1 Lezione del 28-04-25

1.1 Diagrammi di Nyquist

Vediamo quindi l'ultimo strumento che sfrutteremo per poi progettare i regolatori, cioè i **diagrammi di Nyquist**. Questi rappresentano la forma polare della risposta in frequenza associata alla funzione di trasferimento di un sistema lineare $G(s)$.

Tracciare un diagramma di Nyquist significherà quindi tracciare una curva sul piano complesso paramaterizzata dalla pulsazione (o frequenza).

Avremo che:

- L'asse delle ascisse riporta i valori di $\mathrm{Re}\left(G(j\omega)\right)$;
- L'asse delle ordinate riporta i valori di $\mathrm{Im}\left(G(j\omega)\right)$;
- Tutti gli assi sono espressi in scala lineare.

Il diagramma di Nyquist non prevede l'addittività dei termini elementari. Per pulsazioni elevate non riesce a specificare nel dettaglio l'andamento della risposta armonica quando il modulo tende a diventare piccolo.

Altre proprietà dei diagrammi di Nyquist sono:

- I diagrammi sono graduati in funzione della pulsazione ω;
- I diagrammi polari sono utili per lo studio della stabilità dei sistemi in retroazione, attraverso il cosiddetto **criterio di stabilità di Nyquist**;
- Se conosciamo la funzione di trasferimento $G(s)$, il diagramma polare si può tracciare per punti separando le parti reali e immaginarie di $G(j\omega)$ e determinandone i valori corrispondenti a certi valori di $\omega \in [0, \infty)$, cioè dicendo:

$$G(s) \xrightarrow{s=j\omega} G(j\omega), \quad \omega = 0, 1, 10, ...$$

1.1.1 Tracciamento del diagramma di Nyquist

Vediamo quindi nel dettaglio come tracciare il diagramma di Nyquist. Avremo effettivamente la possibilità di sfruttare 2 metodi:

1. Per il primo metodo partiremo dalla funzione di trasferimento in forma generica:

   $$G(j\omega) = K\frac{(j\omega - z_1)...(j\omega - z_m)}{(j\omega - p_1)...(j\omega - p_n)}$$

   e la divideremo in parte reale e complessa:

   $$\begin{cases} \mathrm{Re}\left(G(j\omega)\right) = K\frac{M_{z1}...M_{zm}}{M_{p1}...M_{pn}} \\ \mathrm{Im}\left(G(j\omega)\right) = \phi_{z1} + ... + \phi_{zm} - \phi_{p1} - ... - \phi_{pn} \end{cases}$$

   $$\implies G(j\omega) = K\frac{M_{z1}...M_{zm}}{M_{p1}...M_{pn}}e^{\phi_{z1}+...+\phi_{zm}-\phi_{p1}-...-\phi_{pn}}$$

   A questo punto devremo solo valutare i vari punti:

   $$p_i = \left(\mathrm{Re}\left(G(j\omega_i)\right), \mathrm{Im}\left(G(j\omega_i)\right)\right), \quad \omega_i = 0, 1, 10, ...$$

   e collegarli per ottenere il diagramma di Nyquist.

   Chiamiamo questo metodo **metodo analitico**;

2. Per il secondo metodo cercheremo un'approssimazione di tipo *qualitativo*, come avevamo fatto per i diagrammi di Bode.

   Supponiamo che il sistema sia di **tipo** h, cioè poniamo il sistema con funzione di trasferimento:

$$G(s) = K \frac{b_0 + b_1 s + b_2 s^2 + ... + b_m s^m}{s^h (a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + ... + a_{n-h} s^{n-h})}$$

   - A questo punto vorremo trovare il punto a $\omega = 0$. Se $h = 0$, questo è dato dal guadagno statico:

$$G(0) = \lim_{\omega \to 0} |G(j\omega)| = K \frac{b_0 + b_1 j\omega - b_2 \omega^2 + ... + b_m (j\omega)^m}{a_0 + a_1 j\omega - a_2 \omega^2 + ... + a_n (j\omega)^n} \bigg|_{\omega=0} = K \cdot \frac{b_0}{a_0}$$

     con fase immediata, visto che $G(0)$ appartiene a $\mathbb{R}$:

$$\begin{cases} \phi_{\omega \to 0} = 0, & G(0) > 0 \\ \phi_{\omega \to 0} = -\pi, & G(0) < 0 \end{cases}$$

     Per sistemi non di tipo 0, invece, cioè con $h \neq 0$, avremo che i poli all'origine dominano e quindi:

$$G(0) = \lim_{\omega \to 0} |G(j\omega)| \sim \lim_{\omega \to 0} \frac{1}{s^h} = +\infty$$

     notando che si ha l'approccio contrario rispetto a Bode, cioè si contano solo i poli all'origine invece di escluderli.
     La fase in questo caso sarà invece calcolata come:

$$\lim_{\omega \to 0} |G(j\omega)| = \lim_{\omega \to 0} K \frac{b_0 + b_1 j\omega + b_2 - \omega^2 + ... + b_m (j\omega)^m}{(j\omega)^h (a_0 + a_1 j\omega - a_2 \omega^2 + ... + a_{n-h} (j\omega)^{n-h})}$$
$$\sim \lim_{\omega \to 0} \frac{1}{(j\omega)^h} = -h \cdot \frac{\pi}{2}$$

     per $K > 0$, e in maniera simile per $K < 0$, per cui:

$$\begin{cases} \phi_{\omega \to 0} = -h \cdot \frac{\pi}{2}, & K > 0 \\ \phi_{\omega \to 0} = -h \cdot \frac{\pi}{2} - \pi, & K < 0 \end{cases}$$

   - Potrebbe poi interessarci il limite a $\omega \to +\infty$, dato da:

$$\lim_{\omega \to \infty} G(j\omega) = \begin{cases} 0, & n > m \\ K, & n = m \end{cases}$$

     con fase se $n > m$:

$$\begin{cases} \phi_{\omega \to +\infty} = \frac{1}{(j\omega)^{n-m}} = -(n-m) \cdot \frac{\pi}{2}, & G(0) > 0 \\ \phi_{\omega \to +\infty} = \frac{1}{(j\omega)^{m-n}} = -(m-n) \cdot \frac{\pi}{2}, & G(0) < 0 \end{cases}$$

     e se $n = m$ corrispondente alla fase di K, per proprietà analoghe a quelle viste per $\omega \to 0$.

   A questo punto cerchiamo ulteriori punti per il tracciamento, fra cui ad esempio sono immediati quelli di intersezione con gli assi. Per trovare questi poniamo la parte reale e immaginaria separatamente a 0. Basterà poi raccordare i punti trovati per avere una stima approssimata del diagramma di Nyquist.

   Chiamiamo questo metodo **metodo qualitativo**.