіжним, а число S – сумою ряду. У випадку, коли границя не існує або є нескінченною, ряд називається розбіжним.

Якщо всі члени ряду є додатними, то ряд називається знакододатним.

Теорема (***необхідна ознака збіжності ряду***) Якщо ряд $u_1+u_2+\ldots+u_n+\ldots$ збіжний, то $\lim_{n\to\infty}u_n=0$.

Приклад: Що можна сказати про збіжність або розбіжність ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n^3-1}{4n^3+1}$, застосовуючи необхідну ознаку?

Так як $u_n=\lim_{n\to\infty}\frac{3n^3-1}{4n^3+1}=\frac{3}{4}\neq 0$, ряд розбігається.

Теорема ***(ознака порівняння)***. Нехай маємо два ряди з додатними членами:
$$u_1+u_2+u_3+\ldots+u_n+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}u_n$$
$$v_1+v_2+v_3+\ldots+v_n+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}v_n$$
причому $u_1\le v_1$, $u_2\le v_2,\ldots,$ $u_n\le v_n,\ldots$.

Тоді, якщо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ збігається, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ теж збігається; якщо ж ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ розбігається, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ теж розбігається.

Теорема ***(гранична ознака порівняння).*** Якщо задано знакододатні ряди $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, $u_n \neq 0$ і $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$, причому $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{v_n}{u_n}$ існує і не дорівнює нулю та нескінченності, то ці ряди одночасно збіжні або розбіжні.

Приклади: Дослідити збіжність наступних рядів за допомогою теорем порівняння:

1). $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \sin\frac{\pi}{4^n}$.

Оскільки $\sin\frac{\pi}{4^n} < \frac{\pi}{4^n}$, то $2^n \sin\frac{\pi}{4^n} < \frac{\pi}{2^n}$. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi}{2^n}$ - збіжний (геометрична прогресія із знаменником $q = \frac{1}{2} < 1$), отже, за теоремою порівняння збігається і даний ряд.

2). $\sum_{n=1}^{\infty} tg^2 \frac{\pi}{4\sqrt{n}}$.

Візьмемо для порівняння гармонічний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, який є розбіжним. Знайдемо

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{tg^2 \frac{\pi}{4\sqrt{n}}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{\pi^2}{16} tg^2 \frac{\pi}{4\sqrt{n}}}{(\frac{\pi}{4\sqrt{n}})^2} = \frac{\pi^2}{16} \neq 0.$$

Отже, за теоремою порівняння і даний ряд розбіжний.

<u>Теорема</u> ***(ознака Даламбера)*** Якщо в знакододатному ряді $u_1+u_2+u_3+\ldots+u_n+\ldots$ існує границя $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=q$, то ряд збігається за умови, що q<1, і розбігається коли q>1. Якщо q=1, то ряд може бути як збіжним, так і розбіжним. В цьому випадку треба застосовувати інші ознаки збіжності.

Приклади: Дослідити збіжність наступних рядів за допомогою ознаки Даламбера:

1). Дослідити на збіжність ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{3^n}{n!}$.

Оскільки в загальному члені даного ряду є факторіал, для дослідження ряду застосовуємо ознаку Даламбера:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{3^{n+1}}{(n+1)!}}{\dfrac{3^n}{n!}}=\lim_{n\to\infty}\frac{3^{n+1}n!}{(n+1)!3^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3}{n+1}=0<1$$

Отже, за ознакою Даламбера ряд збігається.

2). Дослідити на збіжність ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1\cdot4\cdot7\ldots(3n-2)}{2^{n+1}\cdot n!}$.

Застосуємо ознаку Даламбера:

$$u_n=\frac{1\cdot4\cdot7\ldots(3n-2)}{2^{n+1}\cdot n!}. \qquad u_{n+1}=\frac{1\cdot4\cdot7\ldots(3n-2)\cdot(3n+1)}{2^{n+2}\cdot(n+1)!}.$$

Знайдемо границю відношення ($n+1$)-го члена ряду до n -го, коли $n\to\infty$. Маємо:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{u+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1\cdot4\cdot7\ldots\left(3n-2\right)\cdot(3n+1)2^{n+1}n!}{1\cdot4\cdot7\ldots\left(3n-2\right)\cdot2^{n+2}(n+1)!}=\lim_{n\to\infty}\frac{3n+1}{2(n+1)}=\frac{3}{2}>1$$

тому ряд розбігається.

<u>Теорема</u> ***(Ознака Коші)*** Якщо існує $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=q$, то при $q<1$ ряд напевне збігається, а при $q>1$ ряд напевне розбігається, при $q=1$ питання збіжності ряду залишається відкритим.

Приклад: Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)^{n^2}}{n^{n^2}3^n}$.

В загальному члені присутній степінь n, отже за ознакою Коші:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{(n+1)^{n^2}}{n^{n^2}3^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^n}{n^n3}=\lim_{n\to\infty}\frac{(1+\frac{1}{n})^n}{3}=\frac{e}{3}<1$$

Ряд за ознакою Коші збігається.

<u>Теорема</u> ***(Інтегральна ознака збіжності Коші)*** Якщо функція $f(x)$ на проміжку $[1,\infty)$ є неперервною, додатною і монотонно спадною, то числовий ряд $u_1+u_2+...+u_n+...$, де $u_n=f(n)$ збігається, якщо збігається невласний інтеграл $\int_1^{\infty}f(x)dx$ і розбігається, якщо цей невласний інтеграл розбігається.

Приклад: Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n(\ln^2 n+1)}$.

Радикальну ознаку збіжності Коші тут застосувати не можливо. За ознакою Даламбера $\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=1$. Застосуємо інтегральну ознаку Коші.

Маємо $u_n=\frac{\ln n}{n(\ln^2 n+1)}$. Розглянемо функцію $f(x)=\frac{\ln x}{x(\ln^2 x+1)}$. Вона неперервна на проміжку $[1,+\infty)$ і монотонно спадає на ньому. Обчислимо невласний інтеграл:

$$\int_1^{\infty}f(x)dx=\int_1^{\infty}\frac{\ln x dx}{x(\ln^2 x+1)}=\lim_{b\to\infty}\int_1^{b}\frac{d(\ln^2 x+1)}{2(\ln^2 x+1)}=\lim_{b\to\infty}[\frac{1}{2}\ln(\ln^2 x+1]_1^b=$$

$$=\lim_{b\to\infty}[\frac{1}{2}(\ln(\ln^2 b+1)-\ln 1)]=\infty$$

Інтеграл $\int_1^{\infty}f(x)dx$ розбігається, отже і даний ряд розбігається.

1.3.2 Знакозмінні ряди. Ознака збіжності Лейбніца для знакопереміжних рядів

Якщо серед членів ряду є як додатні, так і від'ємні (при цьому і тих, і інших необмежена кількість), то такий ряд називається знакозмінним.

Знакозмінний ряд називається знакопереміжним, якщо будь-які два члени ряду, які стоять поряд, мають протилежні знаки:

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \ldots + (-1)^{n-1} u_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n \ ,$$

де всі числа u_n додатні.

<u>**Теорема.**</u> ***(Ознака Лейбніца)*** Якщо члени даного ряду монотонно спадають за абсолютною величиною і $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$, то знакопереміжний ряд збігається, та його сума за абсолютною величиною не перебільшує абсолютної величини першого члена.

Приклад: Довести збіжність ряду:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \ldots + (-1)^{n-1} \frac{1}{2n-1} + \ldots$$

Даний ряд задовольняє умовам ознаки Лейбніца. Члени ряду за абсолютною величиною монотонно спадають, так як

$$1 > \frac{1}{3} > \frac{1}{5} > \ldots \quad \text{і} \quad \lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n-1} = 0 ,$$

отже, за ознакою Лейбніца ряд збігається.

Ряд називається ***абсолютно збіжним***, якщо збігається ряд, складений із абсолютних величин його членів. Ряд називається ***умовно збіжним***, якщо він збігається, але ряд, складений із абсолютних величин його членів розбігається.

Приклад: Дослідити на збіжність ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{3n+1}$.

$\frac{1}{4} > \frac{1}{7} > \frac{1}{10} > \ldots > \frac{1}{3n+1} > \frac{1}{3n+4} > \ldots$ члени ряду спадають за абсолютною величиною, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{3n+4} = 0$. За ознакою Лейбніца ряд збігається. Ряд із абсолютних величин членів даного ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3n+1}$ - розбіжний, тому що за теоремою порівняння $\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{3n+1}}{\frac{1}{n}}=\frac{1}{3}$, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ – розбіжний. Отже даний ряд збігається умовно.

1.3.3 Степеневий ряд. Радіус збіжності степеневого ряду

Функціональний ряд зі степеневими функціями аргументу x називається степеневим:

$$a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+...+a_n(x-x_0)^n+...$$

x_0- дане число, а $a_0, a_1, a_2,...$ - відомі числові коефіцієнти. Як частинний випадок, коли $x_0=0$, одержимо степеневий ряд:

$$a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+...+a_nx^n+...=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$$

Теорема ***(Абеля)*** Якщо степеневий ряд збігається при $x=x_0(x_0\neq 0)$, то він збігається абсолютно при будь-якому значенні x, яке задовольняє нерівність $|x|<|x_0|$. Якщо степеневий ряд розбігається при $x=x_0$, то він розбігається і при будь-якому значенні x, яке задовольняє нерівність $|x|>|x_0|$.

Із теореми Абеля випливає, що існує деяке число $R>0$, при цьому ряд збігається у всіх точках, для яких $|x|<R$, і розбігається у всіх точках, для яких $|x|>R$. Це число R називається радіусом збіжності ряду.

Щоб знайти область збіжності степеневого ряду, треба спочатку визначити інтервал збіжності $(-R,R)$ і після цього з’ясувати питання про збіжність ряду на кінцях інтервалу, тобто при $x=R$ і $x=-R$.

На практиці радіус збіжності степового ряду відшукують за допомогою ознаки Даламбера або Коші.

Даламбера: $R = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right|$.

Коші: $R = \dfrac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}}$

Приклад: Знайти область збіжності ряду $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{2^n(x+2)^n}{5^n(1+4n)}$.

Знаходимо радіус збіжності ряду:

$$R = \lim_{n\to\infty}\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \lim_{n\to\infty}\frac{2^n 5^{n+1}(1+4(n+1))}{5^n(1+4n)2^{n+1}} = \lim_{n\to\infty}\frac{5(4n+5)}{2(4n+1)} = \frac{5}{2}.$$

Інтервал абсолютної збіжності ряду:

$$-\frac{5}{2} < x+2 < \frac{5}{2} \Rightarrow -\frac{9}{2} < x < \frac{1}{2}.$$

Дослідимо збіжність ряду на кінцях інтервалу збіжності. При $x = \dfrac{1}{2}$ одержимо числовий ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{1+4n}$ – розбіжний, при $x = -\dfrac{9}{2}$ знакопереміжний ряд $\sum\dfrac{(-1)^n}{1+4n}$, який збігається за теоремою Лейбніца. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{1+4n}$ – розбіжний, отже даний ряд збігається умовно. Область збіжності: $-\dfrac{9}{2} \le x < \dfrac{1}{2}$.

Приклад: Знайти область збіжності ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n3^n}$.

$$a_n = \frac{1}{n3^n}, \qquad a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)3^{n+1}},$$

$$R = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)3^{n+1}}{n3^n} = 3\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n} = 3\cdot 1 = 3.$$

При $x=-3$ одержуємо ряд: $-1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+..+(-1)^n\frac{1}{n}+\ldots$, який збігається за ознакою Лейбніца. При $x=3$ одержуємо гармонічний ряд, який, як відомо, розбігається. Область збіжності ряду: $[-3,3)$.

1.3.4 Розвинення функцій в ряд. Наближені обчислення за допомогою рядів

Нехай функція $f(x)$ нескінченно диференційована в деякому околі точки x_0, тоді наступний ряд має назву ряда Тейлора функції $f(x)$ за степенями $(x-x_0)$:

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+$$

$$+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n.$$

Розглянемо приклади розвинення елементарних функцій в степеневий ряд по степеням x, тобто в ряд Тейлора коли $x_0=0$:

1. $e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}\ldots \qquad (|x|<\infty)$

2. $\sin x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^{2n-1}}{(2n-1)!}=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\ldots+\frac{(-1)^{n-1}\cdot x^{2n-1}}{(2n-1)!}+\ldots \ (|x|<\infty)$

3. $\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\ldots \qquad (|x|<\infty)$

4. $\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\ldots \ (-1<x\le 1)$

5. $\operatorname{arctg} x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^{2n-1}}{2n-1}=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\ldots+\frac{(-1)^{n-1}\cdot x^{2n-1}}{2n-1}+\ldots \ (|x|\le 1)$

6. $(1+x)^{\alpha}=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots[\alpha-(n-1)]}{n!}\cdot x^n=1+\frac{\alpha}{1!}x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+$

$$+\ldots+\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots[\alpha-(n-1)]}{n!}x^n+\ldots \qquad (|x|<1)$$

7. $$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n=1+x+x^2+\ldots+x^n+\ldots \qquad (|x|<1).$$

Приклад: Розвинути в степеневий ряд функцію $f(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x}}$ за степенями x, використовуючи розвинення у ряд основних елементарних функцій.

Задану функцію можна записати таким чином $f(x)=(1+x)^{-\frac{1}{2}}$. Для того щоб знайти шуканий ряд, досить в розвиненні

$$(1+x)^m=1+\frac{m}{1!}x+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\ldots+\frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!}x^n+\ldots$$

покласти $m=-\frac{1}{2}$. Тоді одержуємо:

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}}=1-\frac{1}{2}x+\frac{-\frac{1}{2}\left(-\frac{3}{2}\right)}{2!}x^2+\frac{-1\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)}{3!}x^3+\ldots$$

або $$\frac{1}{\sqrt{1+x}}=1-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2^2}\frac{3}{2!}x^2-\frac{1\cdot3\cdot5}{2^3 3!}x^3+\frac{1\cdot3\cdot5\cdot7}{2^4 4!}x^4+\ldots$$

Приклад: Обчислити $\int_0^1 e^{-x^2}dx$ з точністю до 0,001.

Так як для даного інтеграла не можна застосувати формулу Ньютона – Лейбніца, то розвинемо підінтегральну функцію e^{-x^2} в степеневий ряд, а потім будемо інтегрувати одержаний збіжний ряд у вказаних межах. Замінивши в розвиненні функції

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots$$

x на $-x^2$ одержимо шукане розвинення:

$$e^{-x^2}=1-\frac{x^2}{1!}+\frac{x^4}{2!}-\frac{x^6}{3!}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{n!}+\ldots$$

Отже

$$\int_0^1 e^{-x^2}dx=\int_0^1\left[1-\frac{x^2}{1!}+\frac{x^4}{2!}-\frac{x^6}{3!}+\frac{x^8}{4!}-\frac{x^{10}}{5!}+\ldots\right]dx=$$

$$=\left[x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5\cdot 2!}-\frac{x^7}{3!\cdot 7}+\frac{x^9}{4!\cdot 9}-\frac{x^{11}}{5!\cdot 11}+\ldots\right]_0^1=$$

$$=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{10}-\frac{1}{42}+\frac{1}{216}-\frac{1}{1320}+\ldots$$

Одержаний знакопереміжний ряд задовольняє умовам теореми Лейбница. Так як шостий член цього ряду за абсолютною величиною менше 0,001, то для забезпечення точності досить врахувати тільки суму перших п'яти членів. Таким чином:

$$\int_0^1 e^{-x^2}dz\approx 1-\frac{1}{3}+\frac{1}{10}-\frac{1}{42}+\frac{1}{216}\approx 0{,}747\,.$$

Приклад: Знайти зазначене число членів розвинення в ряд розв'язку диференційного рівняння при заданих початкових умовах

$$y''=x\sin y' \qquad y(1)=0\,, \qquad y'(1)=\pi/2 \qquad (\text{до } x^4).$$

Точка $x=1$ не є особовою для даного рівняння, тому його розв'язок можна шукати у вигляді ряду:

$$y=f(1)+\frac{f'(1)}{1!}(x-1)+\frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2+\frac{f'''(1)}{3!}(x-1)^3$$

маємо $f(1)=0$, $f'(1)=\pi/2$. Знайдемо другу і третю похідні:

$$f''(1)=1\cdot\sin\frac{\pi}{2}=1\,,\ f'''(x)=\sin y'+xy''\cos y'\,,\ f'''(1)=1$$

Підставляючи знайдені значення похідних в шуканий ряд, отримаємо розв'язок даного рівняння

$$y=\frac{\pi}{2}(x-1)+\frac{1}{2}(x-1)^2+\frac{1}{6}(x-1)^3\,.$$

Приклад: Знайти зазначене число членів розвинення в ряд розв'язку диференційного рівняння при заданих початкових умовах

$y'' = xy$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$ (до x^3)

Розв'язок рівняння будемо шукати у вигляді ряду:

$$y = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3$$

маємо $f(0) = 1$, $f'(0) = 1$. Знайдемо другу і третю похідні з рівняння:

$f''(1) = 0 \cdot 1 = 0$, $f'''(x) = y + xy'$, $f'''(0) = 1 + 0 \cdot 1 = 1$.

Підставляючи знайдені значення похідних в шуканий ряд, отримаємо розв'язок даного рівняння

$$y = 1 + \frac{1}{1}x + \frac{0}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 = 1 + x + \frac{1}{6}x^3 .$$

1.3.5 Розвинення функцій в ряд Фур'є

Для функції з будь-яким періодом $2l$ розвинення в ряд Фур'є, коли воно можливе, має такий вигляд:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi x}{l} + b_n \sin\frac{n\pi x}{l}\right).$$

Коефіцієнти a_0, a_n, b_n обчислюються за формулами:

$$a_0 \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)dx , \quad a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx , \quad b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx .$$

Якщо функція $f(x)$ парна, то розвинення в ряд Фур'є має вигляд:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{l} ,$$

де $a_0 = \frac{2}{l}\int_{0}^{l} f(x)dx$, $a_n = \frac{2}{l}\int_{0}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx$.

Якщо функція $f(x)$ непарна, то:

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{l},\text{ де } b_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx\,.$$

Приклад: Розвинути в ряд Фур'є функцію $f(x)=\frac{x}{2}$ в інтервалі $(0,2\pi)$.

Задана функція не є парною і не є непарною, тому обчислюємо її коефіцієнти Фур'є за загальними формулами, покладаючи $l=\pi$ і беручи границями інтегралів 0 та 2π, оскільки функція задана в інтервалі $\left(0,2\pi\right)$:

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{x}{2}\cos nxdx=\frac{1}{2\pi}\left(\frac{x}{n}\sin nx\ \Big|_0^{2\pi}-\frac{1}{n}\int_0^{2\pi}\sin nxdx\right)= \qquad n=1,2...$$

$$=\frac{1}{2\pi n^2}\cos nx\Big|_0^{2\pi}=\frac{\cos 2\pi n-1}{2\pi n^2}=0$$

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{x}{2}dx=\frac{x^2}{4\pi}\Bigg|_0^{2\pi}=\pi$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{x}{2}\sin nxdx=\frac{1}{2\pi}\left(\frac{\sin nx}{n^2}-\frac{x\cos nx}{n}\right)\Bigg|_0^{2\pi}=-\frac{1}{n}$$

Підставляючи одержані значення коефіцієнтів a_n та b_n в тригонометричний ряд Фур'є, одержимо шукане розвинення даної функції в ряд Фур'є:

$$\frac{x}{2}=\frac{\pi}{2}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}=\frac{\pi}{2}-\frac{\sin x}{1}-\frac{\sin 2x}{2}-\frac{\sin 3x}{3}-\dots\,.$$

Приклад: Розвинути в ряд Фур'є функцію

$$f(x)=\begin{cases}2x-1, x\in(-3;0)\\ 3; x\in(0;3)\end{cases}$$

Функція є періодичною з періодом $2l=6$, отже, $l=3$. Очевидно, що функція є ні парною, ні непарною, отже:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{3}+b_n\sin\frac{n\pi x}{3}\right).$$

Обчислимо коефіцієнти ряду.

$$a_0=\frac{1}{3}\int_{-3}^{3}f(x)dx=\frac{1}{3}\left[\int_{-3}^{0}(2x-1)dx+\int_{0}^{3}3\cdot dx\right],$$

$$I_1=\int_{-3}^{0}(2x-1)dx=2\cdot\frac{x^2}{2}\bigg|_{-3}^{0}-x\big|_{-3}^{0}=0-9-(0+3)=-12,$$

$$I_2=\int_{0}^{3}3\,dx=3x\big|_{0}^{3}=9-0=9,$$

$$a_0=\frac{1}{3}(-12+9)=-1;\qquad a_n=\frac{1}{3}\int_{-3}^{3}f(x)\cos\frac{n\pi x}{3}dx=$$

$$=\frac{1}{3}\left[\int_{-3}^{0}(2x-1)\cos\frac{n\pi x}{3}dx+\int_{-3}^{0}3\cdot\cos\frac{n\pi x}{3}dx\right],$$

$$I_1=\int_{-3}^{0}(2x-1)\cos\frac{n\pi x}{3}dx=$$

$$=\left\{\begin{matrix} u=2x-1 & du=2\cdot dx \\ dv=\cos\dfrac{n\pi\ x}{3}dx & v=\dfrac{3}{n\pi}\sin\dfrac{n\pi\ x}{3}\end{matrix}\right\}=$$

$$=(2x-1)\cdot\frac{3}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{3}\bigg|_{-3}^{0}-\frac{3}{n\pi}\cdot 2\int_{-3}^{0}\sin\frac{n\pi x}{3}dx=$$

$$=\frac{3}{n\pi}(2x-1)\sin\frac{n\pi x}{3}\bigg|_{-3}^{0}-\frac{6}{n\pi}\cdot\left(-\frac{3}{n\pi}\right)\cdot\cos\frac{n\pi x}{3}\bigg|_{-3}^{0}=$$

$$=\frac{3}{n\pi}\cdot\left(-1\cdot\underbrace{\sin 0}_{0}-(-7)\underbrace{\sin\frac{n\pi\cdot(-3)}{3}}_{0}\right)+$$

$$+\frac{18}{n^2\pi^2}\cdot\left(\cos 0-\cos\frac{n\pi\cdot(-3)}{3}\right)=$$

$$=\frac{18}{n^2\pi^2}\cdot\left(\underbrace{\cos 0}_{1}-\underbrace{\cos n\pi}_{(-1)^n}\right)=\frac{18}{n^2\pi^2}\cdot\left(1-(-1)^n\right),$$

$$I_2=\int_0^3 3\cdot\cos\frac{n\pi x}{3}dx=3\frac{3}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{3}\bigg|_0^3=\frac{9}{n\pi}\left(\sin\frac{n\pi\cdot 3}{3}-\sin 0\right)=0,$$

$$a_n=\frac{1}{3}\cdot\left[\frac{18}{n^2\pi^2}\cdot\left(1-(-1)^n\right)+0\right]=\frac{6}{n^2\pi^2}\cdot\left(1-(-1)^n\right);$$

$$b_n=\frac{1}{3}\int_{-3}^{3}f(x)\sin\frac{n\pi x}{3}dx=$$

$$=\frac{1}{3}\left[\int_{-3}^{0}(2x-1)\sin\frac{n\pi x}{3}dx+\int_{-3}^{0}3\cdot\sin\frac{n\pi x}{3}dx\right],$$

$$I_1=\int_{-3}^{0}(2x-1)\sin\frac{n\pi x}{3}dx=\left\{\begin{matrix}u=2x-1 & du=2\cdot dx\\ dv=\sin\frac{n\pi x}{3}dx & v=-\frac{3}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{3}\end{matrix}\right\}=$$

$$=(2x-1)\cdot\left(-\frac{3}{n\pi}\right)\cos\frac{n\pi x}{3}\bigg|_{-3}^{0}-\left(-\frac{3}{n\pi}\right)\cdot 2\int_{-3}^{0}\cos\frac{n\pi x}{3}dx=$$

$$=-\frac{3}{n\pi}(2x-1)\cos\frac{n\pi x}{3}\bigg|_{-3}^{0}+\frac{6}{n\pi}\cdot\frac{3}{n\pi}\cdot\sin\frac{n\pi x}{3}\bigg|_{-3}^{0}=$$

$$=\frac{-3}{n\pi}\left(-\cos 0-(-7)\cdot\cos\frac{-3n\pi}{3}\right)+\frac{18}{n^2\pi^2}\left(\underbrace{\sin 0}_{0}-\underbrace{\sin\frac{-3n\pi}{3}}_{0}\right)=$$

$$=-\frac{3}{n\pi}\cdot\left(-1+7\cdot\underbrace{\cos(-n\pi)}_{(-1)^n}\right)=\frac{3}{n\pi}\cdot\left(1-7\cdot(-1)^n\right),$$

$$I_2=\int_0^3 3\cdot\sin\frac{n\pi x}{3}dx=3\cdot\left(-\frac{3}{n\pi}\right)\cos\frac{n\pi x}{3}\bigg|_0^3=$$

$$-\frac{9}{n\pi}\left(\cos\frac{n\pi\cdot 3}{3}-\cos 0\right)=-\frac{9}{n\pi}\left((-1)^n-1\right)=\frac{9}{n\pi}\left(1-(-1)^n\right),$$

$$b_n=\frac{1}{3}\cdot\left[\frac{3}{n\pi}\cdot\left(1-7\cdot(-1)^n\right)+\frac{9}{n\pi}\cdot\left(1-(-1)^n\right)\right]=\frac{1}{n\pi}\cdot\left(4-10\cdot(-1)^n\right)$$

Таким чином, ряд має вигляд

$$f(x)=-\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{6}{n^2\pi^2}\left(1-(-1)^n\right)\cos\frac{n\pi x}{3}+\frac{1}{n\pi}\left(4-10\cdot(-1)^n\right)\sin\frac{n\pi x}{3}\right).$$

2 ІНДИВІДУАЛЬНІ ЗАВДАННЯ

2.1 Інтегральне числення

2.1.1 Знайти безпосереднім інтегруванням

1. $a)\int \frac{3+\sqrt[3]{x^2}-2x}{\sqrt{x}}dx$ $\qquad b)\int \sin(2x-3)dx$

2. $a)\int \frac{2x^2-3\sqrt{x}-1}{2x}dx$ $\qquad b)\int \sin(5-3x)dx$

3. $a)\int \frac{3\sqrt{x}+4x^2-5}{2x^2}dx$ $\qquad b)\int \cos(3+2x)dx$

4. $a)\int \frac{2\sqrt{x}-x^2+3}{\sqrt[3]{x}}dx$ $\qquad b)\int \cos(5-2x)dx$

5. $a)\int \frac{\sqrt[4]{x}-2x+5}{x^2}dx$ $\qquad b)\int \sin(8x-3)dx$

6. $a)\int \frac{2x^3-\sqrt{x}+4}{\sqrt{x}}dx$ $\qquad b)\int \sin(3-4x)dx$

7 $a)\int \left(\sqrt[3]{x}-\frac{2\sqrt[4]{x}}{x}+3\right)dx$ $\qquad b)\int \cos(3x+5)dx$

8. $a)\int \frac{2x^3-\sqrt{x^5}+1}{\sqrt{x}}dx$ $\qquad b)\int \cos(4x-1)dx$

9. $a)\int \frac{3x^2-\sqrt[5]{x}+2}{x}dx$ $\qquad b)\int \sin(3x+4)dx$

10. $a)\int \frac{2x^3-\sqrt{x}+4}{x^2}dx$ $\qquad b)\int \cos(2x+5)dx$

11. $a)\int \frac{\sqrt[6]{x^5}+5x^2+3}{x}dx$ $\qquad b)\int \cos(4x-7)dx$

12. $a)\int\left(x\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x^3}}+1\right)dx$ $\qquad b)\int\sin(2-5x)dx$

13. $a)\int\left(x^2-\frac{\sqrt[6]{x}}{x}-3\right)dx$ $\qquad b)\int\cos(2-7x)dx$

14. $a)\int\frac{\sqrt[3]{x^2}-2x^5+3}{x}dx$ $\qquad b)\int\sin(8x+3)dx$

15. $a)\int\left(\frac{\sqrt[3]{x}}{x}+2x^3-4\right)dx$ $\qquad b)\int\cos(1-6x)dx$

16. $a)\int\frac{\sqrt{x^3}-3x^4+2}{x}dx$ $\qquad b)\int\sin(13x+1)dx$

17. $a)\int\left(2x^3-3\sqrt{x^5}+\frac{4}{x}\right)dx$ $\qquad b)\int\cos(4-9x)dx$

18. $a)\int\frac{2x^3-\sqrt{x^3}+5}{x^2}dx$ $\qquad b)\int\sin(11x+4)dx$

19. $a)\int\frac{3x^2-\sqrt{x^3}+7}{x}dx$ $\qquad b)\int\cos(10x+5)dx$

20. $a)\int\frac{3x^4-2\sqrt[3]{x^2}+1}{x^2}dx$ $\qquad b)\int\sin(3-11x)dx$

21. $a)\left(\sqrt[5]{x^2}-\frac{2}{x^3}+4\right)dx$ $\qquad b)\int\cos(5x-1)dx$

22. $a)\int\frac{\sqrt{x}-2x^3+6}{x}dx$ $\qquad b)\int\cos(2-17x)dx$

23. $a)\int\frac{\sqrt[5]{x}-2x^3+4}{x^2}dx$ $\qquad b)\int\sin(\frac{3}{2}x+1)dx$

24. $a)\int\left(\sqrt{x}-\frac{3x^2}{\sqrt{x^3}}+2\right)dx$ $\qquad b)\int\cos(1-0,5x)dx$

25. $a)\int\left(\sqrt[5]{x}-\dfrac{4}{x^5}+2\right)dx$ $\qquad b)\int\sin(x+1)dx$

26. $a)\int\dfrac{\sqrt[7]{x^6}-2x^2+3}{x}dx$ $\qquad b)\int\cos(0{,}5+2x)dx$

27. $a)\int\left(\dfrac{\sqrt[3]{x}}{x}-\dfrac{2}{x^3}+1\right)dx$ $\qquad b)\int\cos(18-4x)dx$

28. $a)\int\left(\dfrac{2x^2}{\sqrt{x}}-\dfrac{5}{x}+6\right)dx$ $\qquad b)\int\sin(\dfrac{x}{2}+5)dx$

29. $a)\int\left(\dfrac{\sqrt[3]{x^2}}{x}-\dfrac{7}{x^3}+5\right)dx$ $\qquad b)\int\cos(9x-1)dx$

30. $a)\int\left(\dfrac{5x^2}{\sqrt{x}}-\sqrt[3]{x^2}+2\right)dx$ $\qquad b)\int\cos(2x-10)dx$

2.1.2 Знайти інтеграл заміною змінної.

1. $\int\dfrac{dx}{x\ln 2x}dx$

2. $\int\dfrac{\arccos^3 2x}{\sqrt{1-4x^2}}dx$

3. $\int\dfrac{\sin 4x}{\sqrt[3]{\cos 4x}}dx$

4. $\int\dfrac{\sqrt{ctg^3 5x}}{\sin^2 5x}dx$

5. $\int\dfrac{\cos\ln x}{x}dx$

6. $\int\sin^6 3x\cos 3x dx$

7. $\int\dfrac{tg^4 7x}{\cos^2 7x}dx$

8. $\int e^{x^3+1}x^2dx$

9. $\int\sqrt{\dfrac{\arcsin x}{1-x^2}}dx$

10. $\int\dfrac{arctg^4 8x}{1+64x^2}dx$

11. $\int\dfrac{e^x}{1+e^x}dx$

12. $\int\dfrac{dx}{\cos^2 x\sqrt[7]{tg^3 x}}$

13. $\int \frac{\sqrt[4]{arctg 2x}}{1+4x^2}dx$

14. $\int \frac{dx}{(x+4)\ln^2(x+4)}$

15. $\int e^{7x^2+8}xdx$

16. $\int \frac{xdx}{\sqrt{2+x^2}}$

17 $\int \frac{x^2dx}{(3x^3-9)^{10}}$

18. $\int e^{\cos 3x}\sin 3xdx$

19. $\int \frac{3^x dx}{\sqrt{1-9^x}}$

20. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\arcsin x}$

21 $\int 2^{x^2} xdx$

22. $\int \frac{e^x dx}{\sqrt{e^{2x}+1}}$

23 $\int \frac{xdx}{1+x^4}$

24. $\int \frac{\cos xdx}{\sqrt{(\sin x+8)^5}}$

25 $\int \frac{x^2dx}{x^6+16}$

26. $\int \frac{xdx}{e^{3x^2+2}}$

27. $\int \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$

28. $\int \frac{\arcsin^8 3x}{\sqrt{1-9x^2}}dx$

29. $\int \frac{\sqrt[3]{\ln^4(x-5)}}{x-5}dx$

30. $\int \left(\frac{5x^4+1}{4}\right)^8 x^3dx$

2.1.3 Знайти інтеграли від функції, що містить квадратний тричлен.

1. $\int \frac{2x-1}{x^2-6x+8}dx$

2. $\int \frac{5x+8}{\sqrt{2x^2+x+5}}dx$

3. $\int \frac{xdx}{\sqrt{4+8x-x^2}}$

4. $\int \frac{5x}{3x^2+5x+1}dx$

5. $\int \frac{3x+1}{x^2-4x-2}dx$

6. $\int \frac{x-1}{\sqrt{3x^2-9x+6}}dx$

7. $\int \frac{x-3}{\sqrt{2x^2-4x-1}}dx$

8. $\int \frac{5x+3}{2x^2-6x+1}dx$

9. $\int \frac{2x-1}{3+x-2x^2}dx$

10. $\int \frac{3x+2}{\sqrt{x^2-6x+8}}dx$

11. $\int \frac{x-1}{\sqrt{3x^2-x+5}}dx$

12. $\int \frac{11x-7}{2x^2-2x+1}dx$

13. $\int \frac{2x+4}{3x^2+x-5}dx$

14. $\int \frac{6x+5}{\sqrt{3x^2-12x+3}}dx$

15. $\int \frac{x+5}{\sqrt{3-6x-x^2}}dx$

16. $\int \frac{12x-9}{x^2-5x+8}dx$

17. $\int \frac{2x+1}{1+x-3x^2}dx$

18. $\int \frac{x+3}{\sqrt{2x^2+x+2}}dx$

19. $\int \frac{2x-10}{\sqrt{1+x-x^2}}dx$

20. $\int \frac{2x-1}{x^2-x+1}dx$

21. $\int \frac{7x-2}{x^2-5x+1}dx$

22. $\int \frac{2x-7}{\sqrt{4+2x-x^2}}dx$

23. $\int \frac{x-18}{\sqrt{4x^2+x-5}}dx$

24. $\int \frac{x-1}{2x^2+3x+1}dx$

25. $\int \frac{3x+7}{2+3x-x^2}dx$

26. $\int \frac{3x+4}{\sqrt{2+5x-x^2}}dx$

27. $\int \frac{2x+3}{\sqrt{2x^2-x+6}}dx$

28. $\int \frac{x-5}{2x^2+x-4}dx$

29. $\int \frac{3x-9}{x^2-6x+1}dx$

30. $\int \frac{4x+1}{\sqrt{x^2+x+2}}dx$

2.1.4 Інтегруванням частинами знайти інтеграл.

1. $\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx$

2. $\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{x+1}}dx$

3. $\int \arcsin 2x dx$

4. $\int x \sin 2x dx$

5. $\int x arctg x dx$

6. $\int \frac{\ln x}{x^3} dx$

7. $\int \frac{x}{\sin^2 x} dx$

8. $\int \arccos 2x dx$

9. $\int (x+2) \ln 3x dx$

10. $\int \frac{x \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx$

11. $\int x^2 arctg x dx$

12. $\int \frac{\ln \cos x}{\cos^2 x} dx$

13. $\int (x^2 + x) e^{-x} dx$

14. $\int \sqrt{x}\, arctg \sqrt{x} dx$

15. $\int x^2 \cos \frac{x}{3} dx$

16. $\int x^2 \sin 2x dx$

17. $\int \sqrt{x} \ln(4x) dx$

18. $\int (x^2 - 4) e^x dx$

19. $\int (x+1)^2 \sin x dx$

20. $\int \ln \frac{2-x}{2+x} dx$

21. $\int x^2 arcctg x dx$

22. $\int (x^2 + 3x) e^{-4x} dx$

23. $\int (x^2 + 8) e^{2x} dx$

24. $\int x^2 (\cos 2x + 3) dx$

25. $\int (\sin 5x - 2) x^2 dx$

26. $\int \ln^2 x dx$

27. $\int \frac{x}{\cos^2 x} dx$

28. $\int \frac{x\, arctg x}{\sqrt{1+x^2}} dx$

29. $\int \frac{\ln(\sin x)}{\sin^2 x} dx$

30. $\int (2x-7) \cos \frac{x}{5} dx$

2.1.5 Знайти інтеграл від ірраціональної функції.

1. $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3} + 1} dx$

2. $\int \frac{dx}{x(\sqrt{x} + \sqrt[3]{x^2})}$

3. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}+2\sqrt[6]{x}}$

4. $\int \frac{x^2+\sqrt{1+x}}{\sqrt[3]{1+x}}dx$

5. $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x+1}}$

6. $\int \frac{\sqrt[4]{x}+\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}dx$

7. $\int \frac{\sqrt[6]{x-1}}{\sqrt[3]{x-1}+\sqrt{x-1}}dx$

8. $\int \frac{\sqrt{x+3}}{1+\sqrt[3]{x+3}}dx$

9. $\int \frac{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}+\sqrt[6]{x}}dx$

10. $\int \frac{\sqrt[6]{x+3}}{\sqrt[3]{x+3}-\sqrt{x+3}}dx$

11. $\int \frac{\sqrt{x}-1}{(\sqrt[3]{x}+1)\sqrt{x}}dx$

12. $\int \frac{\sqrt{x}}{3x+\sqrt[3]{x^2}}dx$

13. $\int \frac{\sqrt{x}}{x-4\sqrt[3]{x^2}}dx$

14. $\int \frac{\sqrt[6]{3x+1}+1}{\sqrt{3x+1}+\sqrt[3]{3x+1}}dx$

15. $\int \frac{\sqrt{x}}{1-\sqrt[4]{x}}dx$

16. $\int \frac{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x}-\sqrt[6]{x}-1}dx$

17. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(2x+1)^2}-\sqrt{2x+1}}$

18. $\int \frac{x+\sqrt{x}+\sqrt[3]{x^2}}{x\cdot\left(1+\sqrt[3]{x}\right)}dx$

19. $\int \frac{\sqrt{x}}{x-\sqrt[3]{x^2}}dx$

20. $\int \frac{\sqrt{x}}{3x+\sqrt[3]{x^2}}dx$

21. $\int \frac{x-\sqrt[3]{x^2}}{x\cdot\left(1+\sqrt[6]{x}\right)}dx$

22. $\int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt[4]{x}}dx$

23. $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[5]{x}+1}dx$

24. $\int \frac{\sqrt[3]{x}}{x\cdot\left(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}\right)}dx$

25. $\int \frac{1+x}{x+\sqrt{x}}dx$

26. $\int \frac{x}{\sqrt{x-1}}dx$

27. $\int \frac{x^2}{\sqrt{x+2}}dx$

28. $\int \frac{\sqrt{x+4}}{x}dx$

29. $\int \frac{1-\sqrt{x}}{x-2\sqrt{x}}dx$

30. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}$

2.1.6 Знайти інтеграл від дробово-раціональної функції.

1. $\int \frac{x^3+1}{x^3-x^2}dx$

2. $\int \frac{3x^2-17x+2}{(x-1)(x^2+5x+6)}dx$

3. $\int \frac{3x^2+1}{(x-1)(x^2-1)}dx$

4. $\int \frac{x+2}{x^3-x^2}dx$

5. $\int \frac{4x^2-17x}{(x-2)(x^2-2x-3)}dx$

6. $\int \frac{3x+13}{(x-1)(x^2+2x+5)}dx$

7. $\int \frac{x^2-6x+8}{x^3+8}dx$

8. $\int \frac{2x^2+1}{x^3-2x^2+x}dx$

9. $\int \frac{3x^2+2}{x(x+1)^2}dx$

10. $\int \frac{7x-2}{(x-1)(x^2+4)}dx$

11. $\int \frac{4x^2-2}{(x-3)(x^2-3x+4)}dx$

12. $\int \frac{4x}{(x^2-1)(x+1)}dx$

13. $\int \frac{x+2}{x^3-2x^2+x}dx$

14. $\int \frac{x^2-3x+2}{x^3+2x^2+x}dx$

15. $\int \frac{x^3-3}{(x-1)(x^2-1)}dx$

16. $\int \frac{2x^2+4x+20}{(x+1)(x^2-4x+9)}dx$

17. $\int \frac{5x}{x^4+3x^2-4}dx$

18. $\int \frac{6-9x}{x^3+8}dx$

19. $\int \frac{3-9x}{x^3-1}dx$

20. $\int \frac{x^2+3x+2}{x^3-1}dx$

21. $\int \frac{x^2+1}{(x-1)^3(x+3)}dx$

22. $\int \frac{x^2+x+5}{x(x+3)(x+2)}dx$

23. $\int \frac{x^3+4x-3}{x^4+4x^2}dx$

24. $\int \frac{x^3-2x+5}{x^4-1}dx$

25. $\int \frac{x}{(x^2+1)(x-1)}dx$

26. $\int \frac{4x+2}{x^4+4x^2}dx$

27. $\int \frac{x^3+x^2-x-3}{x^4-x^2}dx$

28. $\int \frac{x^3+2}{x^3+x^2-2x}dx$

29. $\int \frac{x^2}{x^4+5x^2+4}dx$

30. $\int \frac{2x^5-2x^3-x^2}{1-x^4}dx$

2.1.7 Знайти інтеграл від тригонометричної функції

1. $\int \frac{dx}{5+2\sin x+3\cos x}$

2. $\int \cos^4 3x \cdot \sin^2 3x dx$

3. $\int \frac{dx}{5+4\sin x}$

4. $\int \sqrt[5]{\sin^4 x} \cdot \cos^3 x dx$

5. $\int \cos^3 x \cdot \sin^4 x dx$

6. $\int \frac{\cos^3 x}{\sqrt[3]{\sin^2 x}}dx$

7. $\int \frac{7+6\sin x-5\cos x}{1+\cos x}dx$

8. $\int \frac{dx}{3+\cos x+\sin x}$

9. $\int \frac{6\sin x+\cos x}{1+\cos x}dx$

10. $\int \frac{dx}{3\cos x-4\sin x}$

11. $\int \frac{tgx}{1-ctgx}dx$

12. $\int \frac{dx}{4\sin^2 x-2\sin x\cos x}$

13. $\int \frac{dx}{1+3\cos^2 x}$

14. $\int \frac{2tgx+3}{\sin^2 x+2\cos^2 x}dx$

15. $\int \frac{dx}{\cos x \cdot \sin^3 x}$

16. $\int \frac{dx}{3+\cos x+\sin x}$

17. $\int \frac{6\sin x+\cos x}{1+\cos x}dx$

18. $\int \frac{dx}{3\cos x-4\sin x}$

19. $\int \frac{dx}{8\sin^2 x - 16\sin x \cdot \cos x}$

20. $\int \frac{\cos^2 x}{1+\sin^2 x} dx$

21. $\int \frac{dx}{\sin^2 x - 4\sin x \cos x + 5\cos^2 x}$

22. $\int \frac{dx}{6 - 3\cos^2 x}$

23. $\int \frac{tgx}{\sin x + 3\cos^2 x} dx$

24. $\int \frac{\sin^2 x}{3\sin^2 x - \cos^2 x} dx$

25. $\int \frac{3tgx - 1}{\sin^2 x + 4\cos^2 x} dx$

26. $\int \frac{dx}{2 - 3\cos x + \sin x}$

27. $\int \frac{dx}{3\sin x - \cos x}$

28. $\int \frac{dx}{4 - 4\sin x + 3\cos x}$

29. $\int \frac{dx}{5\sin^2 x - 3\cos^2 x}$

30. $\int \frac{dx}{3\sin x - 2\cos x + 1}$

2.1.8 Знайти визначений інтеграл.

1. $\int\limits_0^{\sqrt{\pi/4}} \frac{xdx}{\cos^2(x^2)}$

2. $\int\limits_2^3 \frac{\ln(y-1)}{(y-1)} dy$

3. $\int\limits_{\pi/6}^{\pi/2} \cos x \sin^3 x dx$

4. $\int\limits_{-1}^{0} xe^{-x^2} dx$

5. $\int\limits_1^e \frac{\ln^2 x}{x} dx$

6. $\int\limits_{-1/2}^{1/2} \frac{\arccos 2x}{\sqrt{1-4x^2}} dx$

7. $\int\limits_{-1}^{0} \frac{dx}{4x^2 - 9}$

8. $\int\limits_0^{\sqrt{\pi}} x\sin(x^2) dx$

9. $\int\limits_1^{\sqrt{2}} \frac{xdx}{\sqrt{4-x^2}}$

10. $\int\limits_0^{\pi/6} \sin x \cos x dx$

11. $\int\limits_{-1/3}^{-2/3} \frac{dx}{e^{3x}}$

12. $\int\limits_0^{\pi/3} e^{-Cosx} \sin x dx$

13. $\int_0^1 \frac{x^2dx}{1+x^3}$

14. $\int_1^4 \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$

15. $\int_1^{e^3} \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x}dx$

16. $\int_1^4 \frac{xdx}{\sqrt{1+3x^2}}$

17. $\int_0^{1/2} \frac{arctg(2x)dx}{4x^2+1}$

18. $\int_0^{\pi/2} \sqrt{\sin x}\cos xdx$

19. $\int_1^2 \frac{\ln(x+1)}{x+1}dx$

20. $\int_0^1 x^2 e^{-x^3/3}dx$

21. $\int_0^{\pi/9} \frac{tg3xdx}{\cos^2 3x}$

22. $\int_{1/2}^1 \frac{\arcsin(1-x)}{\sqrt{1-(1-x)^2}}dx$

23. $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{1+x^2}\,arctg\,\frac{1}{x}\,dx$

24. $\int_0^1 \frac{\arcsin(x/2)}{\sqrt{4-x^2}}dx$

25. $\int_1^2 \frac{\sqrt{\ln 3x}}{x}dx$

26. $\int_0^4 x\cdot\sqrt[3]{x^2+9}\,dx$

27. $\int_{-1}^0 \sqrt[4]{1-2x^3}\,x^2dx$

28. $\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\cos xdx}{\sin^2 x}$

29. $\int_0^2 \frac{xdx}{\sqrt{2x^2+1}}$

30. $\int_{\pi/12}^{\pi/6} \frac{ctg^2 3x}{\sin^2 3x}dx$

2.1.9 Обчислити невласні інтеграли або довести їх розбіжність.

1. а) $\int_0^\infty e^{-3x}xdx$ б) $\int_{-1}^1 \frac{x-1}{\sqrt[3]{x^5}}dx$

2. а) $\int\limits_{1}^{\infty} \frac{arctgx}{x} dx$ б) $\int\limits_{0}^{2} \ln x \, dx$

3. а) $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{x}{\sqrt[3]{(x^2+1)^5}} dx$ б) $\int\limits_{0}^{1/2} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$

4. а) $\int\limits_{1}^{\infty} \frac{\sin x}{2+\cos x} dx$ б) $\int\limits_{1}^{e} \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$

5. а) $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{x}{1+x^4} dx$ б) $\int\limits_{0}^{1} \frac{x^2+2}{\sqrt{x^3}} dx$

6. а) $\int\limits_{1}^{\infty} \frac{arctg 2x}{1+4x^2} dx$ б) $\int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

7. а) $\int\limits_{e}^{\infty} \frac{dx}{x \ln^3 x}$ б) $\int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2}$

8. а) $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{xdx}{\sqrt[3]{x^2+5}}$ б) $\int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt[3]{x-1}}$

9. а) $\int\limits_{\sqrt{3}}^{\infty} \frac{xdx}{x^4+9}$ б) $\int\limits_{1}^{2} \frac{dx}{x \ln x}$

10. а) $\int\limits_{1}^{\infty} \frac{arctgx}{1+x^2} dx$ б) $\int\limits_{-1}^{1} \frac{x^3 dx}{x^4-1}$

11. а) $\int\limits_{1}^{\infty} \frac{\ln x}{x} dx$ б) $\int\limits_{0}^{9} \frac{dx}{\sqrt{x}}$

12. а) $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{x^3 dx}{1+x^8}$ б) $\int\limits_{0}^{\sqrt{3}} \frac{x^3 dx}{\sqrt[3]{9-x^4}}$

13. а) $\int\limits_{0}^{\infty} e^{-5x} x dx$ б) $\int\limits_{0}^{2} \frac{dx}{\sqrt{2-x}}$

14. а) $\int\limits_{1}^{\infty} \frac{x+5}{\sqrt[3]{x^4}}dx$ б) $\int\limits_{0}^{1} \frac{\arcsin x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$

15. а) $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{arctg^2 3x}{1+9x^2}dx$ б) $\int\limits_{0}^{1} \frac{x^4+1}{\sqrt[3]{x^4}}dx$

16. а) $\int\limits_{2}^{\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x-1}}$ б) $\int\limits_{1}^{e} \frac{dx}{x\sqrt{\ln^3 x}}$

17. а) $\int\limits_{-\infty}^{-1} \frac{7dx}{(x^2-4x)\ln 5}$ б) $\int\limits_{-2}^{2} \frac{dx}{x^3}$

18. а) $\int\limits_{1}^{\infty} \frac{x+5}{\sqrt[3]{x^5}}dx$ б) $\int\limits_{-1}^{1} \frac{x^2dx}{x^3+1}$

19. а) $\int\limits_{1}^{\infty} \frac{dx}{x(1+\ln^2 x)}$ б) $\int\limits_{0}^{1/2} \frac{\arccos 2x\,dx}{\sqrt{1-4x^2}}$

20. а) $\int\limits_{1}^{\infty} \frac{x^3+1}{x^4}dx$ б) $\int\limits_{0}^{5} \frac{dx}{\sqrt[3]{x-4}}$

21. а) $\int\limits_{1}^{\infty} \frac{e^{-\sqrt{x^2-1}}x}{\sqrt{x^2-1}}dx$ б) $\int\limits_{1}^{2} \frac{dx}{\sqrt{(x-1)(2-x)}}$

22. а) $\int\limits_{1}^{\infty} \frac{x^5}{1+2x^6}dx$ б) $\int\limits_{1}^{2} \frac{dx}{\sqrt[5]{4x-x^2-4}}$

23. а) $\int\limits_{1}^{\infty} \frac{dx}{x(1+x)}$ б) $\int\limits_{0}^{\pi/2} \frac{e^{tgx}}{\cos^2 x}dx$

24. а) $\int\limits_{0}^{\infty} x\sin x dx$ б) $\int\limits_{0}^{3} \frac{dx}{\sqrt{x(3-x)}}$

25. а) $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{dx}{1+x^3}$ б) $\int\limits_{0}^{\pi/2} \frac{3\sin^3 x}{\sqrt{\cos x}}dx$

26. а) $\int\limits_{1}^{\infty}\frac{dx}{(1+x)x^2}$ б) $\int\limits_{0}^{2}\frac{x^3+9}{\sqrt{x^3}}dx$

27. а) $\int\limits_{1}^{\infty}arctg3xdx$ б) $\int\limits_{0}^{2}\frac{x^2dx}{\sqrt{64-x^6}}$

28. а) $\int\limits_{-2}^{\infty}\frac{dx}{x^2+4x+9}$ б) $\int\limits_{0}^{1}\frac{x\,dx}{1-x^4}$

29. а) $\int\limits_{-\infty}^{0}\frac{dx}{x^2+2x+2}$ б) $\int\limits_{0}^{2}\frac{\arcsin(x/2)}{\sqrt{4-x^2}}dx$

30. а) $\int\limits_{1}^{\infty}\frac{e^{\frac{1}{x}}dx}{x^2}$ б) $\int\limits_{1/2}^{1}\frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}$

2.1.10 Обчислити площу фігури, обмежену лініями.

1. $\rho=3Cos2\varphi$
2. $y=x^2$; $y=3-x$
3. $y=\sqrt{x}$
4. $\begin{cases}x=7\cos^3 t\\ y=7\sin^3 t\end{cases}$; $\frac{\pi}{4}\le t\le\frac{5\pi}{4}$
5. $\rho=4Cos3\varphi$
6. $y=1+x^3$; $y=9$; $x=0$
7. $\rho=2(1-\cos\varphi)$
8. $\rho^2=2\sin 2\varphi$
9. $\begin{cases}x=4(t-\sin t)\\ y=4(1-\cos t)\end{cases}$; $0\le t\le\pi$
10. $xy=-1$; $x=1$; $x=2$
11. $\rho=2(1+Cos\varphi)$
12. $\rho=2Sin3\varphi$
13. $\rho=2+Cos\varphi$
14. $y^2=1+x$; $y^2=9-x$
15. $x^2+y^2=4$; $x\ge1$
16. $\rho=4\sin^2\varphi$
17. $y^2=9x$; $y=3x$
18. $y^2=4x$; $x^2=4y$
19. $x^2+y^2=1$; $y\ge1$
20. $y=x^2$; $y=2-x^2$

21. $\begin{cases} x = 5\cos t \\ y = 6\sin t \end{cases}$; $0 \le t \le \pi$

22. $y = x^3$; $y = 1$; $x = 0$

23. $y = \cos x$ $y = \sin x$; $x = \dfrac{\pi}{4}$

24. $xy = 6$; $x + y - 7 = 0$

25. $\begin{matrix} y = 2^x, & y = 2x - x^2, \\ x = 0, & x = 2 \end{matrix}$;

26. $x^2 = 4y$ $y^2 = 1 - x$

27. $y = x + 1$; $y = \cos x$; $y = 0$

28. $\begin{cases} x = 2\cos^3 t \\ y = 2\sin^3 t \end{cases}$ $t \in \left(-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{4} \right)$

29 $\begin{cases} x = 2\cos t \\ y = 3\sin t \end{cases}$ $0 \le t \le \pi$

30. $\begin{cases} x = 3(\cos t + t\sin t) \\ y = 3(\sin t - t\cos t) \end{cases}$;

$t \in \left(-\dfrac{\pi}{4}; \dfrac{\pi}{4} \right)$.

2.2 Диференційні рівняння

2.2.1 Розв'язати диференційні рівняння першого порядку

1. а) $y' = \mathrm{tgx} \cdot \mathrm{tgy}$

б) $\left(x - y\cos\dfrac{y}{x} \right)dx + x\cos\dfrac{y}{x}dy = 0$

в) $y' + \dfrac{1 - 2x}{x^2}y = 1$

г) $xy' + y = x^2y^2\ln x$

2. а) $y'\cos^2 x \cdot \mathrm{tgy} + \mathrm{tgx} \cdot \sin^2 y = 0$

б) $y' - \mathrm{ctgx} \cdot y = \dfrac{\cos^2 x}{\sin x}$

в) $x(x + 2y)dx + (x^2 - y^2)dy = 0$

г) $3xy' + 5y = (4x - 5)y^4$

3. а) $\ln y dy + xy dx = 0$

б) $xy' = 2\sqrt{3x^2 + y^2} + y$

в) $y'x\ln x + y = x^3$

г) $y' - \dfrac{2xy}{1 + x^2} = 4\dfrac{\sqrt{y}}{\sqrt{1 + x^2}}\mathrm{arctgx}$

4. а) $y' \cdot y - xe^y = 0$

б) $y'x\ln x - y = x^2\ln^3 x$

в) $x\cos\frac{y}{x}(ydx + xdy) = y\sin\frac{y}{x}(xdy - ydx)$

г) $y' - ytgx = y^2\sin2x$

5. а) $y' = \sqrt{(4 - y^2)/(x^2 + 9)}$ б) $xdy = \left(y + \sqrt{y^2 - 4x^2}\right)dx$

в) $y' + \frac{4xy}{x^2 + 1} = \frac{1}{x^4 - 1}$ г) $(y' + 2xy)e^{-x^2} = (x - 1)y^2$

6. а) $\sqrt{y^2 + 1} \cdot dx = xydy$ б) $xy'\sin\frac{y}{x} + x = y\sin{}^{y}\!/\!_{x}$

в) $y' - \frac{1}{x}y = xtgx$ г) $y' + 4x^3y = 4(x^3 + 1)e^{x^4}y^2$

7. а) $\frac{1 + \cos2x}{1 + \sin y} + y' = 0$ б) $xy' - y = (x + y)\ln\frac{x + y}{x}$

в) $y' - ytgx = \sin2x$ г) $y' + \frac{y}{x} = -x^3y^2$

8. а) $y^2dy + ctgxdx = y^3ctgxdx$ б) $(xy' - y)ctg\frac{y}{x} = x$

в) $y' + \frac{y}{x + 2} = \frac{arctgx}{2 + x}$ г) $2y' + y\cos x = xe^{-\sin x}/y$

9. а) $xdy = x^2e^{-y}dx + 2dy$ б) $(2x + y)dx + (x + 2y)dy = 0$

в) $y' + y\cos x = e^{-\sin x}$ г) $y' - ytgx = -\frac{2}{3}y^4\sin x$

10. а) $dy - 3xdy - \sqrt{y}dx = 0$ б) $x^2y' = y^2 + 6xy + 6x^2$

в) $x(x - 1)y' + y = x(2x - 1)$ г) $y' + 4x^3y = 4y^2e^{x^4}(1 - x^3)$

11. а) $2xdy + ydx + xy(ydy + dx) = 0$

б) $2xy'(x^2 + y^2) = y(y^2 + 2x^2)$ в) $y' - yctgx = 2\sin x$

г) $y' = yctgx + \frac{y^3}{\sin x}$

12. а) $y(2 + e^x)dy = e^xdx$ б) $xy' = 3\sqrt{x^2 + y^2} + y$

в) $y' - \frac{1}{x} y = x^2$ г) $y' + \frac{y}{x+1} = -\frac{1}{2}(x+1)^3 y^3$

13. а) $3x^2 y(1+\ln y)dx = dy$ б) $(2x - y)y' = x + 2y$

в) $y' + y = \ln(e^x + 1)$ г) $8xy' - y = -\frac{1}{y^3\sqrt{x}}$

14. а) $\cos^2 x(1+\mathrm{tg}x)y' = y$ б) $3x^2 y' = y^2 + 10xy + 10x^2$

в) $y' - \frac{x}{x^2+1} y = (x^2+1)^{3/2}$ г) $yy' - 4x - y^2 x = 0$

15. а) $\sqrt{x^2+1}dy - \sqrt{y}xdx = 0$ б) $y' - 3y = e^{-2x}$

в) $(x + y\cos\frac{y}{x})dx - x\cos\frac{y}{x}dy = 0$ г) $y' - xy + y^3 x e^{-x^2} = 0$

16. а) $(1 - x^2)dy - (2xy^2 + xy)dx = 0$ б) $xy' - y = \frac{x}{\mathrm{arctg}(2y/x)}$

в) $y' + y = 3x$ г) $y' + xy = (x-1)e^x y^2$

17. а) $2x^2 ydy = (3 + y^2)dx$ б) $y' - y\mathrm{tg}x = \sin^2 x$

в) $(3x^2 - 2xy)y' = x^2 + 3xy - y^2$ г) $4xy' + y + \frac{1}{y^3\sqrt{x+1}} = 0$

18. а) $(x+2)\cos 2ydx = x^2 \sin 2ydy$ б) $\frac{1}{y'} = \frac{1}{xy + x^3 y^3}$

в) $xy'(3y^2 + 4x^2) = 3y^3 + 8xy^2$ г) $y' + y\mathrm{ctg}x = 3\sin^2 x$

19. а) $xy'\ln y - y = 0$ б) $\frac{xy' - y}{x + y} = \ln\frac{x+y}{x}$

в) $y' - \frac{1}{x} y = x\ln x$ г) $(y' + y^2)(x+1) = -y$

20. а) $(1 - e^x)\sin y \cdot y' = e^x \cos^3 y$ б) $xy' = y + \sqrt{x^2 + y^2}$

в) $y' + y \cdot \mathrm{ctg}x = \frac{\cos^2 x}{\sin^3 x}$ г) $2xy^2 = x\frac{y'}{\ln x} + \frac{y}{\ln x}$

21. а) $6xdx - 2x^2ydy = 6ydy - 3xy^2dx$ б) $xdy = (xtg\frac{y}{x} + y)dx$

в) $y' - ctgx \cdot y = \sin^3 x$ г) $3xy' - 2y = \frac{x^4}{y^2}$

22. а) $xy^2dx - ydy = x^2ydy - xdx$

б) $(x^2 + xy)y' = x^2 + y^2$ в) $y' + ytgx = \frac{1}{4}\cos^2 x \cdot \sin 2x$

г) $2\sin x \cdot y' + y\cos x = y^3(\cos x - \sin^2 x)$

23. а) $(e^x + 5)dy = y^2e^xdx$ б) $-xy - \frac{y^3}{x} = y'(x^2 - 3y^2)$

в) $(x+1)y' = 2y + (x+1)^4$ г) $3y' + 2xy = 2xy^{-2}e^{-2x^2}$

24. а) $e^y(1+x^2)dy - 2x(1+e^y)dx = 0$ б) $y' + xy = x^3y^3$

в) $xy' - y = (x+y)\ln\frac{x+y}{x}$ г) $y' + \frac{y}{\cos^2 x} = \frac{1}{1-\sin^2 x}$

25. а) $2xy^2dx - ydy = yx^2dy - 6xdx$ б) $y'x = 2y\ln\frac{2y}{x}$

в) $y' + \frac{1}{x}y = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ г) $(1-x^2)y' - xy = 2xy^2$

26. а) $ye^{2x}dx + (1+e^{2x})dy = 0$ б) $y' + \frac{y}{x+1} = \sin 2x$

в) $x^3dy + 3y^2xdx + 2x^2ydx = 0$ г) $y - y'\cos x = y^2\cos x$

27. а) $3e^x ctgydx + (1-e^x)dy = 0$ б) $xy' + y = x\cos x$

в) $xy + y^2 = (2x^2 + xy)y'$ г) $y' + \frac{2y}{x} = \frac{2\sqrt{y}}{\cos^2 x}$

28. а) $\sqrt{x}dy = y(3+\sqrt{x})dx$ б) $y' = \frac{y}{x}\ln\frac{y}{x}$

в) $y' + \frac{y}{3+x} = \ln(5x)$ г) $y' - xy - y^3xe^{-x^2} = 0$

29. а) $y^2e^xdy - (e^x + 2)dx = 0$ б) $xydy - y^2dx = (x+y)^2dx$

в) $y' + \frac{y}{x-1} = \frac{\arcsin x}{1-x}$ г) $y\cos 2x dy + y^2 \sin 2x dx = dx$

30. а) $y\sin x dx + (\cos x - 1)dy = 0$ б) $xy' = y\left(\cos\ln\frac{y}{x} + 1\right)$

в) $y'\sin x - y = 2\sin^2\left(x/2\right)$ г) $y' - 8x\sqrt{y} = \frac{4xy}{x^2 - 1}$

2.2.2 Розв'язати диференційні рівняння вищих порядків

1. а) $y''\left(x^2 + 1\right) = 2xy'$ $y(0) = 2$ $y'(0) = 3$

б) $y'' - 4y' + 5y = \frac{2e^{2x}}{\cos^3 x}$

в) $y'' - 6y' + 13y = 8e^{3x} + 7\sin 2x$ $y(0) = 0$ $y'(0) = 8$

2. а) $(y-1)y'' = 2(y')^2$ $y(0) = 2$ $y'(0) = -3$

б) $y'' + 14y' + 49y = \frac{e^{-7x}}{x^2 - 4x + 3}$

в) $y'' + 2y' - 3y = 8e^x - 15\cos 3x$ $y(0) = 0$ $y'(0) = -1/2$

3. а) $y'' + 2\mathrm{tg}x \cdot y' = \cos^3 x$ $y(0) = -1/3$ $y'(0) = 2$

б) $y'' + 6y' + 10y = \frac{2e^{-3x}}{\sin 2x}$

в) $y'' + 2y' + 26y = 13x + 629\cos x$ $y(0) = -1/26$ $y'(0) = 27{,}5$

4. а) $y''(y^2 + 1) = 2(y')^2 y$ $y(\pi/4) = 1$ $y'(\pi/4) = 2$

б) $y'' + 10y' + 25y = \frac{e^{-5x}}{\sqrt{9 - x^2}}$

в) $y'' - 3y' - 28y = 392x^2 - 22e^{-4x} - 37$ $y(0) = -1$ $y'(0) = 9$

5. а) $xy'' + y'(\ln x - \ln y' - 1) = 0$ $y(1) = 3$ $y'(1) = e$

б) $y'' + 5y' + 6y = \dfrac{1}{1 + e^{2x}}$

в) $y'' - 4y' + 5y = 8x\cos x + 3e^{2x}$ $\quad y(0) = 4{,}5 \quad y'(0) = 8$

6. а) $(y')^2 \operatorname{ctg} y = y'' \cos y$ $\quad y(\ln 2) = \dfrac{\pi}{2} \quad y'(\ln 2) = -1$

б) $y'' + 4y = \dfrac{1}{\cos 2x}$

в) $y'' + 4y' + 3y = 16x^2 e^{x} - 6e^{-3x}$ $\quad y(0) = 6{,}75 \quad y'(0) = -13{,}25$

7. а) $x^2 y'' - 2xy' + 3 = 0$ $\quad y(1) = 0 \quad y'(1) = 4$

б) $y'' - 8y' + 16y = \dfrac{e^{4x}}{\sqrt{x^2 - 9}}$

в) $4y'' + 4y' + y = 24e^{-x/2} + \dfrac{1}{8}x^2 - 3$ $\quad y(0) = 5 \quad y'(0) = -3{,}5$

8. а) $y'' + 2y \cdot (y')^3 = 0$ $\quad y(-5/3) = 1 \quad y'(-5/3) = -1$

б) $y'' + 4y' + 4y = \dfrac{e^{-2x}}{\cos^2 x}$.

в) $y'' + 6y' + 34y = 25xe^{-3x} - x^3 + 12x + 6$ $\quad y(0) = 0 \quad y'(0) = 10$

9. а) $(1 + e^{x})y'' - e^{x} y' = 0$ $\quad y(0) = 1 \quad y'(0) = 4$

б) $y'' - 6y' + 10y = \dfrac{e^{3x}}{\sin x}$

в) $2y'' + 3y' - 2y = 68\sin 2x + 17xe^{x/2}$ $\quad y(0) = 3 \quad y'(0) = -5$

10. а) $2yy'' = 1 + (y')^2$ $\quad y(3) = 2 \quad y'(3) = 1$

б) $y'' - 6y' + 9y = \dfrac{2e^{3x}}{x^2 - 6x + 10}$

в) $y'' - 8y' + 16y = 6e^{4x} + 289\sin x$ $\quad y(0) = -12 \quad y'(0) = -1$

11. а) $xy'' + y' = \ln x + 1$ $\quad y(1) = -1 \quad y'(1) = 0$

б) $y'' + 4y = \dfrac{1}{\sin^2 x}$

в) $y'' + 14y' + 58y = (73x + 16)e^{x} - 116x^{2} + 2x \quad y(0) = \frac{24}{29} \quad y'(0) = -5$

12. а) $y''y^{3} = 1 \quad y\left(\frac{2}{5}\right) = 1 \quad y'\left(\frac{2}{5}\right) = 2$

б) $y'' - y = \frac{2\left(e^{x} - 1\right)}{e^{x}}$

в) $y'' + 14y' + 49y = 12xe^{-7x} + 49x \quad y(0) = -\frac{2}{7} \quad y'(0) = -4$

13. а) $x^{3}y'' + 5y' = 5xy'' + 3x^{2}y' \quad y(1) = 9 \quad y'(1) = 16$

б) $y'' - 3y' + 2y = \frac{e^{3x}}{1 + e^{2x}}.$

в) $16y'' + 24y' + 9y = 32e^{-\frac{3}{4}x} - 27x \quad y(0) = 13 \quad y'(0) = 12$

14. а) $yy'' - y'(1 + y') = 0 \quad y(0) = 1 \quad y'(0) = 1$

б) $y'' + 8y' + 16y = \frac{e^{-4x}\ln x}{x}$

в) $y'' - 2y' + 2y = 3x\sin 2x - 25e^{-x} \quad y(0) = -4 \quad y'(0) = 5$

15. а) $xy'' - x^{2} = 3y' \quad y(1) = 0 \quad y'(1) = 1/3$

б) $y'' - 2y' + y = \frac{2e^{x}}{x^{2} + 6x + 8}$

в) $5y'' + 14y' + 8y = \frac{32}{2}x^{3} + 18e^{-2x} + 203 \quad y(0) = 2 \quad y'(0) = 12{,}5$

16. а) $y''\operatorname{tg}y = 2(y')^{2} \quad y\left(-1/2\right) = \pi/4 \quad y'\left(-1/2\right) = 1$

б) $y'' + y = \sqrt{\frac{2}{\cos 2x}}$

в) $y'' + 6y' + 9y = 6xe^{-3x} + 27x \quad y(0) = -3 \quad y'(0) = 6$

17. а) $y'' = (2y' + 1)\operatorname{ctg}x \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{3}{4}\pi \quad y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -2$

б) $y'' + 12y' + 36y = 4e^{-6x}\ln 2x$

в) $y'' + 6y' + 10y = 7e^{-3x} + 39\cos x \qquad y(0) = 10 \quad y'(0) = -20$

18. а) $yy'' - 2(y')^2 = 0 \qquad y\left(-\frac{1}{4}\right) = 1 \quad y'\left(-\frac{1}{4}\right) = 4$

б) $y'' - 8y' + 17y = \dfrac{e^{4x}}{\sin^2 x}$

в) $y'' - y' - 6y = 15e^{3x} - 52x\cos 2x \qquad y(0) = 1\frac{4}{13} \quad y'(0) = 2\frac{11}{13}$

19. а) $(2x+1)y'' + 2y' = 4x \qquad y(1) = 0 \quad y'(1) = 1/2$

б) $y'' - y' = \dfrac{e^{2x}}{\sqrt{1 - e^{2x}}}$

в) $9y'' - 12y' + 4y = 9e^{2x/3} + 169\cos x \qquad y(0) = -8 \quad y'(0) = -14$

20. а) $y\ln y \cdot y'' + (y')^2 = 0 \qquad y(0) = e \quad y'(0) = 1$

б)) $y'' + 4y = \mathrm{ctg}\, 2x$

в) $y'' + 2y' + 5y = 8{,}5\cos 2x + 40e^{5x} \qquad y(0) = 1\frac{7}{17} \quad y'(0) = 8\frac{5}{17}$

21. а) $(1 - x^2)y'' = xy' \qquad y(0) = 0 \quad y'(0) = 1$

б) $y'' + 2y' + y = \dfrac{2e^{-x}}{x^2 - 4x + 5}.$

в) $y'' - 4y' - 5y = 130\sin 5x - 12xe^{-x}$; $\quad y(0) = 0$; $\quad y'(0) = -12$;

22. а) $y'' - \dfrac{\sin 2y}{1 + \cos^2 y}(y')^2 = 0 \qquad y(0) = 0 \quad y'(0) = \dfrac{1}{2}$

б) $y'' - 10y' + 25y = \dfrac{e^{5x}}{\sqrt{x^2 - 4}}$

в) $y'' - 4y' + 4y = 6e^{2x} + 25x\sin x \qquad y(0) = -0{,}6 \quad y'(0) = -5{,}2$

23. а) $xy'' - y' - x\sin\dfrac{y'}{x} = 0 \qquad y(1) = -1 \quad y'(1) = \pi/2$

б) $y'' + 2y' = 4e^{-6x}\cos e^{-2x}$

в) $y'' + 4y' + 13y = 27xe^{-2x} + 80\sin 3x \qquad y(0) = -6 \quad y'(0) = 18$

24. а) $(y^2 - 6y + 10)y'' = (2y - 6)(y')^2 \qquad y\left(\pi/4\right) = 4 \quad y'\left(\pi/4\right) = 2$

б) $y'' + \frac{1}{4}y = \frac{1}{\cos\frac{x}{2}}$

в) $2y'' - 7y' - 4y = 9e^{4x} + 8x^2 - 61 \qquad y(0) = 2 \quad y'(0) = 12$

25. а) $xy'' + y' = 2x\ln x + x \qquad y(1) = -1/2 \quad y'(1) = 3/2$

б) $y'' - 8y' + 20y = 4e^{4x}\operatorname{ctg}^2 2x.$

в) $25y'' - 30y' + 9y = 100e^{\frac{3}{5}x} - 81x \qquad y(0) = -34 \quad y'(0) = -17$

26. а) $(1 + x^2)y'' + 2xy' = 2x^3 \qquad y(0) = 0 \quad y'(0) = 1$

б) $y'' + 2y' + 2y = \frac{1}{e^x \sin x}$

в) $y'' - 4y' + 4y = e^{3x} + 25\sin x \qquad y(0) = 2 \quad y'(0) = 0$

27. а) $xy'' - y' = x^2e^x \qquad y(1) = -1 \quad y'(1) = e$

б) $y'' + y = \frac{1}{\sin x}$

в) $y'' - 3y' = x + \cos x \qquad y(0) = 0 \quad y'(0) = -1/9$

28. а) $y'' - (y')^2 + y'(y - 1) = 0 \qquad y(0) = 2 \quad y'(0) = 2$

б) $y'' - 4y = 4x \cdot e^{2x}$

в) $y'' + 2y' + y = 9e^{-x} + x \qquad y(0) = 1 \quad y'(0) = 2$

29. а) $y^2 + (y')^2 - 2yy'' = 0 \qquad y(0) = 1 \quad y'(0) = 1$

б) $y'' + 2y' + y = \frac{e^{-x}}{x}$

в) $y'' - 4y' + 4y = 2\sin 2x + xe^{2x} \qquad y(0) = 0 \quad y'(0) = -1$

30. а) $y''(1+\ln x)+\frac{1}{x}y'=\frac{1}{x^2}$ $\qquad y(1)=\frac{1}{2}\quad y'(1)=-1$

б) $y''+y=\frac{1}{\cos^2 x}$

в) $y''-2y'+y=9e^x+2x-4$ $\qquad y(0)=1\quad y'(0)=1$

2.2.3 Розв'язати систему диференційних рівнянь

1. $\begin{cases} x'=-x+y+t \\ y'=x-y+1 \end{cases}$

2. $\begin{cases} x'=2x-y+e^t \\ y'=-x+2y-4 \end{cases}$

3. $\begin{cases} x'=2x+3y+t^2 \\ y'=3x+2y-t \end{cases}$

4. $\begin{cases} x'=-2x-y-e^t \\ y'=x-2y+3 \end{cases}$

5. $\begin{cases} x'=3x-y+t+1 \\ y'=-x+3y-t^2 \end{cases}$

6. $\begin{cases} x'=2x+4y-t^2 \\ y'=4x+2y+5 \end{cases}$

7. $\begin{cases} x'=-3x+2y+1+t \\ y'=2x-3y-3 \end{cases}$

8. $\begin{cases} x'=5x+4y+2e^{-t} \\ y'=4x+5y-4 \end{cases}$

9. $\begin{cases} x'=-5x+y-3e^{2t} \\ y'=x-5y+4e^{2t} \end{cases}$

10. $\begin{cases} x'=3x-4y+1 \\ y'=-4y+3x-2e^t \end{cases}$

11. $\begin{cases} x'=-4x+3y-3e^t \\ y'=3x-4y+7 \end{cases}$

12. $\begin{cases} x'=4x-y+2e^{3t} \\ y'=-x+4y-4 \end{cases}$

13. $\begin{cases} x'=-x+5y+4t+3 \\ y'=5x-y+7 \end{cases}$

14. $\begin{cases} x'=-2x+y-3e^{-t} \\ y'=x-2y+1 \end{cases}$

15. $\begin{cases} x'=-7x+3y+5e^t \\ y'=3x-7y+4 \end{cases}$

16. $\begin{cases} x'=2x+3y \\ y'=3x+2y-e^t \end{cases}$

17. $\begin{cases} x'=2y-2t-1 \\ y'=x+y \end{cases}$

18. $\begin{cases} x'=x-2y+t \\ y'=-2x+y+1 \end{cases}$

19. $\begin{cases} x' = x + 3y - e^{2t} \\ y' = 3x + y \end{cases}$

20. $\begin{cases} x' = 4x + y \\ y' = x + 4y - e^{t} \end{cases}$

21. $\begin{cases} x' = x + 3y + 3 \\ y' = 3x + y - 4e^{t} \end{cases}$

22. $\begin{cases} x' = 3x - 5y + 1 \\ y' = 3x + y + e^{t} \end{cases}$

23. $\begin{cases} x' = 2x + y - 4 \\ y' = x + 2y + e^{2t} \end{cases}$

24. $\begin{cases} x' = 3x + 2y + e^{t} \\ y' = 2x + 3y - 1 \end{cases}$

25. $\begin{cases} x' = 5x - 3y + 2e^{3x} \\ y' = x + y + 5e^{-t} \end{cases}$

26. $\begin{cases} x' = y + e^{t} \\ y' = x - e^{t} \end{cases}$

27. $\begin{cases} x' = -2x - y + \sin t \\ y' = 4x + 2y + \cos t \end{cases}$

28. $\begin{cases} x' = 3x - 4y + 2t \\ y' = x + y + t \end{cases}$

29. $\begin{cases} x' = x + y - t^{2} + t - 2 \\ y' = -2x + 4y + 2t^{2} - 4t + 7 \end{cases}$

30. $\begin{cases} x' = -2x - 4y + e^{t} \\ y' = x + 3y - t \end{cases}$

2.3 Теорія рядів

2.3.1 За ознаками збіжності дослідити збіжність рядів

1. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot 5^{n}}$ б) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n+1} \right)^{n}$

в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n}}{(2n)!}$ г) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}$

2. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}$ б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^{n^{2}}}{n^{n^{2}} \cdot 3^{n}}$

в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{3}}{2^{n}}$ г) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^{2}}$

3. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(5n-2)^3}$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n^2+1}{n^2+1}\right)^{n^2}$

в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+3)}{(n+2)!}$ г) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n^2+1)^2}$

4. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2-1}$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln^n(n+1)}$

в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n^3-1}{n!}$ г) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n^2}{\sqrt{n^3-1}}$

5. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+n^3}{1+n^4}$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}$

в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{(3n)!}$ г) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$

6. а) $\sum_{n=1}^{\infty}tg\frac{\pi}{2n}$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n-3}{3n+1}\right)^{n^2}$

в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{2n+1}}{(n+1)!}$ г) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\ln n}{n^3}$

7. а) $\sum_{n=1}^{\infty}2^n\sin\frac{\pi}{3^n}$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}\sin^n\frac{\pi}{2n}$

в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}$ г) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{e^n(3+e^{-n})}$

8. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n+10}}$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n^2+1}{3n^2+2n}\right)^{n}$

в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{n+1}}{(n+1)!}$ г) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{arctg^2 n}{1+n^2}$

9. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{\sqrt{n^3}}$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{n+2}\right)^{n}$

в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{\sqrt{n2^n}}$ г) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{arctg\sqrt{n}}{\sqrt{n}}$

10. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2+3n}{2+3n^2}\right)^2$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{\ln^n(n+1)}$

в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3+2n+1}{2^{n+5}(n^2+1)}$ г) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(1+n^2)arctg^3 n}$

11. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{\frac{n}{n^4+1}}$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1+n}{n}\right)^{n/3}$

в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}$ г) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{\sqrt{n}}$

12. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{(2n-1)\cdot 3^n}$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{5n-8}{1+3n}\right)^n$

в) $\sum_{n=1}^{\infty}n^2\sin\frac{\pi}{2^n}$ г) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n(\ln^4 n+1)}$

13. а) $\sum_{n=4}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n(n-3)}}$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{(n+1)^{3n}\cdot 2^n}$

в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n\cdot n^2}{(n+1)!}$ г) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^{n^2}}$

14. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n^2+5)^{3/2}}$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}\arccos^n\frac{3}{n^2}$

в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n}{(n+1)!}$ г) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^2+4}$

15. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot 5^{n-1}}$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n}{5+3n}\right)^{4n}$

в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!}{n!}$ г) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}3^{\sqrt{n}}}$

16. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{\left(n^2+n+1\right)^5}$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}\cdot\frac{1}{5^n}$

в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{\left(n^2+1\right)3^n}}{n\cdot 2^{n/2}}$ г) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{(n+1)\ln(n+1)}$

17. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3+8}{n^4+2n+3}$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n^2}{3n^2+1}\right)^{n^2}$

в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}$ г) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n^3}$

18. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt[3]{n^3+2}}{n+1}$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(arctg\,\frac{5n+5}{5n-4}\right)^n$

в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n+1}}{(n+3)!}$ г) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{1}{n}}{n^2}$

19. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+n^3}{1+n^2}$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+1}{3n+5}\right)^n$

в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n!}$ г) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n\sqrt{n}}$

20. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+3}{4n^3+2n+3}$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\ln\left(3+\frac{4}{n}\right)\right)^{-n}$

в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{5^n}$ г) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{1/n}}{n^2}$

21. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+2n-1}{n\sqrt[3]{n}}$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}3^n\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$

в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(n+1)!}{(n+3)!}$ г) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)\ln(\ln n)}$

22. а) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt[3]{n}+\sqrt{n}}$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(arctg\frac{n}{n+1}\right)^{n}$

в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n+1)!}{n^{3}+8}$ г) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n\sqrt[3]{n}}$

23. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\sqrt{n}}{n^{3}+3}$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\arcsin\frac{n\sqrt{2}}{2n+1}\right)^{n}$

в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+2)!-n!}{n^{3}}$ г) $\sum_{n=1`}^{\infty}\frac{\cos\frac{1}{n}}{n^{2}}$

24. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{\frac{n^{2}+2n}{3n^{4}+5}}$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{n}}{2^{n}(n+1)^{n^{2}}}$

в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{4n}}{n^{2}+1}$ г) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(1+n^{2})arctgn}$

25. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+1)\sqrt[3]{n+2}}$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n+2}{n+1}\right)^{n}$

в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^{n+1}}{(2n-1)!}$ г) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}$

26. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{\sqrt{n^{3}+4}}$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^{2}}$

в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{2}+3}{3^{n}(n+2)}$ г) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{arctg\sqrt{n}}{(1+n)\sqrt{n}}$

27. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{2}+3}{4n^{3}+5n}$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(arctg\frac{1}{n}\right)^{n}$

в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{10^{3n-1}}$ г) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{\sqrt[4]{n^{3}}}$

28. а) $\sum_{n=2}^{\infty} \sin\frac{\pi}{n}$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{2n-1}\right)^{2n}$

в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{2n+1}$ г) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{arcctg^3 n}{1+n^2}$

29. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^5+1}$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+1}{3n+1}\right)^{n/2}$

в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{n+1}}{(n+1)!}$ г) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{\ln n}}$

30. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{n^3+1}$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{3n-1}\right)^{3n-1}$

в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+2}{5^n}$ г) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt[3]{\ln^2 n}}{n}$

2.3.2 Дослідити збіжність заданих знакозмінних рядів

1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$

2. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{\ln n}$

3. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{n(n+1)}$

4. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n\cdot 7^n}$

5. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(3n-2)!}$

6. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{2n}{3n+5}\right)^{n}$

7. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n+1)(-1)^{n-1}}{n(n+2)}$

8. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n}(n+3)}{n^2+1}$

9. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{n}\right)^{n}$

10. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-3)^{n}}{(2n+1)^n}$

11. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{n\sqrt[3]{\ln n}}$

12. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{3^n\cdot n!}{n^n}$

13. $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\left(arctg\,\frac{n}{n+1}\right)^n$

14. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2n+1}{\left(n^2+n+1\right)^3}$

15. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\pi}{4^n}$

16. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}3^n\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$

17. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^n\sqrt{3n+1}}$

18. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n^2}{(n+2)\sqrt[3]{n+1}}$

19. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2n+5}{5n+10}$

20. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}$

21. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\ln^n(n+1)}$

22. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{2}{3}\right)^n$

23. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3^n\sqrt{n+2}}$

24. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(n+1)}{\left(n^2+1\right)\sqrt{n}}$

25. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1-3n}{8n+2}\right)^n$

26 . $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n^2}{3^{n+2}}$

27. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{arctg(n+1)}$

28. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\sqrt{n^4+1}}{n^2+3}$

29. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{3}{5}\right)^{2n+1}$

30. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n\sqrt{n+1}}{n^2+3}$

2.3.3 Знайти інтервал збіжності та дослідити поведінку степеневого ряду на кінцях інтервалу збіжності

1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-2)^n}{(n+1)\ln(n+1)}$

2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n-2}{(n+1)^2}\cdot\frac{(x-3)^n}{2^{n+1}}$

3. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt[3]{n+2}}{n+1}(x-2)^n$

4. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)^{2n}}{(3n-2)^{2n}}(x-1)^n$

5. $\sum_{n=1}^{\infty}(x+5)^n \dfrac{1}{(2n+1)\sqrt{n+3}}$

6. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n^2}(x-1)^n$

7. $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(n+1)}{(2n-1)^2 2^n}(x-2)^n$

8. $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{(n+1)!}(x-5)^n$

9. $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(x+3)^n}{n^2+2n}$

10. $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(x+1)^n}{n+3}$

11. $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{4^n (x+1)^n}{n}$

12. $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(x+4)^n}{5n\cdot 9^n}$

13. $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(x+2)^n}{(2n+1)\cdot 3^n}$

14. $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^2}{(n+1)^2 2^n}x^n$

15. $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(2n-1)^n (x+1)^n}{2^{n-1} n^n}$

16. $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(x-5)^n}{n\cdot 3^n}$

17. $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^2}{(3n-1)^2}(x-3)^n$

18. $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sqrt[3]{n+2}}{n+1}(x-2)^n$

19. $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(x-2)^n}{n^2 3^{2n+1}}$

20. $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(x+1)^n (n^2+1)}{(n^3+3)\sqrt{n}}$

21. $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(x-4)^n}{n^2+2n-1}$

22. $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(2x+1)^n}{3n-2}$

23. $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(5n-3)(x+4)^n}{(n+1)^2 3^{n+1}}$

24. $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(x+1)^n}{2^{n-1} n(n+1)}$

25. $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(x-3)^n}{(3n-1)3^n}$

26. $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(x-4)^n}{2n-1}$

27. $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(x+2)^n 3^n}{n\cdot 2^n}$

28. $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(x+3)^n n}{(n+1)4^n}$

29. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{2x-4}{3}\right)^n$

30. $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n+3}\left(\dfrac{x-6}{3}\right)^n$

2.3.4 Розвинути функції у ряд по степенях x, використовуючи готові розвинення у ряд елементарних функцій

1. $f(x)=\sqrt{x}e^{x}$
2. $f(x)=x\ln(1+x^{2})$
3. $f(x)=\dfrac{\sin x}{\sqrt{x}}$
4. $f(x)=\dfrac{x-arctgx}{x^{3}}$
5. $f(x)=\cos^{2}x$
6. $f(x)=(1+x)e^{-x}$
7. $f(x)=\sin 3x+x\cos 3x$
8. $f(x)=\sqrt[3]{2-x}$
9. $f(x)=\dfrac{1}{3x+4}$
10. $f(x)=x\cdot e^{-x}$
11. $f(x)=\dfrac{\ln\left(1+x^{2}\right)}{x}$
12. $f(x)=x^{2}\cdot e^{x}$
13. $f(x)=\sin x^{2}$
14. $f(x)=arctg(x^{2})$
15. $f(x)=x\ln(1-x^{2})$
16. $f(x)=e^{-\frac{x^{2}}{3}}$
17. $f(x)=x\cdot arctgx$
18. $f(x)=\sqrt{1+x^{2}}$
19. $f(x)=\dfrac{\sin x^{2}}{x^{2}}$
20. $f(x)=\sqrt{x}\cos x$
21. $f(x)=\dfrac{e^{-x}}{x}$
22. $f(x)=\dfrac{e^{-2x}-1}{x}$
23. $f(x)=\dfrac{1-\cos x}{x}$
24. $f(x)=1-\sqrt[3]{1-x}$
25. $f(x)=\dfrac{x-\sin x}{x^{2}}$
26. $f(x)=\dfrac{2}{1-3x^{2}}$
27. $f(x)=\dfrac{x^{2}}{1+x}$
28. $f(x)=x^{2}arctgx$
29. $f(x)=\dfrac{\ln(1+x^{3})}{x^{2}}$
30. $f(x)=\sin^{2}x$

2.3.5 Розвинути в ряд Фур'є задані функції

1. Функцію $y=\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}$ на інтервалі (0, π) в ряд по косинусах.
2. Функцію $y=x^2$ на інтервалі $(-\pi,\pi)$.
3. Функцію $f(x)=\begin{cases} x; & -\pi<x<0 \\ 1; & 0<x<\pi \end{cases}$
4. Функцію $f(x)=\begin{cases} x; & -\pi<x<0 \\ x+1; & 0<x<\pi \end{cases}$
5. Функцію $y=|x|$ на інтервалі (-1, 1).
6. Функцію $f(x)=\begin{cases} \sin 2x; & |x|<\pi/2 \\ 0; & |x|\geq \pi/2 \end{cases}$
7. Функцію $y=2-|x|$ на інтервалі (-1,1).
8. Функцію $f(x)=x-1$ на інтервалі (-π, π).
9. Функцію $y=\frac{\pi}{4}-x$ на інтервалі (0, π) по синусах.
10. Функцію $y=e^x-1$ в ряд по синусах на інтервалі (0, 2π).
11. Функцію $y=e^x$ на інтервалі (-1,1).
12. Функцію $y=|1-x|$ на інтервалі (-2,2).
13. Функцію $f(x)=\begin{cases} -1; & -\pi\leq x\leq 0 \\ x; & 0<x\leq\pi \end{cases}$
14. Функцію $f(x)=\begin{cases} x+\pi; & -\pi\leq x\leq 0 \\ \pi-x; & 0<x\leq\pi \end{cases}$
15. Функцію $f(x)=\begin{cases} 1; & -\pi\leq x\leq 0 \\ 2x; & 0<x\leq\pi \end{cases}$

16. Функцію $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\pi}{2}; & -\pi \le x \le 0\\ \pi - x; & 0 < x \le \pi\end{cases}$

17. Функцію $f(x)=\begin{cases}-2x; & -\pi \le x \le 0\\ 3x; & 0 \le x \le \pi\end{cases}$

18. Функцію $f(x)=\begin{cases}-\dfrac{\pi}{4}; & -2 \le x \le 0\\ x; & 0 < x \le 2\end{cases}$

19. Функцію $f(x)=\begin{cases}1; & -4 < x < 0\\ x; & 0 \le x < 4\end{cases}$

20. Функцію $f(x)=\begin{cases}-x; & 0 \le x < 1\\ x-2; & 1 \le x < 2\end{cases}$

21. Функцію $f(x)=2x$ в ряд по косинусах на інтервалі (0, π) .
22. Функцію $f(x)=1-x$ при $-1 \le x < 1$.
23. Функцію $f(x)=x+1$ при $0 < x < 2$ - в ряд по синусах.
24. Функцію $f(x)=\cos 2x$ у ряд по синусах на інтервалі (0, π) .
25. Функцію $f(x)=2x-1$ при $-\pi \le x \le \pi$.

26. Функцію $f(x)=\begin{cases}-x+1; & -1 < x \le 0\\ 2x; & 0 < x < 1\end{cases}$

27. Функцію $f(x)=3-2x$, $-3 < x < 3$
28. Функцію $f(x)=2x-3$ на інтервалі $[-\pi,\pi]$
29. Функцію $f(x)=3-|x|$ на інтервалі (-5,5).
30. Функцію $f(x)=|x|-5$ на інтервалі (-2,2).

2.3.6 Обчислити інтеграл з похибкою до 0.001

1. $\int_0^{0.1} e^{-5x^2}\,dx$

2. $\int_0^{1} \cos x^2\,dx$

3. $\int_0^{0.1} \frac{1-e^{-2x}}{x} dx$

4. $\int_0^{1.5} \frac{dx}{\sqrt[3]{27+x^3}}$

5. $\int_0^{0.2} \sin(25x^2)dx$

6. $\int_0^{1} \frac{dx}{\sqrt[4]{16+x^4}}$

7. $\int_0^{0.4} \frac{\ln(1+x/2)}{x} dx$

8. $\int_0^{0.1} \sin(100x^2)dx$

9. $\int_0^{0.5} \frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}}$

10. $\int_0^{1} \frac{\ln(1+x/5)}{x} dx$

11. $\int_0^{0.2} e^{-2x^2} dx$

12. $\int_0^{0.5} \cos(4x^2)dx$

13. $\int_0^{0.2} \frac{1-e^{-x}}{x} dx$

14. $\int_0^{2} \frac{dx}{\sqrt[3]{64+x^3}}$

15. $\int_0^{0.3} e^{-7x^2} dx$

16. $\int_0^{0.4} \sin\left(5x/2\right)^2 dx$

17. $\int_0^{0.2} \cos(25x^2)dx$

18. $\int_0^{1.5} \frac{dx}{\sqrt[4]{81+x^4}}$

19. $\int_0^{0.4} \frac{1-e^{-x/2}}{x} dx$

20. $\int_0^{0.1} \frac{\ln(1+2x)}{x} dx$

21. $\int_0^{2.5} \frac{dx}{\sqrt[3]{125+x^3}}$

22. $\int_0^{0.4} e^{-\frac{3x^2}{4}} dx$

23. $\int_0^{0.5} \sin(4x^2)\, dx$

24. $\int_0^{0.4} \cos\left(\frac{5x}{2}\right)^2 dx$

25. $\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt[4]{256+x^4}}$

26. $\int_0^{0.5} \frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^2}}$

27. $\int_0^{2.5} \frac{dx}{\sqrt[4]{625+x^4}}$

28. $\int_0^1 \cos\left(\frac{9x}{4}\right)^2 dx$

29. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{8+x^3}}$

30. $\int_0^{0.3} e^{-6x^2} dx$

2.3.7 Знайти перші чотири члени розвинення в ряд (до x^3) розв'язку диференційного рівняння за умовою y(0)=y'(0)=1

1. $y''=y\cos x+x$
2. $y''=-3e^y+x^2y'$
3. $y''=y'x^2+2\cos y$
4. $y''=6x^3y'-x\cos^2 y$
5. $y''=5x\sin y+x^2$
6. $y''=-y^2e^x+y'x^3$
7. $y''=y'x^3-y\,e^{-x}+1$
8. $y''=2xy+y'\sin x$
9. $y''=-4\,e^{-y}+y\cos x$
10. $y''=1+x^3y'-e^y$
11. $y''=y^2\cos x-2y$
12. $y''=-2xe^{-x}+x^2y'$
13. $y''=2x\,e^{-y}+3x^2y'$
14. $y''=5e^y-x\cos y$
15. $y''=y\sin x^2-3e^y$
16. $y''=3x^2+\cos y$
17. $y''=2xy'+y\,e^{-x}$
18. $y''=x^2\sin y-2y'$
19. $y''=-xy-2\sin x^2$
20. $y''=4y^2+2xe^{-y}$
21. $y''=3x^2y'-e^x$
22. $y''=y^3x-3\cos^2 x$
23. $y''=-x^2y'-2xy+1$
24. $y''=-2x^3y'+y^2$
25. $y''=y\cos x^2-5\,e^y$
26. $y''=3x^2y'+\cos y$

27. $y''=3xy'-y\,e^{-x}$

28. $y''=x^2\cos y-4y'$

29. $y''=xy+5\sin x^2$

30. $y''=y^2-5xe^{-y}$

ЛІТЕРАТУРА

1. Анпілогов Д.І. Інтегральне числення: навч. посібник / Д.І. Анпілогов, Н.В. Сніжко. – Запоріжжя: НУ "Запорізька політехніка", 2021. – 254 с.
2. Анпілогов Д.І. Ряди: навч. посібник / Д.І.Анпілогов, Н.В. Сніжко. – Вид. 2-е, виправл. і доп. – Запоріжжя: НУ «Запорізька політехніка», 2022. – 133 с.
3. Анпілогов Д.І. Диференціальні рівняння: навчальний посібник / Д.І. Анпілогов, Н.В. Сніжко. – Запоріжжя: НУ "Запорізька політехніка", 2019. – 176 с.
4. Литвин, І.І. Вища математика: Навчальний посібник: рек. МОНУ / І.І. Литвин, О.М.Конончук, Г.О. Желізняк. – 2-ге вид. – К.: Центр учбової літератури, 2009. – 368 с.
5. Андрощук, Л.В. Вища математика: Навч. посібник. Модуль 7. Ряди. Диференціальні рівняння / Л.В. Андрощук, О.І. Ковтун, Т.І. Олешко; за заг. ред. Т.І. Олешко. – Київ: Книжкове вид-во НАУ, 2005. – 104 с.
6. Першина Ю.І., Пріщенко О.П., Черемська Н.В., Черногор Т.Т. Невизначений та визначений інтеграли. – Харків : Видавництво «Друкарня Мадрид», 2022. – 188 с.
7. Вища математика в прикладах і задачах. / Під ред. Л.В. Курпи. – Харків: НТУ «ХПІ», 2009. – Т.2. – 432 с.