

Algoritmi e Strutture Dati

Luca Seggiani

6 aprile 2024

1 Introduzione agli algoritmi

Un'algoritmo non è altro che un procedimento che descrive una sequenza di passi ben definiti atti a risolvere un problema, o più schematicamente:

- Insieme finito di istruzioni
- Accetta un input e restituisce un output
- Ogni istruzione deve essere:
 - ben definita
 - eseguibile in tempo finito da un'agente di calcolo
- Può eventualmente usufruire di una memoria per stadi intermedi.

noi tratteremo di algoritmi aritmetici. Alcuni esempi di tali algoritmi possono essere;

- L'algoritmo di Euclide per il calcolo del MCD di due numeri
- Il setaccio di Eratostene per il calcolo dei primi numeri primi

Si può dire che l'algoritmo è l'essenza computazionale di un dato programma, notando però che:

Algoritmo \neq Programma

in quanto l'algoritmo è slegato dal linguaggio di implementazione, la macchina e l'ambiente su cui gira, mentre il programma equivale al suo codice ormai completamente definito.

2 Esempi basilari di algoritmi

Si riportano due semplici algoritmi ed alcune loro caratteristiche e possibili ottimizzazioni.

Algoritmo di Euclide

Nella sua definizione più semplice, l'algoritmo di Euclide si basa sul teorema: *"Il MCD fra 2 numeri è il MCD del più piccolo fra i due e la loro differenza"* e si implementa, in pseudocodice C++, nella forma:

```
1 int gcd(int a, int b) {
2     while(a != b) {
3         if(a > b) a -= b;
4         else b -= a;
5     }
6     return a;
7 }
```

una chiara ottimizzazione possibile è il passaggio dall'operazione di sottrazione a quella di sottrazione ripetuta (divisione), nel seguente modo:

```
1 int betterGcd(int a, int b) {
2     while(b > 0) {
3         int temp = b;
4         b = a % b;
5         a = temp;
6     }
7     return a;
8 }
```

si nota che la complessità dell'algoritmo è di $O(n)$.

Setaccio di Eratostene

Il setaccio di Eratostene è un algoritmo che ci permette di trovare tutti i numeri primi fra un insieme dei primi n naturali. Un approccio naive potrebbe essere quello di dividere ogni numero per ogni suo predecessore, ottenendo una complessità nel caso peggiore di $O(n^2)$. Un'alternativa più efficiente di questo algoritmo potrebbe considerare una tabella con i primi n naturali, e successivamente cancellare ogni multiplo di ogni numero primo trovato finora. raggiunto un numero il cui quadrato è maggiore di n , l'algoritmo si arresta e i numeri rimasti sono i primi cercati. In pseudocodice:

```
1 void sieve(int n) {
2     bool num[n];
3
4     //preparazione array
5     num[0] = false; num[1] = true;
6     for(int i = 2; i < n; i++) {
7         num[i] = true;
```

```

8   }
9
10  int i = 2;
11  while(i*i < n) {
12      while(num[i] == false) i++;
13
14      int m = 2;
15      while(i * m < n) {
16          num[i * m] = false;
17          m++;
18      }
19      i++;
20  }
21
22  for(int i = 0; i < n; i++) {
23      if(num[i] == true) {
24          cout << i << " ";
25      }
26  }
27 }

```

che ottiene una complessità temporale di $O(n \log \log n)$.

3 Nozioni sugli algoritmi

Definito un determinato problema, si può utilizzare un'algoritmo su una sua certa istanza, analizzando quindi le seguenti caratteristiche:

- Problema: il problema da risolvere (e.g. trovare i primi n primi)
- Dimensione dell'istanza: la dimensione della mole di dati su cui dovrò lavorare nell'istanza attuale (e.g. il valore di n)
- Modello di calcolo: un modello che associa ad ogni operazione effettuata dall'algoritmo un certo costo per il mio ambiente
- Correttezza: se il mio algoritmo ottiene effettivamente la risposta giusta!

oltre alle caratteristiche riportate, è poi fondamentale la valutazione della

4 Complessità

La complessità di un'algoritmo è una funzione che associa alla dimensione del problema il costo della sua risoluzione, sia esso in termini di memoria

o tempo (in questo caso, *complessità temporale*). La dimensione dell'istanza dipende dai suoi stessi dati, ed è in generale opportuno determinare, su una istanza generica:

- Caso peggiore (worst-case): scenario dove l'algoritmo ottiene il costo di esecuzione maggiore
- Caso migliore (best-case): scenario dove l'algoritmo ottiene il costo di esecuzione minore
- Caso medio (average-case): scenario medio di esecuzione dell'algoritmo, necessita di un'analisi statistica dei dati delle istanze in entrata.

Si ricorda che l'efficienza di un'algoritmo dipende solo dal modello di calcolo adottato, ed è slegata dall'efficienza di un qualsiasi ambiente di esecuzione.

Posso ad esempio definire, per un determinato algoritmo P , la funzione complessità:

$$T_P(n)$$

che determina la complessità temporale di P al variare della dimensione d'istanza n . Prendiamo in esempio un semplice algoritmo che cerca il massimo di un vettore:

```
1 int max(int vett[], int n) {  
2     int m = a[0];  
3     for(int i = 0; i < n; i++) {  
4         if(m > a[i]) m = a[i];  
5     }  
6     return m;  
7 }
```

possiamo adesso definire un modello di calcolo molto semplice, che associa il costo di 1 ad ogni operazione di assegnamento o confronto. Tenendo conto dell'assegnamento iniziale, quello dell'istruzione di ritorno, e gli assegnamenti e confronti eseguiti per l'inizializzazione e l'esecuzione del ciclo for, otteniamo:

$$1 + 1 + 4(n - 1) + 1 + 1 = 4n$$

ovvero la nostra funzione complessità dell'algoritmo. Per poter trattare di complessità senza però perdersi nelle specifiche, visto che l'unico fattore di interesse è la scalabilità dell'algoritmo, occorre definire la

5 Notazione O grande

Definiamo la notazione $O(f(n))$ nel seguente modo:

$$f(n) \in O(g(n)) \Leftrightarrow \exists n_0, \quad c > 0 \quad \text{t.c.} \quad \forall n > n_0 : f(n) \leq cg(n)$$

si definisce poi una serie di regole per l'utilizzo di tale notazione:

- fattori costanti: ammesso una certa costante k , si ha:

$$O(f(n)) = O(kf(n))$$

- somma:

$$f(n) \in O(g(n)) \Rightarrow f(n) + g(n) \in O(g(n))$$

- prodotto:

$$f(n) \in O(f_1(n)), \quad g(n) \in O(g_1(n)) \Rightarrow f(n)g(n) \in O(f_1(n)g_1(n))$$

- transitività:

$$f(n) \in O(g(n)) \wedge g(n) \in O(h(n)) \Rightarrow f(n) \in O(h(n))$$

- costanti:

$$\forall k, \quad k \in O(1)$$

- potenze:

$$m \leq p, \quad n^m \in O(n^p)$$

- polinomi:

$$p(x) \in R[x], \quad \deg(p) = m, \quad p(x) \in O(n^m)$$

si nota che esistono funzioni tra di loro incommensurabili. Inoltre, per qualsiasi k :

$$\forall k, \quad n^k \in O(a^n), \quad \forall n > 1$$

ovvero qualsiasi polinomiale è sempre migliore di ogni esponenziale.

Per continuare la discussione della complessità degli algoritmi, occorre poi definire anche la:

Notazione Ω grande

La notazione Ω grande definisce effettivamente l'opposto della O grande:

$$f(n) \in \Omega(g(n)) \Leftrightarrow \exists n_0, \quad c > 0 \quad \text{t.c.} \quad \forall n > n_0 : f(n) \geq cg(n)$$

Notazione Θ grande

La notazione Θ grande correla due funzioni che condividono lo stesso ordine di complessità:

$$f(n) \in \Theta(g(n)) \Leftrightarrow f(n) \in O(g(n)) \wedge f(n) \in \Omega(g(n))$$

oppure ancora:

$$f(n) \in \Theta(g(n)) \Leftrightarrow \exists n_0 \quad \exists c_1, c_2 \quad \text{t.c.} \quad \forall n \geq n_0 : c_1 g(n) \leq f(n) \leq c_2 g(n)$$

per la notazione Ω e Θ grande esistono inoltre le regole:

- antisimmetria O grande / Ω grande:

$$f(n) \in O(g(n)) \Leftrightarrow g(n) \in \Omega(f(n))$$

- simmetria Θ grande:

$$f(n) \in \Theta(g(n)) \Leftrightarrow g(n) \in \Theta(f(n))$$

- per Θ grande e Ω grande valgono le regole definite per O grande, ovvero dei fattori costanti, somma e prodotto, transitività, potenze e polinomi. Si nota soprattutto che per ogni polinomio:

$$p(x) \in R[x], \quad \deg(p) = m, \quad p(x) \in \Theta(n)$$

in una nota un'attimo più formale, si può affermare che le notazioni O grande, Ω grande e Θ grande stabiliscono sull'insieme delle funzioni naturali $f(n)$ delle classi di equivalenza, rispettando effettivamente le tre proprietà di riflessività, simmetria e transitività. Inoltre, si può dire che l'appartenenza ad una classe di complessità stabilisce fra funzioni una relazione d'ordinamento, nell'ordine:

$$O(1) < O(\log n) < O(n) < O(n \log n) < O(n^m) < O(m^n) < O(n^n)$$

Si ricorda inoltre che queste notazioni considerano solamente l'andamento *asintotico* di una funzione, in quanto tutto ciò che accade prima di n_0 è effettivamente irrilevante all'analisi che vogliamo fare (almeno dal punto di vista della scalabilità).

6 Complessità degli algoritmi iterativi

Si presenta ora un semplice modello di calcolo per programmi scritti in pseudolinguaggio C++, compatibile con i tre paradigmi della programmazione strutturata (esecuzione sequenziale, condizionale ed iterativa).

Quello che vogliamo definire è una funzione del tipo:

$$C[\text{costrutti del linguaggio}] \rightarrow \text{classi di complessità}$$

useremo inoltre le abbreviazioni:

V: costanti, I: variabili, E: espressioni, C: comandi

iniziamo con semplici operazioni di assegnamento e lettura variabili, valutazioni di espressioni, selezione da vettori nonché l'istruzione di salto *return*:

$$C[V] = C[I] = O(1)$$

$$C[E_1 \circ E_2] = C[E_1] + C[E_2]$$

$$C[I[]] = C[E]$$

$$C[I = E] = C[E]$$

$$C[I[E_1] = E_2] = C[E_1] + C[E_2]$$

$$C[\text{return } E] = C[E]$$

si definisce poi per l'esecuzione sequenziale:

$$C[C_1, \dots, C_n] = C[C_1] + \dots + C[C_n]$$

per l'esecuzione condizionale:

$$C[\text{if}(E)C] = C[E] + C[C]$$

$$C[\text{if}(E) C_1 \text{ else } C_2] = C[E] + \max(C[C_1], C[C_2])$$

e per l'esecuzione iterativa ($O(g(n))$ è il numero di iterazioni in funzione della dimensione d'istanza):

$$C[\text{for}(E_1, E_2, E_3)C] = C[E_1] + C[E_2] + (C[C] + C[E_2] + C[E_3]) \cdot O(g(n))$$

$$C[\text{while}(E)C] = C[E] + (C[C] + C[E]) \cdot O(g(n))$$

si definisce inoltre per la chiamata di funzione:

$$C[F(E_1, \dots, E_n)] = C[E_1] + C[E_n] + C[C \dots C]$$

7 Caratterizzazione di caso peggiore, migliore e medio

Definiamo matematicamente le nozioni di caso peggiore, migliore e medio sull'insieme di istanze In :

- Caso peggiore:

$$T_{worst} = \max_{In}(\text{tempo}(I))$$

- Caso migliore:

$$T_{best} = \min_{In}(\text{tempo}(I))$$

- Caso medio (la funzione $P(I)$ restituisce la probabilit  di verificarsi di una certa istanza):

$$T_{average} = \sum_{In} (\text{tempo}(I) \cdot P(I)), \quad P(I) \in [0, 1]$$

da cui possiamo ovviamente dire:

$$T_{worst} \leq T_{average} \leq T_{best}$$

8 Complessit  di algoritmi di uso comune

Iniziamo la discussione di alcuni algoritmi di ordinamento di vettori in loco (in-place), basati sul confronto, ammettendo l'accesso diretto in memoria in tempo $O(1)$. Definiamo innanzitutto una funzione di scambio con ausilio di variabile temporanea:

```
1 void swap(int& a, int& b) {  
2     int temp = a;  
3     a = b;  
4     b = temp;  
5 }
```

Selection sort

Il selection sort lavora in maniera incrementale su n elementi, selezionando iterativamente l' i -esimo elemento e confrontandolo con gli $n-i$ elementi successivi in modo da scambiarlo con il minimo trovato. Dopo $n-1$ iterazioni il vettore risulta ordinato. In pseudocodice:

```
1 void selectionSort(int vett[], int n) {  
2     for(int i = 0; i < n - 1; i++) {  
3         int m = i;
```



```

4     for(int j = i + 1; j < n; j++) {
5         if(vett[j] < vett[m]) m = j;
6     }
7     scambia(vett[m], vett[i]);
8 }
9 }

```

il selection sort presenta caratteristiche identiche nel suo caso migliore e peggiore, effettuando sempre le stesse operazioni su qualsiasi tipo di istanza. In particolare, la complessità dipende dal numero di confronti:

$$(n-1) + (n-2) + (n-3) + \dots + 2 + 1 = \sum_{i=1}^n i = \frac{n(n-1)}{2} \in O(n^2)$$

e il numero di scambi, che è $O(n)$. Alternativa al selection sort può essere il

Bubble sort

Il bubble sort (algoritmo di ordinamento a bolle) non adotta un'approccio incrementale, ma si limita a scambiare da destra verso sinistra le coppie adiacenti non ordinate $n-1$ volte, finché il vettore non risulta ordinato. In pseudocodice:

```

1 void bubbleSort(int vett[], int n) {
2     for(int i = 0; i < n - 1; i++) {
3         for(int j = n-1; j > i; j--) {
4             if(vett[j] < vett[j - 1]) scambia(vett[j], vett[j - 1])
5             ;
6         }
7     }
8 }

```

a differenza del selection sort, il bubble sort un numero sia di confronti che di scambi pari a $O(n^2)$. Questo apparente difetto è però compensato da una possibile ottimizzazione disponibile in fase di scorrimento del vettore: basterà infatti controllare eventuali scorrimenti senza scambi per poter ottenere una complessità temporale in caso migliore di $O(n)$ (caso di scorrimento singolo al primo ciclo). In pseudocodice:

```

1 void betterBubbleSort(int vett[], int n) {
2     for(int i = 0; i < n - 1; i++) {
3         bool q = false;
4         for(int j = n-1; j > i; j--) {
5             if(vett[j] < vett[j - 1]) {
6                 scambia(vett[j], vett[j - 1]);
7                 q = true;
8             }
9         }
10        if(q == false) {

```

```

11     break;
12 }
13 }
14 }

```

si può in generale applicare i limiti asintotici sia al costo di un singolo algoritmo che alla complessità di un intero programma. Possiamo ad esempio definire, su un qualsiasi problema:

- Limite asintotico superiore: il minimo ordine di complessità superiore a tutti gli ordini di complessità degli algoritmi atti a risolvere il problema (in sostanza caso peggiore)
- Limite asintotico inferiore il massimo ordine di complessità inferiore a tutti gli ordini di complessità degli algoritmi atti a risolvere il problema, quindi il miglior caso possibile per un qualsiasi algoritmo.

Ad esempio, per quanto riguarda l'ordinamento di vettori monodimensionali, il limite asintotico inferiore è pari a $O(n \log n)$.

Ricerca lineare L'algoritmo di ricerca lineare di una certa chiave x su un certo vettore scansiona ogni singolo elemento confrontandolo alla suddetta, ottenendo complessità (appunto) lineare $O(n)$. In pseudocodice:

```

1 int linearSearch(int vett[], int n, int x) {
2     int b = 0;
3     for(int i = 1; i < n; i++) {
4         if(vett[i] == x) b = 1;
5         return b;
6     }
7 }

```

si nota che il caso migliore (quello in cui il primo elemento è quello cercato) ha complessità $O(1)$.

Divisioni ripetute

Si riporta un algoritmo che divide un certo numero per 2 ciclicamente fino ad azzerarlo (ovviamente sul gruppo degli interi), magari per volerlo convertire in base 2:

```

1 int div_2(int n) {
2     int i = 0;
3     while(n > i) {
4         n = \frac{n}{2}; i++;
5     }
6     return i;
7 }

```

possiamo quindi estrapolare una misura della complessità sul caso peggiore (quello in cui n è potenza di 2):

$$n = 2^m \Leftrightarrow m = \log_2 n \rightarrow O(\log(n))$$

Ricerca binaria

L'algoritmo di ricerca binaria (o ricerca dicotomica) effettua la stessa operazione della ricerca lineare, ma parte dall'assunto che il vettore sia già stato ordinato per approfittare di una notevole ottimizzazione, che porta la complessità temporale a $O(\log(n))$. L'ottimizzazione usata si basa sul confronto della chiave con l'elemento centrale del vettore (e non di ogni suo elemento), che permette di dimezzare ciclicamente il vettore ottenendo quindi una riduzione a velocità logaritmica della dimensione d'istanza. In pseudocodice l'implementazione ricorsiva:

```

1 int binarySearch(int vett, int min, int max, int x) {
2     if(max < min) return -1;
3     int med = (min + max) / 2;
4     if(vett[med] == key) {
5         return med;
6     }
7     if(vett[med] > key) {
8         return binarySearch(0, med - 1, key, dest);
9     } else {
10        return binarySearch(med + 1, max, key, dest);
11    }
12 }
```

Si nota inoltre l'implementazione (probabilmente più efficiente) iterativa:

```

1 int binSearch_it(int A[], int x, int l, int r) {
2     int m = (l + r) / 2;
3     while(A[m] != x) {
4         if(x < A[m])
5             r = m - 1;
6         else // x > A[m]
7             l = m + 1;
8         if(l > r)
9             return -1;
10        m = (l + r) / 2;
11    }
12    return m;
13 }
```

analizzando formalmente la complessità, otteniamo che il numero di passi totale è:

$$n_{passi} = \frac{n}{2^i}, \quad O(\log(n))$$

merita attenzione il fatto che l'ordinamento del vettore prima della ricerca può portare a complessità complessive (bel pasticcio) addirittura di $O(n^2)$, e si dovrebbe quindi valutare con attenzione le casistiche di utilizzo.

9 Introduzione ai programmi ricorsivi

Iniziamo con l'esempio classico del calcolo del fattoriale. Fissato $0! = 1$, la definizione iterativa è:

$$n! = 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times n \quad n > 0$$

un'altra possibile definizione, forse più naturale, è quella ricorsiva:

$$n! = n * (n - 1)!, \quad n > 0$$

Vediamo i due approcci in pseudocodice:

```
1  int fact(int n) {
2      if(n == 0)
3          return 1;
4      int a = 1;
5      for(int i = 1; i <= n; i++)
6          a = a*i;
7      return a;
8  }
```

```
1  int factRic(int n) {
2      if(n == 0)
3          return 1;
4      return n * factRic(n-1);
5  }
```

possiamo dare definizioni ricorsive anche di algoritmi più semplici, come ad esempio la moltiplicazione:

```
1  int mult(int x, int y) {
2      if(x == 0)
3          return 0;
4      return y + mult(x - 1, y);
5  }
```

proviamo a fare l'unrolling ("srotolamento") di questo algoritmo: poniamo una condizione di partenza $\text{mult}(3,4)$.

```
1  mult(3,4)
2      4 + mult(2, 4)
3          4 + mult(1, 4)
4              4 + mult(0, 4) -- fine ricorsione
5  -> 3 * 4 = 12
```

prendiamo l'algoritmo per il calcolo di un numero pari:

```
1 int pari(int x) {  
2     if(x == 0) return 1;  
3     if(x == 1) return 2;  
4     return pari(x-2);  
5 }
```

oppure l'algoritmo di Euclide nella sua formulazione ricorsiva:

```
1 int MCD(int x, int y) {  
2     if(x == y) return x;  
3     if(x < y) return MCD(x, y - x);  
4     return MCD(x - y, y);  
5 }
```

chiararamente, tutti gli esempi precedentemente riportati rispettano una serie di regole:

- Regola 1: individuare il caso base in cui la funzione è immediatamente definita
- Regola 2: effettuare le chiamate ricorsive su un sottinsieme strettamente minore dei dati
- Regola 3: assicurarsi che la serie di chiamate ricorsive decade sempre su un caso base (in modo da terminare la ricorsione, che in caso contrario proseguirebbe all'infinito).

vediamo un'esempio di funzioni errate, cioè che non rispettano queste regole:

```
1 int pari_errata(int x) {  
2     if(x == 0) return 1;  
3     //fa che non sia dispari! regole 1 e 2 violate!  
4     return pari_errata(x - 2);  
5 }
```

```
1 int MCD_errata(int x, int y) {  
2     if(x == y) return x;  
3     if(x < y) return MCD_errata(x, y-x);  
4     return MCD_errata(x, y);  
5     //nessuna restrizione del dominio: regola 3 violata!  
6 }
```

10 Programmi ricorsivi su liste

Diamo una definizione di lista:

- Una sequenza vuota è una lista
- un elemento seguito da una lista è una lista

diamo una definizione della struttura Elem*, nodo della mia lista, in pseudocodice C++:

```
1 struct Elem {  
2     int inf;  
3     Elem* next;  
4 }
```

vediamo un algoritmo per calcolare la lunghezza di una lista:

```
1 int length(Elem* p) {  
2     if(p == NULL) return 0;  
3     return 1 + length(p->next);  
4 }
```

oppure un'algoritmo che restituisce il numero di volte che un nodo x compare in una lista:

```
1 int howMany(Elem* p, int x) {  
2     if(p == NULL) return 0;  
3     return (p->inf == x) + howMany(p->next, x);  
4 }
```

altri algoritmi definiti sulle liste possono essere:

```
1 int belongs(Elem* l, int x) {  
2     if(l == NULL) return 0;  
3     if(l->inf == x) return 1;  
4     return belongs(l->next, x);  
5 }
```

```
1 void tailDelete(Elem*& l) { //passaggio per riferimento  
2     if(l == NULL) return;  
3     if(l->next == NULL) {  
4         delete l;  
5         l = NULL;  
6     }  
7     else tailDelete(l->next);  
8 }
```

```
1 void tailInsert(Elem*& l, int x) {  
2     if(l == NULL) {  
3         l = new Elem;
```

```

4     l->inf = x;
5     l->next = NULL;
6 }
7 else tailInsert(l->next, x);
8 }

1 void append_1(Elem*& l1, Elem* l2) {
2     if(l1 == NULL) l1 = l2;
3     else append(l1->next, l2);
4 }

1 Elem* append_2(Elem* l1, Elem* l2) {
2     if(l1 == NULL)
3         return l2;
4     l1->next = append(l1->next, l2);
5     return l1;
6 }

```

11 Induzione

Riportiamo brevemente la definizione di induzione sui numeri naturali:

Sia una certa proprietà P vera per un naturale n_0 . Se è vero che $P(n) \Rightarrow P(n+1)$, allora P è vera per qualsiasi naturale $n > n_0$.

L'induzione può essere usata ad esempio per dimostrare che la somma dei primi n naturali è:

$$\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$$

introduciamo anche l'induzione completa:

Se P vale per ogni naturale $m \leq n$, e per ogni n vale per $n+1$, allora P vale per ogni naturale

e l'induzione ben fondata:

Sia S un certo insieme ben ordinato. Se la proprietà P vale per i minimali di S , e per ogni elemento $E \in S$ P è vera su E se è vera su ogni elemento minore di E , allora P vale su tutto l'insieme S .

(si noti che il totale abuso di notazione $P(x)$ indica P vera su x).

12 Complessità dei programmi ricorsivi

Facciamo il quadro della situazione, applicando quello che abbiamo visto finora e quello che avevamo già definito sugli algoritmi iterativi. Consideriamo il seguente algoritmo per il calcolo di $n!$:

```
1 int fact(int x) {  
2     if(x == 0) return 1;  
3     else return x * fact(x - 1);  
4 }
```

l'algoritmo non fa altro che definire la relazione di ricorrenza:

$$T(0) = a, \quad T(n) = b + T(n - 1)$$

andando a svolgere la serie di operazioni definite dall'algoritmo avremo:

$$T(0) = a$$

$$T(1) = b + a$$

$$T(2) = b + b + a = 2b + a$$

$$T(3) = b + 2b + a = 3b + a$$

...

$$T(n) = nb + a$$

l'ultima funzione, $T(n)$, non dipende da alcun passo ricorsivo e fornisce un'interpretazione della complessità dell'algoritmo (che è $O(n)$).

Selection sort

Applichiamo quanto visto finora ad un programma più complicato: il selection sort, formulato ricorsivamente.

```
1 void r_selectionSort(int* A, int m, int i = 0) {  
2     if(i == m - 1) return;  
3     int min = i;  
4     for(int j = i + 1; j < m; j++)  
5         if(A[j] < A[min]) min = j;  
6     exchange(A[i], A[min]);  
7     r_selectionSort(A, m, i + 1);  
8 }
```

la relazione di ricorrenza in questo caso sarà:

$$T(1) = a, \quad T(n) = bn + T(n - 1)$$

che potremo svolgere come:

$$T(1) = a$$

$$T(2) = 2b + a$$

$$T(3) = 3b + 2b + a$$

...

$$T(n) = (n + n - 1 + n - 2 + \dots + 2)b + a = \left(\frac{n(n+1)}{2} - 1\right)b + a$$

13 Introduzione al quicksort

L'algoritmo quicksort è un'algoritmo di ordinamento particolarmente efficiente, schematicamente così definito:

- Scelta di un perno
- Divisione dell'array in 2 sottoinsiemi: elementi minori del perno ed elementi maggiori del perno
- Esegui la stessa operazione, ricorsivamente, sui 2 sottoinsiemi finché non ne incontri uno di 2 elementi.

nel dettaglio, la divisione in due sottoinsiemi dell'array avviene mediante scambi fra elementi utilizzando due cursori (siano s e d), inizialmente posti, rispettivamente, ad inf e sup. Da qui in poi:

- Finché $s < d$,
porta avanti s finché $A[s]$ è minore del perno;
porta indietro d fino a che $A[d]$ è maggiore del perno;
scambia $A[s]$ e $A[d]$; incrementa S e decrementa D.
- Se $inf < d$ ripeti il quicksort sulla parte da inf a d.
- Se $s < sup$ ripeti il quickosrt sulla parte da s a sup.

Vediamo infine lo pseudocodice:

```
1 void quickSort(int A[], int inf = 0, int sup = n - 1) {  
2     int perno = A[(inf + sup) / 2]; //prendo l'elemento  
   centrale come perno  
3     int s = inf, d = sup;  
4     while(s < d) {  
5         while(A[s] < perno) s++;  
6         while(A[d] > perno) d--;
```

```

7     if(s > d) break;
8     exchange(A[s], A[d]);
9     s++;
10    d--;
11 }
12
13 if(inf < d)
14     quickSort(A, inf, d);
15 if(s < sup)
16     quickSort(A, s, sup);
17 }

```

14 Algoritmo Quicksort

Riprendiamo la trattazione dell'algoritmo quicksort (codice negli appunti presi il 5 marzo 2024). Possiamo innanzitutto dire che la complessità della fase non ricorsiva dell'algoritmo (scelta del perno e successiva divisione in parti del vettore) non richiede mai più passaggi di quanti sono gli elementi del vettore ed è quindi di $O(n)$. Dovrò però a questo punto considerare le due possibili chiamate ricorsive successive. Posso definire la seguente relazione di ricorrenza:

$$T(1) = a$$

$$T(n) = bn + T(k) + T(n - k)$$

notiamo come la posizione del perno k sia fondamentale all'efficienza dell'algoritmo. Nel caso di un perno estremamente sbilanciato, e.g. $k = 1$, avremo:

$$T(1) = a$$

$$T(n) = bn + T(n - 1)$$

posto invece (come vorremmo) $k = \frac{n}{2}$, avremo:

$$T(1) = a$$

$$T(n) = bn + 2T\left(\frac{n}{2}\right)$$

che diventerà:

$$T(n) = (n \log n)b + na$$

potremo a questo punto dire che la complessità dell'algoritmo è di $O(n^2)$ nel suo caso peggiore, ma di $O(n \log n)$ nel suo caso medio, cosa che lo rende molto più efficiente di altri algoritmi di ordinamento sui vettori.

15 Torre di Hanoi

La formulazione del problema della torre di Hanoi prevede 3 paletti, con 3 dischetti di diametro decrescente, impilati sul primo paletto. A questo punto si chiede di portare i 3 dischetti, nello stesso ordine, sull'ultimo paletto, con la limitazione fondamentale che non è possibile spostare più di un cerchio alla volta, né di mettere un cerchio più grande su uno più piccolo. Chiamati i 3 paletti A, B e C, definiamo una funzione "trasferisci" che sposta n cerchi dal paletto A al paletto C:

```
trasferisci una torre di n cerchi da A a C
    se n = 1
        sposta il cerchio da A a C
    altrimenti
        trasferisci la torre degli n - 1 cerchi più piccoli da A a B usando C come
            paletto ausiliario
        sposta il cerchio più grande da A a C
        trasferisci la torre degli n-1 cerchi più piccoli da B a C usando A come
            paletto ausiliario
```

in codice, sfruttando la ricorsione:

```
1 void hanoi(int n, pal A, pal B, pal C) {
2     if(n == 1)
3         sposta(A, C);
4     else {
5         hanoi(n - 1, A, C, B);
6         sposta(A, C);
7         hanoi(n-1, B, A, C);
8     }
9 }
```

da cui la relazione di ricorrenza:

$$T(1) = a$$

$$T(n) = b + 2T(n - 1)$$

che potremo sviluppare in:

$$T(n) = (2^{(n-1)} - 1)b + 2^{(n-1)}a$$

ovvero un $T(n)$ di $O(2^n)$!

16 Altri algoritmi ricorsivi

Ricerca lineare ricorsiva

Poniamo un algoritmo ricorsivo che implementi la ricerca lineare:

```
1 int RlinearSearch (int A[], int x, int m, int i = 0) {
2     if(i == m) return 0;
3     if(A[i] == x) return 1;
4     return RlinearSearch(A, x, m, i+1);
5 }
```

dove la chiamata ricorsiva è fatta su una dimensione di istanza di $n - 1$. La relazione per ricorrenza di questo algoritmo si risolve e decade in una complessità di $O(n)$.

Ricerca binaria ricorsiva

Ripetiamo quanto fatto prima sull'algoritmo di ricerca binaria:

```
1 int binSearch(int A[], int x, int i = 0, int j = m - 1) {
2     if(i > j) return 0;
3     int k = (i + j) / 2;
4     if (x == A[k]) return 1;
5     if (x < A[k])
6         return binSearch(A, x, i, k - 1);
7     else
8         return binSearech(A, x, k + 1, j);
9 }
```

notiamo che le ultime due chiamate ricorsive, simili a quelle del quicksort, sono in questo caso mutualmente esclusive, e la complessità dell'algoritmo decade quindi in $O(\log n)$. Ricordiamo che la ricerca binaria vale solo su vettori ordinati.

Ricerca ricorsiva

Esiste un algoritmo simile alla ricerca binaria ma applicabile a vettori non ordinati:

```
1 int Search(int A[], int x, int i = 0, int j = n - 1) {
2     if(i > j) return 0;
3     int k = (i + j) / 2;
4     if(x == A[k])
5         return 1;
6     return Search(A, x, i, k - 1) || Search(A, x, k + 1, j);
7 }
```

la complessità dell'algoritmo, data la relazione di ricorrenza:

$$T(0) = a$$

$$T(n) = b + 2T(n/2)$$

sarà identica alla sua controparte iterativa, ovvero di $O(n)$.

17 Classificazione di alcune relazioni di ricorrenza

Diamo adesso una classificazione di alcune delle relazioni di ricorrenza che potremmo incontrare. La maggior parte degli algoritmi che risultano in tali relazioni sono i cosiddetti "divide et impera", ovvero dividi e comanda, cioè algoritmi che dividono l'istanza del problema su cui operano in sottoproblemi più semplici da risolvere separatamente.

```
1 void divideEtImpera(S) {  
2     if(|S| <= m)  
3         //risolvi direttamente il problema  
4     else  
5         //dividi in due istanze separate  
6         divideEtImpera(S_1)  
7         ...  
8         divideEtImpera(S_2)  
9         //combina le due istanze  
10 }
```

classifichiamo quindi alcune delle relazioni di ricorrenza che potremo ottenere da algoritmi simili:

$$T(0) = d$$
$$T(n) = c + T\left(\frac{n}{2}\right)$$

Con complessità $O(\log n)$,

$$T(0) = d$$
$$T(n) = c + \frac{2T}{n/2}$$

Con complessità $O(n)$,

$$T(0) = d$$
$$T(n) = cn + 2T\left(\frac{n}{2}\right)$$

Con complessità $O(n \log n)$.

In generale, se abbiamo:

$$T(n) = d, \quad n = 1$$
$$T(n) = c + aT\left(\frac{n}{b}\right), \quad n > 1$$

possiamo allora dire che:

$$T(n) \in O(\log n), \quad a = 1$$

$$T(n) \in O(n^{\log_b a})$$

e se abbiamo:

$$T(n) = d, \quad n \leq m$$

$$T(n) = hn^k + aT\frac{n}{b}, \quad n > m$$

diremo:

$$T(n) \in O(n^k), \quad a < b^k$$

$$T(n) \in O(n^k \log n), \quad a = b^k$$

$$T(n) \in O(n^{\log_b a}), \quad a > b^k$$

Ulteriori generalizzazioni si possono trovare nell'enunciato del Master Theorem, trovato ad esempio nel volume del Cormen.

18 Introduzione agli algoritmi di teoria dei numeri

Prendiamo adesso algoritmi la cui complessità è calcolata sulla base del numero di cifre che compongono il numero stesso. Ad esempio:

- La somma ha complessità lineare
- La moltiplicazione ha complessità quadratica

Moltiplicazione veloce fra interi non negativi

Notiamo la seguente proprietà dei naturali:

$$A = A_s 10^{\frac{n}{2}} + A_d$$

dove A_s e A_d sono due parti del numero A diviso (rispetto alle cifre) a metà.

19 Insertion sort

L'insertion sort utilizza il metodo più intuitivo per ordinare un vettore: si prende ad ogni iterazione il primo elemento, si confronta con ogni suo precedente finchè non si trova la sua posizione corretta, e poi si spostano tutti i precedenti necessari di una posizione in avanti per lasciargli posto. Notiamo che nell'implementazione in pseudocodice il while usato per spostare gli elementi ha la conseguenza di lasciare il primo elemento con un valore duplicato: usiamo allora la variabile ausiliaria current per rimettere il valore giusto al suo posto.

```
1 void sort(int* vett, int dim) {
2     int current = 0;
3     int p = 0;
4     for(int i = 1; i < dim; i++) {
5         current = vett[i];
6         p = i - 1;
7
8         while(p >= 0 && vett[p] > current) {
9             vett[p + 1] = vett[p];
10            p--;
11        }
12        vett[p + 1] = current;
13    }
14 }
```

Possiamo fare l'analisi della complessità e trovare che, come per tutti gli algoritmi di ordinamento in-place, la complessità massima è di $O(n^2)$. Il worst case sarà chiaramente quello di un vettore ordinato al contrario, cioè in ordine decrescente.

20 Debugging

Il processo di debugging consiste nel rimuovere eventuali errori dal codice scritto. Si possono distinguere le seguenti categorie di debugging:

- Visuale: osservando lo stato del programma in un qualsiasi momento (ad esempio scrivendo sul buffer di uscita le informazioni che ci interessano);
- Debugger: utilizzando appositi software chiamati debugger (GDB, DDD) che forniscono alcuni strumenti utili al debugging quali i breakpoint, l'analisi della memoria in tempo reale, ecc...;

- Compilatore: utilizzando i messaggi di errore forniti dallo stesso compilatore;
- Analisi della memoria: utilizzando software come Valgrind per gestire correttamente la memoria ed individuare leak e segmentazioni.

21 Programmi in memoria dinamica

Utilizziamo la programmazione in memoria dinamica nel caso in cui le dimensioni d'istanza del problema che ci interessa non siano note a tempo di compilazione. Diciamo ad esempio di voler immagazinare una serie di n numeri. Potremmo voler usare una lista, ma a quel punto dovremmo accettare di dover richiedere tutte le nostre letture sulla struttura dati in tempo n . Utilizzando invece un vettore dinamico, avremmo una complessità di $O(1)$ per ogni accesso. Tutte queste strutture dati possono essere trovate nell'implementazione della libreria standard, ovvero la:

Standard Template Library (STL)

La libreria STL definisce una serie di container, ovvero strutture dati predefinite che possono venire utilizzate nel nostro codice. Vediamo per esempio un vettore definito attraverso la STL:

```
1 vector<int> stlArray
```

qui vector indica il tipo di container, la voce <int> definisce il tipo di dati immagazinati nel container, e stlArray il nome del vettore. Per aggiungere un elemento al vettore, potremo ad'esempio;

```
1 stlArray.push_back(val);
```

chiamando la funzione membro push_back sulla stlArray (altro non è che un'istanza di classe) con argomento val. Per leggere un valore dal vettore potremmo usare la ridefinizione dell'operatore []:

```
1 stlArray[index];
```

potremo ottenere iteratori sulla testa e sulla coda del vettore con:

```
1 stlArray.begin();
2 stlArray.end();
```

ed ottenerne la dimensione con:

```
1 stlArray.size();
```

Riguardo agli algoritmi di ordinamento visti finora, la libreria STL fornisce una funzione:

```
1 sort(stlArray.begin(), stlArray.end());
```


dove i due argomenti sono iteratori generici tra i quali verrà effettuato l'ordinamento. L'algoritmo dell'ordinamento è implementation-dependant, cioè dipende dall'implementazione usata, ma assicura sempre una complessità di $O(n \log n)$.

Ulteriori informazioni su qualsiasi componente della STL si può trovare su siti come:

<https://cplusplus.com/reference>

22 Algoritmi di teoria dei numeri

Studiamo adesso una categoria di algoritmi la cui complessità è calcolata prendendo come misura il numero di cifre che compongono il numero. Ad esempio:

- L'addizione ha complessità $O(n)$;
- La moltiplicazione ha complessità $O(n^2)$.

Vediamo ad esempio:

Moltiplicazione veloce fra interi non negativi

Ogni numero A di n cifre può essere visto come:

$$A = A_s 10^{\frac{n}{2}} + A_d$$

A questo punto il prodotto AB sarà:

$$AB = A_s B_s 10^{\frac{n}{2}} + A_d B_d$$

che può essere riscritto come:

$$AB = A_s B_s 10^n + ((A_s + A_d)(B_s + B_d) - A_s B_s - A_d B_d) 10^{\frac{n}{2}} + A_d B_d$$

dove compaiono tre moltiplicazioni fra interi non con n ma con $\frac{n}{2}$ cifre. In codice, questo si tradurrà in:

```
1  int mult(int A, int B, int n) {
2      if(n == 1) return A * B;
3      else {
4          As = parte_sinistra di A; Ad = parte_destra di A;
5          Bs = parte_sinistra di B; Bd = parte_destra di B;
6          int x_1 = As + Ad; int x_2 = Bs + Bd;
7          int y_1 = mult(x_1, x_2, n / 2);
8          int y_2 = mult(A, B, n / 2);
```

```

9      int y_3 = mult(Ad, Bd, n / 2);
10     int s_1 = left_shift(y_2, n);
11     int s_2 = left_shift(t_1 - t_2 - t_3, n / 2);
12     return s_1 + s_2 + y_3;
13 }
14 }

```

Dove l'operazione `left_shift(h, n)` scorre `h` di `n` posti a sinistra, introducendo n 0 ($\times 10^n$). Abbiamo tre chiamate ricorsive alla funzione `mult`, ciascuna su una dimensione di istanza di $\frac{n}{2}$. Da qui la relazione di istanza:

$$T(1) = d, \quad T(n) = hn + 3T\left(\frac{n}{2}\right)$$

Da cui otteniamo che $T \in O(n^{\log_2 3}) = O(n^{1.59})$.

Relazioni lineari

Relazioni lineari in forma:

$$T(0) = d, \quad T(n) = bn^k + a_1T(n-1) + a_2T(n-2) + \dots + a_rT(n-r)$$

sono polinomiali soltanto se esiste al più una sola chiamata ricorsiva ($a_i = 1$ e $a_j = 0$ con $j \neq i$). Applichiamo questo teorema al problema del calcolo della serie di Fibonacci. Ricordiamo la classica formulazione ricorsiva:

$$f_0 = 0, \quad f_1 = 1, \quad f_n = f_{n-1} + f_{n-2} \quad (0, 1, 3, 5, 8, 13, \dots)$$

da cui si ricava:

$$\phi = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{f_n}{f_{n-1}} = 1.618\dots$$

nota come sezione aurea (o rapporto aureo). Cerchiamo allora di implementare un algoritmo ricorsivo che restituisca `n` cifre della serie di Fibonacci, ad esempio come:

```

1 int fibonacci(int n) {
2     if(n < 2) return n;
3     return fibonacci(n - 1) + fibonacci(n - 2);
4 }

```

La relazione di ricorrenza di questo algoritmo è:

$$T(0) = T(1) = d, \quad T(n) = b + T(n-1) + T(n-2)$$

da cui chiaramente avremo complessità esponenziale (chiaramente poco). Cerchiamo allora di definire un algoritmo iterativo:

```

1 int fibonaccini(int n) {
2     int k; int j = 0; int f = 1;
3     for(int i = 1; i <= n; ++i) {
4         k = j; j = f; f = k + j;
5     }
6     return j;
7 }

```

visto che il nostro numero di passaggi $g(n)$ è n , avremo una complessità totale di $O(n)$. Questo però significa soltanto che la nostra implementazione ricorsiva di partenza era inefficiente. Troviamone un'altra:

```

1 int fibonaccini(int n; int a = 0; int b = 1) {
2     if(n == 0) return a;
3     return fibonaccini(n - 1, b, a + b);
4 }

```

adesso abbiamo una singola chiamata ricorsiva su una dimensione di istanza di $(n - 1)$, da cui ricaviamo complessità $O(n)$.

23 Mergesort

Il mergesort è un algoritmo di ordinamento basato sull'unione, cioè sulla suddivisione del vettore in sottoinsiemi di dimensione minore, l'ordinamento di quei sottoinsiemi e la loro successiva riunificazione in un unico vettore. In pseudocodice:

```

1 void mergeSort(sequenza S_1) {
2     if(S.size() <= 1) return;
3     else {
4         //dividi S in 2 sottosequenze S_1 e S_2 di uguale lunghezza
5         sequenza S_2;
6         split(S_1, S_2);
7
8         mergeSort(S_1);
9         mergeSort(S_2);
10
11        //fondi S_1 e S_2
12        merge(S_1, S_2);
13    }
14 }

```

proviamo un'implementazione basata sulle liste:

```

1 void mergeSort(elem*& s_1) {
2     if(s_1 == NULL || s_1->next == NULL) return;
3     elem* s_2 = NULL;
4     split(s_1, s_2);
5     mergeSort(s_1);

```

```

6   mergeSort(s_2);
7   merge(s_1, s_2);
8 }

```

sarà necessario, dalla ricorrenza:

$$T(n) = bn + 2T\left(\frac{n}{2}\right)$$

che una singola chiamata ricorsiva non sia peggiore di $O(n \log n)$. Vediamo le implementazioni della split e della merge:

```

1 void split(elem*& s_1, elem*& s_2) {
2     if(s_1 == NULL || s_1->next == NULL) return;
3     elem* p = s_1->next;
4     s_1->next = p->next;
5     p->next = s_2;
6     s_2 = p;
7     split(s_1->next, s_2);
8 }

```

La funzione split() divide la lista in due "sottoliste", estraendo alternativamente un elemento (da mettere in una nuova lista) e lasciandone un altro nella lista di partenza.

```

1 void merge(elem*& s_1, elem*& s_2) {
2     if(s_2 == NULL) return;
3     if(s_1 == NULL) {
4         s_1 = s_2;
5         return;
6     }
7     if(s_1->inf <= s_2->inf)
8         merge(s_1->next, s_2);
9     else {
10        merge(s_2->next, s_1);
11        s_1 = s_2;
12    }
13 }

```

La funzione merge() invece scorre le due liste contemporaneamente confrontando di volta in volta i due elementi concorrenti in testa ad entrambe e scegliendo il minore.

24 Mergesort su vettori non in-place

Implementiamo un'algoritmo di ordinamento mergesort sui vettori non in-place, ovvero che sfrutta un vettore ausiliario implementato come vettore STL (per l'ausilio della funzione push_back). Il corpo del mergesort sarà:

```

1 void mergeSort(int arr[], int beg, int end) {
2     if(beg + 1 < end) {
3         int mid = (beg + end) / 2;
4         mergeSort(arr, beg, mid);
5         mergeSort(arr, mid, end);
6         merge(arr, beg, mid, end);
7     }
8 }

```

dove la chiamata ricorsiva è fatta sulle due sottoarray di dimensione dimezzata dell'array di partenza. Notare che la suddivisione si ferma giunti ad array di dimensione monadica. La merge è implementata come segue:

```

1 void merge(int arr[], int beg, int mid, int end) {
2     int iS = beg;
3     int iD = mid;
4
5     vector<int> temp;
6
7     while(true) {
8         if(arr[iS] <= arr[iD]) {
9             temp.push_back(arr[iS++]);
10            if(iS >= mid) {
11                while(iD < end) temp.push_back(arr[iD++]);
12                break;
13            }
14        } else {
15            temp.push_back(arr[iD++]);
16            if(iD >= end) {
17                while(iS < mid) temp.push_back(arr[iS++]);
18                break;
19            }
20        }
21    }
22
23    for(int i = 0; i < temp.size(); i++) {
24        arr[i + beg] = temp[i];
25    }
26
27 }

```

Si inizializzano due indici, iS e iD, che partono rispettivamente dall'inizio e dal punto medio della sottoarray. Da qui in poi si scorrono entrambi gli indici, selezionando ogni volta l'elemento minore, finchè uno dei due non sfora il suo bound (il punto medio per iS, la fine della sottoarray per iD). A questo punto si effettua l'unrolling completo della parte di sottoarray rimanente attraverso l'indice rimasto libero. Infine si copiano i valori selezionati e ordinati, che sono stati scritti su un vettore dinamico, sul vettore di partenza a partire dalla

posizione d'inizio della sottoarray. Una tipica esecuzione di questo algoritmo, su dimensione di istanza $n = 15$, sarà:

```

1 111 86 23 33 21 21 95 92 15 4 49 65 43 9 15
2 11 23 86 33 21 21 95 92 15 4 49 65 43 9 15
3 11 23 86 33 21 21 95 92 15 4 49 65 43 9 15
4 11 23 86 21 33 21 95 92 15 4 49 65 43 9 15
5 11 23 86 21 33 21 95 92 15 4 49 65 43 9 15
6 11 23 86 21 21 33 95 92 15 4 49 65 43 9 15
7 11 21 21 23 33 86 95 92 15 4 49 65 43 9 15
8 11 21 21 23 33 86 95 15 92 4 49 65 43 9 15
9 11 21 21 23 33 86 95 15 92 4 49 65 43 9 15
10 11 21 21 23 33 86 95 4 15 49 92 65 43 9 15
11 11 21 21 23 33 86 95 4 15 49 92 43 65 9 15
12 11 21 21 23 33 86 95 4 15 49 92 43 65 9 15
13 11 21 21 23 33 86 95 4 15 49 92 9 15 43 65
14 11 21 21 23 33 86 95 4 9 15 15 43 49 65 92
15 4 9 11 15 15 21 21 23 33 43 49 65 86 92 95
16 4 9 11 15 15 21 21 23 33 43 49 65 86 92 95
17 11 23 86 33 21 21 95 92 15 4 49 65 43 9 15
18 11 23 86 33 21 21 95 92 15 4 49 65 43 9 15
19 11 23 86 21 33 21 95 92 15 4 49 65 43 9 15
20 11 23 86 21 33 21 95 92 15 4 49 65 43 9 15
21 11 23 86 21 21 33 95 92 15 4 49 65 43 9 15
22 11 21 21 23 33 86 95 92 15 4 49 65 43 9 15
23 11 21 21 23 33 86 95 15 92 4 49 65 43 9 15
24 11 21 21 23 33 86 95 15 92 4 49 65 43 9 15
25 11 21 21 23 33 86 95 4 15 49 92 65 43 9 15
26 11 21 21 23 33 86 95 4 15 49 92 43 65 9 15
27 11 21 21 23 33 86 95 4 15 49 92 43 65 9 15
28 11 21 21 23 33 86 95 4 15 49 92 9 15 43 65
29 11 21 21 23 33 86 95 4 9 15 15 43 49 65 92
30 4 9 11 15 15 21 21 23 33 43 49 65 86 92 95
31 4 9 11 15 15 21 21 23 33 43 49 65 86 92 95

```

25 Ordinamenti multivalore

Supponiamo di avere vettori formati da elementi con più di un valore su cui è stabilita una relazione d'ordine, come ad esempio:

```

1 struct Richiesta {
2     int id_;
3     int prio_;
4     Richiesta(int id, int prio) : id_(id), prio_(prio) {}
5 }

```

nella STL, potremo usare la funzione sort sfruttando l'argomento comparatore:

```
1 sort(first, last, comparatore);
```

definiamo ad esempio una funzione di confronto:

```
1 bool confrontaRichiesta(Richiesta r_1, Richiesta r_2) {  
2     if (r_1.id_ < r_2.id_) return true;  
3     else if {r_1.id_ == r_2.id_} {  
4         if(r_1.prio_ > r_2.prio_) return true;  
5         else return false;  
6     } else return false;  
7 }
```

potremo adesso passare come argomento la funzione `confrontaRichiesta(Richiesta, Richiesta)`, alla funzione `sort()` su un qualsiasi vettore di elementi `Richiesta`, così che venga usata nei confronti dell'ordinamento.

26 Debugging della memoria con Valgrind

Valgrind è un applicativo divenuto praticamente standard per la programmazione in `c++`, che controlla la corretta gestione della memoria dinamica. Per fare il debugging di un programma attraverso Valgrind, occorrerà prima di tutto compilare il nostro eseguibile abilitando i flag di debugging:

```
1 g++ -g programma.cpp -o programma
```

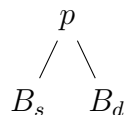
e chiamare poi Valgrind sull'eseguibile creato:

```
1 valgrind programma
```

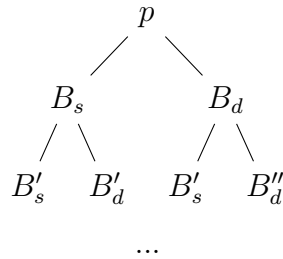
27 Alberi binari

Un'albero binario è definito come segue:

- L'albero vuoto è un'albero binario.
- Un nodo p più due alberi binari B_s e B_d formano un'albero binario.



a loro volta B_s e B_d saranno alberi binari, quindi:



a questo punto diremo che:

- p è la **radice** dell'albero;
- B_s è il **sottoalbero sinistro** di p ;
- B_d è il **sottoalbero destro** di p ;
- gli alberi sono etichettati.

diciamo inoltre che ogni albero senza sottoalberi (o figli) è una foglia. Un nodo sarà padre rispetto al loro figlio, i nodi precedenti saranno gli antecedenti e quelli successivi i discendenti. Il livello di un nodo è il numero dei suoi antecedenti, mentre il livello di un'albero è il livello massimo dei suoi nodi.

28 Alberi binari

Riprendiamo la trattazione degli alberi binari. Avevamo detto che un albero è definito come segue:

- L'albero vuoto è un'albero binario.
- Un nodo p più due alberi binari B_s e B_d formano un'albero binario.

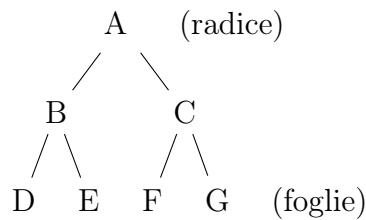
Ad esempio, assumiamo che il livello di un albero sia -1. Il livello della radice sarà 0, e il livello dell'albero totale sarà il più lungo cammino fra la radice e una foglia. Un albero binario si dice inoltre etichettato quando ad ogni nodo è associato un nome, o etichetta.

Una possibile implementazione della struttura dati albero binario in pseudocodice potrebbe essere:

```

1 struct Node {
2     int inf;
3     Node* sx;
4     Node* dx;
5 };

```

Gli alberi binari si prestano all'implementazione, su di essi, di algoritmi ricorsivi. Avremo infatti:

- Caso base: albero vuoto
- Passo ricorsivo: radice e i due sottoalberi

Gli algoritmi più comuni su alberi binari sono quelli di: linearizzazione, ricerca, inserimento e cancellazione di nodi. Vediamo la prima categoria:

Linearizzazione di alberi

Vediamo come possiamo linearizzare una struttura dati ad albero. Una linearizzazione di un albero è una sequenza contenente i nomi dei suoi nodi. Le più comuni linearizzazioni, dette **visite**, sono:

- **Ordine anticipato** (*preorder*):

Si stampa prima di tutto la radice, e poi si chiama ricorsivamente sui sottoalberi sinistri e destro, stampando quindi i nodi appena trovati e poi procedendo di livello nell'albero:

```

1 void preOrder(Node* albero) {
2     if(albero == NULL) return;
3     else {
4         print(radice);
5         preOrder(albero->sx);
6         preOrder(albero->dx);
7     }
8 }
9

```

- **Ordine differito** (*postorder*):

Si scorre prima ricorsivamente tutto l'albero, raggiungendo l'ultimo nodo a sinistra e stampandolo. Le stampe si susseguono poi attraverso il meccanismo della ricorsione in coda:

```

1 void postOrder(Node* albero) {
2     if(albero == NULL) return;
3     else {
4         preOrder(albero->sx);

```

```

5     preOrder(albero->dx);
6     print(radice);
7 }
8 }
9

```

- **Ordine simmetrico** (*inorder*):

Si stampa la radice dopo la stampa del sottoalbero sinistro e prima della stampa del sottoalbero destro, rispettando quindi quello che sarebbe l'"ordine" naturale dell'albero:

```

1 void postOrder(Node* albero) {
2     if(albero == NULL) return;
3     else {
4         preOrder(albero->sx);
5         print(radice);
6         preOrder(albero->dx);
7     }
8 }
9

```

Alberi binari bilanciati

Un albero binario si dice bilanciato quando ogni suo nodo (tranne quelli all'ultimo livello) ha due figli. Il numero di nodi di un albero binario bilanciato è $2^{(k+1)} - 1$, e il numero di foglie è 2^k .

Alberi binari quasi bilanciati

Un albero binario è quasi bilanciato quando tutti i livelli fino al penultimo sono bilanciati. Un albero bilanciato è anche quasi bilanciato.

Alberi pienamente binari Un albero si dice pienamente binario quando tutti i nodi tranne le foglie hanno 2 figli. Il numero di nodi interni è uguale al numero di foglie meno 1.

Complessità della linearizzazione

Studiamo la complessità di una visita fatta su un albero. Abbiamo chiaramente due passi ricorsivi, più un'operazione di confronto e di una di lettura che richiedono entrambe tempo $O(1)$. Il problema è posto dal fatto che non conosciamo accuratamente la dimensione dei sottoproblemi al momento della chiamata ricorsiva. Il caso migliore sarebbe quello di sottoalberi bilanciati, ovvero con numero uguale di nodi figli. Possiamo in ogni caso porre la ricorrenza:

$$T(0) = 0, \quad T(n) = b + T(n_s) + T(n_d), \quad n_s + n_d = n - 1, \quad n > 0$$

Il caso particolare bilanciato è il seguente:

$$T(0) = a, \quad T(n) = b + 2T\left(\frac{n-1}{2}\right)$$

con complessità in caso migliore di $T(n) \in O(n)$. Possiamo inoltre esprimere la complessità in funzione dei livelli, applicando quanto visto prima sugli alberi binari bilanciati:

$$T(0) = a, \quad T(k) = b + 2T(k-1)$$

dove abbiamo complessità $T(k) \in O(2^k)$. Chiaramente la complessità è maggiore, ma possiamo dire che in genere $k < n$, e anche di molto.

Altre funzioni su alberi binari

Poniamoci il problema di contare nodi e foglie di un albero binario. Una possibile soluzione è:

```

1 //conta nodi
2 int nodes(Node* tree) {
3     if(tree == NULL) return 0;
4     return 1 + nodes(tree->sx) + nodes(tree->dx);
5 }
6 //conta foglie
7 int leaves(Node* tree) {
8     if(tree == NULL) return 0;
9     if(!tree->sx && !tree->dx) return 1; //foglia
10    return leaves(tree->sx) + leaves(tree->dx);
11 }
```

Entrambe le funzioni hanno formula di ricorrenza simile a quelle già viste sulle visite, e quindi complessità $O(n)$.

Ricerca di un'etichetta su un albero binario

Implementiamo una funzione che restituisce un puntatore al primo nodo con etichetta n che trova in visita anticipata. Se il nodo non viene trovato, la funzione restituisce NULL.

```

1 Node* findNode(int n, Node* tree) {
2     if(tree == NULL) return NULL;
3     if(tree->inf == n) return tree;
4     Node* a = findNode(n, tree->left);
5     if(a) return a;
6     else return findNode(n, tree->right);
7 }
```

La complessità è sempre $O(n)$.

Cancellazione dell'albero binario

Vediamo la cancellazione dell'albero, che avremo per esempio bisogno di fare nel caso l'albero fosse allocato in memoria dinamica e si rendesse necessaria la sua deallocazione:

```

1 void delTree(Node* &tree) {
2     if(tree != NULL) {
3         delTree(tree->left);
```

```

4     delTree(tree->right);
5     delete tree;
6     tree = NULL;
7 }
8 }

```

Inserzione di un nodo su un albero binario

Vediamo una funzione che inserisce un nodo *child* come figlio di un nodo *parent*, sinistro se $c = l$ e destro se $c = r$. Se l'albero è vuoto, inserisce *child* come radice. Se *parent* non esiste o ha già il figlio richiesto, la funzione non modifica l'albero.

```

1 int insertNode(Node* &tree, int child, int parent, char c) {
2     if(tree == NULL) { //albero vuoto
3         tree = new Node;
4         tree->label = child;
5         tree->left = tree->right = NULL;
6         return 1;
7     }
8     Node* a = findNode(parent, tree); //cerca parent
9     if(parent == NULL) return 0;
10    if(c == 'l' && !a->left) { //figlio sinistro
11        a->left = new Node;
12        a->left->inf = child;
13        a->left->left = a->left->right = NULL;
14        return 1;
15    }
16    if(c == 'r' && !a->right) { //figlio destro
17        a->right = new Node;
18        a->right->inf = child;
19        a->right->left = a->right->right = NULL;
20        return 1;
21    }
22 }

```

29 Alberi generici

Generalizziamo la definizione di albero binario introducendo l'albero generico. Il concetto chiave sarà sempre quello di una radice, da cui partiranno però non uno ma una sequenza di sottoalberi. Formalmente:

- Un nodo è un albero
- Un nodo più una sequenza di alberi A_1, \dots, A_n è un albero.

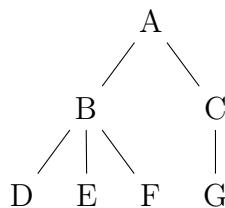
Notiamo come fra i sottoalberi di un nodo di albero generico non è stabilito alcun ordinamento, mentre nei sottoalberi di alberi binari c'era una chiara

distinzione fra sottoalbero sinistro e sottoalbero destro.

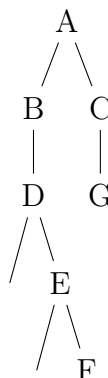
La rappresentazione di una struttura dati di tipo albero generico potrebbe essere complicata: l'approccio naive è infatti quello di immagazzinare insieme ad ogni etichetta, una lista dei sottoalberi presenti. Questo è però particolarmente inefficiente, in quanto l'accesso ad ogni sottoalbero richiederebbe una scansione lineare della lista dei sottoalberi. Un approccio migliore è quello figlio-fratello: a partire dal nodo radici, definiamo una struttura effettivamente analoga a quella di un albero binario, con la differenza, però, che il puntatore di sinistra indica adesso il prossimo nodo su un livello più basso (figlio), mentre quello di destra indica il prossimo nodo sullo stesso livello (fratello). L'albero binario così generato prende il nome di trasformato dell'albero generico. Una possibile implementazione della struttura dati albero generico sarà quindi:

```
1 struct Node {  
2     int inf;  
3     Node* child;  
4     Node* sibling;  
5 };
```

che rappresenterà un'albero del tipo:



Attraverso il suo trasformato:



Molte delle funzioni definite su alberi binari valgono (con qualche modifiche) sugli alberi generici, ad esempio la visita anticipata:

```

1 void preOrder(albero) {
2     print(radice);
3     preOrder(albero->1);
4     ...
5     preOrder(albero->n);
6 }

```

Proprio per la proprietà riportata prima, invece, la visita simmetrica risulta impossibile: non si può stabilire un sottoalbero "centrale" di un nodo. Notiamo, che nella rappresentazione figlio-fratello, la visita anticipata del trasformato corrisponde alla visita trasformata dell'albero generico, e la visita simmetrica del trasformato corrisponde alla visita in differita dell'albero generico. Come per gli alberi binari, la complessità delle operazioni su alberi generici è di $O(n)$ sul numero di elementi.

Altre funzioni su alberi generici

Poniamoci nuovamente il problema di contare nodi e foglie di un albero, stavolta generico. La soluzione è del tutto analoga a quella dell'albero binario, con la sola differenza che un nodo è classificato come foglia quando il suo puntatore child è NULL, e ciò non significa che non possa avere altri sibling, anch'essi foglie.

```

1 //conta nodi
2 int nodes(Node* tree) {
3     if(tree == NULL) return 0;
4     return 1 + nodes(tree->child) + nodes(tree->sibling);
5 }
6 //conta foglie
7 int leaves(Node* tree) {
8     if(tree == NULL) return 0;
9     if(!tree->child) return 1 + leaves(tree->sibling); //foglia
10    return leaves(tree->child) + leaves(tree->sibling);
11 }

```

Inserzione di un nodo su un albero generico

Riportiamo una funzione che inserisca un nodo come ultimo fratello di un certo sibling:

```

1 void addSibling(int sibling, Node* &list) {
2     if(list == NULL) {
3         list = new Node;
4         list->inf = sibling;
5         list->child = list->sibling = NULL;
6     } else addChild(sibling, list->sibling)
7 }

```

E infine altra che inserisca un nodo come ultimo figlio di un certo parent:

```

1 int insert(int child, int father, Node* &tree) {
2     Node* a = findNode(father, tree);

```

```

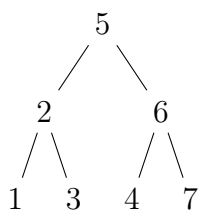
3  if(a == NULL) return 0;
4  addChild(child, a->child);
5  return 1;
6  }

```

notando che la funzione `findNode(int, Node*)` è analoga a quella definita sugli alberi binari.

30 Alberi Binari di Ricerca

Un'albero binario di ricerca è un albero binario tale che per ogni nodo p , i nodi del sottoalbero sinistro di p hanno etichetta minore dell'etichetta di p . Di contro, i nodi del sottoalbero destro avranno etichetta maggiore dell'etichetta di p . Si stabilisce un ordine tra i nodi, più forte del semplice meccanismo antecedente-precedente, in base all'ordinamento tra le etichette. Ad esempio:



Notiamo che non possono esistere nodi doppiati, e che l'ordinamento risulta infine da sinistra verso destra, ergo una stampa simmetrica dell'albero binario di ricerca fornisce sostanzialmente una lista dei nodi in ordine crescente.

Possiamo definire sugli alberi di ricerca alcune operazioni, fra cui la ricerca di un nodo (ottimizzato!), l'inserimento ordinato di un nodo, e la cancellazione di un nodo.

Ricerca su alberi di ricerca

Si spera che, se l'hanno chiamati alberi di ricerca, almeno quella ci si possa fare per benino. Effettivamente la ricerca su alberi di ricerca si può eseguire sempre come ricerca binaria, essendo gli stessi sempre ordinati per definizione. Possiamo quindi implementare, in pseudocodice, la funzione ricorsiva:

```

1 Node* findNode(int n, Node* tree) {
2     if(tree == NULL) return 0;
3     if(n == tree->label) return tree;
4     if(n < tree->label) return findNode(n, tree->left);
5     return findNode(n, tree->right);
6 }

```

Questo ci permetterà di dividere per 2 la dimensione di istanza ad ogni passaggio, ottenendo una complessità di $O(\log n)$. Chiaramente, questo vale

solo nel caso migliore: nel caso medio, il valore verrà fortemente influenzato dal bilanciamento (o mancanza di tale) del nostro albero. E' fondamentale avere alberi bilanciati per ottimizzare le operazioni di ricerca e inserzione. Nel caso l'albero sia completamente sbilanciato, si dice che è degenere, e le operazioni di ricerca costeranno su di esso $O(n)$.

Inserzione in alberi di ricerca

Inserire nodi in alberi di ricerca significa fare l'inserimento ordinato, per mantenere appunto l'ordine dell'albero:

```
1 void insertNode(int n, Node *& tree) {
2     if(tree == NULL) {
3         tree = new Node;
4         tree->label = n;
5         tree->left = tree->right = NULL;
6     }
7     if(n < tree->label) insertNode(n, tree->left);
8     if(n > tree->label) insertNode(n, tree->right);
9 }
```

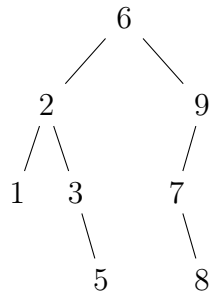
L'algoritmo aggiunge, se l'albero considerato è vuoto, l'elemento considerato. Sennò confronta l'elemento con i sottoalberi sinistri e destro dell'albero, e chiamandosi ricorsivamente sul ramo che rispetta l'ordinamento. La complessità è sempre $O(\log n)$, che può arrivare a $O(n)$ se l'albero è degenere.

Cancellazione di alberi di ricerca

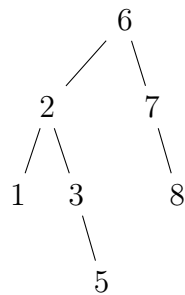
Poniamoci adesso il problema di cercare e successivamente cancellare un determinato nodo. Occorrerà innanzitutto trovare il nodo desiderato attraverso i meccanismi sopra definiti, e valutare poi le due possibili situazioni che potremmo incontrare:

- Se p (l'albero trovato) ha un sottoalbero vuoto, il padre di p viene connesso all'unico sottoalbero non vuoto di p .
- Se p ha entrambi i sottoalberi non vuoti si cerca il nodo con etichetta minore nel sottoalbero destro di p , si cancella e si mette la sua etichetta come etichetta di p .

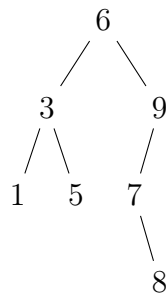
Visualizziamo i diversi casi:



rimuovere il 9 significa:



e rimuovere il 2 significa:



Ciò si può implementare con:

```
1 //helper (trova minimo)
2 void deleteMin(Node* &tree, int &m) {
3     if(tree->left) deleteMin(tree->left, m);
4     else {
5         m = tree->label;
6         Node* a = tree;
7         tree = tree->right;
8         delete a;
9     }
10 }
```

```

11
12 //funzione
13 void deleteNode(int n, Node* &tree) {
14     if(tree) {
15         if(n < tree->label) {
16             deleteNode(n, tree->left);
17             return;
18         }
19         else if(n > tree->label) {
20             deleteNode(n, tree->right);
21             return;
22         }
23         else if(tree->left == NULL) {
24             Node* a = tree;
25             tree = tree->right;
26             delete a;
27             return;
28         }
29         else if(tree->right == NULL) {
30             Node* a = tree;
31             tree = tree->left;
32             delete a;
33             return;
34         }
35         else deleteMin(tree->right, tree->label);
36     }
37 }

```

L'helper `deleteMin()` trova il minimo, lo elimina e ne inserisce l'etichetta nell'integer `m`. Questo torna utile nel secondo caso, quando abbiamo intenzione di eliminare il nodo minimo e sostituirne l'etichetta al nodo eliminato. La funzione a questo punto si occupa soltanto di scorrere l'albero in maniera ricorsiva, applicando l'algoritmo giusto a seconda del caso incontrato. Nello specifico, finchè non trova il nodo desiderato prosegue di ricerca binaria. Quando raggiunge a una foglia che corrisponde, sceglie in base al numero di sottoalberi il percorso da prendere: nel caso esista solamente un sottoalbero, si elimina dopo aver sostituito il suo sottoalbero esistente a se stesso. Nel caso entrambi i sottoalberi esistano, chiama `deleteMin()` sul suo sottoalbero destro, passando la sua stessa etichetta per riferimento. Notiamo che il caso dove l'etichetta cercata non esiste è gestito dal controllo su `tree` in capo a entrambe le funzioni (albero vuoto \rightarrow caso base).

Costo di riempimento di un'albero binario di ricerca

Vediamo quanto costa in funzione di n elementi da aggiungere, riempire un albero binario di ricerca. Potremmo bovivamente dire $O(n \log n)$, visto che svolgo effettivamente n operazioni di costo $O(\log n)$. Il problema sta nel fatto che il costo di $O(\log n)$ vale nel caso ottimale, non nel caso generale: fosse

considerato il caso peggiore, avremmo n volte qualcosa che ha complessità $O(n)$, che però verrebbe ogni volta chiamato su dimensioni di istanza $n - 1$, da cui $O(n \frac{n-1}{2})$, ovvero $O(n^2)$. Dobbiamo allora ricordare l'albero di ricerca binaria è una struttura di dati estremamente efficiente, ma che la sua creazione ha il costo non indifferente di $O(n^2)$.