1 Lezione del 30-09-24

1.1 Calcolo dei vertici

Troviamo adesso il modo di calcolare i vertici del poliedro di un problema LP in forma primale standard.

Avevamo già dato la definizione di vertice come punto non ottenibile come combinazione convessa degli altri punti del poliedro (definizione 4.6). Questa definizione è corretta ma poco utile per il calcolo procedurale. Dimostriamo quindi un teorema utile.

Innanzitutto, assumiamo che in generale, per un problema LP $\mathcal{P}$ con n variabili decisionali e m vincoli, si ha che $n < m$. A questo punto, possiamo dire:

Definizione 1.1: Soluzione di base

Sia dato un problema LP $\mathcal{P}$ con $n < m$. Sia $B \subseteq \{1, ..., m\}$ un sottoinsieme di indici di riga tale che $\mathrm{card}(B) = n$. A questo punto, sia A_B la sottomatrice di A con con righe indicate da B, e b_B il sottovettore colonna di B con righe indicate da B, con det $\det A_B \neq 0$. Allora la soluzione di:

$$A_B x = b_B$$

è detta soluzione di base di $\mathcal{P}$.

da qui possiamo dimostrare il teorema:

Teorema 1.1: Caratterizzazione dei vertici

Un punto x di un poliedro P è un vertice di P se e solo se è una soluzione di base ammissibile, ovvero:

$$x \in \mathrm{vert}(P) \Leftrightarrow x \text{ è soluzione di base}$$

Riflettiamo un'attimo su questo risultato: se la definizione di vertice era effettivamente sufficiente a dichiarare *quali* erano i vertici, un teorema di caratterizzazione come quello sopra riportato ci fornisce una procedura per calcolarli tutti a partire da P. In questo, definizione e teorema di caratterizzazione sono effettivamente intercambiabili, ovvero:

$$\text{definizione} \Leftrightarrow \text{teorema di caratterizzazione}$$