Regression mit studentisierten Daten

Norman Markgraf

2021-06-23

Bei einer einfachen linearen Regression versuchen wir zu vorgegebenen Datenpunkten $(x_1, y_1), \cdots (x_n, y_n)$ die Parameter einer möglichst passenden Gerade $g(x) = \beta_0 + \beta_1 \cdot x$ zu schätzen.

Die Schätzung des y-Achsenabschnitts $\hat{\beta}_0$ und der Steigung $\hat{\beta}_1$ erfolgt dabei algebraisch exakt mittels:

$$\hat{\beta}_0 = \bar{y} - \hat{\beta}_1 \cdot \bar{x} \quad \text{und} \quad \hat{\beta}_1 = \frac{s_x}{s_y} \cdot r_{x,y}$$

Dabei sind $\bar{x}$ bzw. $\bar{y}$ die Mittelwerte und s_x bzw. s_y die Standardabweichungen der Datenpunkte x_i bzw. y_i; darüberhinaus ist $r_{x,y}$ der Korrelationskoeffizient der Datenpunkte.

Beim studentisieren werden die Datenpunkte bzgl. des Mittelwertes zentriert und bzgl der Standardabweichung normiert:

$$x_i^{\text{stud}} = \frac{x_i - \bar{x}}{s_x} \quad \text{bzw.} \quad y_i^{\text{stud}} = \frac{y_i - \bar{y}}{s_y}$$

Was passiert nun durch eine solche Studentisierung (oft auch z-Transformation genannt) mit den geschätzen Parametern?

Die Mittelwerte $\bar{x}^{stud}$ und $\bar{y}^{stud}$ werden zu Null. Die Standardabweichungen $s_{x^{stud}}$ und s_{y^stud} werden zur Eins:

$$\bar{x}^{stud} = 0 = \bar{y}^{stud} \qquad s_{x^{stud}} = 1 = s_{y^{stud}}$$

Der y-Achsenabschnitt wird nun durch

$$\hat{\beta}_0^{stud} = \bar{y}^{stud} - \hat{\beta}_1^{stud} \cdot \bar{x}^{stud} = 0 - \hat{\beta}_1^{stud} \cdot 0 = 0$$

und die Steigung durch

$$\hat{\beta}_1^{stud} = \frac{s_{x^{stud}}}{s_{y^{stud}}} \cdot r_{x^{stud},y^{stud}} = \frac{1}{1} \cdot r_{x^{stud},y^{stud}} = r_{x^{stud},y^{stud}}$$

geschätzt.

Für den Korrelationskoeffienten gilt nun

$$r_{x^{stud},y^{stud}} = \frac{s_{x^{stud},y^{stud}}}{s_{x^{stud}} \cdot_{y^{stud}}} = \frac{s_{x^{stud},y^{stud}}}{1 \cdot 1} = s_{x^{stud},y^{stud}}.$$

Damit Schätzen wir unsere Steigung $\hat{\beta}_1^{stud}$ direkt aus der Kovarianz $s_{x^{stud},y^{stud}}$.

Damit gilt:

$$\hat{\beta}_1^{stud} = r_{x^{stud},y^{stud}} = s_{x^{stud},y^{stud}} \in [-1, 1]$$

In Worten zusammengefasst: *Im studentisierten Fall ist*

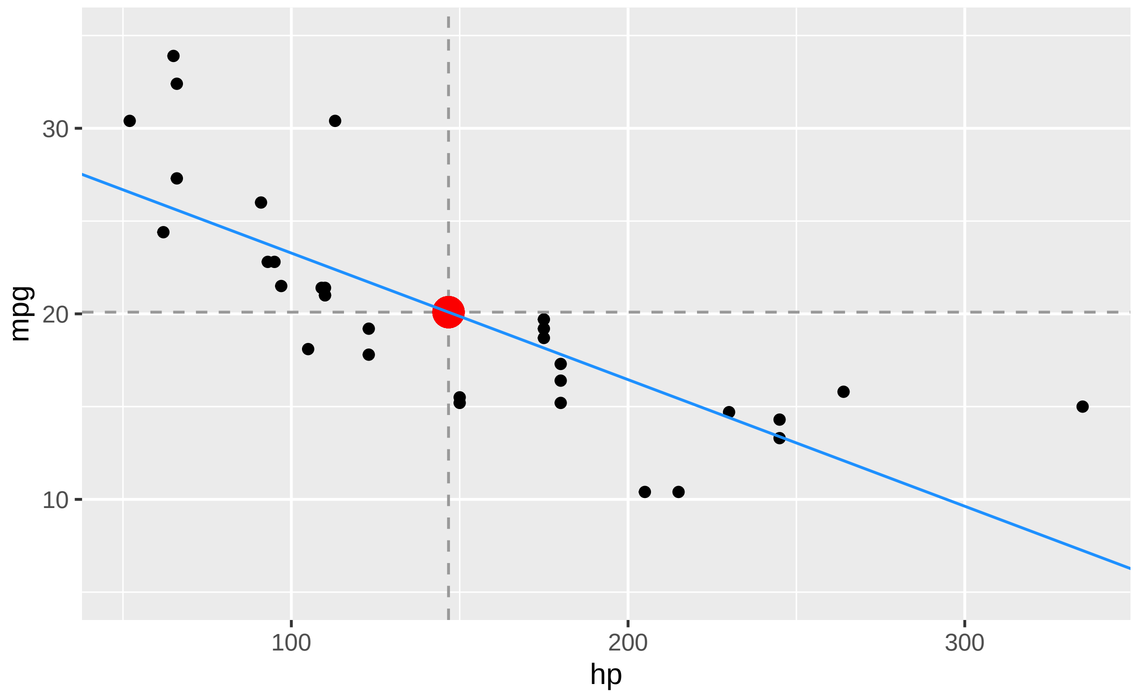
- *der y-Achsenabschnitt immer 0 und*
- *die Steigung immer ein Wert zwischen -1 und 1*

Beispiel: `mtcars`- Daten

Auf Grundlage der Datentabelle *mtcars* wollen wir den linearer Zusammenhang zwischen dem Verbrauch (in Meilen pro Gallone *mpg*) und der Leistung (Pferdestärke *hp*) modellieren.

```
library(mosaic)

# Wir nehmen die Datentabelle 'mtcars':
mtcars %>%
  select(hp, mpg) -> dt

# Ein kurzer Blick aus die Daten:
df_stats( ~ hp + mpg, mean, sd, data = dt)
#>   response      mean        sd
#> 1       hp 146.68750 68.562868
#> 2      mpg  20.09062  6.026948

# Wir vergleichen den Verbrauch (mpg, miles per gallon)
# mit den Pferdestärken (hp) mit Hilfe eines Streudiagramms.
# Dazu berechnen wir vorab die Mittelwerte
mean_hp <- mean(~ hp, data = dt)
mean_mpg <- mean(~ mpg, data = dt)

# und berechnen nun die Schätzwerte für die Regressionsgerade
beta_1 <- cov(mpg ~ hp, data = dt) / var(~ hp, data = dt)
```

```r
beta_0 <- mean_mpg - beta_1 * mean_hp

# schliesslich zeichnen alles in das Streudiagramm ein:
gf_point(mpg ~ hp, data = dt) %>%
  gf_hline(yintercept = ~ mean_mpg,
           color = "grey60", linetype = "dashed") %>%
  gf_vline(xintercept = ~ mean_hp,
           color = "grey60", linetype = "dashed") %>%
  gf_point(mean_mpg ~ mean_hp,
           color = "red", size = 5, alpha = 0.2) %>%
  gf_abline(slope = ~ beta_1, intercept = ~beta_0,
            color = "dodgerblue") %>%
  gf_lims(y = c(5,35))
```



Die Funktionsvorschrift für die (blaue) Regressionsgerade lautet:

$$
\begin{aligned}
\hat{y} &= \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 \cdot x \\
&\approx 30.0988605 - 0.0682283 \cdot x \\
&\approx 30.099 - 0.068 \cdot x
\end{aligned}
$$

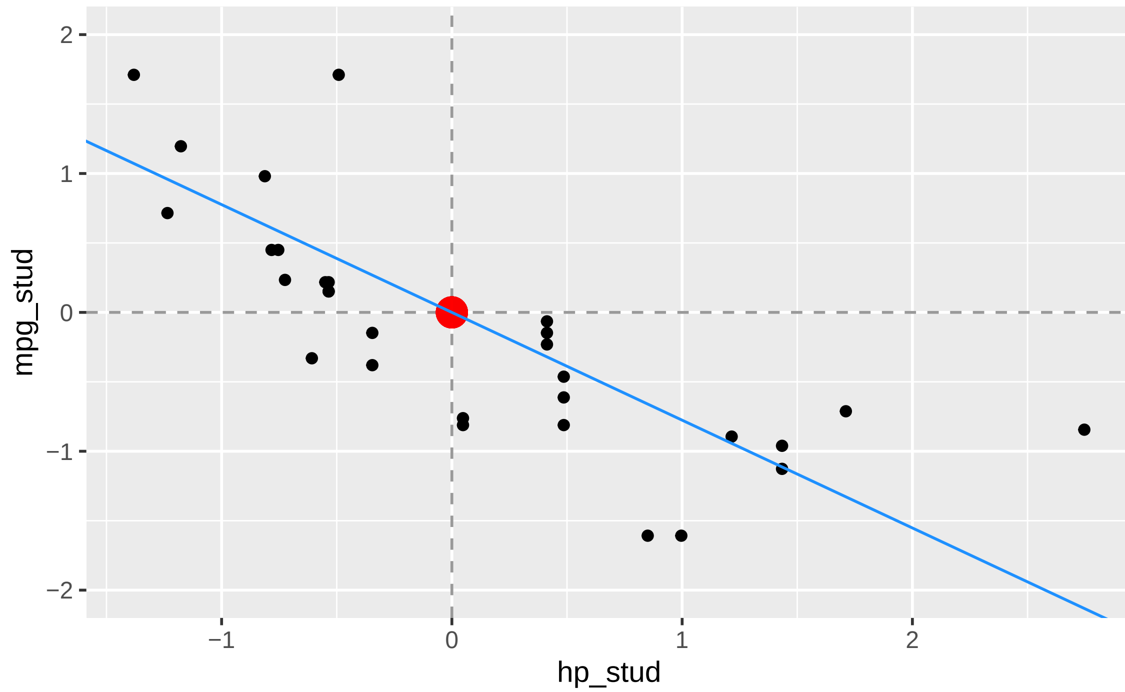
Studentisieren wir nun die *mpg* und *hp* Werte. In **R** können wir das mit der Funktion 'zscore' wie folgt machen:

```r
dt %>%
  mutate(
    hp_stud = zscore(hp),
```

```
    mpg_stud = zscore(mpg)
  ) -> dt

# Ein kurzer Blick aus die Daten:
df_stats( ~ hp_stud + mpg_stud, mean, sd, data = dt)
#>   response         mean sd
#> 1  hp_stud 1.040834e-17  1
#> 2 mpg_stud 7.112366e-17  1
```

Der Grund für die kleinen Abweichungen von der Null bei den Mittelwerten sind unumgängliche Rundungsfehler, die der Computer macht!

```
# Wir "berechnen" die Mittelwerte:
mean_hp_stud <- 0 # = mean(~ hp_stud, data = dt)
mean_mpg_stud <- 0 # = mean(~ mpg_stud, data = dt)

# Berechnen wir nun die Schätzwerte für die Regressionsgerade:
beta_1_stud <- cov(mpg_stud ~ hp_stud, data = dt)
beta_0_stud <- 0 # = mean_mpg_stud - beta_1_stud * mean_hp_stud

# und zeichnen diese in unser Streudiagramm ein:
gf_point(mpg_stud ~ hp_stud, data = dt) %>%
  gf_hline(yintercept = ~ mean_mpg_stud,
           color = "grey60", linetype = "dashed") %>%
  gf_vline(xintercept = ~ mean_hp_stud,
           color = "grey60", linetype = "dashed") %>%
  gf_point(mean_mpg_stud ~ mean_hp_stud,
           color = "red", size = 5, alpha = 0.2) %>%
  gf_abline(slope = ~ beta_1_stud, intercept = ~beta_0_stud,
            color = "dodgerblue") %>%
  gf_lims(y = c(-2,2))
```



Die Regressionsgerade im studentisierten Problem lautet nun:

$$
\begin{aligned}
\hat{y}^{stud} &= \hat{\beta}_0^{stud} + \hat{\beta}_1^{stud} \cdot x^{stud} \\
&\approx 0 - 0.7761684 \cdot x^{stud} \\
&\approx 0 - 0.776 \cdot x^{stud}
\end{aligned}
$$

Direkt mit 'R'

Wir erhalten unsere Ergebnisse natürlich auch direkt in R, ohne selber die Werte auszurechnen:

```
# Ursprüngliches Modell:
erglm <- lm(mpg ~ hp, data = dt)
coef(erglm)
#> (Intercept)          hp
#> 30.09886054 -0.06822828

# Studentisiertes Modell:
erglm_stud <- lm(mpg_stud ~ hp_stud, data = dt)
coef(erglm_stud)
#>   (Intercept)       hp_stud
#> -3.149357e-17 -7.761684e-01
```

Zurückrechnen der studentisierten Werte in das ursprüngliche Problem

Aus dem Ergebnis des studentisierten Modells können wir die Koeffizenten des ursprünglichen Modells wie folgt berechnen:

$$\hat{\beta}_1 = \hat{\beta}_1^{stud} \cdot \frac{s_y}{s_x}$$

und

$$\hat{\beta}_0 = \bar{y} - \hat{\beta}_1 \cdot \bar{x}$$

In **R** geht das wie folgt:

```
mean_mpg <- mean( ~ mpg, data = dt)
sd_mpg <- sd( ~ mpg, data = dt)
mean_hp <- mean( ~ hp, data = dt)
sd_hp <- sd( ~ hp, data = dt)

(beta_1 <- beta_1_stud * sd_mpg / sd_hp)
#> [1] -0.06822828
(beta_0 <- mean_mpg - beta_1 * mean_hp)
#> [1] 30.09886
```

`## Reproduzierbarkeitsinformationen`

#> R version 4.1.0 (2021-05-18) #> Platform: x86_64-apple-darwin17.0 (64-bit) #> Running under: macOS Catalina 10.15.7 #> #> Locale: de_DE.UTF-8 / de_DE.UTF-8 / de_DE.UTF-8 / C / de_DE.UTF-8 / de_DE.UTF-8 #> #> Package version: #> mosaic_1.8.3 tidyr_1.1.3 xfun_0.24 “‘