1 Lezione del 05-03-25

Avevamo visto la forma standard per sistemi lineari:

$$\begin{cases} x' = Ax + Bx \\ y = Cx + Du \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

(con D solitamente nulla), e la soluzione data da:

$$\begin{cases} x(t) = e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau \\ y(t) = Ce^{At}x_0 + C\int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau + Du \end{cases}$$

per il calcolo di tale soluzione sfruttavamo l'*esponenziale di matrice:*

$$e^{At} = I + At + \frac{1}{2}A^2t^2 + ... + \frac{(At)^n}{n!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(At)^k}{k!}$$

Abbiamo visto che se la matrice A ha autovalori distinti, allora e' diagonalizzabile:

$$A = T^{-1}A_D T, \quad A_D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

e l'esponenziale di matrice e' semplice:

$$e^{At} = T^{-1}e^{A_D t}T = T^{-1} \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & 0 \\ 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix} T$$

In particolare, se gli autovalori sono complessi e coniugati, si avra':

$$\lambda_i = \sigma_i + j\omega_i, \quad \overline{\lambda_i} = \sigma_i - j\omega_i$$

da cui:

$$e^{\lambda_i t} = e^{\sigma_i t}e^{j\omega_i t}, \quad e^{\overline{\lambda_i} t} = e^{\sigma_i t}e^{-j\omega_i t}$$

e si avranno quindi modi oscillatori ed esponenziali.

Avevamo inoltre definito come **modi propri** associati i:

$$C(t)e^{\lambda t} = C(t) = \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 t^2 + ... + \alpha_{k-1}t^{k-1}$$

1.0.1 Matrice reale, autovalori complessi

Se A e' reale ma i suoi autovalori sono complessi, si avra una forma del tipo:

$$A_D = \begin{pmatrix} \sigma + j\omega & 0 \\ 0 & \sigma - j\omega \end{pmatrix}$$

Questa forma e' *simile* alla matrice reale S:

$$S = \begin{pmatrix} \sigma & \omega \\ -\omega & \sigma \end{pmatrix}$$

1.0.2 Calcolo degli autovalori

Ripassiamo brevemente come calcolare gli autovalori. Se V e' autovettore e λ l'autovalore associato, allora vale:

$$Av = \lambda v \implies (A - \lambda I)v = 0 \implies \det(A - \lambda I) = 0$$

detta **equazione caratteristica** $p(\lambda)$:

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \lambda^n + \alpha_1 \lambda^{n-1} + \alpha_2 \lambda^{n-2} + ... + \alpha_{n-1}\lambda + \alpha_n$$

Avremo quindi che le soluzioni di λ^* di $p(\lambda) = 0$ rappresentano gli autovalori di A.

1.1 Forma di Jordan

Se gli autovalori sono multipli ma A non e' diagonalizzabile, abbiamo visto, occore sfruttare la **forma di Jordan** attraverso la trasformazione:

$$J = QAQ{-}1$$

dove Q e' la matrice degli **autovettori generalizzati** con:

$$J = \begin{pmatrix} J_1 & 0 & 0 \\ 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & J_N \end{pmatrix}$$

dove ogni J_i e' detto **miniblocco di Jordan**:

$$J_i = \begin{pmatrix} \lambda_h & 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & \lambda_h & 1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & \lambda_h & 1 \\ 0 & 0 & ... & 0 & \lambda_h \end{pmatrix}$$

Ogni blocco di Jordan ha sulla diagonale lo stesso autovalore, che compare tante volte quanto e' la sua *molteplicita' algebrica*. Inoltre, ci sono tanti blocchi J_i associati allo stesso autovattore tante volte quanto e' la sua *molteplicita' geometrica*.

Se riprendiamo la matrice esponenziale abbiamo:

$$e^{At} = e^{QJQ^{-1}t} = Q\left(I + Jt + \frac{J^2t^2}{2!} + ... + \frac{(Jt)^n}{n!}\right)Q^{-1} = Qe^{Jt}Q^{-1}$$

dove e^{Jt} e' *diagonale a blocchi*:

$$e^{Jt} = \begin{pmatrix} e^{J_1t} & 0 & ... & 0 \\ 0 & e^{J_2t} & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & ... & 0... & e^{J_nt} \end{pmatrix}$$

dove ogni blocco e^{J_it} ha la forma:

$$e^{J_it} = e^{\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & ... & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} t} = e^{(\lambda I + J_{0i})t} = e^{\lambda t}e^{J_{0i}t}$$

dove con J_{0i} ci riferiamo alla **parte nilpotente** di J_i. Il problema sara' quindi capire la forma di $e^{J_{0i}t}$:

$$e^{J_{0i}t} = I + J_{0i}t + \frac{J_{0i}^2}{2!} + ... + \frac{J_{0i}^{q-i}t^{q-1}}{(q-1)!}$$

dove ogni coefficiente moltiplicativo di t^i ha la proprieta' di avere le entrate spostate in diagonale, verso l'alto a destra, per cui:

$$e^{J_{0i}t} = \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} & ... & \frac{t^{(q-1)}}{(q-1)!} \\ 0 & 1 & t & ... & ... \\ 0 & 0 & 1 & t & \frac{t^2}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e quindi i modi del sistema sarano:

$$t^k \frac{e^{\lambda t}}{k!}, \quad 0 \leq k \leq q-1$$

dove abbiamo finalmente capito il significato dell'intero k.

Notiamo che la proprieta' di similarita' che avevamo trovato:

$$M = \begin{pmatrix} \sigma + j\omega & 0 \\ 0 & \sigma - j\omega \end{pmatrix} \sim S = \begin{pmatrix} \sigma & \omega \\ -\omega & \sigma \end{pmatrix}$$

ha un equivalente per le matrici in forma di Jordan:

$$M = \begin{pmatrix} \sigma + j\omega & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma + j\omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma - j\omega & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma - j\omega \end{pmatrix} \sim S = \begin{pmatrix} \sigma & \omega & 1 & 0 \\ -\omega & \sigma & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \sigma & \omega \\ 0 & 0 & -\omega & \sigma \end{pmatrix}$$

e via dicendo.

1.2 Stabilit' nei sistemi lineari stazionari

Riprendiamo la definizione di *stabilita'* (3.3 e 3.4). Quello che interessa sono le **perturbazioni** dello stato.

Per un sistema lineare e stazionario l'origine e' sempre punto di equilibrio per ingresso nullo. Se l'origine e' stabile, allora lo e' qualsiasi altro punto di equilibrio. Si puo' allore dire che un sistema e' **stabile** solo guardando alla risposta *libera* del sistema:

$$x' = Ax + Bu, \quad u = 0, \quad x(0) = x_0$$

$$x(t) = e^{At}x_0$$

In particolare, la stabilita' del sistema dipende dai *modi propri* del sistema. In particolare, se gli autovalori hanno parte reale $\text{Re}(\lambda_i) < 0$ il sistema e' **asintoticamente stabile**, mentre se hanno parte reale $\text{Re}(\lambda_i) \leq 0$ e gli $\text{Re}(\lambda_i) = 0$ hanno molteplicita' $\mu = 1$ il sistema e' solo **stabile**. Quest'ultimo caso e' propriamente quello delle matrici non diagonalizzabili (quindi messe in forma di Jordan).

Possiamo riassumere la relazione fra stabilita', modi e autovalori come segue:

Stabilita'	**Modi**	**Autovalori**
Stabilita' asintotica	Tendono a zero	$\mathrm{Re}(\lambda_i) < 0$
Stabilita' semplice o marginale	Non vanno a infinito, ma almeno uno non converge a zero	$\mathrm{Re}(\lambda_i) \leq 0$, $\exists \lambda_i^* : \mathrm{Re}(\lambda_i^*) = 0$, $\mu = 1$
Instabilita'	Almeno uno va a infinito	$\mathrm{Re}(\lambda_i) > 0$ o $\exists \lambda_i^* : \mathrm{Re}(\lambda_i^*)$, $\mu_a(\lambda_i^*) \neq \mu_g(\lambda_i^*)$

1.2.1 Stabilita' dei sistemi linearizzati

Avevamo visto che nei sistemi non lineari conviene *linearizzare* trascurando i termini oltre il primo ordine nell'intorno di uno stato di equilibrio noto. Se il sistema linearizzato e' *asintoticamente stabile*, si avra' che lo stato di equilibrio del sistema non lineare e' **stabile**. Di contro, se il sistema linearizzato e' *semplicemente stabile* non possiamo concludere nulla sul sistema non lineare (potrebbero esserci instabilita' ai termini superiori).