1 Lezione del 24-09-24

1.1 Forma primale standard

Ciò che abbiamo formulato finora è un problema di programmazione lineare. Possiamo dire che la forma:

$$\begin{cases} \max(c^T \cdot x) \\ Ax \leq b \end{cases}$$

rappresenta un problema LP in forma **primale standard**, ricordando che c è il vettore dei coefficienti della funzione obiettivo, A la matrice dei coefficienti per ogni vincolo, e b il vettore dei termini noti per ogni vincolo.

Definizione 1.1: Forma primale standard

Un problema di programmazione lineare si dice in forma primale standard quando è espresso in forma:

$$\begin{cases} \max(c^T \cdot x) \\ Ax \leq b \\ \dots \end{cases}$$

Si adotta una forma primale standard in quanto si può trasformare ogni problema LP in una forma di questo tipo.

1.1.1 Normalizzazione di un problema LP

Un modo per portare un problema LP qualsiasi in forma primale standard è:

1. Si trasformano le disuguaglianze: $\geq \leftrightarrow \leq$
2. Si riscrivono le uguaglianze come coppie di diseguaglianze:

   $$f(x) = c \rightarrow \begin{cases} f(x) \leq c \\ f(x) \geq c \end{cases}$$

   da cui la (1):

   $$f(x) = c \rightarrow \begin{cases} f(x) \leq c \\ -f(x) \leq -c \end{cases}$$

3. Se il problema richiede il minimo, si nota che $\max(f) = -\min(-f)$, e sopratutto:

   $$\bar{x} \in \text{argmax}(f) \Leftrightarrow \bar{x} \in \text{argmin}(-f)$$

   con $\text{argmax}(f)$ e $\text{argmin}(-f)$ rispettivamente gli insiemi dei punti di massimo e minimo. Questo significa che posso semplicemente cambiare di segno la funzione obiettivo per trovare da massimi minimi, e viceversa.

Notiamo inoltre che, nel forma primale standard, si ha:

$$x \in R^n, \quad A \in R^{n \times m}, \quad b \in R^m, \quad c \in R^n$$

1.2 Proprietà generali di un problema LP

La regione ammissibile di un problema PL si chiama **poliedro**.

Definizione 1.2: Definizione algebrica di poliedro

Algebricamente, un poliedro non è altro che il sistema di disequazioni che definiscono una regione (possibilmente vuota, o infinita), come determinato dalle matrici A e b.

Questa regione in un problema LP prende il nome di regione ammissibile.

Definizione 1.3: Definizione geometrica di poliedro

Geometricamente, un poliedro è l'intersezione di un numero finito di semispazi lineari chiusi (semipiani in R^2).

Chiusi significa che nelle disequazioni che descrivono i vincoli compargono solo $\leq$ e non $<$, ergo la regione ammissibile contiene la sua frontiera.

Possiamo dimostrare 4 proprietà dei poliedri:

1. Un'osservazione fondamentale è la seguente:

   Teorema 1.1: Soluzione ottimale di un problema LP

   La soluzione ottimale di un problema LP è contenuta nella frontiera della regione ammissibile.

   Questo si può ricavare dai teoremi di Fermat e di Weierstrass, e dalla convessità della regione ammissibile. Inanzitutto, si è stabilito che la soluzione ottimale non è altro che il massimo o minimo assoluto all'interno della regione ammissibile del problema. Il gradiente della funzione obiettiva è $\neq 0$ in ogni suo punto (funzione lineare a gradiente costante). Da Fermat, i massimi e minimi hanno sempre gradiente 0, ergo massimi o minimi locali (che esistono per Weierstrass) possono trovarsi solo sulla frontiera. A questo punto, possiamo imporre la convessità per asserire che quei punti di massimo o minimo sono anche globali (non è possibile che si incontri un dato massimo, spostandosi dall'origine verso l'esterno, "prima" dello stesso massimo o uno minore su un punto più esterno della frontiera, se ha senso).

2. Prendiamo in esempio il poliedro dato da:

   $$\begin{cases} x_A > 0 \\ x_B > 0 \end{cases}$$

   o se vogliamo, in forma primale standard, dato dalle matrici A e b:

   $$A : \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad b : \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

   questo poliedro non è limitato nella direzione positiva, ergo può arrivare a valori di x_A e x_B che tendono a $+\infty$. Da ciò si dimostra:

Teorema 1.2: Limitatezza della regione ammissibile di un problema LP

Può accadere che un problema LP ammette soluzioni x tali che $x \to \pm\infty$, ovvero che il poliedro è illimitato..

In particolare, un poliedro limitato si dice **politopo**.

3. Notiamo poi che:

Teorema 1.3: Unicità della soluzione ottimale di un problema LP (1)

La soluzione di un problema LP può non essere unica.

Questo accade ad esempio quando la soluzione sta su un segmento di frontiera: a quel punto tutti i punti del segmento sono soluzione. Da questo segue che:

Teorema 1.4: Unicità della soluzione ottimale di un problema LP (2)

Se un problema LP ha almeno 2 soluzioni, allora ne ha infinite.

Ciò si può dimostrare come segue. Si riporta innanzitutto la notazione parametrica del segmento $z\bar{w}$, dati i due vettori di estremo z e w:

$$\lambda z + (1-\lambda)w, \quad \lambda \in [0,1]$$

A questo punto si pone che z e w sono entrambi soluzioni ottime, ergo:

$$\max(c^T \cdot x) = c^T z = c^T w = v$$

da cui si può dire che:

$$c^T (\lambda z + (1-\lambda)w) = \lambda c^T z + (1-\lambda)c^T w = \lambda v + (1-\lambda)v = v$$

Ovvero ogni punto sul segmento porta la funzione obiettiva a massimo assoluto, quindi è soluzione ottimale.

4. Infine, notiamo che:

Teorema 1.5:

Il poliedro della regione ammissible di un problema LP può essere vuoto, ergo $P = \emptyset$. In questo caso, si ha che $\max(c^T \cdot x) = -\infty$ e $\min(c^T \cdot x) = \infty$.

Un poliedro vuoto significa che i vincoli stessi vanno modificati. Questo solitamente si fa risovendo una versione semplificata del problema LP.

Si può fare un'altro esempio per sottolineare l'importanza del punto di massimo (o minimo), e non quel massimo (o minimo). Finché nella funzione obiettivo i coefficienti compargono nello stesso rapporto (ergo finché si scelgono vettori c linearmente dipendenti), il punto di massimo (o minimo) non cambia, per via della linearità (e si presume omogeneità) della funzione obiettiva stessa. Sarà solo il massimo (o minimo) a variare di un rapporto pari a quello di cui variano i coefficienti.

1.3 Gradiente e linee di isocosto

Si può dimostrare il seguente teorema:

Teorema 1.6: Gradiente della funzione obiettivo

Il gradiente di una funzione obiettivo definita come $f(x) = c^T \cdot x$ sulla base di un qualche vettore c è in ogni punto il vettore c stesso.

Da questo gradiente si possono ricavare le cosiddette linee di isocosto (in dimensioni > 2 sarebbero superfici), cioè linee a valore costante della funzione obiettivo.

Definizione 1.4: Linea di isocosto

Si definisce linea di isocosto di una funzione obiettivo con vettore c una retta (o superficie):

$$f(x) = c^T \cdot x = k$$

per un qualsiasi k costante.

1.4 Cono di competenza

Dovrebbe essere chiaro adesso che i punti di soluzione ottima stanno tutti su un segmento o su un punto della frontiera. Nel caso si abbia un vettore gradiente perpendicolare ad un segmento della frontiera, quel segmento sarà soluzione ottima. In caso contrario, spostandoci a destra avremo l'estremo destro del segmento, e spostandoci a sinistra viceversa, finché non si diventerà perpendicolari a qualche altro segmento di frontiera.

Il cono (in R^2, angolo) di valori possibili del gradiente che rendono un punto ottimale prende il nome di **cono di competenza**.

Definizione 1.5: Cono di competenza

Un cono di competenza di un punto x^* è il cono, ovvero l'insieme di vettori gradiente, tale per cui il punto x^* conserva l'ottimalità sulla funzione obiettivo coi vincoli imposti.