

Розрахунково-графічне завдання №1

Онищенко О. А. КНТ-122

1. Розв'язати диференціальні рівняння першого порядку

Умова

1. $(1 - e^x) \sin(y)y' = e^x \cos^3(y)$

2. $xy' = y + \sqrt{x^2 + y^2}$

3. $y' + y \cot(x) = \frac{\cos^2(x)}{\sin^3(x)}$

4. $2xy^2 = x \frac{y'}{\ln(x)} + \frac{y}{\ln(x)}$

Рішення 1

Розв'яжемо диференціальне рівняння першого порядку:

$$(1 - e^x) \sin(y)y' = e^x \cos^3(y)$$

Ми можемо переписати це рівняння так:

$$(1 - e^x) \sin(y)dy = e^x \cos^3(y)dx$$

Тепер ми можемо розділити змінні:

$$\frac{\sin(y)}{\cos^3(y)}dy = \frac{e^x}{1 - e^x}dx$$

Інтегруючи обидві частини, отримаємо:

$$\int \frac{\sin(y)}{\cos^3(y)}dy = \int \frac{e^x}{1 - e^x}dx$$

Ліва частина є стандартним інтегралом, який можна розв'язати підстановкою $u = \cos(y)$, $du = -\sin(y)dy$. Права частина також є стандартним інтегралом, який можна розв'язати за допомогою підстановки $v = 1 - e^x$, $dv = -e^x dx$.

Отже, маємо:

$$-\int \frac{du}{u^3} = -\int \frac{dv}{v}$$

Розв'язавши ці інтеграли, отримаємо:

$$\frac{1}{2u^2} = \ln|v| + C$$

Підставивши назад u і v , отримаємо загальний розв'язок:

$$\frac{1}{2 \cos^2(y)} = \ln |1 - e^x| + C$$

Це і є розв'язок даного диференціального рівняння.

Рішення 1 в зошиті

Handwritten solution of a differential equation on grid paper:

$$\begin{aligned} \text{a) } (1 - e^x) \ln(y) \cdot y' &= e^x \cos^3(y) \\ (1 - e^x) \ln(y) dy &= e^x \cos^3(y) dx \\ \frac{\ln(y)}{\cos^3(y)} dy &= \frac{e^x}{1 - e^x} dx \\ \int \frac{\ln(y)}{\cos^3(y)} dy &= \int \frac{e^x}{1 - e^x} dx \\ - \int \frac{du}{u^3} &= - \int \frac{dv}{v} \\ \frac{1}{2u^2} &= \ln |v| + C \\ \frac{1}{2 \cos^2(y)} &= \ln |1 - e^x| + C \end{aligned}$$

Рішення 2

Розв'яжемо диференціальне рівняння першого порядку:

$$xy' = y + \sqrt{x^2 + y^2}$$

Ми можемо переписати його у вигляді:

$$xy' - y = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Тепер ми можемо розділити змінні:

$$\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} dy = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx$$

Інтегруючи обидві частини, отримаємо:

$$\int \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} dy = \int \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx$$

Ліва частина є стандартним інтегралом, який можна розв'язати підстановкою $u = x$, $du = dx$.

Права частина також є стандартним інтегралом, який можна розв'язати підстановкою $v = y$, $dv = dy$.

Отже, маємо

$$\int \frac{du}{\sqrt{u^2 + v^2}} = \int \frac{dv}{\sqrt{u^2 + v^2}}$$

Розв'язуючи ці інтеграли, отримаємо:

$$\ln |u + \sqrt{u^2 + v^2}| = \ln |v + \sqrt{u^2 + v^2}| + C$$

Підставивши назад u і v , отримаємо загальний розв'язок:

$$\ln |x + \sqrt{x^2 + y^2}| = \ln |y + \sqrt{x^2 + y^2}| + C$$

Це і є розв'язок даного диференціального рівняння.

Рішення 2 в зошиті

$$8) \quad xy' = y + \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$xy' - y = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} dy = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx$$

$$\int \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} dy = \int \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx$$

$$\int \frac{du}{\sqrt{u^2 + v^2}} = \int \frac{dv}{\sqrt{u^2 + v^2}}$$

$$\ln |u + \sqrt{u^2 + v^2}| = \ln |v + \sqrt{u^2 + v^2}| + C$$

$$\ln |x + \sqrt{x^2 + y^2}| = \ln |y + \sqrt{x^2 + y^2}| + C$$

Рішення 3

Розв'яжемо диференціальне рівняння першого порядку:

$$y' + y \cot(x) = \frac{\cos^2(x)}{\sin^3(x)}$$

Ми можемо переписати це як:

$$y' + y \cot(x) - \frac{\cos^2(x)}{\sin^3(x)} = 0$$

Це лінійне неоднорідне диференціальне рівняння першого порядку. Загальний розв'язок такого рівняння має вигляд:

$$y = e^{-\int P(x)dx} \left(\int Q(x)e^{\int P(x)dx} dx + C \right)$$

де $(P(x) = \cot(x))$ і $(Q(x) = -\frac{\cos^2(x)}{\sin^3(x)})$.

Отже, маємо:

$$y = e^{-\int \cot(x) dx} \left(\int -\frac{\cos^2(x)}{\sin^3(x)} e^{\int \cot(x) dx} dx + C \right)$$

Розв'язавши ці інтеграли, отримаємо загальний розв'язок:

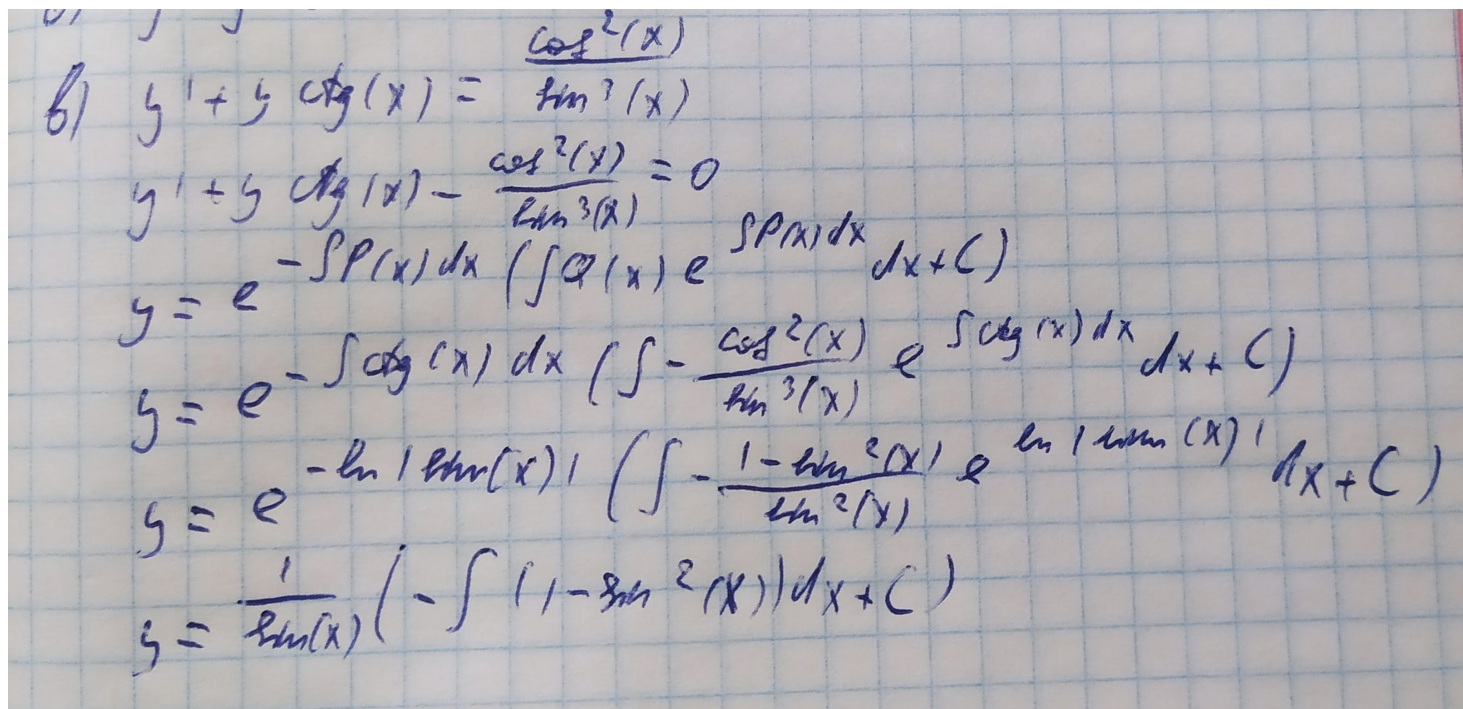
$$y = e^{-\ln |\sin(x)|} \left(\int -\frac{1 - \sin^2(x)}{\sin^2(x)} e^{\ln |\sin(x)|} dx + C \right)$$

Спростуючи, отримаємо:

$$y = \frac{1}{\sin(x)} \left(-\int (1 - \sin^2(x)) dx + C \right)$$

Це і є розв'язок даного диференціального рівняння.

Рішення 3 в зошиті



$$b) \quad y' + y \cot(x) = \cos^2(x)$$

$$y' + y \cot(x) - \frac{\cos^2(x)}{\sin^3(x)} = 0$$

$$y = e^{-\int P(x) dx} \left(\int Q(x) e^{\int P(x) dx} dx + C \right)$$

$$y = e^{-\int \cot(x) dx} \left(\int -\frac{\cos^2(x)}{\sin^3(x)} e^{\int \cot(x) dx} dx + C \right)$$

$$y = e^{-\ln |\sin(x)|} \left(\int -\frac{1 - \sin^2(x)}{\sin^2(x)} e^{\ln |\sin(x)|} dx + C \right)$$

$$y = \frac{1}{\sin(x)} \left(-\int (1 - \sin^2(x)) dx + C \right)$$

Рішення 4

Розв'яжемо диференціальне рівняння першого порядку:

$$2xy^2 = x \frac{y'}{\ln(x)} + \frac{y}{\ln(x)}$$

Ми можемо переписати це як:

$$2xy^2 - \frac{xy}{\ln(x)} = x \frac{y'}{\ln(x)}$$

Тепер ми можемо розділити змінні:

$$\frac{y'}{\ln(x)} = \frac{2y^2 - \frac{y}{\ln(x)}}{x}$$

Проінтегрувавши обидві частини, отримаємо:

$$\int \frac{y'}{\ln(x)} dx = \int \frac{2y^2 - \frac{y}{\ln(x)}}{x} dx$$

Ліва частина є стандартним інтегралом, який можна розв'язати підстановкою $u = y$, $du = y' dx$.

Права частина також є стандартним інтегралом, який можна розв'язати за допомогою підстановки $v = x$, $dv = dx$.

Отже, маємо

$$\int \frac{du}{\ln(u)} = \int \frac{2v^2 - \frac{1}{\ln(v)}}{v} dv$$

Розв'язуючи ці інтеграли, отримаємо:

$$\ln |\ln |u|| = 2v - \ln |\ln |v|| + C$$

Підставивши назад u і v , отримаємо загальний розв'язок:

$$\ln |\ln |y|| = 2x - \ln |\ln |x|| + C$$

Це і є розв'язок даного диференціального рівняння.

Рішення 4 в зошиті

$$2) \quad 2xy^2 = x \frac{y'}{\ln(x)} + \frac{y}{\ln(y)}$$

$$2xy^2 - \frac{xy}{\ln(x)} = x \frac{y'}{\ln(x)}$$

$$\frac{y'}{\ln(x)} = \frac{2y^2 - \frac{y}{\ln(x)}}{x}$$

$$\int \frac{y'}{\ln(x)} dx = \int \frac{2y^2 - \frac{y}{\ln(x)}}{x} dy$$

$$\int \frac{du}{\ln(u)} = \int \frac{2v^2 - \frac{1}{\ln(v)}}{v} dv$$

$$\ln | \ln(u) | = 2v - \ln | \ln(v) | + C$$

$$\ln | \ln(y) | = 2x - \ln | \ln(x) | + C$$

2. Розв'язати диференціальні рівняння вищих порядків

Умова

$$1. \quad y \ln(y) \times y'' + (y')^2 = 0, \quad y(0) = e \quad y'(0) = 1$$

$$2. \quad y'' + 4y = \cot 2x$$

$$3. \quad y'' + 2y' + 5y = 8.5 \cos(2x) + 40e^5 x, \quad y(0) = 1 \frac{7}{17} \quad y'(0) = 8 \frac{5}{17}$$

Рішення 1

Рішення 2

Рішення 3

3. Розв'язати систему диференціальних рівнянь

Умова

$$\begin{cases} x' = 4x + y \\ y' = x + 4y - e^t \end{cases}$$

Рішення

Дана система диференціальних рівнянь має вигляд:

$$\begin{cases} x' = 4x + y \\ y' = x + 4y - e^t \end{cases}$$

Це система лінійних однорідних диференціальних рівнянь. Ми можемо записати її у матричній формі наступним чином:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ e^t \end{pmatrix}$$

Характеристичне рівняння матриці має вигляд:

$$\lambda^2 - 8\lambda + 15 = 0$$

Розв'язання цього рівняння дає нам два власних значення, $\lambda_1 = 3$ і $\lambda_2 = 5$. Відповідні власні вектори $v_1 = (1, -1)^T$ і $v_2 = (1, 1)^T$.

Отже, загальний розв'язок однорідної системи (без доданка e^t) має вигляд:

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = c_1 e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + c_2 e^{5t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Для знаходження конкретного розв'язку неоднорідної системи можна скористатися методом невизначених коефіцієнтів. Ми вгадуємо розв'язок виду $y_p(t) = Ae^t$, і підставляємо його у друге рівняння для знаходження A . Це дає нам

$$Ae^t + 4Ae^t - e^t = Ae^t \Rightarrow A = \frac{1}{5}$$

Отже, конкретний розв'язок має вигляд $y_p(t) = \frac{1}{5}e^t$, а відповідне значення $x_p(t)$ можна знайти з першого рівняння:

$$x_p(t) = \frac{1}{5}e^t - y_p(t) = 0$$

Отже, загальний розв'язок неоднорідної системи має вигляд:

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = c_1 e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + c_2 e^{5t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{5}e^t \end{pmatrix}$$

де c_1 і c_2 - константи, що визначаються початковими умовами.

Рішення в зошиті