1 Lezione del 04-03-25

Avevamo ricavato la formula per la **risposta libera** di un sistema. Introduciamo quindi la parte di soluzione legata alla **risposta forzata** del sistema, cioè quella legata al termine Bu nell'equazione differenziale:

$$x' = Ax + Bu$$

da cui:

$$x(t) = x_l + x_v = e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)\, d\tau$$

dove la risposta libera è data dal primo termine:

$$x_l = e^{At}x_0$$

e la risposta forzata è data dall'*integrale di convoluzione*:

$$x_v = \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)\, d\tau$$

1.1 Caratterizzazione delle variabili di stato

Vediamo nel dettaglio come si ricavano le variabili di stato x'. Riprendiamo la forma generale del sistema a variabili di stato. In sostanza avremo una forma differenziale implicita per l'ingresso e l'uscita:

$$F\left(y(t), ..., y^{(n)}(t), u(t), ..., u^{(p)}(t), t\right) = 0$$

da cui possiamo ricavare la derivata di grado massimo dell'uscita:

$$y^{(n)}(t) = \hat{F}\left(y(t), ..., y^{n-1}(t), u(t), ..., u^p(t), t\right)$$

Facciamo alcune considerazioni sulla forma di queste equazioni. Possiamo prendere la forma generale della F, che assumiamo rappresentare un vincolo differenziale che lega in forma implicita ingresso e uscita:

$$F(t) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i y^{(i)}(t) + \sum_{j=1}^{p} \beta_i u^{(j)}(t), \quad F(t) = 0$$

l'equazione della $y^{(n)}(t)$ sarà allora:

$$y^{(n)}(t) = \frac{1}{\alpha_n}\left(\sum_{i=0}^{n-1} -\alpha_i y^{(i)}(t) + \sum_{j=0}^{p} -\beta_i u^{(j)}(t)\right)$$

Possiamo porre:

$$\begin{cases} \alpha_i' = \frac{\alpha_i}{\alpha_n} \\ \beta_i' = -\frac{\beta_i}{\alpha_n} \end{cases}$$

in modo da riscrivere la derivata di grado massimo nella forma più compatta:

$$y^{(n)}(t) = \sum_{i=0}^{n-1} -\alpha_i' y^{(i)}(t) + \sum_{j=0}^{p} \beta_i' u^{(j)}(t)$$

Per questo motivo, da qui in poi assumeremo $\alpha_i \leftarrow \alpha'_i$ e $\beta_i \leftarrow \beta'_i$.

Quello che volevamo fare era quindi ricondurci alla forma in variabili di stato:

$$\begin{cases} x' = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}$$

a cui siamo abituati.

Il passaggio era quindi quello di riportarci a:

$$x'(t) = \begin{pmatrix} x'_1(t) \\ \dots \\ x'_n(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ \dots \\ f_n(t) \end{pmatrix}$$

e date x e f lineari dire:

$$x'(t) = Ax + Bu$$

Patiamo dal vettore di stato:

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ \dots \\ y^{(n-1)} \end{pmatrix}$$

A questo punto la derivata di x sarà, assunto $p = 0$ (quindi non ci sono derivate dell'ingresso):

$$x' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ \dots \\ x'_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ \dots \\ x_n \\ y^{(n)}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ \dots \\ x_n \\ \hat{F}\left((y, \dots, y^{(n-1)}), u, t\right) \end{pmatrix} = \overline{f}(x, u, t)$$

che nel caso lineare si riconduce a:

$$\begin{cases} x' = \left(\begin{array}{c|cccc} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ \hline -\alpha_0 & \dots & \dots & \dots & -\alpha_{n-1} \end{array}\right) x + \begin{pmatrix} 0 \\ \dots \\ 0 \\ \beta_0 \end{pmatrix} u, \quad p = 0 \\ y = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix} u \end{cases}$$

La matrice A viene detta *compagna orizzontale inferiore*, e i suoi autovalori sono coincidenti alle radici del polinomio $\alpha_0 + \alpha_1 \lambda + \dots + \alpha_{n-1}\lambda^{n-1} + \lambda^n$ (questo risulta chiaro dallo sviluppo di Laplace sull'ultima riga).

Notiamo che questo processo non è dissimile a quello adottato ad esempio nello studio dei sistemi meccanici, dove le derivate successive della posizione facevano da variabili di stato (solitamente posizione e velocità), una di queste variabili faceva da valore di uscita (solitamente la posizione), e la derivata della variabile di stato di ordine più alto (solitamente l'accelerazione) era l'unica derivata della variabile di stato che introduceva nuove informazioni nel sistema.

1.1.1 Esempio numerico: sistema massa-molla-smorzatore

Un sistema di questo tipo è stato già studiato nell'esempio 2.3.4, dove avevamo la differenziale che descriveva un carrellino in un sistema molla-smorzatore soggetto ad una forza F:

$$F(t) = M\frac{dv}{dt} + Bv + Kx$$

che manipolavamo per ottenere la modellizzazione:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{K}{M} & -\frac{B}{M} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{M} \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix}$$

Osserviamo che questa è la stessa modellizzazione che avremmo ottenuto applicando il metodo descritto sopra.

Possiamo definire un programma Python che sfrutta la libreria SciPy per effettuare la simulazione in dominio tempo del sistema:

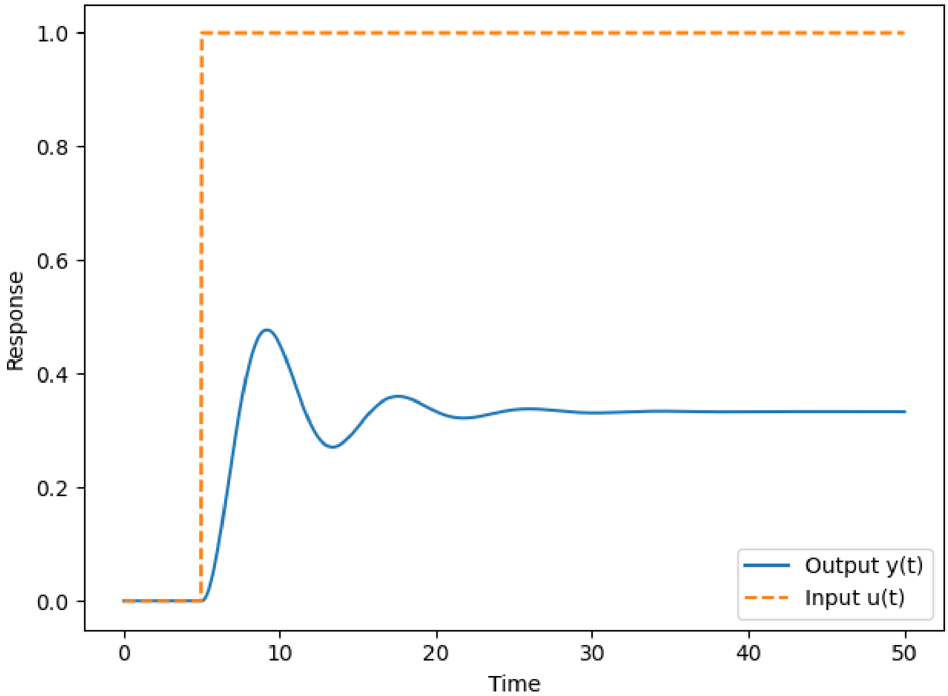
```python
import scipy.signal as signal

def solve_svf(A, B, C, D, t, u, x0):
    print("A:\n", A);
    print("B:\n", B);
    print("C:\n", C);
    print("D:\n", D);

    # setup system
    sys = signal.StateSpace(A, B, C, D)

    # solve
    t_out, y_out, x_out = signal.lsim(sys, U=u, T=t, X0=x0)
    return x_out, y_out, t_out;
```

Proviamo allora a simulare il sistema con valori $m = 5\,\mathrm{kg}$, $k = 3\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}$ e $b = 3\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2}$, da cui le matrici:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -0.6 & -0.4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.2 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix}$$

Vediamo ad esempio lo scalino unitario applicato all'istante $5\,\mathrm{s}$:



Notiamo che allo stato di regime si avrà $x'' = x' = 0$ (assunta x la posizione del carrello). In questo caso la differenziale si ridurrà a:

$$Kx = F \implies x = \frac{F}{K}$$

che con i dati forniti dà $\sim 0.33\,\mathrm{m}$, che come notiamo dalla figura è esattamente il punto attorno a cui il sistema si stabilizza.

1.2 Dipendenza dalle derivate della variabile di ingresso

Abbiamo posto finora $p = 0$, quindi nessuna derivata della variabili di ingresso. Vediamo il caso in cui includiamo tali derivate.

1.2.1 Caso $\mathbf{p < n}$

Vediamo innanzitutto il caso in cui il termine di grado massimo delle variabili di stato dipende dalle derivate della variabile di ingresso, cioè $0 < p < n$. Avevamo l'equazione differenziale:

$$y^{(n)}(t) = \sum_{i=0}^{n-1} -\alpha_i y^{(i)}(t) + \sum_{j=0}^{p} \beta_j u^{(j)}(t)$$

In questo caso la situazione si complica, e ci conviene sfruttare il **principio di sovrapposizione**. Definiamo l'equazione ausiliaria in z:

$$z^{(n)}(t) = \sum_{i=0}^{n-1} -\alpha_i z^{(i)}(t) + u(t)$$

che rappresenta la risposta del sistema al solo ingresso $u(t)$ (senza derivate superiori). Vediamo che questa è la forma che siamo stati abituati a risolvere finora.

Sarà quindi vero che la *funzione forzante* (l'ingresso non scalato e non derivato) $u(t)$ porterà alla *soluzione particolare* $z(t)$, cosa che indichiamo come:

$$\mathcal{H}[u(t)] = z(t)$$

Considerando la linearità del sistema, siamo liberi di moltiplicare e derivare per ricavare le risposte alle funzioni derivate successive dell'ingresso scalate per i β_i che avevamo nell'equazione originale:

$$\begin{cases} \mathcal{H}[\beta_0 u(t)] = \beta_0 z(t) \\ \mathcal{H}[\beta_1 u'(t)] = \beta_1 z'(t) \\ ... \\ \mathcal{H}[\beta_p u^{(p)}(t)] = \beta_p z^{(p)}(t) \end{cases}$$

Per ottenere la risposta complessiva del sistema, allora, basterà applicare nuovamente la linearità e prendere la combinazione lineare delle risposte ai singoli ingressi:

$$y(t) = \sum_{j=0}^{p} \beta_j z^{(j)}(t)$$

da cui il sistema finale:

$$\begin{cases} x' = \left(\begin{array}{c|cccc} 0 & 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & 1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & 1 \\ \hline -\alpha_0 & ... & ... & ... & -\alpha_{n-1} \end{array}\right) x + \begin{pmatrix} 0 \\ ... \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u \\ y = \begin{pmatrix} \beta_0 & ... & \beta_p & 0 & ... & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix} u \end{cases}$$

1.2.2 Esempio: differenziale con derivata prima dell'ingresso

Applichiamo il metodo appena visto per l'equazione differenziale:

$$y'' + y = 2u + u'$$

Notiamo il termine di derivata prima dell'ingresso u. Riportandoci nella forma $y^{(n)}(t) = \hat{F}$ avremo:

$$y'' = -y + 2u + u'$$

con la formula al primo grado:

$$y'' = -y + u$$

da cui il sistema:

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u \\ y = \begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix} u \end{cases}$$

che sappiamo poter calcolare usando la formula di Lagrange. In seguito vedremo un esempio di calcolo esplicito (mettilo)

1.2.3 Caso $\mathbf{p = n}$

Vediamo quindi il caso $p = n$. Qui avremo l'equazione differenziale:

$$y^{(n)}(t) = \sum_{i=0}^{n-1} -\alpha_i y^{(i)}(t) + \sum_{j=0}^{n} \beta_j u^{(j)}(t)$$

e la dimensione di C non sarà abbastanza da contenere tutti i termini β_i. Potremo allora definire la stessa equazione ausiliaria di prima:

$$z^{(n)}(t) = \sum_{i=0}^{n-1} -\alpha_i z^{(i)}(t) + u(t)$$

e sostituire, dopo aver preventivamente separato l'n-esimo termine:

$$y(t) = \sum_{i=1}^{n} \beta_{i-1} x_i + \beta^n z^{(n)} = \sum_{i=1}^{n} \beta_{i-1} x_i + \beta_n \sum_{i=1}^{n} -\alpha_{i-1} z^{(i)}(t) + \beta_n u(t)$$

da cui:

$$\begin{cases} x' = \left(\begin{array}{c|cccc} 0 & 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & 1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & 1 \\ \hline -\alpha_0 & ... & ... & ... & -\alpha_{n-1} \end{array}\right) x + \begin{pmatrix} 0 \\ ... \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u \\ y = \begin{pmatrix} \beta_0 - \beta_n \alpha_0 & ... & \beta_{n-1} - \beta_n \alpha_{n-1} \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} \beta_n \end{pmatrix} u \end{cases}$$

1.3 Rappresentazioni equivalenti

Vediamo che la scelta di variabili di stato non è unica. Potremmo infatti avere:

$$\begin{cases} x' = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}$$

e definire una matrice $T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ invertibile detta **matrice del cambio di base** tale che:

$$\hat{x} = Tx \implies \begin{cases} \hat{x}' = \hat{A}\hat{x} + \hat{B}u \\ \hat{y} = \hat{C}\hat{x} + \hat{D}u \end{cases}$$

Ricaviamo le matrici $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{C}$ e $\hat{D}$ come:

$$\hat{A} = TAT^{-1}, \quad \hat{B} = TB, \quad \hat{C} = CT^{-1}, \quad \hat{D} = D$$

visto che:

$$\begin{cases} Tx = TAT^{-1}Tx + TBu \\ y = CT^{-1}Tx + Du \end{cases}$$

per cancellazione di $T^{-1}T$.

Meccanicamente, questo non significa altro che possiamo prendere diversi sistemi riferimento per velocità e posizione e conservare comunque l'informazione del sistema.

1.4 Autovalori e modi

Avevamo dalla formula di Lagrange che per la risposta libera, cioè la soluzione di $x_l' = Ax_l$, è:

$$x_l(t) = e^{A(t/t_0)} x_l(t_0)$$

posta una condizione iniziale a $t = t_0$.

Esistono 2 casi:

- A *diagonalizzabile*;
- A *non diagonalizzabile*.

Vediamo questi casi nel dettaglio.

1.4.1 A diagonalizzabile

Potremo ricavare una matrice di cambio di base T tale che A risulti diagonale, cioè:

$$A = T^{-1} A_D T, \quad A_D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

con A_D detta **matrice degli autovettori**, dove le entrate delle diagonali sono gli autovalori A.

In questo caso possiamo riscrivere lo stato sfruttando la serie di Taylor:

$$\hat{x}_l(t) = e^{A_D t} \hat{x}_{l0} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(A_D t)^k}{k!} \hat{x}_{l0}$$

dove la forma diagonale di A_D ci permette di calcolare velocemente A_D^k:

$$A_D^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & 0 & 0 \\ 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_n^k \end{pmatrix}$$

da cui:

$$\hat{x}_l(t) = \text{diag} \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda_1 t)^k}{k!}, ..., \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda_n t)^k}{k!} \right\} \hat{x}_{l0} = \text{diag} \left\{ e^{\lambda_1 t}, ..., e^{\lambda_n t} \right\} \hat{x}_{l0}$$

riportandoci nelle coordinate originali avremo:

$$x_l(t) = T^{-1} \hat{x}(t) = T^{-1} \text{diag} \left\{ e^{\lambda_1 t}, ..., e^{\lambda_n t} \right\} \hat{x}_{l0} = T^{-1} \text{diag} \left\{ e^{\lambda_1 t}, ..., e^{\lambda_n t} \right\} T x_l(t_0)$$

Chiamiamo gli e^{λ_i} **modi** del sistema. La funzioni di uscita in assenza di derivate dell'ingresso sarà quindi data da una combinazione lineare dei *modi propri* del sistema:

$$y_l(t) = C T^{-1} \text{diag} \left\{ e^{\lambda_1 t}, ..., e^{\lambda_n t} \right\} T x_l(t_0)$$

Notiamo che, come avevamo già osservato, sarà vero che $\lambda = \sigma + i\omega \in \mathbb{C}$, e quindi:

$$e^{\lambda t} = e^{\sigma t} \cos(\omega t + \phi)$$

dalla formula di Eulero.

Notiamo che i modi di un sistema rappresentano vari "comportamenti" naturali del sistema, che possono essere esponenziali, oscillatori o una loro combinazione sulla base del autovalore corrispondente λ_i.

Il comportamento complessivo del sistema sarà quindi dato da una qualche combinazione lineare di questi modi.

1.4.2 A non diagonalizzabile

Nel caso A non sia diagonalizzabile si può comunque trasformare nella cosiddetta forma di **Jordan**. Questa avrà una struttura quasi diagonale, con entrate di valore 1 immediatamente sopra la diagonale.

In questo caso i modi assumeranno la forma:

$$t^{\eta-1}e^{\lambda_i}t$$

dove $t^{\eta-1}$ sarà un'intero compreso tra 1 e la massima dimensione dei *miniblocchi di Jordan* associati all'autovalore.