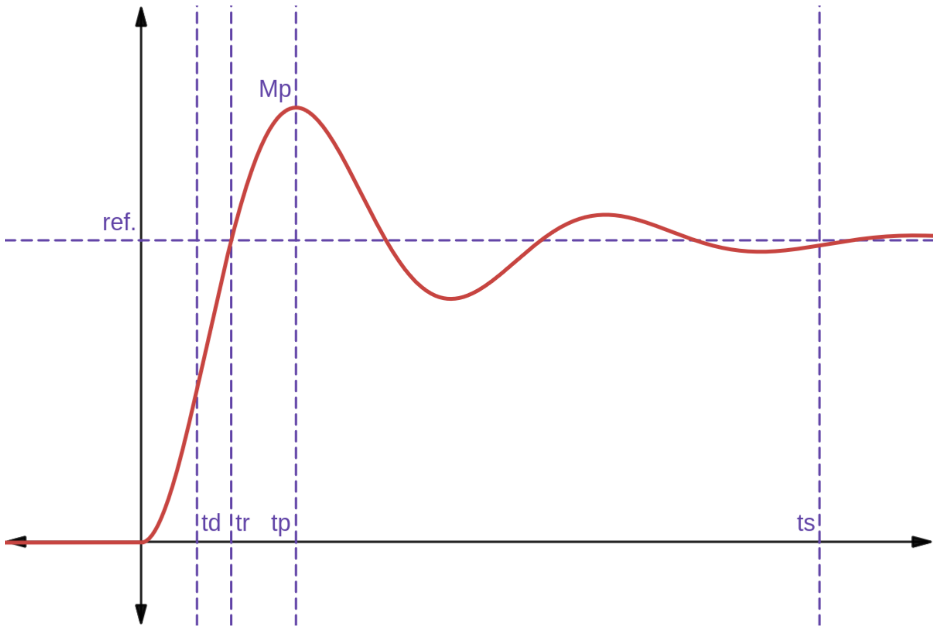
1 Lezione del 01-04-25

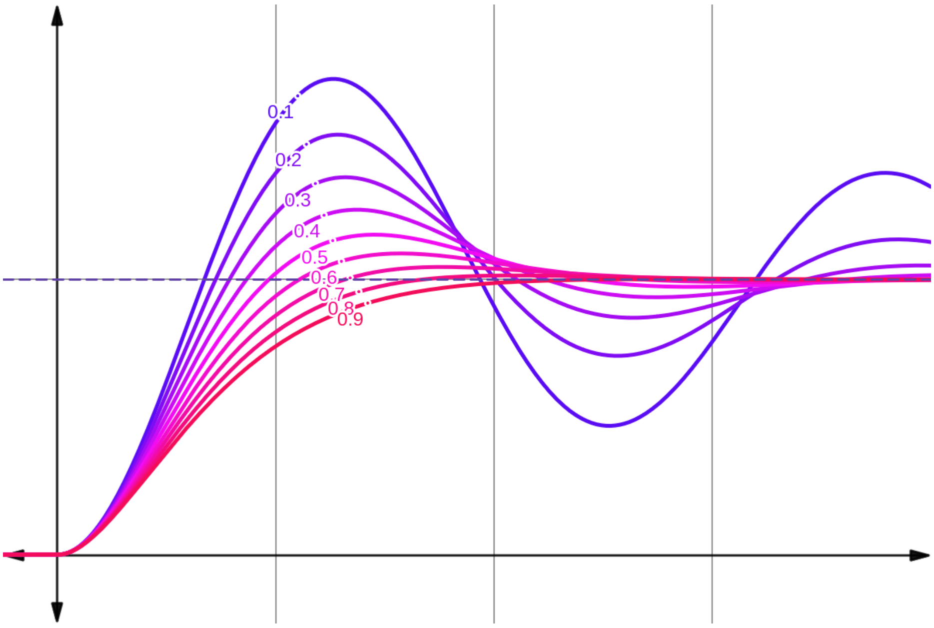
1.1 Dettaglio sulla risposta dei sistemi sottosmorzati

Vediamo in particolare alcune grandezze di interesse nel caso di sistemi di secondo grado sottosmorzati:



Abbiamo che una caratteristica del loro comportamento è la **sovraelongazione** al di sopra del valore bersaglio. Chiamiamo quindi M_p la *massima sovraelongazione* sopra il livello di riferimento, e t_p l'istante temporale in cui questa viene raggiunta. Avremo poi il tempo t_r *di salita*, il momento in cui viene toccato per la prima volta il valore bersaglio, e il tempo t_d *di ritardo*, che viene impiegato a raggiungere il 50% del valore bersaglio. Infine, per valutare il comportamento oscillante dopo il transiente iniziale, consideriamo il tempo t_s *di assestamento*, oltre il quale il segnale resta in una certa (piccola) percentuale del valore bersaglio.

Vediamo il comportamento generale dei sistemi di questo tipo al variare del valore di smorzamento $\xi = \frac{a_1}{2\sqrt{a_0 a_2}}$:



Da dove notiamo che a valori di smorzamento maggiori si ha minore sovraelongamneto, ma anche maggiore tempo di salita.

Notiamo che possiamo considerare gli stessi parametri considerati sui sistemi sottosmorzati anche per sistemi criticamente smorzati o sovrasmorzati: infatti, se non per il tempo e per il punto di sovraelengazione, questi avranno valori ben definiti per qualsiasi sistema del second'ordine.

Tornando al dettaglio dei sistemi sottosmorzati, possiamo trovare le seguenti formule:

- **Sovraelongazione:** si ha il picco in:

$$S\% \left(M_p\right) = 100 e^{-\frac{\xi \pi}{\sqrt{1-\xi^2}}}$$

  raggiunto all'istante:

$$t_p = \frac{\pi}{\omega \sqrt{1-\xi^2}}$$

- **Periodo di oscillazione:** possiamo considerare anche il periodo (e quindi la frequenza) delle oscillazioni, considerando il polo in β:

$$T_o = \frac{2\pi}{\omega \sqrt{1-x^2}}$$

$$f_o = \frac{\omega \sqrt{1-x^2}}{2\pi}$$

- **Tempo di assestamento:** consideriamo questo come:

$$t_s \approx -\frac{1}{\xi \omega} \ln(0.05)$$

- **Tempo di salita** consideriamo infine questo, con molta approssimazione, come:

$$t_r \approx \frac{1.8}{\omega}$$

1.1.1 Derivazione alternativa della funzione sottosmorzata

Avevamo ricavato l'espressione:

$$y(t) = \frac{b_0}{a_0}\left(1 - e\alpha t\cos(\beta t) + \frac{\alpha}{\beta}e^{\alpha t}e^{\alpha t}\sin(\beta t)\right)\cdot H(t)$$

per i sistemi del second'ordine sottosmorzati. Vediamo come si può svolgere una derivazione, attraverso Laplace, per arrivare alla forma (equivalente):

$$y(t) = G(0)\cdot\left(1 - e^{-\xi\omega t}\cos\left(\omega\sqrt{1-\xi^2}\cdot t\right) - \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}e^{-\xi\omega t}\sin\left(\omega\sqrt{1-\xi^2}\cdot t\right)\right)$$

vediamo come questa evidenzia la dipendenza dal guadagno $G(0)$, e dai valori di pulsazione naturale ω e smorzamento ξ.

fallo

Il lato destro dell'espressione trovata si può chiaramente riscrivere nella forma più concisa $ke^{-\sigma t}\sin(\omega t + \alpha)$. Usiamo allora le formule di traduzione in forma sinusoidale, di cui una dimostrazione nel caso cosinusoidale si trova a `https://github.com/seggiani-luca/appunti-fis/blob/main/master/master.pdf`:

$$c_1 \sin\omega t + c_2\cos\omega t \Leftrightarrow k\sin(\omega t + \alpha)$$

con:

$$\begin{cases} k = \sqrt{c_1^2 + c_2^2} \\ \alpha = \tan^{-1}(\frac{c1}{c2}) \end{cases}$$

che darà quindi:

$$y(t) = G(0)\cdot\left(1 - e^{-\xi\omega t}\sqrt{1 + \frac{\xi^2}{1+\xi^2}}\sin\left(\omega\sqrt{1-\xi^2}\cdot t + \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi}\right)\right)\right)$$

1.2 Stabilità nel modello a funzione di trasferimento

Abbiamo lavorato finora col modello a funzione di trasferimento, definita come:

$$G(s) = \frac{\sum_{i=0}^m b_i s^i}{\sum_{i=0}^n a_i s^i} = \frac{b_m(s-z_1)(s-z_2)...(s-z_m)}{a_n(s-p_1)(s-p_2)...(s-p_n)}$$

con z_i gli m *zeri*, p_i gli n *poli*, e $n > m$.

Di questa avevamo individuato le due forme:

- **Forma di Evans:** evidenzia poli e zeri:

$$G(s) = \frac{\sum_{i=0}^m b_i s^i}{\sum_{i=0}^n a_i s^i} = \frac{b_m(s-z_1)(s-z_2)...(s-z_m)}{a_n(s-p_1)(s-p_2)...(s-p_n)}$$

- **Forma di Bode:** evidenzia le costanti tempo:

$$G(s) = K\frac{(\tau_a s+1)(\tau_b s+1)...(\tau_i s+1)}{(\tau_1 s+1)(\tau_2 s+1)...(\tau_n s+1)}$$

Definiamo quindi formalmente **poli**:

Definizione 1.1: Polo

Un polo a_i di una funzione di trasferimento $G(s)$ è un valore di s per cui $G(s)$ tende ad infinito:

$$F(s) = \frac{g(s)}{\prod_{i=1}^{x}(s-a_i)_i^n}$$

con n_i ordine del polo.

e **zeri**:

Definizione 1.2: Zeri

Uno zero a_i di una funzione di trasferimento $G(s)$ è un valore di s per cui $G(s)$ tende a zero:

$$F(s) = \frac{\prod_{i=1}^{x}(s-a_i)_i^m}{g(s)}$$

con m_i ordine dello zero.

Quello che ci interesserà nella valutazione della **stabilità** dei sistemi sarà la posizione dei poli nel piano complesso. In particolare, come avevamo detto per i modi nel modello a variabili di stato, poli a componente *reale negativa* danno **stabilità asintotica**, poli a componente *reale nulla* danno **stabilità marginale**, e poli a componente *reale positiva* dano **instabilità**. Inoltre la componente *complessa* dà informazioni sull'oscillazione del sistema, con **oscillazioni smorzate** a componente *complessa e reale non nulle*, e **oscillazioni continue** a componente *reale nulla*.

Gli zeri, invece, non hanno effetto sulla stabilità. Gli zeri a parte reale positiva hanno invece l'effetto di *invertire* la risposta al gradino, almeno sul breve termine.

1.2.1 Conversione da spazio di stato a funzione di trasferimento

Dovrebbe ormai essere chiaro che lo spazio di stato e la funzione di trasferimento rappresentano due modi di modelizzare lo stesso tipo di fenomeni. Vediamo quindi come passare dall'uno all'altro.

Partiamo dal modello a variabili di stato:

$$\begin{cases} x' = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}$$

Assumendo condizioni iniziali nulle, si ha:

$$\begin{cases} sX(s) = AX(s) + BU(s) \\ Y(s) = CX(s) + DU(s) \end{cases} \implies \begin{cases} X(s) = (sI-A)^{-1}BU(s) \\ Y(s) = (C(sI-A)^{-1}B + D)\, U(s) \end{cases}$$

notando che X, U sono vettori e A, B matrici.

Si trova quindi la funzione di trasferimento:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = C(sI-A)^{-1}B + D$$

1.2.2 Forme canoniche di controllo

Esistono un numero infinito di possibili modelli in spazio di stato che forniscono la stessa dinamica ingresso/uscita.

Aiuta avere alcune strutture standardizzate dei modelli in spazio di stato: queste sono le cosiddette forme canoniche. Data la funzione di trasferimento di un sistema, è possibile ottenere ciascuna delle forme canoniche. Data una particolare forma canonica, è poi possibile trasformarla in qualsiasi altra forma.

Consideriamo ad esempio il sistema definito da:

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + ... + a_{n-1} y' + a_n y = b_0 u^{(n)} + b_1 u^{(n-1)} + ... + b_{n-1} u' + b_n u$$

Prendendo la trasformata di Laplace da entrambi i lati si ha:

$$Y(s)\left(s^n + a_1 s^{n-1} + ... + a_{n-1} s + a_n\right) = U(s)\left(b_0 s^n + b_1 s^{n-1} + ... + b_{n-1} s + b_n\right)$$

da cui la funzione di trasferimento:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0 s^n + b_1 s^{n-1} + ... + b_{n-1} s + b_n}{s^n + a_1 s^{n-1} + ... + a_{n-1} s + a_n}$$

Mentre avevamo già visto come la stessa forma in variabili di stato aveva l'aspetto:

$$\begin{cases} x' = \left(\begin{array}{c|cccc} 0 & 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & 1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & 1 \\ \hline -a & ... & ... & ... & -a_{n-1} \end{array}\right) x + \begin{pmatrix} 0 \\ ... \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u \\ y = \begin{pmatrix} b_0 - b_n a_0 & ... & b_{n-1} - b_n a_{n-1} \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} b_n \end{pmatrix} u \end{cases}$$

confronta