

1 Lezione del 18-03-25

Abbiamo introdotto alla scorsa lezione il modello di *controllo in feedback*. Rivediamone le parti:

- **Impianto:** il sistema che ci interessa controllare, cioè quello che finora avevamo modellizzato in variabili di stato come:

$$\begin{cases} x' = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}$$

Notiamo di aver introdotto (e che approfondiremo) come modellizzazioni simili si possono fare col modello a funzione di trasferimento;

- **Controllore:** l'elemento che confronta ingresso e segnale di *feedback*, in modo da ricavarne dalla differenza (*errore*) un controllo;
- **Sensore:** l'elemento che rileva gli effetti, a monte dell'applicazione dei disturbi, dell'impianto controllato generando il segnale di feedback.

Notiamo come i disturbi vengono messi in *uscita* all'impianto, cioè si prende come uscita finale y , detta \bar{y} l'uscita modellizzata dell'impianto, sarà:

$$y = \bar{y} + w$$

con w disturbi.

Notiamo che nessuno ci nega di prendere un disturbo a livello di ingresso: in ogni caso, però, possiamo modellizzare tutti i disturbi come "cumulativi" e presi alla fine della catena ingresso-controllore-impianto-uscita (cioè appena prima dell'uscita).

1.0.1 Esempi di sistemi in feedback

Si possono fare diversi esempi di sistemi governati da controllori in feedback, in svariati ambiti dell'industria, dei trasporti o della vita quotidiana.

- Un caso che abbiamo già visto è quello del mantenimento del livello di un liquido in un serbatoio attraverso un **galleggiante**: che agisca su una valvola o faccia da ingresso a un controllore elettronico, il galleggiante rappresenta infatti un vero e proprio sensore, che genera un feedback su cui il controllore si basa per ricavare un segnale di controllo (azionare una valvola);
- I **termostati**, sia meccanici (a barrette di metallo deformate dalla temperatura) che elettronici (a termometro e controllore elettronico), rappresentano sistemi con feedback: il termometro stesso rappresenta la variabile di feedback, che viene usata per far "combaciare" l'uscita del sistema (la temperatura) ad un certo segnale di riferimento;
- I sistemi di **cruise control** nelle moderne automobili rappresentano ancora sistemi con feedback: il sensore che determina il valore di velocità riportato sul tachimetro viene infatti usato anche per fare da segnale di feedback per un controllore, che lo confronta con un segnale di riferimento per realizzare un controllo per l'acceleratore.

- Riprendendo l'argomento del capoverso precedente, un intero sistema di controllo per la **guida autonoma** può essere rappresentato da un sistema con feedback. La sezione del cruise control vista sopra potrebbe infatti rappresentare la parte *longitudinale* del controllo (azione sull'acceleratore), mentre un sistema simile (magari basato su accelerometri o altri sensori di rotazione e accelerazione laterale) può rappresentare la parte *laterale* del controllo (azione sul volante).

Notiamo come un sistema di questo tipo (nella forma più semplice, a 2 controlli) è MIMO: in questo caso il modello che abbiamo presentato adotta l'approccio di separare le parti MIMO in più sistemi SISO. Il più spesso possibile si vorranno infatti eliminare le interdipendenze fra più parti di un solo sistema MIMO, in modo da ricavare diversi sistemi SISO tra di loro indipendenti, di più facile gestione.

- I sistemi di gestione **bancaria** possono darci un esempio di come i controlli possono applicarsi a contesti non solo industriali, meccanici o elettronici. Infatti, posto un certo obiettivo economico proposto, le operazioni di manager e funzionari verranno influenzate dagli indici e dai risultati economici correnti della banca, a formare quello che è effettivamente un ciclo di controllo in feedback.

Sistemi di questo tipo si ritrovano in più enti economici, commerciali e politici, nell'ottica della gestione di sistemi arbitrariamente complessi. Si pensi ancora al procedimento che potrebbe adottare l'agenzia delle entrate in modo da ottenere le entrate nazionali proposte previa misura del PIL nazionale e altri indicatori economici, o ancora dei cicli che si possono formare negli organi legislativi semplicemente confrontando gli obiettivi posti con i risultati effettivamente ricavati dai tribunali/dal mondo reale, ecc...

1.1 Trasformata di Laplace

Introduciamo una *trasformata integrale*, detta **trasformata di Laplace**, che ci sarà utile a risolvere equazioni differenziali:

Definizione 1.1: Trasformata di Laplace

Definiamo la trasformata di Laplace di una funzione $f(t)$, definita per $t \geq 0$ e L-trasformabile, come la funzione nella variabile $s = \sigma + i\omega$:

$$\mathcal{L}[f](s) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-st} dt$$

La definizione di L-trasformabilità verrà data fra poco.

Notiamo che in questi appunti si è deciso mantenere separate le definizioni di *funzione trasformata di Laplace* ricavata da una funzione in dominio tempo, e *trasformazione* che porta una funzione in dominio tempo alla sua trasformata di Laplace. Lo stesso discorso vale per l'antitrasformazione.

Le trasformate integrali tornano utili in diversi campi dell'ingegneria. Ricordiamo infatti, oltre alla trasformata di Laplace, la *trasformata di Fourier* e la *trasformata Zeta*.

L'idea fondamentale delle trasformate integrali è quella di portare il problema dal **dominio tempo**, cioè espresso attraverso il linguaggio delle *equazioni differenziali*, a un dominio diverso (che per noi sarà il **dominio s** o il *dominio di Laplace*), che esprime lo stesso problema attraverso il linguaggio delle *equazioni algebriche*.

Visto che le equazioni algebriche sono di più facile risoluzione rispetto alle equazioni differenziali, basterà trovare la soluzione in tale dominio e ricondursi nuovamente al dominio tempo, per trovare la soluzione al problema iniziale.

Le funzioni particolari che ci permetteranno di passare da un dominio all'altro saranno, a punto, la **trasformazione** e la (ben più complessa) **antitrasformazione** di Laplace.

1.1.1 Numeri complessi

Notiamo che l'argomento della trasformata di Laplace ($s = \sigma + i\omega$) appartiene al campo complesso \mathbb{C} , e facciamo un breve ripasso sui numeri complessi.

Ricordiamo di avere a disposizione due forme, dette **cartesiana** e **polare**:

$$s = \sigma + j\omega \text{ (cartesiana)}, \quad s = \rho e^{j\phi} \text{ (polare)}$$

Note le formule di trasformazione:

$$\sigma = \rho \cos(\phi), \quad \omega = \rho \sin(\phi)$$

$$\rho = \sqrt{\sigma^2 + \omega^2}, \quad \phi = \text{atan2}(\omega, \sigma)$$

1.1.2 Trasformazione di Laplace

Possiamo quindi definire la trasformazione di Laplace, che è un'applicazione, come segue:

Definizione 1.2: Trasformazione di Laplace

Chiamiamo trasformazione di Laplace l'applicazione $\mathcal{L}\{f(t)\} : f(t) \rightarrow F(s)$ definita come:

$$f(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} \int_0^{+\infty} f(t)e^{-st} dt = F(s)$$

per ogni $f(t)$ definita in $t \geq 0$ e L-trasformabile.

cioè, semplicemente l'applicazione che porta una $f(t)$ in dominio tempo alla sua trasformata di Laplace $F(s)$ nel dominio di Laplace (definizione 9.1).

1.1.3 L-trasformabilità

Facciamo alcuni chiarimenti sulla L-trasformabilità (che abbiamo assunto come ipotesi). Abbiamo infatti che, oltre alla condizione di appartenenza di t a \mathbb{R}^+ , la trasformata di Laplace richiede anche alcune condizioni riguardo a $f(t)$:

Definizione 1.3: L-trasformabilità

Una funzione $f(t)$ è L-trasformabile, cioè trasformabile secondo Laplace, se rispetta le condizioni:

- $f(t)$ è **continua a tratti**, cioè contiene solo discontinuità del prim'ordine o eliminabili;
- $f(t)$ è di **ordine esponenziale**, cioè rispetta:

$$|f(t)e^{-\alpha t}| \leq M$$

per qualche $M, \alpha \in \mathbb{R}^+$.

1.1.4 Ascissa di convergenza

Notiamo che l'ultima condizione di L-trasformabilità non serve ad altro che a verificare la definizione dell'integrale:

$$\int_0^{+\infty} |f(t)e^{-st}| dt < \infty, \quad \forall s \in I$$

Allora si verifica subito che se l'integrale converge per un certo $s_0 \in \mathbb{C}$ allora converge per tutti gli $\text{Re}(s) > \text{Re}(s_0)$, poiché:

$$|e^{-sx}| = e^{-\text{Re}(s)x}$$

e la parte complessa darà solo termini oscillanti.

Chiamiamo allora **ascissa di convergenza** il valore minimo della parte reale σ per cui l'integrale della trasformata di Laplace converge, cioè:

Definizione 1.4: Ascissa di convergenza

Data una funzione $f(t)$, chiamiamo ascissa di convergenza α il valore:

$$\alpha = \inf \left\{ \sigma \in \mathbb{R} : \int_0^{+\infty} |f(t)e^{-\sigma t}| dt < \infty \right\}$$

Nei casi pratici abbiamo che la trasformata di Laplace esiste quasi sempre. Ad esempio, per le esponenziali $f(t) = t^n$, si ha:

$$|t^n| < e^{(n+1)t}$$

che ci permette di modellizzare rampe, parabole, ecc... Per funzioni più complesse possiamo stare tranquilli quando queste sono limitate (seni, coseni, ecc...) o comunque limitate da una qualche esponenziale (ad esempio gli esponenziali stessi).

1.1.5 Trasformata di Laplace sul piano complesso

Notiamo che la trasformata di Laplace è una funzione estendibile in variabile complessa di argomento complesso, cioè si può definire su tutto il piano complesso (tolti i punti di singolarità).

In genere, avremo che le trasformate che calcoliamo si potranno esprimere in forma rapporto di polinomi come:

$$F(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$$

con s variabile complessa e, come dicevamo, $F(s) \in \mathbb{C}$. Questa sarà la forma che, possiamo anticipare, vorremo ricavare e ricondurre ai *fratti semplici* per procedere all'anti-trasformazione.

1.1.6 Singularità della trasformata di Laplace

Di particolare interesse sono gli zeri della forma $F(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$ appena introdotta.

Distinguiamo infatti:

- **Zeri** del sistema dinamico: le radici di $F(s)$;
- **Poli** del sistema dinamico: le radici di $D(s)$.

1.1.7 Antitrasformata di Laplace

Come avevamo definito la trasformata di Laplace (definizione 9.1), possiamo definire la funzione antitrasformata, detta anche *Integrale di Bromwich*:

Definizione 1.5: Integrale di Bromwich

Definiamo integrale di Bromwich l'integrale:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} F(s)e^{st} ds$$

1.1.8 Antitrasformazione di Laplace

A questo punto l'applicazione inversa alla trasformazione di Laplace non sarà altro che l'applicazione dell'integrale di Bromwich, cioè:

Definizione 1.6: Antitrasformazione di Laplace

Chiamiamo antitrasformazione di Laplace l'applicazione $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} : F(s) \rightarrow f(t)$ definita come:

$$F(s) \rightarrow \mathcal{L}^{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} F(s)e^{st} ds = f(t)$$

cioè, semplicemente l'applicazione che porta una $F(s)$ in dominio di Laplace alla sua $f(t)$ nel dominio tempo data dall'integrale di Bromwich (definizione 9.5).

Abbiamo che questa applicazione è in genere difficile da calcolare, e si preferisce, come accennato prima, ricondursi a fratti semplici la cui antitrasformata è nota (solitamente perché sono facili da ricavare come trasformati di Laplace, cioè agendo direttamente e non attraverso l'inversa).

1.2 Trasformate di funzioni elementari

Nota la teoria della trasformata di Laplace, vediamo le trasformate di alcune funzioni elementari.

1.2.1 Delta di Dirac

Definiamo l'impulso, o *delta di Dirac*, come segue.

Definizione 1.7: Delta di Dirac

Chiamiamo delta di Dirac la distribuzione:

$$\delta(t - t_0) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \delta_\epsilon(t - t_0)$$

con δ_ϵ :

$$\delta_\epsilon = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ \frac{1}{\epsilon}, & 0 \leq t \leq \epsilon \\ 0, & t > \epsilon \end{cases}$$

cioè l'impulso unitario centrato su t_0 .

Proprietà importanti della delta di Dirac sono:

1. L'integrale:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - t_0) dt = 1$$

che diamo per scontato, in quanto non sarebbe in verità possibile trovare una funzione analitica che rispetta tale proprietà (da qui si parla di *distribuzione*, non funzione).

2. La proprietà di campionamento:

$$f(t)\delta(t - t_0) = f(t_0)\delta(t - t_0)$$

che si dimostra impostando l'integrale (che assomiglia a una convoluzione ma non vi ricade completamente):

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta_\epsilon(t - t_0) dt$$

Notiamo subito che l'integrale ha valore $\neq 0$ solo nell'intervallo $[t_0, t_0 + \epsilon]$, e quindi:

$$= \int_{t_0}^{t_0 + \epsilon} \frac{f(t)}{\epsilon} dt = \frac{F(t)}{\epsilon} \Big|_{t_0}^{t_0 + \epsilon} = \frac{F(t_0 + \epsilon) - F(t_0)}{\epsilon}$$

per una qualche primitiva F . Passando al limite $\epsilon \rightarrow 0$, si ha:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{F(t_0 + \epsilon) - F(t_0)}{\epsilon} = f(t_0)$$

Questo significa che vale:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t - t_0) dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t_0)\delta(t - t_0) dt$$

e visto che la delta di Dirac è definita $\neq 0$ effettivamente in un unico punto in \mathbb{R} , dovrà valere la tesi. \square

3. Il fatto che la delta di Dirac rappresenta l'*elemento neutro* del **prodotto di convoluzione**:

$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t - \tau) d\tau$$

presa infatti $g(t) = \delta(t - t_0)$ si ha:

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\delta_{\epsilon}(\tau - t + t_0) d\tau = \int_{t-t_0}^{t-t_0+\epsilon} \frac{f(\tau)}{\epsilon} d\tau = \frac{F(t)}{\epsilon} \Big|_{t-t_0}^{t-t_0+\epsilon} = \frac{F(t-t_0+\epsilon) - F(t-t_0)}{\epsilon}$$

Passando al limite $\epsilon \rightarrow 0$:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{F(t-t_0+\epsilon) - F(t-t_0)}{\epsilon} = f(t-t_0)$$

cioè si ottiene la stessa funzione f scostata di un valore t_0 , lo stesso di cui è scostata σ , da cui la tesi. \square

Diamo quindi la trasformata di Laplace:

Teorema 1.1: Trasformata di Laplace della delta di Dirac

Per la delta di Dirac $\delta(t - t_0)$ scostata di t_0 , vale:

$$\mathcal{L}\{\delta(t - t_0)\} = e^{-st_0}$$

La dimostrazione è per calcolo diretto, applicando la proprietà di campionamento:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{\delta(t - t_0)\} &= \int_0^{+\infty} \delta(t - t_0)e^{-st} dt = \int_0^{+\infty} \delta(t - t_0)e^{-st_0} dt \\ &= e^{-st_0} \int_0^{+\infty} \delta(t - t_0) dt = e^{-st_0} \end{aligned}$$

\square

Notiamo che in particolare, con $t_0 = 0$ si ha:

$$\mathcal{L}\{\delta(t)\} = e^0 = 1$$

1.2.2 Gradino di Heaviside

Definiamo la funzione **gradino di Heaviside**.

Definizione 1.8: Gradino di Heaviside

Chiamiamo gradino di Heaviside la funzione:

$$H(t - t_0) = \begin{cases} 0, & t_0 < 0 \\ 1, & t_0 \geq 0 \end{cases}$$

Tra le proprietà del gradino di Heaviside, notiamo che la sua derivata è la delta di Dirac, cioè:

$$\frac{d}{dt}H(t - t_0) = \delta(t - t_0)$$

Questo si dà senza dimostrazione, in quanto abbiamo visto trattare la distribuzione di Dirac non è immediato con gli strumenti analitici che abbiamo a disposizione.

Diamo quindi la trasformata di Laplace:

Teorema 1.2: Trasformata di Laplace del gradino di Heaviside

Per il gradino di Heaviside $H(t - t_0)$ scostato di t_0 , vale:

$$\mathcal{L}\{H(t)\} = \frac{e^{-st_0}}{s}$$

La dimostrazione è nuovamente per calcolo diretto, cioè:

$$\mathcal{L}\{H(t)\} = \int_0^{+\infty} H(t - t_0) e^{-st} dt = \int_{t_0}^{+\infty} e^{-st} dt$$

operando il cambio di variabili $\tau = t - t_0$, con $\tau|_{t=t_0} = t_0 - t_0 = 0$, si ha:

$$= \int_0^{+\infty} e^{-s(\tau+t_0)} d\tau = \int_0^{+\infty} e^{-s\tau} e^{-st_0} d\tau = e^{-st_0} \int_0^{+\infty} e^{-s\tau} d\tau = e^{-st_0} \cdot \left. -\frac{e^{-s\tau}}{s} \right|_0^{+\infty} = \frac{e^{-st_0}}{s}$$

□

Notiamo che questa è la seconda volta che incontriamo il termine e^{-st_0} . Vedremo che questo termine equivale infatti a un **ritardo** t_0 . Inoltre, notiamo come questa forma assomiglia a $\frac{1}{s}$, che avevamo chiamato anche termine **integratore** nel dominio di Laplace (esempio 2.1.3).

1.2.3 Esponenziale

Vvediamo infine la funzione esponenziale:

$$f(t) = H(t)e^{at}$$

dove il termine $H(t)$ rappresenta il gradino di Heaviside definito nel paragrafo precedente. Avremo che, dalla natura della trasformata di Laplace stessa, la moltiplicazione per il gradino sarà tipica di tutte le funzioni che incontreremo.

La **trasformata di Laplace** sarà allora:

Teorema 1.3: Trasformata di Laplace dell'esponenziale

Per un esponenziale troncato dal gradino $H(t)e^{at}$ vale:

$$\mathcal{L}\{H(t)e^{at}\} = \frac{1}{s - a}$$

La dimostrazione si fa nuovamente per calcolo diretto:

$$\mathcal{L}\{H(t)e^{at}\} = \int_0^{+\infty} e^{at} e^{-st} dt = \int_0^{+\infty} e^{(a-s)t} dt = \left(\frac{e^{(a-s)t}}{a-s} \right) \Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{s-a}$$

□

Sappiamo quindi come trovare la trasformata (e quindi antitrasformare) la funzione che abbiamo detto descrive tutti i modi dei sistemi dinamici, ammesso non aver ancora visto il comportamento in caso di fenomeni oscillanti (cioè esponenti complessi).