Investigación Operativa
Trabajo Práctico

Introducción

El problema de *coloreo de grafos* ha sido ampliamente estudiado y aparece en numerosas aplicaciones de la vida real, como por ejemplo en problemas de *scheduling, asignación de frecuencias, secuenciamiento,* etc. Formalmente, el problema puede ser definido de la siguiente forma: Dado un grafo $G = (V, E)$ con $n = |V|$ vértices y $m = |E|$ aristas, un *coloreo* de G consiste en una asignación de *colores* o *etiquetas* a cada vértice $p \in V$ de forma tal que todo par de vértices $(p, q) \in E$ poseen colores distintos. El problema de coloreo de grafos consiste en encontrar un coloreo que utilice la menor cantidad posible de colores distintos.

Si consideramos las siguientes variables:

$$x_{pj} = \begin{cases} 1 & \text{si el color } j \text{ es asignado al vértice } p \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

$$w_j = \begin{cases} 1 & \text{si } x_{pj} = 1 \text{ para algún vértice } p \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

podemos formular el problema de coloreo de grafos como el siguiente problema de programación lineal entera.

$$\begin{array}{lll}
\min & \displaystyle\sum_{j=1}^{n} w_j & \\
\text{s.a.} & \displaystyle\sum_{j=1}^{n} x_{pj} = 1 & \forall p \in V \\
& x_{pj} + x_{qj} \leq w_j & \forall (p, q) \in E \\
& x_{pj} \in \{0, 1\} & \forall p \in V,\ j = 1, \ldots, n \\
& w_j \in \{0, 1\} & j = 1, \ldots, n
\end{array}$$

Llamaremos *CP* al politopo de coloreo correspondiente a la cápsula convexa de soluciones factibles del modelo lineal.

Enunciado

El objetivo del trabajo consiste en:

1. Implementar un algoritmo *Branch and Bound*.

2. Considerar las siguientes desigualdades:

   Desigualdad 1 *Sea* $j_0 \in \{1, \ldots, n\}$ *y sea* K *una clique maximal de* G*. La desigualdad clique están definida por*

   $$\sum_{p \in K} x_{pj_0} \leq w_{j_0}$$

   Desigualdad 2 *Sea* $j_0 \in \{1, \ldots, n\}$ *y* $C_{2k+1} = v_1, \ldots, v_{2k+1}, k \geq 2$*, un agujero de longitud impar. La desigualdad odd-hole esta definida por*

   $$\sum_{p \in C_{2k+1}} x_{pj_0} \leq k w_{j_0}$$

   (a) Demostrar que ambas familias de desigualdades son válidas para *CP*.

   (b) Implementar una heurística de separación para cada familia.

   (c) Implementar un algoritmo de *Planos de Corte* que incorpore ambas familias de desigualdades. Analizar el comportamiento de las mismas en términos de las mejoras obtenidas en la relajación lineal.

3. Teniendo en cuenta los dos puntos anteriores, implementar un algoritmo *Cut and Branch*.

4. Comparar los algoritmos de los puntos 1. y 3. con el algoritmo *Branch and Cut* de CPLEX en términos de tiempo de ejecución y cantidad de nodos recorridos.

Fecha de entrega: 13/12/2010

Instancias de prueba: http://mat.gsia.cmu.edu/COLOR/instances.html