

# 1 Lezione del 09-04-25

## 1.1 Diagrammi di Bode

I diagrammi di Bode sono di 2 tipi:

1. Il **diagramma di modulo** (o ampiezza): rappresenta il modulo di  $G(j\omega)$  al variare della pulsazione  $\omega$ . Abbiamo quindi  $|G(j\omega)|$  alle ordinate e  $\omega$  alle ascisse, espresse in scala logaritmica. Il modulo si misura in decibel (dB), già in scala logaritmica, mentre per la pulsazione  $\omega$  si usa la scala logaritmica in base 10. Notiamo che il decibel è un **unità di misura relativa**: si interpreta come il rapporto fra due *potenze*, espresso in scala logaritmica, dove per la seconda grandezza, detta **valore di riferimento**, assumiamo 1:

$$\text{dB} = 10 \cdot \log_{10} \left( \frac{P}{P_{ref}} \right) = 10 \cdot \log_{10} \left( \frac{P}{1} \right)$$

Abbiamo quindi che il rapporto fra valore assoluto di ampiezza e il valore in decibel è:

$$x_{dB} = 20 \log_{10}(|x|)$$

Il 20 compare per via del fatto che consideriamo *ampiezze*, mentre il decibel esprime rapporti fra *potenze*. Abbiamo che la relazione fra ampiezza  $A$  e potenza  $P$  è quadratica:

$$A^2 \propto P$$

per cui si vuole calcolare effettivamente:

$$\begin{aligned} \text{dB} &= 10 \cdot \log_{10} \left( \frac{P}{P_{ref}} \right) = 10 \cdot \log_{10} \left( \frac{A^2}{A_{ref}^2} \right) = 10 \cdot \log_{10} \left( \left( \frac{A}{A_{ref}} \right)^2 \right) \\ &= 10 \cdot 2 \cdot \log_{10} \left( \frac{A}{A_{ref}} \right) = 20 \cdot \log_{10} \left( \frac{A}{A_{ref}} \right) \end{aligned}$$

assunto  $A_{ref} = 1$  come da ipotesi si ottiene la stessa formula di prima.

2. Il **diagramma di fase**: rappresenta la fase di  $G(j\omega)$  al variare della pulsazione  $\omega$ . Abbiamo quindi  $\angle G(j\omega)$  alle ordinate e  $\omega$  alle ascisse, la prima in scala lineare e la seconda nella stessa scala logaritmica in base 10 di prima.

### 1.1.1 Ascisse

Abbiamo quindi che sulle **ascisse** abbiamo sempre la *pulsazione* (rad/s) o *frequenza* (Hz), che non sono esattamente uguali ma sono fra di loro direttamente proporzionali per un fattore di  $2\pi$ :

$$f = \frac{\omega}{2\pi}$$

Queste sono espresse in scala logaritmica, e troviamo quindi i seguenti intervalli relativi:

- **Decade**: è la distanza in scala logaritmica tra numeri il cui rapporto è 10;
- **Ottava**: è la distanza in scala logaritmica tra numeri il cui rapporto è 2.

### 1.1.2 Ordinate

Alle **ordinate** manteniamo invece, nel caso di un diagramma di modulo, lo spettro di ampiezza in unità logaritmiche (dB). Abbiamo quindi che 0 dB equivalgono al valore di riferimento, che abbiamo detto è 1, mentre tutti gli altri valori si convertono usando la formula:

$$(\text{decibel}) \quad 20 \log_{10}(10^\alpha) = 20 \cdot \alpha \quad (\text{scala logaritmica})$$

Nel caso di diagrammi di fase, invece, abbiamo la fase in scala lineare, misurata in *radianti* (rad) o in *gradi* (°).

Notiamo infine che il *modulo* è una funzione **pari**:

$$|G(j\omega)| = |G(-j\omega)|$$

mentre la *fase* è una funzione **dispari**:

$$\angle G(j\omega) = -\angle G(-j\omega)$$

### 1.1.3 Proprietà dei diagrammi di Bode

Abbiamo quindi che i diagrammi di Bode sono molto comodi per avere rappresentazioni dettagliate di grandezze che variano in campi notevolmente estesi.

Notiamo le due proprietà

1. I diagrammi di Bode di sistemi in cascata si ottengono come somma dei diagrammi di Bode dei singoli sottoinsiemi. Questo perchè 2 sistemi in cascata con trasferimento  $G_1(s)$  e  $G_2(s)$  hanno trasferimento complessivo:

$$G_{eq}(s) = G_1(s) \cdot G_2(s)$$

ma come sappiamo la il logaritmo di un prodotto equivale alla somma dei logaritmi, ergo:

$$\log(G_1(s) \cdot G_2(s)) = \log(G_1(s)) + \log(G_2(s))$$

da cui la tesi. □

2. I diagrammi di Bode di una funzione in forma fattorizzata si ottengono come somma dei diagrammi elementari dei singoli fattori, sempre dalla stessa proprietà di cui sopra.

Queste considerazioni spiegano il perché delle scale logaritmiche: infatti se indichiamo le grandezze:

$$a = |a|e^{j\angle a}, \quad b = |b|e^{j\angle b}$$

e prendiamo il prodotto, si ha che:

$$a \cdot b = |a||b|e^{j(\angle a + \angle b)}$$

cioè gli angoli già si sommano in scala lineare, mentre adottando la scala logaritmica per le ampiezze si ha:

$$\log(|a||b|) = \log(|a|) + \log(|b|)$$

## 1.2 Forme fattorizzate

Vediamo quindi nel dettaglio come ricavare i diagrammi di Bode (quindi ampiezza e argomento) di funzioni in forma fattorizzata. Avremo che in questo caso la funzione di trasferimento ha l'aspetto:

$$G(s) = \frac{\prod_{i=1}^m (s - z_i)}{\prod_{i=1}^n (s - p_i)} \quad (1)$$

con **zeri** al *numeratore* e **poli** al *denominatore*.

Quello che fa il logaritmo è semplificare questa configurazione, in quanto i prodotti diventano somme e i rapporti diventano sottrazioni. Allora varrà che:

- Il valore in dB del modulo sarà dato dalla differenza tra le sommatorie dei valori in dB dei moduli dei fattori del numeratore e dei fattori del denominatore;
- L'argomento sarà dato dalla differenza tra le sommatorie degli argomenti dei fattori del numeratore e del denominatore.

Avremo quindi che  $G(s)$  con  $s = j\omega$ , cioè sistema asintoticamente stabile (si trascura la risposta transiente), dà:

$$G(j\omega) = \frac{K_B}{(j\omega)^h} \cdot \frac{\prod_{i=1}^{m-u} (1 \pm j\omega T_{z_i})}{\prod_{i=1}^{n-h-r} (1 \pm j\omega T_{p_i})} \cdot \frac{\prod_{i=1}^u \left(1 \pm j\omega \frac{2\xi_{z_i}}{\omega_{0z_i}} - \frac{\omega^2}{\omega_{0z_i}^2}\right)}{\prod_{i=1}^r \left(1 \pm j\omega \frac{2\xi_{p_i}}{\omega_{0p_i}} - \frac{\omega^2}{\omega_{0p_i}^2}\right)}$$

dove si è preso:

- $h$ : numero di poli all'origine, detto anche *tipo* del sistema;
- $K_B$ : guadagno di Bode;
- $m$ : numero di zeri;
- $h$ : numero di poli;
- $u$ : numero di zeri complessi coniugati;
- $r$ : numero di poli complessi coniugati.

Quindi il primo termine rappresenterà il guadagno statico di Bode, il secondo termine rappresenterà gli zeri e i poli *semplici*, e il terzo termine rappresenterà gli zeri e i poli complessi coniugati.

Questa, notiamo, è effettivamente la forma di Bode della (1) (che è una forma di Evans).

Vediamo quindi di applicare quanto avevamo detto al caso con *solli poli semplici*.

- Il modulo logaritmico sarà:

$$\log(G(j\omega)) = \sum_{i=1}^m \log(|1 \pm j\omega T_{z_i}|) - \sum_{i=1}^n \log(|1 \pm j\omega T_{p_i}|)$$

cioè si prendono i logaritmi dei moduli degli zeri meno i logaritmi dei moduli dei poli.

- La fase sarà:

$$\angle G(j\omega) = \sum_{i=1}^m \log(\angle(1 \pm j\omega T_{z_i})) - \sum_{i=1}^n \log(\angle(1 \pm j\omega T_{p_i}))$$

cioè si prendono i logaritmi delle fasi degli zeri meno i logaritmi delle fasi dei poli.

Da qui in poi vedremo quindi come tracciare i diagrammi di Bode di alcuni sistemi comuni.

### 1.2.1 Guadagno costante

Prendiamo la funzione di trasferimento a guadagno costante:

$$G(s) = K$$

Questa si limiterà a prendere l'ingresso e restituirlo scalato di  $K$  in uscita.

La funzione di risposta armonica si calcola semplicemente ponendo  $s = j\omega$ , che in questo caso non ha effetto:

$$G(j\omega) = K$$

e quindi si ha il modulo:

$$|G(j\omega)| = |K|$$

e la fase:

$$\angle G(j\omega) = 0$$

Per tracciare il modulo, ricordiamo che vogliamo trovare  $K_{dB}$ :

$$K_{dB} = 20 \log_{10}(|K|)$$

Possiamo compilare una tabella dei valori tipici in dB di moduli di funzione:

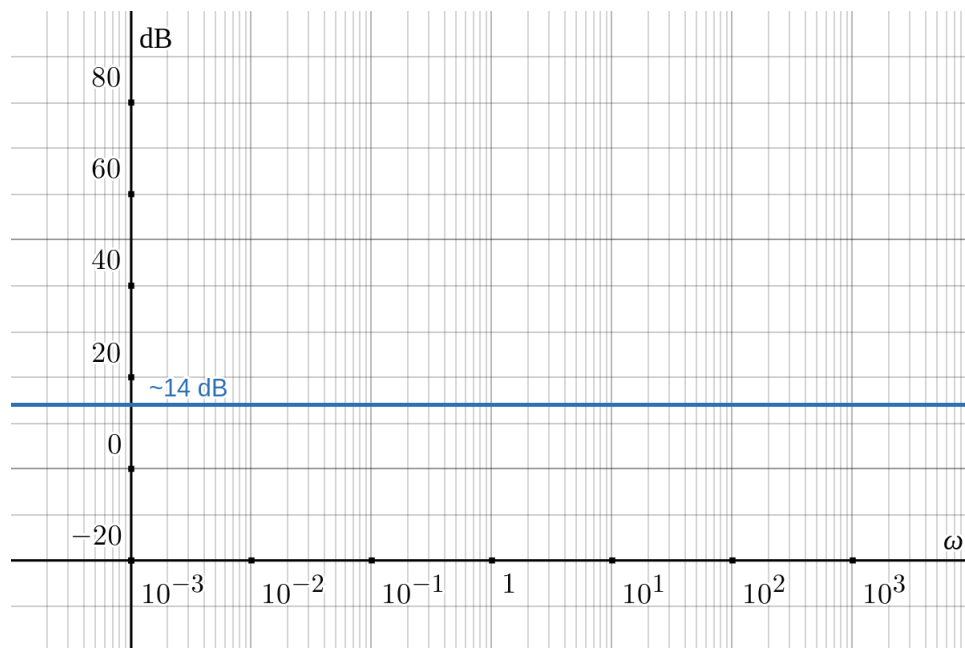
$ K $	$K_{dB}$
$\sqrt{2}$	3 dB
2	6 dB
5	14 dB
20	26 dB
50	36 dB

e notiamo inoltre di poter sfruttare le proprietà dei logaritmi per dire:

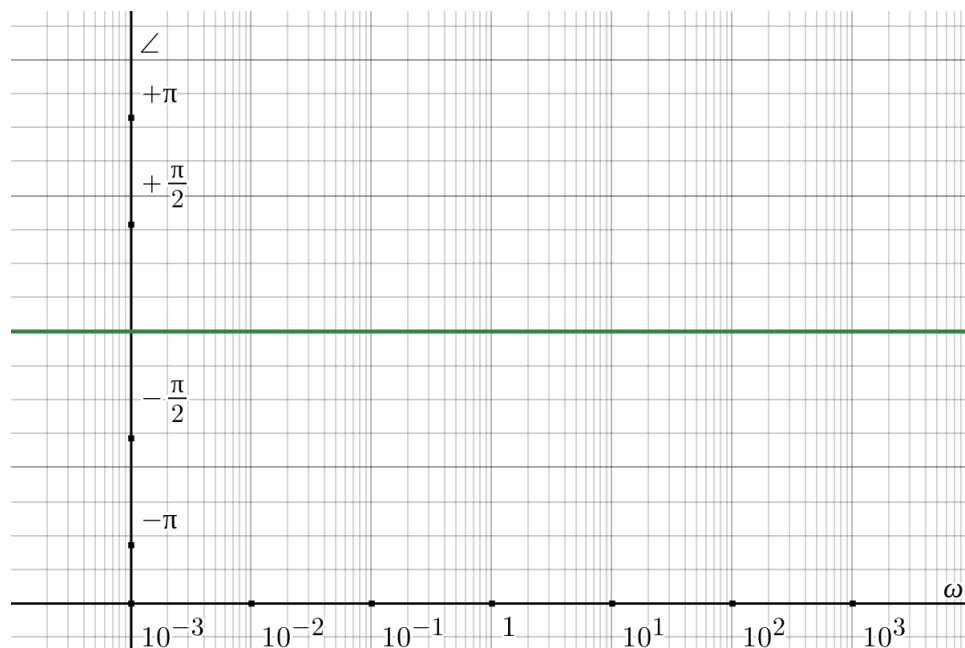
$$20 \log_{10}(|K|) = K_{dB} \implies 20 \log_{10}\left(\frac{1}{|K|}\right) = -K_{dB}$$

Prendiamo quindi  $K = 5$ , e troviamo quindi che il valore in decibel dovrà essere 14 dB.

Potremo allora tracciare il grafico del modulo in decibel:



Per quanto riguarda la fase, il grafico è invece banale:



### 1.3 Poli reali: integratori

Vediamo la classe di risposte in frequenza date dai sistemi con poli reali semplici.

#### 1.3.1 Poli all'origine

Ricordiamo che il polo all'origine rappresenta nel dominio di Laplace l'integratore:

$$\frac{1}{s}$$

Considereremo quindi funzioni di trasferimento del tipo:

$$G(s) = \frac{1}{s} \implies G(j\omega) = \frac{1}{j\omega}$$

passando alla risposta armonica.

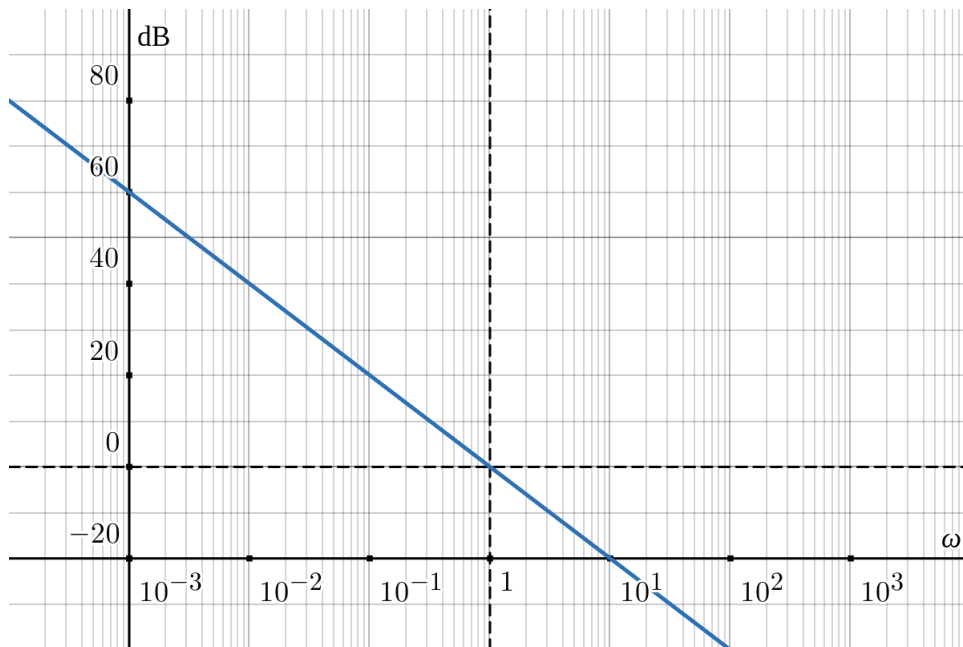
Il modulo in questo caso sarà:

$$|G(j\omega)| = \frac{1}{\omega}$$

che notiamo in logaritmo (dB) dà:

$$20 \log_{10}(\omega^{-1}) = -20 \log_{10}(\omega)$$

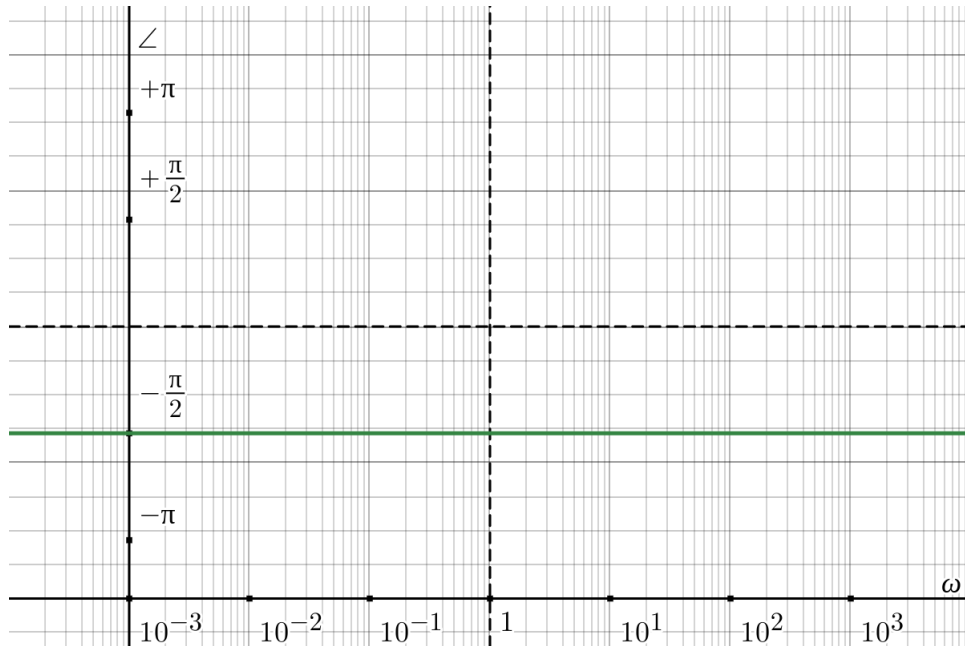
cioè si ottiene una retta nel diagramma del modulo logaritmico che passa per  $\omega = 1$  con modulo 0 dB e pendenza -20 dB/dec (cioè -6 dB/oct):



Per quanto riguarda la fase, invece, avremo scostamento costante:

$$\angle G(j\omega) = -\frac{\pi}{2}$$

da cui il grafico:



### 1.3.2 Poli reali

Prendiamo quindi la funzione con un solo polo reale in  $-\frac{1}{\tau}$ , che notiamo non essere altro che l'esempio precedente col polo scostato verso il lato reale negativo del piano complesso:

$$G(s) = \frac{1}{1 + \tau s}$$

da cui la risposta armonica:

$$G(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega\tau}$$

Il modulo è quindi:

$$|G(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2\tau^2}}$$

Questa funzione non è immediata da tracciare. Vediamo di trovarne un'approssimazione *per rette*. Distinguiamo quindi due situazioni attorno al cosiddetto **punto critico**, cioè il punto  $\omega = 1$ :

- $\omega^2\tau^2 \ll 1$ , si ha:

$$|G(j\omega)|_{dB} \approx 0 \text{ dB}$$

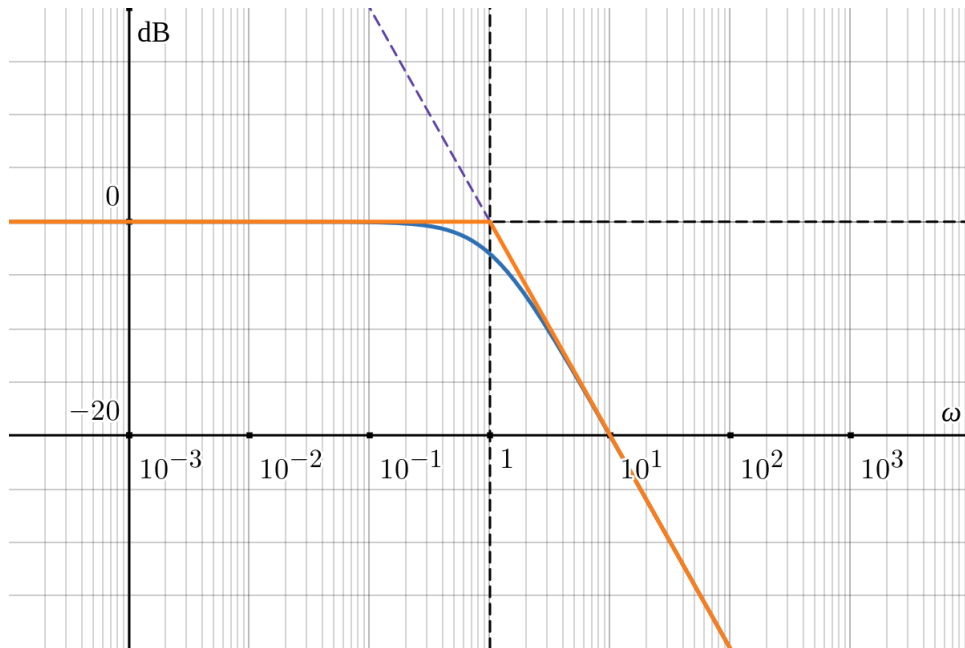
cioè una costante a 0 dB di guadagno;

- $\omega^2\tau^2 \gg 1$ , si ha, trascurando 1:

$$|G(j\omega)|_{dB} = 20 \log_{10} \left( \frac{1}{\omega\tau} \right) = 20 \log \left( \frac{1}{\tau} \right) - 20 \log(\omega)$$

che per  $\tau = 1$  dà una retta con pendenza -20 dB/dec (cioè -6 dB/oct).

Tracciamo quindi il grafico approssimato (sotto al quale si è tracciato il grafico esatto):



Dove si nota il decadimento al di sopra di  $\omega = 1$  è lo stesso del caso del polo all'origine, e anzi spostare il polo verso la parte reale negativa ha il solo effetto di "troncare" la retta a una certa frequenza angolare  $\omega = \frac{1}{\tau}$ .

Ci potrebbe interessare valutare l'errore in  $\omega = 1$ . Dalla nostra stima avevamo preso 0 dB, mentre sostituendo nella formula del modulo si ha:

$$|G(j \cdot 1)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \tau^2}}$$

Ad esempio, preso  $\tau = 1$  si ha  $|G(j \cdot 1)| = \frac{1}{\sqrt{2}}$ , che sappiamo valere -3 dB, per un errore complessivo di 3 dB.

Per quanto riguarda la fase potremmo invece dire:

$$\angle G(j\omega) = -\tan^{-1}(\omega\tau)$$

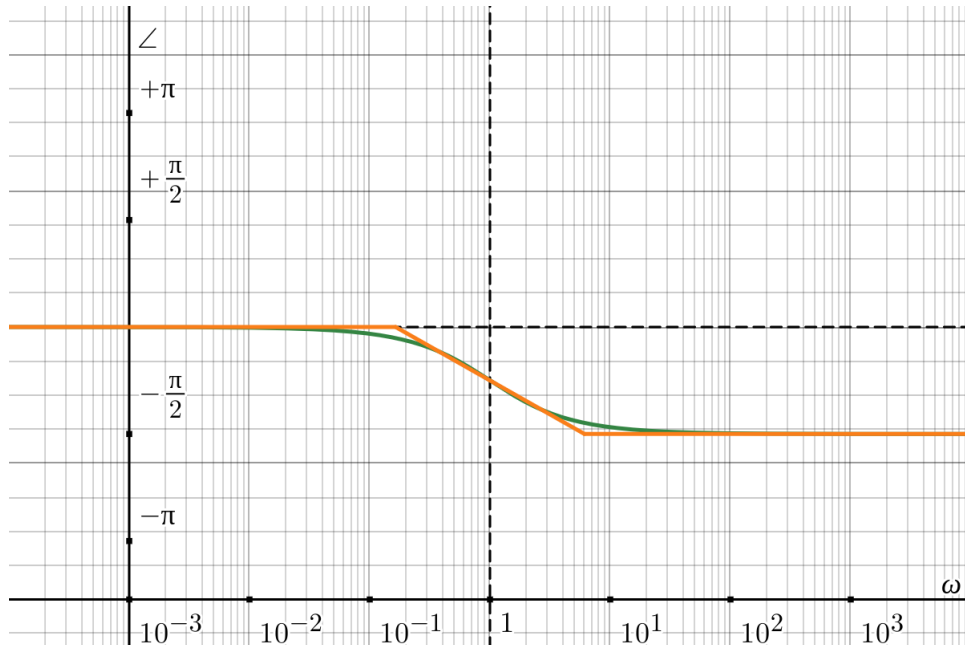
che potremo approssimare in:

$$\begin{cases} \omega\tau \ll 1 \implies \angle G(j\omega) \approx 0^\circ \\ \omega\tau \gg 1 \implies \angle G(j\omega) \approx -90^\circ \\ \omega\tau = 1 \implies \angle G(j\omega) = -45^\circ \end{cases}$$

preso  $\tau > 0$ , cioè il caso con polo stabile.

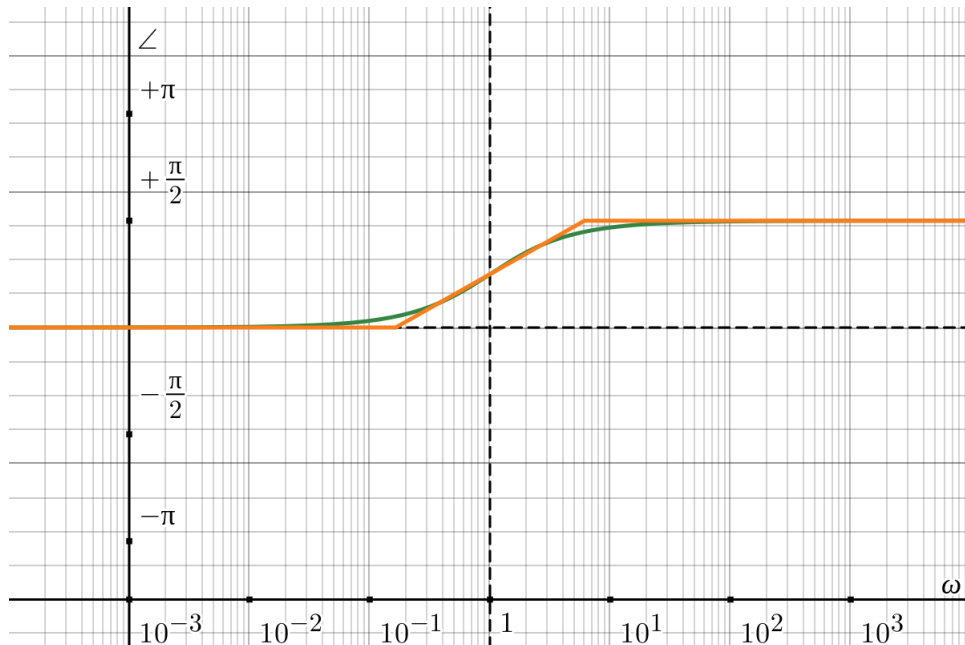


Approssimiamo quindi questa funzione prendendo le rette a  $0^\circ$  e  $-90^\circ$ , interpolate da una retta passante da  $-45^\circ$  a  $\omega = 1$ :



Notiamo un fatto particolare: nessuno ci nega, avendo trascurato le risposte transienti, di prendere il polo instabile in 1, cioè quello dato da  $\tau = -1$ .

In questo caso nulla cambia riguardo alla risposta in modulo, mentre la risposta in fase cambia di segno, cioè si ha:



### 1.3.3 Filtri passa-basso

I sistemi visti finora rappresentano effettivamente una classe di **filtri**, detti filtri **passa-basso**, in quanto lasciano passare solo le frequenze sotto una certa soglia, detta **frequenza di taglio**. Al di sotto della frequenza di taglio il segnale resta pressoché invariato,

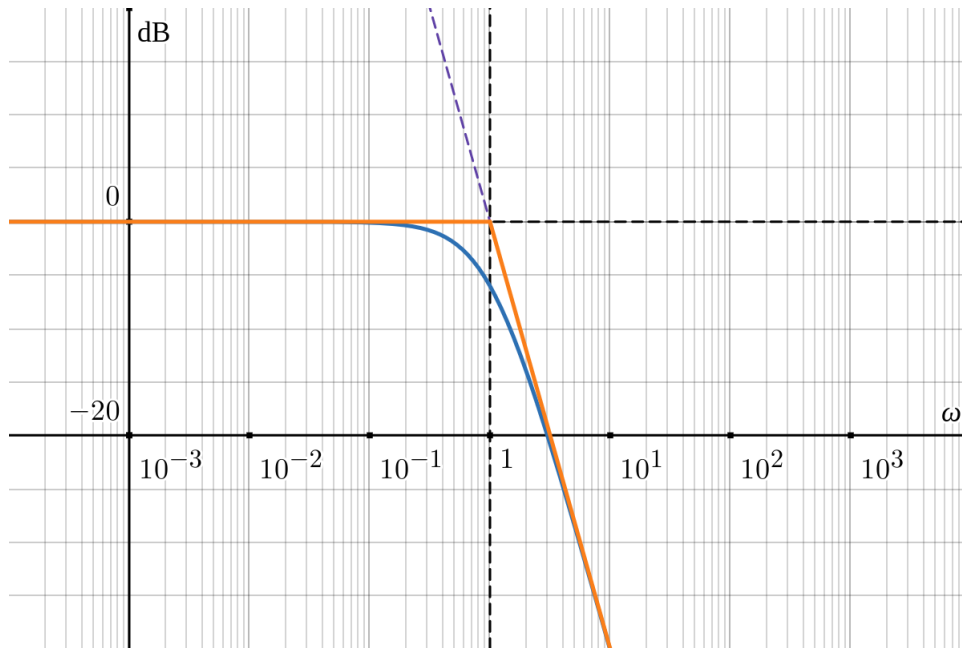
mentre al sopra della frequenza di taglio decade con abbattimento di 6 dB/oct. Questo chiaramente comporta uno scostamento di fase che va fino a un massimo di  $-\frac{\pi}{2}$  dalla fase originale, al di sopra della frequenza di taglio.

Possiamo ottenere abbattimenti più "ripidi", come abbiamo visto, sovrapponendo più filtri. La loro risposta complessiva sarà infatti data da:

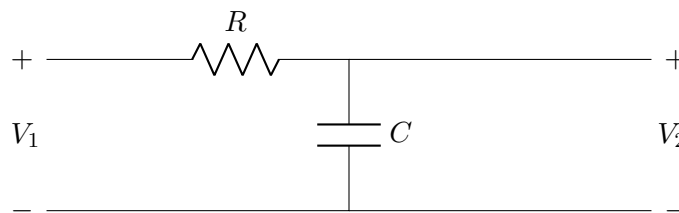
$$G_{eq} = G_1(s) \cdot G_2(s) \cdot \dots$$

che in modulo logaritmico diventa una somma, ergo se l'abbattimento per un singolo filtro è di 6 dB/oct, mettendo insieme  $n$  filtri si ha un abbattimento di  $6 \cdot n$  dB/oct.

Vediamo ad esempio il caso di due filtri, quindi per un abbattimento complessivo di 12 dB/oct:



Dal punto di vista elettronico, un filtro di questo tipo, che viene detto **filtro passivo**, può essere realizzato come segue:



dove prendiamo  $V_1 = u(t)$  come il segnale in entrata, e  $V_2 = y(t)$  come il segnale in uscita.

Portandoci nel dominio di Laplace e svolgendo il partitore di tensione, si può quindi ricavare  $Y(s)$  da  $U(s)$  come:

$$Y(s) = \frac{\frac{U(s)}{Cs}}{R + \frac{1}{Cs}}$$

e quindi ricavare la funzione di trasferimento:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{Cs} \cdot \frac{1}{R + \frac{1}{Cs}} = \frac{1}{RCs + 1}$$

che vediamo non è altro che la forma di Bode della forma studiata finora, con  $\tau = RC$  tempo caratteristico.

## 1.4 Zeri reali: derivatori

Vediamo la classe di risposte in frequenza in qualche modo duale a quella degli integratori.

### 1.4.1 Zeri all'origine

Ricordiamo che lo zero all'origine rappresenta nel dominio di Laplace il **derivatore**:

$$s$$

Considereremo quindi funzioni di trasferimento del tipo:

$$G(s) = s \implies G(j\omega) = j\omega$$

passando alla risposta armonica.

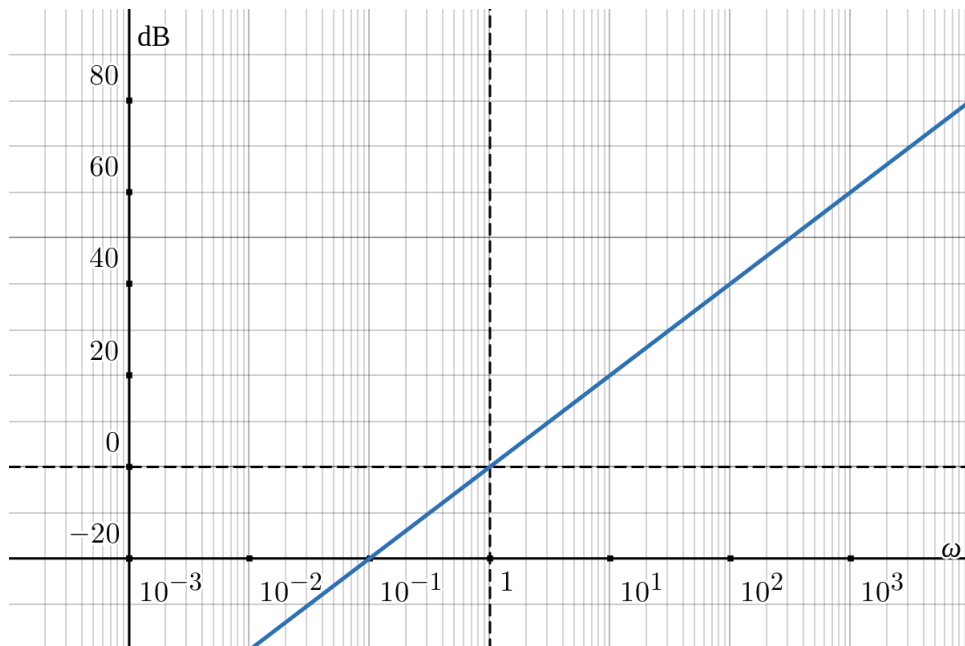
Il modulo in questo caso sarà:

$$|G(j\omega)| = \omega$$

che notiamo in logaritmo (dB) dà:

$$20 \log_{10}(\omega^{-1}) = 20 \log_{10}(\omega)$$

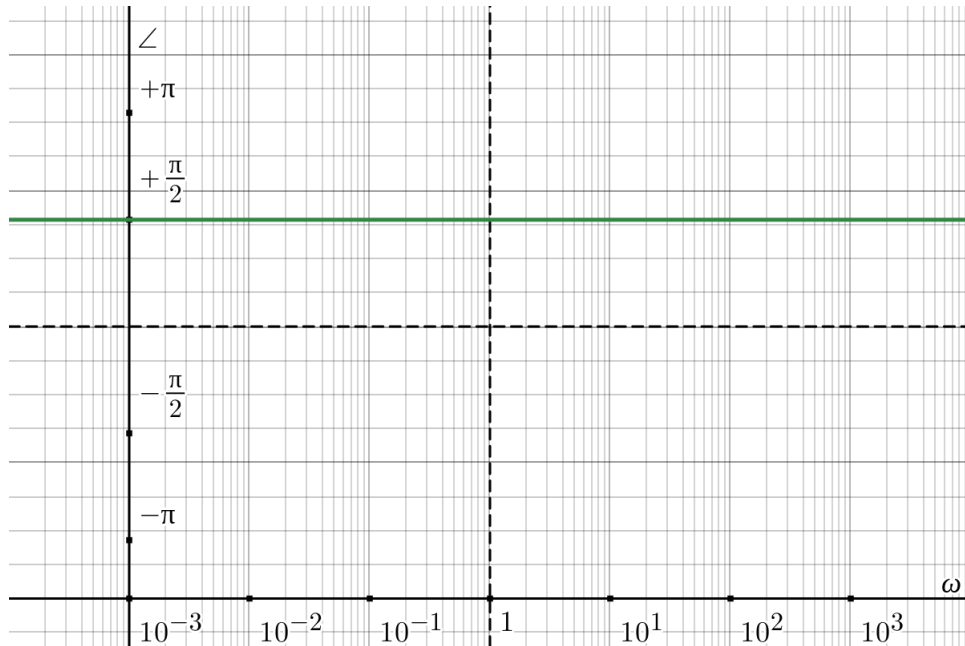
cioè si ottiene una retta nel diagramma del modulo logaritmico che passa per  $\omega = 1$  con modulo 0 dB e pendenza 20 dB/dec (cioè 6 dB/oct):



Per quanto riguarda la fase, invece, avremo scostamento costante:

$$\angle G(j\omega) = \frac{\pi}{2}$$

da cui il grafico:



#### 1.4.2 Zeri reali

Prendiamo quindi la funzione con un solo zero reale in  $-\frac{1}{\tau}$ , anche stavolta sovraimponendo alla funzione reale:

$$G(s) = 1 + s\tau$$

da cui la risposta armonica:

$$G(j\omega) = 1 + j\omega\tau$$

Il modulo è quindi:

$$|G(j\omega)| = \sqrt{1 + \omega^2\tau^2}$$

Vediamo di trovarne un'approssimazione *per rette*. Distinguiamo le situazioni attorno al punto critico, cioè il punto  $\omega = 1$ :

- $\omega^2\tau^2 \ll 1$ , si ha:

$$|G(j\omega)|_{dB} \approx 0 \text{ dB}$$

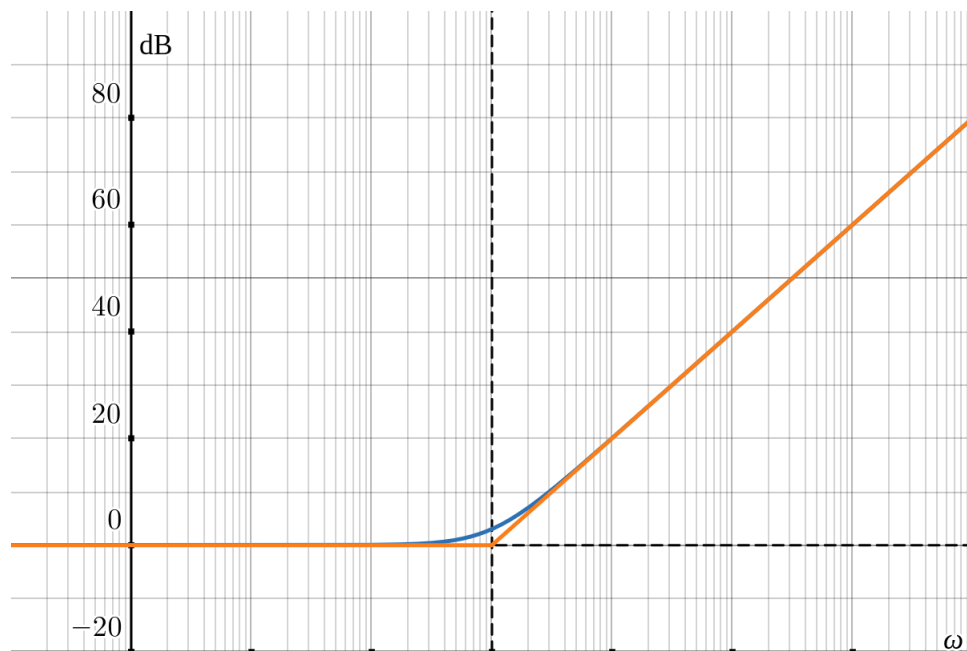
cioè una costante a 0 dB di guadagno;

- $\omega^2\tau^2 \gg 1$ , si ha, trascurando 1:

$$|G(j\omega)|_{dB} = 20 \log_{10}(\omega\tau) = 20 \log(\tau) + 20 \log(\omega)$$

che per  $\tau = 1$  dà una retta con pendenza 20 dB/dec (cioè -6 dB/oct).

Tracciamo quindi il grafico approssimato (sotto al quale si è tracciato il grafico esatto):



La fase è invece:

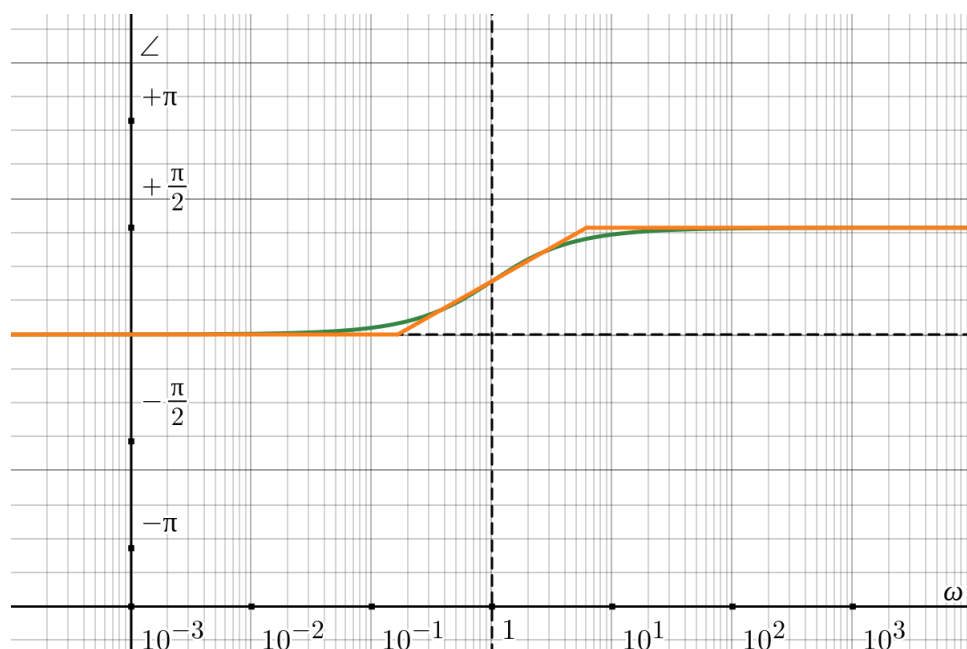
$$\angle G(j\omega) = \tan^{-1}(\omega\tau)$$

che potremo approssimare in:

$$\begin{cases} \omega\tau \ll 1 \implies \angle G(j\omega) \approx 0^\circ \\ \omega\tau \gg 1 \implies \angle G(j\omega) \approx 90^\circ \\ \omega\tau = 1 \implies \angle G(j\omega) = 45^\circ \end{cases}$$

preso  $\tau > 0$ .

Approssimiamo quindi questa funzione prendendo le rette a  $0^\circ$  e  $90^\circ$ , interpolate da una retta passante da  $45^\circ$  a  $\omega = 1$ :



Notiamo quindi che valgono tutte le considerazioni fatte sugli integratori reali, cioè capovolgendo lo zero si trova scostamento in fase opposto, ecc...

### 1.4.3 Poli multipli

Possiamo sfruttare la proprietà di trasformazione in somma del prodotto logaritmico per tracciare i diagrammi di Bode di funzioni di trasferimento con poli doppi.

Prendiamo ad esempio:

$$G(s) = \frac{1}{(1+s)^2}$$

che dà la risposta armonica:

$$G(j\omega) = \frac{1}{(1+j\omega)^2}$$

Questo non è altro che il prodotto di due poli semplici:

$$G(j\omega) = \frac{1}{1+j\omega^2} \cdot \frac{1}{1+j\omega^2}$$

cioè sommiamo moduli e fasi, ottenendo un decadimento di 40 dB/dec e uno scostamento di fase massimo di  $-180^\circ$ .

Generalizzando a poli multipli, si ha semplicemente:

$$G(s) = \frac{1}{(1+s)^n} \implies G(j\omega) = \frac{1}{(1+j\omega)^n} = \frac{1}{1+j\omega^2} \cdot \frac{1}{1+j\omega^2} \cdot \dots$$

cioè si continuano a sommare moduli e fasi, ottenendo decadimenti di  $n \cdot 20$  dB/dec e scostamenti di fase massimi di  $n \cdot -90^\circ$ .

Notiamo che questo non è altro che il comportamento che avevamo descritto studiando filtri sovrapposti, per abbattimenti più ripidi, ad esempio in 17.3.3.