ENICar Département GE.	Examen
Analyse numérique	2014 – 2015
1 ère année ingénieurs mécatronique	

Exercice 1.

On donne les valeurs numériques suivantes :

x	1	1.1	1.2	1.3
$f(x)$	1.54030	1.55360	1.56236	1,56750

1. Déterminer le polynôme de degré inférieur ou égal à 2 interpole la fonction $x \mapsto f(x)$ sur le support $S = \{1; 1.1; 1.2\}$, qu'on notera P_2.
2. Donnez une valeur approchée de $f(1.15)$
3. Sachant que $f(x) = \cos(x)+x$, donnez l'erreur $|f(x)-P_2(x)|$ sur l'intervalle $[1, 1.2]$. Vérifiez cette incertitude au point 1.15.
4. Déterminer le polynôme de degré inférieur ou égal à 3 interpole la fonction $x \mapsto f(x)$ sur le support $S = \{1; 1.1; 1.2; 1.3\}$, qu'on notera P_3.
5. Comparez $f(1.15) - P_3(1.15)$ et $f(1.15) - P_2(1.15)$.

Exercice 2.

1. Trouvez une formule d'intégration numérique $Q(f)$ sur le segment $[0, 1]$ de la forme :

$$\int_0^1 f(t)\,dt = \lambda_0 f(0) + \lambda_1 f(1) + \lambda_2 f'(0) + \lambda_3 f'(1) + E_3(f) = Q(f) + E_3(f)$$

   qui soit exacte pour les polynômes de degré inferieur ou égal à trois.
2. Soit $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^4$.
   (a) Justifiez l'existence et l'unicité d'un polynôme $P_f \in \mathbb{R}_3[X]$ tel que :

$$f(0) = P_f(0),\ f(1) = P_f(1),\ f'(0) = P'_f(0),\ \text{et } f'(1) = P'_f(1)$$

   (b) Soit $x \neq 0$ et $x \neq 1$. On pose

$$F(t) = f(t) - P_f(t) - \frac{f(x) - P_f(x)}{x^2(x-1)^2} t^2 (t-1)^2$$

   Montrez que F est de classe $\mathcal{C}^4$ et qu'il existe $c \in]0, 1[, F^{(4)}(c) = 0$.

(c) Déduire la formule d'erreur d'interpolation :

$$\forall x \in [0,1] \exists c \in]0,1[; f(x) - P_f(x) = \frac{f^{(4)}(c)}{4!} x^2 (x-1)^2$$

3. Montrez que

$$Q(f) = \int_0^1 P_f(t) dt$$

4. Montrez de ce qui précède que :

$$|E_3(f)| = \left| \int_0^1 f(t)dt - Q(f) \right| \leq \frac{1}{720} \max_{c \in [0,1]} |f^{(4)}(c)|$$

5. Soit $a < b$, en utilisant le changement de variable

$$\int_a^b f(t)\, dt = (b-a) \int_0^1 f(a + x(b-a))\, dx$$

Montrez que la formule

$$\int_a^b f(t)\, dt = \frac{b-a}{2} f(a) + \frac{b-a}{2} f(b) + \frac{(b-a)^2}{12} f'(a) - \frac{(b-a)^2}{12} f'(b) + E_3(f)$$

est exacte pour les polynômes de degré inférieurs ou égal à 3.

6. Donnez une valeur approchée de

$$\int_{-1}^1 \cos\left(\frac{\pi}{2} t\right) dt$$

ENICar Département GE.	Examen
Analyse numérique	2014 – 2015
1 ère année ingénieurs mécatronique	

Exercice 1.

1. Le polynôme P_2 de degré inférieur ou égal à 2, qui interpole la fonction $x \mapsto f(x)$ sur le support $S = \{1; 1.1; 1.2\}$:
   Par la méthode de Newton, on a $P_2(x) = 1.5403 + (x-1)(0.133 - 0.227(x-1.1))$
2. $P_2(1.15) = 1.5585475$
3. Sachant que $f(x) = \cos(x) + x$, on a $f'''(x) = \sin(x)$.
   $f(1.15) = 1.558488$, alors $|f(1.15) - P_2(1.15)| = 0.0000595$.
   $$\begin{aligned} \forall x \in [1, 1.2],\ \exists \zeta \in [1, 1.2],\ E_3(x) = |f(x) - P_2(x)| &= \frac{|f'''(\zeta)|}{3!}|x-1||x-1.1||x-1.2| \\ &\leq \frac{1}{6}|x-1||x-1.1||x-1.2| \end{aligned}$$
   Par la formule de l'erreur :
   $$E_2(1.15) \leq \frac{1}{6}|1.15-1||1.15-1.1||1.15-1.2| = 0.000625$$
4. Le polynôme de degré inférieur ou égal à 3 interpole la fonction $x \mapsto f(x)$ sur le support $S = \{1; 1.1; 1.2; 1.3\}$:
   $P_3(x) = P_2(x) + 0.15333(x-1)(x-1.1)(x-1.2)$
5. $f(1.15) - P_3(1.15) = -2.56 \times 10^{-6}$ et $f(1.15) - P_2(1.15) = 0.0000595$.
   On a $E_3(1.15) < E_2(1.15)$.

Exercice 2.

1. $$\int_0^1 f(t)\,dt = \lambda_0 f(0) + \lambda_1 f(1) + \lambda_2 f'(0) + \lambda_3 f'(1) + E_3(f) = Q(f) + E_3(f)$$
   Pour le degrés 0 à 3, on obtient le système :
   $$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 &= 1 \\ \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 &= \frac{1}{2} \\ \lambda_2 + 2\lambda_4 &= \frac{1}{3} \\ \lambda_2 + 3\lambda_4 &= \frac{1}{4} \end{cases}$$

Ce qui donne $\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{1}{2}$, $\lambda_3 = \frac{1}{12}$ et $\lambda_4 = -\frac{1}{12}$

2. Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^4$.

   (a) Justifier l'existence et l'unicité d'un polynôme $P_f \in \mathbb{R}_3[X]$ tel que :

$$f(0) = P_f(0),\ f(1) = P_f(1),\ f'(0) = P_f'(0),\ \text{et } f'(1) = P_f'(1)$$

   peut se faire en posant $P_f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$ et en montrant que le système obtenu admet une solution unique (de Cramer).

   (b) Soit $x \neq 0$ et $x \neq 1$. On pose

$$F(t) = f(t) - P_f(t) - \frac{f(x) - P_f(x)}{x^2(x-1)^2} t^2 (t-1)^2$$

   F est de classe $\mathcal{C}^4$ comme combinaison linéaire de polynômes en t, et de f. Théorème de Rolles 4 fois F s'annule en trois points $0, x$ et 1. Rolles appliqué à F :

$$\exists 0 < x_1 < x < x_2 < 1,\ F'(0) = F'(x_1) = F'(x_2) = F'(1) = 0$$

   Rolles appliqué à F' :

$$\exists 0 < y_1 < x_1 < y_2 < x_2 < y_3 < 1,\ F''(y_1) = F''(y_2) = F''(y_3) = 0$$

   Rolles appliqué à F'' :

$$\exists 0 < y_1 < z_1 < y_2 < z_2 < y_3 < 1,\ F'''(z_1) = F'''(z_2) = 0$$

   Rolles appliqué à F''' :

$$\exists 0 < z_1 < c < z_2 < 1,\ F^{(4)}(c) = 0$$

   (c) Soit $x \neq 0$ et $x \neq 1$.

$$F^{(4)}(c) = 0 = f^{(4)}(c) - \frac{f(x) - P_f(x)}{x^2(x-1)^2} 4! \iff f(x) - P_f(x) = \frac{f^{(4)}(c)}{4!} x^2 (x-1)^2$$

   Pour $x = 0$ et $x = 1$, c'est trivial.

3.

$$f(0) = P_f(0),\ f(1) = P_f(1),\ f'(0) = P_f'(0),\ \text{et } f'(1) = P_f'(1)$$

alors $Q(f) = Q(P_f)$, et par la formule de l'erreur, $P_f \in \mathbb{R}_3[X]$, alors $P_f^{(4)} = 0$

$$Q(P_f) = \int_0^1 P_f(t) dt$$

4.
$$\int_0^1 \frac{t^2(t-1)^2}{24} dt = \frac{1}{720}$$
$$|E_3(f)| = \left| \int_0^1 f(t)dt - Q(f) \right| \leq \frac{1}{720} \max_{c\in[0,1]} |f^{(4)}(c)|$$

5. Soit $\varphi(x) = f(a + x(b-a))$, on a alors $\varphi'(x) = (b-a)f(a+x(b-a))$:

$$\int_a^b f(t)\, dt = (b-a) \int_0^1 f(a+x(b-a))\, dx = \frac{b-a}{2}\varphi(0)+\frac{b-a}{2}\varphi(1)+\frac{(b-a)}{12}\varphi'(0)-\frac{(b-a)}{12}\varphi'(1)+E_3($$
$$= \frac{b-a}{2} f(a) + \frac{b-a}{2} f(b) + \frac{(b-a)^2}{12} f'(a) - \frac{(b-a)^2}{12} f'(b) + E_3(f)$$

Si $f \in \mathbb{R}_3[X]$ alors $\varphi \in \mathbb{R}_3[X]$ alors $E_3(f) = 0$.

6.
$$\int_{-1}^1 \cos\left(\frac{\pi}{2}t\right) dt \approx \frac{2}{2} f(-1) + \frac{2}{2} f(1) + \frac{2^2}{12} f'(-1) - \frac{2^2}{12} f'(1) = \frac{\pi}{3}$$

Barème sur 22 : Exercice 1 (8 points : 2+1+2+2+1)

Exercice 2 (14 points : 2+2+2+2+1+2+2+1)