1 Lezione del 06-03-25

1.1 Forma di Jordan con autovalori complessi e coniugati

Nel caso si trovi A matrice reale con autovalori complessi e coniugati, è possibile usare un cambio di coordinate che trasforma la matrice diagonale complessa in una matrice reale diagonale a blocchi.

Questo è il caso che abbiamo già visto di:

$$\begin{pmatrix} \sigma & \omega \\ -\omega & \sigma \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \sigma + j\omega & 0 \\ 0 & \sigma - j\omega \end{pmatrix}$$

e:

$$\begin{pmatrix} \sigma & \omega & 1 & 0 \\ -\omega & \sigma & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \sigma & \omega \\ 0 & 0 & -\omega & \sigma \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \sigma + j\omega & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma + j\omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma - j\omega & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma - j\omega \end{pmatrix}$$

In generale, quindi, abbiamo matrici di Jordan:

$$J_r = \begin{pmatrix} M & I & 0 & \dots & 0 \\ 0 & M & I & \dots & 0 \\ 0 & \dots & M & I & 0 \\ 0 & \dots & 0 & M & I \\ 0 & \dots & \dots & 0 & M \end{pmatrix}$$

dove gli M rappresentano i singoli miniblocchi:

$$M = \begin{pmatrix} \sigma & \omega \\ -\omega & \sigma \end{pmatrix}$$

Il numero di blocchi è quindi pari al numero di coppie di autovalori complessi coniugati.

1.2 Raggiungibilità

Abbiamo visto come la proprietà di stabilita dipende solo dalla struttura del sistema, e in particolare dalla sola matrice A.

Vediamo come in verità esistono altre proprietà che dipendono dalla struttura del sistema e che ci sono di interesse dal punto di vista della regolazione automatica. Una di queste proprietà è la **raggiungibilità**.

Diamo quindi la definizione:

Definizione 1.1: Raggiungibilità

Dato il sistema dinamico di ordine n con m ingressi e p uscite:

$$\begin{cases} x' = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}$$

allora uno stato $\overline{x}$ si dice raggiungibile se esistono un istante di tempo finito $\overline{t} > 0$ e un ingresso $\overline{u}$ definito tra 0 e $\overline{t}$ tali che, detto $\overline{x}_f(t)$ il movimento forzato dello stato generato da $\overline{u}$, risulti che $\overline{x}_f(\overline{t}) = \overline{x}$.

La proprieta di raggiungibilità degli stati divide gli stessi in due categorie: stati raggiungibili e stati non raggiungibili.

1.2.1 Completa raggiungibilità

Se tutti gli stati di un sistema sono raggiungibili, allora il sistema è detto **completamente raggiungibile**.

Si può verificare se un sistema è completamente raggiungibile sfruttando la matrice:

$$\mathcal{M}_{\mathcal{R}} = \begin{pmatrix} B & AB & A^B & \dots & A^{n-1}B \end{pmatrix}$$

e verificando se:

$$\text{rank}(\mathcal{M}_{\mathcal{R}}) = n$$

Nel caso un sistema non sia completamente raggiungibile si può isolare la parte raggiungibile, cioè definire una trasformazione T_r che ci porti:

$$x' = Ax + Bu, \quad \hat{x} = T_r x \implies \hat{x}' = \hat{A}\hat{x} + \hat{B}u$$

con:

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} \hat{A}_a & \hat{A}_{ab} \\ 0 & \hat{A}_b \end{pmatrix}, \quad \hat{B} = \begin{pmatrix} \hat{B}_a \\ 0 \end{pmatrix}$$

con $\hat{A}_a \in \mathbb{R}^{n_r \times n_r}$ e $\hat{B}_a \in \mathbb{R}^{n_r \times m}$, con $n_r = \text{rank}(\mathcal{M}_{\mathcal{R}})$.

Posto:

$$\hat{x} = \begin{pmatrix} \hat{x}_r \\ \hat{x}_{nr} \end{pmatrix}$$

si avrà svolgendo le moltiplicazioni che:

$$\begin{cases} \hat{x}_r' = \hat{A}_a \hat{x}_r + \hat{A}_{ab}\hat{x}_{nr} + \hat{B}_a u \\ \hat{x}_{nr}' = \hat{A}_b \hat{x}_{nr} \end{cases}$$

ovvero si divide lo stato in una parte raggiungibile e in una parte non raggiungibile.

1.2.2 Ricavare la matrice $\mathbf{T_r}$

Per ricavare la matrice di trasformazione T_r basterà scegliere n_r colonne linearmente indipendenti di $\mathcal{M}_{\mathcal{R}}$. Ogni stato raggiungibile sarà combinazione lineare di queste colonne. Si aggiungono poi $n - n_r$ colonne linearmente indipendenti, prese ad arbitrio.