

1 Lezione del 16-04-25

Riprendiamo il discorso sul luogo delle radici, con maggiore attenzione su come *tarare* (ottenere informazioni riguardo al modulo) i punti s .

1.0.1 Taratura del luogo delle radici

Abbiamo visto nella scorsa lezione come applicando la *condizione di fase* possiamo tracciare tutto il luogo delle radici, diretto ed inverso. Abbiamo poi introdotto come l'altra condizione, la *condizione di modulo*, può essere usata per ottenere il modulo corrispondente ad un punto s_i che già sappiamo appartenere al luogo delle radici.

Questa era quindi la condizione, che valutiamo nel punto s_i :

$$\left| \frac{n(s)}{d(s)} \right| = \frac{1}{|K|} \xrightarrow{s_i} |K|_{s=s_i} = \left| \frac{d(s_i)}{n(s_i)} \right|$$

Riprendiamo l'esempio della scorsa lezione, che era:

$$K \cdot G(s) = \frac{K}{s(s+1)}$$

Avremo quindi, applicando la condizione di modulo:

$$|K|_{s=s_i} = \frac{|s_i(s_i+1)|}{|1|}$$

Prendiamo ad esempio il punto che sta all'intersezione fra i due rami che avevamo individuato nel luogo diretto, cioè $s_i = -\frac{1}{2}$. In questo caso avremo che il modulo di K è:

$$|K|_{s_i=-\frac{1}{2}} = \frac{\left| -\frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2} + 1 \right) \right|}{|1|} = \frac{1}{4}$$

1.1 Luogo delle radici complesse e coniugate

Veniamo quindi a come tracciare i luoghi delle radici di sistemi del second'ordine. Prendiamo quindi un nuovo esempio, che è la classica forma di Evans al secondo grado:

$$G(s) = \frac{\omega_0^2}{s^2 + 2\xi\omega_0 s + \omega_0^2}$$

Le radici di questa sono note e valgono:

$$p_{1,2} = -\xi\omega_0 \pm \omega_0 j \sqrt{1 - \xi^2}$$

1.1.1 Valutazione di frequenza e smorzamento

Vediamo quali informazioni sul sistema possiamo ottenere osservando le radici.

Prendendo quindi un punto all'origine nel piano di Gauss del luogo delle radici, e quindi l'angolo θ che la congiungente del punto e la radice a parte immaginaria positiva forma con l'asse immaginario, potremo dire:

$$\omega_0 \sin(\theta) = \xi\omega_0 \implies \theta = \sin^{-1}(\xi)$$

cioè l'angolo θ va più o meno come lo smorzamento.

Di contro, considerando smorzamento fisso, si ha che la distanza dall'origine equivale alla frequenza naturale. Infatti avremo che:

$$\sqrt{\xi^2 \omega_0^2 + \omega_0^2 (1 - \xi^2)} = \omega_0$$

Riassumendo, quindi, si ha che:

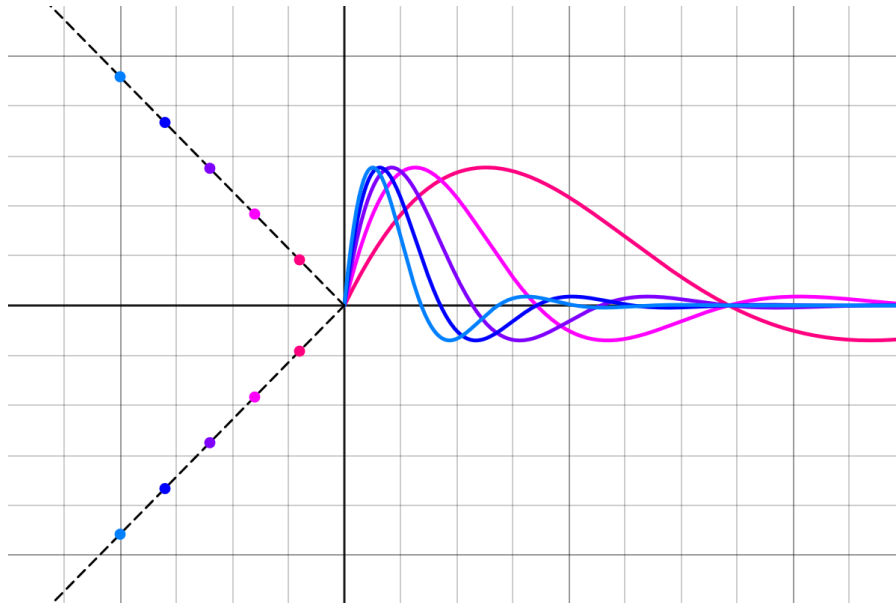
- $\xi = 0$: (*smorzamento nullo*) i poli sono sull'asse immaginario;
- $\xi = 1$: (*smorzamento perfetto*) i poli sono sul'asse reale e coincidenti;
- $0 < \xi < 1$: (*sistema sottosmorzato*) i poli sono sulla semicirconferenza sinistra (uno in \mathbb{C}^+ , l'altro in \mathbb{C}^-) di raggio ω_0 centrata sull'origine.
- Il modulo delle radici corrisponde alla frequenza naturale ω_0 .

1.1.2 Linee costanti

Esistono diverse linee costanti che possiamo percorrere (cioè su cui possiamo posizionare i poli) in modo da mantenere certe caratteristiche del sistema costanti:

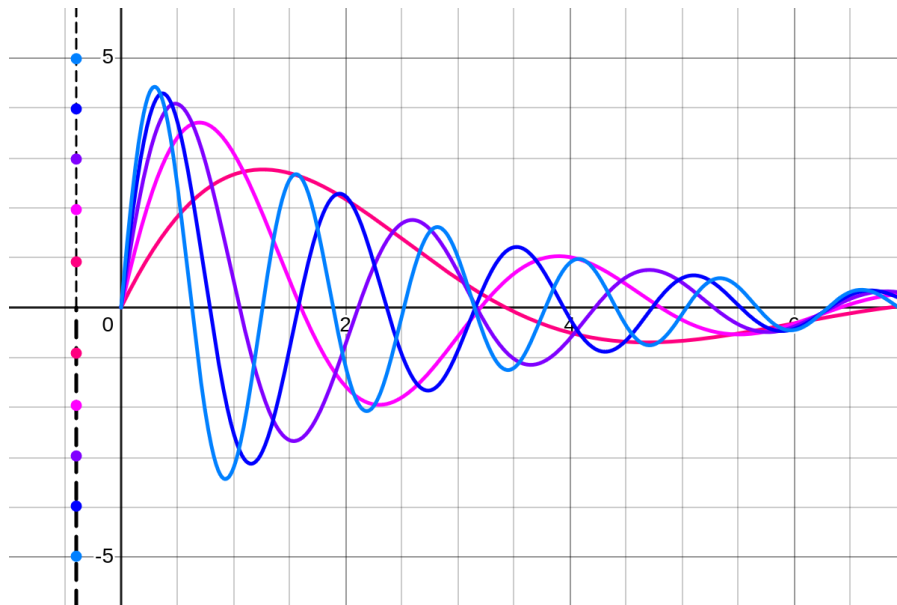
- Abbiamo quindi che percorrendo una retta passante per l'origine nella direzione negativa dell'asse complesso si ottiene una cosiddetta **linea di smorzamento costante**, cioè un insieme di regioni dove lo smorzamento resta costante e cambia invece (con l'aumentare della distanza dall'origine) la frequenza naturale.

Vediamo ad esempio il seguente grafico, dove a sinistra si mostrano le linee di smorzamento costante, e a sinistra le risposte all'impulso di alcuni dei sistemi che descrivono:



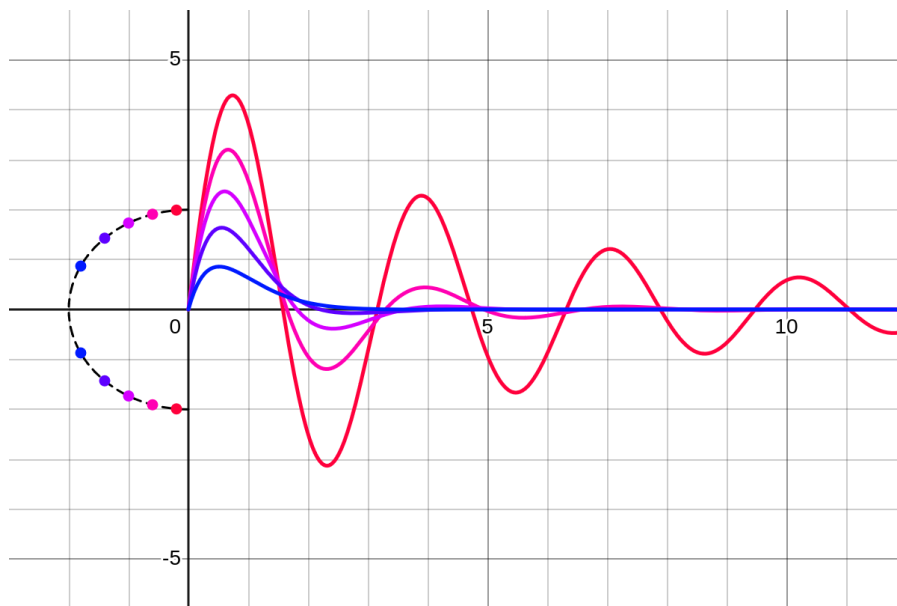
- Per mantenere costante il tempo di assestamento, invece, basta mantenere la componente reale dei poli costante, ergo si crea una cosiddetta **linea di tempo di assestamento costante** parallela all'asse immaginario.

Il grafico del tipo precedente per questa situazione è:



- Per mantenere costante la pulsazione prendiamo circonferenze centrate sull'origine di raggio crescente, cioè cerchiamo una **circonferenza di pulsazione costante**.

Il grafico del tipo precedente per questa situazione è:

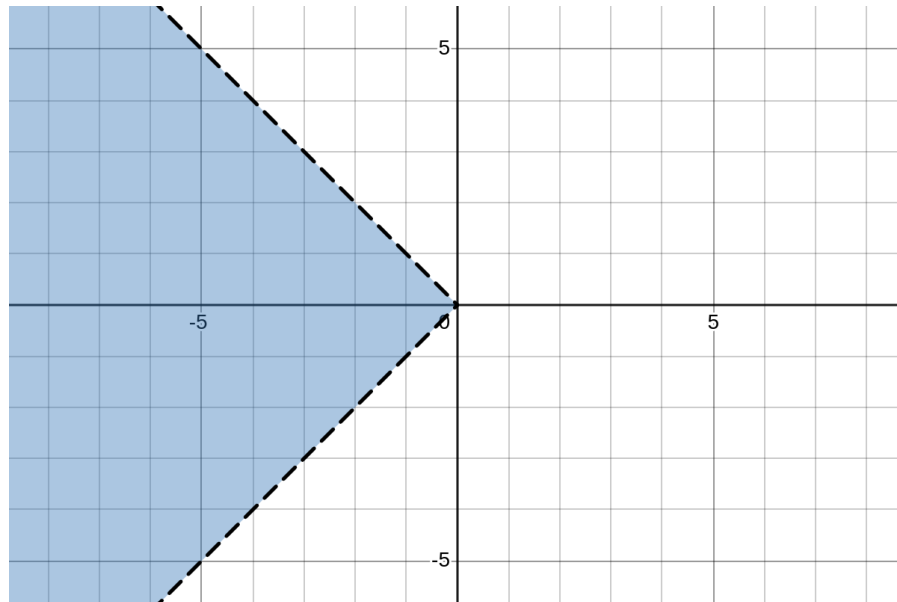


1.1.3 Regioni di vincolo

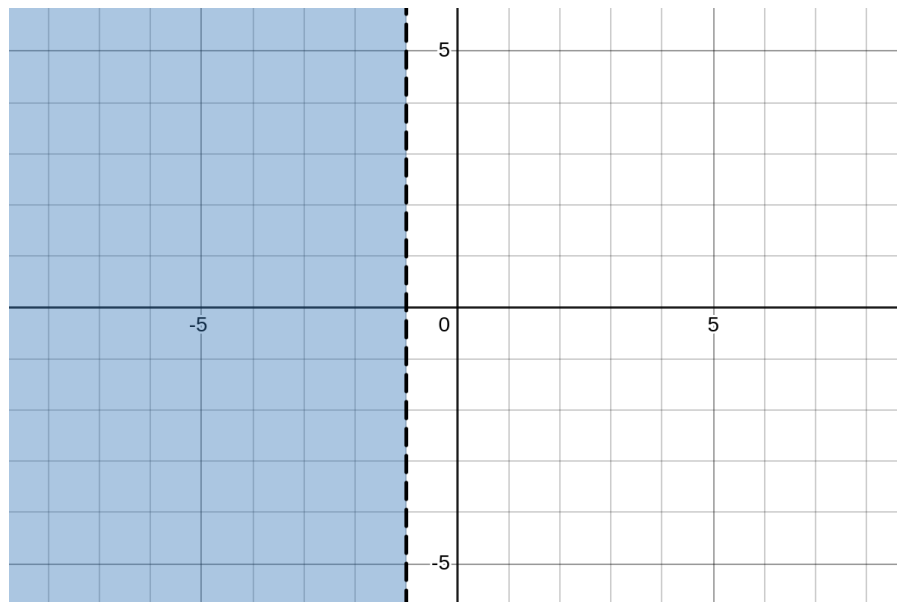
Abbiamo parlato finora dei soli poli: vediamo di reintrodurre il sistema con controllore (K).

Intanto possiamo vedere alcuni vincoli di progetto che potremmo avere sul comportamento desiderato:

- Potremmo volere che lo **smorzamento** che otterremo non sia mai minore di un certo valore. Saremo vincolati ad un cono di angolo θ con l'asse immaginario, che possiamo individuare sul piano di Argand-Gauss:

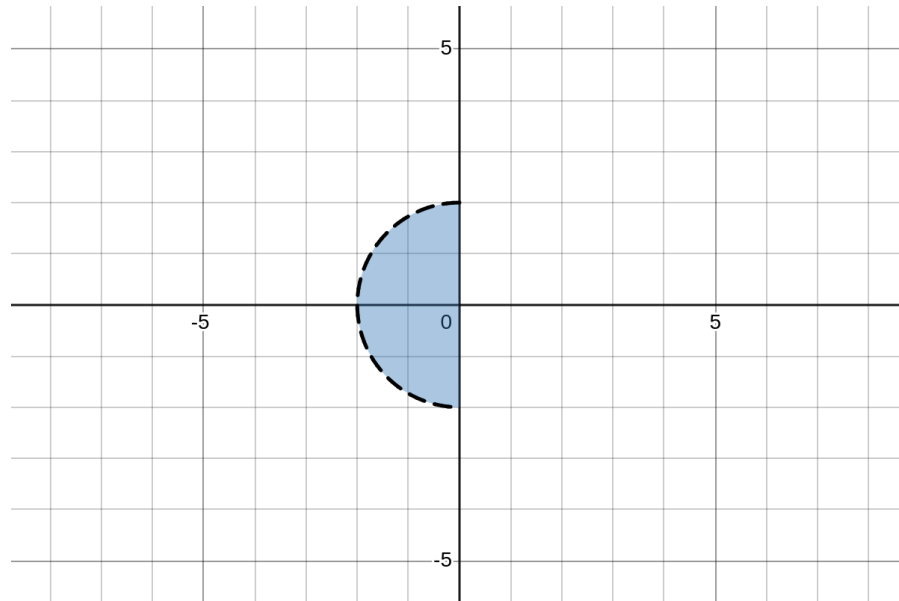


- Se volessimo invece **tempo di assestamento** sotto una certa soglia, vorremmo trovarci a sinistra di una linea di tempo di assestamento costante, quindi in una regione di piano che il seguente aspetto:



- Infine potremmo voler vincolare la pulsazione naturale. In questo caso, direttamente dalla corrispondenza fra modulo e pulsazione naturale, ci vorremmo restringere, ad esempio se si vuole pulsazione *maggiore (minore)* di una certa soglia, alla regione *esterna (interna)* ad una certa circonferenza di raggio equivalente alla soglia.

Sul grafico:



L'insieme dei punti che rispettano tutti i vincoli si ha, a questo punto, semplicemente prendendo l'intersezione delle regioni individuate da ogni vincolo.

1.1.4 Regole di tracciamento 2

Vediamo quindi altre regole di tracciamento.

5. La regola (5) riguarda le *sovrapposizioni* di rami. In particolare, si ha che i rami non si sovrappongono mai, se non in punti singolari detti **punti multipli**, in quanto rappresentano *radici multiple* del polinomio caratteristico.

In un punto multiplo la radice multipla s_i è soluzione di:

$$\begin{cases} d(s_i) + Kn(s_i) = 0 \\ d'(s_i) + Kn'(s_i) = 0 \end{cases}$$

cioè dell'equazione caratteristica e della sua derivata.

Inoltre, si nota che:

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{s_i - p_i} = \sum_{i=1}^m \frac{1}{s_i - z_i}$$

Esempio

Avevamo già visto questa situazione nel primo esempio di tracciamento, cioè:

$$K \cdot G(s) = \frac{K}{s(s+1)}$$

Vediamo infatti che risolvendo:

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{s - p_i} = \sum_{i=1}^m \frac{1}{s - z_i} \implies \frac{1}{s} + \frac{1}{s+1} = 0$$

si ottiene la soluzione:

$$s_i = -\frac{1}{2}$$

che avevamo visto era esattamente un punto di intersezione fra rami (in particolare quello reale e immaginario nel luogo diretto).

6. La regola (6) si concentra sul *comportamento asintotico*, cioè su cosa accade per $K \rightarrow +\infty$. Avevamo anticipato che in questo caso i poli andavano al *finito* (cioè agli zeri della funzione a ciclo aperto) o ad *infinito*. Per quanto riguardava i poli ad infinito, avevamo detto che questi erano $n - m$ (cioè quelli che non andavano in zeri in ciclo aperto). Chiamiamo questo valore $v = n - m$, o *differenza poli-zeri*.

Avevamo dalla condizione di fase, cioè dalla regola (2), che i punti che appartengono al luogo delle radici sono quelli che rispettano:

$$\begin{cases} \angle n(s) - \angle d(s) = -\pi \pm 2h\pi, & K > 0 \\ \angle n(s) - \angle d(s) = \pm 2h\pi, & K < 0 \end{cases}$$

e cioè per cui la somma degli angoli agli zeri θ_i meno la somma degli angoli ai poli ϕ_i vale $-\pi$ per il luogo diretto, e 0 per il luogo indiretto. Quando facciamo tendere K ad infinito, si ha che gli angoli per tutti i poli e zeri diventano simili, cioè:

$$\phi_i \approx \theta_i \approx \phi_\infty$$

per cui potremo approssimare:

$$\angle n(s) - \angle d(s) \approx \phi_\infty(m - n) = -\pi \pm 2h\pi$$

da cui la regola (nell'esempio per il luogo diretto). Notiamo che preferiamo usare $n - m$ invece di $m - n$ in quanto corrisponde direttamente con v , ma il risultato non cambia in quanto la condizione di fase funziona scambiando i segni a destra (se si ruota di 360° su un cerchio si torna da dove si è partiti).

Nota la differenza poli-zeri potremo quindi dire che:

- Esiste un **centro degli asintoti**, cioè il punto da cui iniziamo a tracciare gli asintoti, che sta sempre sull'asse reale ed è:

$$\sigma = \frac{\sum_{i=1}^n p_i - \sum_{i=1}^m z_i}{v}$$

- Gli asintoti dividono quindi il piano di Argand-Gauss in sezioni equiangole, cioè si hanno gli **angoli di asintoto**:

$$\phi_{\text{asintoto}} = \begin{cases} \frac{-\pi \pm 2h\pi}{v}, & K > 0 \\ \frac{2h\pi}{v}, & K < 0 \end{cases}$$

Esempio 1

Vediamo la funzione di trasferimento di esempio:

$$G(s) = \frac{1}{(s+1)^3}$$

in questo caso avremo il centro degli asintoti:

$$\sigma = \frac{-1 - 1 - 1}{3} = -1$$

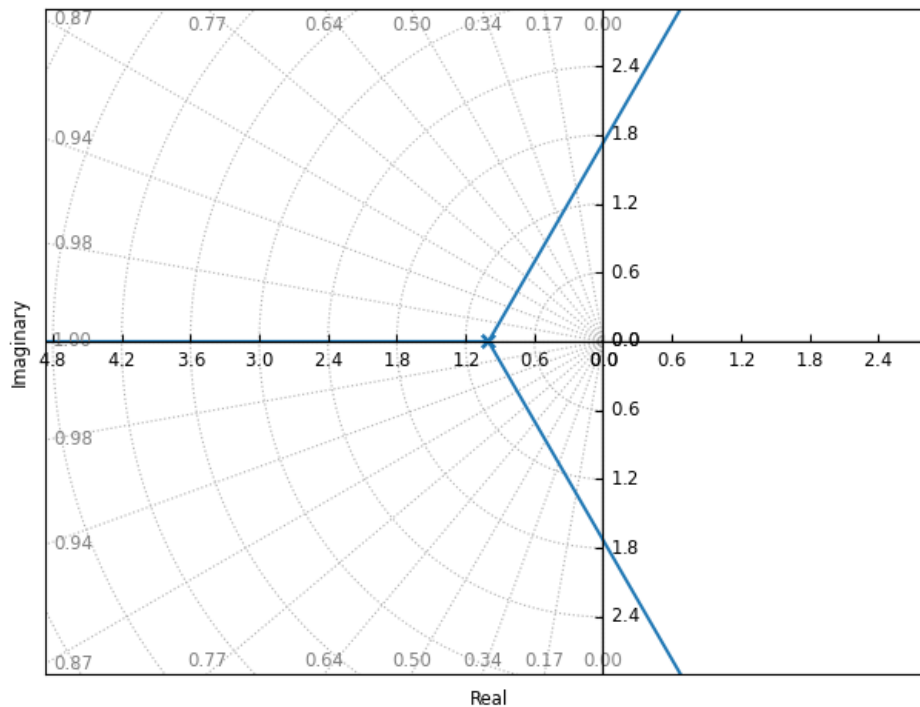
e gli angoli di asintoto, rispettivamente per il luogo diretto e inverso:

$$\phi_{asintoto} = \{60^\circ, 180^\circ, 300^\circ\}, \quad K > 0$$

$$\phi_{asintoto} = \{0^\circ, 120^\circ, 240^\circ\}, \quad K < 0$$

Notiamo che questi angoli non sono stati calcolati usando la formula, ma semplicemente notando di dover dividere, per $v = 3$, il piano di Argand-Gauss in regioni equiangole di angolo 120° .

Sul grafico, questo sarà:



Esempio 2

Vediamo un'altro esempio, attraverso la funzione di trasferimento:

$$G(s) = \frac{1}{s(s+1)(s+2)}$$

In questo caso l'equazione caratteristica sarà:

$$1 + K \cdot G(s) = s(s+1)(s+2) + K = s^3 + 3s^2 + 2s + K = 0$$

Potrebbe interessarci valutare la stabilità. In questo caso potremmo sfruttare il *criterio di Routh*:

$$\begin{array}{c|cc} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & K \\ 1 & \frac{6-K}{3} & 0 \\ 0 & K & \end{array}$$

da cui le K critiche $K_{CR1} = 0$ e $K_{CR2} = 6$, e quindi sistema stabile per $0 < K < 6$.

Proseguiamo col tracciamento. Avremo che i poli sono $p_1 = -2$, $p_2 = -1$ e $p_3 = 0$. Dalla regola (4), quindi, apparterranno al luogo diretto i punti in $(-\infty, -2]$, e i punti in $[-1, 0]$.

Avremo $v = n - m = 3$ (non ci sono zeri), e quindi 3 asintoti (di cui uno è quello reale). Vorremo gli angoli di asintoto (sempre in luogo diretto):

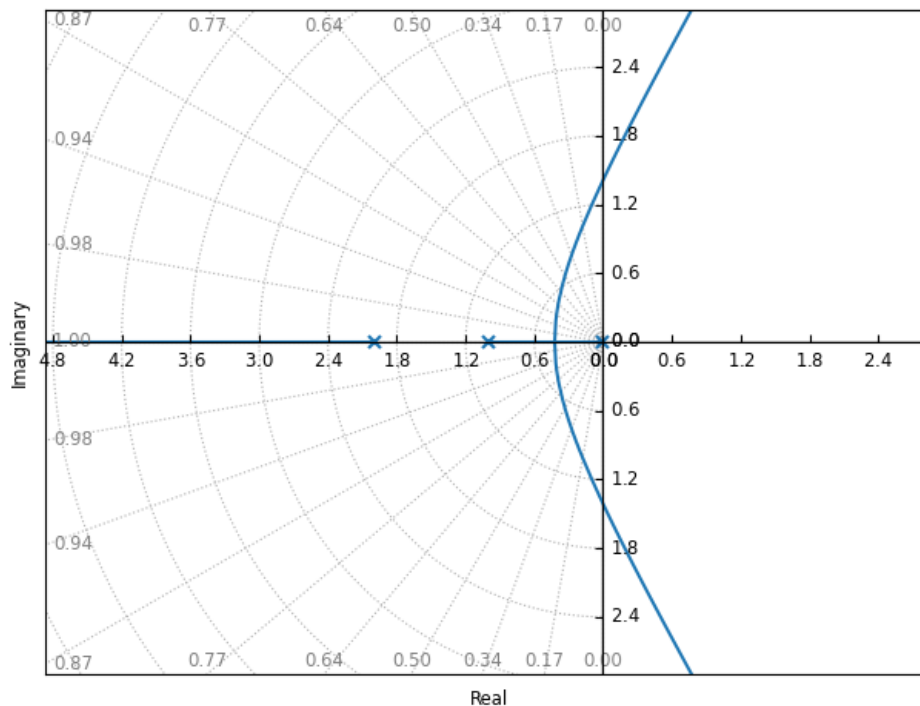
$$\phi_{\text{asintoto}} = \{60^\circ, 180^\circ, 300^\circ\}$$

e il centro degli asintoti:

$$\sigma = \frac{0 - 1 - 2}{3} = -1$$

cioè sul piano complesso ci saranno due asintoti che si staccano da -1 e proseguono formando angoli di 60° e -60° con l'asse reale.

Sul grafico, questo sarà:



potremmo chiederci il valore del punto di intersezione fra i due rami. Ricordiamo allora la regola (5), per cui le radici doppie soddisfano:

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{s_i - p_i} = \sum_{i=1}^m \frac{1}{s_i - z_i}$$

che in questo caso significa:

$$\frac{1}{s} + \frac{1}{s+1} + \frac{1}{s+2} = 0 \implies (s+1)(s+2) + s(s+2) + s(s+1) = 3s^2 + 6s + 2 = 0$$

da cui le soluzioni:

$$r_1 = \frac{-6 - \sqrt{12}}{6} \approx -1.577, \quad r_2 = \frac{-6 + \sqrt{12}}{6} \approx -0.4226$$

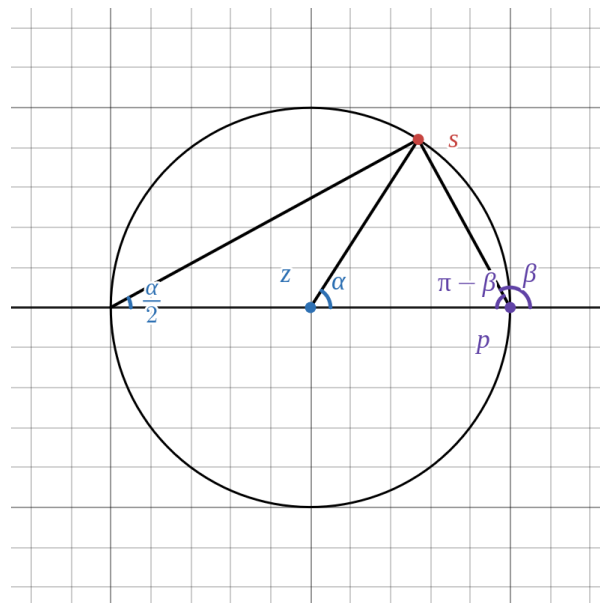
dal grafico, si nota che il punto che cerchiamo dovrà essere compreso fra -1 e 0 , per cui prendiamo la seconda soluzione.

Esempio 3

Prendiamo il caso di avere 2 poli coincidenti ed uno zero finito. In questo caso il luogo delle radici è una circonferenza centrata sullo zero. Questo si verifica dalla condizione di fase:

$$\alpha - 2\beta = -\pi \pm 2h\pi$$

Vogliamo dimostrare che questo vale su qualsiasi punto di una circonferenza centrata sullo zero e di raggio uguale alla differenza fra poli e zeri. Per questo prendiamo il disegno:

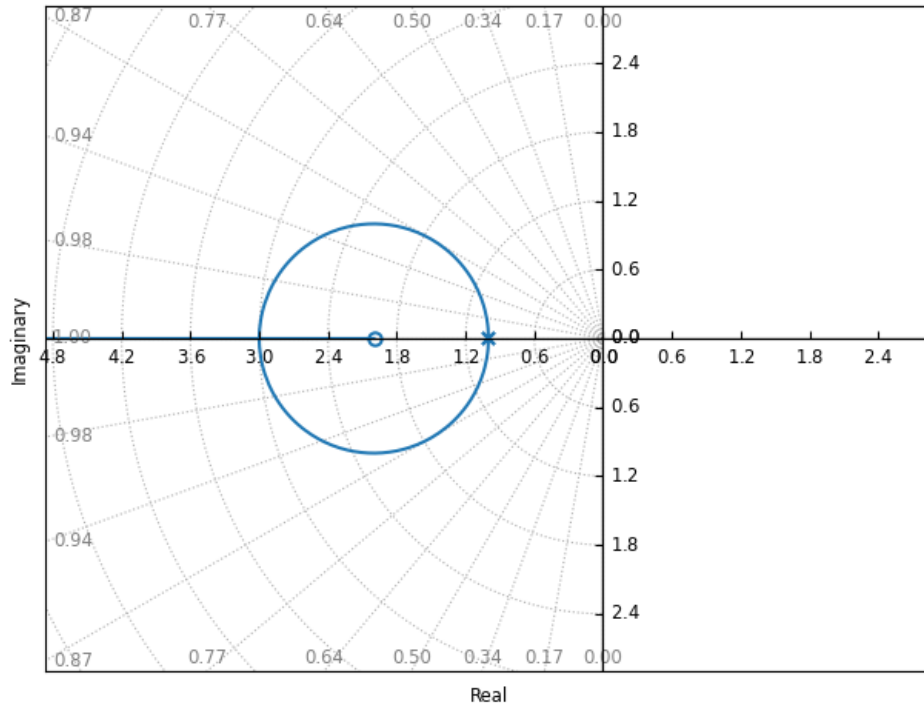


Osservando gli angoli si nota che deve valere:

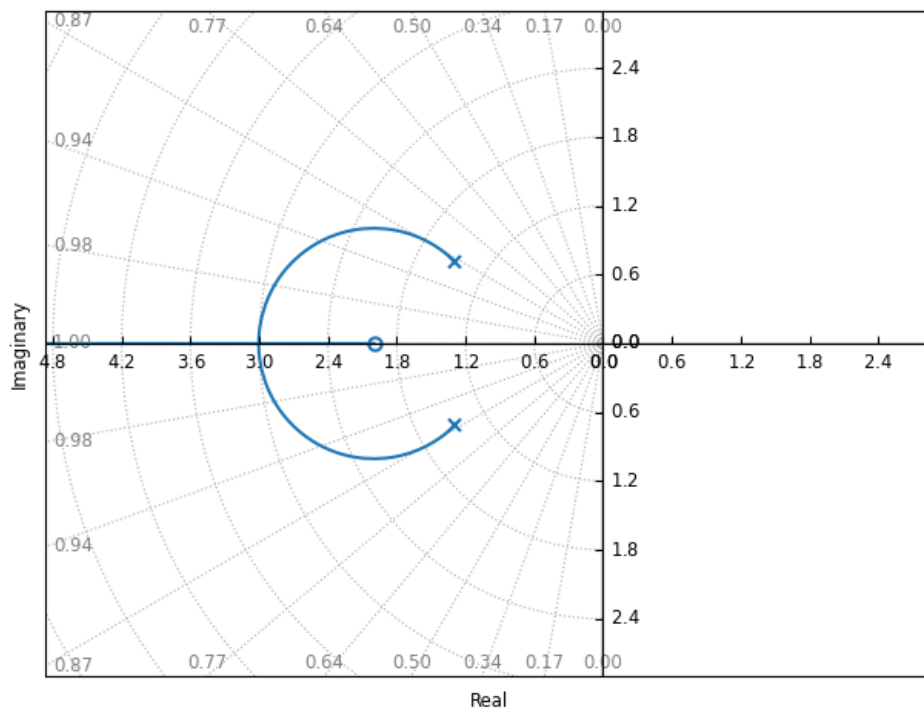
$$\frac{\alpha}{2} + (\pi - \beta) = \frac{\pi}{2} \implies \frac{\alpha}{2} - \beta = \frac{\pi}{2} - \pi \implies \alpha - 2\beta = -\pi$$

cioè la relazione, vera per ogni punto s sulla circonferenza cercata, è equivalente alla condizione di fase per $h = 0$.

Avremo quindi che i due poli, se sono reali, sono obbligatoriamente sovrapposti e tracciano il luogo:



Il risultato si generalizza a funzioni di trasferimento qualsiasi con 2 poli complessi coniugati e uno zero finito. In questo caso il luogo è sempre una circonferenza vincolata sullo zero, dove i poli ne vincolano gli estremi:



7. La regola (7) riguarda gli angoli di partenza dei rami uscenti dai poli. Per ricavare una regola generale riprendiamo la condizione di fase:

$$\begin{cases} \angle n(s) - \angle d(s) = -\pi \pm 2h\pi, & K > 0 \\ \angle n(s) - \angle d(s) = \pm 2h\pi, & K < 0 \end{cases}$$

E notiamo che preso un polo particolare in p^* , ad esempio riguardo al luogo diretto, si avrà che l'angolo di uscita ϕ^* è:

$$\angle n(s) - \angle d^*(s) \Big|_{s=p^*} - \phi^* = -\pi \implies \phi^* = \pi + \angle n(s) - \angle d^*(s) \Big|_{s=p^*}$$

dove $d^*(s)$ è il denominatore rimosso il polo p^* preso in considerazione.

Potremo quindi usare questa formula generale per calcolare l'angolo di uscita dei rami dai poli. Da questo ricaviamo fra l'altro che i rami uscenti dai poli con molteplicità > 1 dividono il piano in parti equiangole e simmetriche rispetto all'asse reale. Infine, nessuno ci nega di applicare la stessa legge agli angoli di arrivo negli zeri (quindi di capire gli angoli finali dei rami che terminano *al finito*).

Esempio

Calcoliamo gli angoli di partenza dai poli della funzione di trasferimento:

$$G(s) = \frac{s+5}{s(s^2+6s+109)}$$

Partiamo col trovare i poli, di cui il polo banale $p_1 = 0$ e i poli complessi coniugati:

$$p_{2,3} = \frac{-6 \pm \sqrt{400}}{2} = -3 \pm 10i$$

Abbiamo quindi i poli:

$$p_1 = 0, \quad p_2 = -3 + 10i, \quad p_3 = -3 - 10i$$

e la funzione di trasferimento fattorizzata:

$$G(s) = \frac{s+5}{s(s+3-10i)(s+3+10i)}$$

Calcoliamo allora gli angoli veri e propri per ogni polo, applicando la legge appena trovata:

- Per il polo p_1 si ha cancellazione dei termini complessi:

$$\phi_1 = \pi + \angle n(s) - \angle d^1(s) \Big|_{s=0} = \pi + \angle 5 - \angle(3-10i) - \angle(3+10i) = 180^\circ$$

e quindi il ramo è diretto a sinistra nell'asse reale, come ci aspettavamo dalla regola (4).

- Per il polo p_2 prendiamo:

$$\begin{aligned} \phi_2 &= \pi + \angle n(s) - \angle d^2(s) \Big|_{s=-3+10i} = \pi + \angle(-2+10i) - \angle(-3+10i) - \angle 20i \\ &= 180^\circ + 78.7^\circ - 106.7^\circ - 90^\circ = 62^\circ \end{aligned}$$

- Per il polo p_3 ci aspettiamo di trovare l'opposto di ϕ_2 , in quanto dalla regola (5) il luogo dovrà essere simmetrico rispetto all'asse reale. Facciamo comunque il calcolo esplicito per completezza:

$$\begin{aligned}\phi_3 &= \pi + \angle n(s) - \angle d^3(s) \Big|_{s=-3-10i} = \pi + \angle(2-10i) - \angle(-3-10i) - \angle -20i \\ &= 180^\circ - 78.7^\circ + 106.7^\circ + 90^\circ = -62^\circ\end{aligned}$$

che conferma quanto ci aspettavamo.

Vediamo quindi il grafico del luogo diretto:

