1 Lezione del 15-04-25

1.0.1 Approssimazione del punto di crossover a 0 dB

Potrebbe esserci di interesse trovare quando il diagramma del modulo di una risposta in frequenza interseca l'asse a 0 dB.

Preso ad esempio l'esempio della scorsa lezione, che avevamo portato in forma di Bode:

$$G(s) = 20 \frac{(10s + 1)}{(s+1)\left(\frac{s^2}{400} + \frac{s}{20} + 1\right)}$$

possiamo procedere in 2 modi:

- Calcolando il valore approssimato ottenuto nell'ultimo zero o polo agente, e l'ultima salita/discesa in dB/oct o dB/dec che osserviamo nel grafico, e quindi cercando l'intersezione del grafico.

  Nell'esempio precedente avremo quindi l'ultimo punto fisso a 46 dB, con una discesa da questo in poi di -40 dB/dec. Avremo quindi che l'andamento della risposta in modulo da $\omega = 200$ in poi:

  $$|G(j\omega)|_{dB} = 46 - 40 \log \left(\frac{\omega}{20}\right)$$

  da cui imponendo a 0:

  $$0 = 46 - 40 \log \left(\frac{\omega}{20}\right) \implies \omega^* = 20 \cdot 10^{\frac{46}{40}} \approx 282.51$$

  cioè risulta che a ~ 282.84 rad/s si ha il punto di intersezione in 0 dB.

- Sommando (che in dB significa moltiplicando) le approssimazioni asintotiche di ogni termine al numeratore e denominatore, quindi ogni zero e polo, e imponendo il loro rapporto all'unità (come abbiamo detto, 0 dB significà unità).

  Nell'esempio precedente vorremmo partire dalla costante:

  $$G(s) \approx 20$$

  e quindi moltiplicare per l'approssimazione asintotica dello zero, che è il solo termine in s, $10s$:

  $$\approx 20 \cdot 10s = 200s$$

  Dividiamo quindi per il polo lineare, prendendo ancora solo il termine in s, cioè s stesso:

  $$\approx \frac{200s}{s} = 200$$

  e infine dividiamo per il polo quadratico, per cui come approssimazione asintotica prendiamo il termine di grado massimo in, $\frac{s^2}{400}$:

  $$\approx 200 \cdot \frac{400}{s^2}$$

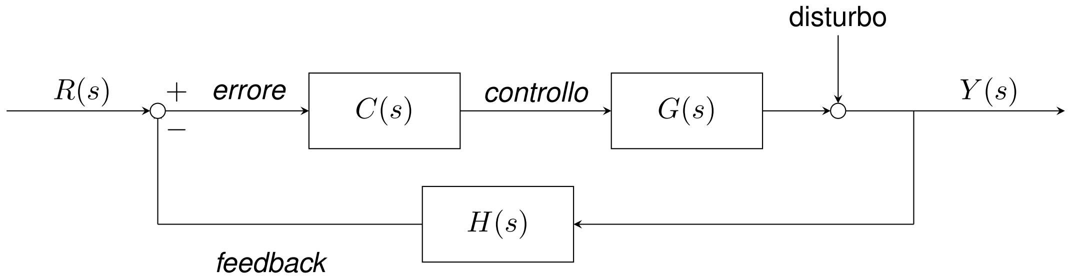
  Imponendo qindi l'unità si ottiene:

  $$\frac{80000}{s^2} = 1 \implies s = \sqrt{80000} \approx 282.84$$

  cioè risulta a ~ 282.84 rad/s si ha il punto di intersezione in 0 dB, che è abbastanza vicino alla stima precedente.

1.1 Luogo delle radici

Il luogo delle radici è un metodo per studiare sul piano complesso l'effetto della reazione negativa sui poli del sistema in catena chiusa, assunto di conoscere la funzione di trasferimento in catena aperta $G(s)$, cioè secondo quanto già visto in 15.2, da cui riportiamo il grafico:



assunto, come sempre, $H(s)$ sensore all'unità e disturbi trascurabili.

Facciamo quindi l'ulteriore semplificazione di prendere il controllore come una *costante proporzionale*, cioè:

$$C(s) = K$$

Il luogo delle radici permette quindi l'analisi *grafico-visuale* delle variazioni dei poli in catena chiusa al variare di uno o più parametri (eventualmente introdotti da un controllore).

1.1.1 Equazione caratteristica

Avremo quindi che, sotto le ipotesi di cui sopra, le risposte saranno:

- In **circuito aperto**:

$$K \cdot G(s) = K \cdot \frac{\prod_{i=1}^{m}(s - z_i)}{\prod_{i=1}^{n}(s - p_i)} = K \cdot \frac{n(s)}{d(s)}$$

- In **circuito aperto**:

$$W(s) = \frac{K \cdot G(s)}{1 + K \cdot G(s)} = \frac{K \cdot n(s)}{d(s) + K \cdot n(s)}$$

I poli in catena chiusa saranno quindi le radici del polinomio:

$$d(s) + K \cdot n(s)$$

chiamiamo infatti la seguente equazione:

$$d(s) + K \cdot n(s) = 0$$

equazione caratteristica del sistema in catena chiusa.

Il **luogo delle radici** in sé per sé sarà quindi l'insieme delle radici dell'equazione caratteristica al variare di K.

1.1.2 Regole di tracciamento

Vediamo allora una serie di *regole* che possiamo usare per tracciare il luogo delle radici:

1. Varrà quindi la regola (1), cioè che il numero di radici in ciclo chiuso è uguale al numero di poli della funzione G in ciclo aperto. Questo significa che il numero di *rami* del luogo delle radici è uguale al numero di poli della funzione di trasferimento in ciclo aperto.

   In particolare, diciamo che il numeratore $n(s)$ ha grado m e il denominatore $d(s)$ ha grado n, con $n \geq m$. Questo coincide con la definizione che abbiamo dato prima della $G(s)$, che era:

   $$G(s) = \frac{\prod_{i=1}^{m}(s - z_i)}{\prod_{i=1}^{n}(s - p_i)}$$

   Avremo allora che l'equazione caratteristica ha grado n, cioè si hanno tante radici dell'equazione caratteristica quanti sono i poli della funzione di trasferimento in ciclo aperto.

   Esempio

   Introduciamo la funzione di trasferimento di esempio:

   $$G(s) = \frac{1}{s(s+1)}$$

   Cioè:

   $$n(s) = 1, \quad d(s) = s(s+1)$$

   in questo caso varrà che $m = 0$ (non ci sono zeri) e $n = 2$, cioè ci aspetteremo di trovare due rami.

2. La regola (2) riguarda la caratterizzazione geometrica del luogo delle radici. Riprendendo l'equazione caratteristica, potremo infatti dire:

   $$d(s) + K \cdot n(s) = 0 \implies \frac{n(s)}{d(s)} = -\frac{1}{K}$$

   Da questa ricaviamo due condizioni di appartenenza al luogo delle radici, rispettivamente in *fase* e in *modulo*.

   - Si definisce la cosiddetta **condizione di fase**:

     $$\begin{cases} \angle n(s) - \angle d(s) = -\pi \pm 2h\pi, & K > 0 \\ \angle n(s) - \angle d(s) = \pm 2h\pi, & K < 0 \end{cases}$$

     Questa deriva dal fatto che. per le proprietà stesse del prodotto complesso, vale:

     $$\angle \left(\frac{n(s)}{d(s)} \right) = \angle n(s) - \angle d(s)$$

     mentre il termine a destra, essendo K un reale, sarà $-\pi$ se $K > 0$, e 0 viceversa. I termini $2h\pi$, con $h \in \mathbb{Z}$, vengono introdotti perché ruotando di $360°$ gradi sul piano complesso si torna da dove si è partiti. Vediamo quindi che applicare la condizione di fase significa costruire il luogo delle radici, cioè questa condizione da sola basta a ricavare tutto il luogo.

Possiamo dare un'ulteriore interpretazione geometrica degli angoli. Si ha infatti che vale, sempre per le proprietà dei complessi, rispetto a un qualsiasi punto s:

$$\begin{cases} \angle n(s) = \arg \prod_{i=1}^{m}(s+z_i) = \sum_{i=1}^{m}(s+z_i) = \sum_{i=1}^{m}\theta_i \\ \angle d(s) = \arg \prod_{j=1}^{n}(s+p_j) = \sum_{j=1}^{n}(s+p_j) = \sum_{j=1}^{n}\phi_j \end{cases}$$

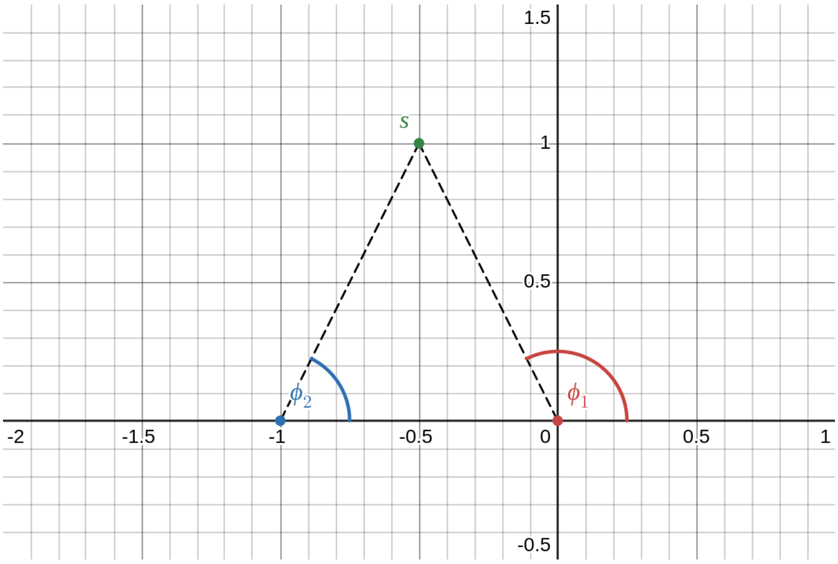
dove ϕ_j e θ_i rappresentano gli angoli le congiungenti con i poli in j e gli zeri in i formano con l'asse reale.

Esempio

Riprendiamo il polinomio:

$$G(s) = \frac{1}{s(s+1)}$$

possiamo anticipare che i suoi poli sono $p_1 = 0$ e $p_2 = -1$. In questo caso, preso ad esempio il punto $s = -\frac{1}{2} + i$ si avranno gli angoli:



- Nessuno ci nega di costruire anche una **condizione di modulo**, cioè imporre ai soli moduli:

$$\left|\frac{n(s)}{d(s)}\right| = \frac{1}{|K|}$$

Vediamo che questa condizione non è indispensabile, ma invece applicarla significa "tarare" il luogo delle radici su un singolo valore di K.

Abbiamo anche qui un'interpretazione geometrica analoga a quella degli angoli. Potremo infatti dire:

$$|n(s)| = \prod_{i=1}^{m} |s+z_i|, \quad |d(s)| = \prod_{i=1}^{n} |s+p_i|$$

dove gli $|s^* + z_i| = \lambda_i$ e $|s^* + p_i| = \eta_i$ corrispondono alle distanze del generico punto nel luogo s^*, per cui:

$$|K| = \frac{\prod_{i=1}^{n} |s^* + p_i|}{\prod_{i=1}^{m} |s^* + z_i|} = \frac{\prod_{i=1}^{n} \eta_i}{\prod_{i=1}^{m} \lambda_i}$$

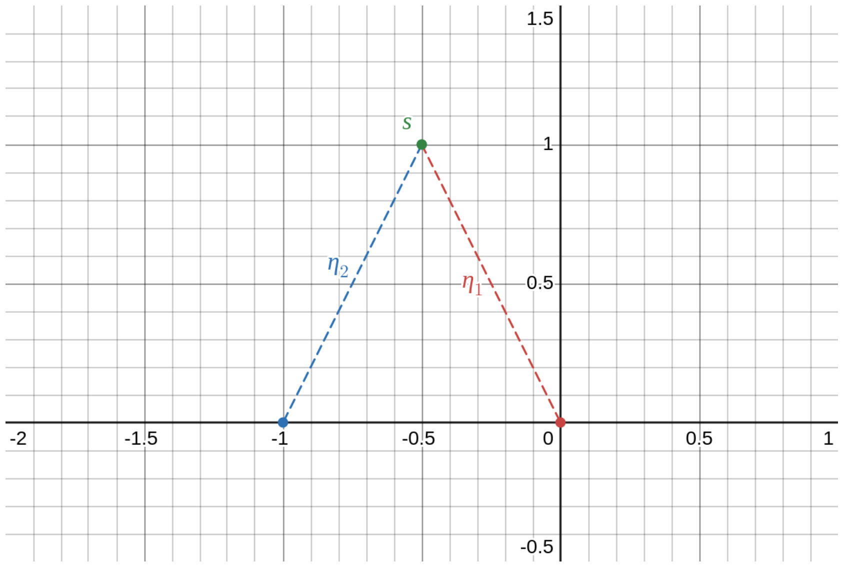
Cioè il guadagno K per un certo punto s^* corrisponde al rapporto fra il prodotto delle distanze dai poli e il prodotto delle distanze dagli zeri.

Esempio

Riprendiamo il polinomio:

$$G(s) = \frac{1}{s(s+1)}$$

conosciamo i suoi $p_1 = 0$ e $p_2 = -1$. In questo caso, preso lo steso punto $s = -\frac{1}{2} + i$ di prima (che anticipiamo far parte del luogo) si avranno le distanze:



3. Potremo quindi ricavare la regola (3), che riguarda l'andamento in funzione di K del luogo, cioè dire che preso:

$$d(s) + K \cdot n(s) = 0$$

ponendo $K = 0$ si nota che il luogo parte dai **poli a ciclo aperto** del sistema (cioè da $d(s) = 0$);

Di contro, preso:

$$\frac{1}{K} \cdot d(s) + n(s) = 0$$

ponendo $K = +\infty$ si nota che il luogo arriva agli **zeri a ciclo aperto** del sistema (cioè $n(s) = 0$).

Si ha quindi la regola generale che il luogo *parte* dai **poli a ciclo aperto** e *arriva* agli **zeri a ciclo aperto**.

Questi ultimi, in particolare, possono essere al *finito* o all'*infinito*. In particolare, si ha che in presenza di m zeri, m dei rami trovati (ricordiamo $m \leq n$) vanno a finire negli zeri del ciclo aperto, e gli altri $n - m$ divergono ad infinito.

Esempio

Riprendiamo l'esempio:

$$G(s) = \frac{1}{s(s+1)}$$

da cui :

$$K \cdot G(s) = \frac{K}{s(s+1)}$$

e quindi l'equazione caratteristica:

$$s(s+1) + K = 0$$

Posto $K = 0$ si trovano quindi i poli in ciclo aperto, cioè punti di partenza del luogo delle radici, $p_1 = 0$ e $p_2 = -1$. Per quanto riguarda gli zeri, invece, abbiamo che questi non esistono, quindi dovrmo affidarci ad altre regole per capire l'estensione dei rami.

4. La regola (4) è che tutto l'asse reale appartiene al luogo delle radici, fatta la distinzione fra *Luogo Diretto* (LD) e *Luogo Inverso* (LI):

   - **Luogo Diretto** (LD): ne fanno parte i punti che rispettano la condizione di fase per $K > 0$;
   - **Luogo Inverso** (LI): ne fanno parte i punti che rispettano la condizione di fase per $K < 0$;

   Notiamo che riguardo alla regola (1), gli n rami sono tali sia per il luogo diretto che per il luogo inverso, cioè l'unione del luogo diretto del luogo inverso conta $2n$ rami complessivi.

   Si ha quindi che l'unione fra luogo diretto e luogo inverso di una certa funzione di trasferimento copre tutto l'asse reale.

   In particolare, se $K > 0$, il luogo lascia alla propria destra un numero *dispari* di punti critici (poli e zeri) sull'asse reale, mentre se $K < 0$, il luogo ne lascia alla propria destra un numero *pari*.

   Questa regola deriva direttamente dalla condizione di fase, che avevamo imposto come:

$$\begin{cases} \angle n(s) - \angle d(s) = -\pi \pm 2h\pi, & K > 0 \\ \angle n(s) - \angle d(s) = \pm 2h\pi, & K < 0 \end{cases}$$

   Si ha quindi che un punto s nel piano di Gauss appartiene al luogo delle radici se la somma delle fasi dei vettori che partono dalle singolarità (poli o zeri) e terminano nel punto s è uguale a $-\pi$ (o 0, se $K < 0$).

   Esempio

   Nel nostro esempio consideravamo:

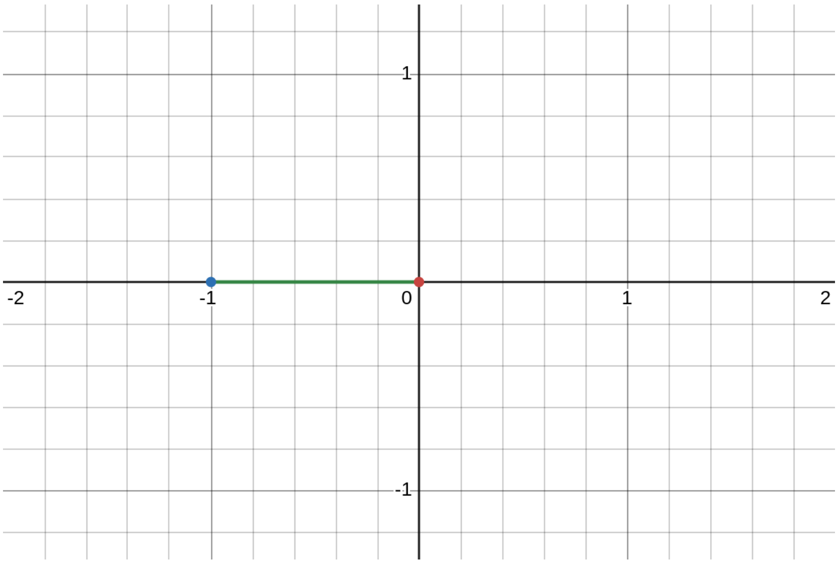
$$\angle \frac{1}{s(s+1)} = \angle 1 - \angle s(s+1) = -\angle s(s+1)$$

   - Per $K > 0$ (luogo diretto) imponiamo quindi la condizione:

$$-\angle s(s+1) = -\pi \pm 2h\pi$$

     che è rispettata per tutti gli $s \in \mathbb{R}$ con $p_2 \leq s \leq p_1$.

In questo caso si ha quindi la parte dell'asse reale:

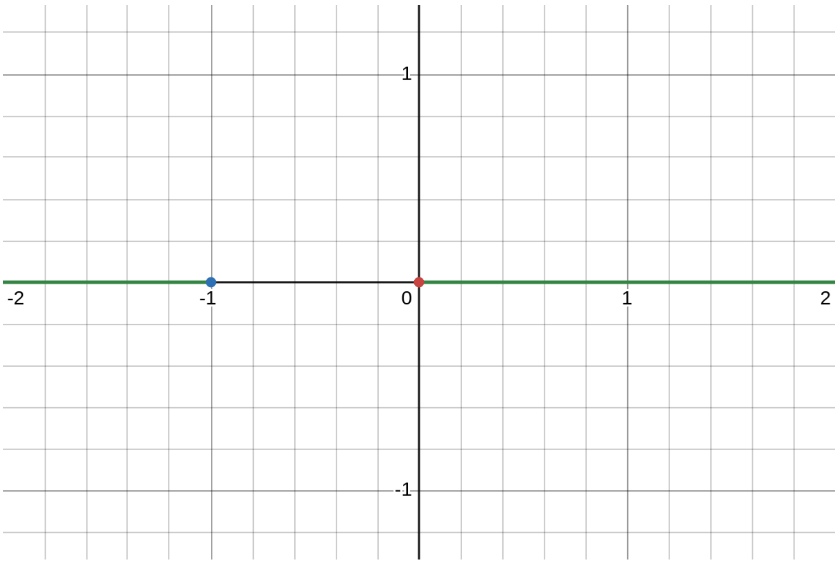


Abbiamo quindi preso tutti gli s che hanno un numero **dispari** di poli a destra.

- Per $K < 0$ (luogo inverso) imponiamo invece la condizione:

$$-\angle s(s+1) = \pm 2h\pi$$

che è rispettata per tutti gli $s \in \mathbb{R}$ con $s \leq p_2$ o $s \geq p_1$.
In questo caso si ha quindi la parte dell'asse reale:

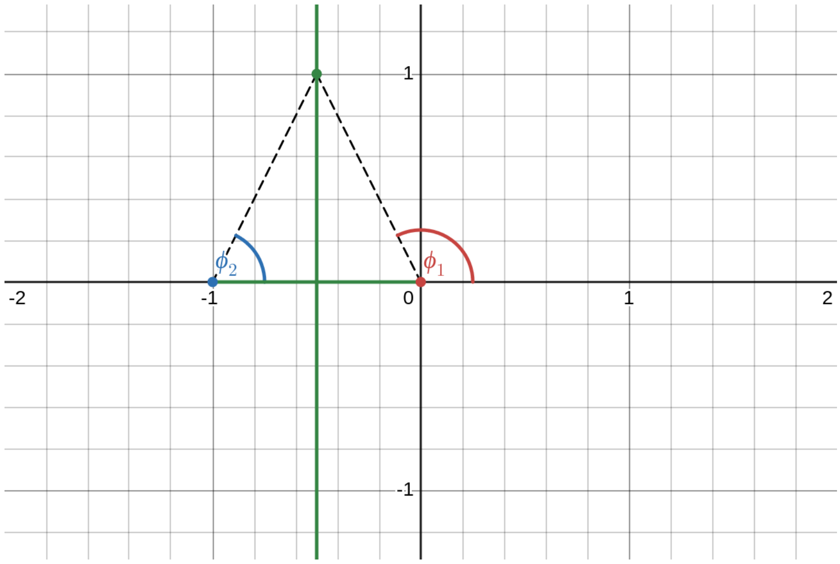


Abbiamo quindi preso tutti gli s che hanno un numero **pari** di poli a destra.

5. La regola (4) afferma che il luogo delle radici è **simmetrico** rispetto all'*asse reale*. Questo deriva direttamnente dal fatto che l'equazione caratteristica è reale, quindi ammetterà soluzioni reali o complesse coniugate.

   Vediamo quindi che dalla regola (2) rispetto agli angoli, tutto l'asse del segmento del luogo diretto sarà parte del luogo, in quanto avremo due angoli ϕ_1 e ϕ_2 ai poli fra di loro complementari (è questo proprio il caso che abbiamo preso ad esempio della regola (2)).

Potremo quindi estndere il luogo diretto a (dove nel grafico si sono disegnati anche gli angoli complementari):



Notiamo che in ogni caso i rami sia del luogo diretto che del luogo inverso sono 2, come dalla regola (1).