Laboratorio de Métodos Numéricos - Segundo cuatrimestre 2007
Trabajo Práctico Número 3: Homenaje a Los Pumas

El objetivo del trabajo práctico es evaluar un método para reconstruir imágenes tomográficas sujetas a ruido, utilizando el método de aproximación por cuadrados mínimos.

El método de reconstrucción

El análisis tomográfico de un cuerpo (que suponemos bidimensional y cuadrado) consiste en emitir señales acústicas que lo atraviesan en diferentes direcciones, midiendo el tiempo que tarda cada una en atravesarlo. Por ejemplo, la Figura 1 muestra una posible distribución de estas señales.

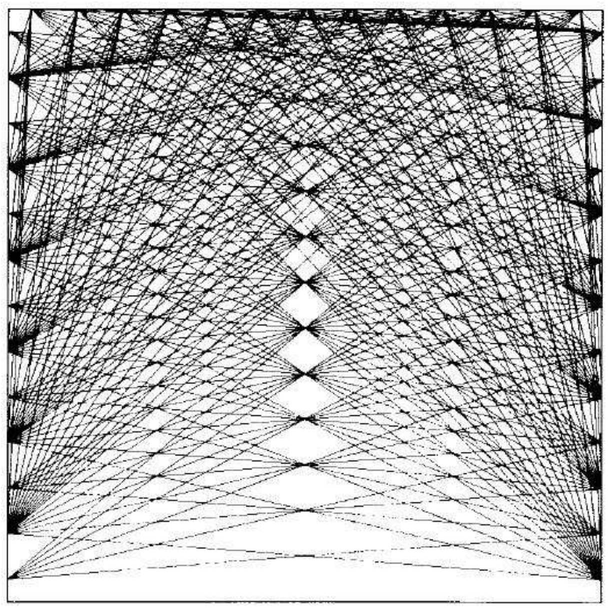

Figura 1: Ejemplo de configuración de las señales.

Suponemos que el cuerpo está dividido en $n \times n$ celdas cuadradas, de modo tal que en cada celda las señales acústicas tienen velocidad constante. Si d_{ij}^k es la distancia que recorre la k-ésima señal en la celda ij (notar que $d_{ij}^k = 0$ si la señal no pasa por esta celda) y v_{ij} es la velocidad de la señal en esa celda, entonces el tiempo de recorrido de la señal completa es de

$$t_k \;=\; \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} d_{ij}^k\, v_{ij}^{-1}.$$

Como resultado del análisis tomográfico, se tienen mediciones del tiempo que tardó cada señal en recorrer el cuerpo. Si se emitieron m señales, entonces el resultado es un vector $t \in \mathbf{R}^m$, tal que t_k indica el tiempo de recorrida de la k-ésima señal. Sea $D \in \mathbf{R}^{m\times n^2}$ una matriz cuyas filas se corresponden con las m señales y cuyas columnas se corresponden con las n^2 celdas de la discretización del cuerpo, y tal que la fila k contiene los valores d_{ij}^k en las columnas correspondientes a cada celda. Entonces, las velocidades de recorrida originales v_{ij} se pueden reconstruir resolviendo el sistema de ecuaciones $Ds = t$. El vector solución $s \in \mathbf{R}^{n^2}$ contiene los valores inversos de las velocidades originales en cada celda.

Un problema fundamental que debe considerarse es la presencia de errores de medición en el vector t de tiempos de recorrido. Dado que el sistema estará en general sobredeterminado, la existencia de estos errores hará que no sea posible encontrar una solución que satisfaga al mismo tiempo todas las ecuaciones del sistema. Para manejar este problema, el sistema $Ds = t$ se resuelve utilizando el método de aproximación por *cuadrados mínimos*, obteniendo así una solución que resuelve de forma aproximada el sistema original.

Enunciado

El trabajo práctico consiste en implementar un programa que simule el proceso de tomografía y reconstrucción, realizando los siguientes pasos:

1. Leer desde un archivo una imagen con los datos reales (discretizados) de un cuerpo. Para los fines de este procedimiento, se considera que el valor de cada *pixel* de la imagen corresponde a la velocidad de recorrida de las señales acústicas al atravesar ese pixel.
2. Ejecutar el proceso tomográfico, generando un conjunto relevante de señales y sus tiempos de recorrida exactos.
3. Perturbar los tiempos de recorrida con ruido aleatorio.
4. Ejecutar el método propuesto en la sección anterior sobre los datos perturbados, con el objetivo de reconstruir el cuerpo original. La imagen resultante se debe guardar en un archivo de salida.

El programa debe tomar como parámetros los nombres de los archivos de entrada y de salida, junto con un parámetro que permita especificar el nivel de ruido a introducir en la imagen. El formato de los archivos de entrada y salida queda a elección del grupo. Para simplificar la implementación, es posible utilizar un formato propio que no sea ninguno de los formatos estándar para guardar imágenes[1].

Sobre la base de la implementación, se pide medir la calidad de la imagen reconstruida en función del nivel de ruido. Para medir el error de la imagen resultante se deberá utilizar el *error cuadrático medio*, definido como

$$\mathrm{ecm}(v, \tilde{v}) \ = \ \frac{\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (v_{ij} - \tilde{v}_{ij})^2}{n^2},$$

siendo v_{ij} la velocidad de recorrido de la celda ij del cuerpo original, y $\tilde{v}_{ij}$ la velocidad en la misma celda del cuerpo reconstruido.

[1] Un formato para almacenar imágenes que es de fácil lectura y tiene cierta difusión es el formato RAW, ver por ejemplo `http://local.wasp.uwa.edu.au/~pbourke/dataformats/bitmaps`.

Objetivos adicionales

En forma optativa, se sugiere probar con distintas estrategias geométricas para generar las señales acústicas (paquetes de señales radiando de puntos fijos o puntos de inicio móviles, señales partiendo de los cuatro lados de la imagen o sólo de algunos lados, rango de ángulos de salida de las señales, etc.) para buscar la estrategia que minimice el error de la reconstrucción.

Por otra parte, puede ser interesante medir el número de condición de la matriz asociada al sistema de ecuaciones normales que resuelve el problema de cuadrados mínimos, para analizar la estabilidad de la resolución. En caso de que el sistema tenga un número de condición alto, se pueden intentar esquemas de regularización para mejorar la estabilidad de la solución obtenida.

Fecha de entrega: Lunes 5 de Noviembre