1 Lezione del 10-04-25

Riprendiamo la trattazione dei diagrammi di Bode di funzioni di trasferimento di uso comune.

1.1 Poli complessi coniugati

Prendiamo la funzione di trasferimento con denominatore al second'ordine:

$$G(s) = \frac{1}{1 + \frac{2\xi}{\omega_0}s + \frac{s^2}{\omega_0^2}} = \frac{\omega_0^2}{s^2 + 2\xi\omega_0 s + \omega_0^2}$$

dove ricordiamo ω_0 è la **pulsazione naturale** e ξ è lo smorzamento.

Prendiamo quindi la prima forma, che altro non è se non la forma di Bode e ricaviamo la risposta armonica:

$$G(j\omega) = \frac{1}{1 + \frac{2\xi}{\omega_0}j\omega - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}} = \frac{1}{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right) + j\left(\frac{2\xi}{\omega_0}\omega\right)}$$

1.1.1 Valutazione del modulo

Troviamo quindi il modulo:

$$|G(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0}\right)^2 + 4\xi^2\frac{\omega^2}{\omega_0^2}}}$$

da cui la risposta in decibel:

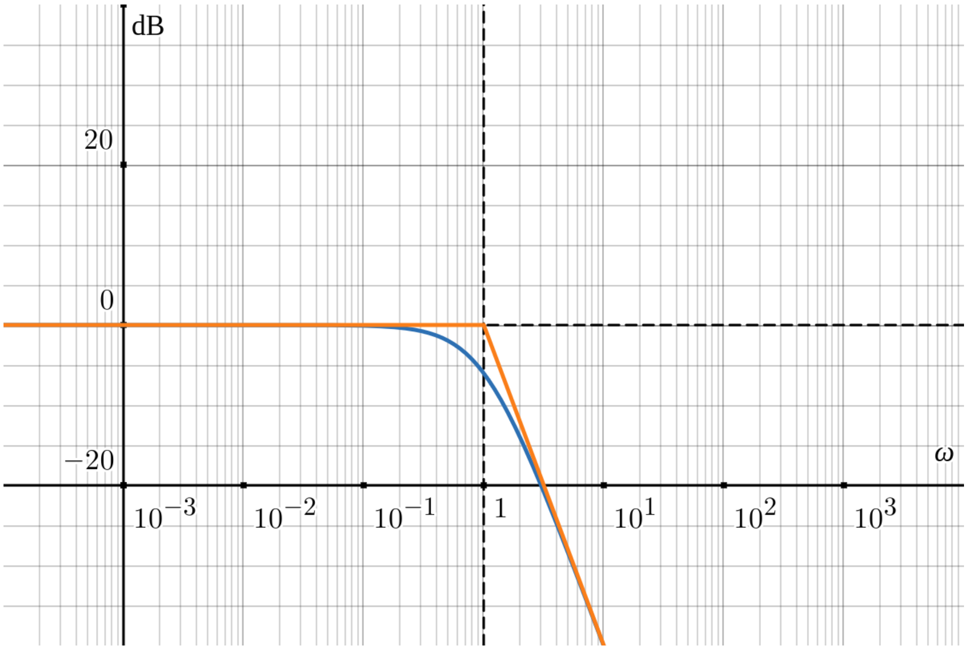
$$|G(j\omega)|_{dB} = 20\log_{10}\left(\frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0}\right)^2 + 4\xi^2\frac{\omega^2}{\omega_0^2}}}\right)$$

Possiamo allora tracciare il diagrama a rette prendendo il punto di rottura in ω_0:

- $\omega << \omega_0$, da cui:
$$|G(j\omega)| \approx 0\,\mathrm{dB}$$
- $\omega >> \omega_0$, da cui:
$$|G(j\omega)| \approx 20\log\left(\frac{1}{\frac{\omega^2}{\omega_0^2}}\right) = 40\log(\omega_0) - 40\log(\omega)$$

  cioè si ottiene una retta con pendenza di -40 dB/dec (-12 dB/oct).

Da cui si ottiene l'approssimazione (sovraimposta al valore reale):



1.1.2 Risonanza

Potrebbe interessarci valutare l'errore, sopratutto considerato il fatto che non teniamo conto dello smorzamento ξ nella stima per rette. Prendiamo quindi il valore sul punto di rottura:

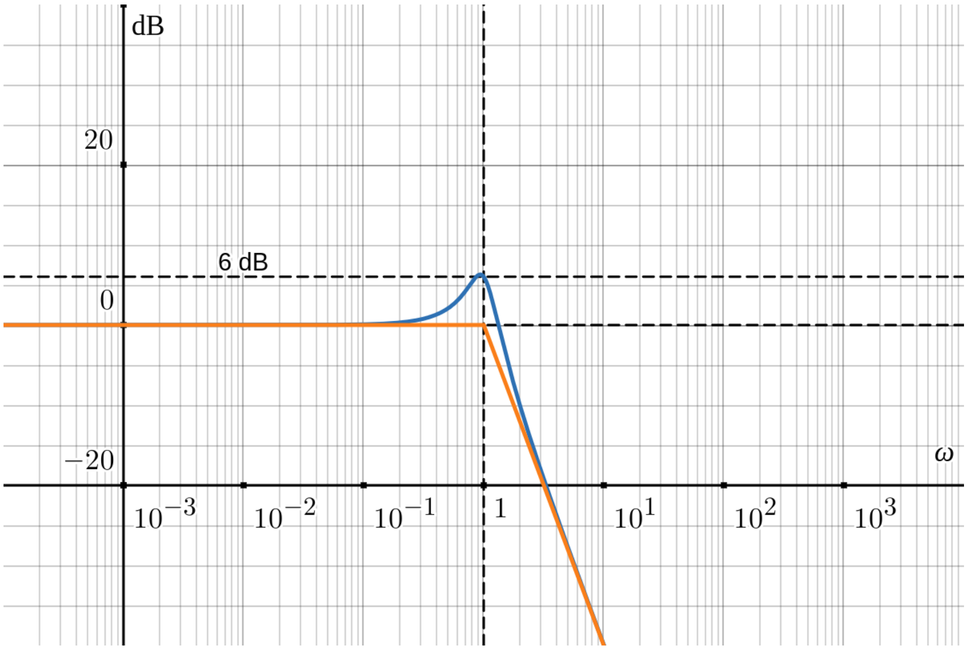
$$|G(j\omega_0)|_{dB} = 20\log\left(\frac{1}{4\xi^2}\right) = -20\log(2\xi)$$

per cui si ottengono gli errori al variare di ξ (considerata la nostra approssimazione per rette che prende 0 dB a $\omega = \omega_0$):

ξ	**Errore**
0	$+\infty$
$\frac{1}{2}$	0 dB
$\frac{\sqrt{2}}{2}$	-3 dB
2	-6 dB

Come regola empirica, possiamo assumere di poter usare il diagramma asintotico (il diagramma per rette) solo quando lo smorzamento è $\xi > 0.3$.

Vediamo ad esempio l'errore che commettiamo per $\xi = \frac{1}{4}$, che calcoliamo subito dovrà essere di 6 dB:



Come notiamo, si forma un picco attorno a $\omega = \omega_0$, dove la risposta ha un valore di picco vicino (in verità a ξ decrescente il massimo assoluto si sposta sempre più verso sinistra) all'errore calcolato. Questo picco prende il nome di **picco di risonanza**.

1.1.3 Picco di risonanza

Per ricavare il **punto di picco** effettivo, cerchiamo il punto stazionario della funzione:

$$f(u) = (1 - u^2) + 4\xi^2 u^2, \quad u = \frac{\omega}{\omega_0}$$

che è il denominatore del modulo.

Abbiamo quindi, derivando:

$$\frac{d}{du} f(u) = 0 = -4u(1 - u^2) + 8\xi^2 u$$

da cui:

$$u_{max} = \frac{\omega_{max}}{\omega_0} = \sqrt{1 - 2\xi^2}$$

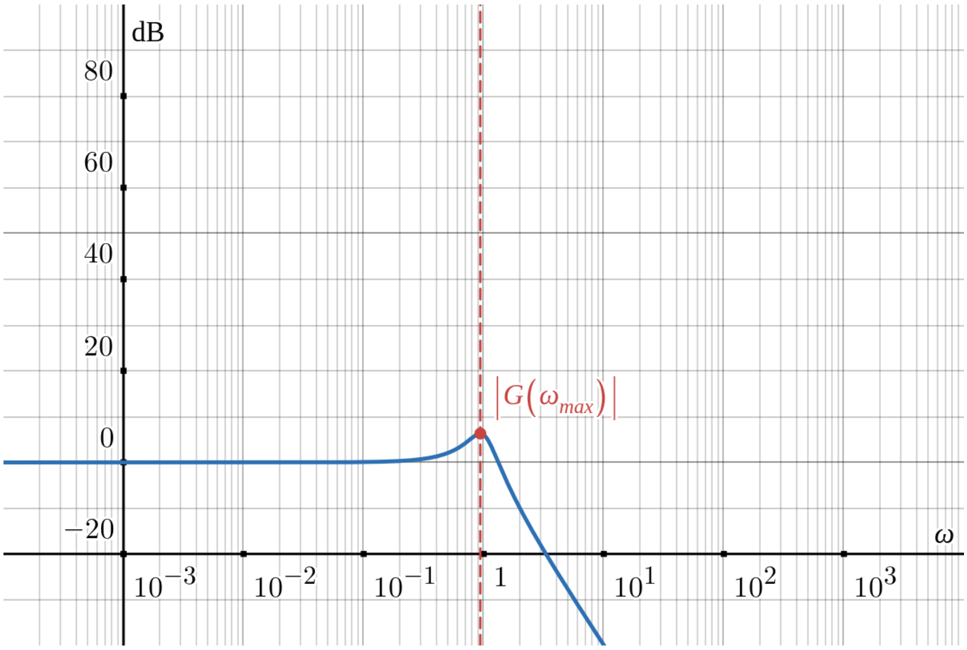
cioè il *punto di picco* è:

$$\omega_{max} = \omega_0 \sqrt{1 - 2\xi^2}$$

e il *valore di picco*, ovvero il modulo in decibel raggiunto nel punto di picco, è pari a:

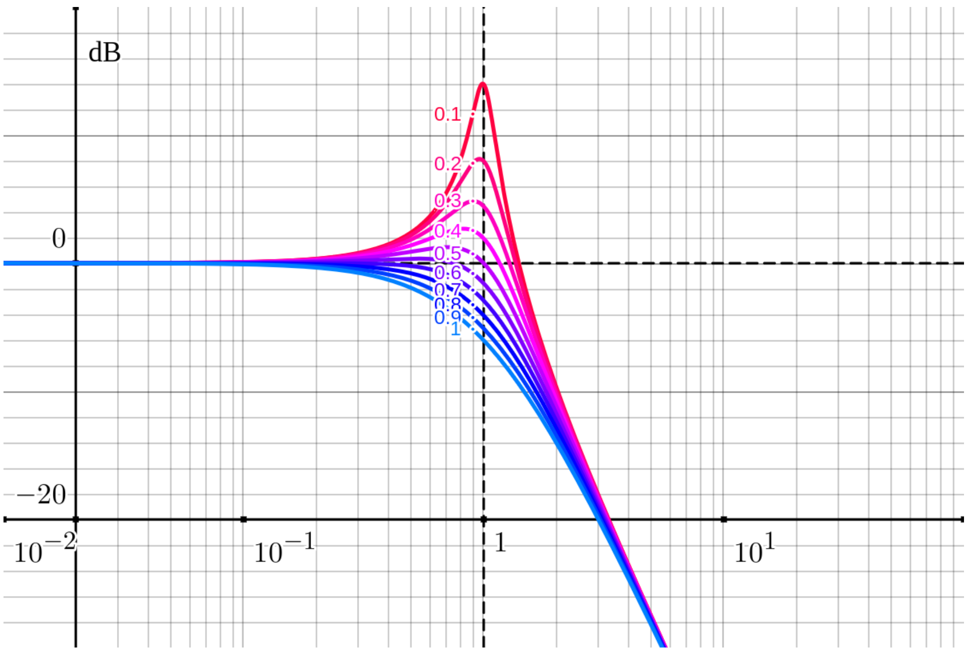
$$\max |G(j\omega)|_{dB} = 20 \log (\omega_{max})$$

Vediamo quindi il punto di picco dell'esempio precdedente, dove ricordiamo avevamo preso $\xi = \frac{1}{4}$:



Il valore ω_{max}, calcolato al computer, risulta circa ~ 0.935, per cui l'errore $|G\left(\omega_{max}\right)|$ in questo caso è abbastanza vicino all'errore in $\omega = 1$, che era di 6 dB.

Possiamo quindi riportare un grafico che mostra la variazione del picco di risonanza al variare dello smorzamento ξ:



1.1.4 Valutazione di fase

Per quanto riguarda la fase, invece, si avrà:

$$\angle G(j\omega) = -\text{atan2}\left(\frac{\frac{2\xi}{\omega_0}\omega}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}\right)$$

in quanto l'unico termine che determina la fase è il denominatore.

Potremo quindi prendere l'approssimazione per rette:

$$\begin{cases} \omega << \omega_0 \implies \angle G(j\omega) \approx 0° \\ \omega >> \omega_0 \implies \angle G(j\omega) \approx -180° \\ \omega = \omega_0 \implies \angle G(j\omega) = -90° \end{cases}$$

preso $\tau > 0$.

Il valore in $\omega = \omega_0$ si calcola osservando che:

$$\angle G(j\omega_0) = -\text{atan2}\left(\frac{2\xi}{0^+}\right)$$

da cui il limite, che porta appunto a $-90°$.

Otteniamo quindi il grafico approssimato, come sempre sovraimposto a quello reale:

qui manca il grafico

Vediamo che lo scostamento in fase è lo stesso del sistema del primo ordine, ma raddoppiato: questo ha senso, in quanto abbiamo detto già lo stesso abbattimento dopo la frequenza di taglio ω_0 era del doppio, cioè -40 dB/dec.

1.2 Ritardo nei diagrammi di Bode

Vediamo infine l'effetto che il ritardo ha nel dominio frequenze. Avevamo già visto l'espressione del ritardo:

$$G(s) = e^{-s\tau}$$

In risposta armonica, questa dà:

$$G(j\omega) = e^{-j\omega\tau}$$

cioè uno scostamento in fase di $\omega\tau$.

L'effetto sul diagramma di Bode sarà quindi di lasciare invariato il modulo (cioè dare una costante a 0 dB), e sopratutto di scostare la fase di un valore pari a $-\omega\tau$.

grafici