1 Lezione del 26-09-24

1.1 Geometria dei poliedri

Introduciamo progressivamente i tipi di **combinazione** che ci sono utili nello studio dei problemi di programmazione lineare.

1.1.1 Combinazioni lineari

Definizione 1.1: Combinazione lineare

Dati $x_1, x_2, ..., x_k \in \mathbb{R}^n$ punti, y si dice **combinazione lineare** di $x_1, x_2, ..., x_k$ se:

$$\exists \lambda_i \quad (i = 1, ..., k) \quad \text{t.c.} \quad y = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i$$

Le combinazioni lineari sono utili per esprimere la funzione obiettiva sulla base dei vettori costo, ma non bastano a trovarne una soluzione ottimale.

1.1.2 Combinazioni convesse

Si introduce quindi il concetto di:

Definizione 1.2: Combinazione convessa

Dati $x_1, x_2, ..., x_k \in \mathbb{R}^n$ punti, y si dice **combinazione convessa** di $x_1, x_2, ..., x_k$ se:

$$\exists \lambda_i \in [0, 1] \quad (i = 1, ..., k), \quad \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1 \quad \text{t.c.} \quad y = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i$$

Possiamo dare un esempio di cos'è la combinazione convessa di due punti in $\mathbb{R}^2$. Posti x_1 e x_2, si ha:

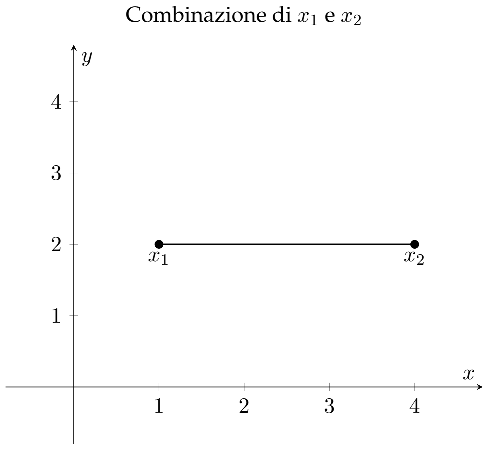
$$\lambda_1 + \lambda_2 = 1 \Rightarrow \lambda_2 = (1 - \lambda_1), \quad y = \lambda x_1 + (1 - \lambda) x_2, \quad \lambda \in [0, 1]$$

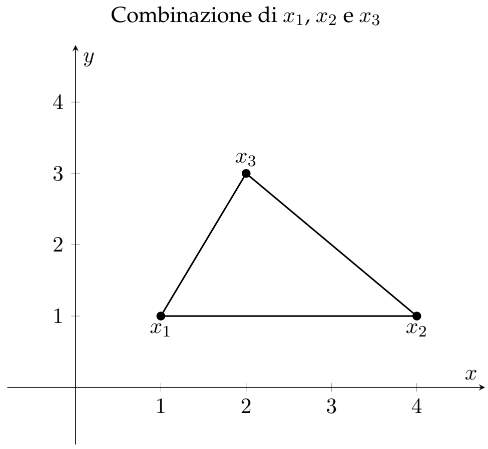
che riconosciamo essere l'equazione di un segmento $x_1\bar{x}_2$ (primo grafico).

Possiamo provare con tre punti: si avrà:

$$y = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3, \quad \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1, \quad \lambda_i \in [0, 1]$$

che si riconduce all'equazione del triangolo di vertici x_1, x_2, x_3 (secondo grafico).





Dai grafici si nota come una combinazione convessa descrive una parte di spazio, che si può definire:

Definizione 1.3: Involucro convesso

L'involucro convesso $\text{conv}(K)$ di un'insieme di punti $K = \{x_1, x_2, ..., x_n\} \in \mathbb{R}^n$ è definito come il luogo di tutte le loro combinazioni convesse.

Si nota che l'involucro convesso negli esempi precedenti è effettivamente un poliedro convesso che contiene tutti i punti che lo formano. Si può infatti dire:

Teorema 1.1: Minimalità dell'involucro convesso

L'insieme $\text{conv}(K)$ di tutte le combinazioni convesse di n punti è il più piccolo poliedro convesso che li contiene tutti.

Si noti che non è detto che a n punti corrisponda uno poligono di di n vertici. Può infatti accadere che uno dei punti è già parte dell'involucro convesso.

Le combinazioni convesse ci permettono di descrivere parte delle regioni ammissibili (poliedri) dei problemi di programmazione lineare, ma restano ancora in sospeso problemi che ammettono regioni illimitate. Per descrivere tali regioni, si introduce un altro tipo di combinazione.

1.1.3 Combinazioni coniche

Definizione 1.4: Combinazione conica

Dati $x_1, x_2, ..., x_k \in \mathbb{R}^n$ punti, y si dice **combinazione conica** di $x_1, x_2, ..., x_k$ se:

$$\exists \lambda_i \geq 0 \quad (i = 1, ..., k) \quad \text{t.c.} \quad y = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i$$

La combinazione conica di più punti non è più il poliedro convesso che li contiene, ma il cono con vertice nell'origine, convesso o meno, che li contiene, definito come:

Definizione 1.5: Involucro conico

L'involucro conico $\text{cono}(K)$ di un'insieme di punti $K = \{x_1, x_2, ..., x_n\} \in \mathbb{R}^n$ è definito come il luogo di tutte le loro combinazioni coniche.

Questo cono si estende fino all'infinito ($\lambda_i \geq 0$) nelle direzioni dei vettori che lo formano. Il concetto è simile a quello di spazio somma, ma con la differenza che non si va ovunque nello span dei due vettori, ma si seguono le semirette che essi conducono.

1.2 Poliedri

Abbiamo definito un poliedro come la regione definita da un sistema di disequazioni lineari, o geometricamente come l'intersezione di un numero finito di semipiani chiusi in $\mathbb{R}^n$. Un poliedro che è anche cono si chiama cono poliedrico. Si dimostra che:

Teorema 1.2: Cono poliedrico

Se P è un cono poliedrico allora:

$$\exists Q \quad \text{t.c.} \quad P = \{x \in \mathbb{R}^n : Qx \leq 0\}$$

con Q matrice.

Senza dimostrazioni, questo è chiaro dal fatto che le disequazioni che compongono il poliedrico sono omogenee (hanno frontiere che passano dall'origine). Si definiscono poi i **vertici** del poliedro:

Definizione 1.6: Vertice

Un vertice di un poliedro è un punto che non si può esprimere come combinazione convessa propria di altri punti del poliedro. Si indica l'insieme dei vettori di un poliedro P come $\text{vert}(P)$.

Notiamo che i vertici di un poliedro limitato corrispondono ai punti che formano la combinazione convessa equivalente al poliedro. Per poliedri illimitati, introduciamo invece:

Definizione 1.7: Direzione di recessione

Un vettore d è la direzione di recessione di un poliedro se:

$$x + \lambda d \in P \quad \forall x \in P, \quad \forall \lambda \geq 0$$

Si indica come $\text{rec}(P)$ l'insieme delle direzioni di recessione di un poliedro.

Chiaramente, per ogni poliedro P, $0 \in \text{rec}(P)$ e per i poliedri limitati, $\text{rec}(P) = \{0\}$. Notiamo che le direzioni di recessione determinano i vettori del cono che coincide (almeno a distanze abbastanza grandi dall'origine) con i poliedri illimitati. Più propriamente, si può dire che un cono poliedrico è l'involucro conico di un insieme finito dei suoi punti (basta prendere gli "estremi").

Definiamo poi lo spazio di linealità:

Definizione 1.8: Spazio di linealità

Lo spazio di linealità di un poliedro illimtato P è il più piccolo sottospazio contenuto interamente in P.

La base di uno spazio di linealità è un vettore d tale che:

$$d \in \text{rec}(P), \quad -d \in \text{rec}(P)$$

ovvero un vettore che è contenuto sia positivo che negativo nelle direzioni di recessione del poliedro.

Questa distinzione è importante in quanto non si può dimostrare completamente il prossimo problemi su poliedri con spazio di linealità $\neq 0$.

1.2.1 Teorema di rappresentazione dei poliedri

Gli strumenti che abbiamo stabilito finora ci permettono di dimostrare un'importante risultato, noto come **teorema di rappresentazione dei poliedri**, o teorema di Minkowski-Weyl.

Teorema 1.3: Rappresentazione dei poliedri

Dato un poliedro P definito come $P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}$, si ha:

$$\exists V = \{v_1, ..., v_k\} \in \text{vert}(P), \quad \exists E = e_1, ..., e_p \in \text{rec}(P) \quad \text{t.c.} \quad P = \text{conv}(V) + \text{cono}(E)$$

Questo significa che è possibile rappresentare qualsiasi poliedro attraverso i suoi vertici, e le direzioni in cui si estende all'infinito (ergo le sue direzioni di recessione).

La somma in $P = \text{conv}(V) + \text{cono}(E)$ si riferisce alla somma vettoriale fra tutti i possibili punti di $\text{conv}(V)$ e $\text{conv}(E)$, come quella studiata sui sottospazi vettoriali (anche se nessuno dei due insiemi è un sottospazio vettoriale). Per un dato insieme $\text{conv}(V)$, quindi, l'aggiunta di $\text{cono}(E)$ rappresenta la "proiezione" di tale insieme nelle direzioni di recessione indicate dal cono.

Più propriamente, posto $\text{lineal}(P) = 0$, si ha:

Teorema 1.4: Rappresentazione dei poliedri non lineali

Dato un poliedro P definito come $P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}$, tale che $\text{lineal}(P)$, si ha:

$$P = \text{conv}(\text{vert}(P)) + \text{rec}(P)$$

la limitazione di linealità è necessaria in quanto un poliedro lineale potrebbe non essere rappresentato, nelle sue dimensioni infinite, dal semplice insieme dei suoi vettori. In verità, è possibile dimostrare che:

Teorema 1.5: Linealità di poliedri

Per ogni poliedro P non vuoto si ha:

$$\text{vert}(P) \neq \emptyset \Leftrightarrow \text{lineal}(P) = 0$$

ergo applicando lo scorso teorema potremmo provare a rappresentare un poliedro attraverso un'insieme di vettori vuoto.

Per i poliedri che otteniamo dai problemi di programmazione lineare, però, abbiamo i corollari:

- Un poliedro limitato è l'involucro convesso dei suoi vertici;
- Se il poliedro ha vincoli di positività sulle sue variabili, allora non è lineale, ergo si applica il teorema di rappresentazione. Questo è il tipo di poliedri a cui siamo abituati.

1.3 Teorema fondamentale della PL

Quanto riportare finora sulla geometria dei poliedri può essere usato per dimostrare il seguente teorema:

Teorema 1.6: Teorema fondamentale della PL

Sia dato un poliedro P rappresentato come:

$$P = \text{conv}(V) + \text{cono}(E), \quad V = \{v_1, ..., v_k\}, \quad E = \{e_1, ..., e_p\}$$

Se il problema $\mathcal{P}$ con regione ammissibile P ha valore ottimo finito, allora esiste $s \in \{1, ..., k\}$ tale che v_k è soluzione ottima di $\mathcal{P}$.

In sostanza, se un problema LP ha soluzione, essa si trova su uno dei vertici del poliedro della regione ammissibile.

Dimostrazione

Sia dato un problema LP $\mathcal{P}$ in forma primale standard, ergo posto come:

$$\begin{cases} \max c^T \cdot x \\ Ax \leq b \end{cases}$$

ergo con regione ammissibile rappresentata da un poliedro P.

Dal teorema della rappresentazione, possiamo esprimere il poliedro come:

$$P = \text{conv}(V) + \text{cono}(E), \quad V = \{v_1, ..., v_k\}, \quad E = \{e_1, ..., e_p\}$$

Combiniamo le due equazioni, ergo esprimiamo prima il punto $\bar{x}$ generico del poliedro applicando le definizioni di involucro convesso e conico:

$$\bar{x} \in P : P = \text{conv}(V) + \text{cono}(E), \quad \bar{x} = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i + \sum_{j=i}^{p} \mu_j e_j$$

ed esprimiamo quindi la funzione obiettivo come il prodotto scalare fra il vettore costo e il punto $\bar{x}$ del poliedro:

$$c^T \cdot \bar{x} = c^T \cdot \left(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i + \sum_{j=i}^{p} \mu_j e_j \right) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i c^T v_i + \sum_{j=i}^{p} \mu_j c^T e_j$$

A questo punto conviene chiarire su cosa significa che il problema ha valore ottimo finito. Il secondo termine è la combinazione conica della sommatoria dei vettori di recessione scalati dal vettore costo. Se almeno uno dei $c^T e_j > 0$, si avrà che portando $\mu_j \to +\infty$ la funzione avrà massimo $= \infty$. Geometricamente, questo significa che esiste una direzione illimitata del poliedro dove i vettori costo permettono alla funzione di crescere all'infinito.

Dunque sarà vero che $c^T e_j \leq 0 \quad \forall j \in \{1, ..., p\}$ se vogliamo che la funzione abbia valore ottimo finito.

Possiamo quindi usare questa ipotesi per dire:

$$c^T \cdot \bar{x} = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i c^T v_i + \sum_{j=i}^{p} \mu_j c^T e_j \leq \sum_{i=1}^{k} \lambda_i c^T v_i \leq \sum_{i=1}^{k} \max_{1 \leq i \leq p} \left(\lambda_i c^T v_i \right)$$

$$= \left(\max_{1 \leq i \leq p} c^T v_i \right) \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = \max_{1 \leq i \leq p} c^T v_i = c^T v_k$$

E quindi $\max_{x \in P} c^T \cdot x \leq c^T v_k$. A questo punto, visto che $\bar{x}$ è effettivamente un punto della regione ammissibile, sarà vero che:

$$c^T v_K \leq \max_{x \in P} c^T \cdot x$$

E dunque $\max_{x \in P} c^T \cdot x = c^T v_k$, C.V.D.