1 Lezione del 20-03-25

1.1 Proprietà della trasformata di Laplace

Vediamo alcune proprietà della trasformata di Laplace introdotta alla scorsa lezione.

1. **Linearità:** si ha che, prese due trasformate:

$$\begin{cases} \mathcal{L}\{f_1(t)\} = F_1(s), \quad \mathrm{Re}(s) > a_1 \\ \mathcal{L}\{f_2(t)\} = F_2(s), \quad \mathrm{Re}(s) > a_2 \end{cases}$$

la loro combinazione lineare è semplicemente la trasformata:

$$\mathcal{L}\{c_1 \cdot f_1(t) + c_2 \cdot f_2(t)\} = c_1 \cdot F_1(s) + c_2 \cdot F_2(s), \quad \mathrm{Re}(s) \geq \max(a_1, a_2)$$

La dimostrazione è banale e deriva dalla linearità dell'operatore integrale sulla base del quale avevamo definito la trasformata stessa.

2. **Traslazione:** abbiamo visto che il termine e^{-st_0} rappresenta una traslazione temporale, ovvero:

$$\mathcal{L}\{f(t-t_0)\} = e^{-st_0}F(s)$$

Occorre fare una precisazione. Avevamo preso, più o meno informalmente, come ipotesi per la definizione della trasformata di Laplace che f fosse nulla per $t \leq 0$. Ergo potevamo esprimere equivalentemente qualsiasi funzione di cui si voleva calcolare la trasformata di Laplace come:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \mathcal{L}\{H(t)f(t)\}$$

Allo stesso modo, prendendo la traslazione $t' \to t - t_0$, vorremo assumere che l'argomento della trasformata sia "troncato" come:

$$\mathcal{L}\{f(t-t_0)\} = \mathcal{L}\{H(t-t_0)f(t-t_0)\}$$

Sarà questa la forma che assumeremo per tutte le translate $f(t-t_0)$ da qui in poi.

Dimostriamo quindi la proprietà, ricordando quanto abbiamo appena detto:

$$\mathcal{L}\{f(t-t_0)\} = \int_0^{+\infty} f(t-t_0) \cdot e^{-st}\, dt = \int_{t_0}^{+\infty} f(t-t_0) \cdot e^{-st}\, dt$$

da cui operando il cambio di variabile $\tau = t - t_0$:

$$= \int_0^{+\infty} f(\tau) \cdot e^{-s(\tau+t_0)}\, d\tau = e^{-st_0} \int_0^{+\infty} f(\tau) \cdot e^{-s\tau}\, d\tau = e^{-st_0}F(s)$$

cioè la tesi. □

3. **Cambio di scala:** prendiamo il "cambio di scala" alla variabile temporale $f(at)$. Avremo che il risultatò dipenderà dalla L-trasformata di f, che avevamo chiamato F, come:

$$\mathcal{L}\{f(at)\} = \frac{1}{a} \cdot F\left(\frac{s}{a}\right)$$

Questo si dimostra applicando la definizione col cambio di variabile: $\tau = at$, con $d\tau = a\,dt$:

$$\mathcal{L}\{f(at)\} = \int_0^{+\infty} f(at)e^{-st}\,dt = \int_0^{+\infty} f(\tau)e^{-s\frac{\tau}{a}}\,\frac{d\tau}{a}$$
$$= \frac{1}{a}\int_0^{+\infty} f(\tau)e^{-\frac{s}{a}\tau}\,d\tau = \frac{1}{a}\cdot F\left(\frac{s}{a}\right)$$

dove notiamo che la a divide la variabile s, non t. □

4. **Derivazione in s:** vale la proprietà rispetto alle derivate su s:

$$\mathcal{L}\{t \cdot f(t)\} = -\frac{dF(s)}{ds}$$

Questo è immediato calcolando prima il termine destro:

$$\mathcal{L}\{t \cdot f(t)\} = \int_0^{+\infty} t \cdot f(t)\,e^{-st}\,dt$$

E svolgendo la derivata a destra:

$$\frac{d}{ds}\int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}\,dt = \int_0^{+\infty} f(t)\frac{d}{ds}e^{-st}\,dt = -\int_0^{+\infty} t \cdot f(t)\,e^{-st}\,dt$$

da cui la tesi. □

Potremmo quindi notare la regola per la derivazione a catena:

$$\mathcal{L}\{t^n \cdot f(t)\} = (-1)^n\frac{d^nF(s)}{ds^n}$$

data semplicemente dall'applicazione ripetuta della proprietà di derivazione in s: Vediamo, ad esempio, riguardo al gradino (che ricordiamo essere $\mathcal{L}\{H(t)\} = \frac{1}{s}$):

$$\mathcal{L}\left\{\frac{t^k}{k!}\cdot H(t)\right\} = \frac{1}{s^{k+1}}$$

5. **Traslazione in s:** notiamo infine che vale rispetto alla traslazione su s:

$$\mathcal{L}\{e^{at} \cdot f(t)\} = F(s-a)$$

questo si dimostra semplicemente calcolando il termine destro:

$$\mathcal{L}\{e^{at} \cdot f(t)\} = \int_0^{+\infty} e^{at} \cdot f(t)\,e^{-st}\,dt = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-(s-a)t}\,dt = F(s-a)$$

da cui la tesi. □

1.1.1 Sinusoide

Usiamo la proprietà di linearità appena trovata (la prima nella lista di proprietà dello scorso paragrafo) per calcolare l'L-trasformata di $f(t) = H(t)\sin(\omega t)$.

Ciò che vogliamo dimostrare è il seguente risultato:

Teorema 1.1: Trasformata di Laplace del seno

Per una sinusoide $\sin(\omega t)$ vale:

$$\mathcal{L}\{H(t)\sin(\omega t)\} = \frac{\omega}{s^2+\omega^2}$$

Avremo che, dalla formula di Eulero:

$$\mathcal{L}\{\sin(\omega t)\} = \mathcal{L}\left\{\frac{e^{j\omega t}-e^{-j\omega t}}{2j}\right\}$$

cioè:

$$\frac{e^{j\omega t}-e^{-j\omega t}}{2j} = \frac{\cos(\omega t)+j\sin(\omega t)-\cos(\omega t)+j\sin(\omega t)}{2j} = \frac{2j\sin(\omega t)}{2j} = \sin(\omega t)$$

Potremo allora applicare la linearità:

$$\mathcal{L}\left\{\frac{e^{j\omega t}-e^{-j\omega t}}{2j}\right\} = \frac{1}{2j}\mathcal{L}\{e^{j\omega t}\} - \frac{1}{2j}\mathcal{L}\{e^{-j\omega t}\}$$

da cui si continua con semplici calcoli (attraverso la trasformata dell'esponenziale vista alla scorsa lezione):

$$= \frac{1}{2j}\left(\frac{1}{s-j\omega} - \frac{1}{s+j\omega}\right) = \frac{1}{2j}\left(\frac{2j\omega}{s^2+\omega^2}\right) = \frac{\omega}{s^2+\omega^2}$$

□

1.1.2 Cosinusoide

Valgono considerazioni analoghe per la funzione $f(t) = H(t)\cos(\omega t)$.

Ciò che vogliamo dimostrare è il seguente risultato:

Teorema 1.2: Trasformata di Laplace del coseno

Per una cosinusoide $\cos(\omega t)$ vale:

$$\mathcal{L}\{H(t)\cos(\omega t)\} = \frac{s}{s^2+\omega^2}$$

Avremo che, dalla formula di Eulero:

$$\mathcal{L}\{\sin(\omega t)\} = \mathcal{L}\left\{\frac{e^{j\omega t}-e^{-j\omega t}}{2}\right\}$$

con un calcolo simile al precedente.

Potremo allora applicare la linearità:

$$\mathcal{L}\left\{\frac{e^{j\omega t}-e^{-j\omega t}}{2}\right\} = \frac{1}{2}\mathcal{L}\{e^{j\omega t}\} - \frac{1}{2}\mathcal{L}\{e^{-j\omega t}\}$$

da cui:

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-j\omega} - \frac{1}{s+j\omega}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{2s}{s^2+\omega^2}\right) = \frac{s}{s^2+\omega^2}$$

□

1.1.3 Sinusoidi/cosinusoidi con scostamento

Nel caso di scostamento dato da un termine ϕ, cioè $f(t) = \sin(\omega t + \phi)$, potremo dire:

Teorema 1.3: Trasformata di Laplace del seno con scostamento di fase

Per una sinusoide scostata di fase ϕ, cioè $\sin(\omega t + \phi)$, vale:

$$\mathcal{L}\{\sin(\omega t + \phi)\} = \frac{\omega \cos(\phi) + s \sin(\phi)}{s^2 + \omega^2}$$

Per la dimostrazione, avremo innanzitutto dall'applicazione delle formule di addizione degli angoli:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{\sin(\omega t + \phi)\} &= \mathcal{L}\{\sin(\omega t) \cdot \cos(\phi) + \cos(\omega t) \cdot \sin(\phi)\} \\ &= \cos(\phi) \cdot \mathcal{L}\{\sin(\omega t)\} + \sin(\phi) \cdot \mathcal{L}(\cos(\omega t)) \end{aligned}$$

e dalle formule appena trovate sul seno/coseno:

$$= \cos(\phi) \cdot \frac{w}{s^2 + \omega^2} + \sin(\phi) \cdot \frac{s}{s^2 + \omega^2} = \frac{\omega \cos(\phi) + s \sin(\phi)}{s^2 + \omega^2}$$

cioè la tesi. □

1.2 Operazioni integro-differenziali con Laplace

La comodità della trasformata di Laplace è che ci permette di esprimere per via algebrica gli operatori integro-differenziali, nonchè il prodotto di convoluzione fra due funzioni.

1.2.1 Derivata con Laplace

Si ha che:

Teorema 1.4: Derivata con Laplace

Per una certa funzione f, sotto larghe ipotesi, vale:

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d}{dt} f(t)\right\} = sF(s) - f(0)$$

Questo si dimostra ricordando la formula di integrazione per parti:

$$\int u \, dv = u \cdot v - \int v \, du$$

e applicando:

$$\mathcal{L}\left\{\frac{df}{dt}\right\} = \int_0^{+\infty} \frac{df}{dt} \cdot e^{-st} \, dt = f(t) \cdot e^{-(st)}\Big|_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} -s \cdot f(t) \cdot e^{-st} \, dt = sF(s) - f(0)$$

che è la tesi. □

Una nota importante è il valore della funzione in 0. Nel caso di funzioni discontinue (come ad esempio il gradino) si deve infatti scegliere fra 0^- e 0^+, cioè:

$$\mathcal{L}^-\{f(t)\} = \lim_{\epsilon \to 0^-} \int_\epsilon^{+\infty} f(t) e^{-st} \, dt$$

$$\mathcal{L}^+\{f(t)\} = \lim_{\epsilon \to 0^+} \int_{\epsilon}^{+\infty} f(t)e^{-st}\, dt$$

Varrà:

$$\mathcal{L}^- = \mathcal{L}^+ + \int_{0^-}^{0^+} f(t)e^{-st}\, dt = \mathcal{L}^+ + a_0$$

dove la costante a_0 rappresenterà gli effetti impulsivi che ci portano al "salto" in 0.

1.2.2 Esempio: derivata del gradino

Possiamo usare la formula appena trovata per la derivazione per dimostrare che in qualche modo l'impulso di Dirac rappresenta la derivata del gradino di Heaviside. Notiamo infatti che:

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d}{dt}H(t)\right\} = s \cdot \frac{1}{s} - f(0^-) = 1 = \mathcal{L}(\sigma(t))$$

assunto $t_0 = 0$ scostando a destra o a sinistra chiaramente comparrà il termine di ritardo e^{-st-0}.

1.2.3 Integrale con Laplace

Si ha che:

Teorema 1.5: Integrale con Laplace

Per una certa funzione f, sotto larghe ipotesi, vale:

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(t)\, dt\right\} = \frac{F(s)}{s}$$

Questo si dimostra partendo dalla formula di derivazione, e ponendo:

$$g(t) = \int_0^t f(\tau)\, d\tau, \quad g(0) = 0$$

da cui:

$$\frac{dg(t)}{dt} = f(t)$$

e quindi:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) = \mathcal{L}\left\{\frac{dg}{dt}\right\} = s \cdot \mathcal{L}\{g(t)\} - g(0) \implies \mathcal{L}\{g(t)\} = \frac{F(s)}{s}$$

da cui la tesi. $\square$

1.2.4 Convoluzione con Laplace

Vediamo infine la convoluzione:

Teorema 1.6: Convoluzione con Laplace

Per due funzioni f_1, f_2, sotto larghe ipotesi e definito un opportuno prodotto di convoluzione, vale:

$$\mathcal{L}\{f_1(t) * f_2(t)\} = F_1(s) \cdot F_2(s)$$

assunto:

$$\begin{cases} \mathcal{L}\{f_1(t)\} = F_1(s) \\ \mathcal{L}\{f_2(t)\} = F_2(s) \end{cases}$$

Per noi il prodotto di convoluzione sarà il solito:

$$f_1(t) * f_2(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau) \cdot f_2(t-\tau)\, d\tau$$

che sotto le ipotesi di funzioni "tagliate" a 0, come abbiamo assunto, equivale a:

$$= \int_0^t f_1(\tau) \cdot f_2(t-\tau)\, d\tau = \int_0^{+\infty} f_1(\tau) \cdot f_2(t-\tau)\, d\tau$$

Potremo allora dire:

$$\mathcal{L}\{f_1(t) * f_2(t)\} = \int_0^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} f_1(\tau) \cdot f_2(t-\tau)\, d\tau \right) e^{-st}\, dt$$

Posto $e^{-st} = e^{-s(t+\tau-\tau)}$ si ha:

$$= \int_0^{+\infty} f_1(\tau) \cdot e^{-st} \left(\int_0^{+\infty} f_2(t-\tau) \cdot e^{-s(t-\tau)}\, dt \right) d\tau$$

a questo punto posto $v = t - \tau$ e quindi $dv = dt$ si ha:

$$= \int_0^{+\infty} f_1(\tau) \cdot e^{-s\tau} \left(\int_{-\tau}^{+\infty} f_2(v) \cdot e^{-sv}\, dv \right) d\tau$$

che notando la non interdipendenza dei due integrali (il $-\tau$ a pedice non "prende" nulla con f_2 definita per $t > 0$) si divide in:

$$= \int_0^{+\infty} f_1(\tau) \cdot e^{-s\tau}\, d\tau \cdot \int_0^{+\infty} f_2(v) \cdot e^{-sv}\, dv = F_1(s) + F_2(s)$$

da cui la tesi. $\square$