

1 Lezione del 10-04-25

Riprendiamo la trattazione dei diagrammi di Bode di funzioni di trasferimento di uso comune.

1.1 Poli complessi coniugati

Prendiamo la funzione di trasferimento con denominatore al second'ordine:

$$G(s) = \frac{1}{1 + \frac{2\xi}{\omega_0}s + \frac{s^2}{\omega_0^2}} = \frac{\omega_0^2}{s^2 + 2\xi\omega_0s + \omega_0^2}$$

dove ricordiamo ω_0 è la **pulsazione naturale** e ξ è lo smorzamento.

Prendiamo quindi la prima forma, che altro non è se non la forma di Bode e ricaviamo la risposta armonica:

$$G(j\omega) = \frac{1}{1 + \frac{2\xi}{\omega_0}j\omega - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}} = \frac{1}{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right) + j\left(\frac{2\xi}{\omega_0}\omega\right)}$$

1.1.1 Valutazione del modulo

Troviamo quindi il modulo:

$$|G(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + 4\xi^2 \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}}$$

da cui la risposta in decibel:

$$|G(j\omega)|_{dB} = 20 \log_{10} \left(\frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + 4\xi^2 \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}} \right)$$

Possiamo allora tracciare il diagramma a rette prendendo il punto di rottura in ω_0 :

- $\omega \ll \omega_0$, da cui:

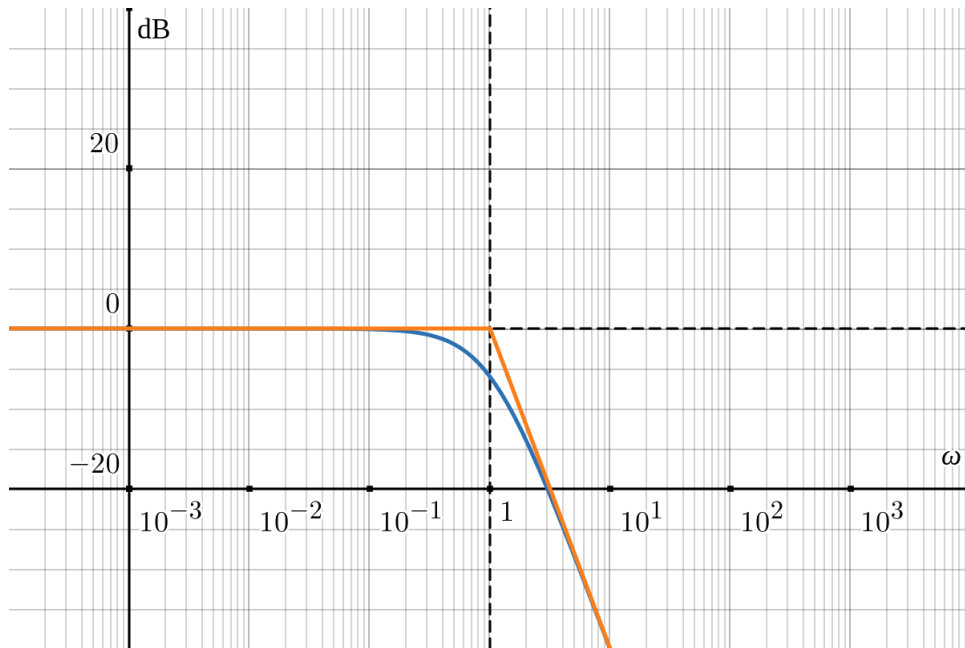
$$|G(j\omega)| \approx 0 \text{ dB}$$

- $\omega \gg \omega_0$, da cui:

$$|G(j\omega)| \approx 20 \log \left(\frac{1}{\frac{\omega^2}{\omega_0^2}} \right) = 40 \log(\omega_0) - 40 \log(\omega)$$

cioè si ottiene una retta con pendenza di -40 dB/dec (-12 dB/oct).

Da cui si ottiene l'approssimazione (sovrapposta al valore reale):



1.1.2 Risonanza

Potrebbe interessarci valutare l'errore, soprattutto considerato il fatto che non teniamo conto dello smorzamento ξ nella stima per rette. Prendiamo quindi il valore sul punto di rottura:

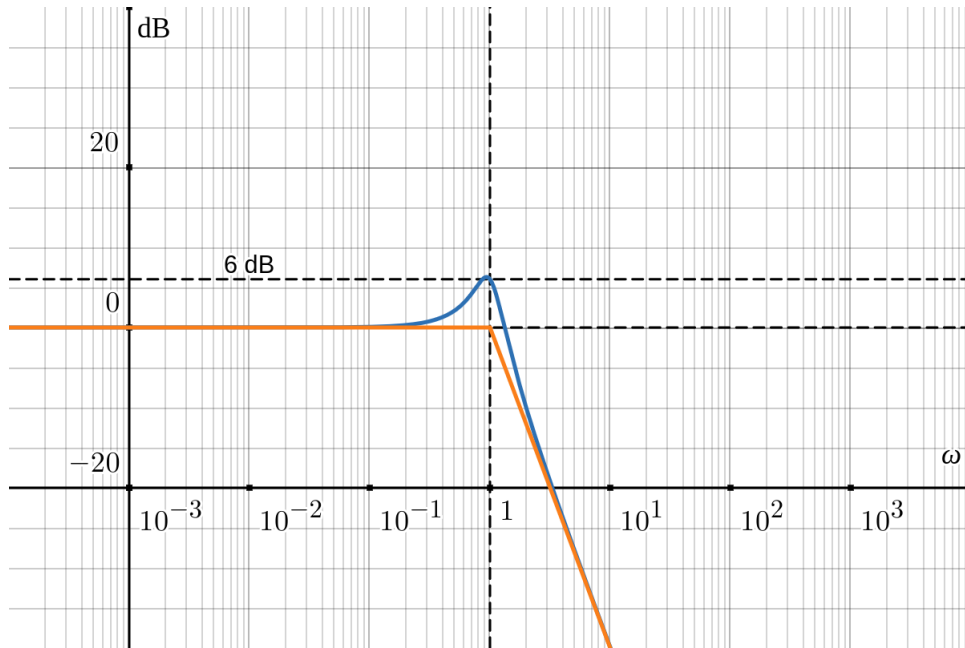
$$|G(j\omega_0)|_{dB} = 20 \log \left(\frac{1}{4\xi^2} \right) = -20 \log (2\xi)$$

per cui si ottengono gli errori al variare di ξ (considerata la nostra approssimazione per rette che prende 0 dB a $\omega = \omega_0$):

ξ	Errore
0	$+\infty$
$\frac{1}{2}$	0 dB
$\frac{\sqrt{2}}{2}$	-3 dB
2	-6 dB

Come regola empirica, possiamo assumere di poter usare il diagramma asintotico (il diagramma per rette) solo quando lo smorzamento è $\xi > 0.3$.

Vediamo ad esempio l'errore che commettiamo per $\xi = \frac{1}{4}$, che calcoliamo subito dovrà essere di 6 dB:



Come notiamo, si forma un picco attorno a $\omega = \omega_0$, dove la risposta ha un valore di picco vicino (in verità a ξ decrescente il massimo assoluto si sposta sempre più verso sinistra) all'errore calcolato. Questo picco prende il nome di **picco di risonanza**.

1.1.3 Picco di risonanza

Per ricavare il **punto di picco** effettivo, cerchiamo il punto stazionario della funzione:

$$f(u) = (1 - u^2) + 4\xi^2 u^2, \quad u = \frac{\omega}{\omega_0}$$

che è il denominatore del modulo.

Abbiamo quindi, derivando:

$$\frac{d}{du} f(u) = 0 = -4u(1 - u^2) + 8\xi^2 u$$

da cui:

$$u_{max} = \frac{\omega_{max}}{\omega_0} = \sqrt{1 - 2\xi^2}$$

cioè il *punto di picco* è:

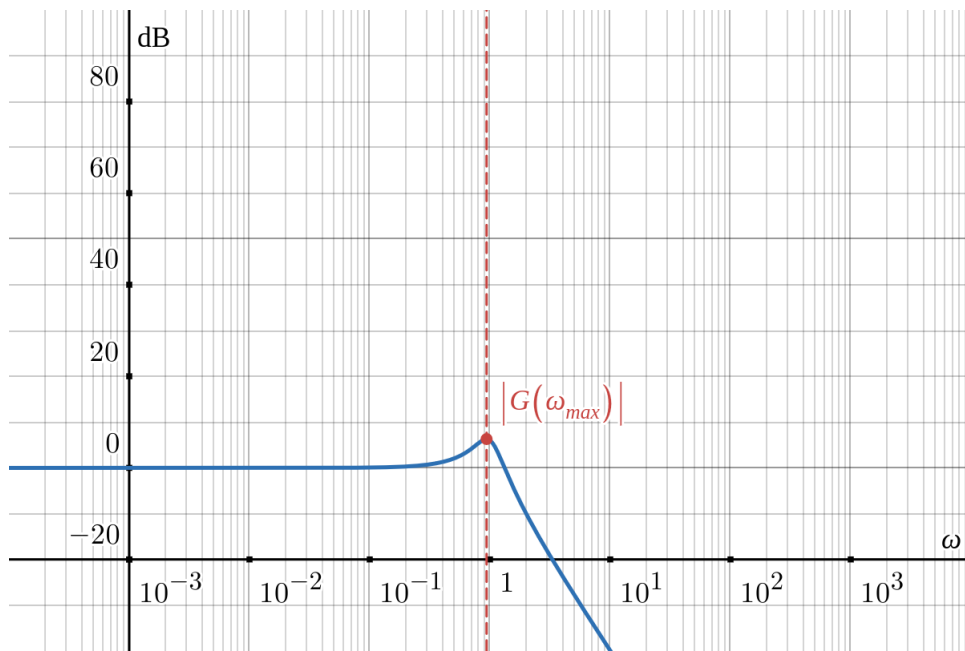
$$\omega_{max} = \omega_0 \sqrt{1 - 2\xi^2}$$

e il *valore di picco*, ovvero il modulo in decibel raggiunto nel punto di picco, è pari a:

$$\max |G(j\omega)|_{dB} = 20 \log(\omega_{max})$$

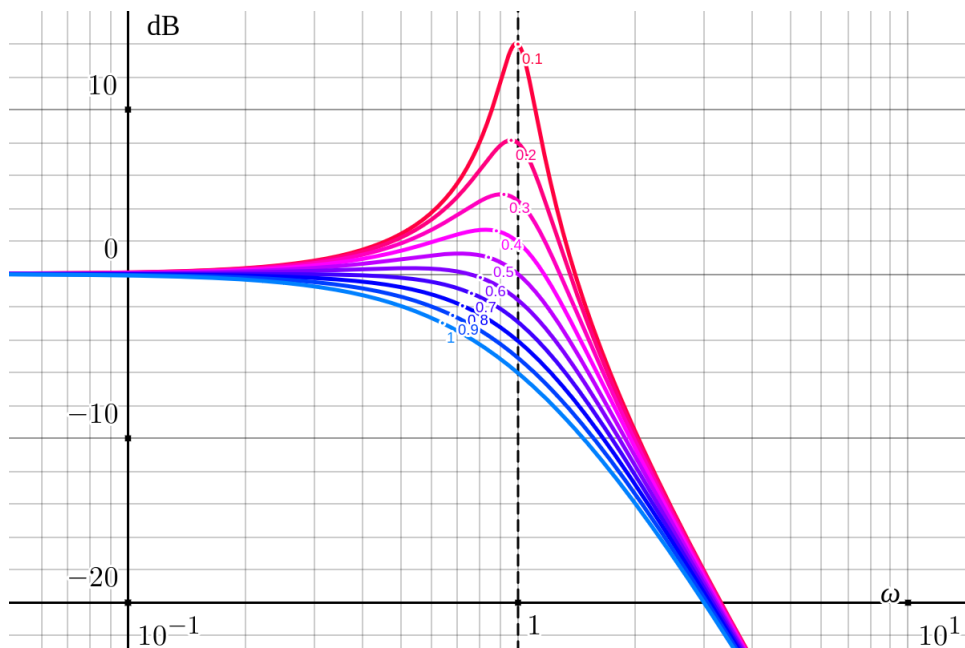
Osserviamo che questo valore è effettivamente definito su \mathbb{R} solo quando $\xi < \frac{1}{\sqrt{2}}$: questo si spiega semplicemente dal fatto che per $\xi > \frac{1}{\sqrt{2}}$ la funzione modulo del trasferimento è monotona, e non esiste nessun picco.

Vediamo quindi il punto di picco dell'esempio precedente, dove ricordiamo avevamo preso $\xi = \frac{1}{4}$:



Il valore ω_{max} , calcolato al computer, risulta circa ~ 0.935 , per cui l'errore $|G(\omega_{max})|$ in questo caso è abbastanza vicino all'errore in $\omega = 1$, che era di 6 dB.

Possiamo quindi riportare un grafico che mostra la variazione del picco di risonanza al variare dello smorzamento ξ :



Questo grafico è duale a quello in 14.1.1: prima avevamo parlato della risposta a transiente, e adesso parliamo della risposta a regime, ma in entrambi i casi vediamo favorire una certa frequenza di oscillazione ω_0 (che nel transiente avevamo visto è corretta di un fattore dipendente dallo smorzamento).

Inoltre, si vede molto bene come intorno a $0.7 \approx \frac{1}{\sqrt{2}}$ il picco scompare: questa è la conseguenza diretta del fatto che, come abbiamo detto, il punto di picco $\omega_0\sqrt{1-2\xi^2}$ è effettivamente definito su \mathbb{R} solo nel caso $\xi < \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Facciamo quindi un breve riassunto sulle frequenze di oscillazione che abbiamo incontrato finora:

- **Frequenza di oscillazione naturale:** ω_0
Abbiamo detto sarebbe la frequenza naturale a cui il sistema oscillasse se non vi fosse smorzamento ξ , e infatti vediamo che in tal caso corrisponde esattamente alle altre 2 frequenze;
- **Frequenza di oscillazione naturale smorzata:** $\omega_d = \omega_0\sqrt{1-\xi^2}$
Rappresenta la frequenza di oscillazione della *risposta libera* del sistema, cioè quella con cui, nel caso questo sia stabile, decade naturalmente al punto di equilibrio (l'origine);
- **frequenza di picco risonante:** $\omega_{max} = \omega_0\sqrt{1-2\xi^2}$
Rappresenta ciò che abbiamo visto, cioè la frequenza che il sistema, preso dal punto di vista della funzione di trasferimento ingresso-uscita, amplifica più delle altre (sotto l'ipotesi $\xi < \frac{1}{\sqrt{2}}$). In questo è intrinsecamente legata alla *risposta forzata* del sistema.

Si ricava immediatamente che nei sistemi sottosmorzati $\xi < 1$ (che sono comunque gli unici dove questo tipo di considerazioni si applicano), vale fra queste frequenze la relazione:

$$\omega_{max} < \omega_d < \omega_0$$

cioè il sistema preferisce oscillare, in *risposta libera* (ω_d), ad una frequenza leggermente più alta di quella di eccitazione massima in *risposta forzata* (ω_{max}).

1.1.4 Valutazione di fase

Per quanto riguarda la fase, invece, si avrà:

$$\angle G(j\omega) = -\text{atan2}\left(\frac{\frac{2\xi}{\omega_0}\omega}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}\right)$$

in quanto l'unico termine che determina la fase è il denominatore.

Potremo quindi prendere l'approssimazione per rette:

$$\begin{cases} \omega \ll \omega_0 \implies \angle G(j\omega) \approx 0^\circ \\ \omega \gg \omega_0 \implies \angle G(j\omega) \approx -180^\circ \\ \omega = \omega_0 \implies \angle G(j\omega) = -90^\circ \end{cases}$$

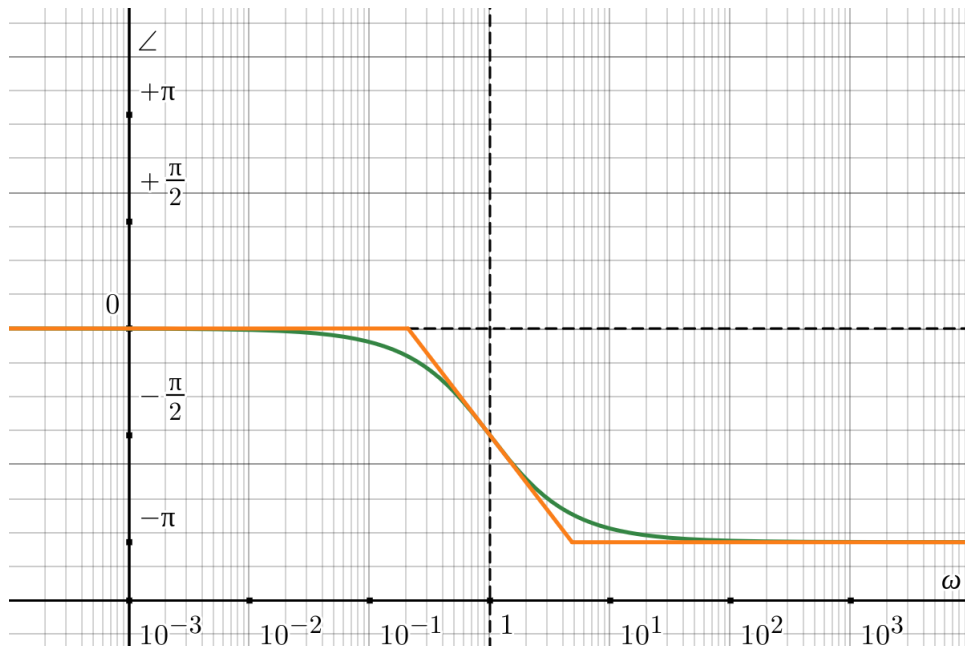
preso $\tau > 0$.

Il valore in $\omega = \omega_0$ si calcola osservando che:

$$\angle G(j\omega_0) = -\text{atan2}\left(\frac{2\xi}{0^+}\right)$$

da cui il limite, che porta appunto a -90° .

Otteniamo quindi il grafico approssimato, come sempre sovrapposto a quello reale:



Vediamo che lo scostamento in fase è lo stesso del sistema del primo ordine, ma raddoppiato: questo ha senso, in quanto abbiamo detto già lo stesso abbattimento dopo la frequenza di taglio ω_0 era del doppio, cioè -40 dB/dec.

Una considerazione più interessante potrebbe essere quella della pendenza della retta che approssima la componente intorno a ω_0 : abbiamo infatti che, a differenza dei sistemi del prim'ordine, nei sistemi del second'ordine lo scostamento in fase avviene con velocità diverse intorno alla frequenza di taglio (finora si è assunto -1): è proprio questo a dare il caratteristico picco di risonanza (rispettate le condizioni di cui sopra).

Calcoliamo allora la derivata dell'argomento della risposta:

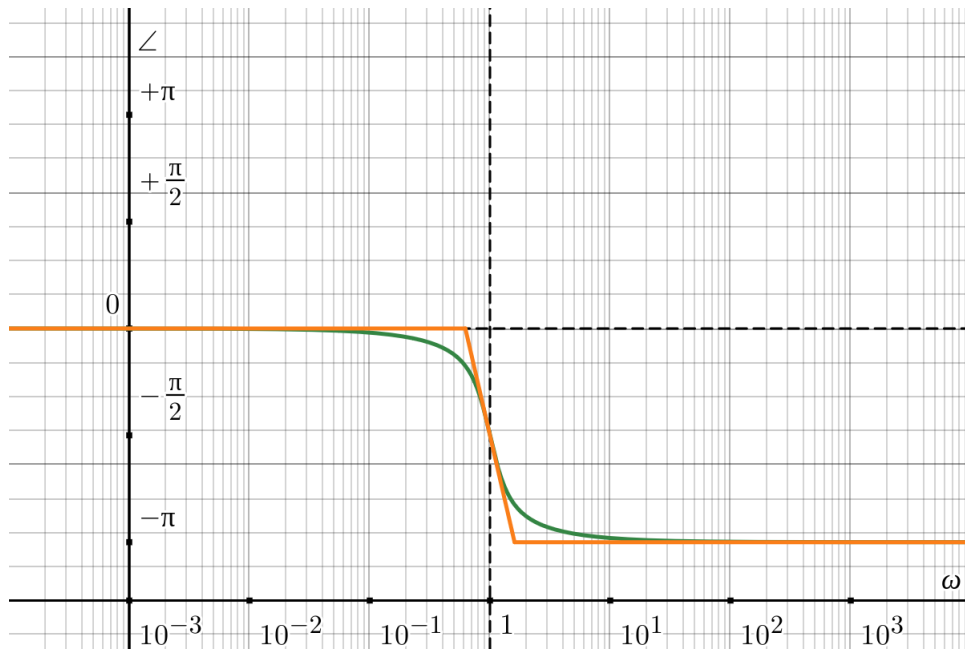
$$\frac{d}{d\omega} (\angle G(j\omega)) = - \frac{1}{1 + \left(\frac{\frac{2\xi\omega}{\omega_0}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}} \right)^2} \cdot \frac{\frac{2\xi}{\omega_0} \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \right) + \frac{2\xi\omega}{\omega_0} \cdot \frac{2\omega}{\omega_0^2}}{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \right)^2}$$

Questa funzione, valutata in ω_0 , dà:

$$\frac{d}{d\omega} (\angle G(j\omega)) (j\omega_0) = - \frac{2\xi}{\omega_0} \cdot \frac{\left(1 + \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2} \right)}{\left(1 - \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2} \right)^2 + \left(\frac{2\xi\omega_0}{\omega_0} \right)^2} = - \frac{1}{\xi\omega_0}$$

Traceremo quindi la retta di congiunzione in $\omega = \omega_0$ con coefficiente angolare $-\frac{1}{\xi\omega_0}$.

Vediamo ad esempio il caso con $\xi = 0.6$:



Dal punto di vista pratico, possiamo fare la stessa ipotesi di approssimazione di prima: per $\xi > 0.3$ prendiamo la retta con derivata -1 , mentre per $\xi < 0.3$ la pendenza è troppo ripida perchè questa sia valida.

1.2 Ritardo nei diagrammi di Bode

Vediamo infine l'effetto che il ritardo ha nel dominio frequenze. Avevamo già visto l'espressione del ritardo nel dominio di Laplace:

$$G(s) = e^{-s\tau}$$

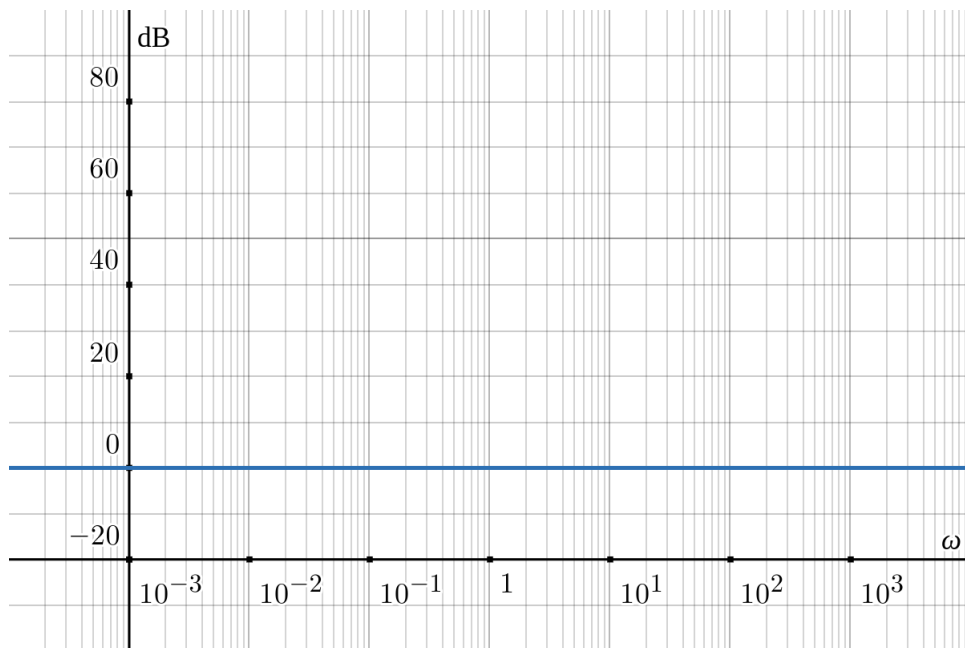
In risposta armonica, questa dà:

$$G(j\omega) = e^{-j\omega\tau}$$

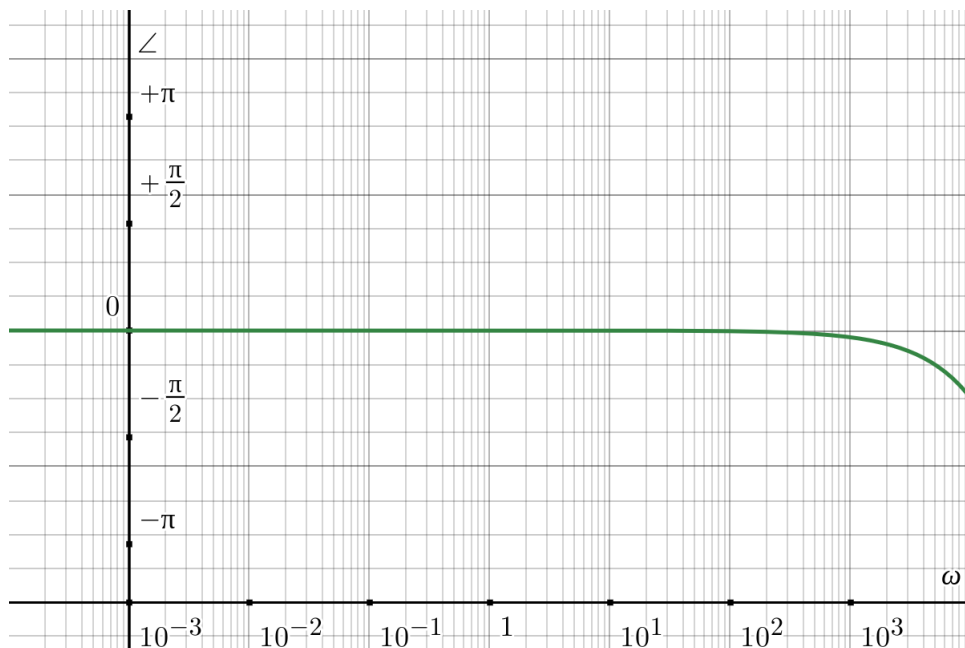
cioè uno scostamento in fase di $\omega\tau$.

L'effetto sul diagramma di Bode sarà quindi di lasciare invariato il modulo (cioè dare una costante a 0 dB), e soprattutto di scostare la fase di un valore pari a $-\omega\tau$.

Vediamo allora il grafico del modulo:



e il grafico della fase:



1.3 Esempio: diagramma di Bode

Vediamo quindi un esempio pratico di disegno di un diagramma di Bode. Prendiamo la funzione di trasferimento:

$$G(s) = 200 \frac{\left(s + \frac{1}{10}\right)}{(s + 1) \left(\frac{s^2}{400} + \frac{s}{20} + 1\right)}$$

che protiamo subito nella forma di Bode e in risposta armonica:

$$= 20 \frac{(10s + 1)}{(s + 1) \left(\frac{s^2}{400} + \frac{s}{20} + 1 \right)} = 20 \frac{(10j\omega + 1)}{(j\omega + 1) \left(-\frac{\omega^2}{400} + \frac{j\omega}{20} + 1 \right)}$$

Vediamo poi il guadagno: questo nella forma di Bode è dato dal 20 che moltiplica il rapporto polinomi. Dalla tabella in 17.2.1 ricordiamo che un modulo di $|20|$ corrisponde a un guadagno di 26 dB. Aggiugneremo quindi questo valore a tutti i moduli che calcoleremo.

Da qui distinguiamo zeri e poli e ne individuiamo il comportamento tramite un approssimazione per rette. Da quanto avevamo dimostrato nella 17.1.3, potremo poi sommare i grafici ottenuti dalle singole risposte per zero e per polo e ottenere la risposta complessiva.

Abbiamo quindi:

- **Zeri:**

- $10j\omega + 1$: questo rappresenta una rampa, con pendenza di 20 dB/dec, che inizia a pulsazione $j\omega^* = \frac{1}{10}$.
Dal punto di vista della fase rappresenterà una transizione da 0° a 90° con punto a derivata unitaria in $\frac{1}{10}$.

- **Poli:**

- $j\omega + 1$: questo rappresenta un passa basso, con pendenza di -20 dB/dec e frequenza di taglio a $j\omega^* = 1$.
Dal punto di vista della fase rappresenterà una transizione da 0° a -90° con punto a derivata unitaria in 1;
- $-\frac{\omega^2}{400} + \frac{j\omega}{20} + 1$: questa è una forma del secondo grado, di cui ci interessa prima di tutto conoscere il tipo. Riconosciamo allora di poterci ricondurre alla forma $-\frac{\omega^2}{\omega_0^2} + \frac{2\xi}{\omega_0}j\omega + 1$, cioè:

$$-\frac{\omega^2}{400} + \frac{j\omega}{20} + 1 = -\frac{\omega^2}{\omega_0^2} + \frac{2\xi}{\omega_0}j\omega + 1$$

da cui:

$$\omega_0^2 = 400 \implies \omega_0 = 20, \quad \frac{2\xi}{\omega_0} = \frac{2\xi}{20} = \frac{1}{20} \implies \xi = \frac{1}{2}$$

cioè siamo nel caso sottosmorzato, tra con l'altro $\xi = 0.5$, che è compreso fra 0.3 e 0.7, quindi abbiamo detto *risonante* ma *approssimabile* col diagramma a rette. Ignoriamo quindi lo smorzamento e prendiamo un filtro passa basso con pendenza di -40 dB/dec e frequenza di taglio a $j\omega^* = 20$.

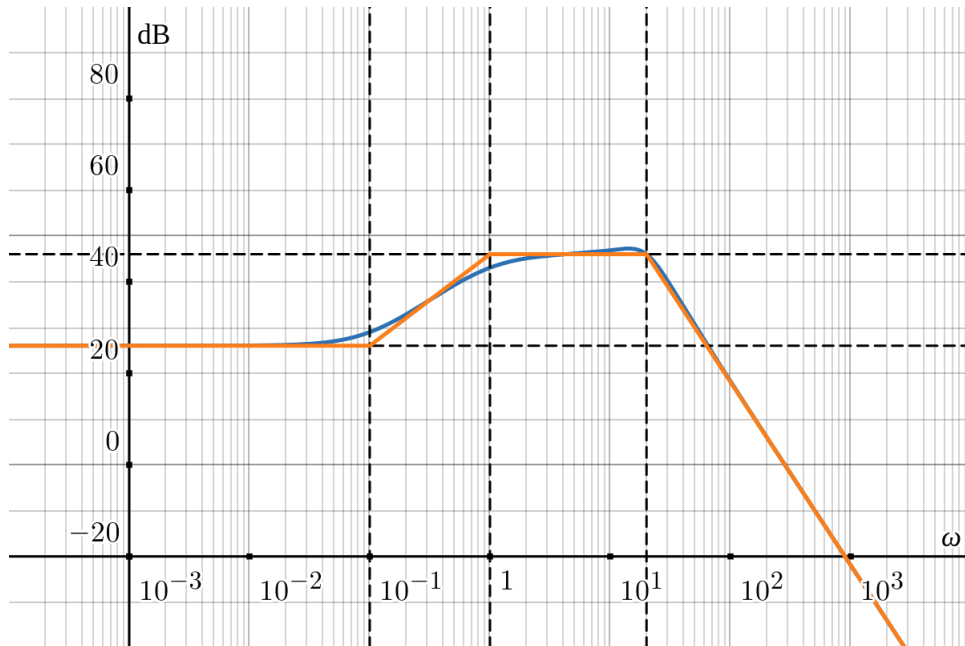
Dal punto di vista della fase rappresenterà una transizione da 0° e -90°

Tracciamo quindi il diagramma di Bode del modulo, considerando le seguenti regioni:

- $[0, 0.1)$: nessun zero o polo è attivo, quindi si resta a $0 + 26$ dB;
- $[0.1, 1)$: lo zero è attivo, si sale con 20 dB/dec fino a $20 + 26$ dB;
- $[1, 20)$: il polo lineare è attivo e compensa lo zero, si resta a $20 + 26$ dB;

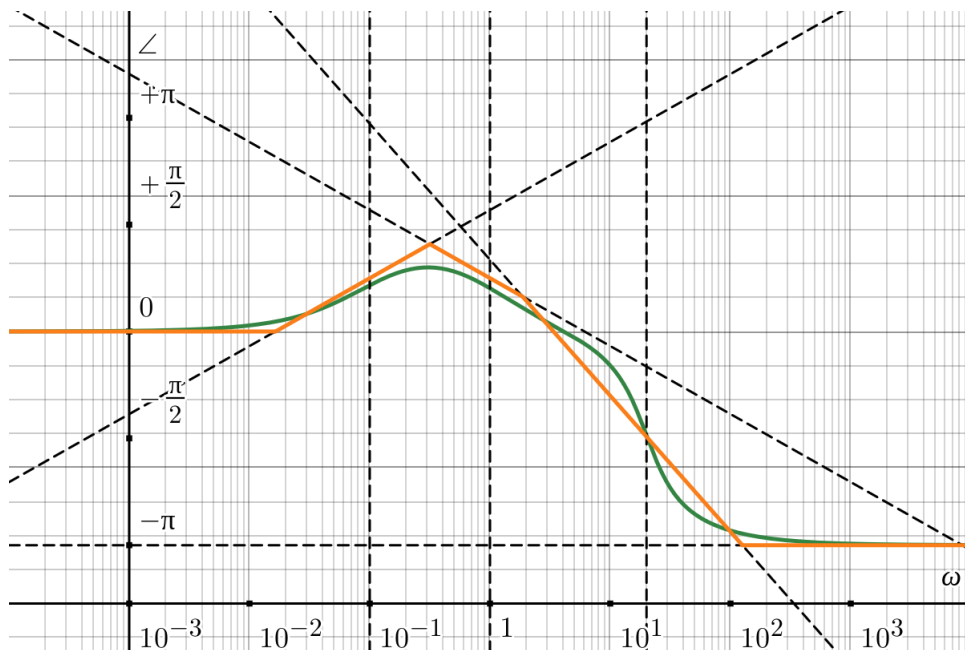
- $[20, +\infty)$: il polo quadratico è attivo, si scende con -40 dB/dec .

da cui il grafico:



che come vediamo si discosta dal grafico originale per lo più per lo smussamento intorno a $0.1 \sim 1$, e per il picco di risonanza (che abbiamo volontariamente ignorato) a 20.

Disegniamo quindi il diagramma di Bode della fase. In questo caso notiamo di avere molta sovrapposizione fra le transizioni di fase: un'idea potrebbe essere quella di considerare assoluti solo i valori assoluti 0 e a $+\infty$, e per gli zeri e i poli intermedi prendere i punti "medi" (a $\pm 45^\circ$ per lo zero e il polo lineare, e a -90° per il polo quadratico).



che vediamo essere abbastanza simile alla fase effettiva (in verde).