1 Lezione del 29-04-25

Riprendiamo il discorso sui diagrammi di Nyquist.

1.0.1 Esempio: diagramma di Nqyuist

Facciamo l'esempio del tracciamento del diagramma di Nyquist per la funzione di trasferimento:

$$G(s) = \frac{1}{s^2 + 3s + 2}$$

Il primo passo sarà chiaramente quello di trovare la funzione di risposta armonica:

$$G(j\omega) = \frac{1}{-\omega^2 + 3j\omega + 2}$$

Vediamo quindi le risposte rispettivamente a $\omega \to 0$ e $\omega \to +\infty$:

- $\omega \to 0$:
$$\lim_{\omega \to 0} \frac{1}{-\omega^2 + 3j\omega + 2} = \frac{1}{2} \angle 0^\circ$$
- $\omega \to +\infty$:
$$\lim_{\omega \to +\infty} \frac{1}{-\omega^2 + 3j\omega + 2}\Big|_{\omega \to +\infty} = 0^- \text{ cioè } 0 \angle -180^\circ$$
  o alternativamente applicando la regola vista in 22.1.1, punto 2:
$$\phi_{\omega \to +\infty} = -2 \cdot \frac{\pi}{2} = -\pi = -180^\circ$$

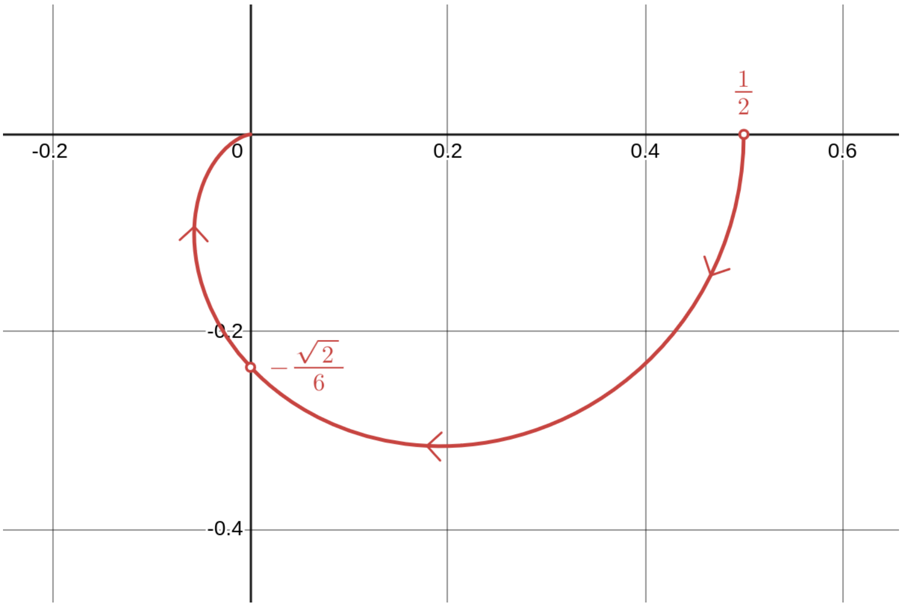
Vediamo quindi le intersezioni con gli assi. Per valutarle razionalizziamo la $G(j\omega)$ in componente reale e immaginaria:

$$G(j\omega) = x + jy = \frac{1}{(2-\omega^2) + 3j\omega} \cdot \frac{(2-\omega^2) - 3j\omega}{(2-\omega^2) - 3j\omega} = \frac{(2-\omega^2) - 3j\omega}{(2-\omega)^2 + 9\omega^2}$$

Poniamo quindi separatamente parte reale e immaginaria a 0:

- $\mathrm{Re}(G(s)) = 0$:
$$2 - \omega^2 = 0 \implies \omega = \sqrt{2}$$
  in quanto ci interessa solo la parte $\omega \in [0, +\infty)$. Sostituendo nella parte complessa si ha quindi:
$$G(j\omega) = \frac{-3j\sqrt{2}}{18} = -\frac{\sqrt{2}}{6} j$$
- $\mathrm{Im}(G(s)) = 0$:
$$-3j\omega = 0 \implies \omega = 0$$
  Vediamo che abbiamo già considerato questo caso. Resta quindi solo la possibilità che il denominatore vada a infinito, cosa che si verifica per $\omega \to +\infty$, ma che ancora una volta abbiamo già considerato.

Possiamo quindi procedere a tracciare il grafico mettendo in evidenza i punti trovati:



1.0.2 Diagrammi di Nyquist da diagrammi di Bode

Possiamo tracciare i diagrammi di Nyquist, in maniera qualitativa, a partire dalla conoscenza dei corrispondenti diagrammi di Bode, in modulo e fase.

Prendiamo a scopo di esempio la funzione di trasferimento:

$$G(s) = \frac{K}{(1 + sT_1)(1 + sT_2)(1 + sT_3)}$$

da cui la funzione di risposta armonica:

$$G(j\omega) = \frac{K}{(1 + j\omega T_1)(1 + j\omega T_2)(1 + j\omega T_3)}$$

Per quanto riguarda i limiti avremo:

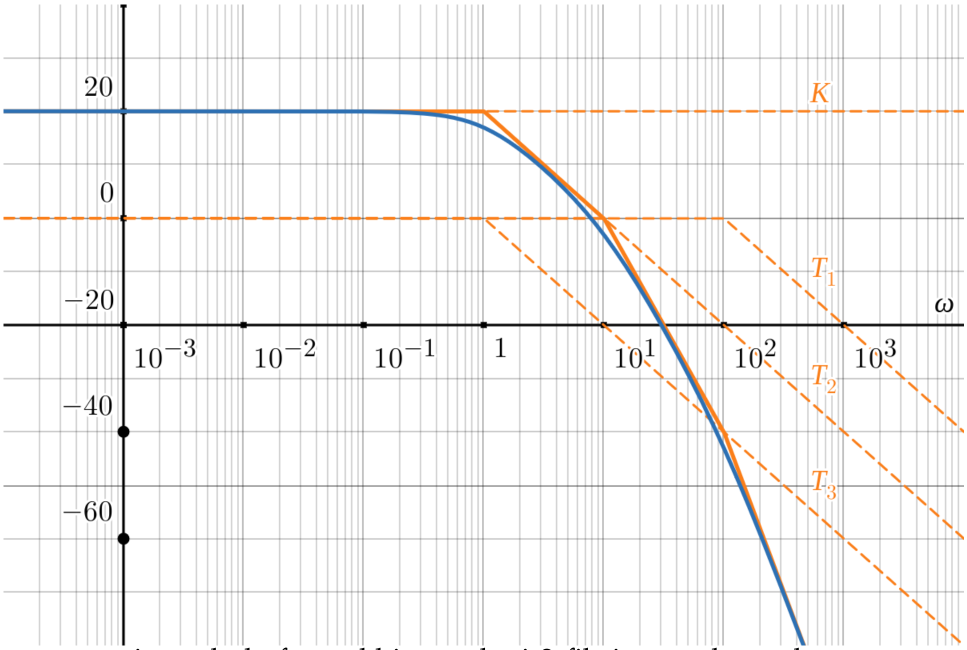
- $\omega \to 0$:
$$G(0) = K \angle 0°$$
- $\omega \to +\infty$:
$$G(+\infty) = 0°, \quad \phi_{\omega \to +\infty} \sim \angle \frac{K}{(j\omega)^3} = -90° \cdot 3 = -270°$$

A questo punto possiamo tracciare informazioni aggiuntive tracciando i diagrammi di Bode di modulo e fase. Abbiamo dalla funzione di risposta armonica che i termini:

$$(1 + j\omega T_1), \quad (1 + j\omega T_2), \quad (1 + j\omega T_3)$$

rappresentano 3 filtri passa basso con frequenze di taglio rispettivamente di $\frac{1}{T_1}$, $\frac{1}{T_2}$ e $\frac{1}{T_3}$.

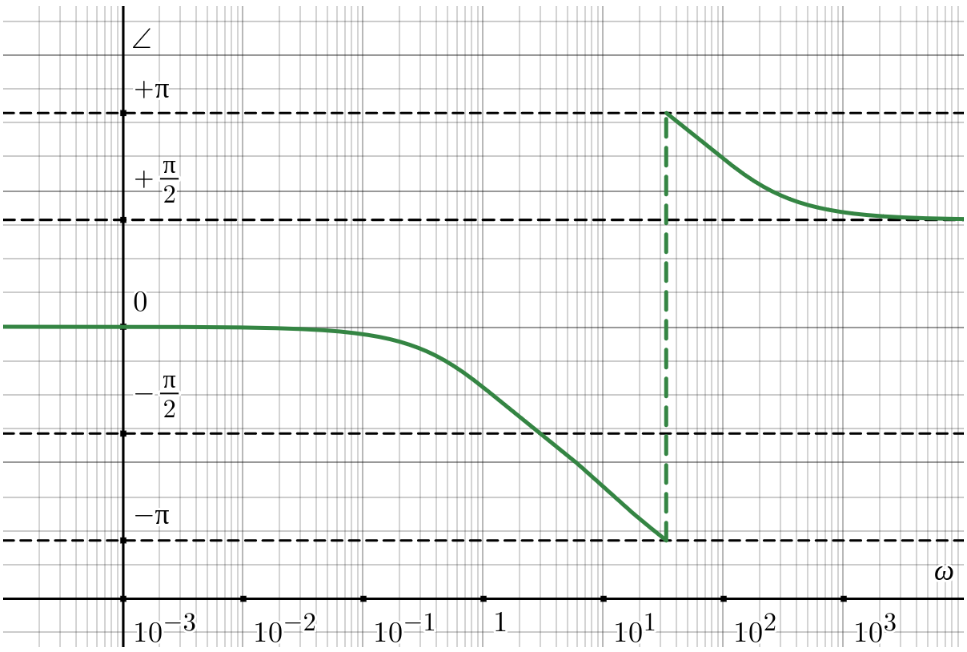
Il valore K rappresenta invece una costante di $|K|_dB$, per cui il grafico complessivo del modulo è:



Per quanto riguarda la fase, abbiamo che i 3 filtri passa basso hanno scostamento presi singolarmente di $-90°$, per cui lo scostamento in fase complessivo per $\omega >> 0$ è:

$$-90° \cdot 3 = -270°$$

e il grafico della fase risulta:



Vediamo quindi che abbiamo ricavato informazioni consistenti con quelle ottenute di limiti, in quanto:

- Per quanto riguarda il modulo, i $|K|_{dB}$ del modulo a $\omega << 1$ equivalgono al modulo $|K|$ del limite in 0, mentre il limite a $+\infty$ va a $-\infty$ dB, cioè 0;

- Per quanto riguarda la fase, abbiamo ritrovato esattamente l'andamento da $0°$ a $270°$ descritto dai limiti.

Possiamo quindi sfruttare le informazioni sull'andamento intermedio di modulo e fase per tracciare il diagramma di Nyquist, che avrà un'aspetto del tipo: