Laboratorio de Métodos Numéricos - Segundo cuatrimestre 2007
Trabajo Práctico Número 2: Estamos en el horno

Consideremos la sección horizontal de un horno de acero cilíndrico, como en la Figura 1. El sector A es la pared del horno, y el sector B es el horno propiamente dicho, en el cual se funde el acero a temperaturas elevadas. El borde externo de la pared es un círculo, pero el borde interno de la pared -que coincide con el borde del sector B- no necesariamente tiene forma circular.

Un problema fundamental que debe considerarse cuando se utiliza este tipo de hornos es la temperatura en el borde externo de la pared. Este valor es crítico, dado que si se prevé que la temperatura en el borde será demasiado elevada, no se debe poner en funcionamiento el horno por el peligro de roturas en la pared. Dado que el horno propiamente dicho (sector B) no tiene forma circular, el cálculo de la temperatura en el borde externo de la pared no es inmediato.

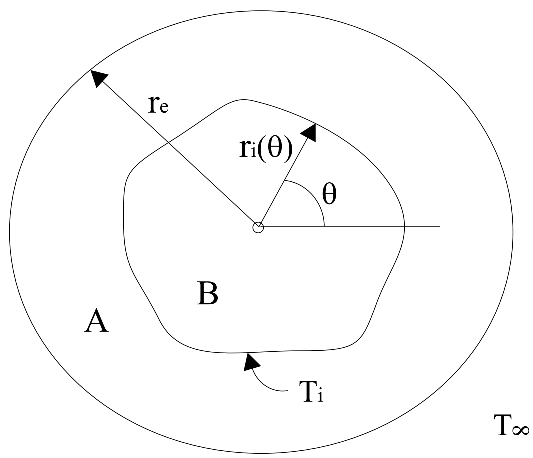

Figura 1: Sección del horno

El objetivo del trabajo práctico es implementar un programa que permita calcular la temperatura en las paredes exteriores de un horno como el de la figura, conociendo la forma y la temperatura de su interior. Suponemos que la temperatura del acero dentro del horno es constante (es decir, dentro del sector B la temperatura es una función constante).

El modelo

Sea $r_e \in \mathbf{R}$ el radio exterior de la pared y sea $r_i : [0, 2\pi] \to \mathbf{R}$ el radio interior de la pared, que suponemos dependiente del ángulo (de manera tal que $r_i(\theta)$ es la distancia desde el centro hasta el borde del sector B en el ángulo $\theta \in [0, 2\pi]$). Llamemos $T(r, \theta)$ a la temperatura en el punto dado por las coordenadas polares (r, θ), siendo r el radio y θ el ángulo polar de dicho punto. En el estado estacionario (luego de un tiempo suficientemente largo de operación del horno), esta temperatura satisface la ecuación del calor:

$$\frac{\partial^2 T(r,\theta)}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial T(r,\theta)}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 T(r,\theta)}{\partial \theta^2} \;=\; 0 \qquad (1)$$

Llamemos $T_i \in \mathbf{R}$ a la temperatura en el interior del horno (sector B) y $T_\infty \in \mathbf{R}$ a la temperatura ambiente. Denotamos por $K \in \mathbf{R}$ a la conductividad térmica de la pared del horno, y por $h \in \mathbf{R}$ al coeficiente de transferencia de calor del borde de la pared. Las condiciones de contorno del problema están dadas por:

$$
\begin{aligned}
T(r_i(\theta), \theta) &= T_i & (2)\\
-K \frac{\partial T(r_e, \theta)}{\partial r} &= h(T(r_e, \theta) - T_\infty) & (3)
\end{aligned}
$$

La condición (2) especifica que la temperatura en el borde interior del horno debe ser igual a la temperatura del acero en fundición, mientras que la condición (3) solicita que el flujo de calor por el borde sea proporcional a la diferencia de temperaturas entre el borde exterior de la pared y el ambiente.

El problema en derivadas parciales dado por la ecuación (1) con condiciones de contorno (2) y (3) permite encontrar la función T de temperatura en la pared del horno (sector A), en función de los datos mencionados en esta sección.

La resolución

Para resolver este problema computacionalmente, discretizamos el dominio del problema (el sector A) en coordenadas polares. Consideremos una partición $0 = \theta_0 < \theta_1 < \ldots < \theta_n = 2\pi$ en n ángulos discretos con $\theta_k - \theta_{k-1} = \Delta\theta$ para $k = 1, \ldots, n$, y una partición $0 = r_0 < r_1 < \ldots < r_m = r_e$ en $m + 1$ radios discretos con $r_j - r_{j-1} = \Delta r$ para $j = 1, \ldots, m$.

El problema ahora consiste en determinar el valor de la función T en los puntos de la discretización (r_j, θ_k) que se encuentren dentro del sector A. Llamemos $t_{jk} = T(r_j, \theta_k)$ al valor (desconocido) de la función T en el punto (r_j, θ_k).

Para encontrar estos valores, transformamos las ecuaciones (1) y (3) en un conjunto de ecuaciones lineales sobre las incógnitas t_{jk}, evaluando (1) en todos los puntos de la discretización que se encuentren dentro del sector A y evaluando (3) en todos los puntos de la discretización que se encuentren en el borde exterior de la pared. Al hacer esta evaluación, aproximamos las derivadas parciales de T en (1) y (3) por medio de las siguientes fórmulas de diferencias finitas:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 T(r, \theta)}{\partial r^2}(r_j, \theta_k) &\cong \frac{t_{j-1,k} - 2t_{jk} + t_{j+1,k}}{(\Delta r)^2}\\
\frac{\partial T(r, \theta)}{\partial r}(r_j, \theta_k) &\cong \frac{t_{jk} - t_{j-1,k}}{\Delta r}\\
\frac{\partial^2 T(r, \theta)}{\partial \theta^2}(r_j, \theta_k) &\cong \frac{t_{j,k-1} - 2t_{jk} + t_{j,k+1}}{(\Delta\theta)^2}
\end{aligned}
$$

Para cada ángulo θ_k, llamamos g_k al menor radio tal que el punto (g_k, θ_k) se encuentra dentro del sector A. Es importante notar que el valor de la incógnita $t_{g_k k}$ es conocido, dado que en la discretización el punto (g_k, θ_k) se encuentra sobre el borde interior de la pared (es decir, $t_{g_k k} = T_i$).

Al realizar este procedimiento, obtenemos un sistema de ecuaciones lineales que modela el problema discretizado. La resolución de este sistema permite obtener una aproximación de los valores de la función T en los puntos de la discretización.

Enunciado

Se debe implementar un programa que tome como entrada los datos del problema y que calcule la temperatura en la pared del horno utilizando la técnica de resolución descripta en la sección anterior.

El programa debe tomar los datos de entrada desde un archivo de texto, cuyo formato queda a criterio del grupo. Es importante mencionar que los parámetros n y m de la discretización forman parte de los datos de entrada. Un elemento importante a definir es la especificación de la función $r_i(\theta)$ en este archivo de entrada, se sugiere que el programa tome los valores ya discretizados de esta función.

El programa debe generar el sistema de ecuaciones lineales planteado en la sección anterior, procediendo a su resolución por medio de cualquier método directo para la resolución de sistemas de ecuaciones lineales (es decir, un método no iterativo). El programa debe escribir la solución en un archivo, con un formato adecuado para su posterior graficación.

Se pide realizar experimentos con al menos dos instancias de prueba para $T_i = 5000$, $T_\infty = 30$ y $h/K = 0.05$, generando distintas discretizaciones para cada una. Se recomienda fijar $r_e = 1$ en estas instancias. Se sugiere que se presenten los resultados de estos experimentos en forma de gráficos de temperatura o gráficos de curvas de nivel, para ayudar a la visualización de los resultados.

Agradecemos el asesoramiento de Gabriel Acosta para la preparación de este trabajo práctico.

Fecha de entrega: Lunes 1 de Octubre