Міністерство освіти і науки України

Національний університет «Запорізька Політехніка»

Кафедра програмних засобів

ЗВІТ

з розрахунково-графічного завдання №1

з дисципліни «Теорія ймовірностей»

Виконав:

Студент групи КНТ-122 О. А. Онищенко

Прийняли:

Викладач: Т. І. Левицька

2023

Розрахунково-графічне завдання

Варіант 20

Завдання 10

Умова:

Дискретна випадкова величина X може прийняти значення x1 з імовірністю p1 чи значення x2 з імовірністю p2. Записати закон розподілу та знайти математичне сподівання, дисперсію та середнє квадратичне відхилення випадкової величини X. Скористайтесь такими даними: x1=20, p1=0.98, x2=80, p2=0.02.

Рішення:

Закон розподілу дискретної випадкової величини являє собою таблицю з двох рядків: перший рядок містить можливі значення змінної, а другий - ймовірність того, що змінна прийме ці значення. У нашому випадку ця таблиця скінченна і має вигляд:

X_i	20	80
P_i	0,98	0,02

Математичне сподівання:

$$M(X) = p1x1 + p2x2 = 0{,}98 * 20 + 0{,}02 * 80 = 21{,}2$$

Дисперсія:

$$D(X) = p1x1^2 + p2x2^2 - \left(M(X)\right)^2 = 0{,}98 * 20^2 + 0{,}02 * 80^2 - 21{,}2^2 = 70{,}56$$

Середнє квадратичне відхилення:

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{70{,}56} = 8{,}4$$

Завдання 11

Умова:

В умові нижче охарактеризовано ситуацію та названо дискретну випадкову величину. Розв'язавши відповідну задачу з теорії ймовірностей, для цієї величини записати закон розподілу та знайти математичне сподівання, дисперсію та середнє квадратичне відхилення. Скористайтесь такими описами: На 15 картках написані числа 1, 2, ..., 15. Навмання витягають чотири картки. Випадкова величина – кількість карток, на яких число більше за 10, серед витягнутих карток.

Рішення:

Кількість способів вибрати чотири карти з 15 наявних: $m = C_{15}^{4}$.

Обчислимо ймовірність того, що серед чотирьох витягнутих карток не буде карток з числом, більшим за 10. Оскільки є лише 5 карток з числами, більшими за 10, то є 10 карток з числами, меншими або рівними 10. Для того, щоб серед вибраних карток не було карток з числами, більшими за 10, необхідно вибрати їх з 10 карток. Кількість способів зробити це дорівнює $n = C_{10}^{4}$. Шукана ймовірність дорівнює

$$p_0 = \frac{n}{m} = \frac{10!}{4! * 6!} \Big/ \frac{15!}{11! * 4!} = \frac{210}{1365} = \frac{2}{13}$$

Порахуємо ймовірність того, що одна з чотирьох карток має число більше 10. Отже, три картки мають числа, менші або рівні 10. Отже, необхідно вибрати одну картку з 5 і, незалежно від цього, ще три з 10.

$$p_1 = \frac{C_5^1 * C_{10}^3}{C_{15}^4} = \frac{5!}{4! * 1!} * \frac{10!}{7! * 3!} \Big/ \frac{15!}{11! * 4!} = \frac{5 * 10}{1365} = \frac{40}{91}$$

Обчислимо ймовірність того, що дві з чотирьох карток мають числа, більші за 10. Це означає, що дві картки мають числа, менші або рівні 10. Отже, необхідно вибрати дві картки з 5 і, незалежно від цього, ще дві картки з 10.

$$p_2 = \frac{C_5^2 * C_{10}^2}{C_{15}^4} = \frac{5!}{3! * 2!} * \frac{10!}{8! * 2!} \Big/ \frac{15!}{11! * 4!} = \frac{10 * 45}{1365} = \frac{30}{91}$$

Обчислимо ймовірність того, що три з чотирьох карток мають числа, більші за 10. Це означає, що на одній картці число менше або дорівнює 10. Отже, необхідно вибрати три карти з 5 і, незалежно від цього, ще одну карту з 10.

$$p_3 = \frac{C_5^3 * C_{10}^1}{C_{15}^4} = \frac{5!}{2! * 3!} * \frac{10!}{9! * 1!} \Big/ \frac{15!}{11! * 4!} = \frac{10 * 10}{1365} = \frac{20}{273}$$

Порахуємо ймовірність того, що всі чотири картки мають числа, більші за 10. Отже, нам потрібно вибрати чотири картки з 5.

$$p_4 = \frac{C_5^4 * C_{10}^0}{C_{15}^4} = \frac{5!}{1! * 4!} \Big/ \frac{15!}{11! * 4!} = \frac{5}{1365} = \frac{1}{273}$$

Таким чином, бажаний закон розподілу виглядає наступним чином:

X_i	0	1	2	3	4
P_i	$\frac{2}{13}$	$\frac{40}{91}$	$\frac{30}{91}$	$\frac{20}{273}$	$\frac{1}{273}$

Зробимо перевірку:

$$p_0 + p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = \frac{2}{13} + \frac{40}{91} + \frac{30}{91} + \frac{20}{273} + \frac{1}{273} = 1$$

Завдання 12

Умова:

Неперервна випадкова величина задана функцією розподілу F(x). Знайти щільність ймовірності f(x). Побудувати графіки функцій F(x) і f(x). Знайти ймовірність події $X \in [a; b]$. Скористайтесь такими даними: $F(x) = \left[0, x < 0; x - \frac{1}{4}x^2, 0 \leq 0 < 2; 1, x \geq 2\right], a = 0, b = \frac{1}{2}$

Рішення:

Знайдемо щільність ймовірності, продиференціювавши функцію F(x) на кожній ділянці окремо:

$$f(x) = F'(x) = \left[0, x < 0; 1 - \frac{1}{2}x, 0 \leq x < 2; 0, x \geq 2\right]$$

Графіки цих функцій схематично показані на рис. 12.1.

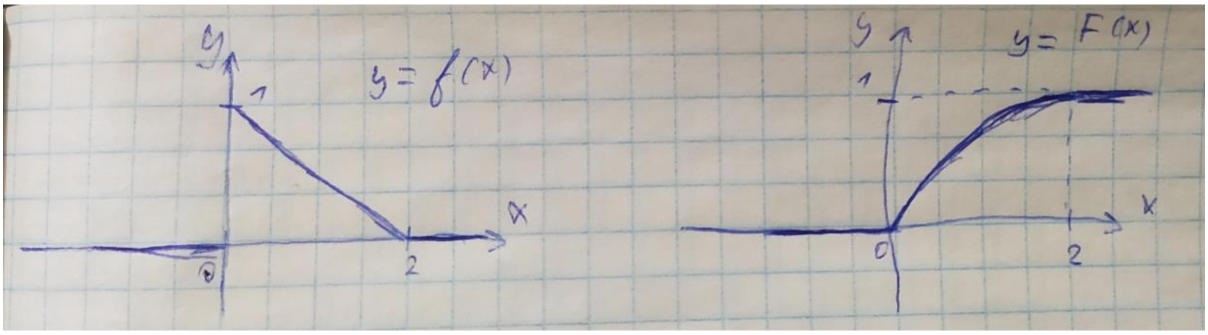

Рисунок 12.1 – Графіки функцій F(x) та f(x)

Ймовірність події ($X \in [a; b]$) знаходиться як різниця:

$$P(X \in [a; b]) = F\left(\frac{1}{2}\right) - F(0) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} * \frac{1}{2}^2 - 0 = \frac{7}{16} - 0 = \frac{7}{16}$$

Завдання 13

Умова:

Використовуючи отриману в попередній задачі щільність ймовірності f(x),обчислити математичне сподівання та дисперсію випадкової величини X.

Рішення:

Оскільки щільність ймовірності задана частинами, використовуючи адитивність інтеграла Рімана, маємо:

$$M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \int_{-\infty}^{0} xf(x)dx + \int_{0}^{2} xf(x)dx + \int_{2}^{+\infty} xf(x)dx$$

$$= \underbrace{\int_{-\infty}^{0} x * 0dx}_{=0} + \int_{0}^{2} xf(x)dx + \underbrace{\int_{2}^{+\infty} x * 0dx}_{=0}$$

$$= \int_{0}^{2} x * \left(1 - \frac{1}{2}x\right) dx = \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} |_0^2 = 1 - \frac{4}{3} = -\frac{1}{3}$$

Аналогічно маємо:

$$D(X) = \int_{-inf}^{+inf} x^2 f(x)dx - M(X)^2 = \int_{0}^{2} x^2 * 1 - \frac{1}{2}xdx - \left(-\frac{1}{3}\right)^2$$

$$= \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{8}\right) |_0^2 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9} - \frac{1}{9} = \frac{7}{9}$$

Отже, математичне сподівання M(X) дорівнює $-\frac{1}{3}$, а дисперсія D(X) дорівнює $\frac{7}{9}$.

Завдання 14

Умова:

Задано щільність розподілу f(x) випадкової величини X. Обчислити значення невідомого параметра a і функцію розподілу $F(x),\ f(x) = axcosx, x \in [0; PI/4]; 0, x \notin [0; PI/4]$

Рішення:

1. Знайдемо параметр a з властивості функції щільності розподілу випадкової величини:

$$\int_{-\infty}^{+inf} f(x)dx = 1$$

Ліва частина цієї нерівності має вигляд

$$\int_{0}^{\pi/4} axcos(x)dx = a\int_{0}^{\pi/4} xcosxdx$$

Для розв'язання цього інтеграла можна використати інтегрування частинами, де $u = x$, $dv = cos(x)dx$, $du = dx$ і $v = sin(x)$. Формула для інтегрування частинами має вигляд $\int udv = uv - \int vdu$. Застосовуючи цю формулу, отримаємо:

$$a\left[xsinx|_{0}^{\pi/4} - \int_{0}^{\pi/4} sinxdx\right] = a\left[\frac{\pi}{4}sin\left(\frac{\pi}{4}\right) - \left(cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - cos(0)\right)\right]$$
$$= a\left[\frac{\pi}{4\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} + 1\right] = a\left[\frac{\pi}{4} + 1\right]$$

Встановивши значення цього параметра рівним 1 і розв'язавши задачу для а, ми отримаємо:

$$a = \frac{1}{\frac{\pi}{4} + 1}$$

Таким чином, функція щільності набуває вигляду

$$f(x) = \frac{xcosx}{\frac{\pi}{4} + 1}, x \in [0; \pi/4]; 0, x \notin [0; \pi/4]$$

2. Перейдемо до знаходження функції розподілу F(x). Виходячи з означення, маємо

$$F(x) = \int_{-inf}^{x} f(t)dt$$

Для $x \in (-inf; 0)$ отримаємо $F(x) = \int_{-inf}^{x} 0 * dt = 0$

Для $x \in [0; PI/4]$ інтервал інтегрування ділиться на два:

$$F(x) = \int_{-inf}^{0} 0 * dt + \int_{0}^{x} \frac{tcost}{\frac{\pi}{4} + 1} dt$$

Інтеграл $\int xcos(x)dx$ можна розв'язати інтегруванням частинами, як і раніше, що дає:

$$F(x) = \left[tsin(t)|_0^x - \int_0^x sin(t)dt \right] / \left(\frac{\pi}{4} + 1 \right)$$
$$= [xsin(x) + cos(x) - 1] / \left(\frac{\pi}{4} + 1 \right)$$

Для $x \in (PI/4; +inf)$ інтервал інтегрування поділено на три:

$$F(x) = \int_{-inf}^{0} 0 * dt + \int_{0}^{\pi/4} \frac{tcost}{\frac{\pi}{4} + 1} dt + \int_{\pi/4}^{x} 0 * dt = 1$$

Таким чином, ми маємо остаточний результат:

$$F(x) = 0, x \in (-\infty; 0); \left[\frac{x sin(x) + cos(x) - 1}{\frac{\pi}{4} + 1}\right], x \in [0; \pi/4]; 1, x \in \left(\frac{\pi}{4}; +\infty\right)$$