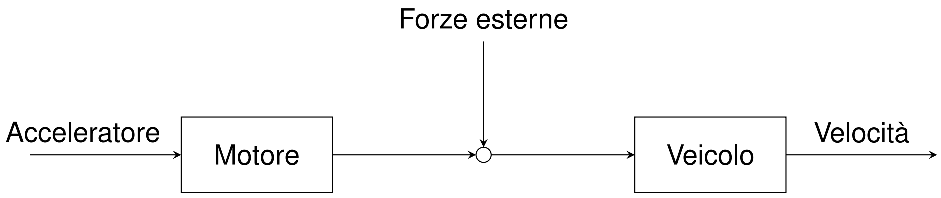
1 Lezione del 27-02-25

Riprendiamo la trattazione dei sistemi non lineari.

1.0.1 Esempio: regolazione della velocità di crociera

Poniamo di voler modellizzare il sistema di trazione longitudinale di un automobile, implementando un sistema di controllo che la mantenga a velocità di crociera costante. L'**ingresso manipolabile** sarà il *pedale dell'acceleratore*, l'**uscita** del sistema la *velocità*, e il **disturbo** dato dalla *pendenza* del tratto di strada che stiamo percorrendo.

Il diagramma a blocchi del sistema potrà essere realizzato come segue:



Un modello matematico potrebbe essere il seguente:

$$m\frac{dv}{dt} + \alpha|v|v + \beta v = \gamma u - mg(\sin\theta)$$

dove $\alpha|v|v + \beta v$ rappresentano due componenti, una **quadratica** e una **lineare**, dell'attrito. Possiamo interpretare la componente quadratica come l'attrito con l'aria, mentre la componente lineare come l'attrito del pneumatico con la superificie stradale. γu sarà invece la spinta del motore, chiamata u l'apertura della valvola dell'acceleratore in un dato istante temporale e quindi γ una qualche costante di proporzionalità legata alle caratteristiche del motore e della trasmissione della vettura. Infine, $g\sin(\theta)$ rappresenterà l'accelerazione gravitazionale in direzione longitudinale al veicolo (posta una pendenza di θ con $\theta < 30°$).

Notiamo che questa equazione è non lineare. Potremmo pensare di semplificarla: ad esempio rimuovendo il termine quadratico (trascurabile alle basse velocità) e il riportando il termine sinusoidale al primo componente dello sviluppo di MacLaurin (valido per piccoli angoli), ottenendo quindi:

$$m\frac{dv}{dt} + \alpha|v|v + \beta v = \gamma u - mg(\sin\theta) \sim m\frac{dv}{dt} + \beta v = \gamma u - mg\theta$$

Nota questa possibilità, decidiamo comunque di continuare con la trattazione del sistema completo. Prese le variabili di stato comuni ai sistemi meccanici $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x & v \end{pmatrix}$, che rinominiamo in $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix}$, si ha il sistema:

$$\begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2' = -\frac{\alpha}{m}|x_2|x_2 - \frac{\beta}{m}x_2 + \frac{\gamma}{m}u - g\sin\theta \\ y = x_2 \end{cases}$$

con la condizione iniziale $\mathbf{x}(t_0) = x_0$.

Nelle equazioni non compare t, quindi il sistema è tempo invariante. Di contro, il sistema non ricade nelle forme viste prima, ma in una forma più generale:

Definizione 1.1: Forma non lineare generale

Introduciamo la forma generica per sistemi non lineari:

$$\begin{cases} x' = f(x,u) \\ y = g(x,u) \end{cases}$$

Un approccio alla gestione di sistemi di questo tipo è la **linearizzazione**. Per capire i punti ottimali su cui effettuare una linearizzazione, è opportuno introdurre il concetto di **equilibrio** e **stabilità**.

1.1 Equilibri e stabilità

Diamo una definizione di **stato di equilibrio**:

Definizione 1.2: Stato di equilibrio

Dato il sistema $x' = f(x,u)$, e dato un segnale di ingresso $u(t) = \overline{u}$, uno stato $\overline{x}$ si dice di equilibrio se soddisfa la relazone:

$$0 = f(\overline{x}, \overline{u})$$

In questo caso, il sistema non si muove dallo stato $\overline{x}$, come risulta immediato da $\overline{x}' = f(\overline{x}, \overline{u}) = 0$.

1.1.1 Linearizzazione attorno ad uno stato di equilibrio

Partiamo dalla forma generale vista adesso, e prendiamo il sistema come stazionario. Dato un ingresso $\overline{u}$ e il suo stato di equilibrio corrispondente $\overline{x}$, definiamo due nuove variabili che rappresentano la **variazione di equilibrio**:

$$\begin{cases} \Delta x = x - \overline{x} \\ \Delta u = u - \overline{u} \end{cases}$$

A questo punto possiamo scrivere le equazioni di stato attraverso la serie di Taylor centrata nello stato di equilibrio troncata al primo ordine:

$$x' = f(x,u) = f(\overline{x}, \overline{u}) + \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x=\overline{x},\ u=\overline{u}} \Delta x + \left.\frac{\partial f}{\partial u}\right|_{x=\overline{x},\ u=\overline{u}} \Delta u + O(|\Delta x|^2) + O(|\Delta u|^2)$$

Abbiamo quindi linearizzato un sistema non lineare attorno ad un punto di equilibrio. Le matrici che moltiplicano i termini del primo ordine sono chiaramente le **Jacobiane**:

$$A = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{\overline{x},\overline{u}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

$$B = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{\overline{x},\overline{u}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u_1} & \frac{\partial f_1}{\partial u_2} & \dots \\ \frac{\partial f_2}{\partial u_1} & \frac{\partial f_2}{\partial u_2} & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

da cui riscriviamo la formula di Taylor riportata prima come:

$$x' = A \cdot \Delta x + B \cdot \Delta u$$

Abbiamo quindi trovato la forma a variabili di stato. Associando allo stato di equilibrio anche un'uscita di equililbrio $\overline{y} = g(\overline{x}, \overline{u})$, e chiamando Δy la variazione di uscita, si può ricavare il sistema completo a variabili di stato:

$$\begin{cases} x' = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}$$

Riprendendo l'esempio precedente della regolazione della velocità di crociera, avevamo ricavato il sistema non lineare in forma generale:

$$x' = f(x, u) = \begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2' = -\frac{\alpha}{m}|x_2|x_2 - \frac{\beta}{m}x_2 + \frac{\gamma}{m}u - g\sin\theta \\ y = x_2 \end{cases}$$

da cui le matrici:

$$A = \frac{\partial f}{\partial x} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{\alpha}{m}|\overline{x_2}| - \frac{\beta}{m} \end{pmatrix}$$

$$B = \frac{\partial f}{\partial u} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u_1} & \frac{\partial f_1}{\partial u_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u_1} & \frac{\partial f_2}{\partial u_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \frac{\gamma}{m} & -g\cos\theta \end{pmatrix}$$

Ciò di cui abbiamo bisogno sarà quindi una condizione di equilibrio. Se imponiamo $\theta = 0$ e $u = 0$, cioè piano orizzontale con nessuna forza di controllo, otteniamo $x_2 = 0$ per qualsiasi x_1, quindi uno stato di equilibrio.

Sostituendo, si ricava:

$$A = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x_1=0,\ x_2=0} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{\beta}{m} \end{pmatrix}$$

$$A = \left.\frac{\partial f}{\partial u}\right|_{u=0,\ \theta=0} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{\gamma}{m} & -g \end{pmatrix}$$

Da cui il sistema:

$$\begin{cases} x' = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\beta}{m} \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \frac{\gamma}{m} & -g \end{pmatrix} u \\ y = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} x \end{cases}$$

Abbiamo quindi che, sebbene il mondo sia principalmente non lineare, e i sistemi non lineari siano di difficile trattazione, possiamo sempre trovare una forma linearizzata attorno a dei punti di equilibrio e quindi ricondurci a sistemi lineari. Da ora in avanti considereremo quindi solo sistemi di questo tipo.

1.2 Stabilità di Lyapunov

La **stabilità** di un sistema considera le conseguenze sul movimento del sistema di un incertezza sul valore iniziale dello stato. L'idea è che, in un sistema *stabile*, *piccole* perturbazioni dello stato iniziale rispetto ad un valore di riferimento provocano solo *piccole* perturbazioni sul movimento dello stato, che ci aspettiamo si annullino sul lungo termine.

Definizione 1.3: Stato di equilibrio stabile (Lyapunov)

Poniamo un ingresso costante $u(t) = \overline{u}$ con corrispondente stato di equilibrio $\overline{x}$, e consideriamo un movimento *perturbato* ottenuto da $u(t) = \overline{u}$ ma a partire da $x_0 \neq \overline{x}$. $\overline{x}$ si dice stabile se, per ogni $\epsilon > 0$, esiste $\sigma > 0$ tale che per tutti gli x_0 che soddisfano:

$$|x_0 - \overline{x}| \leq \delta$$

si ha:

$$|x(t) - \overline{x}| \leq \epsilon, \quad t \geq 0$$

notiamo come la definizione ricalca quella di limite, si può infatti definire:

Definizione 1.4: Stabilità asintotica

Uno stato di equilibrio stabile $\overline{x}$ è anche asintoticamente stabile se vale:

$$\lim_{t \to +\infty} |x(t) - \overline{x}| = 0$$

Questa definizione è effettivamente una versione più forte dello stato di equilibrio stabile che prevede piena convergenza in prospettiva di $t \to \infty$, anziché confinamento in un cono (cilindro) diretto in direzione tempo positiva con base $B(\overline{x}, \delta)$.

1.3 Formula di Lagrange

Avevamo definito il sistema in forma variabili di stato:

$$\begin{cases} x' = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}$$

Per sistemi LTI possiamo calcolare in forma chiusa la funzione di transizione dello stato:

$$\begin{cases} x(t) = \phi(t, t_0, x(t_0), u(t)) \\ y(t) = \gamma(t, t_0, x(t_0), u(t) \end{cases}$$

Riassumiamo alcuni concetti che ci saranno utili. Notiamo che un equazione differenziale scalare e omogenea:

$$\begin{cases} x'(t) = a \cdot x(t) \\ x(t_0 = 0) = x_0 \end{cases}$$

ha una soluzione del tipo $x(t) = x_0 e^{at}$, con la possibilità di $a \in \mathbb{C}$ e quindi:

$$e^{at} = e^{x+iy} = e^x \left(\cos(y) + i \sin(y)\right)$$

Notiamo poi che sviluppando secondo la serie di Taylor la funzione esponenziale si ha:

$$e^{at} = \sum_{i=0}^{\infty} a^i \cdot \frac{t^i}{i!} = 1 + at + a^2 \frac{t^2}{2!} + ... + a^r \frac{t^r}{r!}$$

Nei nostri sistemi avevamo una matrice A, cioè un'equazione differenziale vettoriale:

$$\begin{cases} x'(t) = Ax(t) \\ x(t_0 = 0) = x_0 \end{cases}$$

quindi la soluzione dovrà necessariamente essere:

$$x(t) = e^{At} x_0$$

Stiamo effettivamente elevando un esponenziale ad una matrice (gli analisti avevano ragione!). potremo quindi usare lo sviluppo di Taylor per trovare e^{At}:

$$e^{At} = \sum_{i=0}^{\infty} A^i \cdot \frac{t^i}{i!} = 1 + At + A^2 \frac{t^2}{2!} + ... + A^r \frac{t^r}{r!}$$

Chiamiamo $e^A t$ **matrice di transizione**, perché determina il **moto libero del sistema** in assenza di ingresso ($u(t) = 0$):

$$x(t) = \phi(t, t_o, x(t_0), u = 0) = e^A (t - t_0) x(t_0)$$