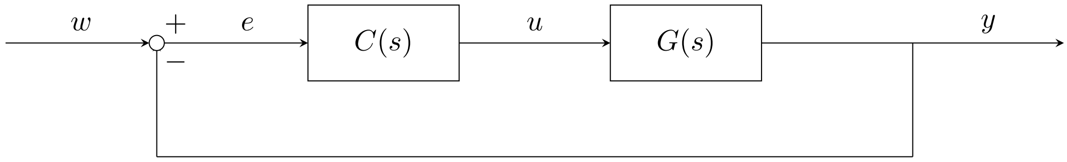
1 Lezione del 30-04-25

1.1 Criterio di Nyquist

Il criterio di Nyquist è un metodo per studiare nel piano complesso l'effetto della reazione negativa sui poli del sistema in catena chiusa con controllore a partire dalla conoscenza della funzione di trasferimento in catena aperta.

Vediamo quindi la struttura della catena chiusa nel dettaglio. Diciamo che il sistema è definito dalla funzione di trasferimento $G(s)$, che è controllato dal controllore $C(s)$ e si trova in un ciclo di retroazione del tipo che abbiamo già visto:



Da cui si calcola la risposta complessiva $G_{cc}(s)$, prendendo il sistema:

$$\begin{cases} G_{cc}(s) = \frac{y}{w} \\ y = u \cdot G(s) = e \cdot C(s)G(s) \\ e = w - y \end{cases}$$

e risolvendo come:

$$y = (w - y)C(s)G(s) \Rightarrow y = \frac{w \cdot C(s)G(s)}{1 + C(s)G(s)} \Rightarrow G_{cc}(s) = \frac{C(s)G(s)}{1 + C(s)G(s)}$$

che è la classica funzione di trasferimento a ciclo chiuso a cui siamo abituati. Per ora assumeremo che il controllore $C(s)$ sarà proporzionale, cioè rappresentato da una costante K_C, per cui:

$$G_{cc}(s) = \frac{K_C \cdot G(s)}{1 + K_C \cdot G(s)} = \frac{\hat{G}(s)}{1 + \hat{G}(s)}$$

chiamando $\hat{G}(s) = C(s)G(s) = K_C \cdot G(s)$.

La stabilità del sistema in ciclo chiuso $G_{cc}(s)$ sarà quindi data dalle radici dell'equazione caratteristica:

$$1 + \hat{G}(s) = 0$$

cioè dai poli in ciclo chiuso.

A questo punto esplicitiamo il polinomio caratteristico, nota la forma generica di $G(s)$:

$$G(s) = K_G \frac{\prod_{i=1}^{m}(s - z_i)}{\prod_{i=1}^{n}(s - p_i)}$$

come:

$$1 + \hat{G}(s) = 1 + K \frac{\prod_{i=1}^{m}(s - z_i)}{\prod_{i=1}^{n}(s - p_i)} = \frac{K \prod_{i=1}^{m}(s - z_i) + \prod_{i=1}^{n}(s - p_i)}{\prod_{i=1}^{n}}$$

con $K = K_C K_G$. Ci accorgiamo quindi di 3 cose:

- Ci interessa la risposta armonica, quindi potremo porre $s = j\omega$;

- Il denominatore sarà la somma di due polinomi p_1 e p_2, di grado rispettivamente m e n. Faremo l'assunto $m \leq n$ (che è comunque condizione di stabilità), per cui avremo che il denominatore sarà rappresentato complessivamente da un singolo polinomio di grado n:
$$\prod_{i=1}^{n} (s - r_i)$$
le cui radici r_i sono esattamente i poli in ciclo chiuso;

- I polinomi che avremo a numeratore e denominatore saranno entrambi *monici*.

Da questo potremo riscrivere come:

$$1 + \hat{G}(s) = \alpha \frac{\prod_{i=1}^{n} (j\omega - r_i)}{\prod_{i=1}^{n} (j\omega - p_i)}$$

dove α è una costante di proporzionalità. Per calcolarla ci accorgiamo che dalla terza osservazione:

$$\lim_{\omega \to \infty} \frac{\prod_{i=1}^{n} (j\omega - r_i)}{\prod_{i=1}^{n} (j\omega - p_i)} = 1$$

per cui basterà far combaciare il limite ad infinito:

$$\lim_{\omega \to \infty} 1 + \hat{G}(j\omega) = 1 + K \frac{\prod_{i=1}^{m} (j\omega - z_i)}{\prod_{i=1}^{n} (j\omega - p_i)} = \begin{cases} 1 & m < n \\ 1 + K & m = n \end{cases}$$

per cui:

$$\alpha = 1 + \hat{G}(\infty) = \begin{cases} 1, & m < n \\ 1 + K, & m = n \end{cases}$$

Vorremo allora imporre le seguenti condizioni di stabilità riguardo ai poli in ciclo chiuso:

1. Nessuna radice deve andare nel semipiano $\mathrm{Re}(r_i) > 0$ al variare del guadagno K_C;
2. $\hat{G}(j\omega) \neq -1$.

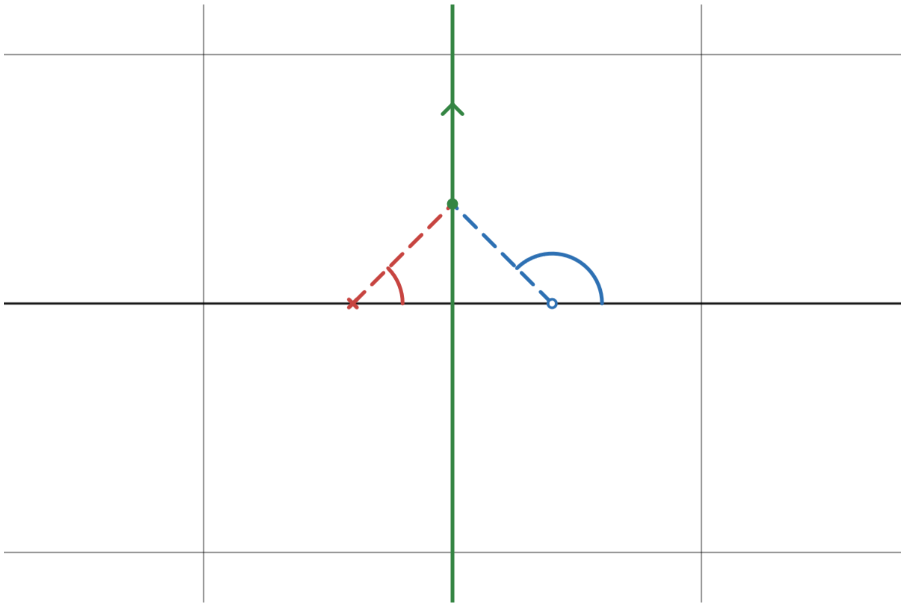
L'idea sarà di trovare il modo di affermare se tali condizioni sono soddisfatte per il ciclo chiuso guardando alla catena aperta, sfruttando il fatto che fra il polinomio caratteristico $1 + \hat{G}(s)$ (che ci dà i poli in catena chiusa) e la funzione di trasferimento in catena aperta $\hat{G}(s)$ esiste una relazione:

$$1 + \hat{G}(s) \sim \hat{G}(s)$$

cioè tracciare il diagramma di Nyquist del polinomio caratteristico equivale a traslare il diagramma di Nyquist della funzione di trasferimento in catena aperta verso destra di 1.

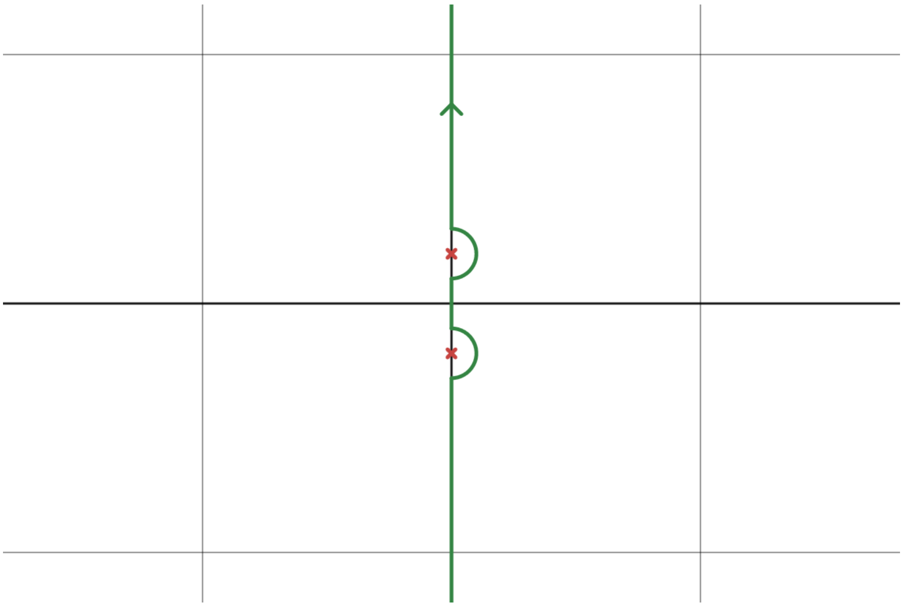
In questo abbiamo due metodi, che si basano entrambi sull'osservare alcune proprietà fondamentali del diagramma di Nyquist:

1. Nota la loro forma, potremmo ricavare una condizione sugli angoli che i punti di $1+\hat{G}(j\omega)$ spazzano con poli e zeri passando per $j\omega$, con ω che parte da $-\infty$ e arriva a $+\infty$:



Questi saranno le fasi dei cosiddetti punti del *diagramma di Nyquist completo*, cioè che prevede $\omega \in (-\infty, +\infty)$ e non solo $\omega \in [0, +\infty]$.

Notiamo che, per i poli sull'asse complesso, questi si evitano passando alla loro *destra*:



A questo punto potremo affermare che:

- Riguardo ai poli si ha:
  - I poli a parte reale negativa portano a variazione di fase $-\pi$;
  - I poli a parte reale nulla portano a variazione di fase $-\pi$;
  - I poli a parte reale positiva portano a variazione di fase $+\pi$.
- Riguardo agli zeri si ha:
  - Gli zeri a parte reale negativa portano a variazione di fase $+\pi$;
  - Gli zeri a parte reale positiva portano a variazione di fase $-\pi$.

Questo viene direttamente dal tracciamento degli angoli dei poli e degli zeri in catena chiusa con i punti sull'asse immaginario positivo:

Chiaramente l'unico punto esente da questa condizione è quello $\hat{G}(j\omega) = -1$, in quanto in tal caso diventa impossibile definire il vettore fra i poli in catena chiusa e il punto sull'asse immaginario. Abbiamo però che questo è il punto che annulla il denominatore della catena chiusa $G_{cc}(s)$, e quindi lo escludiamo a prescindere.

Definiamo quindi, riguardo all'espressione del polinomio caratteristico appena trovata:

$$1 + \hat{G}(s) = \alpha \frac{\prod_{i=1}^{n} (j\omega - r_i)}{\prod_{i=1} (j\omega - p_i)}$$

i valori:

- $R^{(+)}$ = numero di radici a parte reale positiva;
- $R^{(-)}$ = numero di radici a parte reale negativa;
- $P^{(+)}$ = numero di poli a parte reale positiva;
- $P^{(-)}$ = numero di poli a parte reale negativa;
- $P^{(0)}$ = numero di poli sull'asse immaginario.

Varranno le identità:

$$\begin{cases} R^{(+)} + R^{(-)} = m \\ P^{(+)} + P^{(-)} + P^{(0)} = n \end{cases}$$

e la variazione totale di fase sarà:

$$\angle 1 + \hat{G}(j\omega) = R^{(+)} \cdot -\pi + R^{(-)} \cdot \pi + P^{(+)} \cdot \pi + P^{(-)} \cdot -\pi + P^{(0)} \cdot -\pi$$

da cui:

$$\angle 1 + \hat{G}(j\omega) = \pi \left(-R^{(+)} + R^{(-)} + P^{(+)} - P^{(-)} - P^{(0)} \right) = \pi \left(n - 2R^{(+)} - n + 2 \cdot P^{(+)} \right)$$

cioè la variazione di fase non dipende dall'ordine n del sistema, ma solo da dove si trovano i poli e le radici a parte reale positiva, e in particolare vale:

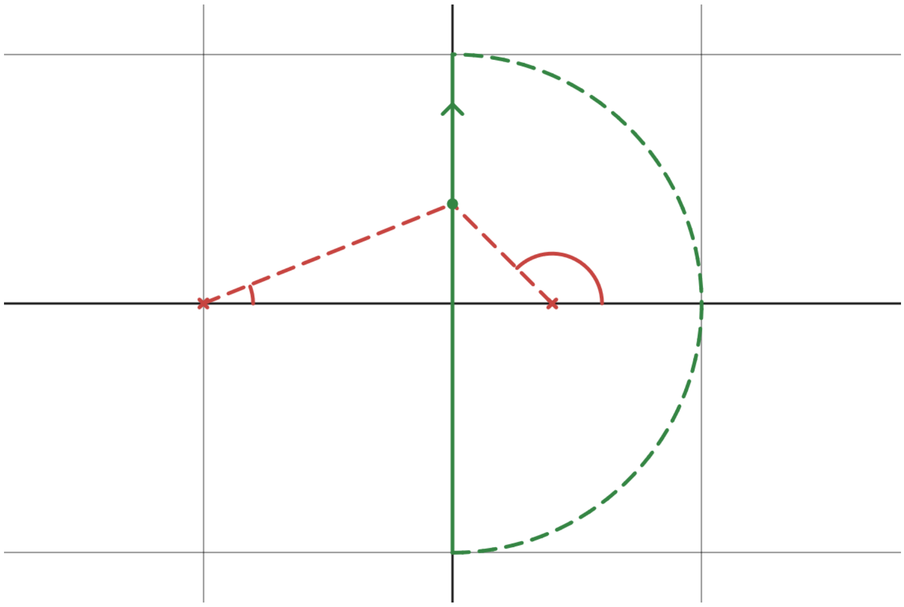
$$\angle 1 + \hat{G}(j\omega) = 2\pi \left(P^{(+)} - R^{(+)} \right)$$

A questo punto basterà imporre la condizione di stabilità $R^{(+)} = 0$ (ricordiamo che gli zeri/radici del polinomio caratterstico equivalgono ai poli del sistema in ciclo chiuso), per cui:

$$N_{ao} = P^{+}$$

dove N_{ao} è il numero di giri in senso antiorario attorno al punto critico, che per $1 + \hat{G}(j\omega)$ era l'origine e per il comune diagramma di Nyquist della catena aperta sarà -1 (o $-\frac{1}{K}$ se la catena aperta è $K \cdot G(j\omega)$).

2. Altrimenti basterà considerare il cosiddetto **percorso di Nyquist**, cioè quel percorso che parte da 0, arriva a $+\infty$ e si ricongiunge *all'infinto*, sul lato destro del piano complesso, a $-\infty$ per tornare a 0:



Come per il percorso considerato prima, si passa a *destra* dei poli sull'asse complesso.

In questo caso sarà immediato verificare che i soli poli o zeri che contribuiscono alla fase per un giro completo sono quelli interni a tale percorso, e per la precisione:

- I poli a parte reale positiva portano a variazione di fase $+2\pi$;
- Gli zeri a parte reale positiva portano a variazione di fase -2π;
- Tutti gli altri punti portano a variazione di fase 0.

Da questo si avrà quindi la formula complessiva:

$$\angle 1 + \hat{G}(j\omega) = 2\pi \left(P^{(+)} - R^{(+)} \right)$$

con:

- $R^{(+)}$ = numero di radici a parte reale positiva;
- $P^{(+)}$ = numero di poli a parte reale positiva.

che è la stessa relazione di prima, per cui si ottiene lo stesso risultato.