1 Lezione del 11-03-25

Vediamo alcuni esempi sulla raggiungibilità introdotta alla scorsa lezione.

1.0.1 Esempio: raggiungibilità della velocità di crociera

Riprendiamo l'esempio 3.0.1 (in particolare, la linearizzazione data in 3.1.2) e studiamone la raggiungibilità.

Avevamo che il sistema era espresso con le matrici A, B, C, D:

$$\begin{cases} x' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{\beta}{m} \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \frac{\gamma}{m} & -g \end{pmatrix} u \\ y = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} x \end{cases}$$

Ricaviamo quindi la matrice $\mathcal{M}_\mathcal{R}$:

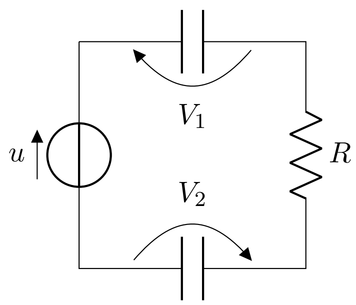
$$\mathcal{M}_\mathcal{R} = \begin{pmatrix} B & AB \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{\gamma}{m} & -g \\ \frac{\gamma}{m} & -g & -\frac{\beta\gamma}{m^2} & \frac{g\beta}{m} \end{pmatrix}$$

notiamo che le due righe sono necessariamente indipendenti, ergo $\text{rank}(\mathcal{M}_\mathcal{R}) = n = 2$, e il sistema è completamente raggiungibile.

1.0.2 Esempio: raggiungibilità di una coppia di condensatori

Vediamo quindi un sistema non completamente raggiungibile per evidenziare come ricavare le parti raggiungibili e non raggiungibili.

Prendiamo il circuito dato dalla coppia di condensatori in serie:



Dal punto di vista fisico avremo che:

$$i = C\frac{dv_1}{dt} = C\frac{dv_2}{dt}$$

e dalla seconda di Kirchoff:

$$u = v_1 + v_2 + iR \implies i = \frac{u - v_1 - v_2}{R}$$

quindi:

$$\frac{u - v_1 - v_2}{RC} = \frac{dv_1}{dt} = \frac{dv_2}{dt}$$

da cui si ricava il sistema finale:

$$\begin{cases} \frac{dv_1}{dt} = -\frac{1}{RC}(v_1 + v_2) + \frac{1}{RC}u \\ \frac{dv_2}{dt} = -\frac{1}{RC}(v_1 + v_2) + \frac{1}{RC}u \end{cases}$$

con matrici A e B (la C non ci è immediatamente di interesse, e dipenderà comunque dalla variabile che desideriamo osservare):

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{RC} & -\frac{1}{RC} \\ -\frac{1}{RC} & -\frac{1}{RC} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \frac{1}{RC} \\ \frac{1}{RC} \end{pmatrix}$$

Possiamo quindi calcolare la matrice $\mathcal{M}_{\mathcal{R}}$:

$$\mathcal{M}_{\mathcal{R}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{RC} & -\frac{2}{R^2C^2} \\ \frac{1}{RC} & -\frac{2}{R^2C^2} \end{pmatrix}$$

che ha chiaramente $\text{rank}(\mathcal{M}_{\mathcal{R}}) = 1$ (righe linearmente dipendenti), cioè il sistema non è completamente raggiungibile.

In particolare, prendiamo la matrice di trasformazione T_r:

$$T_r = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad T_r^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

da cui la trasformazione in $\hat{A}$:

$$\hat{A} = T_r A T_r^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{RC} & \frac{1}{RC} \\ \frac{1}{RC} & \frac{1}{RC} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-2}{RC} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Si ricava quindi il sistema:

$$\begin{cases} \hat{x}_1' = -\frac{2}{RC}(\hat{x}_1 - u) \\ \hat{x}_2' = 0 \end{cases}$$

Vediamo che la variabile x_2 ha derivata nulla indipendentemente dall'ingresso, ergo uno stato $x_2 \neq x_2(0)$ è impossibile da raggiungere.

Notiamo infine che questa è la stessa trasformazione che avremmo potuto ottenere, ad esempio, imponendo $\hat{x}_2 = v_1 - v_2$.

1.0.3 Conclusioni sulla raggiungibilità

Abbiamo quindi che, per sistemi LTI, la raggiungibilità corrisponde con la controllabilità (portare il sistema da uno stato qualsiasi all'origine). Se la parte non controllabile di un sistema è asintoticamente stabile (cioè ha parte reale degli autovalori < 0 il sistema si dice **stabilizzante**). Per un sistema completamente controllabile invece esiste sempre almeno un ingresso che permette di spostarsi da uno stato x_a a uno stato x_b.

1.1 Osservabilità

Vediamo quindi l'ultima proprietà strutturale dei sistemi dinamici: quella di **osservabilità**. Questa dipenderà dalle relazioni fra stato e uscita, e quindi dalle matrici A e C.

Diamo innanzitutto la definizione:

Definizione 1.1: Osservabilità

Preso il sistema dinamico di ordine n, con m ingressi e p uscite:

$$\begin{cases} x' = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}$$

allora uno stato $\overline{x} \neq 0$ si dice non osservabile se, qualunque sia $\overline{t} > 0$ finito, detto $\overline{y}_l(t)$ su $t \geq 0$ il movimento libero dell'uscita generato da $\overline{x}$, risulta $\overline{y}_l(t) = 0$ per $0 \leq t \leq \overline{t}$.

Come vediamo, l'osservabilità ci dà un indicazione della possibilità di "vedere" la presenza di un certo stato in un certo sistema controllandone l'uscita.

1.1.1 Completa osservabilità

Abbiamo quindi che uno stato iniziale x si dice osservabile se è possibile determinare x sulla base della misura delle uscite y. In particolare, un sistema privo di stati non osservabili (cioè un sistema dove tutti gli stati sono osservabili) si dice **completamente osservabile**.

Si può verificare se un sistema è completamente osservabile sfruttando la matrice (*di osservabilità*):

$$\mathcal{M}_\mathcal{O} = \begin{pmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \dots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix}$$

e verificando se:

$$\text{rank}(\mathcal{M}_\mathcal{O}) = n$$

Anche l'osservabilità divide gli stati in una parte osservabile e in una parte non osservabile:

$$\hat{x} = \begin{pmatrix} \hat{x}_o \\ \hat{x}_{no} \end{pmatrix}$$

sfruttando la matrice T_o:

$$x' = Ax + Bu, \quad \hat{x} = T_o x \implies \hat{x}' = \hat{A}\hat{x}$$

$$y = Cx, \quad \hat{x} = T_o x \implies y = \hat{C}\hat{x}$$

con:

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} \hat{A} & 0 \\ \hat{A}_{ba} & \hat{A}_b \end{pmatrix}, \quad \hat{C} = \begin{pmatrix} \hat{C}_a & 0 \end{pmatrix}$$

con $\hat{A}_a \in \mathbb{R}^{n_o \times n_o}$ e $\hat{C}_a \in \mathbb{R}^{p \times n_o}$, e con $n_o = \text{rank}(\mathcal{M}_\mathcal{O})$, $n_o < n$.

Svolgendo le moltiplicazioni si avrà che:

$$\begin{cases} \hat{x}_o' = \hat{A}_a \hat{x}_o \\ \hat{x}_{no}' = \hat{A}_{ba}\hat{x}_o + \hat{A}_b \hat{x}_{no} \\ y = \hat{C}_a \hat{x}_{no} \end{cases}$$

1.1.2 Ricavare la matrice $\mathbf{T_o}$

Per ricavare la matrice di trasformazione T_o dovremo scegliere $n - n_o$ vettori ξ_i linearmente indipendenti tali che:

$$\mathcal{M}_\mathcal{O} \xi_i = 0, \quad \mathrm{span}\left(\{\xi_i\}\right) = x_{no}$$

tali che compongono una base del $\ker(\mathcal{M}_\mathcal{O})$, ovvero ogni vettore rappresenta uno stato non osservabile.

Si selezionano poi n_o vettori linearmente indipendenti ad aribtrio per completare la matrice, tali che:

$$\det(T_o^{-1}) \neq 0$$

cioè T_o è invertibile.

1.1.3 Esempio: osservabilità di una massa con attrito

Prendiamo l'esempio di una massa soggetta ad attrito dipendente dalla velocità:

$$\begin{cases} x_1' = -\frac{c}{m} x_1 + \frac{1}{m} u \\ x_2' = x_1 \\ y = x_1 \end{cases}$$

dove prendiamo x_1 come velocità e x_2 posizione (contro ogni aspettativa, perchè qui ci piace essere imprevedibili).

Le matrici A e C saranno allora:

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{c}{m} & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$$

e la matrice di osservabilità sarà:

$$\mathcal{M}_\mathcal{O} = \begin{pmatrix} C \\ CA \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{c}{m} & 0 \end{pmatrix}$$

che con le righe linearmente dipendenti dà $\mathrm{rank}(\mathcal{M}_\mathcal{O}) = 1$, cioè il sistema non è completamente osservabile (questo sarebbe risultato chiaro anche guardando la definizione di y, dove si ha solo lo stato x_1 e nessuna informazione riguardo a x_2).

1.1.4 Esempio: osservabilità della velocità di crociera

Riprendiamo nuovamente l'esempio 3.0.1 (linearizzazione 3.1.2), e studiamone, stavolta, l'osservabilità. Ricordiamo ancora che il sistema era:

$$\begin{cases} x' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{\beta}{m} \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \frac{\gamma}{m} & -g \end{pmatrix} u \\ y = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} x \end{cases}$$

Ricaviamo quindi la matrice $\mathcal{M}_\mathcal{O}$:

$$\mathcal{M}_\mathcal{O} = \begin{pmatrix} C \\ CA \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{\beta}{m} \end{pmatrix}$$

Vediamo subbito che le due righe della matrice sono linearmente dipendenti, ergo $\mathrm{rank}(\mathcal{M}_\mathcal{O}) = 1$ e il sistema non è completamente osservabile. Nel caso particolare dell'automobile, avremo che sarà impossibile ricostruire la posizione iniziale conoscendo solo la velocità.

1.2 Scomposizione canonica

Un sistema può essere sia non completamente osservabile che non completamente raggiungibile. Esiste una scomposizione che porta il sistema in una forma che ne evidenzia tutte queste caratteristiche, detta **forma canonica** (*forma canonica di Kalman*), solitamente indicata con T_k.

Vogliamo quindi la trasformazione:

$$\hat{x} = T_k x \to \begin{cases} \hat{x}' = \hat{A}\hat{x} + \hat{B}u \\ y = \hat{C}\hat{x} + \hat{D}u \end{cases}$$

che prende la forma:

$$\begin{cases} \hat{x}' = \begin{pmatrix} \hat{A}_a & \hat{A}_{ab} & \hat{A}_{ac} & \hat{A}_{ad} \\ 0 & \hat{A}_b & 0 & \hat{A}_{bd} \\ 0 & 0 & \hat{A}_c & \hat{A}_{cd} \\ 0 & 0 & 0 & \hat{A}_d \end{pmatrix} \hat{x} + \begin{pmatrix} \hat{B}_a \\ \hat{B}_b \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} u \\ y = \begin{pmatrix} 0 & \hat{C}_b & 0 & \hat{C}_d \end{pmatrix} \hat{x} \end{cases}$$

con:

$$\hat{x} = \begin{pmatrix} \hat{x}_a \\ \hat{x}_b \\ \hat{x}_c \\ \hat{x}_d \end{pmatrix}$$

dove:

- $\hat{x}_a$ rappresenta la parte **raggiungibile non osservabile**;
- $\hat{x}_b$ rappresenta la parte **non raggiungibile non osservabile**;
- $\hat{x}_c$ rappresenta la parte **raggiungibile non osservabile**;
- $\hat{x}_d$ rappresenta la parte **non raggiungibile osservabile**;

Notiamo che gli autovalori della matrice triangolare a blocchi A sono gli stessi della matrice A originale (li ricaviamo dalla diagonale $\hat{A}_a$, $\hat{A}_b$, $\hat{A}_c$, $\hat{A}_d$,), ergo queste sono simili, anche se siamo riusciti ad isolare ogni parte di interesse.