| | |
|---|---|
| ENICar Département GE. | DS. 1 |
| Analyse numérique | 2014 – 2015 |
| 1 ère année ingénieurs mécatronique | 2 Pages |

## Exercice 1.

On se propose de résoudre numériquement l'équation :

$$(E) : f(x) = e^x - 9x + 1 = 0$$

1. Montrer que l'équation $(E)$ admet une solution unique $\alpha$ dans $]0, 1[$.
2. On se donne deux méthodes du point fixe

$$x_{n+1} = g_1(x_n) = \ln(9x_n - 1) \quad \text{et} \quad y_{n+1} = g_2(y_n) = \frac{1 + e^{y_n}}{9}$$

   (a) Vérifiez que $g_1(\alpha) = \alpha$ et de même $g_2(\alpha) = \alpha$.

   (b) Laquelle entre ces deux méthodes utiliseriez-vous pour calculer numériquement la solution $\alpha$ de l'équation (E) ? Justifiez votre réponse.

   (c) Ecrire une formule pour estimer le nombre d'itérations suffisantes pour calculer $\alpha$ par la méthode choisie, avec une tolérance égale à $10^{-10}$ et en prenant $x_0 = 0.5$.

## Exercice 2.

On souhaite donner une approximation de la solution de l'équation non linéaire :

$$(E) : \; f(x) = e^x - 2x^2 = 0$$

On donne la courbe de $f$ sur l'intervalle $[0, 2]$ dans la figure 1.

1. En vous inspirant de la figure, montrez que $(E)$ admet une solution unique $\alpha \in [0, 2]$.
2. Justifiez que la dichotomie peut s'appliquer pour rechercher cette racine sur $\alpha \in [0, 2]$. Donnez les 4 premières itérations en utilisant la représentation graphique.
3. A partir de combien d'itérations pouvons nous être sûr d'avoir cette racine $\alpha$ à $2^{-6}$ près.
4. Soit la méthode de point fixe :

$$x_{n+1} = \frac{(x_n - 1)e^{x_n} - 2x_n^2}{e^{x_n} - 4x_n}$$

(a) Justifiez que cette méthode est la méthode de Newton pour calculer $\alpha$.

(b) En interprétant la courbe de $f$, montrez qu'il y a des valeurs initiales dans $[0, 2]$ pour lesquelles cette méthode ne converge pas vers $\alpha \in [0, 2]$.

(c) Donnez une condition sur la valeur initiale $x_0 \in [1, 2]$ pour garantir la convergence de cette méthode vers $\alpha$.

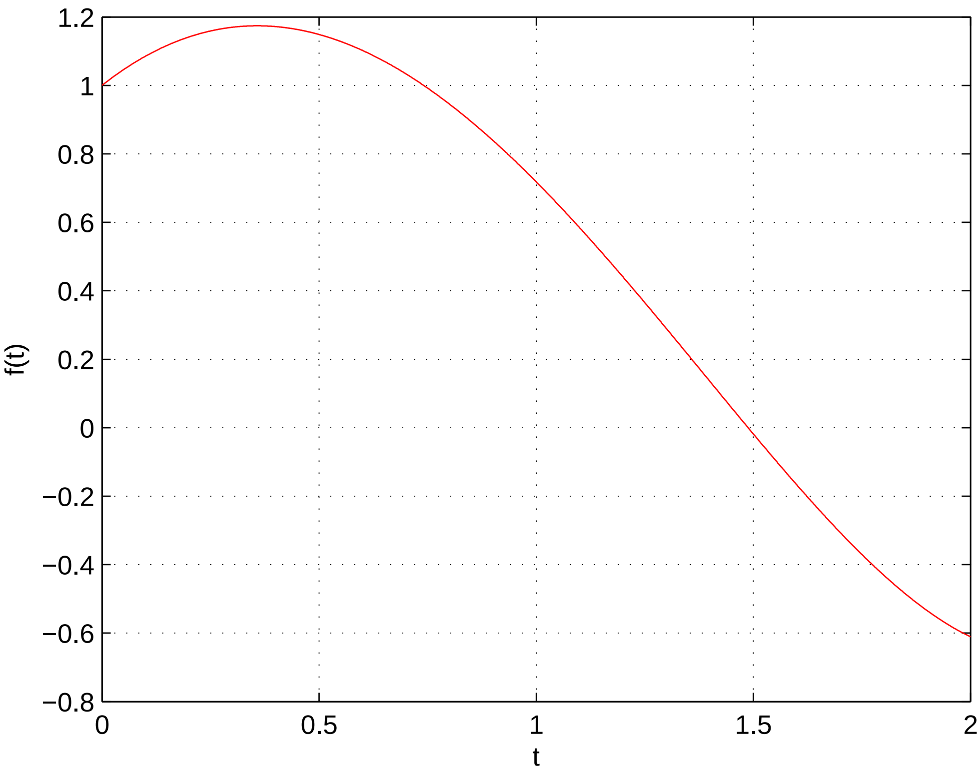


FIGURE 1 – la fourbe de $e^x - 2x^2$ sur $[0, 2]$