Розділ 9. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ

1. Основні поняття

Диференціальним рівнянням першого порядку називається рівняння, яке містить незалежну змінну x, невідому функцію $y = y(x)$ та її похідну y':

$$F(x,\ y,\ y') = 0. \tag{1}$$

Розв'язавши рівняння (1) відносно y' (якщо це можливо), приходимо до диференціального рівняння

$$y' = f(x,\ y), \tag{2}$$

яке називають *розв'язаним відносно похідної*.

Розв'язком рівняння (1) (або (2)) на інтервалі $(a,\ b)$ називають диференційовну на цьому інтервалі функцію $y = \varphi(x)$, яка при підстановці в рівняння перетворює його в тотожність при всіх x з інтервалу $(a,\ b)$.

Загальним розв'язком рівняння (1) (або (2)) називають функцію $y = \varphi(x,\ C)$, яка є розв'язком даного рівняння при будь-якому фіксованому значенні сталої C і для довільної *початкової умови* $y(x_0) = y_0$ існує єдине значення $C = C_0$, при якому розв'язок $y = \varphi(x,\ C_0)$ задовольняє початкову умову. Розв'язок $y = \varphi(x,\ C_0)$ називають *частинним* або *розв'язком задачі Коші*.

Співвідношення $G(x,\ y,\ C) = 0$, яким загальний розв'язок $y = \varphi(x,\ C)$ рівняння (1) задається неявно, називають *загальним інтегралом* рівняння (1). При конкретному значенні $C = C_0$ співвідношення $G(x,\ y,\ C_0) = 0$ називають *частинним інтегралом*.

Найпростіше диференціальне рівняння першого порядку

$$y' = f(x) \tag{3}$$

зводиться до обчислення невизначеного інтеграла. Так як $y' = \dfrac{dy}{dx}$, то маємо $\dfrac{dy}{dx} = f(x)$, або $dy = f(x)dx$. Інтегруємо $\int dy = \int f(x)dx + C$ і отримуємо $y=\int f\left(x\right)dx+C$. Тут під невизначеним інтегралом розуміємо одну з первісних функції $f\left(x\right)$.

Розв'язати диференціальні рівняння:

1. $y'=x^2+4x-7$.

$\ulcorner$ Це рівняння виду (3). Розв'яжемо його за наведеною вище схемою:

$$\frac{dy}{dx}=x^2+4x-7, \quad dy=\left(x^2+4x-7\right)dx,$$

$$\int dy=\int\left(x^2+4x-7\right)dx, \quad y=\frac{x^3}{3}+4\frac{x^2}{2}-7x+C, \text{ або}$$

$y=\dfrac{x^3}{3}+2x^2-7x+C$ – загальний розв'язок заданого диференціального рівняння. $\lrcorner$

2. $y'=8^x$.

$\ulcorner$ $\dfrac{dy}{dx}=8^x$, $dy=8^x\,dx$, $\int dy=\int 8^x\,dx$, звідки знаходимо загальний розв'язок $y=\dfrac{8^x}{\ln 8}+C$. $\lrcorner$

3. $y'=\cos x$, якщо $y\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=3$.

$\ulcorner$ Спочатку знайдемо загальний розв'язок диференціального рівняння:

$$y'=\cos x, \quad \frac{dy}{dx}=\cos x, \quad dy=\cos x\,dx,$$

$\int dy=\int\cos x\,dx$, $y=\sin x+C$ – загальний розв'язок.

Тепер знайдемо розв'язок задачі Коші. За умовою задачі $y\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=3$. Тому, підставляючи в загальний розв'язок $y=3$ та $x=\dfrac{\pi}{2}$, маємо $3=\sin\dfrac{\pi}{2}+C$, $3=1+C$, $C=3-1=2$. Підставивши $C=2$ в загальний розв'язок, знаходимо частинний розв'язок $y=\sin x+2$. $\lrcorner$

Вправи для самостійного розв'язання

Розв'язати диференціальні рівняння:

4. $y' = \dfrac{1}{\sin^2 x}$.

5. $y' = x^3 - 5x^2 + 4$.

6. $y' = \operatorname{arctg} x$.

7. $y' = \dfrac{1}{x^2}$, якщо $y(-1) = 5$.

Відповіді:

4. $y = -\operatorname{ctg} x + C$.

5. $y' = \dfrac{1}{4}x^4 - \dfrac{5}{2}x^2 + 4x + C$.

6. $y = \operatorname{arctg} x - \dfrac{1}{2}\ln\left(x^2 + 1\right) + C$.

7. $y = -\dfrac{1}{x} + 4$.

2. Диференціальні рівняння з відокремлюваними змінними

Диференціальне рівняння виду

$$y' = f(x)\cdot g(y) \tag{4}$$

називають *диференціальним рівнянням з відокремлюваними змінними*. Права частина рівняння (4) є добутком двох функцій, залежних лише від однієї змінної: перша функція залежить лише від x, а друга – лише від y.

Подамо схему розв'язання диференціального рівняння (4). Так як $y' = \dfrac{dy}{dx}$, то маємо $y' = f(x)\cdot g(y)$, або $\dfrac{dy}{dx} = f(x)\cdot g(y)$. Помножимо обидві частини рівності на вираз $\dfrac{dx}{g(y)}$ (припускаємо, що $g(y) \neq 0$). Отримаємо рівняння з *відокремленими змінними*

$$\frac{dy}{g(y)} = f(x)dx\,. \tag{5}$$

У лівій частині рівності (5) маємо диференціал деякої функції по змінній y, а у правій – по змінній x.

Інтегруючи рівняння (5)

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx + C\,, \tag{6}$$

отримаємо загальний інтеграл (розв'язок) диференціального рівняння (4).

Диференціальне рівняння

$$f_1(x)g_1(y)dy + f_2(x)g_2(y)dx = 0 \tag{7}$$

зводиться до диференціального рівняння (4). Поділимо ліву і праву частини рівняння (7) на добуток функцій $f_1(x)\cdot g_2(y) \neq 0$ і перенесемо вираз, який містить диференціал dx, вправо:

$$\frac{g_1(y)}{g_2(y)}dy = -\frac{f_2(x)}{f_1(x)}dx .$$

Інтегруючи ліву частину за змінною y, а праву – за змінною x, дістанемо загальний інтеграл диференціального рівняння (7):

$$\int \frac{g_1(y)}{g_2(y)}dy = -\int \frac{f_2(x)}{f_1(x)}dx + C .$$

Розв'язати диференціальні рівняння:

8. $y' = \dfrac{y}{x}$.

⌜ Це диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними: $y' = \dfrac{y}{x} = \dfrac{1}{x}\cdot y$. Оскільки $y' = \dfrac{dy}{dx}$, то запишемо його у вигляді

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} .$$

Для відокремлення змінних помножимо дану рівність на dx і поділимо на y. Отримаємо

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x} .$$

Інтегруємо дане рівняння:

$\displaystyle\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x}$, $\ln|y| = \ln|x| + \ln C$, $\ln|y| = \ln|C\,x|$, звідки знаходимо загальний розв'язок заданого диференціального рівняння – $y = Cx$. ⌟

9. $\dfrac{dy}{dx} = 3\sqrt{\dfrac{x}{y}}$, якщо $y(1) = 9$.

$\ulcorner$ Так як $\dfrac{dy}{dx} = 3\sqrt{\dfrac{x}{y}} = 3\sqrt{x} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{y}}$, то це диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними. Помноживши рівняння на $\sqrt{y}\,dx$, дістанемо

$$\sqrt{y}\,dy = 3\sqrt{x}\,dx.$$

Інтегруємо дане рівняння:

$\int \sqrt{y}\,dy = 3\int \sqrt{x}\,dx$, $\quad \int y^{\frac{1}{2}}\,dy = 3\int x^{\frac{1}{2}}\,dx$, $\quad \dfrac{2}{3}y^{\frac{3}{2}} = 3\dfrac{2x^{\frac{3}{2}}}{3} + C$, звідки знаходимо загальний інтеграл $y^{\frac{3}{2}} = 3x^{\frac{3}{2}} + \dfrac{3}{2}C$, або

$$y^{\frac{3}{2}} = 3x^{\frac{3}{2}} + C. \qquad (8)$$

Знайдемо частинний інтеграл. За умовою задачі $y = 9$ при $x = 1$. Підставляючи вказані значення y та x у формулу (8), знаходимо сталу C:

$$9^{\frac{3}{2}} = 3 \cdot 1^{\frac{3}{2}} + C, \quad 27 = 3 + C, \quad C = 24.$$

Підставивши знайдене значення $C = 24$ у формулу (8), дістаємо частинний інтеграл заданого диференціального рівняння – $y^{\frac{3}{2}} = 3x^{\frac{3}{2}} + 24$. $\lrcorner$

10. $\left(1 + e^{2x}\right) y^2 y' = e^x$.

$\ulcorner$ Розв’яжемо задане рівняння відносно y':

$$y' = \frac{e^x}{\left(1 + e^{2x}\right) y^2}.$$

Отже, це диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними. Підставимо $y' = \dfrac{dy}{dx}$ і відокремимо змінні, помноживши рівняння на $y^2 dx$:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{e^x}{\left(1 + e^{2x}\right) y^2}, \quad y^2\,dy = \frac{e^x}{1 + e^{2x}}\,dx.$$

Звідси маємо

$\int y^2\,dy = \int \frac{e^x}{1+e^{2x}}\,dx$, $\quad \int y^2 dy = \int \frac{e^x dx}{1+\left(e^x\right)^2}$, $\quad \frac{y^3}{3} = \operatorname{arctg} e^x + C$,

$y^3 = 3\operatorname{arctg} e^x + C$, звідки маємо загальний розв'язок $y = \sqrt[3]{3\operatorname{arctg} e^x + C}$. ⌋

11. $y\sqrt{1+x^2}\,y' + x\sqrt{1+y^2} = 0$, якщо $y\left(\sqrt{3}\right) = 0$.

⌈ Розв'яжемо задане рівняння відносно y':

$$y' = \frac{-x}{\sqrt{1+x^2}} \cdot \frac{\sqrt{1+y^2}}{y}.$$

Отже, це диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними. Підставимо $y' = \frac{dy}{dx}$ і відокремимо змінні, помноживши рівняння на $\frac{y}{\sqrt{1+y^2}}dx$:

$$\frac{ydy}{\sqrt{1+y^2}} = -\frac{xdx}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Звідси маємо

$$\int \frac{ydy}{\sqrt{1+y^2}} = -\int \frac{xdx}{\sqrt{1+x^2}}, \quad \sqrt{1+y^2} = -\sqrt{1+x^2} + C, \text{ або}$$

$$\sqrt{1+y^2} = C - \sqrt{1+x^2}. \qquad (*)$$

Знайдемо частинний інтеграл. За умовою задачі $y = 0$ при $x = \sqrt{3}$. Тому, підставляючи вказані значення y та x у формулу ($*$), знаходимо сталу C:

$$\sqrt{1+0^2} = C - \sqrt{1+3}, \quad 1+2 = C, \quad C = 3.$$

Отже, частинний інтеграл заданого рівняння має вигляд $\sqrt{1+y^2} = 3 - \sqrt{1+x^2}$. ⌋

12. $x^2\left(y^3+5\right)dx + \left(x^3+5\right)y^2 dy = 0$, якщо $y(0) = 1$.

⌈ Це диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними виду (7).

$$\frac{y^2}{y^3+5}dy = -\frac{x^2}{x^3+5}dx, \quad \int \frac{y^2}{y^3+5}dy = -\int \frac{x^2}{x^3+5}dx,$$

$$\frac{1}{3}\ln\left|y^3+5\right| = -\frac{1}{3}\ln\left|x^3+5\right| + \frac{1}{3}\ln C\,,\quad \ln\left|y^3+5\right| = -\ln\left|x^3+5\right| + \ln C\,,$$

$$\ln\left|y^3+5\right| + \ln\left|x^3+5\right| = \ln C\,,\quad \ln\left|\left(y^3+5\right)\cdot\left(x^3+5\right)\right| = \ln C\,,$$

$$\left(y^3+5\right)\left(x^3+5\right) = C\,.$$

За умовою задачі $y=1$ при $x=0$. Тому маємо $C=\left(1^3+5\right)\left(0^3+5\right)=30$. Отже, частинний інтеграл рівняння – $\left(y^3+5\right)\left(x^3+5\right)=30$. ⌋

13. $\left(x^2+1\right)y'+2xy^2=0$, якщо $y(0)=1$.

⌈ $y' = -\dfrac{2xy^2}{x^2+1}$, $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{2xy^2}{x^2+1}$, $\dfrac{dy}{y^2} = -\dfrac{2x}{x^2+1}dx$,

$$\int\frac{dy}{y^2} = -\int\frac{2x}{x^2+1}dx\,,\quad \frac{-1}{y} = -\ln\left|x^2+1\right| + C\,,$$

$$\frac{1}{y} = \ln\left(x^2+1\right)+C\,,\ \text{звідки}\quad y = \frac{1}{\ln\left(x^2+1\right)+C}\,.$$

За умовою задачі $y=1$ при $x=0$. Тому

$$1 = \frac{1}{\ln\left(0^2+1\right)+C}\,,\quad 1=\frac{1}{C}\,,\quad C=1\,.$$

Частинний розв'язок рівняння – $y = \dfrac{1}{\ln\left(x^2+1\right)+1}$. ⌋

<u>Вправи для самостійного розв'язання</u>

Розв'язати диференціальні рівняння:

14. $x^2y'+y=0$.

15. $y' = \operatorname{tg} x\cdot\operatorname{tg} y$.

16. $yy' = \dfrac{1-2x}{y}$.

17. $y'\left(x^2+1\right)=2xy$, якщо $y(0)=1$.

18. $y=2y'\sqrt{x}$, якщо $y(4)=1$.

19. $y'=(2y+1)\operatorname{ctg} x$, якщо $y\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{1}{2}$.

Відповіді:

14. $y = Ce^{\frac{1}{x}}$.

15. $\sin y = \dfrac{C}{\cos x}$.

16. $y = \sqrt[3]{3\left(x - x^2 + C\right)}$.

17. $y = x^2 + 1$.

18. $y = e^{\sqrt{x}-2}$.

19. $y = \dfrac{1}{2}\left(4\sin^2 x - 1\right)$.

3. Однорідні диференціальні рівняння

Диференціальне рівняння $y' = f\left(x,\, y\right)$ називають *однорідним*, якщо функція $f\left(x,\, y\right)$ є *однорідною функцією нульового виміру*, тобто для будь-якого $t > 0$

$$f\left(tx,\, ty\right) = f\left(x,\, y\right). \tag{9}$$

Покладемо $t = \dfrac{1}{x}$: $f\left(tx,\, ty\right) = f\left(1,\, \dfrac{y}{x}\right) = g\left(\dfrac{y}{x}\right)$. Тоді, з урахуванням (9), рівняння (2) запишеться у вигляді

$$y' = g\left(\frac{y}{x}\right). \tag{10}$$

Для розв’язання рівняння (10) введемо допоміжну невідому функцію $u = u\left(x\right)$, поклавши

$$\frac{y}{x} = u \quad \text{або}$$

$$y = ux, \tag{11}$$

і перетворимо однорідне рівняння у рівняння з відокремлюваними змінними. З (11) знаходимо $y' = u'x + u$. Тому рівняння (10) запишеться у вигляді

$$u + xu' = g\left(u\right), \quad \text{або} \quad x\frac{du}{dx} = g\left(u\right) - u.$$

Відокремимо змінні:

$$\frac{du}{g\left(u\right) - u} = \frac{dx}{x}. \tag{12}$$

Проінтегрувавши рівняння (12), одержимо $\int \frac{du}{g(u)-u} = \ln|x| + C$. Обчисливши інтеграл у лівій частині і підставивши замість u вираз $\frac{y}{x}$, отримаємо загальний інтеграл диференціального рівняння.

Розв'язати диференціальні рівняння:

20. $y' = \frac{x^2+y^2}{2x^2}$.

Γ Права частина даного рівняння – функція $f(x,\ y) = \frac{x^2+y^2}{2x^2}$ є однорідною функцією нульового виміру, оскільки

$$f(tx,\ ty) = \frac{(tx)^2+(ty)^2}{2(tx)^2} = \frac{t^2(x^2+y^2)}{2t^2x^2} = \frac{x^2+y^2}{2x^2} = f(x,\ y),$$

тобто має місце рівність (9).

Застосуємо підстановку $y = ux$, $y' = u'x + u$:

$$u'x+u = \frac{x^2+x^2u^2}{2x^2},\ \ u'x+u = \frac{x^2(1+u^2)}{2x^2},\ \ u'x+u = \frac{1+u^2}{2},$$

$$u'x = \frac{1+u^2}{2} - u,\qquad u'x = \frac{u^2-2u+1}{2},\qquad u'x = \frac{(u-1)^2}{2},$$

$$u' = \frac{(u-1)^2}{2}\cdot\frac{1}{x}. \tag{$*$}$$

Диференціальне рівняння $(*)$ – рівняння з відокремлюваними змінними. Розв'яжемо його:

$$\frac{du}{dx} = \frac{(u-1)^2}{2}\cdot\frac{1}{x},\qquad \frac{2du}{(u-1)^2} = \frac{dx}{x},\qquad \int\frac{2du}{(u-1)^2} = \int\frac{dx}{x},$$

$$\frac{-2}{u-1} = \ln|x| + \ln C,\ \ \frac{-2}{u-1} = \ln C|x|.$$

Підставимо в отримане рівняння $u = \frac{y}{x}$:

$\frac{-2}{\frac{y}{x}-1} = \ln C|x|$, $\quad \frac{-2x}{y-x} = \ln C|x|$, звідки знаходимо загальний розв'язок заданого диференціального рівняння – $y = x - \frac{2x}{\ln C|x|}$. ⌋

21. $y' = \frac{x+y}{x-y}$.

⌈ Права частина рівняння – функція $f(x, y) = \frac{x+y}{x-y}$ є однорідною функцією нульового виміру, оскільки

$$f(tx, ty) = \frac{tx+ty}{tx-ty} = \frac{t(x+y)}{t(x-y)} = \frac{x+y}{x-y} = f(x, y),$$

тобто має місце рівність (9).

Застосуємо підстановку $y = ux$, $y' = u'x + u$.

$$u'x + u = \frac{x+ux}{x-ux}, \qquad u'x + u = \frac{x(1+u)}{x(1-u)}, \qquad u'x + u = \frac{1+u}{1-u},$$

$$u'x = \frac{1+u}{1-u} - u, \qquad u'x = \frac{1+u-u+u^2}{1-u}, \qquad u'x = \frac{u^2+1}{1-u},$$

$$u' = \frac{u^2+1}{1-u}\cdot\frac{1}{x}, \qquad \frac{du}{dx} = \frac{u^2+1}{1-u}\cdot\frac{1}{x}, \qquad \frac{1-u}{u^2+1}\,du = \frac{dx}{x},$$

$$\int\frac{1-u}{u^2+1}du = \int\frac{dx}{x}, \qquad \int\frac{du}{u^2+1} - \int\frac{udu}{u^2+1} = \int\frac{dx}{x},$$

$$\operatorname{arctg} u - \frac{1}{2}\ln\left|u^2+1\right| = \ln|x| + \ln C, \qquad \operatorname{arctg} u = \ln C|x| + \ln\sqrt{u^2+1},$$

$$\operatorname{arctg} u = \ln\left(C|x|\sqrt{u^2+1}\right), \qquad \operatorname{arctg}\frac{y}{x} = \ln\left(C|x|\sqrt{\frac{y^2}{x^2}+1}\right),$$

$$\operatorname{arctg}\frac{y}{x} = \ln\left(C|x|\cdot\sqrt{\frac{y^2+x^2}{x^2}}\right), \text{ або } \operatorname{arctg}\frac{y}{x} = \ln C\sqrt{y^2+x^2}. \ ⌋$$

22. $(x+y)dx - xdy = 0$.

⌈ $xdy = (x+y)dx$, $\frac{dy}{dx} = \frac{x+y}{x}$, $y' = \frac{x+y}{x}$.

Права частина рівняння – функція $f(x, y) = \frac{x+y}{x}$ є однорідною функцією нульового виміру, оскільки

$$f(tx,\, ty) = \frac{tx+ty}{tx} = \frac{t(x+y)}{tx} = \frac{x+y}{x} = f(x,\, y).$$

Застосуємо підстановку $y = ux$, $y' = u'x + u$.

$$u'x+u = \frac{x+ux}{x},\ u'x+u = \frac{x(1+u)}{x},\ u'x+u = 1+u,\ u'x = 1,\ u' = \frac{1}{x},$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{x}, \quad du = \frac{dx}{x}, \quad \int du = \int \frac{dx}{x}, \quad u = \ln|x| + \ln C, \quad u = \ln C|x|,$$

$\frac{y}{x} = \ln C|x|$, звідки маємо загальний розв'язок $y = x\ln C|x|$. ⌟

23. $\left(x^2 - xy\right)dy + y^2dx = 0$.

⌜ $\left(x^2 - xy\right)dy = -y^2dx$, $\frac{dy}{dx} = \frac{-y^2}{x^2 - xy}$, $y' = \frac{-y^2}{x^2 - xy}$.

Права частина рівняння – функція $f(x,\, y) = \frac{-y^2}{x^2 - xy}$ є однорідною функцією нульового виміру, оскільки

$$f(tx,\, ty) = \frac{-(ty)^2}{(tx)^2 - txty} = \frac{-t^2y^2}{t^2\left(x^2 - y^2\right)} = \frac{-y^2}{x^2 - y^2} = f(x,\, y).$$

Застосуємо підстановку $y = ux$, $y' = u'x + u$.

$$u'x+u = \frac{-u^2x^2}{x^2 - x\cdot ux}, \quad u'x+u = \frac{-u^2x^2}{x^2(1-u)}, \quad u'x+u = \frac{-u^2}{1-u},$$

$$u'x = \frac{-u^2}{1-u} - u, \quad u'x = \frac{-u^2 - u + u^2}{1-u}, \quad u'x = \frac{-u}{1-u}, \quad u'x = \frac{u}{u-1},$$

$$u' = \frac{u}{u-1}\cdot\frac{1}{x}, \quad \frac{du}{dx} = \frac{u}{u-1}\cdot\frac{1}{x}, \quad \frac{u-1}{u}\cdot du = \frac{dx}{x}, \quad \int\frac{u-1}{u}du = \int\frac{dx}{x},$$

$$\int du - \int\frac{du}{u} = \int\frac{dx}{x}, \quad u - \ln|u| = \ln|x| + \ln C,\ u = \ln C|x| + \ln|u|,$$

$$u = \ln\left(C|xu|\right),\ \frac{y}{x} = \ln\left(C\left|x\cdot\frac{y}{x}\right|\right),\text{ звідки } y = x\ln C|y|.$$ ⌟

24. $\left(2\sqrt{xy} - x\right)dy + ydx = 0$.

⌜ $\left(2\sqrt{xy} - x\right)dy = -y\,dx$, $\frac{dy}{dx} = \frac{-y}{2\sqrt{xy} - x}$, $y' = \frac{-y}{2\sqrt{xy} - x}$.

Права частина рівняння – функція $f(x, y) = \dfrac{-y}{2\sqrt{xy} - x}$ є однорідною функцією нульового виміру, оскільки

$$f(tx, ty) = \frac{-ty}{2\sqrt{tx\,ty} - tx} = \frac{-ty}{2t\sqrt{xy} - tx} = \frac{-ty}{t\left(2\sqrt{xy} - x\right)} = \frac{-y}{2\sqrt{xy} - x} =$$

$$= f(x, y).$$

Застосуємо підстановку $y = ux$, $y' = u'x + u$.

$$u'x + u = \frac{-ux}{2\sqrt{x \cdot ux} - x}, \quad u'x + u = \frac{-ux}{2x\sqrt{u} - x}, \quad u'x + u = \frac{-ux}{x\left(2\sqrt{u} - 1\right)},$$

$$u'x + u = \frac{-u}{2\sqrt{u} - 1}, \qquad u'x = \frac{-u}{2\sqrt{u} - 1} - u, \qquad u'x = \frac{-u - 2u\sqrt{u} + u}{2\sqrt{u} - 1},$$

$$u'x = \frac{-2u\sqrt{u}}{2\sqrt{u} - 1}, \qquad u' = \frac{-2u\sqrt{u}}{2\sqrt{u} - 1} \cdot \frac{1}{x}, \qquad \frac{du}{dx} = \frac{-2u\sqrt{u}}{2\sqrt{u} - 1} \cdot \frac{1}{x},$$

$$\frac{2\sqrt{u} - 1}{-2u\sqrt{u}} du = \frac{dx}{x}, \qquad \int \frac{2\sqrt{u} - 1}{-2u\sqrt{u}} du = \int \frac{dx}{x},$$

$$\int \frac{2\sqrt{u}}{-2u\sqrt{u}} du + \int \frac{du}{2u\sqrt{u}} = \int \frac{dx}{x}, \qquad -\int \frac{du}{u} + \frac{1}{2}\int u^{-\frac{3}{2}} du = \int \frac{dx}{x},$$

$$-\ln|u| - \frac{1}{\sqrt{u}} = \ln C|x|, \qquad \frac{-1}{\sqrt{u}} = \ln C|x \cdot u|, \qquad -\sqrt{\frac{x}{y}} = \ln C\left|x \cdot \frac{y}{x}\right|,$$

$$\sqrt{\frac{x}{y}} + \ln C|y| = 0. \quad \lrcorner$$

25. $y' = \dfrac{y}{x} + \sin\dfrac{y}{x}$.

$\ulcorner$ Права частина рівняння – функція $f(x, y) = \dfrac{y}{x} + \sin\dfrac{y}{x}$ є однорідною функцією нульового виміру, оскільки

$$f(tx, ty) = \frac{ty}{tx} + \sin\frac{ty}{tx} = \frac{y}{x} + \sin\frac{y}{x} = f(x, y).$$

Застосуємо підстановку $y = ux$, $y' = u'x + u$.

$$u'x + u = \frac{ux}{x} + \sin\frac{ux}{x}, \qquad u'x + u = u + \sin u, \qquad u'x + u - u = \sin u,$$

$$u'x = \sin u, \qquad u' = \sin u \cdot \frac{1}{x}, \qquad \frac{du}{dx} = \sin u \cdot \frac{1}{x}, \qquad \frac{du}{\sin u} = \frac{dx}{x},$$

$$\int \frac{du}{\sin u} = \int \frac{dx}{x}, \qquad \ln\left|\operatorname{tg}\frac{u}{2}\right| = \ln C|x|, \qquad \operatorname{tg}\frac{u}{2} = Cx,$$

$$\operatorname{tg}\frac{y}{2x} = Cx. \quad \lrcorner$$

<u>Вправи для самостійного розв'язання</u>

Розв'язати диференціальні рівняння:

26. $y' = \frac{y}{x} + 5\cos^2\frac{y}{x}$.

27. $y' + \sqrt{4 - \frac{y^2}{x^2}} = \frac{y}{x}$.

28. $xy' - y = \sqrt{y^2 + 2x^2}$.

29. $y' = \frac{y}{x} + \operatorname{tg}\frac{y}{x}$.

30. $\left(x^2 + 3xy + y^2\right)dx - x^2dy = 0$.

31. $xy' = y\ln\frac{y}{x}$, якщо $y(1) = 1$.

Відповіді:

26. $\operatorname{tg}\frac{y}{x} = \ln C\left|x^5\right|$.

27. $\arcsin\frac{y}{2x} + \ln C|x| = 0$.

28. $y = \frac{Cx^2}{2} - \frac{1}{C}$.

29. $\sin\frac{y}{x} = Cx$.

30. $y = -x\left(1 + \frac{1}{\ln C|x|}\right)$.

31. $y = xe^{1-x}$.

4. Лінійні диференціальні рівняння

Диференціальне рівняння виду

$$y' + P(x)y = Q(x) \quad \text{або} \quad y' = -P(x)y + Q(x), \tag{13}$$

де $P(x)$ і $Q(x)$ – неперервні функції на деякому інтервалі (a, b), називається *лінійним диференціальним рівнянням першого порядку*.

У випадку, коли $P(x) = \pm Q(x)$ або $Q(x) = 0$, рівняння (13) є диференціальним рівнянням з відокремлюваними змінними.

Є кілька методів розв'язання рівняння (13). Розглянемо один із них – *метод Бернуллі*. Розв'язок рівняння шукаємо у вигляді добутку

$$y = u \cdot v , \tag{14}$$

де $u = u(x)$ і $v = v(x)$ – невідомі функції. Одну з цих функцій можна вибрати довільним чином, а інша визначається згідно з рівнянням (13).

Знаходимо похідну функції y: $y' = u'v + uv'$. Підставляючи y та y' в рівняння (13), отримаємо

$$u'v + uv' + P(x)uv = Q(x),$$

$$u'v + u\left(v' + P(x)v\right) = Q(x). \tag{15}$$

Виберемо функцію v так, щоб вираз у дужках дорівнював нулю, тобто

$$v' + P(x)v = 0 . \tag{16}$$

Знаходимо v з рівняння (16), яке є диференціальним рівнянням з відокремлюваними змінними:

$\dfrac{dv}{dx} = -P(x)v$, $\quad \dfrac{dv}{v} = -P(x)dx$, звідки $\ln|v| = -\int P(x)dx$, або $v = e^{-\int P(x)dx}$. Під невизначеним інтегралом тут розуміємо одну з первісних функції $P(x)$.

Знаючи v, знаходимо u з рівняння $u'v = Q(x)$, яке випливає з (15) та (16):

$$v\frac{du}{dx} = Q(x), \qquad \frac{du}{dx} = \frac{Q(x)}{v} = Q(x)\cdot e^{\int P(x)dx},$$

$$du = Q(x)e^{\int P(x)dx}dx, \qquad u = \int Q(x)e^{\int P(x)}dx + C .$$

Підставляємо знайдені функції u та v у формулу (14) і отримуємо загальний розв'язок лінійного диференціального рівняння:

$$y = u \cdot v = e^{-\int P(x)dx}\left(\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C\right). \tag{17}$$

При розв'язуванні конкретних задач простіше виконувати вказаний вище алгоритм, аніж застосовувати готову формулу (17).

Розв'язати диференціальні рівняння:

32. $y' - \dfrac{2}{x}y = 2x^3$.

Γ Маємо лінійне диференціальне рівняння першого порядку. Його розв'язок шукаємо у вигляді $y = uv$ (див. формулу (14)). Тоді $y' = u'v + uv'$. Підставляємо y та y' у задане рівняння:

$$u'v + uv' - \frac{2uv}{x} = 2x^3,$$

$$u'v + u\left(v' - \frac{2v}{x}\right) = 2x^3. \qquad (*)$$

Виберемо функцію v так, щоб

$$v' - \frac{2v}{x} = 0. \qquad (**)$$

Знаходимо v:

$v' = \frac{2v}{x}$, $\frac{dv}{dx} = \frac{2v}{x}$, $\frac{dv}{v} = 2\frac{dx}{x}$, $\int \frac{dv}{v} = 2\int \frac{dx}{x}$, $\ln|v| = 2\ln|x|$, $\ln|v| = \ln x^2$, звідки $v = x^2$.

Зауважимо, що оскільки в якості функції v ми вибираємо один з розв'язків рівняння $(**)$, то тут і надалі у методі Бернуллі, після інтегрування диференціального рівняння для знаходження v, покладаємо $C = 0$.

Підставляючи знайдену функцію v в рівняння $(*)$, отримуємо рівняння для знаходження u: $u' \cdot x^2 = 2x^3$, $u' = \frac{2x^3}{x^2}$,

$\frac{du}{dx} = 2x$, $du = 2x\,dx$, $\int du = \int 2x\,dx$, $u = 2 \cdot \frac{x^2}{2} + C$, $u = x^2 + C$.

За формулою (14) знаходимо загальний розв'язок заданого диференціального рівняння – $y = uv = \left(x^2 + C\right)x^2$. $\lrcorner$

33. $y' + y\,\mathrm{tg}\,x = \cos^2 x$.

Γ Маємо лінійне диференціальне рівняння першого порядку. Його розв'язок шукаємо у вигляді $y = uv$. Тоді $y' = u'v + uv'$.

$$u'v + uv' + uv\,\mathrm{tg}\,x = \cos^2 x,$$

$$u'v + u\left(v' + v\,\mathrm{tg}\,x\right) = \cos^2 x. \qquad (*)$$

Виберемо функцію v так, щоб $v' + v\,\mathrm{tg}\,x = 0$. Знаходимо v:

$v' + v\,\mathrm{tg}\,x = 0$, $\quad \dfrac{dv}{dx} = -v\,\mathrm{tg}\,x$, $\quad \dfrac{dv}{v} = -\mathrm{tg}\,x\,dx$, $\quad \displaystyle\int \frac{dv}{v} = -\int \mathrm{tg}\,x\,dx$,
$\ln|v| = \ln|\cos x|$, звідки $v = \cos x$.

Підставляючи знайдену функцію v в рівняння $(*)$, отримуємо рівняння для знаходження u: $\quad u' \cdot \cos x = \cos^2 x$, $\quad u' = \dfrac{\cos^2 x}{\cos x}$,
$\dfrac{du}{dx} = \cos x$, $\quad du = \cos x\,dx$, $\quad \displaystyle\int du = \int \cos x\,dx$, звідки $u = \sin x + C$.

За формулою (14) маємо $y = uv = (\sin x + C)\cos x$. ⌟

34. $y' + \dfrac{y}{x} = \dfrac{\sin 2x}{x}$.

⌜ Маємо лінійне диференціальне рівняння першого порядку. Його розв'язок шукаємо у вигляді $y = uv$. Тоді $y' = u'v + uv'$.

$$u'v + uv' + \frac{uv}{x} = \frac{\sin 2x}{x},$$

$$u'v + u\left(v' + \frac{v}{x}\right) = \frac{\sin 2x}{x}. \qquad (*)$$

Виберемо функцію v так, щоб $v' + \dfrac{v}{x} = 0$. Знаходимо v:

$\dfrac{dv}{dx} = -\dfrac{v}{x}$, $\quad \dfrac{dv}{v} = -\dfrac{dx}{x}$, $\quad \displaystyle\int \frac{dv}{v} = -\int \frac{dx}{x}$, $\ln|v| = -\ln|x|$, $\quad \ln|v| = \ln\dfrac{1}{|x|}$,
звідки $v = \dfrac{1}{x}$.

Підставляючи знайдену функцію v в рівняння $(*)$, отримуємо рівняння для знаходження u: $\quad u' \cdot \dfrac{1}{x} = \dfrac{\sin 2x}{x}$, $\quad u' = \dfrac{\sin 2x}{x} \cdot x$,
$\dfrac{du}{dx} = \sin 2x$, $du = \sin 2x\,dx$, $\displaystyle\int du = \int \sin 2x\,dx$, звідки $u = -\dfrac{1}{2}\cos 2x + C$.

За формулою (14) маємо $y = uv = \left(C - \dfrac{1}{2}\cos 2x\right)\dfrac{1}{x}$. ⌟

35. $xy' - y = x^2 \cos x$.

$\ulcorner$ Задане рівняння запишемо як $y' - \frac{y}{x} = x\cos x$. Отже, це лінійне диференціальне рівняння першого порядку. Його розв'язок шукаємо у вигляді $y = uv$.

$$u'v + uv' - \frac{uv}{x} = x\cos x,$$

$$u'v + u\left(v' - \frac{v}{x}\right) = x\cos x. \qquad (*)$$

Виберемо функцію v так, щоб $v' - \frac{v}{x} = 0$. Знаходимо v:

$$\frac{dv}{dx} = \frac{v}{x},\ \ \frac{dv}{v} = \frac{dx}{x},\ \ \int\frac{dv}{v} = \int\frac{dx}{x},\ \ \ln|v| = \ln|x|,\ \text{звідки}\ \ v = x.$$

Підставляючи знайдену функцію v в рівняння $(*)$, отримуємо рівняння для знаходження u:

$$u'x = x\cos x,\ \ u' = x\cos x\cdot\frac{1}{x},$$

$$\frac{du}{dx} = \cos x,\ \ du = \cos x\,dx,\ \ \int du = \int\cos x\,dx,\ \ u = \sin x + C.$$

За формулою (14) маємо $y = uv = (\sin x + C)x$. $\lrcorner$

36. $x^2y' + 5xy + 4 = 0$.

$\ulcorner$ $y' + \frac{5xy}{x^2} = -\frac{4}{x^2}$, $y' + \frac{5y}{x} = -\frac{4}{x^2}$, і, отже, маємо лінійне диференціальне рівняння першого порядку. Його розв'язок шукаємо у вигляді $y = uv$.

$$u'v + uv' + \frac{5uv}{x} = -\frac{4}{x^2},$$

$$u'v + u\left(v' + \frac{5v}{x}\right) = -\frac{4}{x^2}. \qquad (*)$$

Виберемо функцію v так, щоб $v' + \frac{5v}{x} = 0$. Знаходимо v:

$$\frac{dv}{dx} = -\frac{5v}{x},\qquad \frac{dv}{v} = -5\frac{dx}{x},\qquad \int\frac{dv}{v} = -5\int\frac{dx}{x},\qquad \ln|v| = -5\ln|x|,$$

$\ln|v| = \ln\frac{1}{|x^5|}$, звідки $v = \frac{1}{x^5}$.

Підставляючи знайдену функцію v в рівняння $(*)$, отримуємо рівняння для знаходження u: $u' \cdot \frac{1}{x^5} = -\frac{4}{x^2}$, $u' = -\frac{4}{x^2} \cdot x^5$, $\frac{du}{dx} = -4x^3$,

$$du = -4x^3 dx\,, \quad \int du = -4\int x^3 dx\,, \quad u = -4 \cdot \frac{x^4}{4} + C\,, \quad u = -x^4 + C\,.$$

Отже, $y = uv = \frac{C - x^4}{x^5}$. ┘

37. $y' - \frac{2x}{x^2+1} y = x\sqrt{x^2+1}$, якщо $y(0) = 2$.

┌ Маємо лінійне диференціальне рівняння першого порядку. Його розв'язок шукаємо у вигляді $y = uv$.

$$u'v + uv' - \frac{2x}{x^2+1} uv = x\sqrt{x^2+1}\,,$$

$$u'v + u\left(v' - \frac{2x}{x^2+1} v\right) = x\sqrt{x^2+1}\,. \qquad (*)$$

Виберемо функцію v так, щоб $v' - \frac{2xv}{x^2+1} = 0$. Знаходимо v:

$$\frac{dv}{dx} = \frac{2xv}{x^2+1}\,, \qquad \frac{dv}{v} = \frac{2x}{x^2+1} dx\,, \qquad \int\frac{dv}{v} = \int\frac{2x}{x^2+1} dx\,, \qquad \ln|v| = \ln\left|x^2+1\right|\,,$$

$v = x^2 + 1$.

Підставляючи знайдену функцію v в рівняння $(*)$, отримуємо рівняння для знаходження u: $u'\left(x^2+1\right) = x\sqrt{x^2+1}$,

$$u' = x\sqrt{x^2+1} \cdot \frac{1}{x^2+1}\,, \qquad \frac{du}{dx} = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,, \qquad du = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} dx\,,$$

$$\int du = \int\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} dx\,, \qquad u = \sqrt{x^2+1} + C\,.$$

Отже, $y = uv = \left(\sqrt{x^2+1} + C\right) \cdot \left(x^2+1\right)$.

Знайдемо частинний розв'язок. За умовою задачі $y = 2$ при $x = 0$. Тоді отримаємо $2 = (1 + C) \cdot 1$, $C = 1$. Отже, частинний розв'язок

$$y=\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)\left(x^2+1\right), \quad y=\left(x^2+1\right)\sqrt{x^2+1}+x^2+1,$$

або $y=\sqrt{\left(x^2+1\right)^3}+x^2+1$. ┘

Вправи для самостійного розв'язання

Розв'язати диференціальні рівняння:

38. $y'-y\operatorname{ctg}x=\sin x$.

39. $\left(x^2+1\right)y'+4xy=3$.

40. $y'-y=e^x$.

41. $y'-\dfrac{y}{x\ln x}=x\ln x$.

42. $y'+y\operatorname{tg}x=\dfrac{1}{\cos x}$, якщо $y(0)=0$.

43. $\left(1-x^2\right)y'+xy=1$, якщо $y(0)=1$.

Відповіді:

38. $y=(C+x)\sin x$.

39. $y=\dfrac{x^3+3x+C}{x^2+1}$.

40. $y=e^x(C+x)$.

41. $y=\left(\dfrac{x^2}{2}+C\right)\cdot\ln x$.

42. $y=\dfrac{x}{\cos x}$.

43. $y=x+\sqrt{1-x^2}$.

5. Диференціальне рівняння Бернуллі

Рівняння виду

$$y'+P(x)y=Q(x)\cdot y^{\alpha} \text{ або } y'=-P(x)y+Q(x)\cdot y^{\alpha}, \qquad (18)$$

де функції $P(x)$ та $Q(x)$ неперервні на деякому інтервалі (a, b), $\alpha\in R$, причому $\alpha\neq 0$ і $\alpha\neq 1$, називається *рівнянням Бернуллі*.

При $\alpha=0$ рівняння (18) перетворюється в лінійне диференціальне рівняння $y'+P(x)y=Q(x)$, розглянуте раніше, а при $\alpha=1$ – в рівняння з відокремлюваними змінними $y'=\left(Q(x)-P(x)\right)y$.

Розв'язок рівняння Бернуллі зручно шукати у вигляді $y=u\cdot v$.

Розв'язати диференціальні рівняння:

44. $x^2y^2\dfrac{dy}{dx}+xy^3=a^2$ (a – стала).

$\ulcorner$ $x^2y^2y'+xy^3=a^2$, $y^2y'+\dfrac{xy^3}{x^2}=\dfrac{a^2}{x^2}$, $y'+\dfrac{y}{x}=\dfrac{a^2}{x^2y^2}$. Отже, це рівняння Бернуллі. Зробимо заміну $y=uv$.

$$u'v+uv'+\frac{uv}{x}=\frac{a^2}{x^2u^2v^2},$$

$$u'v+u\left(v'+\frac{v}{x}\right)=\frac{a^2}{x^2u^2v^2}. \qquad (*)$$

Виберемо функцію v так, щоб $v'+\dfrac{v}{x}=0$. Знаходимо v:

$\dfrac{dv}{v}=-\dfrac{dx}{x}$, $\displaystyle\int\frac{dv}{v}=-\int\frac{dx}{x}$, $\ln|v|=-\ln|x|$, $v=\dfrac{1}{x}$.

Підставляючи v в рівняння $(*)$, отримуємо рівняння для знаходження u: $\dfrac{du}{dx}\cdot\dfrac{1}{x}=\dfrac{a^2}{x^2\cdot u^2\,\frac{1}{x^2}}$, $\dfrac{du}{dx}\cdot\dfrac{1}{x}=\dfrac{a^2}{u^2}$, $u^2du=a^2xdx$,

$\displaystyle\int u^2du=a^2\int x\,dx$, $\dfrac{u^3}{3}=a^2\left(\dfrac{x^2}{2}+C\right)$, $u=\sqrt[3]{3a^2\left(\dfrac{x^2}{2}+C\right)}$.

$y=uv=\dfrac{1}{x}\sqrt[3]{3a^2\left(\dfrac{x^2}{2}+C\right)}$, або $y^3=\dfrac{3}{2}\dfrac{a^2}{x}+\dfrac{C}{x^3}$. $\lrcorner$

45. $y'+xy=3xy^3$.

$\ulcorner$ Це рівняння Бернуллі. Зробимо заміну $y=uv$, $y'=u'v+uv'$.

$$u'v+uv'+xuv=3x(uv)^3,$$

$$u'v+u(v'+xv)=3x\cdot(vu)^3. \qquad (*)$$

Виберемо функцію v так, щоб $v'+xv=0$. Знаходимо v:

$\dfrac{dv}{dx}=-xv$, $\dfrac{dv}{v}=-xdx$, $\displaystyle\int\frac{dv}{v}=-\int xdx$, $\ln|v|=-\dfrac{x^2}{2}$, $v=e^{-\frac{x^2}{2}}$.

Підставляючи v в рівняння $(*)$, отримуємо рівняння для знаходження u: $u'\,e^{\frac{-x^2}{2}}=3xu^3\left(e^{\frac{-x^2}{2}}\right)^3$, $\dfrac{du}{dx}=3xe^{-x^2}u^3$;

$$\frac{du}{u^3} = 3xe^{-x^2}dx\,, \quad \int\frac{du}{u^3} = 3\int xe^{-x^2}dx\,.$$

1) $\int\frac{du}{u^3} = \int u^{-3}du = -\frac{u^{-2}}{2} + C = -\frac{1}{2u^2} + C$;

2) $\int xe^{-x^2}dx = \begin{vmatrix} t = -x^2 \\ dt = -2xdx \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}\int e^t dt = -\frac{1}{2}e^t + C = -\frac{1}{2}e^{-x^2} + C$.

Отже, $\frac{1}{u^2} = \frac{3}{e^{x^2}} + C$, $\frac{1}{u^2} = 3e^{-x^2} + C$, $u^2 = \frac{e^{x^2}}{3 + Ce^{x^2}}$, $u = \pm\frac{e^{\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{3 + Ce^{x^2}}}$.

$$y = uv = \pm\frac{e^{\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{3 + Ce^{x^2}}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}, \text{ або } \quad y = \pm\frac{1}{\sqrt{3 + Ce^{x^2}}}\,. \quad \lrcorner$$

<u>Вправи для самостійного розв’язання</u>

Розв’язати диференціальні рівняння:

46. $y' - \frac{1}{x}y = -y^2$. **47.** $y' + \frac{2y}{x} = y^2 x$.

48. $y' + 2xy = 2y^3x^3$.

Відповіді:

46. $y = \frac{2x}{x^2 + C}$. **47.** $y = \frac{-1}{x^2 \ln C|x|}$.

48. $\frac{1}{y^2} = Ce^{2x^2} + x^2 + \frac{1}{2}$.

6. Класифікація диференціальних рівнянь першого порядку

При розв’язанні диференціальних рівнянь першого порядку найпершим (і принциповим) кроком є визначення типу рівняння. Від цього у великій мірі залежить можливість розв’язання диференціального рівняння. Тому слід запам’ятати основні типи диференціальних рівнянь першого порядку, які класифіковано у наступній таблиці:

№ п/п	*Вид рівняння*	*Назва диференціального рівняння*
I	$y' = f(x)$	Найпростіше рівняння
II	$y' = f(x)\cdot g(y)$	Рівняння з відокремлюваними змінними
III	$y' = f(x,\ y)$, де $f(x,\ y)$ – однорідна функція нульового виміру	Однорідне рівняння
IV	$y' = -P(x)y + Q(x)$	Лінійне рівняння
V	$y' = -P(x)y + Q(x)y^{\alpha}$	Рівняння Бернуллі

Зручно звести диференціальне рівняння першого порядку до виду $y' = f(x,\ y)$, а потім за даною класифікацією визначити тип рівняння і тільки після цього розв'язувати його відповідним методом.

Диференціальне рівняння може належати одночасно до кількох типів. Наприклад, рівняння $y' = \frac{y}{x}$ відноситься до усіх типів, крім першого. Але найпростіше його розв'язувати як диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними (див. приклад **8**).

Розв'язати диференціальні рівняння.

49. $y' = 5\sqrt{y}$, якщо $y(0) = 25$.

$\ulcorner$ Це рівняння виду II – рівняння з відокремлюваними змінними. Так як $y' = \frac{dy}{dx}$, то маємо $\frac{dy}{dx} = 5\sqrt{y}$, $\frac{dy}{\sqrt{y}} = 5\,dx$, $\int\frac{dy}{\sqrt{y}} = 5\int dx$,

$$2\sqrt{y} = 5(x+C), \text{ або } \sqrt{y} = \frac{5}{2}(x+C).$$

Знайдемо частинний інтеграл. За умовою задачі $y = 25$ при $x = 0$. Тому

$$\sqrt{25} = \frac{5}{2}(0+C), \quad C = 2.$$

Отже, маємо частинний інтеграл $\sqrt{y} = \frac{5}{2}(x+2)$.. $\lrcorner$

50. $y' + 2xy = 2xe^{-x^2}$.

$\ulcorner$ Маємо рівняння виду IV – лінійне диференціальне рівняння першого порядку. Розв'язок шукаємо у вигляді $y = uv$, $y' = u'v + uv'$.

$$u'v + uv' + 2uvx = 2xe^{-x^2},$$
$$u'v + u\left(v' + 2vx\right) = 2xe^{-x^2}. \qquad (*)$$

Виберемо функцію v так, щоб $v' + 2vx = 0$. Знаходимо v:

$$\frac{dv}{dx} = -2vx, \quad \frac{dv}{v} = -2x\,dx, \quad \int\frac{dv}{v} = -2\int x\,dx, \quad \ln|v| = -x^2, \quad v = e^{-x^2}.$$

Підставляючи v в рівняння $(*)$, отримуємо рівняння для знаходження u: $u'v = 2xe^{-x^2}$, $\dfrac{du}{dx}e^{-x^2} = 2xe^{-x^2}$, $du = \dfrac{2xe^{-x^2}dx}{e^{-x^2}}$,

$$\int du = 2\int x\,dx, \quad u = 2\frac{x^2}{2} + C, \quad u = x^2 + C.$$

$$y = uv = \left(x^2 + C\right)e^{-x^2}. \quad \lrcorner$$

51. $y' = \dfrac{4}{x^2+9}$.

$\ulcorner$ Це рівняння виду I – найпростіше рівняння. Так як $y' = \dfrac{dy}{dx}$, то маємо

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4}{x^2+9}, \quad dy = \frac{4}{x^2+9}dx, \quad \int dy = 4\int\frac{dx}{x^2+3^2},$$

$$y = \frac{4}{3}\operatorname{arctg}\frac{x}{3} + C. \quad \lrcorner$$

52. $\left(x^2 + 2xy\right)dx + xydy = 0$.

$\ulcorner$ $xy\,dy = -\left(x^2 + 2xy\right)dx$, $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{\left(x^2+2xy\right)}{xy}$, $y' = \dfrac{-x\left(x+2y\right)}{xy}$,

$$y' = \frac{-\left(x+2y\right)}{y}.$$

Це рівняння виду III – однорідне диференціальне рівняння. Дійсно, права частина рівняння – функція $f\left(x,\, y\right) = -\dfrac{\left(x+2y\right)}{y}$ є однорідною функцією нульового виміру:

$$f(tx, ty) = -\frac{(tx+2ty)}{ty} = \frac{-t(x+2y)}{ty} = \frac{-(x+2y)}{y} = f(x, y).$$

Застосуємо підстановку $y = ux$, $y' = u'x + u$.

$$u'x + u = -\frac{(x+2ux)}{ux}, \quad u'x + u = -\frac{x(1+2u)}{ux}, \quad u'x + u = -\frac{(1+2u)}{u},$$

$$u'x = \frac{-(1+2u)}{u} - u, \quad u'x = -\frac{(1+2u)+u^2}{u}, \quad x\frac{du}{dx} = -\frac{(u^2+2u+1)}{u},$$

$$\frac{u\,du}{-(u+1)^2} = \frac{dx}{x}, \quad -\int\frac{u\,du}{(u+1)^2} = \int\frac{dx}{x}, \quad -\int\frac{u+1-1}{(u+1)^2}du = \int\frac{dx}{x},$$

$$-\int\frac{u+1}{(u+1)^2}du + \int\frac{du}{(u+1)^2} = \int\frac{dx}{x}, \quad -\ln|u+1| - \frac{1}{u+1} = \ln C|x|,$$

$$\ln\left|\frac{y}{x}+1\right| + \frac{1}{\frac{y}{x}+1} = -\ln C|x|, \text{ або } \ln\left|\frac{y+x}{x}\right| + \frac{x}{y+x} = -\ln C|x|. \quad \lrcorner$$

53. $y' = \dfrac{y+5}{\sqrt{16-x^2}}$.

$\ulcorner$ Це рівняння виду як II $\left(y' = \dfrac{1}{\sqrt{16-x^2}}(y+5)\right)$, так і III $\left(y' = \dfrac{1}{\sqrt{16-x^2}}y + \dfrac{5}{\sqrt{16-x^2}}\right)$. Але простіше його розв'язувати як рівняння з відокремлюваними змінними. Так як $y' = \dfrac{dy}{dx}$, то маємо

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y+5}{\sqrt{16-x^2}}, \quad \frac{dy}{y+5} = \frac{dx}{\sqrt{4^2-x^2}}, \quad \int\frac{dy}{y+5} = \int\frac{dx}{\sqrt{4^2-x^2}},$$

$\ln|y+5| = \arcsin\dfrac{x}{4} + C$, $\quad y+5 = \pm e^{\arcsin\frac{x}{4}+C}$, звідки маємо загальний розв'язок $\quad y = Ce^{\arcsin\frac{x}{4}} - 5$. $\lrcorner$

54. $xy' - y(2y\ln x - 1) = 0$.

⌐ Запишемо задане рівняння як $y'+\frac{y}{x}=\frac{2\ln x}{x}\cdot y^2$. Маємо рівняння виду V – рівняння Бернуллі. Зробимо заміну $y=uv$, $y'=u'v+uv'$.

$$u'v+uv'+\frac{uv}{x}=\frac{2\ln x}{x}(uv)^2,$$

$$u'v+u\left(v'+\frac{v}{x}\right)=\frac{2\ln x}{x}(uv)^2. \qquad (*)$$

Виберемо функцію v так, щоб $v'+\frac{v}{x}=0$. Знаходимо v:

$\frac{dv}{v}=-\frac{dx}{x}$, $\int\frac{dv}{v}=-\int\frac{dx}{x}$, $\ln|v|=-\ln|x|$, $v=\frac{1}{x}$.

Підставляючи v в рівняння $(*)$, отримуємо рівняння для знаходження u: $\frac{du}{dx}\frac{1}{x}=\frac{2\ln x}{x}u^2\frac{1}{x^2}$, $\frac{du}{u^2}=\frac{2\ln x}{x^2}dx$,

$$\int\frac{du}{u^2}=2\int\frac{\ln x}{x^2}dx, \quad -\frac{1}{u}=2\int\frac{\ln x}{x^2}dx.$$

Обчислимо інтеграл:

$$\int\frac{\ln x}{x^2}dx=\begin{vmatrix} u=\ln x, & du=\frac{dx}{x} \\ dv=\frac{dx}{x^2}, & v=-\frac{1}{x}\end{vmatrix}=$$

$$=-\frac{\ln x}{x}+\int\frac{1}{x}\frac{dx}{x}=-\frac{\ln x}{x}+\int\frac{dx}{x^2}=-\frac{\ln x}{x}-\frac{1}{x}+C.$$

Отже, $-\frac{1}{u}=-2\left(\frac{\ln x}{x}+\frac{1}{x}+C\right)$, звідки $u=\frac{1}{\frac{2\ln x}{x}+\frac{2}{x}+C}$.

Запишемо загальний розв’язок

$y=uv=\frac{1}{\frac{2\ln x}{x}+\frac{2}{x}+C}\frac{1}{x}$, або $y=\frac{1}{2\ln x+Cx+2}$. ⌟

55. $xy' - 4y = x^2 \cdot \sqrt{y}$.

Γ Запишемо задане рівняння як $y' - \dfrac{4y}{x} = x\sqrt{y}$. Маємо рівняння виду V – рівняння Бернуллі з $\alpha = \dfrac{1}{2}$. Зробимо заміну $y = uv$.

$$u'v + uv' - \frac{4uv}{x} = x\sqrt{uv},$$

$$u'v + u\left(v' - \frac{4v}{x}\right) = x\sqrt{uv}. \qquad (*)$$

Виберемо функцію v так, щоб $\dfrac{dv}{dx} = \dfrac{4v}{x}$. Знаходимо v:

$\dfrac{dv}{v} = \dfrac{4dx}{x}$, $\int \dfrac{dv}{v} = 4\int \dfrac{dx}{x}$, $\ln|v| = 4\ln|x|$, звідки $v = x^4$.

Підставляючи v в рівняння $(*)$, отримуємо рівняння для знаходження u: $\dfrac{du}{dx} \cdot x^4 = x\sqrt{u} \cdot \sqrt{x^4}$, $\dfrac{du}{\sqrt{u}} = \dfrac{x^3 dx}{x^4}$, $\int \dfrac{du}{\sqrt{u}} = \int \dfrac{dx}{x}$,

$2\sqrt{u} = \ln|x| + \ln C$, $2\sqrt{u} = \ln C|x|$, $\sqrt{u} = \dfrac{1}{2}\ln C|x|$.

Отже, $\sqrt{y} = \sqrt{u}\sqrt{v} = \dfrac{1}{2}x^2 \ln C|x|$. $\lrcorner$

56. $(1 + x^2)dy + y\,dx = 0$, якщо $y(0) = 1$.

Γ $(1 + x^2)\dfrac{dy}{dx} + y = 0$, $(1 + x^2) \cdot y' = -y$, $y' = -\dfrac{y}{1 + x^2}$. Це рівняння виду II – з відокремлюваними змінними. Маємо

$\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{y}{1 + x^2}$, $\dfrac{dy}{y} = -\dfrac{dx}{1 + x^2}$, $\int \dfrac{dy}{y} = -\int \dfrac{dx}{1 + x^2}$, $\ln|y| = -\operatorname{arctg} x + C$,

звідки $y = \pm e^{-\operatorname{arctg} x + C}$, або $y = Ce^{-\operatorname{arctg} x}$ – загальний розв'язок заданого диференціального рівняння.

Знайдемо частинний розв'язок. За умовою задачі $y = 1$ при $x = 0$: $1 = Ce^{-\operatorname{arctg} 0}$, $C = 1$. Отже, маємо частинний розв'язок $y = e^{-\operatorname{arctg} x}$. $\lrcorner$

57. $y' = \dfrac{xy - y^2}{x^2 - 2xy}$.

$\ulcorner$ Це диференціальне рівняння виду III. Дійсно, права частина даного рівняння є однорідною функцією нульового виміру:

$$f\left(tx,\, ty\right)=\frac{txty-t^2y^2}{t^2x^2-2txty}=\frac{t^2\left(xy-y^2\right)}{t^2\left(x^2-2xy\right)}=\frac{xy-y^2}{x^2-2xy}=f\left(x,\, y\right).$$

Застосувавши підстановку $y=ux$, $y'=u'x+u$, дістанемо

$$u'x+u=\frac{xux-u^2x^2}{x^2-2xux},\quad u'x+u=\frac{x^2\left(u-u^2\right)}{x^2\left(1-2u\right)},\quad u'x+u=\frac{u-u^2}{1-2u},$$

$$u'x=\frac{u-u^2}{1-2u}-u,\quad u'x=\frac{u-u^2-u+2u^2}{1-2u},\quad \frac{du}{dx}x=\frac{u^2}{1-2u},$$

$$\frac{1-2u}{u^2}du=\frac{dx}{x},\quad \int\frac{1-2u}{u^2}du=\int\frac{dx}{x},\quad \int\frac{du}{u^2}-2\int\frac{du}{u}=\int\frac{dx}{x},$$

$$-\frac{1}{u}-2\ln|u|=\ln|x|-\ln C,\quad \frac{1}{u}+2\ln|u|=\ln\frac{C}{|x|},\quad \frac{1}{u}=\ln\frac{C}{xu^2},$$

$$\frac{x}{y}=\ln\frac{Cx}{y^2}.\quad \lrcorner$$

58. $dy-e^{-x}dx+y\,dx-x\,dy=xy\,dx$, якщо $y\left(0\right)=\ln 5$.

$\ulcorner$ Перетворимо рівняння, виділивши похідну:

$$dy-x\,dy=xy\,dx+e^{-x}dx-y\,dx,$$

$$\left(1-x\right)dy=\left(xy+e^{-x}-y\right)dx.$$

Помноживши обидві частини рівняння на $\dfrac{1}{\left(1-x\right)dx}$, одержимо

$$\frac{dy}{dx}=\frac{xy+e^{-x}-y}{1-x},\quad \frac{dy}{dx}=\frac{y\left(x-1\right)+e^{-x}}{1-x},\quad \frac{dy}{dx}=-y+\frac{e^{-x}}{1-x},$$

$$y'+y=\frac{e^{-x}}{1-x}.$$

Це лінійне диференціальне рівняння першого порядку (рівняння виду IV).

Використаємо підстановку $y=uv$, $y'=u'v+uv'$.

$$u'v+uv'+uv=\frac{e^{-x}}{1-x},$$

$$u'v+u(v'+v)=\frac{e^{-x}}{1-x}. \qquad (*)$$

Виберемо функцію v так, щоб $v'+v=0$. Знаходимо v:

$\frac{dv}{v}=-dx$, $\int\frac{dv}{v}=-\int dx$, $\ln|v|=-x$, $v=e^{-x}$.

Підставляючи функцію v в рівняння $(*)$, одержимо рівняння для знаходження u: $\frac{du}{dx}e^{-x}=\frac{e^{-x}}{1-x}$, $du=\frac{dx}{1-x}$, $\int du=\int\frac{dx}{1-x}$,

$u=-\ln|1-x|+\ln C$, $u=\ln\frac{C}{|1-x|}$.

Тоді $y=uv=e^{-x}\ln\frac{C}{|1-x|}$ – загальний розв'язок рівняння.

Знайдемо частинний розв'язок, підставивши в загальний розв'язок початкову умову $y=\ln 5$ при $x=0$. Таким чином, матимемо $\ln 5=\frac{1}{e}\ln\frac{C}{1-0}$, $\ln 5=\ln C$, $C=5$. Частинним розв'язком буде

$y=e^{-x}\ln\frac{5}{|1-x|}$. ⌟

59. $y'=2\sqrt{y}\ln x$, якщо $y(e)=1$.

⌜ Це диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними (рівняння виду II).

$$\frac{dy}{dx}=2\sqrt{y}\ln x,\quad \frac{dy}{2\sqrt{y}}=\ln x\,dx,\quad \int\frac{dy}{2\sqrt{y}}=\int\ln x\,dx.$$

Обчислимо $\int\ln x\,dx=\left|\begin{matrix} u=\ln x,\ du=\frac{dx}{x} \\ dv=dx,\ v=x\end{matrix}\right|=x\ln x-\int x\frac{dx}{x}=x\ln x-x+C$.

Враховуючи, що $\int\frac{dy}{2\sqrt{y}}=\sqrt{y}+C$, маємо загальний інтеграл $\sqrt{y}=x\ln x-x+C$.

Знайдемо частинний розв'язок. За умовою задачі $y=1$ при $x=e$. Тому $1=e\ln e-e+C$, $1=e-e+C$, звідки $C=1$. Отже , частинний інтеграл – $\sqrt{y}=x\ln x-x+1$. ⌟

60. $y' - 3x^2 y - x^2 e^{x^3} = 0$, якщо $y(0) = 0$.

⌈ $y' - 3x^2 y = x^2 e^{x^3}$. Це лінійне диференціальне рівняння першого порядку (рівняння виду IV). Використовуючи підстановку $y = uv$, $y' = u'v + uv'$, одержимо

$$u'v + uv' - 3x^2 uv = x^2 e^{x^3},$$
$$u'v + u\left(v' - 3x^2 v\right) = x^2 e^{x^3}. \qquad (*)$$

Виберемо функцію v так, щоб $v' - 3x^2 v = 0$. Визначаємо v:
$\dfrac{dv}{dx} = 3x^2 v$, $\dfrac{dv}{v} = 3x^2 dx$, $\int \dfrac{dv}{v} = 3\int x^2 dx$, $\ln|v| = x^3$, $v = e^{x^3}$.

Підставляючи v в рівняння $(*)$, отримуємо рівняння для визначення u: $\dfrac{du}{dx} e^{x^3} = x^2 e^{x^3}$, $\dfrac{du}{dx} = x^2$, $du = x^2 dx$,

$$\int du = \int x^2 dx, \quad u = \frac{x^3}{3} + C.$$

Тоді $y = uv = \left(\dfrac{x^3}{3} + C\right) e^{x^3}$.

Підставимо початкову умову $y = 0$ при $x = 0$ у загальний розв'язок рівняння: $0 = (0 + C)e^0$, звідки $C = 0$. Отже, частинний розв'язок заданого диференціального рівняння – $y = \left(\dfrac{x^3}{3} + 0\right) e^{x^3}$, або

$y = \dfrac{x^3}{3} e^{x^3}$. ⌋

61. $\left(x^2 + y^2\right) dx + 4xy\, dy = 0$.

⌈ $4xy\, dy = -\left(x^2 + y^2\right) dx$, $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{x^2 + y^2}{4xy}$, $y' = -\dfrac{x^2 + y^2}{4xy}$. Маємо однорідне диференціальне рівняння (рівняння виду III). Застосуємо підстановку $y = ux$, $y' = u'x + u$. Тоді

$$u'x + u = -\frac{x^2 + u^2 x^2}{4xux}, \quad u'x + u = -\frac{x^2\left(1 + u^2\right)}{x^2 4u}, \quad u'x + u = -\frac{1 + u^2}{4u},$$

$$u'x=-\frac{1+u^2}{4u}-u\,,\;\; u'x=-\frac{1+5u^2}{4u}\,,\;\; \frac{du}{dx}x=-\frac{1+5u^2}{4u}\,,$$

$$\frac{4u\,du}{5u^2+1}=-\frac{dx}{x}\,,\;\; 4\int\frac{u\,du}{5u^2+1}=-\int\frac{dx}{x}\,,\;\; \frac{4}{10}\int\frac{d\left(5u^2+1\right)}{5u^2+1}=-\ln|x|+\ln C\,,$$

$$\frac{2}{5}\ln\left|5u^2+1\right|=\ln\frac{C}{|x|}\,,\quad \ln\left|5u^2+1\right|^{\frac{2}{5}}=\ln\frac{C}{|x|}\,,\quad \left(5u^2+1\right)^{\frac{2}{5}}=\frac{C}{x}\,,\text{ або}$$

$$\left(5\frac{y^2}{x^2}+1\right)^{\frac{2}{5}}=\frac{C}{x}\,.\;\; \lrcorner$$

62. $\left(x+1\right)y'+y=x^3+x^2$, якщо $y\left(0\right)=0$.

$\ulcorner$ $$y'+\frac{y}{x+1}=\frac{x^3+x^2}{x+1}\,,\qquad y'+\frac{y}{x+1}=\frac{x^2\left(x+1\right)}{x+1}\,,\qquad y'+\frac{y}{x+1}=x^2\,.$$

Маємо лінійне диференціальне рівняння першого порядку (рівняння виду IV). Використаємо підстановку $y=uv$.

$$u'v+uv'+\frac{uv}{x+1}=x^2\,,$$

$$u'v+u\left(v'+\frac{v}{x+1}\right)=x^2\,. \qquad (*)$$

Виберемо функцію v так, щоб $v'+\dfrac{v}{x+1}=0$. Визначаємо v:

$$\frac{dv}{dx}=-\frac{v}{x+1}\,,\qquad \frac{dv}{v}=-\frac{dx}{x+1}\,,\qquad \int\frac{dv}{v}=-\int\frac{dx}{x+1}\,,\qquad \ln|v|=-\ln|x+1|\,,$$

$$\ln|v|=\ln\frac{1}{|x+1|}\,,\quad v=\frac{1}{x+1}\,.$$

Підставляючи v в рівняння $(*)$, отримуємо рівняння для визначення u: :

$$\frac{du}{dx}\frac{1}{x+1}=x^2\,,\quad du=\left(x+1\right)x^2dx\,,\quad \int du=\int\left(x^3+x^2\right)dx\,,$$

$$u=\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{3}+C\,.$$

Тоді $y=uv=\left(\dfrac{x^4}{4}+\dfrac{x^3}{3}+C\right)\dfrac{1}{x+1}$ – загальний розв’язок рівняння.

Підставимо початкову умову $y=0$ при $x=0$ у загальний розв'язок рівняння: $0=\left(\frac{0^4}{4}+\frac{0^3}{3}+C\right)\frac{1}{0+1}$, $C=0$.

Отже, маємо частинний розв'язок

$y=\left(\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{3}\right)\frac{1}{x+1}$, або $y=\frac{3x^4+4x^3}{12(x+1)}$. ⌋

63. $\sec^2 x \operatorname{tg} y\, dx+\sec^2 y \operatorname{tg} x\, dy=0$.

⌈ $\sec^2 y \operatorname{tg} x dy=-\sec^2 x \operatorname{tg} y\, dx$, $\sec^2 y \operatorname{tg} x \frac{dy}{dx}=-\sec^2 x \operatorname{tg} y$,

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{\sec^2 x\cdot \operatorname{tg} y}{\sec^2 y\cdot \operatorname{tg} x},\quad y'=-\frac{\sec^2 x\cdot \operatorname{tg} y}{\sec^2 y\cdot \operatorname{tg} x}.$$

Це рівняння виду II – рівняння з відокремлюваними змінними.

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{\sec^2 x\cdot \operatorname{tg} y}{\sec^2 y\cdot \operatorname{tg} x},\quad \frac{\sec^2 y}{\operatorname{tg} y}dy=-\frac{\sec^2 x}{\operatorname{tg} x}dx.$$

Враховуючи, що $\sec^2 x=\frac{1}{\cos^2 x}$, $\sec^2 y=\frac{1}{\cos^2 y}$, дістанемо

$$\frac{dy}{\operatorname{tg} y\cdot\cos^2 y}=-\frac{dx}{\operatorname{tg} x\cdot\cos^2 x},\quad \int\frac{dy}{\operatorname{tg} y\cdot\cos^2 y}=-\int\frac{dx}{\operatorname{tg} x\cdot\cos^2 x},$$

$\ln|\operatorname{tg} y|=-\ln|\operatorname{tg} x|+\ln C$, $\ln|\operatorname{tg} y \operatorname{tg} x|=\ln C$, або $\operatorname{tg} y \operatorname{tg} x=C$. ⌋

64. $y'=e^{\frac{y}{x}}+\frac{y}{x}+1$.

⌈ Це однорідне диференціальне рівняння (рівняння виду III). Дійсно,

$$f(tx,\, ty)=e^{\frac{ty}{tx}}+\frac{ty}{tx}+1=e^{\frac{y}{x}}+\frac{y}{x}+1=f(x,\, y).$$

Застосуємо підстановку $y=ux$, $y'=u'x+u$:

$$u'x+u=e^{\frac{ux}{x}}+\frac{ux}{x}+1,\quad u'x+u=e^u+u+1,\quad u'x=e^u+1,$$

$$\frac{du}{dx}x=e^u+1,\quad \frac{du}{e^u+1}=\frac{dx}{x},\quad \int\frac{du}{e^u+1}=\int\frac{dx}{x},\quad \int\frac{e^u+1-e^u}{e^u+1}du=\int\frac{dx}{x},$$

$$\int du-\int\frac{e^u du}{e^u+1}=\int\frac{dx}{x}, \quad u-\ln\left|e^u+1\right|=\ln|x|+\ln C,$$

$$\frac{y}{x}-\ln\left(e^{y/x}+1\right)=\ln C|x|. \quad \lrcorner$$

<u>Вправи для самостійного розв'язання</u>

Розв'язати диференціальні рівняння:

65. $\left(1+e^{3y}\right)xdx=e^{3y}dy$.

66. $y'=\dfrac{\cos^2 y}{x^2+4}$.

67. $y'-\dfrac{y}{x+2}=x^2+4x+5$, якщо $y(-1)=\dfrac{3}{2}$.

68. $\left(y^2-2xy\right)dx+x^2dy=0$.

69. $xy^2y'=x^2+y^3$.

70. $y'=e^{x^2}x\left(1+y^2\right)$.

71. $y'=\dfrac{y}{x}+\dfrac{y^2}{x^2}e^{\frac{x}{y}}$.

72. $y'=\dfrac{\sqrt{16-y^2}}{2x+3}$.

73. $y'-2xy=1-2x^2$, якщо $y(0)=2$.

74. $y'=\dfrac{y}{x}+\dfrac{x^2}{y}$.

75. $y'\sin x=y\cos x+2\cos x$.

76. $xy'=y-xe^{\frac{y}{x}}$.

77. $x^2y'+xy+1=0$.

78. $y'\sqrt{1-x^2}-\cos^2 y=0$.

79. $xy'=\sqrt{x^2-y^2}+y$.

80. $xy'+y=\ln x+1$.

Відповіді:

65. $\dfrac{x^2}{2}=\dfrac{1}{3}\ln\left(1+e^{3y}\right)+C$.

66. $\operatorname{tg} y=\dfrac{1}{2}\operatorname{arctg}\dfrac{x}{2}+C$.

67. $y=(x+2)+\dfrac{(x+2)^3}{2}+(x+2)\ln(x+2)$.

68. $\dfrac{y}{x-y}=Cx$.

69. $y^3=Cx^3-3x^2$.