1 Lezione del 01-04-25

1.0.1 Derivazione alternativa della funzione sottosmorzata

Avevamo ricavato l'espressione nella 13.0.2:

$$y(t) = \frac{b_0}{a_0}\left(1 - e^{\alpha t}\cos(\beta t) + \frac{\alpha}{\beta}e^{\alpha t}e^{\alpha t}\sin(\beta t)\right) \cdot H(t)$$

per la risposta al gradino edi sistemi del second'ordine sottosmorzati. Notiamo l'esistenza della forma (equivalente):

$$y(t) = G(0) \cdot \left(1 - e^{-\xi\omega t}\cos\left(\omega\sqrt{1-\xi^2}\cdot t\right) - \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}e^{-\xi\omega t}\sin\left(\omega\sqrt{1-\xi^2}\cdot t\right)\right) \cdot H(t)$$

che evidenzia la dipendenza dal guadagno $G(0)$, e dai valori di pulsazione naturale ω e smorzamento ξ. Vediamo quindi come si può svolgere una derivazione (con 2 procedimenti leggermente diversi), formale, attraverso Laplace (visto che precedentemente siamo andati avanti per stime).

1. Partiamo dalla forma di Evans della funzione di trasferimento della 13.0.2:

   $$G(s) = G(0) \cdot \frac{\omega^2}{s^2 + 2\omega\xi \cdot s + \omega^2}$$

   Da cui la risposta al gradino:

   $$Y(s) = G(s) \cdot U(s) = G(0) \cdot \frac{\omega^2}{(s^2 + 2\omega\xi \cdot s + \omega^2)\, s}$$

   Dal denominatore si ha il polo semplice $p_0 = 0$ e i poli complessi coniugati $p_{1,2}$:

   $$p_{1,2} = -\frac{-2\xi\omega \pm \sqrt{4\xi^2\omega^2 - 4\omega^2}}{2} = -\frac{-2\xi\omega \pm 2\omega\sqrt{\xi^2-1}}{2} = \xi\omega \mp \omega\sqrt{1-\xi^2}$$

   che equivale a quanto avevamo già trovato:

   $$p_{1,2} = -(\alpha \pm i\beta), \quad \alpha = -\xi\omega, \quad \beta = \omega\sqrt{1-\xi^2}$$

   Possiamo quindi portare la funzione nel dominio di Laplace nella forma a fratti semplici:

   $$Y(s) = G(0) \cdot \left(\frac{A}{s} + \frac{B}{s+p_1} + \frac{B^*}{s+p_2}\right)$$

   avevamo già calcolato A attraverso il teorema dei residui:

   $$A = \lim_{s\to 0} \frac{\omega^2}{s^2 + 2\omega\xi \cdot s + \omega^2} = 1$$

   Per B e B^*, svolgiamo la somma:

   $$Y(s) = G(0) \cdot \left(\frac{1}{s} + \frac{B}{s+p_1} + \frac{B}{s+p_2}\right)$$

   $$= G(0) \cdot \frac{(s+p_1)(s+p_2) + Bs(s+p_2) + B^*s(s+p_1)}{(s+p_1)(s+p_2)s}$$

$$= G(0) \cdot \frac{s^2 + p_2 s + p_1 s + p_1 p_2 + B s^2 + B p_2 s + B^* s^2 + B^* p_1 s}{(s+p_1)(s+p_2)s}$$

vogliamo eguagliare il numeratore a ω^2, in modo da rispettare la forma di Evans. Abbiamo quindi che l'unico termine costante è $p_1 p_2$, che vale:

$$p_1 p_2 = -(\alpha + i\beta) \cdot -(\alpha - i\beta) = \alpha^2 - \beta^2 = \xi^2\omega^2 + \omega^2(1-\xi^2) = \omega^2$$

Quindi tutto quello che ci serve è che sia soddisfatto il sistema:

$$\begin{cases} 1 + B + B^* = 0 \\ p_2 + p_1 + B p_2 + B^* p_1 = 0 \end{cases}$$

Dalla prima equazione ricaviamo:

$$B^* = -(1+B) \implies p_2 + p_1 + B p_2 - (1+B) p_1 = p_2 + B p_2 - B p_1 = 0$$

da cui:

$$B = -\frac{p_2}{p_2 - p_1} = \frac{\alpha - i\beta}{-\alpha + i\beta + \alpha + i\beta} = \frac{\alpha - i\beta}{i2\beta} = -\frac{i\alpha + \beta}{2\beta} = -\frac{1}{2}\left(1 + i\frac{\alpha}{\beta}\right)$$

che sostituendo in $Y(s)$ dà:

$$Y(s) = G(0) \cdot \left(\frac{1}{s} - \frac{\frac{1}{2}\left(1 + i\frac{\alpha}{\beta}\right)}{s + p_1} - \frac{\frac{1}{2}\left(1 - i\frac{\alpha}{\beta}\right)}{s + p_2} \right)$$

Procediamo quindi con l'antitrasformazione:

$$\mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = G(0) \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\left(1 + i\frac{\alpha}{\beta}\right) e^{\alpha t} e^{i\beta t} - \frac{1}{2}\left(1 - i\frac{\alpha}{\beta}\right) e^{\alpha t} e^{-i\beta t}\right) \cdot H(t)$$

$$= G(0) \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\left(1 + i\frac{\alpha}{\beta}\right) e^{\alpha t} \left(\cos(\beta t) + \sin(\beta t)\right) \right.$$
$$\left. - \frac{1}{2}\left(1 - i\frac{\alpha}{\beta}\right) e^{\alpha t} \left(\cos(\beta t) - \sin(\beta t)\right)\right) \cdot H(t)$$

$$= G(0) \cdot \left(1 + e^{\alpha t} \cdot \left(-\frac{1}{2}\cos(\beta t) - i\frac{1}{2}\sin(\beta t) - i\frac{\alpha}{\beta}\cos(\beta t) + \frac{\alpha}{\beta}\sin(\beta t) \right.\right.$$
$$\left.\left. - \frac{1}{2}\cos(\beta t) + i\frac{1}{2}\sin(\beta t) + i\frac{\alpha}{\beta}\cos(\beta t) + \frac{\alpha}{\beta}\sin(\beta t)\right)\right) \cdot H(t)$$

$$= G(0) \cdot \left(1 - e^{\alpha t}\cos(\beta t) + \frac{\alpha}{\beta}\sin(\beta t)\right) \cdot H(t)$$

□

2. Prendiamo come forma a fratti semplici:

$$Y(s) = G(0) \cdot \left(\frac{A}{s} + \frac{Bs + C}{s^2 + 2\omega\xi \cdot s + \omega^2}\right) = G(0) \cdot \left(\frac{1}{s} + \frac{Bs + C}{s^2 + 2\omega\xi \cdot s + \omega^2}\right)$$

visto che A è sempre lo stesso residuo di prima. Svolgendo le moltiplicazioni si ha:

$$= G(0) \cdot \left(\frac{s^2 + 2\omega\xi \cdot s + \omega^2 + Bs^2 + Cs}{s(s^2 + 2\omega\xi s + \omega^2)}\right)$$

di cui il sistema:

$$\begin{cases} 1 + B = 0 \\ 2\omega\xi + C \end{cases} \implies \begin{cases} B = -1 \\ C = -2\omega\xi \end{cases}$$

Sostituendo si ha quindi:

$$Y(s) = G(0) \cdot \left(\frac{1}{s} - \frac{s + 2\omega\xi}{s^2 + 2\omega\xi \cdot s + \omega^2} \right)$$

Prendiamo il termine ad destra singolarmente, e riscriviamo come:

$$\frac{s + 2\omega\xi}{s^2 + 2\omega\xi \cdot s + \omega^2} = \frac{(s + \omega\xi) + \omega\xi}{(s + \omega\xi)^2 - \omega\xi^2 + \omega^2} = \frac{(s + \omega\xi) + \omega\xi}{(s + \omega\xi)^2 + \omega^2(1 - \xi^2)}$$

da cui la forma più adatta alla trasformazione:

$$= \frac{(s + \omega\xi) + \omega\xi\sqrt{\frac{1-\xi^2}{1-\xi^2}}}{(s + \omega\xi)^2 + \omega^2(1 - \xi^2)} = \frac{s + \omega\xi}{(s + \omega\xi)^2 + \omega^2(1 - \xi^2)} + \frac{\omega\xi\sqrt{\frac{1-\xi^2}{1-\xi^2}}}{(s + \omega\xi)^2 + \omega^2(1 - \xi^2)}$$

$$= \frac{s + \omega\xi}{(s + \omega\xi)^2 + \omega^2(1 - \xi^2)} + \frac{\xi}{\sqrt{1 - \xi^2}} \frac{\omega\sqrt{1 - \xi^2}}{(s + \omega\xi)^2 + \omega^2(1 - \xi^2)}$$

Basterà quindi riconoscere che, preso $\omega_d = \omega\sqrt{1 - \xi^2}$ e $a = -\omega\xi$, si che i due termini sono immediatamente trasformabili secondo Laplace come oscillanti scostati in tempo, quindi attraverso:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\cos(\omega t)\right\} = \frac{s}{s^2 + \omega^2}, \quad \mathcal{L}^{-1}\left\{\sin(\omega t)\right\} = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$$

per i termini oscillanti e:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{F(s - a)\right\} = e^{at} f(t)$$

per lo scostamento temporale, si ha:

$$\implies e^{-\omega\xi t} \cos\left(\omega\sqrt{1 - \xi^2} \cdot t\right) + \frac{\xi}{\sqrt{1 - \xi^2}} e^{-\omega\xi t} \sin\left(\omega\sqrt{1 - \xi^2} \cdot t\right)$$

che risulta nella $y(t)$:

$$y(t) = G(0) \cdot \left(1 - e^{-\xi\omega t} \cos\left(\omega\sqrt{1 - \xi^2} \cdot t\right) - \frac{\xi}{\sqrt{1 - \xi^2}} e^{-\xi\omega t} \sin\left(\omega\sqrt{1 - \xi^2} \cdot t\right)\right) \cdot H(t)$$

$\square$

Il lato destro dell'espressione trovata si può chiaramente riscrivere nella forma più concisa $ke^{-\sigma t} \sin(\omega t + \alpha)$. Usiamo allora le formule di traduzione in forma sinusoidale, di cui una dimostrazione nel caso cosinusoidale si trova a `https://github.com/seggiani-luca/appunti-fis/blob/main/master/master.pdf`:

$$c_1 \sin \omega t + c_2 \cos \omega t \Leftrightarrow k \sin(\omega t + \alpha)$$

con:

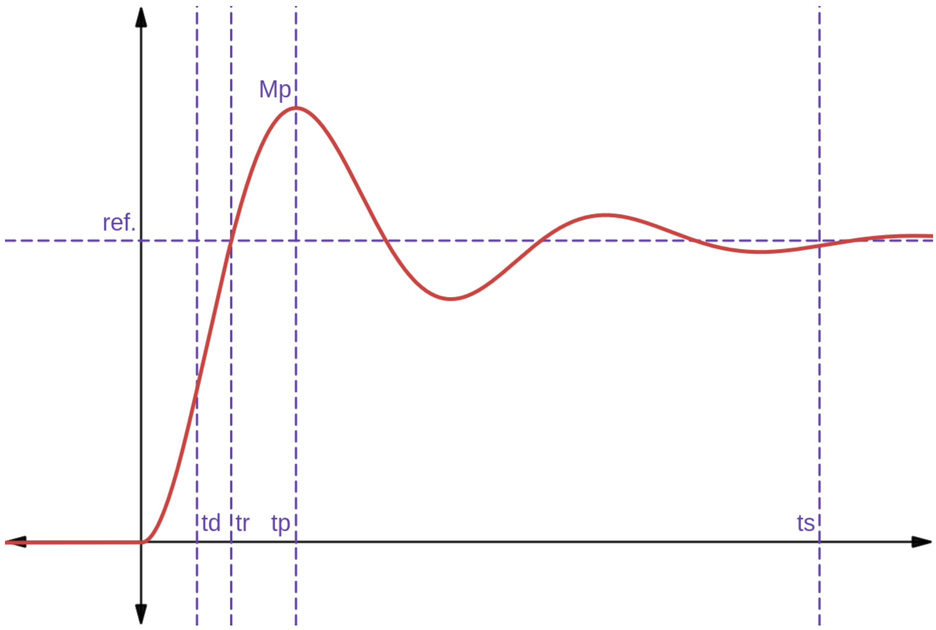
$$\begin{cases} k = \sqrt{c_1^2 + c_2^2} \\ \alpha = \tan^{-1}(\frac{c1}{c2}) \end{cases}$$

che darà quindi:

$$y(t) = G(0) \cdot \left(1 - e^{-\xi \omega t} \sqrt{1 + \frac{\xi^2}{1+\xi^2}} \sin\left(\omega \sqrt{1-\xi^2} \cdot t + \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi}\right)\right)\right)$$

1.1 Dettaglio sulla risposta dei sistemi sottosmorzati

Vediamo in particolare alcune grandezze di interesse nel caso di sistemi di secondo grado sottosmorzati:



Abbiamo che una caratteristica del loro comportamento è la **sovraelongazione** al di sopra del valore bersaglio. Chiamiamo quindi M_p la *massima sovraelongazione* sopra il livello di riferimento, e t_p l'istante temporale in cui questa viene raggiunta. Avremo poi il tempo t_r *di salita*, il momento in cui viene toccato per la prima volta il valore bersaglio, e il tempo t_d *di ritardo*, che viene impiegato a raggiungere il 50% del valore bersaglio. Infine, per valutare il comportamento oscillante dopo il transiente iniziale, consideriamo il tempo t_s *di assestamento*, oltre il quale il segnale resta in una certa (piccola) percentuale del valore bersaglio.

Notiamo che possiamo considerare gli stessi parametri considerati sui sistemi sottosmorzati anche per sistemi criticamente smorzati o sovrasmorzati: infatti, se non per il tempo e per il punto di sovraelengazione, questi avranno valori ben definiti per qualsiasi sistema del second'ordine.

Tornando al dettaglio dei sistemi sottosmorzati, possiamo trovare le seguenti formule:

- **Sovraelongazione:**

Teorema 1.1: Sovraelongazione di sottosmorzate

Si ha il picco di una sottosmorzata in:

$$S\% \left(M_p\right) = 100e^{-\frac{\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}}$$

raggiunto all'istante:

$$t_p = \frac{\pi}{\omega\sqrt{1-\xi^2}}$$

Queste derivano dal punto di massimo della funzione $y(t)$:

$$y(t) = G(0) \cdot \left(1 - e^{-\xi\omega t}\cos\left(\omega\sqrt{1-\xi^2}\cdot t\right) - \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}e^{-\xi\omega t}\sin\left(\omega\sqrt{1-\xi^2}\cdot t\right)\right) \cdot H(t)$$

da cui:

$$D\left[y(t)\right] \propto \xi\omega e^{-\xi\omega\cdot t}\sin\left(\omega\sqrt{1-\xi^2}t+\phi\right) - e^{-\xi\omega t}\omega\sqrt{1-\xi^2}\cos\left(\omega\sqrt{1-\xi^2}\cdot t+\phi\right)$$

$$\propto \xi\sin\left(\omega\sqrt{1-\xi^2}\cdot t+\phi\right) - \sqrt{1-\xi^2}\cos\left(\omega\sqrt{1-\xi^2\cdot t+\phi}\right)$$

che si porta alla forma sinusoidale con:

$$\begin{cases} k = \sqrt{\xi^2+1-\xi^2} = 1 \\ \phi' = \tan^{-1}\left(-\frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\right) \end{cases}$$

da cui:

$$\propto \sin\left(\omega\sqrt{1-\xi^2}\cdot t+\phi+\phi'\right) = \sin\left(\omega\sqrt{1-\xi^2}\cdot t\right)$$

che ha il primo zero dopo $t = 0$ in $t_p = \frac{\pi}{\omega\sqrt{1-\xi^2}}$ (quando il seno ha argomento π). □

Prendendo il valore di $y(t)$ in t_p si ha che resta solo il coseno, cioè:

$$y(t_p) = G(0)\cdot(1+e^{\xi\omega t_p})$$

da cui $e^{\xi\omega t_p}$ rappresenta la frazione di surplus al punto di massimo sovraelongamento, che moltiplichiamo per 100 per portare in percentuale. □

- **Periodo di oscillazione:**

Teorema 1.2: Periodo di oscillazione di sottosmorzate

Una sottosmorzata ha periodo di oscillazione:

$$T_o = \frac{2\pi}{\omega\sqrt{1-\xi^2}}$$

e frequenza:

$$f_o = \frac{\omega\sqrt{1-\xi^2}}{2\pi}$$

Queste derivano dalla componente complessa β dei poli, o direttamente dalla pulsazione effettiva:

$$\omega_d = \omega\sqrt{1-\xi^2}$$

- **Tempo di assestamento:** consideriamo questo come:

$$t_s \approx -\frac{1}{\xi\omega}\ln(0.05)$$

trascurando la componente oscillante e prendendo il punto dove il solo esponenziale raggiunge il 5% del suo valore massimo (in decadimento):

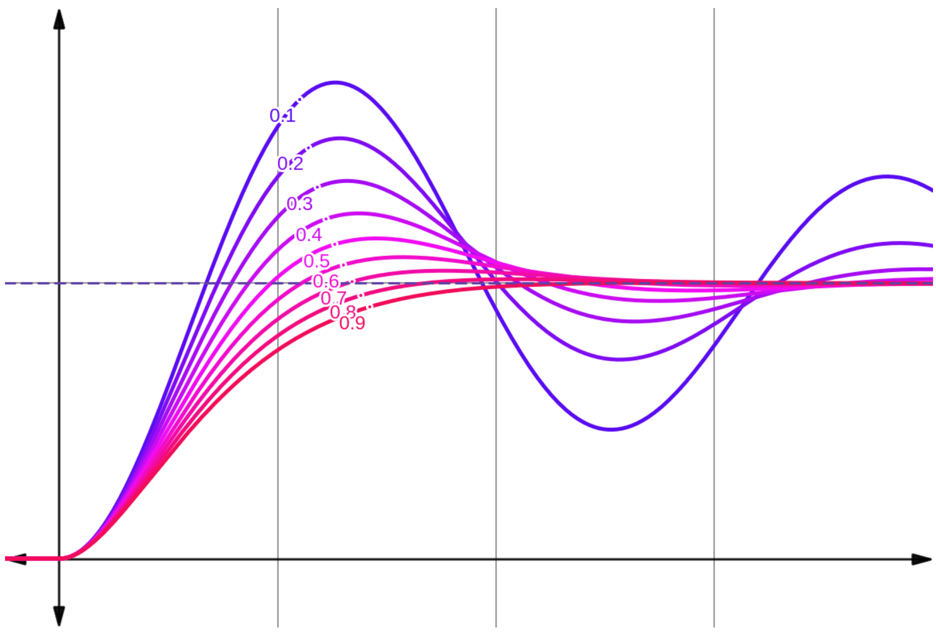
$$e^{-\omega\xi t_s} = 0.05, \quad -\omega\xi t = \ln(0.05) \implies t_s \approx -\frac{1}{\xi\omega}\ln(0.05)$$

- **Tempo di salita:** consideriamo infine questo, con molta approssimazione, come:

$$t_r \approx \frac{1.8}{\omega}$$

1.1.1 Comportamento al variare dello smorzamento

Concludiamo il discorso sui sistemi sottosmorzati considerando il comportamento generale dei sistemi di questo tipo al variare del valore di smorzamento $\xi = \frac{a_1}{2\sqrt{a_0 a_2}}$:



Da dove notiamo che a valori di smorzamento maggiori si ha minore sovraelongamento, ma anche maggiore tempo di salita.

1.2 Stabilità nel modello a funzione di trasferimento

Abbiamo lavorato finora col modello a funzione di trasferimento, definita come:

$$G(s) = \frac{\sum_{i=0}^{m} b_i s^i}{\sum_{i=0}^{n} a_i s^i} = \frac{b_m(s-z_1)(s-z_2)...(s-z_m)}{a_n(s-p_1)(s-p_2)...(s-p_n)}$$

con z_i gli m *zeri*, p_i gli n *poli*, e $n > m$.

Di questa avevamo individuato le due forme:

- **Forma di Evans:** evidenzia poli e zeri:

$$G(s) = \frac{\sum_{i=0}^{m} b_i s^i}{\sum_{i=0}^{n} a_i s^i} = \frac{b_m(s-z_1)(s-z_2)...(s-z_m)}{a_n(s-p_1)(s-p_2)...(s-p_n)}$$

- **Forma di Bode:** evidenzia le costanti tempo:

$$G(s) = K\frac{(\tau_a s+1)(\tau_b s+1)...(\tau_i s+1)}{(\tau_1 s+1)(\tau_2 s+1)...(\tau_n s+1)}$$

Definiamo quindi formalmente **poli**:

Definizione 1.1: Polo

Un polo a_i di una funzione di trasferimento $G(s)$ è un valore di s per cui $G(s)$ tende ad infinito:

$$F(s) = \frac{g(s)}{\prod_{i=1}^{x}(s-a_i)_i^n}$$

con n_i ordine del polo.

e **zeri**:

Definizione 1.2: Zeri

Uno zero a_i di una funzione di trasferimento $G(s)$ è un valore di s per cui $G(s)$ tende a zero:

$$F(s) = \frac{\prod_{i=1}^{x}(s-a_i)_i^m}{g(s)}$$

con m_i ordine dello zero.

Quello che ci interesserà nella valutazione della **stabilità** dei sistemi sarà la posizione dei poli nel piano complesso. In particolare, come avevamo detto per i modi nel modello a variabili di stato, poli a componente *reale negativa* danno **stabilità asintotica**, poli a componente *reale nulla* danno **stabilità marginale**, e poli a componente *reale positiva* dano **instabilità**. Inoltre la componente *complessa* dà informazioni sull'oscillazione del sistema, con **oscillazioni smorzate** a componente *complessa e reale non nulle*, e **oscillazioni continue** a componente *reale nulla*.

Gli zeri, invece, non hanno effetto sulla stabilità. Gli zeri a parte reale positiva hanno invece l'effetto di *invertire* la risposta al gradino, almeno sul breve termine.

1.2.1 Conversione da spazio di stato a funzione di trasferimento

Dovrebbe ormai essere chiaro che lo spazio di stato e la funzione di trasferimento rappresentano due modi di modelizzare lo stesso tipo di fenomeni. Vediamo quindi come passare dall'uno all'altro.

Partiamo dal modello a variabili di stato:

$$\begin{cases} x' = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}$$

Assumendo condizioni iniziali nulle, si ha:

$$\begin{cases} sX(s) = AX(s) + BU(s) \\ Y(s) = CX(s) + DU(s) \end{cases} \implies \begin{cases} X(s) = (sI - A)^{-1}BU(s) \\ Y(s) = \left(C(sI - A)^{-1}B + D\right)U(s) \end{cases}$$

notando che X, U sono vettori e A, B matrici.

Si trova quindi la funzione di trasferimento:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = C(sI - A)^{-1}B + D$$

1.2.2 Forme canoniche di controllo

Esistono un numero infinito di possibili modelli in spazio di stato che forniscono la stessa dinamica ingresso/uscita.

Aiuta avere alcune strutture standardizzate dei modelli in spazio di stato: queste sono le cosiddette forme canoniche. Data la funzione di trasferimento di un sistema, è possibile ottenere ciascuna delle forme canoniche. Data una particolare forma canonica, è poi possibile trasformarla in qualsiasi altra forma.

Consideriamo ad esempio il sistema definito da:

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}y' + a_n y = b_0 u^{(n)} + b_1 u^{(n-1)} + \ldots + b_{n-1}u' + b_n u$$

Prendendo la trasformata di Laplace da entrambi i lati si ha:

$$Y(s)\left(s^n + a_1 s^{n-1} + \ldots + a_{n-1}s + a_n\right) = U(s)\left(b_0 s^n + b_1 s^{n-1} + \ldots + b_{n-1}s + b_n\right)$$

da cui la funzione di trasferimento:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0 s^n + b_1 s^{n-1} + \ldots + b_{n-1}s + b_n}{s^n + a_1 s^{n-1} + \ldots + a_{n-1}s + a_n}$$

Mentre avevamo già visto come la stessa forma in variabili di stato aveva l'aspetto (Lezione 4):

$$\begin{cases} x' = \left(\begin{array}{c|cccc} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \\ \hline -a_n & \ldots & \ldots & \ldots & -a_1 \end{array}\right) x + \begin{pmatrix} 0 \\ \ldots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u \\ y = \begin{pmatrix} b_n - b_0 a_n & \ldots & b_1 - b_0 a_1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} b_0 \end{pmatrix} u \end{cases}$$

Dimostriamo che le due forme sono effettivamente equivalenti. Vogliamo partire dalla forma in variabili di stato è usare la formula dello scorso paragrafo per ricavare la funzione di trasferimento $G(s)$. Abbiamo quindi:

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$$

Il termine problematico sarà chiaramente l'inversa $(sI - A)^{-1}$. La matrice $sI - A$ sarà in forma "compagna":

$$sI - A = \left(\begin{array}{c|cccc} s & -1 & \ldots & \ldots & 0 \\ \ldots & s & -1 & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & s & -1 & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & s & -1 \\ \hline a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \ldots & a_1 + s \end{array}\right)$$

Vediamo intanto che il determinante è immediato, in quanto avremo, spostandoci dai due elementi in alto a destra lungo la diagonale:

$$\det(sI-A) = s\cdot\det\begin{pmatrix} s & -1 & ... & 0 \\ ... & s & -1 & ... \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & ... & s & -1 \\ \hline a_{n-1} & a_{n-2} & ... & a_1+s \end{pmatrix} + a_n = s\left(s\cdot\det\begin{pmatrix} s & -1 & ... \\ ... & ... & ... \\ ... & s & -1 \\ \hline a_{n-2} & ... & a_1+s \end{pmatrix} + a_{n-1}\right) + a_n$$

da cui l'andamento generale:

$$s\left(s\left(\ ...\ \left(s(s+a_1)+s_2\right)\ ...\ \right)+a_{n-1}\right)+a_n = s^n + a_1 s^{n-1} + ... + a_{n-1}s + a_n$$

cioè il polinomio caratteristico che emergeva al denominatore con Laplace. Vorremo quindi che qualsiasi forma troveremo per l'inversa abbia questo al denominatore. Impostiamo allora l'ultima colonna dell'inversa:

$$(sI-A)\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

direttamente dalla definizione di inversa e notiamo che la forma del sistema è:

$$\begin{cases} sx_1 - x_2 = 0 \\ \qquad sx_2 - x_3 = 0 \\ \vdots \\ a_n x_1 + a_{n-1}x_2 + ... + (s+a_1)x_n = 1 \end{cases}$$

da cui:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{x_2}{s} = \frac{x_3}{s^2} = ... \\ x_2 = \frac{x_3}{s} = ... \end{cases}$$

fino al termine n-esimo, che sarà:

$$x_n = \frac{1}{\frac{a_n}{s^n} + \frac{a_{n-1}}{s^{n-1}} + ... + a_1 + s} = \frac{s^n}{s^n + a_1 s^{n-1} + ... + a_{n-1}s + a_n}$$

Da cui abbiamo la forma dell'inversa:

$$(sI-A)^{-1} = \frac{1}{s^n + a_1 s^{n-1} + ... + a_{n-1}s + a_n}\begin{pmatrix} ... & 1 \\ ... & s \\ & \vdots \\ ... & s^n \end{pmatrix}$$

Sostitendo nella formula abbiamo quindi:

$$G(s) = C(sI-A)^{-1}B + D =$$

$$\begin{pmatrix} b_n - b_0 a_n & ... & b_1 - b_0 a_1 \end{pmatrix}\left(\frac{1}{s^n + a_1 s^{n-1} + ... + a_{n-1}s + a_n}\begin{pmatrix} ... & 1 \\ ... & s \\ & \vdots \\ ... & s^n \end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} + b_0$$

$$= \begin{pmatrix} b_n - b_0 a_n & \dots & b_1 - b_0 a_1 \end{pmatrix} \frac{1}{s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n} \begin{pmatrix} 1 \\ s \\ \\ s^n \end{pmatrix} + b_0$$

$$= \frac{(b_n - b_0 a_n) + (b_{n-1} - b_0 a_{n-1}) s + \dots + (b_1 - b_0 a_1) s^n}{s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n} + b_0$$

$$= \frac{(b_n - b_0 a_n) + (b_{n-1} - b_0 a_{n-1}) s + \dots + (b_1 - b_0 a_1) s^n (s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n) b_0}{s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n}$$

$$\frac{b_0 s^n + b_1 s^{n-1} + \dots + b_{n-1} s + b_n}{s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n}$$

cioè la stessa forma che avevamo dalla trasformata di Laplace. □

Abbiamo quindi l'ulteriore conferma che i metodi a funzione di trasferimento e a variabili di stato sono effettivamente analoghi, in quanto modellizzano la stessa categoria di fenomeni, dando le stesse soluzioni. Non solo, vediamo che spesso ci sono parallelismi fra i due (si pensi a poli/modi, e le considerazioni di stabilità, raggiungibilità e osservabilità).