1 Lezione del 20-03-25

1.1 Proprietà della trasformata di Laplace

Vediamo alcune proprietà della trasformata di Laplace introdotta alla scorsa lezione.

1. **Linearità:** si ha che, prese due trasformate:

$$\begin{cases} \mathcal{L}\{f_1(t)\} = F_1(s), & \mathrm{Re}(s) > a_1 \\ \mathcal{L}\{f_2(t)\} = F_2(s), & \mathrm{Re}(s) > a_2 \end{cases}$$

la loro combinazione lineare è semplicemente la trasformata:

$$\mathcal{L}\{c_1 \cdot f_1(t) + c_2 \cdot f_2(t)\} = c_1 \cdot F_1(s) + c_2 \cdot F_2(s), \quad \mathrm{Re}(s) \geq \max(a_1, a_2)$$

La dimostrazione è banale e deriva dalla linearità dell'operatore integrale sulla base del quale avevamo definito la trasformata stessa.

2. **Traslazione:** abbiamo visto che il termine e^{-st_0} rappresenta una traslazione temporale, ovvero:

$$\mathcal{L}\{f(t - t_0)\} = e^{-st_0} F(s)$$

Questo si dimostra da:

$$\mathcal{L}\{f(t - t_0)\} = \int_0^{+\infty} f(t - t_0) \cdot e^{-st} \, dt = \int_{-t_0}^{+\infty} f(\tau) \cdot e^{-s(\tau + t_0)} \, d\tau$$
$$= e^{-st_0} \int_0^{+\infty} f(\tau) \cdot e^{-s\tau} \, d\tau = e^{-st_0} \cdot F(s)$$

ci dovrebbe essere heaviside di mezzo, così è malposta operando il cambio di variabile $\tau = t - t_0$. □

3. **Cambio di scala:** prendiamo il "cambio di scala" alla variabile temporale $f(at)$. Avremo che il risultatò dipenderà dalla L-trasformata di f, che avevamo chiamato F, come:

$$\mathcal{L}\{f(at)\} = \frac{1}{a} \cdot F\left(\frac{s}{a}\right)$$

Questo si dimostra applicando la definizione col cambio di variabile: $\tau = at$, con $d\tau = a\,dt$:

$$\mathcal{L}\{f(at)\} = \int_0^{+\infty} f(at) e^{-st} \, dt = \int_0^{+\infty} f(\tau) e^{-s\frac{\tau}{a}} \frac{d\tau}{a}$$
$$= \frac{1}{a} \int_0^{+\infty} f(\tau) e^{-s\frac{\tau}{a}} \, d\tau = \frac{1}{a} \cdot F\left(\frac{s}{a}\right)$$

4. **Derivazione in s:** vale la proprietà rispetto alle derivate su s:

$$\mathcal{L}(t \cdot f(t)) = -\frac{dF(s)}{ds}$$

Per la derivazione a catena si ha quindi:

$$\mathcal{L}\{t^n \cdot f(t)\} = (-1)^n \frac{d^n F(s)}{ds^n}$$

e quindi riguardo al gradino:

$$\mathcal{L}\left\{\frac{t^k}{k!} \cdot H(t)\right\} = \frac{1}{s^{k+1}}$$

5. **Traslazione in s:** vale rispetto alla traslazione su s:

$$F(s-a) = \mathcal{L}\{e^{at} \cdot f(t)\}$$

dimostra tutte quest ultime

1.1.1 Sinusoide

Usiamo la proprietà di linearità appena trovata per calcolare l'L-trasformata di $f(t) = H(t)\sin(\omega t)$. Avremo che, dalla formula di Eulero:

$$\mathcal{L}\{\sin(\omega t)\} = \mathcal{L}\left\{\frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j}\right\}$$

Potremo allora applicare la linearità:

$$= \frac{1}{2j}\mathcal{L}\{e^{j\omega t}\} - \frac{1}{2j}\mathcal{L}\{e^{-j\omega t}\}$$

da cui si continua con semplici calcoli (attraverso la trasformata dell'esponenziale vista alla scorsa lezione):

$$= \frac{1}{2j}\left(\frac{1}{s-j\omega} - \frac{1}{s+j\omega}\right) = \frac{1}{2j}\left(\frac{2j\omega}{s^2+\omega^2}\right) = \frac{\omega}{s^2+\omega^2}$$

□

1.1.2 Cosinusoide

Valgono considerazioni analoghe per la funzione $f(t) = H(t)\cos(\omega t)$. Avremo che, dalla formula di Eulero:

$$\mathcal{L}\{\sin(\omega t)\} = \mathcal{L}\left\{\frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2}\right\}$$

Potremo allora applicare la linearità:

$$= \frac{1}{2}\mathcal{L}\{e^{j\omega t}\} - \frac{1}{2}\mathcal{L}\{e^{-j\omega t}\}$$

da cui:

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-j\omega} - \frac{1}{s+j\omega}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{2s}{s^2+\omega^2}\right) = \frac{s}{s^2+\omega^2}$$

□

1.1.3 Sinusoidi/cosinusoidi con scostamento

Nel caso di scostamento dato da un termine ϕ, cioè $f(t) = \sin(\omega t + \phi)$, avremo dall'applicazione delle formule di addizione degli angoli:

$$\mathcal{L}(\sin(\omega t+\phi)) = \mathcal{L}(\sin(\omega t)\cdot\cos(\phi)+\cos(\omega t)\cdot\sin(\phi)) = \cos(\phi)\cdot\mathcal{L}\{\sin(\omega t)\}+\sin(\phi)\cdot\mathcal{L}(\cos(\omega t))$$

e dalle formule appena trovate::

$$= \cos(\phi)\cdot\frac{w}{s^2+\omega^2} + \sin(\phi)\cdot\frac{s}{s^2+\omega^2} =$$

1.2 Operazioni integro-differenziali con Laplace

La comodità della trasformata di Laplace è che ci permette di esprimere per via algebrica gli operatori integro-differenziali.

1.2.1 Derivata con Laplace

Vale che:

Teorema 1.1: Derivata con Laplace

Per una certa funzione f, sotto larghe ipotesi, vale:

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d}{dt}f(t)\right\} = sF(s) - f(0)$$

Questo si dimostra ricordando la formula di integrazione per parti:

$$\int u\,dv = u \cdot v - \int v\,du$$

e applicando:

$$\mathcal{L}\left\{\frac{df}{dt}\right\} = \int_0^{+\infty} \frac{df}{dt} \cdot e^{-st}\,dt = f(t) \cdot e^{-(st)}\Big|_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} -s \cdot f(t) \cdot e^{-st}\,dt = sF(s) - f(0)$$

□

Una nota importante è il valore della funzione in 0. Nel caso di funzioni discontinue (come ad esempio il gradino) si deve infatti scegliere fra 0^- e 0^+, cioè:

$$\mathcal{L}^-\{f(t)\} = \lim_{\epsilon \to 0^-} \int_\epsilon^{+\infty} f(t)e^{-st}\,dt$$

$$\mathcal{L}^+\{f(t)\} = \lim_{\epsilon \to 0^+} \int_\epsilon^{+\infty} f(t)e^{-st}\,dt$$

Varrà:

$$\mathcal{L}^- = \mathcal{L}^+ + \int_{0^-}^{0^+} f(t)e^{-st}\,dt = \mathcal{L}^+ + a_0$$

dove la costante a_0 rappresenterà gli effetti impulsivi che ci portano al "salto" in 0.

1.2.2 Esempio: derivata del gradino

Possiamo usare la formula appena trovata per la derivazione per dimostrare che in qualche modo l'impulso di Dirac rappresenta la derivata del gradino di Heaviside. Notiamo infatti che:

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d}{dt}H(t)\right\} = s \cdot \frac{1}{s} - f(0^-) = 1 = \mathcal{L}(\sigma(t))$$

assunto $t_0 = 0$.

1.2.3 Integrale con Laplace

Vale che:

Teorema 1.2: Integrale con Laplace

Per una certa funzione f, sotto larghe ipotesi, vale:

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(t)\,dt\right\} = \frac{F(s)}{s}$$

Questo si dimostra partendo dalla formula di derivazione, e ponendo:

$$g(t) = \int_0^t f(\tau)\,d\tau, \quad g(0) = 0$$

da cui:

$$\frac{dg(t)}{dt} = f(t)$$

e quindi:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) = \mathcal{L}\left\{\frac{dg}{dt}\right\} = s \cdot \mathcal{L}\{g(t)\} - g(0) \implies \mathcal{L}\{g(t)\} = \frac{F(s)}{s}$$

da cui la tesi. □

1.2.4 Convoluzione con Laplace

Vediamo infine la convoluzione:

Teorema 1.3: Convoluzione con Laplace

Per due funzioni f_1, f_2, sotto larghe ipotesi e definito un opportuno prodotto di convoluzione, vale:

$$\mathcal{L}\{f_1(t) \ast f_2(t)\} = F_1(s) \cdot F_2(s)$$

assunto:

$$\begin{cases} \mathcal{L}\{f_1(t)\} = F_1(s) \\ \mathcal{L}\{f_2(t)\} = F_2(s) \end{cases}$$

Per noi il prodotto di convoluzione sarà il solito:

$$f_1(t) \ast f_2(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau) \cdot f_2(t-\tau)\,d\tau$$

che sotto le ipotesi di funzioni "tagliate" a 0, come abbiamo assunto, equivale a:

$$= \int_0^t f_1(\tau) \cdot f_2(t-\tau)\,d\tau = \int_0^{+\infty} f_1(\tau) \cdot f_2(t-\tau)\,d\tau$$

Potremo allora dire:

$$\mathcal{L}\{f_1(t) \ast f_2(t)\} = \int_0^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} f_1(\tau) \cdot f_2(t-\tau)\,d\tau \right) e^{-st}\,dt$$

Posto $e^{-st} = e^{-s(t+\tau-\tau)}$ si ha:

$$= \int_0^{+\infty} f_1(\tau) \cdot e^{-st} \left(\int_0^{+\infty} f_2(t-\tau) \cdot e^{-s(t-\tau)} \, dt \right) \, d\tau$$

a questo punto posto $v = t - \tau$ e quindi $dv = dt$ si ha:

$$= \int_0^{+\infty} f_1(\tau) \cdot e^{-s\tau} \left(\int_{-\tau}^{+\infty} f_2(v) \cdot e^{-sv} \, dv \right) \, d\tau$$

che notando la non interdipendenza dei due integrali (il $-\tau$ a pedice non "prende" nulla con f_2 definita per $t > 0$) si divide in:

$$= \int_0^{+\infty} f_1(\tau) \cdot e^{-s\tau} \, d\tau \cdot \int_0^{+\infty} f_2(v) \cdot e^{-sv} \, dv = F_1(s) + F_2(s)$$

da cui la tesi. $\square$