

# Trabajo Práctico 4: Impacto profundo

Universidad de Buenos Aires  
Facultad de Ciencias Exáctas y Naturales  
(FCEyN)  
Departamento de Computación

González Sergio (gonzalezsergio2003@yahoo.com.ar)  
González Emiliano (XJesse\_JamesX@hotmail.com)  
Ferro Mariano (eltrencitomasverde@gmail.com)

19 de noviembre, 2007

## Resumen

*En este trabajo abordaremos un problema particular que requiere la utilización del método de interpolación con splines cúbicos normales. Dicho problema trata sobre un supuesto bombardeo de misiles intergalácticos hacia un planeta desconocido, éstos tienen que ser destruidos antes de llegar a destino. Se cuenta con cierta cantidad conocida de mediciones experimentales provistas por un radar de las posiciones de los misiles. Los splines se utilizan para calcular las trayectorias de los misiles haciendo extrapolación en el último polinomio, correspondiente al intervalo de tiempo donde se realizaron las dos mediciones finales. De esta forma se pretende tener información sobre la posición de cada proyectil durante el tiempo que transcurre entre la última medición y su hipotético impacto. Otra de las exigencias que conlleva el problema mencionado, radica en neutralizar la mayor cantidad de misiles teniendo un número acotado (y menor) de bombas. Para resolver esto se requiere implementar una estrategia adecuada tratando de maximizar la cantidad de misiles neutralizados y evitando destruir el propio planeta con las bombas defensivas.*

## Palabras clave:

- Splines cubicos naturales.
- Extrapolación.
- Simulación.
- Instante

## Introducción:

En muchas ocasiones tenemos información que relaciona valores de variables, donde cada una depende de otra. En estos casos no se tiene una función que describa este conjunto de valores, por lo cual se busca un método que la obtenga. Para esto se utiliza la técnica de interpolación de datos. En el subcampo matemático, se denomina interpolación a la construcción de nuevos puntos a partir de un conjunto de valores que se encuentran discretizados. El conjunto de valores es una muestra que se obtiene a través de mediciones experimentales, a partir de las cuales se pretende construir una función que los ajuste y caracterice.

Además de la utilidad mencionada anteriormente, la interpolación de datos se utiliza para aproximar funciones complejas o difíciles de calcular, por otras más simples. El procedimiento es similar al ya explicado, es decir, se genera una muestra de la función a aproximar y luego, interpolando esos puntos, se obtiene una nueva función que aproxime a la anterior. Por ser una estimación, esta nueva función conlleva un error de aproximación con respecto a la original, que estará sujeto a las características del problema y del método de interpolación utilizado.

En todos los casos, teniendo un conjunto de valores que ordenaremos en pares  $(x_i, y_i)$ , correspondientes al resultado del experimento, se busca obtener una función que llamaremos  $f$  que verifique:

$$f(x_i) = y_i \forall i = 1..n$$

Esta función, se denomina función interpolante en los puntos  $x_1..x_n$ . Existen varios métodos para calcularla, entre ellos la llamada interpolación lineal, la polinómica o la interpolación mediante splines.

Para este trabajo, se utilizara el método de interpolación mediante splines. Un spline es una curva que unirá dos mediciones del muestreo de la función incógnita. Esta técnica define un conjunto de valores de a trozos mediante polinomios de grado menor o igual a al atribuido al spline. Esta característica, implica que al tener expresiones de bajo grado en cada intervalo, no se generen oscilaciones, que en la mayoría de las aplicaciones resultan indeseables. Es por esta razón que los splines utilizados casi con exclusividad son aquellos que minimizan su grado, impidiendo la aparición de dichas oscilaciones evitando interpolar mediante polinomios de grado elevado. Además esta característica apareja una cantidad de cálculos menor que los demás métodos. Esto se vuelve apreciable al momento de obtener resultados con un número grande de datos.

A continuación se detallan las condiciones que debe cumplir un spline cúbico para ser tratado como tal. Los valores  $x_j$  son los correspondientes a la muestra de la función que se desea interpolar, mientras que  $S_j$  es la candidata para unir los puntos  $(x_j, x_{j+1})$  :

1.  $S(x_j) = f(x_j)$
2.  $S_{j+1}(x_{j+1}) = S_j(x_{j+1})$
3.  $S'_{j+1}(x_{j+1}) = S'_j(x_{j+1})$
4.  $S''_{j+1}(x_{j+1}) = S''_j(x_{j+1})$

Para que la función  $S_j$  (curva cúbica en cada intervalo) cumpla con los requisitos antes expuestos, se la fuerza a tener la siguiente forma:

$$S_j(x) = a_j + b_j(x - x_j) + c_j(x - x_j)^2 + d_j(x - x_j)^3$$

De las condiciones anteriores, cumplidas por el polinomio se desprende que:

1.  $a_j = f(x_j) \quad \forall j = 0..n - 1$
2.  $a_n = S_{n-1}(x_n)$
3.  $b_j = \frac{a_{j+1} - a_j}{h_j} - h_j(\frac{2}{3}c_j + \frac{c_{j+1}}{3})$
4.  $b_{j+1} = b_j + 2c_j(x_{j+1} - x_j) + 3d_j(x_{j+1} - x_j)^2 \quad \forall j = 0..n - 2$
5.  $b_n = S'_{n-1}(x_n)$
6.  $S''_j(x_{j+1}) = S''_{j+1}(x_{j+1}) \quad \forall j = 0..n - 2$
7.  $2c_n = S''_{n-1}(x_n)$
8.  $d_j = \frac{c_{j+1} - c_j}{3h_j} \quad \forall j = 0..n - 1$  con  $h_j = x_{j+1} - x_j$

Donde  $h_j = x_{j+1} - x_j$

Luego se iguala la ecuación 3 con la 4, esta última con subíndice  $j$  en lugar de  $j + 1$ , y se remplacea  $b_{j-1}$  por la expresión 3 con el índice correspondiente. Como resultado se obtiene:

$$\frac{1}{3}c_{j-1}h_{j-1} + c_j(\frac{2(h_j + h_{j-1})}{3}) + c_{j+1}\frac{h_j}{3} = \frac{a_{j+1} - a_j}{h_j} - \frac{a_j - a_{j-1}}{h_{j-1}}$$

$$\forall j = 0..n - 1$$

Con esta ultima ecuación se obtienen las expresiones de  $c_j$  para los polinomios de cada uno de los intervalos, en función de los  $h$  y los  $a$ , todos conocidos. Para calcular los valores reales se genera un sistema de ecuaciones, que se resuelve aplicando un método cualquiera de resolución (en nuestro caso se uso uno propio, basado en la eliminación gaussiana y la sustitución hacia atras, se lo explicará en la sección Detalles de la Implementación), este sistema no esta completo, ya que faltan dos ecuaciones para que sea cuadrado. Para esto se igualan las derivadas segundas de los polinomios de cada extremo a cero (definiendo un spline cubico natural), teniendo la misma cantidad de ecuaciones que de incognitas, dados estos datos se pueden hallar los valores exactos correspondientes a los coeficientes  $c_j$  de cada polinomio. Cabe destacar que el anterior sistema de ecuaciones es tridiagonal y además diagonal dominante, por lo cual al momento de resolverlo se pueden aprovechar, tanto desde el punto de vista analítico como computacional, las características propias de éste para hacer más óptima la solución en cuanto a tiempo y/o espacio requerido.

Una vez obtenidos los valores de  $c_j$ , se procede a calcular los  $d_j$  y  $b_j$  correspondientes (los valores de  $a_j$  son conocidos ya que se obtienen de la ecuación 1 y 2). Para esto se utilizan las ecuaciones 8 para  $d_j$  y una combinación de las ecuaciones 4 y 5 para los valores de  $b_j$ .

Con los polinomios obtenidos, se puede calcular cualquier valor dentro del intervalo que definen los datos evualuando la función correspondiente al punto (interpolación), o bien calcularlos fuera de dicho rango evaluando el último spline más alla de los limites de las mediciones (extrapolación). Obviamente, esta metodología supone que la función que se esta analizando continúa tal y como el último polinomio, y no va a tener comportamientos diferentes a éste a partir de cierto punto.

## Desarrollo:

El problema que abordamos durante este trabajo consiste en implementar un programa que lea las mediciones de las posiciones de los misiles desde un archivo de texto, y que deje en otro archivo el momento y la posición en la que debería detonarse cada bomba defensiva, con el objetivo de maximizar la cantidad de misiles enemigos destruidos.

Para lograr el objetivo planteado, se evaluaron distintas estrategias que progresaban sobre la cantidad de misiles destruidos. Así, comenzamos con métodos para contrarrestar el ataque de dos misiles. La primera opción consistía en calcular el promedio de las distancias en ambos ejes cartesianos. Esta forma de situar el punto de explosión de la bomba resultaba efectiva, además demostró ser fácilmente escalable a una mayor cantidad de objetivos. Por desgracia, así como era muy adaptable, no garantizaba precisión para más de dos misiles, ya que de existir un proyectil alejado de los otros, éste desplazaría el punto donde detonar la bomba. Otro inconveniente, resulta cuando un cúmulo de objetivos acerca demasiado el punto promedio a si mismo, dejando fuera de la explosión misiles individuales alejados.

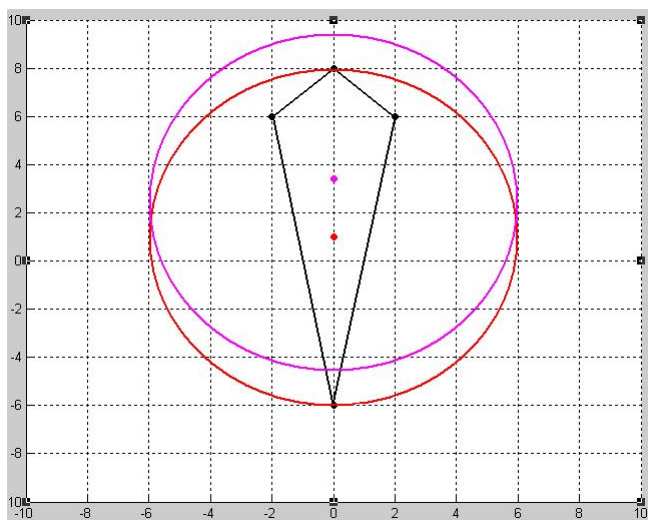


Figura 1: Aquí se puede apreciar un caso patológico para el promedio, bien resuelto por el método de la mayor distancia

Teniendo esto en cuenta, buscamos una nueva estrategia que nos asegurase un mejor rendimiento para tres o más misiles. Así surgió la idea de tomar tan solo las distancias más largas (entre los misiles) en cada eje (la distancia en cada eje para la coordenada correspondiente), dividiéndolas por dos, para obtener un punto medio. De esta forma, siempre quedan atrapados en el radio de la explosión los proyectiles más extremos, que son los más susceptibles de ser excluidos

ante el mínimo cambio en el punto a detonar. También, por ser los más alejados, de haber otros misiles cerca (siempre y cuando sea posible detonar una bomba sobre todos), éstos caen en el radio de la explosión.

A pesar de las bondades de este método, hubo que pensar un poco más, ya que para casos en los que las posiciones de alguno de los misiles no son simétricas, la figura se descompensa, y como sucedía con el caso de los promedios, se pierde el punto óptimo para la explosión. En el gráfico siguiente se muestra uno de estos casos.

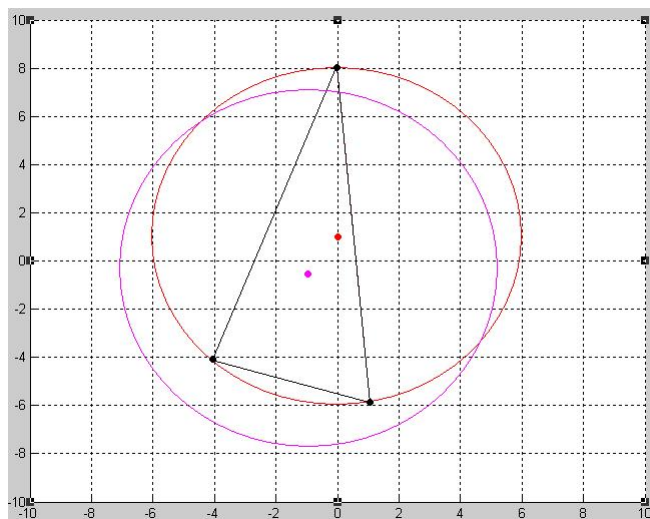


Figura 2: En este caso, la mayor distancia no funciona, pero el centro es capturado por la tecnica de las mediatrices

Al notar que los métodos elaborados fallaban para varios casos, tratamos de idear uno que sea generalizable. Esta búsqueda no resultó tan efectiva como nos hubiera gustado, aún así, obtuvimos una técnica que se adapta a varios entornos y numerosas configuraciones de misiles. Aquello que inspiró este modo de buscar el mejor punto a detonar fue la inscripción de figuras geométricas en una circunferencia. De allí que se utilizan las mediatrices de los lados de un triángulo formado por tres misiles, para, de su intersección obtener el punto deseado. Solo se utilizan tres proyectiles para formar la figura, ya que de emplear más, podría darse un trazado no regular, lo que torna imposible la inscripción en la circunferencia de la bomba de ese polígono(Figura 3).

Otro caso patológico para este método radica en que cuando los misiles se encuentran alineados (o tienden a estarlo) el punto buscado se aleja (Figura 4), mientras menor es la distancia sobre uno de los ejes del trío de misiles, más distancia los separa del punto a detonar. Este es un comportamiento esperable, ya que la técnica trata de encontrar el centro de un círculo, del cual los proyectiles serían parte de su perímetro.

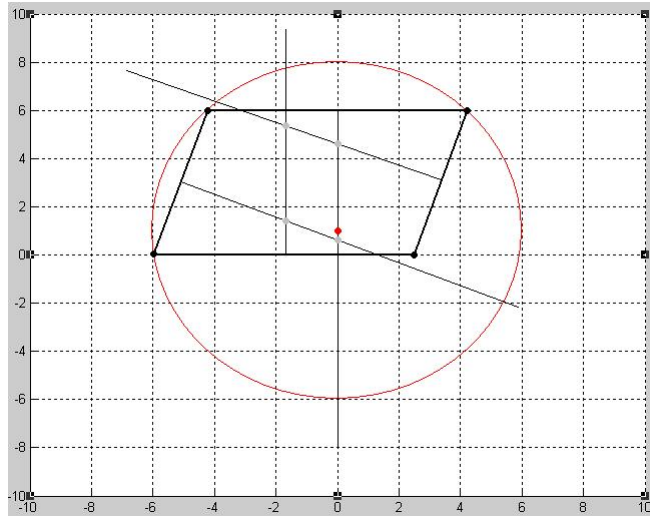


Figura 3: Este es uno de los casos en los que el sistema de mediatrices no funciona

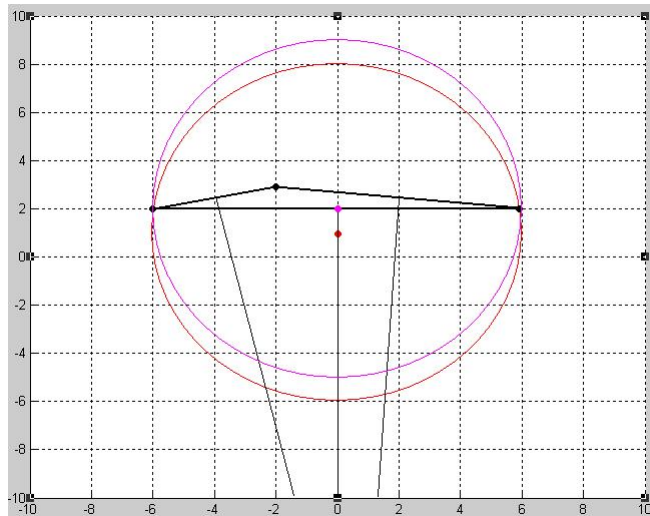


Figura 4: Este es otro caso patológico para las mediatrices, el método de la mayor distancia lo trataría correctamente

Como ninguna técnica resultó óptima para una mayoría abrumadora de casos, durante la implementación se optó por una combinación de las mismas, de forma tal, que cada método se desempeñe sobre las situaciones que mejor maneja. De esta forma, los casos de dos misiles se resuelven calculando el promedio de la distancia y los casos de tres se resuelven calculando la mitad de la distancia más larga entre los puntos, en el caso en que la formación de misiles tiende a

estar alineada, y en el resto, a través del empleo de mediatrices.

Entre otras decisiones de implementación se optó por manejar la variable tiempo en una discretización de intervalos de 0,05 segundos, considerando que cada medición de 'radar' de las posiciones de los misiles llega cada segundo. Consideramos como un "instante", dichos intervalos de tiempo, en ellos se calcula la posición extrapolada de cada misil.

Cabe aclarar que para calcular las posiciones de los proyectiles, tanto extrapolando como intrapolando utilizamos dos splines, uno para cada coordenada de los ejes cartesianos, ambos en función del tiempo. De esta forma tenemos una evaluación del progreso sobre los ejes en cada intervalo de tiempo. Combinando y evaluando los polinomios obtenidos en cada instante, llegamos a la posición exacta del misil.

Como consideración final, podemos mencionar otra visión completamente distinta a la adoptada, sin discretizar el tiempo, tomando funciones continuas, y analizando geométricamente si es posible destruir los misiles según su trayectoria. Esta alternativa no fue adoptada, ya que nos resulto inherente al problema discretizar de alguna forma el tiempo para manejar de forma simplificada los casos y las variables.



## Detalles de la implementación:

Para este trabajo se implementó una nueva clase que se encarga de describir a los objetos que vamos a interceptar, los misiles. A estos se les dio un comportamiento adecuado al problema. La clase se llama Misil y a continuación se detallan sus miembros y métodos:

- CantMediciones(Int): cada misil tiene el número de mediciones, correspondientes a la muestra que define su trayectoria. Este dato se utiliza para calcular el spline que permite extrapolar el camino que recorre el misil en los siguientes intervalos de tiempo.
- Identificador(Char): cada uno de los misiles tiene un identificador, este número se utiliza para identificar conjuntos de misiles para calcular las coordenadas en donde explotar la bomba. Estos conjuntos son determinados de acuerdo a un algoritmo que se encarga de destruir la mayor cantidad de misiles posibles, dicho método se explicará en detalle algunos párrafos más adelante.
- Destruído(bool): éste indica si el misil fue destruido. Este dato es necesario por la forma en la que se decide cuáles serán los misiles a explotar. Se utiliza mayormente a fin de no solapar grupos de misiles candidatos en el espacio ni en el tiempo. Por ejemplo, si tengo un conjunto de cuatro misiles en el tiempo  $t$ , y decidí destruirlo, otra hipotética formación de tres proyectiles, la cual contenga alguno de los ya destruidos (en el instante  $t$  o posterior) será tomada en cuenta con solo dos misiles.
- PosicionX/PosicionY(long double[4]): estos arreglos contienen los coeficientes correspondientes a los polinomios calculados con el método de splines. Estos se utilizan con un par de funciones llamadas posicionX y posicionY, obteniendo así las coordenadas con respecto al tiempo sobre el eje de las abscisas y el de las ordenadas.

Ahora se detallarán las funciones métodos, tanto públicas como privadas, que tengan cierta relevancia desde el punto de vista numérico, las que sean concernientes solo al campo de la implementación, podrán ser encontradas en el código con sus debidos comentarios.

- Misil(): la clase cuenta con constructor por defecto, por copia, paramétrico, y un operador '=', como métodos de generación de instancias. En particular, el constructor paramétrico recibe un identificador, dos arreglos de long double que contienen las mediciones en los ejes X e Y y la cantidad de dichas mediciones. Es en éste donde se llama a la función splines para que genere los polinomios interpoladores que emularán la trayectoria de los misiles
- posicionX()/posicionY(): métodos mencionados más arriba, son los encargados de evaluar los polinomios formulados mediante la función spline.

Simplemente realizan las multiplicaciones pertinentes, valiéndose de los arreglos miembros de la clase, y de un instante elegido por el usuario donde efectuar la evaluación.

- `spline()`: este algoritmo es sin duda el más importante de la clase, ya que es el encargado de generar el polinomio interpolador entre cada punto de las mediciones recibidas en un arreglo. Recordar que como elaboramos un spline para el eje X y otro para el eje Y (ambos en función del tiempo transcurrido) solo necesitamos una coordenada por cada dato. Para calcular los coeficientes utilizamos las características de la matriz que se genera usando el método explicado en la sección Introducción.

Al momento de trabajar con la matriz mencionada, notamos que por ciertas características de la misma era mejor no generarla, sino tan solo manipular los coeficientes estrictamente necesarios, para evitar un desperdicio de memoria. Al tener coordenadas enteras y consecutivas, los factores de la matriz son, para cada fila, 1, 4 y 1. A esto se le suma la propiedad de ser tridiagonal, con lo que se optó por resolver el sistema de la siguiente manera: Primero, como la fila 1 de la matriz esta igualada a cero, el  $c_1$  resulta nulo, por lo que se lo ignora en la fila 2 (lo mismo sucederá con el  $c_n$ ), y con eso se tiene la primera fila "triangulada". Segundo, se procede con esta triangulación virtual, y se nota que como los numeros son iguales fila a fila, resulta que el coeficiente siempre es  $1/\text{diagonal}$ , y tras restar la  $\text{fila}_i$  a la  $\text{fila}_{i+1}$ , queda  $e_{i+1i+1} = 4 - \text{coeficiente}$ , que será el nuevo pivote.

Gracias a esta forma tan regular, se pudo escribir un algoritmo breve y sencillo para obtener el elemento  $c_{n-1}$  de la matriz, que era el necesario para reemplazar en las ecuaciones enunciadas en la Introducción, y obtener el resto de los coeficientes del polinomio.

Es importante notar que solo son necesarios los valores correspondientes al último spline, ya que a partir de este es posible extrapolar puntos más alla del intervalo de mediciones, para aproximar la trayectoria del proyectil.

Hasta aquí se comprende los detalles del módulo Misil, además de esta clase, se implementaron varias funciones y estructuras que no pertenecen a ningun objeto, sino que están declaradas en el archivo `main.cpp`, se realizará ahora una descripción detallada de las más relevantes:

Para un mejor manejo de las coordenadas cartesianas, ya agobiados por el uso de arreglos de dos posiciones para cada (X,Y), se implemento una estructura (un struct de C) llamada `Par`, que simplemente contiene, dos valores de `long double`. Además, para facilitar el manejo de colecciones de elementos de las cuales no teníamos idea precisa sobre su longitud, y para no desperdiciar memoria generando arreglos de dimensiones exageradas, se resolvió utilizar el template 'List' de la Standard Template Library (STL) de C++. Esta plantilla, esta implementada sobre nodos doblemente encadenados, y la operación para agregar un elemento, tanto atrás como adelante, es de complejidad constante

( $O(1)$ ), lo que resultaba óptimo para nuestras necesidades, ya que haríamos una lectura secuencial de los datos, y no aleatoria, caso en el que el empleo de arreglos podría reportar cierta ventaja.

Para utilizar conjuntamente con esta lista, se creo otro 'struct', denominado Grupo, que hace las veces de contenedor de misiles, y además de cierta información de cada instante analizado, en pos de encontrar la mejor opción. Esta estructura cuenta con una lista de punteros a Misiles, y tres long doubles: el instante al que hace referencia el Grupo (el tiempo en segundos, no el número de instante) y las coordenadas en X y en Y a detonar para esos misiles y en ese exacto momento.

También se implementó una función que calcula la distancia entre dos pares, y otra que obtiene la intersección de las mediatrices de un triángulo. Esta última recibe un arreglo de punteros a Misiles, un instante y un radio para la explosión de una bomba. Con estos elementos primero calcula la pendiente y los puntos de paso de las mediatrices, luego su intersección, y finalmente, compara el punto obtenido con el radio de la detonación, a fin de decidir si el punto encontrado es óptimo, o por lo menos viable.

Todos estos algoritmos fueron implementados con el objetivo de servir de funciones auxiliares al motor de este trabajo el procedimiento que dimos en llamar Armageddon. Debido a las dimensiones de éste, y a la cantidad de decisiones que toma, convenimos que lo mejor para comprender su funcionamiento era separarlo en varias secciones, según se suceden los ciclos.

Es por esto que consideramos mejor no comentar cada parte del código, ya que resultaría demasiado extenso y no es ese el objetivo del trabajo. Por ello explicaremos conceptualmente el código en lugar de hacer una revisión completa del mismo.

Para empezar, esta función recibe como parámetros un archivo de entrada, uno de salida, y un long double que representa en cuantas partes se discretizará un segundo. Con los streams, llama al parser encargado de levantar los datos, y al terminar, coloca en el resultado los tiempos y coordenadas de explosión de cada bomba.

Una vez reunida toda la información necesaria y disponible, se procede a ejercitar la siguiente metodología: se recorren todos los intervalos de tiempo, y en cada uno se observa exhaustivamente el estado de los misiles, de esta forma se buscan grupos de proyectiles que sean susceptibles de ser neutralizados con una sola acción defensiva, el procedimiento empareja primero (si los hay) grupos de dos misiles cuya distancia sea menor al diametro de las bombas de las que se dispone. Tras realizar esto se trata de encontrar un tercer misil que cumpla con las mismas condiciones simultaneamente respecto de los dos antes mencionados. Para comprobar la viabilidad de detonar el trio de proyectiles se utiliza el método de mediatrices primero, si éste no ofrece un punto óptimo, acude en su auxilio el algoritmo que calcula el máximo de las distancias en cada eje.

Es importante aclarar que como se busca comprobar condiciones simultaneas sobre los misiles, los sucesivos for's no recorren varias veces el arreglo de punteros a misil, sino que lo hace en forma secuencial, añadiendo clausula a cada ciclo. Esta forma de proceder es lo que .<sup>entorpece</sup>.el código, ya que es necesario tomar

una gran cantidad de decisiones para manejar los casos bordes, y los pasos de grupos de dos a tres misiles etc.

Este algoritmo deja por resultado una lista de grupos de misiles (varios grupos, por cada instante según sea el caso), entre los cuales se selecciona los mejores casos para maximizar las amenazas neutralizadas. Este algoritmo de decisión, no solo tiene en cuenta los posibles tres misiles que cumplan con las condiciones necesarias y suficientes para ser agregados a la lista, sino que también considera los misiles que serían destruidos y no se utilizaron para calcular el punto de detonación.

Finalmente, cuando se han seleccionado los grupos más convenientes a fin de proteger el planeta, y se han dispuesto puntos de explosión para todas las bombas en existencia; se colocan estos puntos y sus respectivos instantes en el stream de salida y se da por concluido el algoritmo.

## Resultados:

El algoritmo programado funciona correctamente al momento de ubicar grupos de dos o tres misiles, y se decide por el mejor caso posible en cualquier instante. Esto se puede observar en los gráficos siguientes. De la discusión con otros grupos, obtuvimos un caso patológico en que el algoritmo no toma la decisión que salvaría el planeta. Esto se ejemplificará más adelante, ya que no es un caso particular sino una configuración de las trayectorias de los misiles, lo que confunde al programa.

Sin embargo, gracias a las tres estrategias implementadas, se logra abarcar una gran cantidad de casos posibles, con lo que los resultados obtenidos son sumamente satisfactorios en efectividad y tiempo.

Respecto a los tiempos de ejecución, y haciendo referencia al gráfico que muestra su evolución, podemos observar que se incrementan muy rápidamente a medida que se agregan misiles. Esto se debe al funcionamiento del algoritmo que determina las soluciones, ya que con más proyectiles, en general se obtienen más grupos, y por lo tanto el trabajo a momento de encontrar un mejor punto a detonar es mayor, lo que se refleja en el tiempo total que lleva correr el programa.

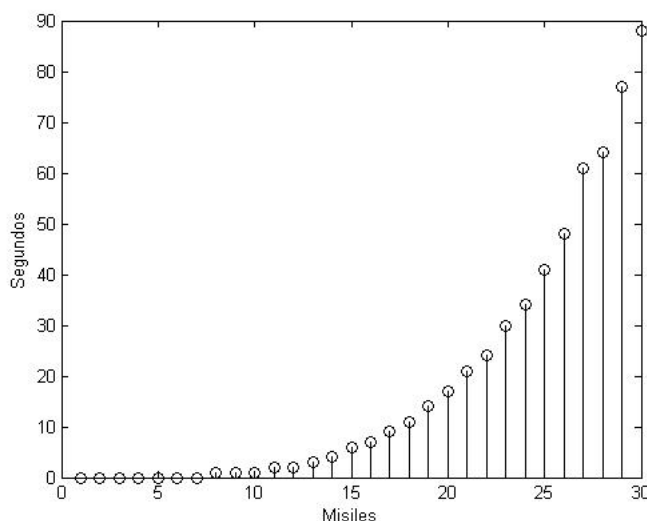


Figura 5: Segundos en función de los misiles atacantes

Este gráfico es solo estimativo, y para dar una idea de cuanto tardará el algoritmo en resolver el problema. Los tiempos de ejecución dependen además de la cantidad de misiles, de la distribución que tienen éstos. Por ejemplo el procedimiento implementado tiene una rápida respuesta para aquellos misiles cuya distribución sea espaciada, de manera que no se encuentren muchos grupos

de proyectiles. Cuanto más conjuntos se encuentren, por ende cuanto más dispareja sea la distribución de los misiles, más tiempo conlleva generar los grupos, y por lo tanto más tiempo lleva escoger los mejores al momento de detonar las bombas.

En base a lo explicado anteriormente, el peor caso que puede registrarse es que se den las condiciones para que una gran cantidad de misiles estén juntos durante un largo intervalo de tiempo. Esto hará que el algoritmo genere demasiados grupos, con muchos proyectiles cada uno, que luego deberá comparar entre sí para obtener la mejor configuración posible de bombas.

En contraposición, el mejor de los casos será cuando además de haber pocos misiles sus trayectorias nunca se acerquen. De esta manera se obtendrá una reducida cantidad de grupos de pocos integrantes.

## Discusiones:

Pudimos encontrar un caso en el que nuestro algoritmo tendrá un mal desempeño. Se trata de aquel en el que la estrategia es vital a la hora de explotar las bombas. Se junta una gran cantidad de misiles en cierto lugar, formando una cantidad de grupos mayor a las bombas disponibles, y luego vuelven a separarse y agruparse con otros misiles en conjuntos más chicos, pero menor o igual a la cantidad de bombas. Este caso hace que nuestro algoritmo elija la opción de lanzar las bombas en el momento que encuentra el mayor grupo, que si bien destruye una gran parte de los misiles, no los destruye todos. Sin embargo se podrían haber detonado las bombas en el ultimo instante nombrado.

A forma de ejemplo, uno de estos casos podría ser como el siguiente gráfico:

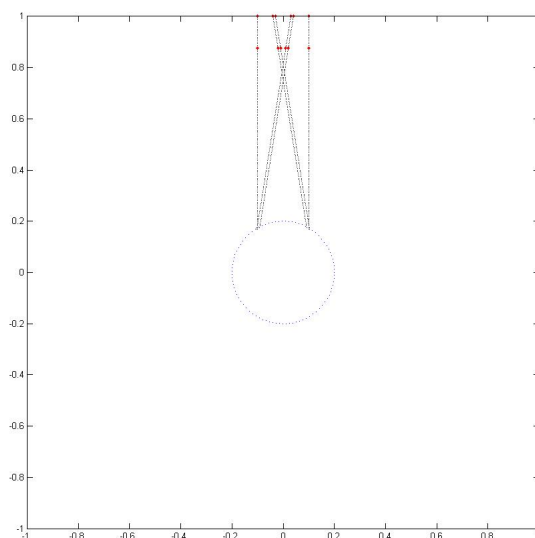


Figura 6: Este es el caso que nuestro algoritmo no puede resolver

Como podemos ver, se cruzan en el medio cuatro misiles, dos se aíslan, formando tres grupos. Luego los proyectiles del medio se van acercando a los del exterior, para formar dos grupos de tres cada uno.

Ante este ejemplo, con dos bombas disponibles nuestro algoritmo se comporta de la siguiente manera:

Lo sucedido muestra que el programa optó por lanzar las bombas en el medio, cuando encontró el grupo de cuatro misiles (el mas numeroso de todas las instancias), y la bomba restante la dejo caer sobre uno de los misiles que

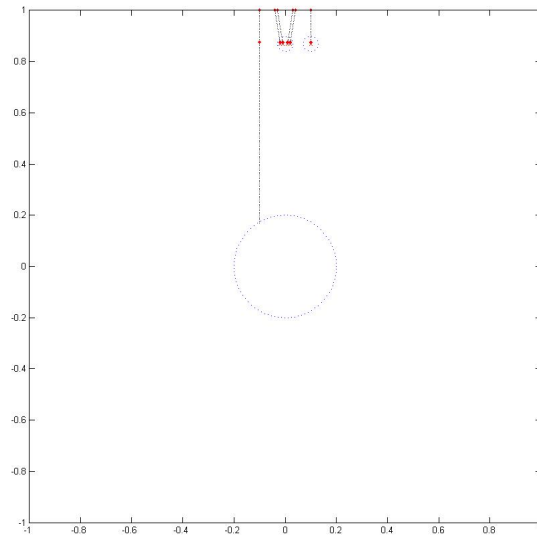


Figura 7: Asi trata de superarlo nuestro programa

estaba solo. Esto nos deja un misil sin destruir, que luego impacta contra el planeta.

El mejor desempeño que uno podría esperar seria de la siguiente forma:  
[GRAFICO DE CASO PATOLOGICO ARREGLADO]

En este caso se lanzaron bombas sobre los dos grupos de tres misiles, y se logro un mejor resultado.

Una de las maneras de hacer un algoritmo que repare en estos casos podría ser cambiar la estrategia de elección del mejor grupo, probando todas las combinatorias posibles entre las bombas y los casos, y luego elegir la mejor combinación. Por supuesto, esto puede llegar a tener un orden de complejidad muy alto como para cumplir con los requisitos del trabajo, por lo que sumado a la falta de tiempo, optamos por no hacerlo.



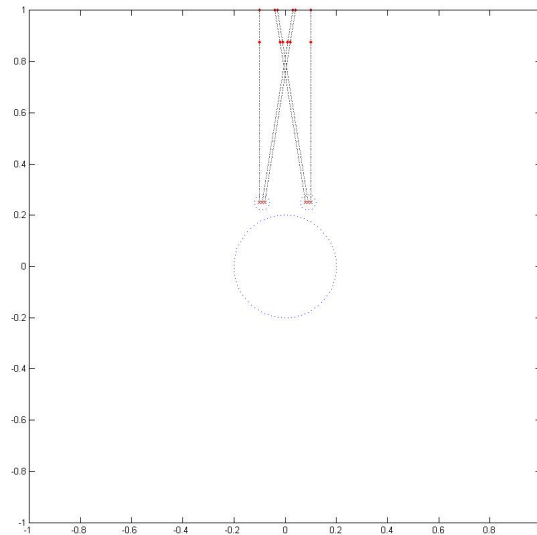


Figura 8: Asi debería superarlo un algoritmo que lo contemple

## Conclusiones:

Resta buscar aún más casos para los que el algoritmo no funcione y buscar un procedimiento que los resuelva de la mejor manera. El rendimiento de nuestro trabajo nos resulto satisfactorio, en cuanto al tiempo que emplea y a la eficiencia al maximizar las cantidades de misiles destruidos, sin embargo, resta explorar muchas otras aproximaciones para este problema. Por ejemplo, encararlo desde el punto de vista geométrico, tomando las funciones continuas y analizando todo a la vez, o buscar la eficiencia por instantes en lugar de casos.

Todo esto nos lleva a la conclusion obvia, este es un problema muy abierto, y muy difícil de automatizar. No importa por donde se lo aborde, siempre nos enfrentamos a "la manta corta", si nos ocupamos de cierto grupo de casos, descuidamos otros, y no parece haber una solución combinatoria que sea capaz de resolver este conflicto entre cantidad y posición de misiles y bombas.

De todas formas creemos que para el contexto en el que se nos encargo realizar el trabajo, nuestros algoritmos se desempeñarán de la forma esperada. Esta será, cumpliendo con nuestras expectativas, por lo menos en un ambiente acotado. Nos queda claro que para generalizarlo harán falta muchas más horas de trabajo y diseño.

# Apéndice A:

## Enunciado:

### Laboratorio de Métodos Numéricos - Segundo cuatrimestre 2007 Trabajo Práctico Número 4: Impacto profundo

---

#### Introducción

Nos encontramos nuevamente en el Centro de Operaciones Logísticas Laterales (C.O.L.L.), en uno de los momentos más dramáticos de la XLII Guerra Intergaláctica. El planeta Z-80 está siendo atacado por un conjunto de misiles que amenazan su integridad, y nuestra misión consiste en detener este cruel ataque.

Para defender al planeta Z-80 contamos con un número reducido de bombas de destrucción masiva. Estas bombas son enviadas a un punto del espacio circundante a nuestro planeta, donde se las hace explotar. La explosión genera una onda expansiva que destruye todos los objetos (y misiles) ubicados a menos de un cierto radio crítico del centro de la explosión.

Nuestros radares nos proporcionan la posición exacta de los misiles enemigos a intervalos de tiempo aproximadamente constantes<sup>1</sup>. En función de estas mediciones deberemos determinar las trayectorias futuras de los misiles y, sobre la base de estas estimaciones, deberemos decidir en qué lugar y en qué momento tenemos que producir las explosiones de nuestras bombas defensivas, con el objetivo de destruir la mayor cantidad de misiles enemigos. La supervivencia de nuestro planeta está en sus manos.

#### Enunciado

El objetivo del trabajo práctico es implementar un programa que lea las mediciones de las posiciones de los misiles desde un archivo de texto, y que deje en otro archivo el momento y la posición en la que deberá detonarse cada bomba defensiva, con el objetivo de maximizar la cantidad de misiles enemigos destruidos. Debido a la urgencia que tenemos para activar nuestras defensas, el programa no deberá utilizar más de 20 sg. de procesamiento total.

El archivo de entrada contiene las posiciones de los misiles enemigos a intervalos de tiempo constantes de 1 sg. Para estimar la trayectoria futura de cada misil se deberán interpolar las mediciones de las posiciones enemigas con splines paramétricos naturales, utilizando la extrapolación de cada spline hacia el futuro como una estimación de la trayectoria correspondiente.

El programa debe tomar por línea de comandos los nombres del archivo de entrada y del archivo de salida, de la siguiente forma:

```
tp4.exe misiles.txt bombas.txt
```

El archivo con los datos de entrada (llamado `misiles.txt` en el ejemplo) tiene en la primera línea la cantidad  $n$  de misiles y la cantidad  $m$  de mediciones

---

<sup>1</sup>Dominamos los viajes interplanetarios pero nuestros radares usan la anticuada tecnología del siglo XXI.

para cada uno. A continuación, se incluyen  $m$  filas correspondientes al primer misil, cada una de las cuales contiene las coordenadas  $x$  e  $y$  de la posición del misil en los instantes  $t = 1, 2, \dots, m$  sg. (simplificamos el análisis considerando un espacio bidimensional). Luego de las  $m$  líneas correspondientes al primer misil, el archivo contiene  $m$  líneas con el mismo formato correspondientes al segundo misil, etc. Por último, el archivo contiene una línea con la cantidad  $b$  de bombas defensivas, el radio  $r$  de la onda expansiva de cada una y el radio  $R$  de nuestro planeta, cuyo centro suponemos ubicado en el origen de coordenadas. Por ejemplo, el siguiente archivo es un ejemplo de datos de entrada válidos:

```
3 4

1.0    2.5
1.1    2.4
1.23   2.3
1.27   2.15

1.9    3.5
1.8    3.4
1.7    3.2
1.75   2.9

-2.2   2.3
-2.15  2.23
-2.12  2.17
-2.08  2.11

2 0.7 1.0
```

Por su parte, el archivo de salida (llamado `bombas.txt` en el ejemplo) debe tener una línea por cada bomba, que contenga el instante de la explosión y las coordenadas  $x$  e  $y$  del centro de la explosión. Es importante notar que el punto central de cada explosión debe tener una distancia al origen de coordenadas de al menos  $R + r$ , para evitar que parte del planeta sea destruido por nuestras mismas bombas defensivas. Por ejemplo, si  $b = 2$  el siguiente es un ejemplo de archivo de salida:

```
2.4    2.15 2.80
1.6    -2.04 2.50
```

El informe debe contener todas las opciones que el grupo haya considerado para determinar los instantes y posiciones en los que se deben detonar las bombas defensivas.

---

Fecha de entrega: Lunes 19 de Noviembre

## Apendice B:

### 1. Misil.h

```
#include <iostream>
using namespace std;

#ifndef _MISIL_H
#define _MISIL_H

class Misil{
    friend ostream& operator<<(ostream& os, const Misil& misil);
public:
    Misil();
    Misil(const long double* medicionesX, const long double* medicionesY,
           int numMuestras);
    Misil(const Misil&);

    void operator= (const Misil& m2);
    bool estaDestruido (void) const;
    void destruir (void);
    long double posicionX (long double tiempo) const;
    long double posicionY (long double tiempo) const;

    ~Misil();
//private:
    int cantMediciones;
    bool destruido;
    long double x[4];
    long double y[4];

    void spline (const long double* muestra, long double* res);
};

#endif /* _MISIL_H */
```

### 2. Misil.cpp

```
#include "Misil.h"
#include <math.h>

Misil :: Misil()
{
    for (int i = 0; i < 3; i++){
        x[i] = 0;
        y[i] = 0;
    }

    x[3] = 1;
```

```

        y[3] = 0;
        destruido = false;
        cantMediciones = 2;
    }

    Misil :: Misil(const long double* medicionesX, const long double* medicionesY,
                  int numMuestras)
    {
        destruido = false;
        cantMediciones = numMuestras;
        spline(medicionesX, x);
        spline(medicionesY, y);
    }

    Misil :: Misil(const Misil& m)
    {
        *this = m;
    }

    void Misil :: operator= (const Misil& m)
    {
        for (int i = 0; i < 4; i++){
            x[i] = m.x[i];
            y[i] = m.y[i];
        }

        destruido = m.destruido;
        cantMediciones = m.cantMediciones;
    }

    bool Misil :: estaDestruido (void) const
    {
        return destruido;
    }

    void Misil :: destruir (void)
    {
        destruido = true;
    }

    long double Misil :: posicionX (long double tiempo) const
    {
        return (x[0]*pow(tiempo - cantMediciones + 1, 3) + x[1]*pow(tiempo -
            cantMediciones + 1, 2) + x[2]*(tiempo - cantMediciones + 1) + x[3]);
    }

    long double Misil :: posicionY (long double tiempo) const
    {
        return (y[0]*pow(tiempo - cantMediciones + 1, 3) + y[1]*pow(tiempo -
            cantMediciones + 1, 2) + y[2]*(tiempo - cantMediciones + 1) + y[3]);
    }

```

```

}

Misil :: ~Misil(){}

void Misil :: spline (const long double* muestra, long double* res)
{
    /*
        La matriz para spline cubicos naturales es:
        3 0 0 0 ... 0 0 0 | 0
        1 4 1 0 ... 0 0 0 | 3*(a(2) - 2*a(1) + a(0))
        0 1 4 1 ... 0 0 0 | 3*(a(3) - 2*a(2) + a(1))
        .
        .
        .
        0 0 0 0 ... 1 4 1 | 3*(a(n) - 2*a(n-1) + a(n-2))
        0 0 0 0 ... 0 0 3 | 0

        siendo a(i) el coeficiente 'a' del spline 'i' y n = cantMediciones

        Al triangular desde la 2da fila hacia la anteultima mediante el metodo
        de gauss,
        el coeficiente siempre es 1/diagonal. Luego
        diagonal = 4 - 1*coeficiente.
        Solo necesitamos c(n-1), por lo que me interesa solamente el anteultimo
        valor de la diagonal.
    */

    long double diag;          //diag = resultado de la diagonal correspondiente a
                                //c(n-1)
    long double vectorB;       //el resultado correspondiente (del vector b)

    //CASO PARTICULAR: la matriz es de 2x2
    if (cantMediciones == 2){
        diag = 3;
        vectorB = 0;
    }
    else{
        diag = 4;
        vectorB = 3*(muestra[2] - 2*muestra[1] + muestra[0]);
        long double coef;      //auxiliar, para "restar fila1 - coef*fila2"

        for (int i = 2; i < cantMediciones - 1; i++) {
            coef = 1/diag;
            diag = 4 - coef;
            vectorB = 3*(muestra[i + 1] - 2*muestra[i] + muestra[i - 1]) -
                        coef*vectorB;
        }
    }

    res[1] = vectorB/diag;
}

```

```

//ya tengo el c(n-1), ahora necesito a(n-1), b(n-1) y d(n-1)
//a(j) = f(j) (sale de evaluar la ecuacion del spline en x(n-1))
res[3] = muestra[cantMediciones - 2];

//Ahora que tengo a(n-1) y c(n-1) puedo sacar b(n-1)
//uso que: b(j) = a(j+1)-a(j) -(2/3*c(j) + c(j+1)/3)
//con j = n - 1 => b(n-1) = a(n) - a(n-1) - (2/3*c(n-1) + c(n)/3)
//pero c(n) = 0 => b(n-1) = a(n) - a(n-1) - 2/3*c(n-1)
res[2] = muestra[cantMediciones - 1] - muestra[cantMediciones - 2] -
        2*res[1]/3;

//Ahora solo me falta d(n-1)
//d(j) = (c(j+1) - c(j))/3
//d(n-1) = (c(n) - c(n-1))/3
//pero c(n) = 0 => d(n-1) = c(n-1)/3
res[0] = -res[1]/3;
}

ostream& operator<<(ostream& os, const Misil& misil)
{
    os << endl;
    os << "Cantidad de mediciones: " << misil.cantMediciones << endl;
    (misil.destruido) ? (os << "Destruido: TRUE" << endl) : (os << "Destruido:
        FALSE" << endl);
    os << "Coeficientes del spline en x: " << misil.x[0] << " " << misil.x[1]
        << " " << misil.x[2] << " " << misil.x[3] << " " << misil.x[4] << endl;
    os << "Coeficientes del spline en y: " << misil.y[0] << " " << misil.y[1]
        << " " << misil.y[2] << " " << misil.y[3] << " " << misil.x[4] << endl;
    return os;
}

```

### 3. main.cpp (Aqui se incluirán las aridades de las funciones y estructuras principales por motivos de tamaño)

```

struct Grupo {
    list<Misil*> grupoMisiles;
    long double instante;
    long double bombaX;
    long double bombaY;
};

struct Par {
    long double x;
    long double y;
};

void parser(istream &in, Misil **misiles, unsigned int &cantMisiles,
    unsigned int &cantMediciones, unsigned int &cantBombas,
    long double &radioPlaneta, long double &radioBomba);

```

```
short int destruidos(list<Misil*>& misiles);

inline long double distancia (const Par& p1, const Par& p2);

bool interseccionDeMediatrices(Misil** grupoMisiles, float instante,
                               long double radioBomba, Par& res);

unsigned int Armageddon(istream& entrada, ostream& salida, float paso);

int main(int argc, char* argv[]);
```



## Referencias

- [1] <http://es.wikipedia.org/wiki/Spline> Definición de interpolación mediante splines.
- [2] <http://www.mismates.net/descargas/ejerbasicos.pdf> Inscribir tirangulo en circulo
- [3] <http://pcm.dis.ulpgc.es/tutor/splines.pdf> Condiciones para el spline
- [4] [http://www.ugr.es/~ossanche/docencia05\\_06/metnumericos/splines](http://www.ugr.es/~ossanche/docencia05_06/metnumericos/splines) Alguna implementación
- [5] <http://docentes.uacj.mx/gtapia/AN/Unidad6/Contenido4.htm> explicacion teorica
- [6] <http://www.cplusplus.com/> Referencia y consulta para C++
- [7] [http://148.204.224.249/esimetic/seminario2007/mod\\_01/graficasconmatlab933.pdf](http://148.204.224.249/esimetic/seminario2007/mod_01/graficasconmatlab933.pdf) Graficos con Matlab.
- [8] [pcmap.unizar.es/~pilar/latex.pdf](http://pcmap.unizar.es/~pilar/latex.pdf) . Introduccion a latex.
- [9] [http://oc.wikipedia.org/wiki/Ajuda:Formulas\\_TeX\\_e\\_LaTeX](http://oc.wikipedia.org/wiki/Ajuda:Formulas_TeX_e_LaTeX) Formulas LaTeX.
- [10] [webs.uvigo.es/mat.avanzadas/PracME\\_1.pdf](http://webs.uvigo.es/mat.avanzadas/PracME_1.pdf) Introducción a MatLab.