1 Lezione del 02-04-25

1.0.1 Esempio: conversione dalla forma a stato alla funzione di trasferimento

Prendiamo l'esempio di una forma a variabili di stato arbitraria e riportiamola in funzione di trasferimento:

$$\begin{cases} x' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} u \\ y = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} x \end{cases}$$

Dalla matrice A ricaviamo $sI - A$:

$$sI - A = \begin{pmatrix} s & -1 & 0 \\ 0 & s & -1 \\ 1 & 2 & s+3 \end{pmatrix}$$

da cui l'inversa:

$$(sI - A)^{-1} = \frac{1}{s^3 + 3s^2 + 2s + 1} \begin{pmatrix} s^2 + 3s - 2 & s + 3 & 1 \\ -1 & s^2 + 3s & s \\ -s & -2s - 1 & s^2 \end{pmatrix}$$

dove notiamo come sempre il denominatore è il polinomio dato da $a_n...a_1$. Applichiamo quindi la formula completa:

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B\,(+D) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{s^3 + 3s^2 + 2s + 1} \begin{pmatrix} s^2 + 3s - 2 & s + 3 & 1 \\ -1 & s^2 + 3s & s \\ -s & -2s - 1 & s^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{s^3 + 3s^2 + 2s + 1} \begin{pmatrix} 10s^2 + 30s - 20 \\ -10 \\ -10s \end{pmatrix} = \frac{10s^2 + 30s - 20}{s^3 + 3s^2 + 2s + 1}$$

1.0.2 Matrici di trasferimento dei sistemi MIMO

Abbiamo visto finora la funzione di trasferimento come una funzione scalare della variabile s. Abbiamo in verità che questa può essere rappresentata in sistemi MIMO come:

$$\mathbf{G}(s) = C(sI - A)^{-1}B = \begin{pmatrix} g_{11}(s) & \dots & g_{1m}(s) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{p1}(s) & \dots & g_{pm}(s) \end{pmatrix}$$

cioè una matrice che lega il trasferimento da ogni canale di ingresso a ogni canale di uscita, con $g_{ij}(s)$ funzione di trasferimento dal canale u_j all'uscita y_i.

1.0.3 Esempio: funzione di trasferimento della velocità di crociera

Riprendiamo un'ennesima volta l'esempio 3.0.1, ricavandone la forma in funzione di trasferimento. Avevamo che questo era rappresentato dal sistema:

$$\begin{cases} x' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{\beta}{m} \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \frac{\gamma}{m} & -g \end{pmatrix} u \\ y = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} x \end{cases}$$

da cui:

$$sI - A = \begin{pmatrix} s & -1 \\ 0 & s + \frac{\beta}{m} \end{pmatrix}, \quad (sI - A)^{-1} = \frac{1}{s\left(s + \frac{\beta}{m}\right)} \begin{pmatrix} s + \frac{\beta}{m} & 1 \\ 0 & s \end{pmatrix}$$

Applicando la formula:

$$\mathbf{G}(s) = C(sI - A)^{-1}B = \frac{1}{s\left(s + \frac{\beta}{m}\right)} \begin{pmatrix} s\frac{\gamma}{m} & -sg \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\gamma}{m\left(s + \frac{\beta}{m}\right)} & \frac{-g}{s + \frac{\beta}{m}} \end{pmatrix}$$

Avremo quindi una funzione di trasferimento 2×1, dove le due entrate rappresentano rispettivamente l'effetto della propulsione del motore (che era γu) e dell'accelerazione gravitazionale. Visto che sulla seconda non si può agire, prenderemo in interesse la prima entrata:

$$G(s) = \frac{\gamma}{m\left(s + \frac{\beta}{m}\right)}$$

Di questa potremmo ad esempio prendere la risposta al gradino, che dalla linearità del sistema ci dà la risposta dell'automobile al controllo sull'acceleratore, trascurata l'accelerazione gravitazionale.

Avremo quindi:

$$Y(s) = G(s)U(s) = \frac{\gamma}{m\left(s + \frac{\beta}{m}\right)} \frac{1}{s} = \frac{\alpha_1}{s + \frac{\beta}{m}} + \frac{\alpha_2}{s}$$

che antitrasforma in:

$$y(t) = \alpha_1 e^{-\frac{\beta}{m}t} + \alpha_2 \cdot H(t)$$

con:

$$\alpha_1 = -\frac{\gamma}{\beta}, \quad \alpha_2 = \frac{\gamma}{\beta}$$

che è la classica risposta al gradino di un sistema del prim'ordine: boh grafico

1.0.4 Poli del sistema ed equazione caratteristica

Si ha che i **poli** del sistema in forma a variabili di stato sono un *sottoinsieme* degli **autovalori** della matrice A, in quanto li troviamo come radici dell'equazione:

$$p_1(s) = \det(sI - A)$$

al denominatore dell'inversa di $sI - a$, che corrisponde al polinomio caratteristico di A:

$$p_2(s) = \det(A - \lambda I)$$

Diciamo sottoinsieme in quanto potrebbe esserci semplificazione fra numeratore e denominatore della funzione di trasferimento. Quindi, non tutti gli autovalori della matrice A diventeranno poli della funzione di trasferimento. In particolare, dalla definizione di raggiungbilità ed osservabilità che avevamo dato, abbiamo che per ogni funzione di trasferimento $g_{ij}(s)$, i poli della funzione di trasferimento sono tutti e soli i poli (modi) raggiungibili dall'ingresso u_j ed osservabili dall'uscita y_i.

1.1 Stabilità nel modello a funzione di trasferimento

Abbiamo lavorato finora col modello a funzione di trasferimento, definita come:

$$G(s) = \frac{\sum_{i=0}^{m} b_i s^i}{\sum_{i=0}^{n} a_i s^i} = \frac{b_m(s-z_1)(s-z_2)...(s-z_m)}{a_n(s-p_1)(s-p_2)...(s-p_n)}$$

con z_i gli m *zeri*, p_i gli n *poli*, e $n > m$.

Di questa avevamo individuato le due forme:

- **Forma di Evans:** evidenzia poli e zeri:

$$G(s) = \frac{\sum_{i=0}^{m} b_i s^i}{\sum_{i=0}^{n} a_i s^i} = \frac{b_m(s-z_1)(s-z_2)...(s-z_m)}{a_n(s-p_1)(s-p_2)...(s-p_n)}$$

- **Forma di Bode:** evidenzia le costanti tempo:

$$G(s) = K\frac{(\tau_a s+1)(\tau_b s+1)...(\tau_i s+1)}{(\tau_1 s+1)(\tau_2 s+1)...(\tau_n s+1)}$$

Definiamo quindi formalmente **poli**:

Definizione 1.1: Polo

Un polo a_i di una funzione di trasferimento $G(s)$ è un valore di s per cui $G(s)$ tende ad infinito:

$$F(s) = \frac{g(s)}{\prod_{i=1}^{x}(s-a_i)_i^n}$$

con n_i ordine del polo.

e **zeri**:

Definizione 1.2: Zeri

Uno zero a_i di una funzione di trasferimento $G(s)$ è un valore di s per cui $G(s)$ tende a zero:

$$F(s) = \frac{\prod_{i=1}^{x}(s-a_i)_i^m}{g(s)}$$

con m_i ordine dello zero.

Quello che ci interesserà nella valutazione della **stabilità** dei sistemi sarà la posizione dei poli nel piano complesso. In particolare, come avevamo detto per i modi nel modello a variabili di stato, poli a componente *reale negativa* danno **stabilità asintotica**, poli a componente *reale nulla* danno **stabilità marginale**, e poli a componente *reale positiva* dano **instabilità**. Inoltre la componente *complessa* dà informazioni sull'oscillazione del sistema, con **oscillazioni smorzate** a componente *complessa e reale non nulle*, e **oscillazioni continue** a componente *reale nulla*.

Gli zeri, invece, non hanno effetto sulla stabilità. Gli zeri a parte reale positiva hanno invece l'effetto di *invertire* la risposta al gradino, almeno sul breve termine.

1.1.1 Stabilità e autovalori

Avevamo che si poteva passare da modello a variabili di stato a funzione di trasferimento come:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = C(sI - A)^{-1}B + D = \frac{n(s)}{d(s)}$$

Chiaramente, $n(s)$ e $d(s)$ saranno i polinomi di cui ci interessavamo per il calcolo di poli e zeri, di cui abbiamo detto ad interessarci per la stabilità erano i soli poli. Ora, visto che abbiamo detto che c'è una qualche corrispondenza fra poli e autovalori, avremo che si può controllare la stabilità dai soli autovalori della matrice A. Questo è infatti esattamente quello che avevamo fatto nel modello a variabili di stato.

1.1.2 Stabilità BIBO

Per parlare propriamente di stabilità, in relazione all'ingresso, nei modelli a funzione di trasferimento, introduciamo la nozione di sistema **BIBO** *Bounded Input, Bounded Output*:

Definizione 1.3: Sistema BIBO

Un sistema si dice stabile BIBO se ad ogni ingresso limitato corrisponde un'uscita limitata.

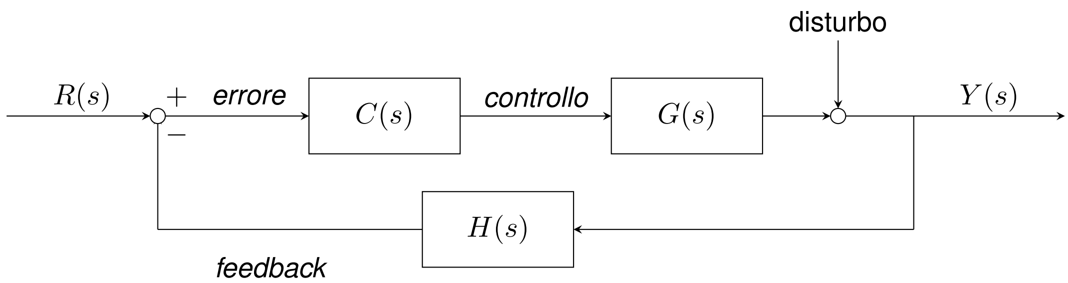
Si ha che, per sistemi lineari, la stabilità BIBO si ha se e solo se i poli della funzione di trasferimento hanno tutti parte reale < 0. Notiamo che la stabilità BIBO, al confronto della stabilità semplice che avevamo valutato finora, non dipende soltanto dallo stato interno del sistema, ma dalla **risposta forzata**. Possono infatti esistere esempi di sistemi BIBO stabili ma non internamente stabili, e viceversa.

1.1.3 Poli dominanti

In un sistema BIBO stabile, quindi, i modi sono tutti segnali esponenzialmente smorzati. Al di là del transitorio iniziale, in questa situazione si avrà che il comportamento prevalente del sistema è quello dei modi più lenti, cioè quelli più vicini all'asse immaginario.

1.2 Criterio di Routh

Avevamo detto che i poli del sistema sono quelli che decidono la stabilità di un sistema. Preso ad esempio il sistema in ciclo chiuso:



Dove le funzioni $C(s)$, $G(s)$ e $H(s)$ rappresentano rispettivamente il **controllore**, l'**impianto** e il **sensore**. La funzione di trasferimento, trascurati i disturbi, avevamo detto era:

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = T(s) = \frac{C(s)G(s)}{1 + C(s)G(s)H(s)}$$

da cui la stabilità del sistema è data dalla catena di retroazione completa (denominatore $d(s) = 1 + C(s)G(s)H(s)$), mentre la catena diretta $n(s) = C(s)G(s)$ dà solo gli zeri.

Del sistema in catena chiusa, quindi, valuteremo la stabilità controllando se i *poli* si trovano nella cosiddettà **regione di stabilita**, individuata come l'insieme di z sul piano complesso a $\mathrm{Re}(z) < 0$.

Possiamo generalizzare il seguente discorso prendendo due funzioni di trasferimento, dette G_{OL} (*Open Loop*, in **anello aperto**), e G_{CL} (*Closed Loop*, in **anello chiuso**). A questo punto potremo definire la funzione di trasferimento come:

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = T(s) = \frac{G_{OL}(s)}{1 + G_{CL}(s)}$$

Notiamo che G_{CL} è quanto si rileva dall'uscita attraverso il sensore, cioè:

$$G_{CL}(s) = G_{OL}(s)H(s)$$

e se $H(s) = 1$, la funzione di trasferimento sarà:

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = T(s) = \frac{G_{OL}(s)}{1 + G_{OL}(s)} \quad (H(s) = 1)$$

Notiamo nuovamente che sarà solo il denominatore, in entrambi i casi, ad importarci per quanto riguarda la stabilità.

Facciamo alcuni esempi.

1.2.1 Esempio: stabilità in catena chiusa

1.2.2 Esempio: stabilità in catena chiusa con parametro

1.2.3 Esempio: stabilità in catena chiusa con parametro al second'ordine

ha fatto 3 esempi

Il **criterio di Routh** (*criterio di Routh-Hurwitz*) è il primo metodo che vediamo per sistematizzare il procedimento di valutazione della stabilità. Rappresenta un metodo *puramente algebrico* che si applica a sistemi di controllo lineari tempo invarianti (*LTI*).

Di base abbiamo che considereremo equazioni caratteristiche in forma polinomiale:

$$p(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + ... + a_1 s + a_0 = 0$$

Vediamo innanzitutto le **condizioni di applicabilità**. Abiamo la condizione necessaria ma non sufficiente per la stabilità, che tutti gli $n+1$ coefficienti del polinomio devono avere lo stesso segno. Questa è fra l'altro necessaria e sufficiente per $n \leq 2$.

Vorremo quindi calcolare la cosiddetta **tabella di Routh**. Per un polinomio di grado n, questa avrà $n + 1$ righe. Le prime due righe sono sempre costituite dai coefficienti del polinomio $p(s)$, distinto in una parte pari e una parte dispari. Cioè assunto n pari:

$$\begin{cases} p_1(s) = a_n s^N + a_{n-2} s^{n-2} + ... + a_0 & \text{(pari)} \\ p_2(s) = a_{n-1} s^{n-1} + a_{n-3} s^{n-3} + ... + a_1 s & \text{(dispari)} \end{cases}$$

Potremo quindi dire:

$$\begin{array}{c|cccc}
n & a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \dots \\
n-1 & a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \dots \\
n-2 & \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 & \dots \\
\vdots & \dots & \dots & \dots & \\
1 & b_1 & b_2 & & \\
0 & c_1 & & &
\end{array}$$

Per i termini successivi si prende, ad esempio alla terza riga:

$$\gamma_1 = -\frac{\det \begin{pmatrix} a_n & a_{n-2} \\ a_{n-1} & a_{n-3} \end{pmatrix}}{a_{n-1}}, \quad \gamma_2 = -\frac{\det \begin{pmatrix} a_n & a_{n-4} \\ a_{n-1} & a_{n-5} \end{pmatrix}}{a_{n-1}}, \quad \dots$$

cioè ogni volta il minore ottenuto prendendo le due righe alla prima colonna alla $i+1$-esima.

Sulla tabella di Routh si possono dimostrare dei teoremi:

Teorema 1.1:

Condizione necessaria e sufficiente perchè tutte le radici dell'equazione caratteristica abbiano eh boh