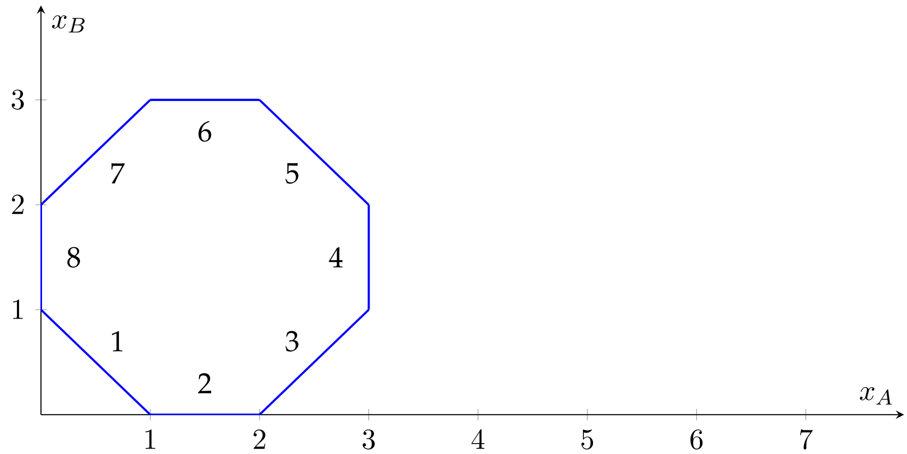
1 Lezione del 07-10-24

1.1 Algoritmo del simplesso

Supponiamo di avere un problema LP in formato primale standard con $n = 8$ vincoli, espresso come:

$$\begin{cases} \max(c^T \cdot x) \\ Ax \leq b \end{cases}$$

e con poliedro:



Scegliamo un vertice di partenza, per adesso ad arbitrio: diciamo $\bar{x} = (0, 1)$ (vedremo in seguito un'algoritmo particolare per ricavare un vertice, che ci permetterà anche di determinare se il poliedro è vuoto o meno). Ci chiediamo se questo vertice $\bar{x}$ è ottimo. Visto che è vertice, abbiamo che per una matrice A_B e un vettore b_B di base:

$$\bar{x} = A_B^{-1} b_B$$

e che possiamo costruire il complementare duale $\bar{y}$, impostando a zero le variabili fuori base e risolvendo il sistema:

$$\bar{y} = (cA_B^{-1}, 0)$$

e applicare il test di ottimalità, cioè vedere se:

$$cA_B^{-1} \geq 0$$

ergo $\bar{y} \in D$, quindi il complementare duale esiste e il vertice è ottimo. Se questa condizione risulta verificata, possiamo fermarci, in quanto abbiamo trovato la soluzione ottimale.

In caso contrario, avremo $\exists k \in B$ tale che $\bar{y}_k < 0$. Dovremo quindi spostarci verso un'altro vertice, magari *adiacente*, che dal punto di vista delle basi, significa cambiare un solo indice di base, conservando gli altri. Possiamo formalizzare questa affermazione definendo un **indice uscente** h ed un **indice entrante** k. Sostituire un indice di base significa effettuare il cambio di base:

$$B := B \setminus \{h\} \cup \{k\}$$

Resta la domanda di *quale* spigolo scegliere: in uno spazio vettoriale $\mathbb{R}^n$, ho a disposizione n spigoli che si staccano dallo stesso vertice. Ovviamente, vorrei scegliere uno spigolo che accresce la funzione obiettivo, e si può dimostrare che ne esiste almeno uno: altrimenti sarei già all'ottimo. Inoltre, avendo un metodo per scegliere sempre lo spigolo di crescita maggiore potrei dire 2 cose: l'algoritmo tende all'ottimo (il vertice da cui non si staccano spigoli che accrescono la funzione obiettivo), e termina in un numero finito di passi (prima o poi raggiungerà inevitabilmente un vertice che massimizza la funzione).

Prima però dobbiamo chiarire una questione: scegliere un nuovo spigolo significa trovare 2 indici base, uno da eliminare e uno da inserire. Si può dire che il primo indice, quello uscente, indica anche la direzione di spostamento: allentando un vincolo ci spostiamo sulla semiretta del prossimo. Allo stesso tempo, scegliere un indice da rimuovere non basta: dobbiamo scegliere quale introdurre, che geometricamente significa capire *quanto* ci possiamo spostare lungo la semiretta prima di uscire dalla regione di ammissibilità. Vediamo quindi questi due passaggi in ordine.

- **Indice uscente**
  Diciamo:
  $$W = \left(-A_B^{-1}\right)$$
  e prendiamo le colonne W^i corrispondenti agli indici di base scelti.

  Possiamo allora dire che l'equazione degli spigoli dati dalle disequazioni all'indice i sono:
  $$\bar{x} + \lambda W^i$$
  Mettiamo questa equazione nella funzione costo:
  $$c\left(\bar{x} + \lambda W^i\right) = c\bar{x} + \lambda c W^i$$
  Qui abbiamo $c\bar{x}$, che è il valore nel vertice, e un'altro termine scalato da λ. Ricordiamo poi che $cA_B^{-1} = \bar{y}_B$, e che $W = \left(-A_B^{-1}\right)$, ergo $cW^i = -\bar{y}_B$:
  $$c\bar{x} + \lambda c W^i = c\bar{x} - \lambda \bar{y}_B$$
  Vogliamo quindi "allentare" l'indice (e il corrispettivo vertice) che ci dà $\bar{y}_i < 0$, in quanto è quello che restituisce un $cW^i > 0$, e quindi un accrescimento della funzione. Definiamo allora questo indice:

  Definizione 1.1: Indice uscente

  Chiamiamo indice uscente h, da una certa soluzione della base B:
  $$h := \min\{i \in B \text{ t.c. } \bar{y}_i < 0\}$$

  Il $\min$ significa che in caso di più i negativi, si adotta la regola anticiclo (di Bland) di scegliere il primo. In caso di nessun i negativo, la complementare duale esiste e siamo sull'ottimo.

- **Indice entrante**
  Adesso cerchiamo per quali λ lo spigolo $\bar{x} + \lambda W^h$ resta ammissibile, ergo soddisfa:
  $$A_i\left(\bar{x} + \lambda W^h\right) \leq b_i, \quad i \in N$$

Questo significa effettivamente vedere qual'è il primo vincolo che "stringiamo", o che incontriamo, spostandoci lungo la semiretta ottenuta allentando il vincolo dato dall'indice uscente.

Possiamo dire:

$$A_i \left(\bar{x} + \lambda W^h \right) = A_i \bar{x} + \lambda A_i W^h \leq b_i$$

da cui si ricava (e si risolve) la disequazione di primo grado:

$$\lambda A_i W^h \leq b_i - A_i \bar{x} \Rightarrow \lambda \leq \frac{b_i - A_i \bar{x}}{A_i W^h}$$

Notiamo che se fosse $A_i W^h \leq 0, \ \forall i \in N$, avremmo che l'indice rappresenta una direzione di regressione, in quanto $\lambda \to +\infty$. Si ha quindi che il duale non ha soluzione, e il primale $\to +\infty$. In caso contrario, noi vogliamo trovare il primo vincolo che si va a stringere, quindi dovremo calcolare tutti gli r_i:

$$r_i = \frac{b_i - A_i \bar{x}}{A_i W^h}, \quad i \in N, \quad A_i W^h > 0$$

e scegliere l'indice che dà $\vartheta = \min(r_i)$. Definiamo allora anche questo indice:

Definizione 1.2: Indice entrante

Chiamiamo indice entrante k, da una certa soluzione della base B e un certo indice uscente h:

$$i := \min\{i \in N \text{ t.c. } A_i W^h > 0, \quad \frac{b_i - A_i \bar{x}}{A_i W^h} = \vartheta\}$$

Anche qui, il $\min$ serve a selezionare il primo indice valido, ed è una regola anticiclo (di Bland). Notiamo che si potrebbe più r_i uguali rappresentano soluzioni di base degenere, in quanto sono più modi di restare sullo stesso vertice stringendo vincoli diversi. Le regole anticiclo di Bland assicurano anche che l'algoritmo non si blocchi a ciclare su soluzioni degeneri.

Abbiamo quindi tutti gli strumenti necessari alla formulazione dell'algoritmo del simplesso:

Algoritmo 1 del simplesso primale

Input: un problema LP in forma primale standard
Output: la soluzione ottima
Trova una base B che genera una soluzione di base ammissibile.
ciclo:
Calcola la soluzione di base primale $\bar{x} = A_b^{-1} b_B$ e la soluzione di base duale $\bar{y} = (c A_b^{-1}, 0)$

if $\bar{y_B} \geq 0$ **then**
Fermati, $\bar{x}$ è ottima per P e $\bar{y}$ è ottima per D
else
Calcola l'indice uscente:

$$h := \min\{i \in B \text{ t.c. } \bar{y_i} < 0\}$$

poni $W := -A_B^{-1}$ e indica con W^h la h-esima colonna di W
end if
if $A_i W^h \leq 0 \quad \forall i \in N$ **then**
Fermati, $P \to +\infty$ e D non ha soluzione ottima.
else
Calcola:

$$\vartheta = \min\{\frac{b_i - A_i\bar{x}}{A_i W^h} \text{t.c.} \quad i \in N, \quad A_i W^h > 0\}$$

e trova l'indice entrante:

$$i := \min\{i \in N \text{ t.c. } A_i W^h > 0, \quad \frac{b_i - A_i\bar{x}}{A_i W^h} = \vartheta\}$$

end if
Aggiorna la base come:

$$B := B \setminus \{h\} \cup \{k\}$$

Torna a ciclo