

1 Lezione del 25-02-25

1.0.1 Introduzione al corso

Il corso di fondamenti di automatica introduce i concetti di base dell'automazione:

1. Introduzione all'automazione;
2. Modellistica matematica (variabili di stato, trasformata di Laplace, ecc...);
3. Analisi dei sistemi dinamici (funzioni di trasferimento, ecc...);
4. Strumenti per l'analisi dei sistemi dinamici (diagrammi di Bode, Nyquist, ecc...);
5. Sistemi di controllo (PID, ecc...)

1.1 Introduzione all'automazione

L'automazione si può intendere come la capacità di eseguire un compito *in modo automatico*. Per ogni *compito* visto durante il corso si creerà un modello matematico, e un sistema capace di eseguirlo in maniera autonoma, senza l'intervento di esterni.

Elemento chiave nei sistemi che verranno studiati sarà il **feedback**, in italiano *retroazione*, che rappresenta l'informazione che possiamo prendere indietro dal sistema in modo da influenzare i sistemi di controllo automatico.

1.1.1 Fasi di sviluppo

Il termine inglese "*automation*" viene introdotto come contrazione di "*automatic production*" dalla Ford Motor Company nel 1947 per denominare l'insieme di apparati di movimentazione automatica installati nelle loro linee di produzione.

Possiamo tracciare diverse fasi di sviluppo della disciplina dell'automazione:

1. **Prima rivoluzione industriale** (~1780):
Vengono introdotti i primi strumenti meccanici di produzione (macchine a vapore, ecc...).
2. **Seconda rivoluzione industriale** (~1870):
Si organizza il lavoro in catene di produzione sfruttando l'energia elettrica (catena Ford, ecc...).
3. **Terza rivoluzione industriale** (~1970):
Si automatizza il processo di produzione grazie a sistemi IT ed elettronici (PLC, ecc...).
4. **Quarta rivoluzione industriale** (~2010):
Prodotti e processi interconnessi grazie all'IoT e a tecnologie digitali (industria 4.0, ecc...).

1.1.2 Tecnologie abilitanti

Possiamo individuare alcune macroaree dell'automazione moderna, in ambito (perlopiù) industriale:

- Tecniche di produzione avanzate (stampa 3D (additiva), ecc...);
- Realtà aumentata;
- Simulazione;
- Sviluppo orizzontale e verticale;
- IoT industriale (IIoT);
- Cloud computing;
- Cybersecurity;
- Big data analytics.

1.2 Modellistica matematica

1.2.1 Sistemi

Veniamo quindi alle tecniche che ci permettono di studiare matematicamente un dato **sistema**.

Definizione 1.1: Sistema

Un sistema è un insieme di parti interconnesse e interagenti che formano un insieme più grande e complesso.

Di un sistema ci interessano gli **ingressi**, cioè cosa *entra* nel sistema, e le **uscite**, cioè cosa *esce* dal sistema. Ogni sistema è caratterizzato poi da un certo livello di **disturbo**. L'idea è spesso quella di *inseguire* gli ingressi e *reiettare* i disturbi.

1.2.2 Sistemi dinamici

Ad interessarci in particolare sono sistemi **dinamici**.

Definizione 1.2: Sistema dinamico

Un sistema si dice dinamico quando le sue grandezze si evolvono nel tempo.

Le grandezze di un sistema dinamico (le uscite e lo stato interno) sono quindi caratterizzate da funzioni con variabile tempo, che quindi *variano* nel tempo e interagiscono con l'ambiente esterno.

Solitamente i sistemi dinamici sono costituiti da più sottosistemi che interagiscono fra di loro.

Incontriamo diversi problemi nello studio dei sistemi:

- Se è ignoto il sistema, abbiamo il problema della **modellistica**, che consiste nel creare un modello matematico del sistema, e quindi del suo comportamento;

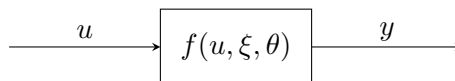
- Se è ignota l'uscita, abbiamo il problema della **simulazione**, che consiste nel simulare la risposta del sistema, nel tempo, in base alla variazione degli ingressi;
- Se conosciamo il sistema e la sua uscita, abbiamo il problema del **controllo**, che consiste nello studiare come agire *dall'esterno* su un sistema per modificarne la naturale evoluzione ed ottenere un comportamento desiderato. Ad agire sul sistema sarà spesso un altro sistema, detto **sistema di controllo**, che produrrà gli ingressi del sistema vero e proprio sulla base di dati **comandi**.

1.2.3 Diagrammi a blocchi

Rappresentiamo i modelli che facciamo sistemi attraverso diagrammi a "scatole" o a blocchi:



La scatola sistema è spesso caratterizzata da una certa funzione matematica $f(u, \xi, \theta)$, dove ξ rappresenta i disturbi e θ i parametri del modello. Gli ingressi e le uscite saranno quindi rappresentati da variabili u e y , con $y = f(u, \xi, \theta)$. Notiamo che la funzione che rappresenta il sistema ha la variabile di ingresso u come argomento.



1.2.4 Proprietà dei sistemi dinamici

Notiamo alcune proprietà dei sistemi dinamici:

- Questi devono essere **causali**, cioè l'uscita non deve dipendere da valori futuri dell'ingresso: se l'uscita è rappresentata da $v(t)$ e l'ingresso da $u(t)$, si ha che $v(t)$ dipende da $u(t)$ solo per $t < t_0$ con t_0 l'istante corrente;
- Possono essere sia **stocastici** che **deterministici**, se sono presenti o meno fenomeni aleatori nel legame ingresso uscita. Il corso in particolare tratterà di sistemi *deterministici*;

1.3 Modellistica di sistemi

Vediamo gli approcci più comuni alla modellazione di sistemi dinamici.

1.3.1 Modello a scatola nera

Possiamo adottare un approccio sperimentale (o *induttivo*) alla modellistica di un sistema, considerandolo come una **scatola nera** (*black box*)



L'idea è quella di studiare il comportamento del sistema in risposta a diversi stimoli, e costruire un'associazione fra stimolo e risposta corrispondente. Il problema (*fitting*) da qui in poi sarà quello di trovare una certa funzione che approssima, per quanto possibile, il comportamento del sistema in risposta ai diversi stimoli. Approcci per il fitting della funzione di risposta possono essere:

- Regole stato-azione;
- Alberi decisionali;
- Regressione lineare;
- Modelli statistici;
- Reti neurali.

Un approccio di questo tipo non richiede alcuna conoscenza del principio di funzionamento interno del sistema (dettagli fisici, tecnici, ecc...), ed è quindi puramente sperimentale.

Notiamo che approcci di questo tipo sono effettivamente alla base delle tecniche di apprendimento automatico. In questo le reti neurali per l'apprendimento *supervisionato* non sono che una tecnica molto potente per il fitting di varie relazioni ingresso-uscita.

1.3.2 Modello a scatola bianca

Un altro approccio è quello analitico (o *deduttivo*). In questo caso si costruisce un modello astratto del sistema di interesse, e si *valida* confrontandolo col sistema reale, agendo con delle modifiche nel caso di incongruenze.



Approcci di questo tipo richiedono di ricavare modelli astratti di sistemi, conoscendone quindi le leggi di funzionamento interno. Per questo sono molto accurati per sistemi ben conosciuti, ma difficili da realizzare altrimenti.

1.3.3 Modello a scatola grigia

Un approccio intermedio fra scatola nera e scatola bianca è quello a **scatola grigia**. In questo caso assumiamo di conoscere il comportamento generale del sistema, ma di dover identificare parametri specifici. Si crea quindi un modello a scatola bianca, lasciando vuoti i parametri che non si conoscono (*scatola bianca*). Svolgendo varie misurazioni e confrontando i risultati del modello astratto e del sistema reale si andranno poi a determinare nel dettaglio tali parametri (*scatola nera*).

1.3.4 Approccio pragmatico

Un approccio pragmatico consiste nello sviluppare un modello a priori, senza considerare necessariamente un sistema reale, e poi adattarlo fino alla convergenza con un sistema veramente esistente.

Dal punto di vista ingegneristico, questo significa ipotizzare un modello per un sistema ideale, che andiamo quindi a definire in maniera astratta, e poi ad implementare nella realtà cercando di avvicinarci il più possibile all'idea originale.

2 Lezione del 26-02-25

2.0.1 Modello a stati

Un possibile approccio alla modellistica di un sistema è la creazione di una **macchina a stati finiti** (FSM, *Finite State Machine*).

Questo chiaramente porterà alla definizione di un determinato numero di **stati** in cui il sistema si potrà trovare in qualsiasi momento. Azioni sul sistema corrisponderanno quindi a **transizioni** fra uno stato un altro, e ogni transizione comporterà un aggiornamento dell'uscita del sistema. La risposta del sistema a ogni azione dall'esterno dipende quindi non solo dall'azione, ma dallo stato interno corrente del sistema, che è quindi dotato di **memoria**.

La modellizzazione con macchine a stati finiti risulta particolarmente utile in informatica, in quanto modella molto bene una vasta gamma di sistemi digitali.

2.1 Modellizzazione a scatola bianca semplice

Iniziamo a vedere come si possono modellizzare sistemi fisici attraverso approcci a scatola bianca.

2.1.1 Esempio: serbatoio a galleggiante

Prendiamo il caso di un serbatoio, con in ingresso un rubinetto di portata p , di cui si vuole tenere costante il livello del liquido ad un valore \bar{h} . Sistemi di questo tipo sono comuni in diversi contesti, fra cui gli sciacquoni dei water e le vaschette dei carburatori per motori a scoppio.

Chiamiamo il livello del liquido ad ogni istante temporale $h(t)$. Il valore desiderato di tale funzione, che indichiamo come $h_o(t) = \bar{h}$, verrà detto **segnale di riferimento**.

L'ingresso del sistema su cui vogliamo agire sarà $u(t) = p(t)$, cioè la portata del rubinetto (che modificheremo ad esempio controllando una valvola).

Nel caso non ci siano disturbi, ergo tutto il liquido immesso nel serbatoio resti nel serbatoio, avremo una variazione di volume ΔV pari a:

$$\Delta V = A \cdot (h_1 - h_0) = \int_{t_0}^{t_1} u(\tau) d\tau$$

dove A rappresenta l'area di base del serbatoio.

Da questo si ricava:

$$A \cdot \frac{dh}{dt} = u(t)$$

Chiamando $x \leftarrow h$ si otterrà l'equazione differenziale:

$$x' = \frac{1}{A} u(t)$$

Di cui chiaramente ci interessa la **condizione iniziale** x_0 , cioè il livello del liquido all'istante temporale $t = 0$.

2.1.2 Esempio: circuito di carica di un condensatore

Prendiamo il circuito formato da un condensatore C posto in serie ad un generatore di corrente i :



Avremo che la variazione di carica sulle armature Δq varrà:

$$\Delta q = C \cdot (V_1 - V_0) = \int_{t_0}^{t_1} i(\tau) d\tau \implies C \frac{dV}{dt} = i(t)$$

da cui si ricava l'equazione differenziale del tutto analoga a prima:

$$x' = \frac{1}{C} i(t)$$

L'unica cosa che cambia, rispetto al sistema precedente, sono i nomi delle variabili e le grandezze fisiche che rappresentano. Dal punto di vista matematico, quindi, possiamo assumere i due sistemi come equivalenti.

2.1.3 Esempio: legge di Newton

Vediamo come equazioni analoghe alle precedenti si ricavano in verità da qualsiasi sistema meccanico che obbedisce alla legge di Newton:

$$F = ma \implies m \frac{dv}{dt} = F(t)$$

da cui:

$$x' = \frac{1}{m} F(t)$$

notando che chiamiamo $x \leftarrow v$ (ci riferiamo alle velocità, non alle posizioni).

Gli elementi visti finora non sono altro che **integratori** o *operatori integrali*, cioè sistemi dinamici che prendono x' e restituiscono x per una certa variabile.

Indichiamo questi come segue:



e, se vogliamo, vedremo che nel dominio di Laplace vale la divisione per la variabile $s = \sigma + i\omega$:



2.2 Sistemi Lineari e Tempo Invarianti (LTI)

Vediamo un particolare tipo di sistema dinamico:

Definizione 2.1: Sistema LTI

Un sistema LTI (Lineare e Tempo Invariante) rispetta le seguenti proprietà:

- **Omogeneità:** se si scala l'ingresso $u(t)$, l'uscita $y(t)$ viene scalata dello stesso fattore:

$$au(t) \implies ay(t)$$

- **Sovrapposizione degli effetti:** se un modello ha risposte $y_1(t)$ e $y_2(t)$ a due ingressi qualsiasi $u_1(t)$ e $u_2(t)$, allora la risposta a un ingresso dato dalla combinazione lineare di $u_1(t)$ e $u_2(t)$:

$$u(t) = \alpha_1 u_1(t) + \alpha_2 u_2(t)$$

sarà data ancora da una combinazione lineare delle uscite in risposta ai singoli ingressi:

$$y(t) = \alpha_1 y_1(t) + \alpha_2 y_2(t)$$

Notiamo che in questo la sovrapposizione degli effetti non rappresenta altro che la proprietà di *linearità* dei sistemi lineari.

- **Tempo invarianza:** il sistema si comporta allo stesso modo indipendentemente da quando avviene l'azione, cioè nelle equazioni che lo descrivono non vi è una dipendenza esplicita dal tempo. Questo significa che un ingresso $u(t - \tau)$ produce un'uscita $y(t - \tau)$, cioè solo traslata in tempo:



I sistemi lineari e tempo invarianti ci sono particolarmente utili in quanto sono completamente compresi e facili da risolvere, e riescono a modellizzare in maniera abbastanza accurata una vasta gamma di fenomeni.

2.3 Modellizzazione a variabili di stato

Estendiamo l'approccio a scatola bianca introducendo formalmente una forma che sfrutta equazioni differenziali lineari per modellizzare uno *stato interno* in determinate **variabili di stato**.

Definizione 2.2: Modello a variabili di stato

Introduciamo il modello per sistemi a equazioni differenziali lineari:

$$\begin{cases} x' = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}$$

dove $u \in \mathbb{R}^r$ è l'**ingresso** e $x \in \mathbb{R}^n$ è lo **stato** del sistema. x' sarà quindi la variazione dello stato, e $y \in \mathbb{R}^m$ l'uscita del sistema.

Abbiamo quindi un sistema di equazioni vettoriali differenziali che mettono in relazione fra di loro lo *stato interno presente* x , la variazione di stato x' , l'ingresso u e l'uscita y del sistema.

Le dimensioni delle matrici che correlano variazione di stato e uscita a stato interno presente e ingresso, cioè le matrici A, B, C, D , si ricaveranno dalle dimensioni delle variabili (r, n e m):

$$A \in \mathbb{R}^{n \times n}, B \in \mathbb{R}^{n \times r}, C \in \mathbb{R}^{m \times n}, D \in \mathbb{R}^{m \times r},$$

La tempo invarianza del sistema è data proprio dalla tempo invarianza delle matrici, che non hanno il tempo come argomento ma sono costanti.

Notiamo poi che nel caso $r = m = 1$ il sistema si dice **SISO** (*Single Input Single Output*), altrimenti si dice **MIMO** (*Multiple Input Multiple Output*).

2.3.1 Proprietà strutturali

L'analisi delle matrici A, B, C, D definisce le cosiddette **proprietà strutturali** del sistema. Ad esempio abbiamo che:

- La matrice A ci dà informazioni riguardo alla proprietà di **stabilità** del sistema;
- Le matrici A, B ci danno informazioni riguardo alla **controllabilità** del sistema;
- Le matrici A, C ci danno informazioni riguardo all'**osservabilità** del sistema.

2.3.2 Diagramma a blocchi

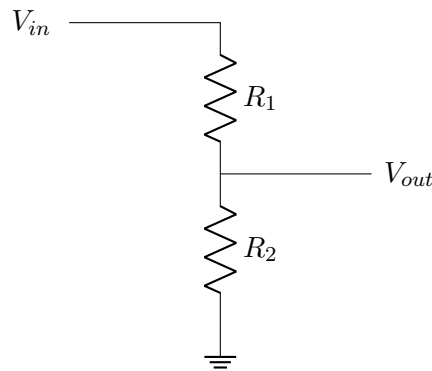
Possiamo usare l'operatore integrale definito prima per creare il diagramma a blocchi del sistema a equazioni differenziali lineari:



Notando che il simbolo \circ rappresenta una somma.

2.3.3 Esempio: partitore di tensione

Vediamo per il modello introdotto l'esempio del *partitore resistivo* o partitore di tensione.



La relazione che otteniamo, dalla legge del partitore di tensione, per il voltaggio, è:

$$V_{out} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} V_{in} = \alpha V_{in}, \quad \alpha = \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

da cui:

$$A = B = C = 0, \quad D = \alpha$$

2.3.4 Esempio: sistema massa-molla-smorzatore

Vediamo il sistema fisico dato da un carrello di massa M legato ad una parete da una molla con costante K e sottoposto ad attrito proporzionale alla sua velocità v . Agiamo sul sistema introducendo una *forza* F sul carrello, che consideriamo come **entrata** del sistema.

Il sistema verrà descritto dall'equazione:

$$F(t) = M \frac{dv}{dt} + Bv + Kx$$

Decidiamo di usare come **variabili di stato** la *posizione* x e la *velocità* v : $x_s = \begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix}$. Vedremo che questo accade spesso nel caso di sistemi meccanici. Avremo quindi la variazione di stato:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = v \\ \frac{dv}{dt} = -\frac{K}{M}x - \frac{B}{M}v + \frac{1}{M}F \end{cases}$$

Avremo allora la prima equazione del sistema:

$$\begin{pmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dv}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{K}{M} & -\frac{B}{M} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{M} \end{pmatrix} F$$

da cui le matrici A, B :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{K}{M} & -\frac{B}{M} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{M} \end{pmatrix}$$

Scegliamo quindi come **uscita** la *posizione* x , come:

$$y = x = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix}$$

da cui le matrici C, D :

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix}$$

Notiamo che si potrebbe scegliere, analogamente, la *velocità* v come **uscita**, da cui si otterrebbe:

$$y = v = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix}$$

da cui le matrici C, D :

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix}$$

Abbiamo quindi visto come il modello a variabili di stato permette di rappresentare una vasta gamma di situazioni fisiche con facilità e secondo un formato standard, con cui sono tra l'altro compatibili diversi sistemi di calcolo e simulazione al calcolatore.

2.3.5 Limiti dei sistemi lineari

Notiamo come il mondo reale spesso è **non lineare**. Prendiamo il caso del serbatoio visto prima, e assumiamo la sezione A come non costante lungo l'altezza h , ergo esiste una funzione $A(h)$ che lega altezza a sezione. Avremo quindi la relazione:

$$h' = B(h)u, \quad B(h) = \frac{1}{A_h} \implies A(h) dh = u dt$$

Al momento di apertura della valvola di uscita avremo quindi una variazione del livello:

$$h' = B(h)(u - y) = \frac{u - y}{A(h)}$$

Assunta *sezione* in variazione lineare, potremo sfruttare la legge:

$$y = k\sqrt{h}$$

da cui:

$$h' = \frac{-k\sqrt{h}}{A(h)} + \frac{u}{A(h)}$$

Notiamo come questa forma si avvicina al modello standard visto prima, ma presenta una relazione non lineare all'altezza h . Indichiamo quindi questa relazione come:

$$h' = g(h) + f(h)u$$

Chiamiamo questa forma **forma bilineare**.

Definizione 2.3: Forma bilineare

Introduciamo la forma bilineare:

$$\begin{cases} x' = f(x) + g(x)u \\ y = h(x) \end{cases}$$

In questo caso, $f(x)$ rappresenta l'evoluzione dello stato indipendente da u , e $g(x)$ rappresenta la risposta di stato, variabile (linearmente) in x , ad u . La risposta del sistema è stata invece modellata come solo dipendente dallo stato interno x . Sistemi di questo tipo sono onnipresenti, ma chiaramente più difficili da gestire.

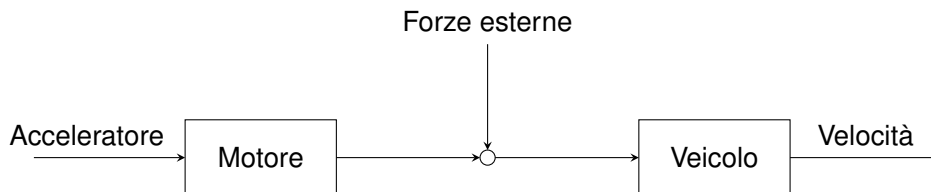
3 Lezione del 27-02-25

Riprendiamo la trattazione dei sistemi non lineari.

3.0.1 Esempio: regolazione della velocità di crociera

Poniamo di voler modellizzare il sistema di trazione longitudinale di un'automobile, implementando un sistema di controllo che la mantenga a velocità di crociera costante. L'**ingresso manipolabile** sarà il *pedale dell'acceleratore*, l'**uscita** del sistema la *velocità*, e il **disturbo** dato dalla *pendenza* del tratto di strada che stiamo percorrendo.

Il diagramma a blocchi del sistema potrà essere realizzato come segue:



Un modello matematico potrebbe essere il seguente:

$$m \frac{dv}{dt} + \alpha |v|v + \beta v = \gamma u - mg(\sin \theta)$$

dove $\alpha |v|v + \beta v$ rappresentano due componenti, una **quadratica** e una **lineare**, dell'attrito. Possiamo interpretare la componente quadratica come l'attrito con l'aria, mentre la componente lineare come l'attrito del pneumatico con la superficie stradale. γu sarà invece la spinta del motore, chiamata u l'apertura della valvola dell'acceleratore in un dato istante temporale e quindi γ una qualche costante di proporzionalità legata alle caratteristiche del motore e della trasmissione della vettura. Infine, $g \sin(\theta)$ rappresenterà l'accelerazione gravitazionale in direzione longitudinale al veicolo (posta una pendenza di θ con $\theta < 30^\circ$).

Notiamo che questa equazione è non lineare. Potremmo pensare di semplificarla: ad esempio rimuovendo il termine quadratico (trascurabile alle basse velocità) e il riportando il termine sinusoidale al primo componente dello sviluppo di MacLaurin (valido per piccoli angoli), ottenendo quindi:

$$m \frac{dv}{dt} + \alpha |v|v + \beta v = \gamma u - mg(\sin \theta) \sim m \frac{dv}{dt} + \beta v = \gamma u - mg\theta$$

Nota questa possibilità, decidiamo comunque di continuare con la trattazione del sistema completo. Prese le variabili di stato comuni ai sistemi meccanici $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x & v \end{pmatrix}$, che rinominiamo in $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix}$, si ha il sistema:

$$\begin{cases} x'_1 = x_2 \\ x'_2 = -\frac{\alpha}{m}|x_2|x_2 - \frac{\beta}{m}x_2 + \frac{\gamma}{m}u - g \sin \theta \\ y = x_2 \end{cases}$$

con la condizione iniziale $\mathbf{x}(t_0) = x_0$.

Nelle equazioni non compare t , quindi il sistema è tempo invariante. Di contro, il sistema non ricade nelle forme viste prima, ma in una forma più generale:

Definizione 3.1: Forma non lineare generale

Introduciamo la forma generica per sistemi non lineari:

$$\begin{cases} x' = f(x, u) \\ y = g(x, u) \end{cases}$$

Un approccio alla gestione di sistemi di questo tipo è la **linearizzazione**. Per capire i punti ottimali su cui effettuare una linearizzazione, è opportuno introdurre il concetto di **equilibrio** e **stabilità**.

3.1 Equilibri e stabilità

Diamo una definizione di **stato di equilibrio**:

Definizione 3.2: Stato di equilibrio

Dato il sistema $x' = f(x, u)$, e dato un segnale di ingresso $u(t) = \bar{u}$, uno stato \bar{x} si dice di equilibrio se soddisfa la relazione:

$$0 = f(\bar{x}, \bar{u})$$

In questo caso, il sistema non si muove dallo stato \bar{x} , come risulta immediato da $\bar{x}' = f(\bar{x}, \bar{u}) = 0$.

3.1.1 Linearizzazione attorno ad uno stato di equilibrio

Partiamo dalla forma generale vista adesso, e prendiamo il sistema come stazionario. Dato un ingresso \bar{u} e il suo stato di equilibrio corrispondente \bar{x} , definiamo due nuove variabili che rappresentano la **variazione di equilibrio**:

$$\begin{cases} \Delta x = x - \bar{x} \\ \Delta u = u - \bar{u} \end{cases}$$

A questo punto possiamo scrivere le equazioni di stato attraverso la serie di Taylor centrata nello stato di equilibrio troncata al primo ordine:

$$x' = f(x, u) = f(\bar{x}, \bar{u}) + \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x=\bar{x}, u=\bar{u}} \Delta x + \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_{x=\bar{x}, u=\bar{u}} \Delta u + O(|\Delta x|^2) + O(|\Delta u|^2)$$

Abbiamo quindi linearizzato un sistema non lineare attorno ad un punto di equilibrio. Le matrici che moltiplicano i termini del primo ordine sono chiaramente le **Jacobiane**:

$$A = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{\bar{x}, \bar{u}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

$$B = \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_{\bar{x}, \bar{u}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u_1} & \frac{\partial f_1}{\partial u_2} & \dots \\ \frac{\partial f_2}{\partial u_1} & \frac{\partial f_2}{\partial u_2} & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

da cui riscriviamo la formula di Taylor riportata prima come:

$$x' = A \cdot \Delta x + B \cdot \Delta u$$

Abbiamo quindi trovato la forma a variabili di stato. Associando allo stato di equilibrio anche un'uscita di equilibrio $\bar{y} = g(\bar{x}, \bar{u})$, e chiamando Δy la variazione di uscita, si può ricavare il sistema completo a variabili di stato:

$$\begin{cases} x' = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}$$

Riprendendo l'esempio precedente della regolazione della velocità di crociera, avevamo ricavato il sistema non lineare in forma generale:

$$x' = f(x, u) = \begin{cases} x'_1 = x_2 \\ x'_2 = -\frac{\alpha}{m}|x_2|x_2 - \frac{\beta}{m}x_2 + \frac{\gamma}{m}u - g \sin \theta \\ y = x_2 \end{cases}$$

da cui le matrici:

$$A = \frac{\partial f}{\partial x} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{\alpha}{m}|x_2| - \frac{\beta}{m} \end{pmatrix}$$

$$B = \frac{\partial f}{\partial u} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u_1} & \frac{\partial f_1}{\partial u_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u_1} & \frac{\partial f_2}{\partial u_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \frac{\gamma}{m} & -g \cos \theta \end{pmatrix}$$

Ciò di cui abbiamo bisogno sarà quindi una condizione di equilibrio. Se imponiamo $\theta = 0$ e $u = 0$, cioè piano orizzontale con nessuna forza di controllo, otteniamo $x_2 = 0$ per qualsiasi x_1 , quindi uno stato di equilibrio.

Sostituendo, si ricava:

$$A = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x_1=0, x_2=0} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{\beta}{m} \end{pmatrix}$$

$$A = \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_{u=0, \theta=0} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{\gamma}{m} & -g \end{pmatrix}$$

Da cui il sistema:

$$\begin{cases} x' = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\beta}{m} \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \frac{\gamma}{m} & -g \end{pmatrix} u \\ y = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} x \end{cases}$$

Abbiamo quindi che, sebbene il mondo sia principalmente non lineare, e i sistemi non lineari siano di difficile trattazione, possiamo sempre trovare una forma linearizzata attorno a dei punti di equilibrio e quindi ricondurci a sistemi lineari. Da ora in avanti considereremo quindi solo sistemi di questo tipo.

3.2 Stabilità di Lyapunov

La **stabilità** di un sistema considera le conseguenze sul movimento del sistema di un'incertezza sul valore iniziale dello stato. L'idea è che, in un sistema *stabile*, *piccole* perturbazioni dello stato iniziale rispetto ad un valore di riferimento provocano solo *piccole* perturbazioni sul movimento dello stato, che ci aspettiamo si annullino sul lungo termine.

Definizione 3.3: Stato di equilibrio stabile (Lyapunov)

Poniamo un ingresso costante $u(t) = \bar{u}$ con corrispondente stato di equilibrio \bar{x} , e consideriamo un movimento *perturbato* ottenuto da $u(t) = \bar{u}$ ma a partire da $x_0 \neq \bar{x}$. \bar{x} si dice stabile se, per ogni $\epsilon > 0$, esiste $\sigma > 0$ tale che per tutti gli x_0 che soddisfano:

$$|x_0 - \bar{x}| \leq \delta$$

si ha:

$$|x(t) - \bar{x}| \leq \epsilon, \quad t \geq 0$$

notiamo come la definizione ricalca quella di limite, si può infatti definire:

Definizione 3.4: Stabilità asintotica

Uno stato di equilibrio stabile \bar{x} è anche asintoticamente stabile se vale:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} |x(t) - \bar{x}| = 0$$

Questa definizione è effettivamente una versione più forte dello stato di equilibrio stabile che prevede piena convergenza in prospettiva di $t \rightarrow \infty$, anziché confinamento in un cono (cilindro) diretto in direzione tempo positiva con base $B(\bar{x}, \delta)$.

3.3 Formula di Lagrange

Avevamo definito il sistema in forma variabili di stato:

$$\begin{cases} x' = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}$$

Per sistemi LTI possiamo calcolare in forma chiusa la funzione di transizione dello stato:

$$\begin{cases} x(t) = \phi(t, t_0, x(t_0), u(t)) \\ y(t) = \gamma(t, t_0, x(t_0), u(t)) \end{cases}$$

Riassumiamo alcuni concetti che ci saranno utili. Notiamo che un'equazione differenziale scalare e omogenea:

$$\begin{cases} x'(t) = a \cdot x(t) \\ x(t_0 = 0) = x_0 \end{cases}$$

ha una soluzione del tipo $x(t) = x_0 e^{at}$, con la possibilità di $a \in \mathbb{C}$ e quindi:

$$e^{at} = e^{x+iy} = e^x (\cos(y) + i \sin(y))$$

Notiamo poi che sviluppando secondo la serie di Taylor la funzione esponenziale si ha:

$$e^{at} = \sum_{i=0}^{\infty} a^i \cdot \frac{t^i}{i!} = 1 + at + a^2 \frac{t^2}{2!} + \dots + a^r \frac{t^r}{r!}$$

Nei nostri sistemi avevamo una matrice A , cioè un'equazione differenziale vettoriale:

$$\begin{cases} x'(t) = Ax(t) \\ x(t_0 = 0) = x_0 \end{cases}$$

quindi la soluzione dovrà necessariamente essere:

$$x(t) = e^{At} x_0$$

Stiamo effettivamente elevando un esponenziale ad una matrice (gli analisti avevano ragione!). Potremo quindi usare lo sviluppo di Taylor per trovare e^{At} :

$$e^{At} = \sum_{i=0}^{\infty} A^i \cdot \frac{t^i}{i!} = I + At + A^2 \frac{t^2}{2!} + \dots + A^r \frac{t^r}{r!}$$

Chiamiamo la A in e^{At} **matrice di transizione**, perché determina il **moto libero del sistema** in assenza di ingresso ($u(t) = 0$):

$$x(t) = \phi(t, t_0, x(t_0), u = 0) = e^{A(t-t_0)} x(t_0)$$

Notiamo poi che nel caso di condizioni iniziali a $t_0 \neq 0$ dovremo traslare la soluzione come:

$$x(t) = A e^{(t-t_0)} x_0$$

4 Lezione del 04-03-25

Avevamo ricavato la formula per la **risposta libera** di un sistema. Introduciamo quindi la parte di soluzione legata alla **risposta forzata** del sistema, cioè quella legata al termine Bu nell'equazione differenziale:

$$x' = Ax + Bu$$

da cui:

$$x(t) = x_l + x_v = e^{At} x_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)} Bu(\tau) d\tau$$

dove la risposta libera è data dal primo termine:

$$x_l = e^{At} x_0$$

e la risposta forzata è data dall'*integrale di convoluzione*:

$$x_v = \int_0^t e^{A(t-\tau)} Bu(\tau) d\tau$$

4.1 Caratterizzazione delle variabili di stato

Vediamo nel dettaglio come si ricavano le variabili di stato x' . Riprendiamo la forma generale del sistema a variabili di stato. In sostanza avremo una forma differenziale implicita per l'ingresso e l'uscita:

$$F(y(t), \dots, y^{(n)}(t), u(t), \dots, u^{(p)}(t), t) = 0$$

da cui possiamo ricavare la derivata di grado massimo dell'uscita:

$$y^{(n)}(t) = \hat{F}(y(t), \dots, y^{(n-1)}(t), u(t), \dots, u^{(p)}(t), t)$$

Facciamo alcune considerazioni sulla forma di queste equazioni. Possiamo prendere la forma generale della F , che assumiamo rappresentare un vincolo differenziale che lega in forma implicita ingresso e uscita:

$$F(t) = \sum_{i=0}^n \alpha_i y^{(i)}(t) + \sum_{j=1}^p \beta_j u^{(j)}(t), \quad F(t) = 0$$

l'equazione della $y^{(n)}(t)$ sarà allora:

$$y^{(n)}(t) = \frac{1}{\alpha_n} \left(\sum_{i=0}^{n-1} -\alpha_i y^{(i)}(t) + \sum_{j=0}^p -\beta_j u^{(j)}(t) \right)$$

Possiamo porre:

$$\begin{cases} \alpha'_i = \frac{\alpha_i}{\alpha_n} \\ \beta'_i = -\frac{\beta_i}{\alpha_n} \end{cases}$$

in modo da riscrivere la derivata di grado massimo nella forma più compatta:

$$y^{(n)}(t) = \sum_{i=0}^{n-1} -\alpha'_i y^{(i)}(t) + \sum_{j=0}^p \beta'_j u^{(j)}(t)$$

Per questo motivo, da qui in poi assumeremo $\alpha_i \leftarrow \alpha'_i$ e $\beta_i \leftarrow \beta'_i$.

Quello che volevamo fare era quindi ricondurci alla forma in variabili di stato:

$$\begin{cases} x' = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}$$

a cui siamo abituati.

Il passaggio era quindi quello di riportarci a:

$$x'(t) = \begin{pmatrix} x'_1(t) \\ \dots \\ x'_n(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ \dots \\ f_n(t) \end{pmatrix}$$

e date x e f lineari dire:

$$x'(t) = Ax + Bu$$

Partiamo dal vettore di stato:

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ \dots \\ y^{(n-1)} \end{pmatrix}$$

A questo punto la derivata di x sarà, assunto $p = 0$ (quindi non ci sono derivate dell'ingresso):

$$x' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ \dots \\ x'_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ \dots \\ x_n \\ y^{(n)}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ \dots \\ x_n \\ \hat{F}((y, \dots, y^{(n-1)}), u, t) \end{pmatrix} = \bar{f}(x, u, t)$$

che nel caso lineare si riconduce a:

$$\begin{cases} x' = \left(\begin{array}{c|cccc} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ \hline -\alpha_0 & \dots & \dots & \dots & -\alpha_{n-1} \end{array} \right) x + \begin{pmatrix} 0 \\ \dots \\ 0 \\ \beta_0 \end{pmatrix} u, & p = 0 \\ y = (1 \ 0 \ \dots \ 0) x + (0) u \end{cases}$$

La matrice A viene detta *compagna orizzontale inferiore*, e i suoi autovalori sono coincidenti alle radici del polinomio $\alpha_0 + \alpha_1 \lambda + \dots + \alpha_{n-1} \lambda^{n-1} + \lambda^n$ (questo risulta chiaro dallo sviluppo di Laplace sull'ultima riga).

Notiamo che questo processo non è dissimile a quello adottato ad esempio nello studio dei sistemi meccanici, dove le derivate successive della posizione facevano da variabili di stato (solitamente posizione e velocità), una di queste variabili faceva da valore di uscita (solitamente la posizione), e la derivata della variabile di stato di ordine più alto (solitamente l'accelerazione) era l'unica derivata della variabile di stato che introduceva nuove informazioni nel sistema.

4.1.1 Esempio numerico: sistema massa-molla-smorzatore

Un sistema di questo tipo è stato già studiato nell'esempio 2.3.4, dove avevamo la differenziale che descriveva un carrellino in un sistema molla-smorzatore soggetto ad una forza F :

$$F(t) = M \frac{dv}{dt} + Bv + Kx$$

che manipolavamo per ottenere la modellizzazione:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{K}{M} & -\frac{B}{M} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{M} \end{pmatrix}$$

$$C = (1 \ 0), \quad D = (0)$$

Osserviamo che questa è la stessa modellizzazione che avremmo ottenuto applicando il metodo descritto sopra.

Possiamo definire un programma Python che sfrutta la libreria SciPy per effettuare la simulazione in dominio tempo del sistema:

```

1 import scipy.signal as signal
2
3 def solve_svf(A, B, C, D, t, u, x0):
4     print("A:\n", A);
5     print("B:\n", B);
6     print("C:\n", C);
7     print("D:\n", D);
8
9     # setup system
10    sys = signal.StateSpace(A, B, C, D)
11
12    # solve
13    t_out, y_out, x_out = signal.lsim(sys, U=u, T=t, X0=x0)
14    return x_out, y_out, t_out;

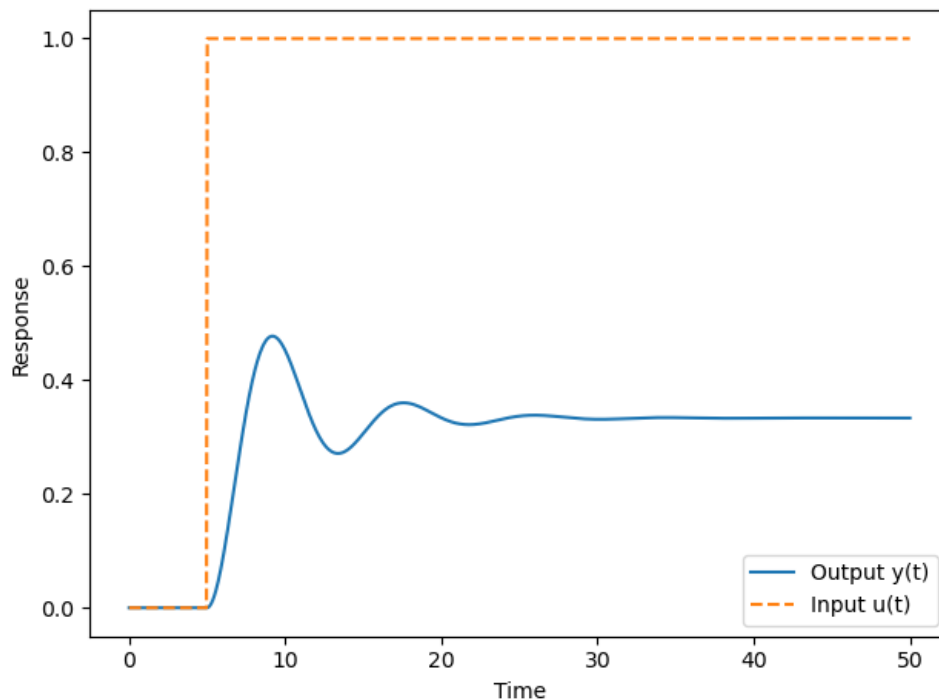
```

Proviamo allora a simulare il sistema con valori $m = 5 \text{ kg}$, $k = 3 \frac{\text{N}}{\text{m}}$ e $b = 3 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$, da cui le matrici:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -0.6 & -0.4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.2 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix}$$

Vediamo ad esempio lo scalino unitario applicato all'istante 5 s:



Notiamo che allo stato di regime si avrà $x'' = x' = 0$ (assunta x la posizione del carrello). In questo caso la differenziale si ridurrà a:

$$Kx = F \implies x = \frac{F}{K}$$

che con i dati forniti dà $\sim 0.33 \text{ m}$, che come notiamo dalla figura è esattamente il punto attorno a cui il sistema si stabilizza.

4.2 Dipendenza dalle derivate della variabile di ingresso

Abbiamo posto finora $p = 0$, quindi nessuna derivata della variabili di ingresso. Vediamo il caso in cui includiamo tali derivate.

4.2.1 Caso $p < n$

Vediamo innanzitutto il caso in cui il termine di grado massimo delle variabili di stato dipende dalle derivate della variabile di ingresso, cioè $0 < p < n$. Avevamo l'equazione differenziale:

$$y^{(n)}(t) = \sum_{i=0}^{n-1} -\alpha_i y^{(i)}(t) + \sum_{j=0}^p \beta_j u^{(j)}(t)$$

In questo caso la situazione si complica, e ci conviene sfruttare il **principio di sovrapposizione**. Definiamo l'equazione ausiliaria in z :

$$z^{(n)}(t) = \sum_{i=0}^{n-1} -\alpha_i z^{(i)}(t) + u(t)$$

che rappresenta la risposta del sistema al solo ingresso $u(t)$ (senza derivate superiori). Vediamo che questa è la forma che siamo stati abituati a risolvere finora.

Sarà quindi vero che la *funzione forzante* (l'ingresso non scalato e non derivato) $u(t)$ porterà alla *soluzione particolare* $z(t)$, cosa che indichiamo come:

$$\mathcal{H}[u(t)] = z(t)$$

Considerando la linearità del sistema, siamo liberi di moltiplicare e derivare per ricavare le risposte alle funzioni derivate successive dell'ingresso scalate per i β_i che avevamo nell'equazione originale:

$$\begin{cases} \mathcal{H}[\beta_0 u(t)] = \beta_0 z(t) \\ \mathcal{H}[\beta_1 u'(t)] = \beta_1 z'(t) \\ \dots \\ \mathcal{H}[\beta_p u^{(p)}(t)] = \beta_p z^{(p)}(t) \end{cases}$$

Per ottenere la risposta complessiva del sistema, allora, basterà applicare nuovamente la linearità e prendere la combinazione lineare delle risposte ai singoli ingressi:

$$y(t) = \sum_{j=0}^p \beta_j z^{(j)}(t)$$

da cui il sistema finale:

$$\begin{cases} x' = \left(\begin{array}{c|cccc} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{array} \right) x + \begin{pmatrix} 0 \\ \dots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u \\ y = (\beta_0 \quad \dots \quad \beta_p \quad 0 \quad \dots \quad 0) x + (0) u \end{cases}$$

4.2.2 Esempio: differenziale con derivata prima dell'ingresso

Applichiamo il metodo appena visto per l'equazione differenziale:

$$y'' + y = 2u + u'$$

Notiamo il termine di derivata prima dell'ingresso u . Riportandoci nella forma $y^{(n)}(t) = \hat{F}$ avremo:

$$y'' = -y + 2u + u'$$

con la formula al primo grado:

$$y'' = -y + u$$

da cui il sistema:

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u \\ y = \begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix} u \end{cases}$$

che sappiamo poter calcolare usando la formula di Lagrange. In seguito vedremo un esempio di calcolo esplicito (esempio 5.0.3) per una certa configurazione di ingressi e stato iniziale.

4.2.3 Caso $p = n$

Vediamo quindi il caso $p = n$. Qui avremo l'equazione differenziale:

$$y^{(n)}(t) = \sum_{i=0}^{n-1} -\alpha_i y^{(i)}(t) + \sum_{j=0}^n \beta_j u^{(j)}(t)$$

e la dimensione di C non sarà abbastanza da contenere tutti i termini β_i . Potremo allora definire la stessa equazione ausiliaria di prima:

$$z^{(n)}(t) = \sum_{i=0}^{n-1} -\alpha_i z^{(i)}(t) + u(t)$$

e sostituire, dopo aver preventivamente separato l' n -esimo termine:

$$y(t) = \sum_{i=1}^n \beta_{i-1} x_i + \beta_n z^{(n)} = \sum_{i=1}^n \beta_{i-1} x_i + \beta_n \sum_{i=1}^n -\alpha_{i-1} z^{(i)}(t) + \beta_n u(t)$$

da cui:

$$\begin{cases} x' = \left(\begin{array}{c|cccc} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ \hline -\alpha_0 & \dots & \dots & \dots & -\alpha_{n-1} \end{array} \right) x + \begin{pmatrix} 0 \\ \dots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u \\ y = (\beta_0 - \beta_n \alpha_0 \quad \dots \quad \beta_{n-1} - \beta_n \alpha_{n-1}) x + (\beta_n) u \end{cases}$$

4.3 Rappresentazioni equivalenti

Vediamo che la scelta di variabili di stato non è unica. Potremmo infatti avere:

$$\begin{cases} x' = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}$$

e definire una matrice $T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ invertibile detta **matrice del cambio di base** tale che:

$$\hat{x} = Tx \implies \begin{cases} \hat{x}' = \hat{A}\hat{x} + \hat{B}u \\ \hat{y} = \hat{C}\hat{x} + \hat{D}u \end{cases}$$

Ricaviamo le matrici \hat{A} , \hat{B} , \hat{C} e \hat{D} come:

$$\hat{A} = TAT^{-1}, \quad \hat{B} = TB, \quad \hat{C} = CT^{-1}, \quad \hat{D} = D$$

visto che:

$$\begin{cases} Tx = TAT^{-1}Tx + TBu \\ y = CT^{-1}Tx + Du \end{cases}$$

per cancellazione di $T^{-1}T$.

Meccanicamente, questo non significa altro che possiamo prendere diversi sistemi riferimento per velocità e posizione e conservare comunque l'informazione del sistema.

4.4 Autovalori e modi

Avevamo dalla formula di Lagrange che per la risposta libera, cioè la soluzione di $x'_l = Ax_l$, è:

$$x_l(t) = e^{A(t/t_0)}x_l(t_0)$$

posta una condizione iniziale a $t = t_0$.

Esistono 2 casi:

- *A diagonalizzabile;*
- *A non diagonalizzabile.*

Vediamo questi casi nel dettaglio.

4.4.1 A diagonalizzabile

Potremo ricavare una matrice di cambio di base T tale che A risulti diagonale, cioè:

$$A = T^{-1}A_D T, \quad A_D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

con A_D detta **matrice degli autovettori**, dove le entrate delle diagonali sono gli autovallori A .

In questo caso possiamo riscrivere lo stato sfruttando la serie di Taylor:

$$\hat{x}_l(t) = e^{A_D t} \hat{x}_{l0} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(A_D t)^k}{k!} \hat{x}_{l0}$$

dove la forma diagonale di A_D ci permette di calcolare velocemente A_D^k :

$$A_D^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_n^k \end{pmatrix}$$

da cui:

$$\hat{x}_l(t) = \text{diag} \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda_1 t)^k}{k!}, \dots, \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda_n t)^k}{k!} \right\} \hat{x}_{l0} = \text{diag} \{ e^{\lambda_1 t}, \dots, e^{\lambda_n t} \} \hat{x}_{l0}$$

riportandoci nelle coordinate originali avremo:

$$x_l(t) = T^{-1} \hat{x}(t) = T^{-1} \text{diag} \{ e^{\lambda_1 t}, \dots, e^{\lambda_n t} \} \hat{x}_{l0} = T^{-1} \text{diag} \{ e^{\lambda_1 t}, \dots, e^{\lambda_n t} \} T x_l(t_0)$$

Chiamiamo gli e^{λ_i} **modi** del sistema. La funzioni di uscita in assenza di derivate dell'ingresso sarà quindi data da una combinazione lineare dei *modi propri* del sistema:

$$y_l(t) = C T^{-1} \text{diag} \{ e^{\lambda_1 t}, \dots, e^{\lambda_n t} \} T x_l(t_0)$$

Notiamo che, come avevamo già osservato, sarà vero che $\lambda = \sigma + i\omega \in \mathbb{C}$, e quindi:

$$e^{\lambda t} = e^{\sigma t} \cos(\omega t + \phi)$$

dalla formula di Eulero.

Notiamo che i modi di un sistema rappresentano vari "comportamenti" naturali del sistema, che possono essere esponenziali, oscillatori o una loro combinazione sulla base del autovalore corrispondente λ_i .

Il comportamento complessivo del sistema sarà quindi dato da una qualche combinazione lineare di questi modi.

4.4.2 A non diagonalizzabile

Nel caso A non sia diagonalizzabile si può comunque trasformare nella cosiddetta forma di **Jordan**. Questa avrà una struttura quasi diagonale, con entrate di valore 1 immediatamente sopra la diagonale.

In questo caso i modi assumeranno la forma:

$$t^{\eta-1} e^{\lambda_i t}$$

dove $t^{\eta-1}$ sarà un'intero compreso tra 1 e la massima dimensione dei *miniblocchi di Jordan* associati all'autovalore.

5 Lezione del 05-03-25

Avevamo visto la forma standard per sistemi lineari:

$$\begin{cases} x' = Ax + Bx \\ y = Cx + Du \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

(con D solitamente nulla), e la soluzione data da:

$$\begin{cases} x(t) = e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau \\ y(t) = Ce^{At}x_0 + C \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau + Du \end{cases}$$

per il calcolo di tale soluzione sfruttavamo l'esponenziale di matrice:

$$e^{At} = I + At + \frac{1}{2}A^2t^2 + \dots + \frac{(At)^n}{n!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(At)^k}{k!}$$

Abbiamo visto che se la matrice A ha autovalori distinti, allora è diagonalizzabile:

$$A = T^{-1}A_DT, \quad A_D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

e l'esponenziale di matrice è semplice:

$$e^{At} = T^{-1}e^{A_D t}T = T^{-1} \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix} T$$

In particolare, se gli autovalori sono complessi e coniugati, si avrà:

$$\lambda_i = \sigma_i + j\omega_i, \quad \bar{\lambda}_i = \sigma_i - j\omega_i$$

da cui:

$$e^{\lambda_i t} = e^{\sigma_i t} e^{j\omega_i t}, \quad e^{\bar{\lambda}_i t} = e^{\sigma_i t} e^{-j\omega_i t}$$

e si avranno quindi modi oscillatori ed esponenziali.

Avevamo inoltre definito come **modi propri** associati i:

$$C(t)e^{\lambda t} = C(t) = \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 t^2 + \dots + \alpha_{k-1} t^{k-1}$$

5.0.1 Matrice reale, autovalori complessi

Se A è reale ma i suoi autovalori sono complessi, si avrà una forma del tipo:

$$A_D = \begin{pmatrix} \sigma + j\omega & 0 \\ 0 & \sigma - j\omega \end{pmatrix}$$

Questa forma è *simile* alla matrice reale S :

$$S = \begin{pmatrix} \sigma & \omega \\ -\omega & \sigma \end{pmatrix}$$

5.0.2 Calcolo degli autovalori

Ripassiamo brevemente come calcolare gli autovalori. Se V è autovettore e λ l'autovalore associato, allora vale:

$$Av = \lambda v \implies (A - \lambda I)v = 0 \implies \det(A - \lambda I) = 0$$

detta **equazione caratteristica** $p(\lambda)$:

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \lambda^n + \alpha_1 \lambda^{n-1} + \alpha_2 \lambda^{n-2} + \dots + \alpha_{n-1} \lambda + \alpha_n$$

Avremo quindi che le soluzioni di λ^* di $p(\lambda) = 0$ rappresentano gli autovalori di A .

5.0.3 Esempio: soluzione di differenziale con derivata prima dell'ingresso

Avevamo visto l'equazione differenziale (esempio 4.2.2):

$$y'' + y = 2u + u'$$

da cui avevamo ricavato il sistema:

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u \\ y = \begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix} u \end{cases}$$

Abbiamo quindi le matrici:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad (0)$$

Vediamo come calcolare una soluzione specifica di questo sistema. Per fare ciò sfrutteremo la formula di Lagrange, e quindi l'esponenziale di matrice, il cui calcolo sarà molto semplificato dal calcolo degli autovalori di A .

Abbiamo quindi:

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{pmatrix} \implies \lambda^2 + 1 = 0$$

da cui:

$$\lambda_{1,2} = \pm j$$

Avremo quindi la matrice diagonale:

$$A \sim \begin{pmatrix} j & 0 \\ 0 & j \end{pmatrix}$$

Notiamo che si sarebbe anche potuto notare la matrice simile:

$$A \sim \begin{pmatrix} j & 0 \\ 0 & j \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Troviamo quindi e^{At} come:

$$e^{At} = \begin{pmatrix} e^j & 0 \\ 0 & e^{-j} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(t) + j \sin(t) & 0 \\ 0 & \cos(t) - j \sin(t) \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ -\sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix}$$

Possiamo quindi scrivere la formula di Lagrange, assumendo per semplicità $x_0 = 0$ e $u(t) = 1$ costante:

$$x = e^{At} x_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)} B u(\tau) d\tau$$

dove il termine libero $z_l = e^{At} x_0$ va a zero, e rimane quindi:

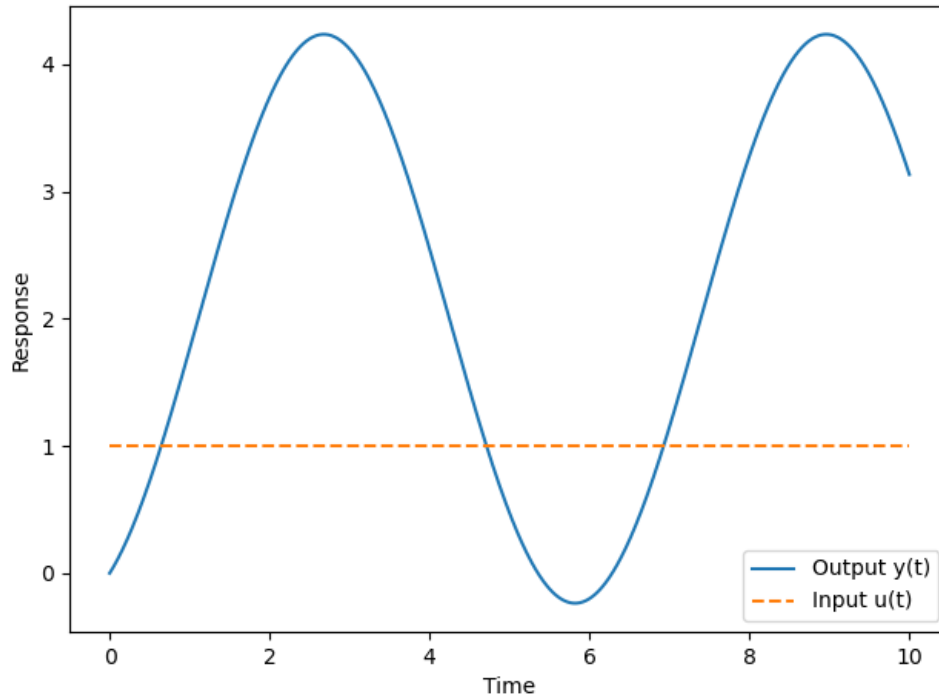
$$\int_0^t \begin{pmatrix} \cos(t-\tau) & \sin(t-\tau) \\ -\sin(t-\tau) & \cos(t-\tau) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} d\tau = \begin{pmatrix} \int_0^t \sin(t-\tau) d\tau \\ \int_0^t \cos(t-\tau) d\tau \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$$

Abbiamo quindi trovato un'espressione chiusa per lo stato del sistema sul tempo. A questo punto basterà solamente trovare l'uscita come combinazione lineare delle variabili di stato:

$$y = Bx = \begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 - \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} = 2 - 2\cos(t) + \sin(t)$$

che è l'espressione dell'uscita in funzione del tempo secondo le ipotesi date.

Verifichiamo il risultato anche con un'approssimazione numerica in Python:



5.1 Forma di Jordan

Se gli autovalori sono multipli ma A non è diagonalizzabile, abbiamo visto, occorre sfruttare la **forma di Jordan** attraverso la trasformazione:

$$J = Q A Q^{-1}$$

dove Q è la matrice degli **autovettori generalizzati** con:

$$J = \begin{pmatrix} J_1 & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & J_N \end{pmatrix}$$

dove ogni J_i è detto **miniblocco di Jordan**:

$$J_i = \begin{pmatrix} \lambda_h & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_h & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_h & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_h \end{pmatrix}$$

Ogni blocco di Jordan ha sulla diagonale lo stesso autovalore, che compare tante volte quanto è la sua *molteplicità algebrica*. Inoltre, ci sono tanti blocchi J_i associati allo stesso autovettore tante volte quanto è la sua *molteplicità geometrica*.

Se riprendiamo la matrice esponenziale abbiamo:

$$e^{At} = e^{QJQ^{-1}t} = Q \left(I + Jt + \frac{J^2 t^2}{2!} + \dots + \frac{(Jt)^n}{n!} \right) Q^{-1} = Q e^{Jt} Q^{-1}$$

dove e^{Jt} è *diagonale a blocchi*:

$$e^{Jt} = \begin{pmatrix} e^{J_1 t} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{J_2 t} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 \dots & e^{J_n t} \end{pmatrix}$$

dove ogni blocco $e^{J_i t}$ ha la forma:

$$e^{J_i t} = e^{\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} t} = e^{(\lambda I + J_{0i})t} = e^{\lambda t} e^{J_{0i} t}$$

dove con J_{0i} ci riferiamo alla **parte nilpotente** di J_i . Il problema sarà quindi capire la forma di $e^{J_{0i} t}$:

$$e^{J_{0i} t} = I + J_{0i} t + \frac{J_{0i}^2 t^2}{2!} + \dots + \frac{J_{0i}^{q-i} t^{q-1}}{(q-1)!}$$

dove ogni coefficiente moltiplicativo di t^i ha la proprietà di avere le entrate spostate in diagonale, verso l'alto a destra, per cui:

$$e^{J_{0i} t} = \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} & \dots & \frac{t^{(q-1)}}{(q-1)!} \\ 0 & 1 & t & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 1 & t & \frac{t^2}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e quindi i modi del sistema saranno:

$$t^k \frac{e^{\lambda t}}{k!}, \quad 0 \leq k \leq q-1$$

dove abbiamo finalmente capito il significato dell'intero k .

Notiamo che la proprietà di similarità che avevamo trovato:

$$M = \begin{pmatrix} \sigma + j\omega & 0 \\ 0 & \sigma - j\omega \end{pmatrix} \sim S = \begin{pmatrix} \sigma & \omega \\ -\omega & \sigma \end{pmatrix}$$

ha un equivalente per le matrici in forma di Jordan:

$$M = \begin{pmatrix} \sigma + j\omega & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma + j\omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma - j\omega & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma - j\omega \end{pmatrix} \sim S = \begin{pmatrix} \sigma & \omega & 1 & 0 \\ -\omega & \sigma & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \sigma & \omega \\ 0 & 0 & -\omega & \sigma \end{pmatrix}$$

e via dicendo.

5.2 Stabilità nei sistemi lineari stazionari

Riprendiamo la definizione di *stabilità* (3.3 e 3.4). Quello che interessa sono le **perturbazioni** dello stato.

Per un sistema lineare e stazionario l'origine è sempre punto di equilibrio per ingresso nullo. Se l'origine è stabile, allora lo è qualsiasi altro punto di equilibrio. Si può allora dire che un sistema è **stabile** solo guardando alla risposta *libera* del sistema:

$$x' = Ax + Bu, \quad u = 0, \quad x(0) = x_0$$

$$x(t) = e^{At}x_0$$

In particolare, la stabilità del sistema dipende dai *modi propri* del sistema. In particolare, se gli autovalori hanno parte reale $\text{Re}(\lambda_i) < 0$ il sistema è **asintoticamente stabile**, mentre se hanno parte reale $\text{Re}(\lambda_i) \leq 0$ e gli $\text{Re}(\lambda_i) = 0$ hanno molteplicità $\mu = 1$ il sistema è solo **stabile**. Quest'ultimo caso è propriamente quello delle matrici non diagonalizzabili (quindi messe in forma di Jordan).

Possiamo riassumere la relazione fra stabilità, modi e autovalori come segue:

Stabilità	Modi	Autovalori
Stabilità asintotica	Tendono a zero	$\text{Re}(\lambda_i) < 0$
Stabilità semplice o marginale	Non vanno a infinito, ma almeno uno non converge a zero	$\text{Re}(\lambda_i) \leq 0, \exists \lambda_i^* : \text{Re}(\lambda_i^*) = 0, \mu = 1$
Instabilità	Almeno uno va a infinito	$\text{Re}(\lambda_i) > 0$ o $\exists \lambda_i^* : \text{Re}(\lambda_i^*), \mu_a(\lambda_i^*) \neq \mu_g(\lambda_i^*)$

5.2.1 Stabilità dei sistemi linearizzati

Avevamo visto che nei sistemi non lineari conviene *linearizzare* trascurando i termini oltre il primo ordine nell'intorno di uno stato di equilibrio noto. Se il sistema linearizzato è *asintoticamente stabile*, si avrà che lo stato di equilibrio del sistema non lineare è **stabile**. Di contro, se il sistema linearizzato è *semplicemente stabile* non possiamo concludere nulla sul sistema non lineare (potrebbero esserci instabilità ai termini superiori).

6 Lezione del 06-03-25

6.1 Forma di Jordan con autovalori complessi e coniugati

Nel caso si trovi A matrice reale con autovalori complessi e coniugati, è possibile usare un cambio di coordinate che trasforma la matrice diagonale complessa in una matrice reale diagonale a blocchi.

Questo è il caso che abbiamo già visto di:

$$\begin{pmatrix} \sigma & \omega \\ -\omega & \sigma \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \sigma + j\omega & 0 \\ 0 & \sigma - j\omega \end{pmatrix}$$

e:

$$\begin{pmatrix} \sigma & \omega & 1 & 0 \\ -\omega & \sigma & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \sigma & \omega \\ 0 & 0 & -\omega & \sigma \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \sigma + j\omega & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma + j\omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma - j\omega & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma - j\omega \end{pmatrix}$$

In generale, quindi, abbiamo matrici di Jordan:

$$J_r = \begin{pmatrix} M & I & 0 & \dots & 0 \\ 0 & M & I & \dots & 0 \\ 0 & \dots & M & I & 0 \\ 0 & \dots & 0 & M & I \\ 0 & \dots & \dots & 0 & M \end{pmatrix}$$

dove gli M rappresentano i singoli miniblocchi:

$$M = \begin{pmatrix} \sigma & \omega \\ -\omega & \sigma \end{pmatrix}$$

Il numero di blocchi è quindi pari al numero di coppie di autovalori complessi coniugati.

6.2 Raggiungibilità

Abbiamo visto come la proprietà di stabilità dipende solo dalla struttura del sistema, e in particolare dalla sola matrice A .

Vediamo come in verità esistono altre proprietà che dipendono dalla struttura del sistema e che ci sono di interesse dal punto di vista della regolazione automatica. Una di queste proprietà è la **raggiungibilità**.

Diamo quindi la definizione:

Definizione 6.1: Raggiungibilità

Dato il sistema dinamico di ordine n con m ingressi e p uscite:

$$\begin{cases} x' = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}$$

allora uno stato \bar{x} si dice raggiungibile se esistono un istante di tempo finito $\bar{t} > 0$ e un ingresso \bar{u} definito tra 0 e \bar{t} tali che, detto $\bar{x}_f(t)$ il movimento forzato dello stato generato da \bar{u} , risulti che $\bar{x}_f(\bar{t}) = \bar{x}$.

La proprietà di raggiungibilità degli stati divide gli stessi in due categorie: stati raggiungibili e stati non raggiungibili.

6.2.1 Completa raggiungibilità

Se tutti gli stati di un sistema sono raggiungibili, allora il sistema è detto **completamente raggiungibile**.

Si può verificare se un sistema è completamente raggiungibile sfruttando la matrice:

$$\mathcal{M}_R = \begin{pmatrix} B & AB & A^2B & \dots & A^{n-1}B \end{pmatrix}$$

e verificando se:

$$\text{rank}(\mathcal{M}_R) = n$$

Nel caso un sistema non sia completamente raggiungibile si può isolare la parte raggiungibile, cioè definire una trasformazione T_r che ci porti:

$$x' = Ax + Bu, \quad \hat{x} = T_r x \implies \hat{x}' = \hat{A}\hat{x} + \hat{B}u$$

con:

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} \hat{A}_a & \hat{A}_{ab} \\ 0 & \hat{A}_b \end{pmatrix}, \quad \hat{B} = \begin{pmatrix} \hat{B}_a \\ 0 \end{pmatrix}$$

con $\hat{A}_a \in \mathbb{R}^{n_r \times n_r}$ e $\hat{B}_a \in \mathbb{R}^{n_r \times m}$, con $n_r = \text{rank}(\mathcal{M}_{\mathcal{R}})$.

Posto:

$$\hat{x} = \begin{pmatrix} \hat{x}_r \\ \hat{x}_{nr} \end{pmatrix}$$

si avrà svolgendo le moltiplicazioni che:

$$\begin{cases} \hat{x}'_r = \hat{A}_a \hat{x}_r + \hat{A}_{ab} \hat{x}_{nr} + \hat{B}_a u \\ \hat{x}'_{nr} = \hat{A}_b \hat{x}_{nr} \end{cases}$$

ovvero si divide lo stato in una parte raggiungibile e in una parte non raggiungibile.

6.2.2 Ricavare la matrice T_r

Per ricavare la matrice di trasformazione T_r basterà scegliere n_r colonne linearmente indipendenti di $\mathcal{M}_{\mathcal{R}}$. Ogni stato raggiungibile sarà combinazione lineare di queste colonne. Si aggiungono poi $n - n_r$ colonne linearmente indipendenti, prese ad arbitrio.