1 Lezione del 02-10-24

1.1 Trasporto

Poniamo il seguente problema:

Problema 1.1: Trasporto

Due centrali del latte di Firenze producono rispettivamente 50 e 60 mila litri di latte al giorno. Le centrali servono tre quartieri, che consumano rispettivamente 30, 30 e 20 mila litri di latte al giorno. Si conosce il costo necessario per portare un migliaio di litri di latte da ogni centrale a ogni quartiere, riportato nella seguente tabella:

	Novoli	**Statuto**	**Rifredi**
Centrale A	6	8	4
Centrale B	7	3	9

Vogliamo capire quanto latte deve spedire ogni centrale ad ogni quartiere.

Nota simpatica: secondo l'indagine INRAN-SCAI 2005-06, l'italiano medio consuma 0.115g di latte al giorno, che per un peso specifico di circa $1.040\text{kg}/\text{L}$ fanno 0.11L di latte al giorno. Al 2024, il comune di Firenze ha $364\,073$ abitanti, ergo dovrebbe avere bisogno di approssimativamente $40\,258\text{L}$ di latte al giorno. I fiorentini nell'esempio devono avere le ossa veramente forti!

Possiamo esprimere il problema dell'esempio come un problema LP. Abbiamo innanzitutto che i costi di trasporto formano una matrice:

$$C_{matr} = \begin{pmatrix} 6 & 8 & 4 \\ 7 & 3 & 9 \end{pmatrix}$$

che possiamo linearizzare, come avevamo fatto nei problemi di assegnamento di costo minimo, in un vettore costo:

$$C = (6, 8, 4, 7, 3, 9)$$

Questo vettore moltiplica il vettore delle variabili decisionali, che è la linearizzazione della matrice:

$$x_{matr} = \begin{pmatrix} x_{13} & x_{14} & x_{15} \\ x_{23} & x_{24} & x_{25} \end{pmatrix}$$

Questa matrice non rappresenta altro che quanto latte mandare ad ogni quartiere.

A questo punto, possiamo stabilire i vincoli. Innanzitutto, non si può avere più latte di quanto viene prodotto, ergo:

$$\begin{cases} x_{13} + x_{14} + x_{15} \leq 50 \\ x_{23} + x_{14} + x_{15} \leq 60 \end{cases}$$

inoltre, si vuole fornire ad ogni quartiere il fabbisogno richiesto, ergo:

$$\begin{cases} x_13 + x_{23} \geq 30 \\ x_14 + x_{24} \geq 30 \\ x_15 + x_{25} \geq 20 \end{cases}$$

Questo è un problema di programmazione lineare.

In generale, quindi, un problema di trasporto minimizza la funzione obiettivo data da una matrice di costo in $n \times m$ variabili, con m vincoli di riga sul vettore o_j dei limiti di produzione, e n vincoli di colonna sul vettore d_j della domanda, in forma:

$$\begin{cases} \min \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} = C^T \cdot x \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} \geq d_j \quad \forall j = 1, ..., n \\ \sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leq o_i \quad \forall i = 1, ..., m \\ x \geq 0 \end{cases}$$

Non ci sono soluzioni se la domanda supera l'offerta, cioè sé:

$$\sum_{j=1}^{m} d_j \geq \sum_{i=1}^{m} o_i$$

Mentre in caso di eccessi di produzione, potremmo trasformare le diseguaglianze in eguaglianze, e aggiugnere un carico "fittizio" con costo zero dove deviare il surplus di produzione.

Inoltre, come avevamo detto per i problemi di assegnamento di costo minimo, anche qui potremmo scegliere di distinguere fra trasporti divisibili (nel campo $x = \mathbb{R}^n$) e indivisibili (col vincolo aggiunto $x = \mathbb{Z}^n$).

1.2 Forma duale standard

Per ogni problema LP avevamo definito la forma primale standard:

$$\begin{cases} \max C^T \cdot x \\ Ax \leq b \end{cases}$$

Introduciamo adesso la forma duale standard:

Definizione 1.1: Forma duale standard

Un problema di programmazione lineare si dice in forma duale standard quando è espresso in forma:

$$\begin{cases} \min(c^T \cdot x) \\ Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases}$$

Ad ogni problema in forma primale standard corrisponde una forma duale standard, ottenuta con le trasformazioni equivalenti studiate.

1.2.1 Vertici del duale

La definizione di duale torna utile per il calcolo dei vertici. Possiamo infatti avere, come avevamo fatto sul primale:

Definizione 1.2: Soluzone di base duale

Sia dato un problema LP $\mathcal{P}$ in forma duale standard. Sia $B \subseteq \{1, ..., n\}$ un sottoinsieme di indici di variabili decisionali tale che $\text{card}(B) = m$. Chiamiamo x_B l'insieme delle variabili decisionali individuate da B, e x_N l'insieme delle $n - m$ variabili decisionali rimanenti:

$$x = \{x_B, x_N\}$$

Impostiamo quindi tutte le x_N a 0: avremo un sistema di m variabili in m equazioni, quindi determinato. La soluzione di quel sistema è detta soluzione di base duale di $\mathcal{P}$.

Questa definizione porta ad una caratterizzazione dei vertici del tutto analoga a quella dichiarata sui problemi in forma primale standard:

Teorema 1.1: Caratterizzazione dei vertici duali

Su un problema in forma duale standard, un punto x del poliedro P è un vertice di P se e solo se è una soluzione di base duale ammissibile, ovvero:

$$x \in \text{vert}(P) \Leftrightarrow x \text{ è soluzione di base duale}$$

1.2.2 Soluzioni di base duali degeneri

Possiamo ricavare il concetto di soluzione degenere (e anche di soluzione ammissibile) sui vertici del poliedro del duale. Si ha:

Teorema 1.2: Caratterizzazione delle soluzioni di base duali degeneri

Se una soluzione è di base, ergo scelto $B = \{1, ..., n\}$ con $\text{card}(B) = m$ è data da $Ax_B = b$, possiamo dire che è pure degenere quando $\exists i \in B$ tale che almeno una componente si annulla.

e riguardo l'ammissibilità:

Teorema 1.3: Caratterizzazione delle soluzioni di base duali ammissibili

Se una soluzione è di base, ergo scelto $B = \{1, ..., n\}$ con $\text{card}(B) = m$ è data da $Ax_B = b$, possiamo dire che è ammissibile quando il vettore soluzione è ≥ 0.