1 Lezione del 03-10-24

1.1 Teoria della dualità

Introduciamo adesso uno dei concetti più importanti della programmazione lineare. Avevamo posto problemi LP in forma primale standard come:

$$\begin{cases} \min(c^T \cdot x) \\ Ax \leq b \end{cases}$$

Ottimizzare questo problema significa partire dal basso e avvicinarsi verso un punto di massimo. Potremmo scegliere di seguire il percorso opposto: cercare di estrapolare un limite superiore per la soluzione dai vincoli, e minimizzarlo.

Per fare ciò introduciamo m variabili, una per ogni disequazione, che denoteremo come $y_1, ..., y_m$. Moltiplichiamo ogni disequazione per la y_i corrispondente a destra e a sinistra. Su un semplice problema $n, m = 2$, questo darà una forma del tipo:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \leq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \leq b_2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y_1 \cdot (a_{11}x_1 + a_{12}x_2) \leq b_1 y_1 \\ y_2 \cdot (a_{21}x_1 + a_{22}x_2) \leq b_2 y_2 \end{cases}$$

Se vincoliamo gli y_i in modo che ogni variabile decisionale x_i del sistema abbia un coefficiente del costo $\geq c_i$ corrispondente, otterremo una disequazione che ha a sinistra una situazione di valore uguale o addirittura migliore di quella data dalla funzione costo, e a destra un massimo (che era ciò che stavamo cercando, un limite superiore). Abbiamo quindi una serie di variabili vincolate:

$$\begin{cases} y_1 a_1 1 + y_2 a_2 1 \geq c_1 \\ y_1 a_1 2 + y_2 a_2 2 \geq c_2 \end{cases}$$

e una funzione da minimizzare:

$$\min(b_1 y_1 + b_2 y)$$

Cioè, ci siamo ricondotti ad un altro problema LP. Possiamo formalizzare questo risultato:

Definizione 1.1: Duale di un problema LP

Per un qualsiasi problema LP $\mathcal{P}$, detto primale, con $m \geq n$, possiamo definire il duale $\mathcal{D}$:

$$P : \begin{cases} \max(c^T \cdot x) \\ Ax \leq b \end{cases} \rightarrow D : \begin{cases} \min(b^T \cdot y) \\ A^T y = c \\ y \geq 0 \end{cases}$$

dove si nota $x \in \mathbb{R}^n$ e $y \in \mathbb{R}^m$.

Il duale viene posto in forma duale standard in quanto ciò che ci interessa è *stringere* il limite superiore fino al suo minimo, in un modo che fa combaciare perfettamente le variabili con il loro vettore costo, da cui le uguaglianze.

Si può dimostrare che l'operazione duale è ciclica: il duale del duale è nuovamente il primale, e così via.

1.1.1 Dualità debole

Visto che abbiamo costruito il duale per avere un limite superiore dei valori ottenuti dalla funzione obiettivo del primale, potremo dimostrare facilmente:

Teorema 1.1: Dualità debole

Se i poliedri P e il suo duale D non sono vuoti, allora:

$$c^T x \leq y^T b \quad \forall x \in P, \forall y \in D$$

Cioè il duale è sempre maggiore del primale.

1.1.2 Dualità forte

Idealmente, ciò che vorremmo è che primale e duale convergessero verso un punto comune, ergo l'ottimo di entrambi. Effettivamente, questo risultato è verificato:

Teorema 1.2: Dualità forte

Se i poliedri P e il suo duale D non sono vuoti, allora:

$$-\infty \leq \min_{y \in D} b^T y = \max_{x \in P} c^T x \leq +\infty$$

Il teorema della dualità forte afferma che, se entrambi i poliedri (primale e duale) sono non vuoti, allora condividono l'ottimo, e anzi, che due soluzioni nel primale e nel duale sono ottime solo se hanno lo stesso valore. Se invece solo il primale (solo il duale) è vuoto, si ha che entrambi condividono ottimo $-\infty$ (∞). Quando entrambi sono vuoti non si ha soluzione condivisa.

1.1.3 Scarti complementari

Si può dimostrare il seguente teorema:

Teorema 1.3: Scarti complementari

Se le soluzioni x e y dei problemi primale e duale $\mathcal{P}$ e $\mathcal{D}$ sono entrambe ottime, allora vale:

$$y^T (b - Ax) = 0$$

Questo si ricava dal fatto che, per la dualità forte, si ha che:

$$c^T x = y^T Ax = y^T b \Rightarrow y^T (b - Ax) = 0$$

Il significato del teorema è che, se una disequazione nel primale è *stretta*, allora la corrispondente variabile nel duale è $\neq 0$, e viceversa.

1.1.4 Soluzioni di base

Avevamo dato una definizione di soluzione di base per problemi LP in forma sia primale che duale. Possiamo dimostrare che non solo questa nozione esiste su entrambe le formule, ma è analoga su coppie primale / duale.

Avevamo posto che la formazione di una certa base $B \in \{1, ..., m\}$ per ricavare soluzioni di base. Per il primale, questo significa partizionare la matrice e i termini noti:

$$A = \begin{pmatrix} A_B \\ \overline{A_N} \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_A \\ \overline{b_N} \end{pmatrix}$$

mentre per il duale, significherà partizionare le variabili introdotte:

$$y = \begin{pmatrix} y_B \\ \overline{y_N} \end{pmatrix}$$

noto il numero di $y1, ..., y_m$ uguale a m.

Questo significa che possiamo trovare due soluzioni di base corrispondenti per un'unica base su primale e duale. Queste sono:

- Soluzione di base primale: $x = A_B^{-1} b_B$;
- Soluzione di base duale: $y_B^T = c^T A_B^- 1, \quad y_N = 0$;

Si dice che le soluzioni di base sono **complementari**.

Dimostrazione Vogliamo che $y^T(b - Ax)$ sia $= 0$ soddisfatte le condizioni di base. Applichiamo quindi la base:

$$y^T(b - Ax) = \left(y_B^T, y_N^T\right) \begin{pmatrix} b_B - A_B x \\ b_N - A_N x \end{pmatrix} = \left(c_T A_B^{-1}, 0\right) \begin{pmatrix} b_B - A_B A_B^{-1} b_B \\ b_N - A_N A_B^{-1} b_B \end{pmatrix}$$

$$= \left(c_T A_B^{-1}, 0\right) \begin{pmatrix} 0 \\ b_N - A_N A_B^{-1} b_B \end{pmatrix} = 0$$

Questo nome non è a caso, in quanto si può dimostrare le due soluzioni sono in scarti complementari. Da questo risultato, si ha che se entrambe le soluzioni sono ammissibili, cioé:

- La primale è ammissibile:
$$\forall i \in N \text{ si ha } A_i x \leq b_i$$
ergo i vincoli sono soddisfatti;
- La duale è ammissibile:
$$y \geq 0$$

questo è condizione sufficiente perche la soluzione sia ottima, e dagli scorsi corollari, sia l'ottima sia del primale che del duale.

Formalizziamo quanto detto in un teorema:

Teorema 1.4: Condizioni di ottimalità di soluzione di base

Dato un vertice del primale, ottenuto da una certa base, si può costruire il complemento duale sulla stessa base. Se entrambi i vertici ottenuti sono ammissibili, allora sono uguali e ottimi dei rispettivi problemi.