1 Lezione del 15-04-25

1.0.1 Approssimazione del punto di crossover a 0 dB

Potrebbe esserci di interesse trovare quando il diagramma del modulo di una risposta in frequenza interseca l'asse a 0 dB.

Preso ad esempio l'esempio della scorsa lezione, che avevamo portato in forma di Bode:

$$G(s) = 20 \frac{(10s+1)}{(s+1)\left(\frac{s^2}{400} + \frac{s}{20} + 1\right)}$$

possiamo procedere in 2 modi:

- Calcolando il valore approssimato ottenuto nell'ultimo zero o polo agente, e l'ultima salita/discesa in dB/oct o dB/dec che osserviamo nel grafico, e quindi cercando l'intersezione del grafico.

  Nell'esempio precedente avremo quindi l'ultimo punto fisso a 46 dB, con una discesa da questo in poi di -40 dB/dec. Avremo quindi che l'andamento della risposta in modulo da $\omega = 200$ in poi:

  $$|G(j\omega)|_{dB} = 46 - 40 \log\left(\frac{\omega}{20}\right)$$

  da cui imponendo a 0:

  $$0 = 46 - 40 \log\left(\frac{\omega}{20}\right) \implies \omega^* = 20 \cdot 10^{\frac{46}{40}} \approx 282.51$$

  cioè risulta che a ~ 282.84 rad/s si ha il punto di intersezione in 0 dB.

- Sommando (che in dB significa moltiplicando) le approssimazioni asintotiche di ogni termine al numeratore e denominatore, quindi ogni zero e polo, e imponendo il loro rapporto all'unità (come abbiamo detto, 0 dB significà unità).

  Nell'esempio precedente vorremmo partire dalla costante:

  $$G(s) \approx 20$$

  e quindi moltiplicare per l'approssimazione asintotica dello zero, che è il solo termine in s, $10s$:

  $$\approx 20 \cdot 10s = 200s$$

  Dividiamo quindi per il polo lineare, prendendo ancora solo il termine in s, cioè s stesso:

  $$\approx \frac{200s}{s} = 200$$

  e infine dividiamo per il polo quadratico, per cui come approssimazione asintotica prendiamo il termine di grado massimo in, $\frac{s^2}{400}$:

  $$\approx 200 \cdot \frac{400}{s^2}$$

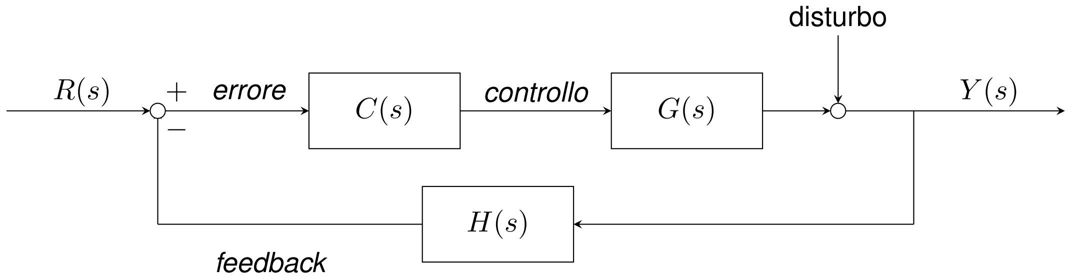
  Imponendo qindi l'unità si ottiene:

  $$\frac{80000}{s^2} = 1 \implies s = \sqrt{80000} \approx 282.84$$

  cioè risulta a ~ 282.84 rad/s si ha il punto di intersezione in 0 dB, che è abbastanza vicino alla stima precedente.

1.1 Luogo delle radici

Il luogo delle radici è un metodo per studiare sul piano complesso l'effetto della reazione negativa sui poli del sistema in catena chiusa, assunto di conoscere la funzione di trasferimento in catena aperta $G(s)$, cioè secondo quanto già visto in 15.2, da cui riportiamo il grafico:



assunto, come sempre, $H(s)$ sensore all'unità e disturbi trascurabili.

Facciamo quindi l'ulteriore semplificazione di prendere il controllore come una *costante proporzionale*, cioè:

$$C(s) = K$$

Il luogo delle radici permette quindi l'analisi *grafico-visuale* delle variazioni dei poli in catena chiusa al variare di uno o più parametri (eventualmente introdotti da un controllore).

1.1.1 Equazione caratteristica

Avremo quindi che, sotto le ipotesi di cui sopra, le risposte saranno:

- In **circuito aperto**:

$$K \cdot G(s) = K \cdot \frac{\prod_{i=1}^{m}(s - z_i)}{\prod_{i=1}^{n}(s - p_i)} = K \cdot \frac{n(s)}{d(s)}$$

- In **circuito aperto**:

$$W(s) = \frac{K \cdot G(s)}{1 + K \cdot G(s)} = \frac{K \cdot n(s)}{d(s) + K \cdot n(s)}$$

I poli in catena chiusa saranno quindi le radici del polinomio:

$$d(s) + K \cdot n(s)$$

chiamiamo infatti la seguente equazione:

$$d(s) + K \cdot n(s) = 0$$

equazione caratteristica del sistema in catena chiusa.

Il **luogo delle radici** in sé per sé sarà quindi l'insieme delle radici dell'equazione caratteristica al variare di K.

Vediamo allora una serie di *regole* che possiamo usare per tracciare il luogo delle radici:

1. Varrà quindi la regola (1), cioè che il numero di radici in ciclo chiuso è uguale al numero di poli della funzione G in ciclo aperto. Questo significa che il numero di *rami* del luogo delle radici è uguale al numero di poli della funzione di trasferimento in ciclo aperto.

   In particolare, se diciamo che il numeratore $n(s)$ ha grado m e il denominatore $d(s)$ ha grado n, con $n \geq m$, avremo che l'equazione caratteristica ha grado n, cioè si hanno tante radici dell'equazione caratteristica quanti sono i poli della funzione di trasferimento in ciclo aperto.

   Riprendendo l'equazione caratteristica, quindi, potremo dire:

   $$d(s) + K \cdot n(s) = 0 \implies \frac{n(s)}{d(s)} = -\frac{1}{K}$$

   da cui si definisce la cosiddetta **condizione di fase**:

   $$\begin{cases} \angle n(s) - \angle d(s) = -\pi \pm 2h\pi, & K > 0 \\ \angle n(s) - \angle d(s) = \pm 2h\pi, & K < 0 \end{cases}$$

   cioè ogni 2π si torna nello stesso punto nel piano di Gauss. Applicare la condizione di fase significa quindi costruire il luogo delle radici.

   Nessuno ci nega di costruire anche una **condizione di modulo**, cioè imporre:

   $$\left| \frac{n(s)}{d(s)} \right| = \frac{1}{|K|}$$

   applicare la condizione di modulo significa "tarare" il luogo delle radici.

2. Potremo quindi ricavare la regola (2), cioè dire che preso:

   $$d(s) + K \cdot n(s) = 0$$

   ponendo $K = 0$ si nota che il luogo parte dai **poli a ciclo aperto** del sistema (cioè da $d(s) = 0$);

   Di contro, preso:

   $$\frac{1}{K} \cdot d(s) + n(s) = 0$$

   ponendo $K = +\infty$ si nota che il luogo arriva agli **zeri a ciclo aperto** del sistema (cioè $n(s) = 0$).

   Si ha quindi la regola generale che il luogo *parte* dai **poli a ciclo aperto** e *arriva* agli **zeri a ciclo aperto**. Questi ultimi, in particolare, possono essere al *finito* o all'*infinito* (come chiariremo fra poco).

   Prendiamo l'esempio:

   $$G(s) = \frac{1}{s(s+1)}$$

   da cui :

   $$K \cdot G(s) = \frac{K}{s(s+1)}$$

   e quindi l'equazione caratteristica:

   $$s(s+1) + K = 0$$

   Posto $K = 0$ si trovano quindi i poli in ciclo aperto, cioè punti di partenza del luogo delle radici, $s_1 = 0$ e $s_2 = -1$.

3. La regola (3) è che tutto l'asse reale appartiene al luogo delle radici. In particolare, se $K > 0$ il luogo lascia alla propria destra un numero *dispari* di punti critici (poli e zeri) sull'asse reale, mentre se $K < 0$ il luogo ne lascia alla propria destra un numero *pari*.

   Questa regola deriva direttamente dalla condizione di fase, che avevamo imposto come:

   $$\begin{cases} \angle n(s) - \angle d(s) = -\pi \pm 2h\pi, & K > 0 \\ \angle n(s) - \angle d(s) = \pm 2h\pi, & K < 0 \end{cases}$$

   Si ha quindi che un punto s nel piano di Gauss appartiene al luogo delle radici se la somma delle fasi dei vettori che partono dalle singolarità (poli o zeri) e terminano nel punto s è uguale a $-\pi$ (o 0, se $K < 0$).

   Nel nostro esempio avevamo:

   $$\angle \frac{1}{s(s+1)} = -\pi \pm 2h\pi$$

   qui prende il rapporto e non la sottrazione ??? (si parla di angoli dovrebbero essere la solita cosa)

   eh capito poco riguarda, ha fatto i casi $K <> 0$ con s_i di *test* tra $[-\infty, -1]$, $[-1, 0]$, $[0, +\infty]$

4. La regola (4) afferma che il luogo delle radici è **simmetrico** rispetto all'*asse reale*.

   Anche qui sfruttiamo la condizione di fase di cui sopra. guarda slide boh