

## 1 Lezione del 25-02-25

### 1.0.1 Introduzione al corso

Il corso di fondamenti di automatica introduce i concetti di base dell'automazione:

1. Introduzione all'automazione;
2. Modellistica matematica (variabili di stato, trasformata di Laplace, ecc...);
3. Analisi dei sistemi dinamici (funzioni di trasferimento, ecc...);
4. Strumenti per l'analisi dei sistemi dinamici (diagrammi di Bode, Nyquist, ecc...);
5. Sistemi di controllo (PID, ecc...)

### 1.1 Introduzione all'automazione

L'automazione si può intendere come la capacità di eseguire un compito *in modo automatico*. Per ogni *compito* visto durante il corso si creerà un modello matematico, e un sistema capace di eseguirlo in maniera autonoma, senza l'intervento di esterni.

Elemento chiave nei sistemi che verranno studiati sarà il **feedback**, in italiano *retroazione*, che rappresenta l'informazione che possiamo prendere indietro dal sistema in modo da influenzare i sistemi di controllo automatico.

#### 1.1.1 Fasi di sviluppo

Il termine inglese "*automation*" viene introdotto come contrazione di "*automatic production*" dalla Ford Motor Company nel 1947 per denominare l'insieme di apparati di movimentazione automatica installati nelle loro linee di produzione.

Possiamo tracciare diverse fasi di sviluppo della disciplina dell'automazione:

1. **Prima rivoluzione industriale** (~1780):  
Vengono introdotti i primi strumenti meccanici di produzione (macchine a vapore, ecc...).
2. **Seconda rivoluzione industriale** (~1870):  
Si organizza il lavoro in catene di produzione sfruttando l'energia elettrica (catena Ford, ecc...).
3. **Terza rivoluzione industriale** (~1970):  
Si automatizza il processo di produzione grazie a sistemi IT ed elettronici (PLC, ecc...).
4. **Quarta rivoluzione industriale** (~2010):  
Prodotti e processi interconnessi grazie all'IoT e a tecnologie digitali (industria 4.0, ecc...).

### 1.1.2 Tecnologie abilitanti

Possiamo individuare alcune macroaree dell'automazione moderna, in ambito (perlopiù) industriale:

- Tecniche di produzione avanzate (stampa 3D (additiva), ecc...);
- Realtà aumentata;
- Simulazione;
- Sviluppo orizzontale e verticale;
- IoT industriale (IIoT);
- Cloud computing;
- Cybersecurity;
- Big data analytics.

## 1.2 Modellistica matematica

### 1.2.1 Sistemi

Veniamo quindi alle tecniche che ci permettono di studiare matematicamente un dato **sistema**.

#### Definizione 1.1: Sistema

Un sistema è un insieme di parti interconnesse e interagenti che formano un insieme più grande e complesso.

Di un sistema ci interessano gli **ingressi**, cioè cosa *entra* nel sistema, e le **uscite**, cioè cosa *esce* dal sistema. Ogni sistema è caratterizzato poi da un certo livello di **disturbo**. L'idea è spesso quella di *inseguire* gli ingressi e *reiettare* i disturbi.

### 1.2.2 Sistemi dinamici

Ad interessarci in particolare sono sistemi **dinamici**.

#### Definizione 1.2: Sistema dinamico

Un sistema si dice dinamico quando le sue grandezze si evolvono nel tempo.

Le grandezze di un sistema dinamico (le uscite e lo stato interno) sono quindi caratterizzate da funzioni con variabile tempo, che quindi *variano* nel tempo e interagiscono con l'ambiente esterno.

Solitamente i sistemi dinamici sono costituiti da più sottosistemi che interagiscono fra di loro.

Incontriamo diversi problemi nello studio dei sistemi:

- Se è ignoto il sistema, abbiamo il problema della **modellistica**, che consiste nel creare un modello matematico del sistema, e quindi del suo comportamento;

- Se è ignota l'uscita, abbiamo il problema della **simulazione**, che consiste nel simulare la risposta del sistema, nel tempo, in base alla variazione degli ingressi;
- Se conosciamo il sistema e la sua uscita, abbiamo il problema del **controllo**, che consiste nello studiare come agire *dall'esterno* su un sistema per modificarne la naturale evoluzione ed ottenere un comportamento desiderato. Ad agire sul sistema sarà spesso un altro sistema, detto **sistema di controllo**, che produrrà gli ingressi del sistema vero e proprio sulla base di dati **comandi**.

### 1.2.3 Diagrammi a blocchi

Rappresentiamo i modelli che facciamo sistemi attraverso diagrammi a "scatole" o a blocchi:



La scatola sistema è spesso caratterizzata da una certa funzione matematica  $f(u, \xi, \theta)$ , dove  $\xi$  rappresenta i disturbi e  $\theta$  i parametri del modello. Gli ingressi e le uscite saranno quindi rappresentati da variabili  $u$  e  $y$ , con  $y = f(u, \xi, \theta)$ . Notiamo che la funzione che rappresenta il sistema ha la variabile di ingresso  $u$  come argomento.



### 1.2.4 Proprietà dei sistemi dinamici

Notiamo alcune proprietà dei sistemi dinamici:

- Questi devono essere **causali**, cioè l'uscita non deve dipendere da valori futuri dell'ingresso: se l'uscita è rappresentata da  $v(t)$  e l'ingresso da  $u(t)$ , si ha che  $v(t)$  dipende da  $u(t)$  solo per  $t < t_0$  con  $t_0$  l'istante corrente;
- Possono essere sia **stocastici** che **deterministici**, se sono presenti o meno fenomeni aleatori nel legame ingresso uscita. Il corso in particolare tratterà di sistemi *deterministici*;

## 1.3 Modellistica di sistemi

Vediamo gli approcci più comuni alla modellazione di sistemi dinamici.

### 1.3.1 Modello a scatola nera

Possiamo adottare un approccio sperimentale (o *induttivo*) alla modellistica di un sistema, considerandolo come una **scatola nera** (*black box*)



L'idea è quella di studiare il comportamento del sistema in risposta a diversi stimoli, e costruire un'associazione fra stimolo e risposta corrispondente. Il problema (*fitting*) da qui in poi sarà quello di trovare una certa funzione che approssima, per quanto possibile, il comportamento del sistema in risposta ai diversi stimoli. Approcci per il fitting della funzione di risposta possono essere:

- Regole stato-azione;
- Alberi decisionali;
- Regressione lineare;
- Modelli statistici;
- Reti neurali.

Un approccio di questo tipo non richiede alcuna conoscenza del principio di funzionamento interno del sistema (dettagli fisici, tecnici, ecc...), ed è quindi puramente sperimentale.

Notiamo che approcci di questo tipo sono effettivamente alla base delle tecniche di apprendimento automatico. In questo le reti neurali per l'apprendimento *supervisionato* non sono che una tecnica molto potente per il fitting di varie relazioni ingresso-uscita.

### 1.3.2 Modello a scatola bianca

Un altro approccio è quello analitico (o *deduttivo*). In questo caso si costruisce un modello astratto del sistema di interesse, e si *valida* confrontandolo col sistema reale, agendo con delle modifiche nel caso di incongruenze.



Approcci di questo tipo richiedono di ricavare modelli astratti di sistemi, conoscendone quindi le leggi di funzionamento interno. Per questo sono molto accurati per sistemi ben conosciuti, ma difficili da realizzare altrimenti.

### 1.3.3 Modello a scatola grigia

Un approccio intermedio fra scatola nera e scatola bianca è quello a **scatola grigia**. In questo caso assumiamo di conoscere il comportamento generale del sistema, ma di dover identificare parametri specifici. Si crea quindi un modello a scatola bianca, lasciando vuoti i parametri che non si conoscono (*scatola bianca*). Svolgendo varie misurazioni e confrontando i risultati del modello astratto e del sistema reale si andranno poi a determinare nel dettaglio tali parametri (*scatola nera*).

### 1.3.4 Approccio pragmatico

Un approccio pragmatico consiste nello sviluppare un modello a priori, senza considerare necessariamente un sistema reale, e poi adattarlo fino alla convergenza con un sistema veramente esistente.

Dal punto di vista ingegneristico, questo significa ipotizzare un modello per un sistema ideale, che andiamo quindi a definire in maniera astratta, e poi ad implementare nella realtà cercando di avvicinarci il più possibile all'idea originale.

## 2 Lezione del 26-02-25

### 2.0.1 Modello a stati

Un possibile approccio alla modellistica di un sistema è la creazione di una **macchina a stati finiti** (FSM, *Finite State Machine*).

Questo chiaramente porterà alla definizione di un determinato numero di **stati** in cui il sistema si potrà trovare in qualsiasi momento. Azioni sul sistema corrisponderanno quindi a **transizioni** fra uno stato un altro, e ogni transizione comporterà un aggiornamento dell'uscita del sistema. La risposta del sistema a ogni azione dall'esterno dipende quindi non solo dall'azione, ma dallo stato interno corrente del sistema, che è quindi dotato di **memoria**.

La modellizzazione con macchine a stati finiti risulta particolarmente utile in informatica, in quanto modella molto bene una vasta gamma di sistemi digitali.

### 2.1 Modellizzazione a scatola bianca semplice

Iniziamo a vedere come si possono modellizzare sistemi fisici attraverso approcci a scatola bianca.

#### 2.1.1 Esempio: serbatoio a galleggiante

Prendiamo il caso di un serbatoio, con in ingresso un rubinetto di portata  $p$ , di cui si vuole tenere costante il livello del liquido ad un valore  $\bar{h}$ . Sistemi di questo tipo sono comuni in diversi contesti, fra cui gli sciacquoni dei water e le vaschette dei carburatori per motori a scoppio.

Chiamiamo il livello del liquido ad ogni istante temporale  $h(t)$ . Il valore desiderato di tale funzione, che indichiamo come  $h_o(t) = \bar{h}$ , verrà detto **segnale di riferimento**.

L'ingresso del sistema su cui vogliamo agire sarà  $u(t) = p(t)$ , cioè la portata del rubinetto (che modificheremo ad esempio controllando una valvola).

Nel caso non ci siano disturbi, ergo tutto il liquido immesso nel serbatoio resti nel serbatoio, avremo una variazione di volume  $\Delta V$  pari a:

$$\Delta V = A \cdot (h_1 - h_0) = \int_{t_0}^{t_1} u(\tau) d\tau$$

dove  $A$  rappresenta l'area di base del serbatoio.

Da questo si ricava:

$$A \cdot \frac{dh}{dt} = u(t)$$

Chiamando  $x \leftarrow h$  si otterrà l'equazione differenziale:

$$x' = \frac{1}{A} u(t)$$

Di cui chiaramente ci interessa la **condizione iniziale**  $x_0$ , cioè il livello del liquido all'istante temporale  $t = 0$ .

### 2.1.2 Esempio: circuito di carica di un condensatore

Prendiamo il circuito formato da un condensatore  $C$  posto in serie ad un generatore di corrente  $i$ :



Avremo che la variazione di carica sulle armature  $\Delta q$  varrà:

$$\Delta q = C \cdot (V_1 - V_0) = \int_{t_0}^{t_1} i(\tau) d\tau \implies C \frac{dV}{dt} = i(t)$$

da cui si ricava l'equazione differenziale del tutto analoga a prima:

$$x' = \frac{1}{C} i(t)$$

L'unica cosa che cambia, rispetto al sistema precedente, sono i nomi delle variabili e le grandezze fisiche che rappresentano. Dal punto di vista matematico, quindi, possiamo assumere i due sistemi come equivalenti.

### 2.1.3 Esempio: legge di Newton

Vediamo come equazioni analoghe alle precedenti si ricavano in verità da qualsiasi sistema meccanico che obbedisce alla legge di Newton:

$$F = ma \implies m \frac{dv}{dt} = F(t)$$

da cui:

$$x' = \frac{1}{m} F(t)$$

notando che chiamiamo  $x \leftarrow v$  (ci riferiamo alle velocità, non alle posizioni).

Gli elementi visti finora non sono altro che **integratori** o *operatori integrali*, cioè sistemi dinamici che prendono  $x'$  e restituiscono  $x$  per una certa variabile.

Indichiamo questi come segue:



e, se vogliamo, vedremo che nel dominio di Laplace vale la divisione per la variabile  $s = \sigma + i\omega$ :



## 2.2 Sistemi Lineari e Tempo Invarianti (LTI)

Vediamo un particolare tipo di sistema dinamico:

### Definizione 2.1: Sistema LTI

Un sistema LTI (Lineare e Tempo Invariante) rispetta le seguenti proprietà:

- **Omogeneità:** se si scala l'ingresso  $u(t)$ , l'uscita  $y(t)$  viene scalata dello stesso fattore:

$$au(t) \implies ay(t)$$

- **Sovrapposizione degli effetti:** se un modello ha risposte  $y_1(t)$  e  $y_2(t)$  a due ingressi qualsiasi  $u_1(t)$  e  $u_2(t)$ , allora la risposta a un ingresso dato dalla combinazione lineare di  $u_1(t)$  e  $u_2(t)$ :

$$u(t) = \alpha_1 u_1(t) + \alpha_2 u_2(t)$$

sarà data ancora da una combinazione lineare delle uscite in risposta ai singoli ingressi:

$$y(t) = \alpha_1 y_1(t) + \alpha_2 y_2(t)$$

Notiamo che in questo la sovrapposizione degli effetti non rappresenta altro che la proprietà di *linearità* dei sistemi lineari.

- **Tempo invarianza:** il sistema si comporta allo stesso modo indipendentemente da quando avviene l'azione, cioè nelle equazioni che lo descrivono non vi è una dipendenza esplicita dal tempo. Questo significa che un ingresso  $u(t - \tau)$  produce un'uscita  $y(t - \tau)$ , cioè solo traslata in tempo:



I sistemi lineari e tempo invarianti ci sono particolarmente utili in quanto sono completamente compresi e facili da risolvere, e riescono a modellizzare in maniera abbastanza accurata una vasta gamma di fenomeni.

## 2.3 Modellizzazione a variabili di stato

Estendiamo l'approccio a scatola bianca introducendo formalmente una forma che sfrutta equazioni differenziali lineari per modellizzare uno *stato interno* in determinate **variabili di stato**.

### Definizione 2.2: Modello a variabili di stato

Introduciamo il modello per sistemi a equazioni differenziali lineari:

$$\begin{cases} x' = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}$$

dove  $u \in \mathbb{R}^r$  è l'**ingresso** e  $x \in \mathbb{R}^n$  è lo **stato** del sistema.  $x'$  sarà quindi la variazione dello stato, e  $y \in \mathbb{R}^m$  l'uscita del sistema.

Abbiamo quindi un sistema di equazioni vettoriali differenziali che mettono in relazione fra di loro lo *stato interno presente*  $x$ , la variazione di stato  $x'$ , l'ingresso  $u$  e l'uscita  $y$  del sistema.

Le dimensioni delle matrici che correlano variazione di stato e uscita a stato interno presente e ingresso, cioè le matrici  $A, B, C, D$ , si ricaveranno dalle dimensioni delle variabili ( $r, n$  e  $m$ ):

$$A \in \mathbb{R}^{n \times n}, B \in \mathbb{R}^{n \times r}, C \in \mathbb{R}^{m \times n}, D \in \mathbb{R}^{m \times r},$$

La tempo invarianza del sistema è data proprio dalla tempo invarianza delle matrici, che non hanno il tempo come argomento ma sono costanti.

Notiamo poi che nel caso  $r = m = 1$  il sistema si dice **SISO** (*Single Input Single Output*), altrimenti si dice **MIMO** (*Multiple Input Multiple Output*).

### 2.3.1 Proprietà strutturali

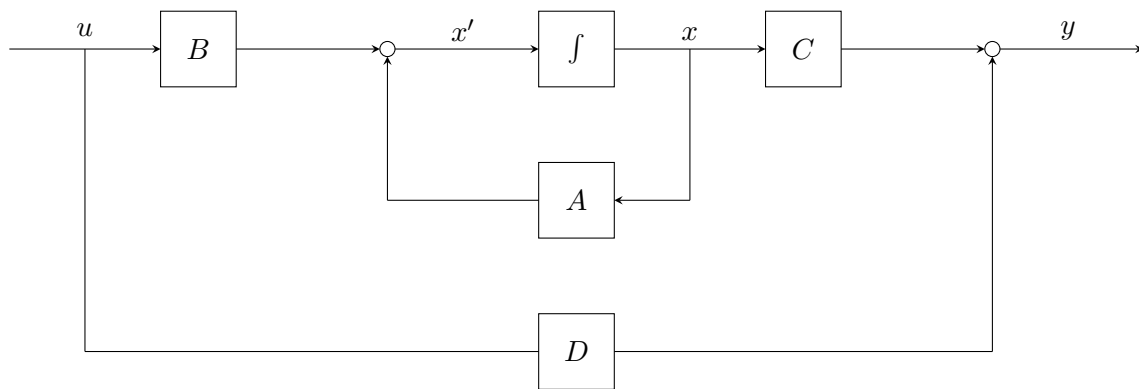
L'analisi delle matrici  $A, B, C, D$  definisce le cosiddette **proprietà strutturali** del sistema. Ad esempio abbiamo che:

- La matrice  $A$  ci dà informazioni riguardo alla proprietà di **stabilità** del sistema;
- Le matrici  $A, B$  ci danno informazioni riguardo alla **controllabilità** del sistema;
- Le matrici  $A, C$  ci danno informazioni riguardo all'**osservabilità** del sistema.

### 2.3.2 Diagramma a blocchi

Possiamo usare l'operatore integrale definito prima per creare il diagramma a blocchi del sistema a equazioni differenziali lineari:





Notando che il simbolo  $\circ$  rappresenta una somma.

### 2.3.3 Esempio: partitore di tensione

Vediamo per il modello introdotto l'esempio del *partitore resistivo* o partitore di tensione.



La relazione che otteniamo, dalla legge del partitore di tensione, per il voltaggio, è:

$$V_{out} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} V_{in} = \alpha V_{in}, \quad \alpha = \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

da cui:

$$A = B = C = 0, \quad D = \alpha$$

### 2.3.4 Esempio: sistema massa-molla-smorzatore

Vediamo il sistema fisico dato da un carrello di massa  $M$  legato ad una parete da una molla con costante  $K$  e sottoposto ad attrito proporzionale alla sua velocità  $v$ . Agiamo sul sistema introducendo una *forza*  $F$  sul carrello, che consideriamo come **entrata** del sistema.

Il sistema verrà descritto dall'equazione:

$$F(t) = M \frac{dv}{dt} + Bv + Kx$$

Decidiamo di usare come **variabili di stato** la *posizione*  $x$  e la *velocità*  $v$ :  $x_s = \begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix}$ . Vedremo che questo accade spesso nel caso di sistemi meccanici. Avremo quindi la variazione di stato:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = v \\ \frac{dv}{dt} = -\frac{K}{M}x - \frac{B}{M}v + \frac{1}{M}F \end{cases}$$

Avremo allora la prima equazione del sistema:

$$\begin{pmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dv}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{K}{M} & -\frac{B}{M} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{M} \end{pmatrix} F$$

da cui le matrici  $A, B$ :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{K}{M} & -\frac{B}{M} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{M} \end{pmatrix}$$

Scegliamo quindi come **uscita** la *posizione*  $x$ , come:

$$y = x = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix}$$

da cui le matrici  $C, D$ :

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix}$$

Notiamo che si potrebbe scegliere, analogamente, la *velocità*  $v$  come **uscita**, da cui si otterrebbe:

$$y = v = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix}$$

da cui le matrici  $C, D$ :

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix}$$

Abbiamo quindi visto come il modello a variabili di stato permette di rappresentare una vasta gamma di situazioni fisiche con facilità e secondo un formato standard, con cui sono tra l'altro compatibili diversi sistemi di calcolo e simulazione al calcolatore.

### 2.3.5 Limiti dei sistemi lineari

Notiamo come il mondo reale spesso è **non lineare**. Prendiamo il caso del serbatoio visto prima, e assumiamo la sezione  $A$  come non costante lungo l'altezza  $h$ , ergo esiste una funzione  $A(h)$  che lega altezza a sezione. Avremo quindi la relazione:

$$h' = B(h)u, \quad B(h) = \frac{1}{A_h} \implies A(h) dh = u dt$$

Al momento di apertura della valvola di uscita avremo quindi una variazione del livello:

$$h' = B(h)(u - y) = \frac{u - y}{A(h)}$$

Assunta *sezione* in variazione lineare, potremo sfruttare la legge:

$$y = k\sqrt{h}$$

da cui:

$$h' = \frac{-k\sqrt{h}}{A(h)} + \frac{u}{A(h)}$$

Notiamo come questa forma si avvicina al modello standard visto prima, ma presenta una relazione non lineare all'altezza  $h$ . Indichiamo quindi questa relazione come:

$$h' = g(h) + f(h)u$$

Chiamiamo questa forma **forma bilineare**.

### Definizione 2.3: Forma bilineare

Introduciamo la forma bilineare:

$$\begin{cases} x' = f(x) + g(x)u \\ y = h(x) \end{cases}$$

In questo caso,  $f(x)$  rappresenta l'evoluzione dello stato indipendente da  $u$ , e  $g(x)$  rappresenta la risposta di stato, variabile (linearmente) in  $x$ , ad  $u$ . La risposta del sistema è stata invece modellata come solo dipendente dallo stato interno  $x$ . Sistemi di questo tipo sono onnipresenti, ma chiaramente più difficili da gestire.

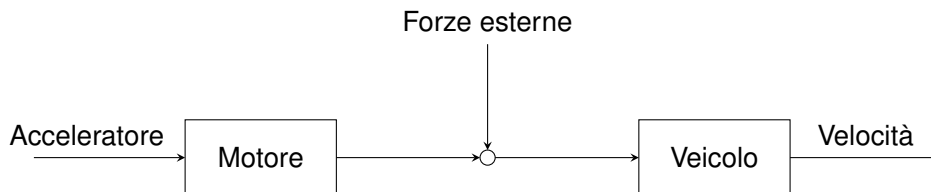
## 3 Lezione del 27-02-25

Riprendiamo la trattazione dei sistemi non lineari sfruttando un esempio:

### 3.0.1 Esempio: regolazione della velocità di crociera

Poniamo di voler modellizzare il sistema di trazione longitudinale di un'automobile, implementando un sistema di controllo che la mantenga a velocità di crociera costante. L'**ingresso manipolabile** sarà il *pedale dell'acceleratore*, l'**uscita** del sistema la *velocità*, e il **disturbo** dato dalla *pendenza* del tratto di strada che stiamo percorrendo.

Il diagramma a blocchi del sistema potrà essere realizzato come segue:



Un modello matematico potrebbe essere il seguente:

$$m \frac{dv}{dt} + \alpha |v|v + \beta v = \gamma u - mg(\sin \theta)$$

dove  $\alpha |v|v + \beta v$  rappresentano due componenti, una **quadratica** e una **lineare**, dell'attrito. Possiamo interpretare la componente quadratica come l'attrito con l'aria, mentre la componente lineare come l'attrito del pneumatico con la superficie stradale.  $\gamma u$  sarà invece la spinta del motore, chiamata  $u$  l'apertura della valvola dell'acceleratore in un dato istante temporale e quindi  $\gamma$  una qualche costante di proporzionalità legata alle caratteristiche del motore e della trasmissione della vettura. Infine,  $g \sin(\theta)$  rappresenterà l'accelerazione gravitazionale in direzione longitudinale al veicolo (posta una pendenza di  $\theta$  con  $\theta < 30^\circ$ ).

Notiamo che questa equazione è non lineare. Potremmo pensare di semplificarla: ad esempio rimuovendo il termine quadratico (trascurabile alle basse velocità) e il riportando il termine sinusoidale al primo componente dello sviluppo di MacLaurin (valido per piccoli angoli), ottenendo quindi:

$$m \frac{dv}{dt} + \alpha |v|v + \beta v = \gamma u - mg(\sin \theta) \sim m \frac{dv}{dt} + \beta v = \gamma u - mg\theta$$

Nota questa possibilità, decidiamo comunque di continuare con la trattazione del sistema completo. Prese le variabili di stato comuni ai sistemi meccanici  $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x & v \end{pmatrix}$ , che rinominiamo in  $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix}$ , si ha il sistema:

$$\begin{cases} x'_1 = x_2 \\ x'_2 = -\frac{\alpha}{m}|x_2|x_2 - \frac{\beta}{m}x_2 + \frac{\gamma}{m}u - g \sin \theta \\ y = x_2 \end{cases}$$

con la condizione iniziale  $\mathbf{x}(t_0) = x_0$ .

Nelle equazioni dell'esempio appena visto non compare  $t$ , quindi il sistema è tempo invariante. Di contro, il sistema non ricade nelle forme viste prima, ma in una forma più generale:

#### Definizione 3.1: Forma non lineare generale

Introduciamo la forma generica per sistemi non lineari:

$$\begin{cases} x' = f(x, u) \\ y = g(x, u) \end{cases}$$

Un approccio alla gestione di sistemi di questo tipo è la **linearizzazione**. Per capire i punti ottimali su cui effettuare una linearizzazione, è opportuno introdurre il concetto di **equilibrio** e **stabilità**.

### 3.1 Equilibri e stabilità

Diamo una definizione di **stato di equilibrio**:

#### Definizione 3.2: Stato di equilibrio

Dato il sistema  $x' = f(x, u)$ , e dato un segnale di ingresso  $u(t) = \bar{u}$ , uno stato  $\bar{x}$  si dice di equilibrio se soddisfa la relazione:

$$0 = f(\bar{x}, \bar{u})$$

In questo caso, il sistema non si muove dallo stato  $\bar{x}$ , come risulta immediato da  $\bar{x}' = f(\bar{x}, \bar{u}) = 0$ .

#### 3.1.1 Linearizzazione attorno ad uno stato di equilibrio

Partiamo dalla forma generale vista adesso, e prendiamo il sistema come stazionario. Dato un ingresso  $\bar{u}$  e il suo stato di equilibrio corrispondente  $\bar{x}$ , definiamo due nuove variabili che rappresentano la **variazione di equilibrio**:

$$\begin{cases} \Delta x = x - \bar{x} \\ \Delta u = u - \bar{u} \end{cases}$$

A questo punto possiamo scrivere le equazioni di stato attraverso la serie di Taylor centrata nello stato di equilibrio troncata al primo ordine:

$$x' = f(x, u) = f(\bar{x}, \bar{u}) + \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x=\bar{x}, u=\bar{u}} \Delta x + \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_{x=\bar{x}, u=\bar{u}} \Delta u + O(|\Delta x|^2) + O(|\Delta u|^2)$$

Abbiamo quindi linearizzato un sistema non lineare attorno ad un punto di equilibrio. Le matrici che moltiplicano i termini del primo ordine sono chiaramente le **Jacobiane**:

$$A = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{\bar{x}, \bar{u}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

$$B = \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_{\bar{x}, \bar{u}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u_1} & \frac{\partial f_1}{\partial u_2} & \cdots \\ \frac{\partial f_2}{\partial u_1} & \frac{\partial f_2}{\partial u_2} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

da cui riscriviamo la formula di Taylor riportata prima come:

$$x' = A \cdot \Delta x + B \cdot \Delta u$$

Abbiamo quindi trovato la forma a variabili di stato. Associando allo stato di equilibrio anche un'uscita di equilibrio  $\bar{y} = g(\bar{x}, \bar{u})$ , e chiamando  $\Delta y$  la variazione di uscita, si può ricavare il sistema completo a variabili di stato:

$$\begin{cases} x' = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}$$

### 3.1.2 Esempio: linearizzazione del problema di regolazione della velocità di crociera

Riprendendo l'esempio precedente (3.0.1) della regolazione della velocità di crociera, avevamo ricavato il sistema non lineare in forma generale:

$$x' = f(x, u) = \begin{cases} x'_1 = x_2 \\ x'_2 = -\frac{\alpha}{m}|x_2|x_2 - \frac{\beta}{m}x_2 + \frac{\gamma}{m}u - g \sin \theta \\ y = x_2 \end{cases}$$

da cui le matrici:

$$A = \frac{\partial f}{\partial x} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{\alpha}{m}|\bar{x}_2| - \frac{\beta}{m} \end{pmatrix}$$

$$B = \frac{\partial f}{\partial u} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u_1} & \frac{\partial f_1}{\partial u_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u_1} & \frac{\partial f_2}{\partial u_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \frac{\gamma}{m} & -g \cos \theta \end{pmatrix}$$

Ciò di cui abbiamo bisogno sarà quindi una condizione di equilibrio. Se imponiamo  $\theta = 0$  e  $u = 0$ , cioè piano orizzontale con nessuna forza di controllo, otteniamo  $x_2 = 0$  per qualsiasi  $x_1$ , quindi uno stato di equilibrio.

Sostituendo, si ricava:

$$A = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x_1=0, x_2=0} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{\beta}{m} \end{pmatrix}$$

$$A = \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_{u=0, \theta=0} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{\gamma}{m} & -g \end{pmatrix}$$

Da cui il sistema:

$$\begin{cases} x' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{\beta}{m} \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \frac{\gamma}{m} & -g \end{pmatrix} u \\ y = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} x \end{cases}$$

Abbiamo quindi che, sebbene il mondo sia principalmente non lineare, e i sistemi non lineari siano di difficile trattazione, possiamo sempre trovare una forma linearizzata attorno a dei punti di equilibrio e quindi ricondurci a sistemi lineari. Da ora in avanti considereremo quindi solo sistemi di questo tipo.

### 3.2 Stabilità di Lyapunov

La **stabilità** di un sistema considera le conseguenze sul movimento del sistema di un'incertezza sul valore iniziale dello stato. L'idea è che, in un sistema *stabile*, *piccole* perturbazioni dello stato iniziale rispetto ad un valore di riferimento provocano solo *piccole* perturbazioni sul movimento dello stato, che ci aspettiamo si annullino sul lungo termine.

#### Definizione 3.3: Stato di equilibrio stabile (Lyapunov)

Poniamo un ingresso costante  $u(t) = \bar{u}$ , detto *nominale*, con corrispondente stato di equilibrio  $\bar{x}$ , e consideriamo un ingresso, detto *perturbato*, ottenuto da  $u(t) = \bar{u}$  ma a partire da  $x_0 \neq \bar{x}$ .  $\bar{x}$  si dice *stabile* se, per ogni  $\epsilon > 0$ , esiste  $\sigma > 0$  tale che per tutti gli  $x_0$  che soddisfano:

$$|x_0 - \bar{x}| \leq \delta$$

si ha:

$$|x(t) - \bar{x}| \leq \epsilon, \quad t \geq 0$$

notiamo come la definizione ricalca quella di limite, si può infatti definire:

#### Definizione 3.4: Stabilità asintotica

Uno stato di equilibrio stabile  $\bar{x}$  è anche *asintoticamente stabile* se vale:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} |x(t) - \bar{x}| = 0$$

Questa definizione è effettivamente una versione più forte dello stato di equilibrio stabile che prevede piena convergenza in prospettiva di  $t \rightarrow \infty$ , anziché confinamento in un cono (cilindro) diretto in direzione tempo positiva con base  $B(\bar{x}, \delta)$ .

### 3.3 Formula di Lagrange

Avevamo definito il sistema in forma variabili di stato:

$$\begin{cases} x' = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}$$

Per sistemi LTI possiamo calcolare in forma chiusa la funzione di transizione dello stato:

$$\begin{cases} x(t) = \phi(t, t_0, x(t_0), u(t)) \\ y(t) = \gamma(t, t_0, x(t_0), u(t)) \end{cases}$$

Riassumiamo alcuni concetti che ci saranno utili. Notiamo che un'equazione differenziale scalare e omogenea:

$$\begin{cases} x'(t) = a \cdot x(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

ha una soluzione del tipo  $x(t) = x_0 e^{at}$ , con la possibilità di  $a \in \mathbb{C}$  e quindi:

$$e^{at} = e^{x+iy} = e^x (\cos(y) + i \sin(y))$$

Notiamo poi che sviluppando secondo la serie di Taylor la funzione esponenziale si ha:

$$e^{at} = \sum_{i=0}^{\infty} a^i \cdot \frac{t^i}{i!} = 1 + at + a^2 \frac{t^2}{2!} + \dots + a^r \frac{t^r}{r!}$$

Nei nostri sistemi avevamo una matrice  $A$ , cioè un'equazione differenziale vettoriale:

$$\begin{cases} x'(t) = Ax(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

quindi la soluzione dovrà necessariamente essere:

$$x(t) = e^{At} x_0$$

Stiamo effettivamente elevando un esponenziale ad una matrice (gli analisti avevano ragione!). Potremo quindi usare lo sviluppo di Taylor per trovare  $e^{At}$ :

$$e^{At} = \sum_{i=0}^{\infty} A^i \cdot \frac{t^i}{i!} = I + At + A^2 \frac{t^2}{2!} + \dots + A^r \frac{t^r}{r!}$$

Chiamiamo la  $A$  in  $e^{At}$  **matrice di transizione**, perché determina il **moto libero del sistema** in assenza di ingresso ( $u(t) = 0$ ):

$$x(t) = \phi(t, t_0, x(t_0), u = 0) = e^{A(t-t_0)} x(t_0)$$

Notiamo poi che nel caso di condizioni iniziali a  $t_0 \neq 0$  dovremo traslare la soluzione come:

$$x(t) = A e^{(t-t_0)} x_0$$

## 4 Lezione del 04-03-25

Avevamo ricavato la formula per la **risposta libera** di un sistema. Introduciamo quindi la parte di soluzione legata alla **risposta forzata** del sistema, cioè quella legata al termine  $Bu$  nell'equazione differenziale:

$$x' = Ax + Bu$$

da cui:

$$x(t) = x_l + x_v = e^{At} x_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)} Bu(\tau) d\tau$$

dove la risposta libera è data dal primo termine:

$$x_l = e^{At} x_0$$

e la risposta forzata è data dall'integrale di convoluzione:

$$x_v = \int_0^t e^{A(t-\tau)} B u(\tau) d\tau$$

#### 4.0.1 Dimostrazione della formula di Lagrange nel caso SISO

Diamo, a scopo illustrativo, una dimostrazione della formula di Lagrange nel caso SISO. Partiamo dall'equazione differenziale lineare di stato:

$$x' = Ax + Bu$$

che trasformiamo in:

$$x' - Ax = Bu \quad (\text{disomogenea})$$

$$x' - Ax = 0 \quad (\text{omogenea})$$

dove si è diviso nell'**omogenea**, da cui ricaveremo la soluzione *generale*, che per quanto ci riguarda abbiamo chiamato **risposta libera**, e nella **disomogenea**, da cui ricaveremo la soluzione *particolare*, che ancora abbiamo chiamato **risposta forzata**.

Partiamo dalla soluzione dell'omogenea. Abbiamo che questa è risolvibile per variabili separabili:

$$\frac{dx}{dt} = Ax \implies \frac{dx}{x} = A dt \implies \int \frac{dx}{x} = \int A dt \implies \ln(x) = At + c$$

da cui la risposta libera:

$$x_l = e^{At} x_0$$

dove  $x_0$  serve a far combaciare le condizioni iniziali (deriva dal  $+c$  del termine integrale).

A questo punto possiamo risolvere la disomogenea ponendo la sua soluzione come:

$$x_v = c(t)e^{At}$$

con  $c(t)$  qualsiasi che ci interessa trovare. Per fare ciò procederemo per sostituzione, ma non prima di aver calcolato  $x'_v$ :

$$x'_v = c'(t)e^{At} + c(t)e^{At}$$

che sostituiamo quindi nella disomogenea:

$$c'(t)e^{At} + c(t)Ae^{At} - c(t)Ae^{At} = Bu \implies c'(t) = e^{-At} Bu$$

e quindi:

$$c(t) = \int_0^t e^{-A\tau} Bu d\tau$$

da cui la risposta forzata:

$$x_v = e^{At} \int_0^t e^{-A\tau} Bu d\tau = \int_0^t e^{A(t-\tau)} Bu d\tau$$

Abbiamo quindi ricavato la formula di Lagrange:

$$x = x_l + x_v = e^{At} x_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)} Bu d\tau$$

□



#### 4.0.2 Risposta dell'uscita con Lagrange

Sfruttiamo quindi la formula di Lagrange per ricavare la risposta dell'uscita del sistema. Questa verrà direttamente dall'equazione dell'uscita:

$$y = Cx + Du$$

a cui sostituiamo l'espressione dello stato appena ottenuta, cioè:

$$y = y_l + y_v = Ce^{At}x_0 + C \int_0^t e^{A(t-\tau)} Bu d\tau + Du$$

che notiamo possiamo ancora dividere nella risposta libera data dal primo termine:

$$y_l = Ce^{At}x_0$$

e la risposta forzata è data da:

$$y_v = C \int_0^t e^{A(t-\tau)} Bu(\tau) d\tau + Du$$

#### 4.1 Caratterizzazione delle variabili di stato

Vediamo nel dettaglio come si ricavano le variabili di stato  $x'$ . Riprendiamo la forma generale del sistema a variabili di stato. In sostanza avremo una forma differenziale implicita per l'ingresso e l'uscita:

$$F(y(t), \dots, y^{(n)}(t), u(t), \dots, u^{(p)}(t), t) = 0$$

da cui possiamo ricavare la derivata di grado massimo dell'uscita:

$$y^{(n)}(t) = \hat{F}(y(t), \dots, y^{(n-1)}(t), u(t), \dots, u^{(p)}(t), t)$$

Facciamo alcune considerazioni sulla forma di queste equazioni. Possiamo prendere la forma generale della  $F$ , che assumiamo rappresentare un vincolo differenziale che lega in forma implicita ingresso e uscita:

$$F(t) = \sum_{i=0}^n \alpha_i y^{(i)}(t) + \sum_{j=1}^p \beta_j u^{(j)}(t), \quad F(t) = 0$$

l'equazione della  $y^{(n)}(t)$  sarà allora:

$$y^{(n)}(t) = \frac{1}{\alpha_n} \left( \sum_{i=0}^{n-1} -\alpha_i y^{(i)}(t) + \sum_{j=0}^p -\beta_j u^{(j)}(t) \right)$$

Possiamo porre:

$$\begin{cases} \alpha'_i = \frac{\alpha_i}{\alpha_n} \\ \beta'_i = -\frac{\beta_i}{\alpha_n} \end{cases}$$

in modo da riscrivere la derivata di grado massimo nella forma più compatta:

$$y^{(n)}(t) = \sum_{i=0}^{n-1} -\alpha'_i y^{(i)}(t) + \sum_{j=0}^p \beta'_j u^{(j)}(t)$$

Per questo motivo, da qui in poi assumeremo  $\alpha_i \leftarrow \alpha'_i$  e  $\beta_i \leftarrow \beta'_i$ .

Quello che volevamo fare era quindi ricondurci alla forma in variabili di stato:

$$\begin{cases} x' = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}$$

a cui siamo abituati.

Il passaggio era quindi quello di riportarci a:

$$x'(t) = \begin{pmatrix} x'_1(t) \\ \dots \\ x'_n(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ \dots \\ f_n(t) \end{pmatrix}$$

e date  $x$  e  $f$  lineari dire:

$$x'(t) = Ax + Bu$$

Patiamo dal vettore di stato:

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ \dots \\ y^{(n-1)} \end{pmatrix}$$

A questo punto la derivata di  $x$  sarà, assunto  $p = 0$  (quindi non ci sono derivate dell'ingresso):

$$x' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ \dots \\ x'_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ \dots \\ x_n \\ y^{(n)}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ \dots \\ x_n \\ \hat{F}((y, \dots, y^{(n-1)}), u, t) \end{pmatrix} = \bar{f}(x, u, t)$$

che nel caso lineare si riconduce a:

$$\begin{cases} x' = \left( \begin{array}{c|cccc} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ \hline -\alpha_0 & \dots & \dots & \dots & -\alpha_{n-1} \end{array} \right) x + \begin{pmatrix} 0 \\ \dots \\ 0 \\ \beta_0 \end{pmatrix} u, & p = 0 \\ y = (1 & 0 & \dots & 0) x + (0) u \end{cases}$$

□

La matrice  $A$  viene detta *compagna orizzontale inferiore*, e i suoi autovalori sono coincidenti alle radici del polinomio  $\alpha_0 + \alpha_1\lambda + \dots + \alpha_{n-1}\lambda^{n-1} + \lambda^n$  (questo risulta chiaro dallo sviluppo di Laplace sull'ultima riga).

Notiamo che questo processo non è dissimile a quello adottato ad esempio nello studio dei sistemi meccanici, dove le derivate successive della posizione facevano da variabili di stato (solitamente posizione e velocità), una di queste variabili faceva da valore di uscita (solitamente la posizione), e la derivata della variabile di stato di ordine più alto (solitamente l'accelerazione) era l'unica derivata della variabile di stato che introduceva nuove informazioni nel sistema.

#### 4.1.1 Esempio numerico: sistema massa-molla-smorzatore

Un sistema di questo tipo è stato già studiato nell'esempio 2.3.4, dove avevamo la differenziale che descriveva un carrellino in un sistema molla-smorzatore soggetto ad una forza  $F$ :

$$F(t) = M \frac{dv}{dt} + Bv + Kx$$

che manipolavamo per ottenere la modellizzazione:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{K}{M} & -\frac{B}{M} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{M} \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix}$$

Osserviamo che questa è la stessa modellizzazione che avremmo ottenuto applicando il metodo descritto sopra.

Possiamo definire un programma Python che sfrutta la libreria SciPy per effettuare la simulazione in dominio tempo del sistema:

```

1 import scipy.signal as signal
2
3 def solve_svf(A, B, C, D, t, u, x0):
4     print("A:\n", A);
5     print("B:\n", B);
6     print("C:\n", C);
7     print("D:\n", D);
8
9     # setup system
10    sys = signal.StateSpace(A, B, C, D)
11
12    # solve
13    t_out, y_out, x_out = signal.lsim(sys, U=u, T=t, X0=x0)
14    return x_out, y_out, t_out;
```

Proviamo allora a simulare il sistema con valori  $m = 5 \text{ kg}$ ,  $k = 3 \frac{\text{N}}{\text{m}}$  e  $b = 3 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$ , da cui le matrici:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -0.6 & -0.4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix}$$

Vediamo ad esempio lo scalino unitario applicato all'istante 5 s:



Notiamo che allo stato di regime si avrà  $x'' = x' = 0$  (assunta  $x$  la posizione del carrello). In questo caso la differenziale si ridurrà a:

$$Kx = F \implies x = \frac{F}{K}$$

che con i dati forniti dà  $\sim 0.33$  m, che come notiamo dalla figura è esattamente il punto attorno a cui il sistema si stabilizza.

## 4.2 Dipendenza dalle derivate della variabile di ingresso

Abbiamo posto finora  $p = 0$ , quindi nessuna derivata della variabili di ingresso. Vediamo il caso in cui includiamo tali derivate.

### 4.2.1 Caso $p < n$

Vediamo innanzitutto il caso in cui il termine di grado massimo delle variabili di stato dipende dalle derivate della variabile di ingresso, cioè  $0 < p < n$ . Avevamo l'equazione differenziale:

$$y^{(n)}(t) = \sum_{i=0}^{n-1} -\alpha_i y^{(i)}(t) + \sum_{j=0}^p \beta_j u^{(j)}(t)$$

In questo caso la situazione si complica, e ci conviene sfruttare il **principio di sovrapposizione**. Definiamo l'equazione ausiliaria in  $z$ :

$$z^{(n)}(t) = \sum_{i=0}^{n-1} -\alpha_i z^{(i)}(t) + u(t)$$

che rappresenta la risposta del sistema al solo ingresso  $u(t)$  (senza derivate superiori). Vediamo che questa è la forma che siamo stati abituati a risolvere finora.

Sarà quindi vero che la *funzione forzante* (l'ingresso non scalato e non derivato)  $u(t)$  porterà alla *soluzione particolare*  $z(t)$ , cosa che indichiamo come:

$$\mathcal{H}[u(t)] = z(t)$$

Considerando la linearità del sistema, siamo liberi di moltiplicare e derivare per ricavare le risposte alle funzioni derivate successive dell'ingresso scalate per i  $\beta_i$  che avevamo nell'equazione originale:

$$\begin{cases} \mathcal{H}[\beta_0 u(t)] = \beta_0 z(t) \\ \mathcal{H}[\beta_1 u'(t)] = \beta_1 z'(t) \\ \dots \\ \mathcal{H}[\beta_p u^{(p)}(t)] = \beta_p z^{(p)}(t) \end{cases}$$

Per ottenere la risposta complessiva del sistema, allora, basterà applicare nuovamente la linearità e prendere la combinazione lineare delle risposte ai singoli ingressi:

$$y(t) = \sum_{j=0}^p \beta_j z^{(j)}(t)$$

da cui il sistema finale:

$$\begin{cases} x' = \left( \begin{array}{c|cccc} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ \hline -\alpha_0 & \dots & \dots & \dots & -\alpha_{n-1} \end{array} \right) x + \begin{pmatrix} 0 \\ \dots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u \\ y = (\beta_0 \dots \beta_p \ 0 \dots 0) x + (0) u \end{cases}$$

□

#### 4.2.2 Esempio: differenziale con derivata prima dell'ingresso

Applichiamo il metodo appena visto per l'equazione differenziale:

$$y'' + y = 2u + u'$$

Notiamo il termine di derivata prima dell'ingresso  $u$ . Riportandoci nella forma  $y^{(n)}(t) = \hat{F} u$  avremo:

$$y'' = -y + 2u + u'$$

con la formula al primo grado:

$$y'' = -y + u$$

da cui il sistema:

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u \\ y = \begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + (0) u \end{cases}$$

che sappiamo poter calcolare usando la formula di Lagrange. In seguito vedremo un esempio di calcolo esplicito (esempio 5.0.3) per una certa configurazione di ingressi e stato iniziale.

#### 4.2.3 Caso $p = n$

Vediamo quindi il caso  $p = n$ . Qui avremo l'equazione differenziale:

$$y^{(n)}(t) = \sum_{i=0}^{n-1} -\alpha_i y^{(i)}(t) + \sum_{j=0}^n \beta_j u^{(j)}(t)$$

e la dimensione di  $C$  non sarà abbastanza da contenere tutti i termini  $\beta_i$ . Potremo allora definire la stessa equazione ausiliaria di prima:

$$z^{(n)}(t) = \sum_{i=0}^{n-1} -\alpha_i z^{(i)}(t) + u(t)$$

e sostituire, dopo aver preventivamente separato l' $n$ -esimo termine:

$$y(t) = \sum_{i=1}^n \beta_{i-1} x_i + \beta_n z^{(n)} = \sum_{i=1}^n \beta_{i-1} x_i + \beta_n \sum_{i=1}^n -\alpha_{i-1} z^{(i)}(t) + \beta_n u(t)$$

da cui:

$$\begin{cases} x' = \left( \begin{array}{c|cccc} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ \hline -\alpha_0 & \dots & \dots & \dots & -\alpha_{n-1} \end{array} \right) x + \begin{pmatrix} 0 \\ \dots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u \\ y = (\beta_0 - \beta_n \alpha_0 \quad \dots \quad \beta_{n-1} - \beta_n \alpha_{n-1}) x + (\beta_n) u \end{cases}$$

□

### 4.3 Rappresentazioni equivalenti

Vediamo che la scelta di variabili di stato non è unica. Potremmo infatti avere:

$$\begin{cases} x' = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}$$

e definire una matrice  $T \in \mathbb{R}^{n \times n}$  invertibile detta **matrice del cambio di base** tale che:

$$\hat{x} = Tx \implies \begin{cases} \hat{x}' = \hat{A}\hat{x} + \hat{B}u \\ \hat{y} = \hat{C}\hat{x} + \hat{D}u \end{cases}$$

Ricaviamo le matrici  $\hat{A}$ ,  $\hat{B}$ ,  $\hat{C}$  e  $\hat{D}$  come:

$$\hat{A} = TAT^{-1}, \quad \hat{B} = TB, \quad \hat{C} = CT^{-1}, \quad \hat{D} = D$$

visto che:

$$\begin{cases} Tx = TAT^{-1}Tx + TBu \\ y = CT^{-1}Tx + Du \end{cases}$$

per cancellazione di  $T^{-1}T$ .

Meccanicamente, questo non significa altro che possiamo prendere diversi sistemi riferimento per velocità e posizione e conservare comunque l'informazione del sistema.

### 4.4 Autovalori e modi

Avevamo dalla formula di Lagrange che per la risposta libera, cioè la soluzione di  $x'_l = Ax_l$ , è:

$$x_l(t) = e^{A(t/t_0)}x_l(t_0)$$

posta una condizione iniziale a  $t = t_0$ .

Esistono 2 casi:

- *A diagonalizzabile;*
- *A non diagonalizzabile.*

Vediamo questi casi nel dettaglio.

#### 4.4.1 A diagonalizzabile

Potremo ricavare una matrice di cambio di base  $T$  tale che  $A$  risulti diagonale, cioè:

$$A = T^{-1} A_D T, \quad A_D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

con  $A_D$  detta **matrice degli autovettori**, dove le entrate delle diagonali sono gli autovalori  $A$ .

In questo caso possiamo riscrivere lo stato sfruttando la serie di Taylor:

$$\hat{x}_l(t) = e^{A_D t} \hat{x}_{l0} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(A_D t)^k}{k!} \hat{x}_{l0}$$

dove la forma diagonale di  $A_D$  ci permette di calcolare velocemente  $A_D^k$ :

$$A_D^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_n^k \end{pmatrix}$$

da cui:

$$\hat{x}_l(t) = \text{diag} \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda_1 t)^k}{k!}, \dots, \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda_n t)^k}{k!} \right\} \hat{x}_{l0} = \text{diag} \{ e^{\lambda_1 t}, \dots, e^{\lambda_n t} \} \hat{x}_{l0}$$

riportandoci nelle coordinate originali avremo:

$$x_l(t) = T^{-1} \hat{x}(t) = T^{-1} \text{diag} \{ e^{\lambda_1 t}, \dots, e^{\lambda_n t} \} \hat{x}_{l0} = T^{-1} \text{diag} \{ e^{\lambda_1 t}, \dots, e^{\lambda_n t} \} T x_l(t_0)$$

Chiamiamo gli  $e^{\lambda_i}$  **modi** del sistema. La funzioni di uscita in assenza di derivate dell'ingresso sarà quindi data da una combinazione lineare dei *modi propri* del sistema:

$$y_l(t) = C T^{-1} \text{diag} \{ e^{\lambda_1 t}, \dots, e^{\lambda_n t} \} T x_l(t_0)$$

Notiamo che, come avevamo già osservato, sarà vero che  $\lambda = \sigma + i\omega \in \mathbb{C}$ , e quindi:

$$e^{\lambda t} = e^{\sigma t} \cos(\omega t + \phi)$$

dalla formula di Eulero.

Notiamo che i modi di un sistema rappresentano vari "comportamenti" naturali del sistema, che possono essere esponenziali, oscillatori o una loro combinazione sulla base del autovalore corrispondente  $\lambda_i$ .

Il comportamento complessivo del sistema sarà quindi dato da una qualche combinazione lineare di questi modi.

#### 4.4.2 A non diagonalizzabile

Nel caso  $A$  non sia diagonalizzabile si può comunque trasformare nella cosiddetta forma di **Jordan**. Questa avrà una struttura quasi diagonale, con entrate di valore 1 immediatamente sopra la diagonale.

In questo caso i modi assumeranno la forma:

$$t^{\eta-1} e^{\lambda_i t}$$

dove  $t^{\eta-1}$  sarà un'intero compreso tra 1 e la massima dimensione dei *miniblocchi di Jordan* associati all'autovalore.

## 5 Lezione del 05-03-25

Avevamo visto la forma standard per sistemi lineari:

$$\begin{cases} x' = Ax + Bx \\ y = Cx + Du \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

(con  $D$  solitamente nulla), e la soluzione data da:

$$\begin{cases} x(t) = e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau \\ y(t) = Ce^{At}x_0 + C \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau + Du \end{cases}$$

per il calcolo di tale soluzione sfruttavamo l'esponenziale di matrice:

$$e^{At} = I + At + \frac{1}{2}A^2t^2 + \dots + \frac{(At)^n}{n!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(At)^k}{k!}$$

Abbiamo visto che se la matrice  $A$  ha autovalori distinti, allora è diagonalizzabile:

$$A = T^{-1}A_D T, \quad A_D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

e l'esponenziale di matrice è semplice:

$$e^{At} = T^{-1}e^{A_D t}T = T^{-1} \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix} T$$

In particolare, se gli autovalori sono complessi e coniugati, si avrà:

$$\lambda_i = \sigma_i + j\omega_i, \quad \bar{\lambda}_i = \sigma_i - j\omega_i$$

da cui:

$$e^{\lambda_i t} = e^{\sigma_i t} e^{j\omega_i t}, \quad e^{\bar{\lambda}_i t} = e^{\sigma_i t} e^{-j\omega_i t}$$

e si avranno quindi modi oscillatori ed esponenziali.

Avevamo inoltre definito come **modi propri** associati i:

$$C(t)e^{\lambda t} = C(t) = \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 t^2 + \dots + \alpha_{k-1} t^{k-1}$$

### 5.0.1 Matrice reale, autovalori complessi

Se  $A$  è reale ma i suoi autovalori sono complessi, si avrà una forma del tipo:

$$A_D = \begin{pmatrix} \sigma + j\omega & 0 \\ 0 & \sigma - j\omega \end{pmatrix}$$

Questa forma è *simile* alla matrice reale  $S$ :

$$S = \begin{pmatrix} \sigma & \omega \\ -\omega & \sigma \end{pmatrix}$$



### 5.0.2 Calcolo degli autovalori

Ripassiamo brevemente come calcolare gli autovalori. Se  $V$  è autovettore e  $\lambda$  l'autovalore associato, allora vale:

$$Av = \lambda v \implies (A - \lambda I)v = 0 \implies \det(A - \lambda I) = 0$$

detta **equazione caratteristica**  $p(\lambda)$ :

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \lambda^n + \alpha_1 \lambda^{n-1} + \alpha_2 \lambda^{n-2} + \dots + \alpha_{n-1} \lambda + \alpha_n$$

Avremo quindi che le soluzioni di  $\lambda^*$  di  $p(\lambda) = 0$  rappresentano gli autovalori di  $A$ .

### 5.0.3 Esempio: soluzione di differenziale con derivata prima dell'ingresso

Avevamo visto l'equazione differenziale (esempio 4.2.2):

$$y'' + y = 2u + u'$$

da cui avevamo ricavato il sistema:

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u \\ y = \begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix} u \end{cases}$$

Abbiamo quindi le matrici:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad (0)$$

Vediamo come calcolare una soluzione specifica di questo sistema. Per fare ciò sfrutteremo la formula di Lagrange, e quindi l'esponenziale di matrice, il cui calcolo sarà molto semplificato dal calcolo degli autovalori di  $A$ .

Abbiamo quindi:

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{pmatrix} \implies \lambda^2 + 1 = 0$$

da cui:

$$\lambda_{1,2} = \pm j$$

Avremo quindi la matrice diagonale:

$$A \sim \begin{pmatrix} j & 0 \\ 0 & j \end{pmatrix}$$

Notiamo che si sarebbe anche potuto notare la matrice simile:

$$A \sim \begin{pmatrix} j & 0 \\ 0 & j \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Troviamo quindi  $e^{At}$  come:

$$e^{At} = \begin{pmatrix} e^j & 0 \\ 0 & e^{-j} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(t) + j \sin(t) & 0 \\ 0 & \cos(t) - j \sin(t) \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ -\sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix}$$

Possiamo quindi scrivere la formula di Lagrange, assumendo per semplicità  $x_0 = 0$  e  $u(t) = 1$  costante:

$$x = e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau$$

dove il termine libero  $z_l = e^{At}x_0$  va a zero, e rimane quindi:

$$\int_0^t \begin{pmatrix} \cos(t-\tau) & \sin(t-\tau) \\ -\sin(t-\tau) & \cos(t-\tau) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} d\tau = \begin{pmatrix} \int_0^t \sin(t-\tau) d\tau \\ \int_0^t \cos(t-\tau) d\tau \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$$

Abbiamo quindi trovato un'espressione chiusa per lo stato del sistema sul tempo. A questo punto basterà solamente trovare l'uscita come combinazione lineare delle variabili di stato:

$$y = Bx = \begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 - \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} = 2 - 2\cos(t) + \sin(t)$$

che è l'espressione dell'uscita in funzione del tempo secondo le ipotesi date.

Verifichiamo il risultato anche con un'approssimazione numerica in Python:



## 5.1 Forma di Jordan

Se gli autovalori sono multipli ma  $A$  non è diagonalizzabile, abbiamo visto, occorre sfruttare la **forma di Jordan** attraverso la trasformazione:

$$J = Q A Q^{-1}$$

dove  $Q$  è la matrice degli **autovettori generalizzati** con:

$$J = \begin{pmatrix} J_1 & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & J_N \end{pmatrix}$$

dove ogni  $J_i$  è detto **miniblocco di Jordan**:

$$J_i = \begin{pmatrix} \lambda_h & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_h & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_h & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_h \end{pmatrix}$$

Ogni blocco di Jordan ha sulla diagonale lo stesso autovalore, che compare tante volte quanto è la sua *molteplicità algebrica*. Inoltre, ci sono tanti blocchi  $J_i$  associati allo stesso autovettore tante volte quanto è la sua *molteplicità geometrica*.

Se riprendiamo la matrice esponenziale abbiamo:

$$e^{At} = e^{QJQ^{-1}t} = Q \left( I + Jt + \frac{J^2 t^2}{2!} + \dots + \frac{(Jt)^n}{n!} \right) Q^{-1} = Q e^{Jt} Q^{-1}$$

dove  $e^{Jt}$  è *diagonale a blocchi*:

$$e^{Jt} = \begin{pmatrix} e^{J_1 t} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{J_2 t} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 \dots & e^{J_n t} \end{pmatrix}$$

dove ogni blocco  $e^{J_i t}$  ha la forma:

$$e^{J_i t} = e^{\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} t} = e^{(\lambda I + J_{0i})t} = e^{\lambda t} e^{J_{0i} t}$$

dove con  $J_{0i}$  ci riferiamo alla **parte nilpotente** di  $J_i$ . Il problema sarà quindi capire la forma di  $e^{J_{0i} t}$ :

$$e^{J_{0i} t} = I + J_{0i} t + \frac{J_{0i}^2 t^2}{2!} + \dots + \frac{J_{0i}^{q-i} t^{q-1}}{(q-1)!}$$

dove ogni coefficiente moltiplicativo di  $t^i$  ha la proprietà di avere le entrate spostate in diagonale, verso l'alto a destra, per cui:

$$e^{J_{0i} t} = \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} & \dots & \frac{t^{(q-1)}}{(q-1)!} \\ 0 & 1 & t & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 1 & t & \frac{t^2}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e quindi i modi del sistema saranno:

$$t^k e^{\lambda t}, \quad 0 \leq k \leq q-1$$

dove abbiamo finalmente capito il significato dell'intero  $k$ : la dimensione del miniblocco di dimensione massima.

Notiamo che la proprietà di similarità che avevamo trovato:

$$M = \begin{pmatrix} \sigma + j\omega & 0 \\ 0 & \sigma - j\omega \end{pmatrix} \sim S = \begin{pmatrix} \sigma & \omega \\ -\omega & \sigma \end{pmatrix}$$

ha un equivalente per le matrici in forma di Jordan:

$$M = \begin{pmatrix} \sigma + j\omega & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma + j\omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma - j\omega & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma - j\omega \end{pmatrix} \sim S = \begin{pmatrix} \sigma & \omega & 1 & 0 \\ -\omega & \sigma & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \sigma & \omega \\ 0 & 0 & -\omega & \sigma \end{pmatrix}$$

e via dicendo.

## 5.2 Stabilità nei sistemi lineari stazionari

Riprendiamo la definizione di *stabilità* (3.3 e 3.4). Quello che interessa sono le **perturbazioni** dello stato.

Per un sistema lineare e stazionario l'origine è sempre punto di equilibrio per ingresso nullo. Se l'origine è stabile, allora lo è qualsiasi altro punto di equilibrio. Si può allora dire che un sistema è **stabile** solo guardando alla risposta *libera* del sistema:

$$x' = Ax + Bu, \quad u = 0, \quad x(0) = x_0$$

$$x(t) = e^{At}x_0$$

In particolare, la stabilità del sistema dipende dai *modi propri* del sistema. In particolare, se gli autovalori hanno parte reale  $\text{Re}(\lambda_i) < 0$  il sistema è **asintoticamente stabile**, mentre se hanno parte reale  $\text{Re}(\lambda_i) \leq 0$  e gli  $\text{Re}(\lambda_i) = 0$  hanno molteplicità  $\mu = 1$  il sistema è solo **stabile**. Quest'ultimo caso è propriamente quello delle matrici non diagonalizzabili (quindi messe in forma di Jordan).

Possiamo riassumere la relazione fra stabilità, modi e autovalori come segue:

Stabilità	Modi	Autovalori
Stabilità asintotica	Tendono a zero	$\text{Re}(\lambda_i) < 0$
Stabilità semplice o marginale	Non vanno a infinito, ma almeno uno non converge a zero	$\text{Re}(\lambda_i) \leq 0, \exists \lambda_i^* : \text{Re}(\lambda_i^*) = 0, \mu = 1$
Instabilità	Almeno uno va a infinito	$\text{Re}(\lambda_i) > 0$ o $\exists \lambda_i^* : \text{Re}(\lambda_i^*), \mu_a(\lambda_i^*) \neq \mu_g(\lambda_i^*)$

### 5.2.1 Stabilità dei sistemi linearizzati

Avevamo visto che nei sistemi non lineari conviene *linearizzare* trascurando i termini oltre il primo ordine nell'intorno di uno stato di equilibrio noto. Se il sistema linearizzato è *asintoticamente stabile*, si avrà che lo stato di equilibrio del sistema non lineare è **stabile**. Di contro, se il sistema linearizzato è *semplicemente stabile* non possiamo concludere nulla sul sistema non lineare (potrebbero esserci instabilità ai termini superiori).

## 6 Lezione del 06-03-25

### 6.1 Forma di Jordan con autovalori complessi e coniugati

Nel caso si trovi  $A$  matrice reale con autovalori complessi e coniugati, è possibile usare un cambio di coordinate che trasforma la matrice diagonale complessa in una matrice reale diagonale a blocchi.

Questo è il caso che abbiamo già visto di:

$$\begin{pmatrix} \sigma & \omega \\ -\omega & \sigma \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \sigma + j\omega & 0 \\ 0 & \sigma - j\omega \end{pmatrix}$$

e:

$$\begin{pmatrix} \sigma & \omega & 1 & 0 \\ -\omega & \sigma & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \sigma & \omega \\ 0 & 0 & -\omega & \sigma \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \sigma + j\omega & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma + j\omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma - j\omega & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma - j\omega \end{pmatrix}$$

In generale, quindi, abbiamo matrici di Jordan:

$$J_r = \begin{pmatrix} M & I & 0 & \dots & 0 \\ 0 & M & I & \dots & 0 \\ 0 & \dots & M & I & 0 \\ 0 & \dots & 0 & M & I \\ 0 & \dots & \dots & 0 & M \end{pmatrix}$$

dove gli  $M$  rappresentano i singoli miniblocchi:

$$M = \begin{pmatrix} \sigma & \omega \\ -\omega & \sigma \end{pmatrix}$$

Il numero di blocchi è quindi pari al numero di coppie di autovalori complessi coniugati.

### 6.2 Raggiungibilità

Abbiamo visto come la proprietà di stabilità dipende solo dalla struttura del sistema, e in particolare dalla sola matrice  $A$ .

Vediamo come in verità esistono altre proprietà che dipendono dalla struttura del sistema e che ci sono di interesse dal punto di vista della regolazione automatica. Una di queste proprietà è la **raggiungibilità**.

Diamo quindi la definizione:

#### Definizione 6.1: Raggiungibilità

Dato il sistema dinamico di ordine  $n$  con  $m$  ingressi e  $p$  uscite:

$$\begin{cases} x' = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}$$

allora uno stato  $\bar{x}$  si dice raggiungibile se esistono un istante di tempo finito  $\bar{t} > 0$  e un ingresso  $\bar{u}$  definito tra 0 e  $\bar{t}$  tali che, detto  $\bar{x}_f(t)$  il movimento forzato dello stato generato da  $\bar{u}$ , risulti che  $\bar{x}_f(\bar{t}) = \bar{x}$ .

La proprietà di raggiungibilità degli stati divide gli stessi in due categorie: stati raggiungibili e stati non raggiungibili.

### 6.2.1 Completa raggiungibilità

Se tutti gli stati di un sistema sono raggiungibili, allora il sistema è detto **completamente raggiungibile**.

Si può verificare se un sistema è completamente raggiungibile sfruttando la matrice (di raggiungibilità):

$$\mathcal{M}_{\mathcal{R}} = \begin{pmatrix} B & AB & A^2B & \dots & A^{n-1}B \end{pmatrix}$$

a volte indicata anche come  $\mathcal{C}$  (in quanto nei sistemi continui combacia con la *controllabilità*), e verificando se:

$$\text{rank}(\mathcal{M}_{\mathcal{R}}) = n$$

Nel caso un sistema non sia completamente raggiungibile si può isolare la parte raggiungibile, cioè definire una trasformazione  $T_r$  che ci porti:

$$x' = Ax + Bu, \quad \hat{x} = T_r x \implies \hat{x}' = \hat{A}\hat{x} + \hat{B}u$$

con:

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} \hat{A}_a & \hat{A}_{ab} \\ 0 & \hat{A}_b \end{pmatrix}, \quad \hat{B} = \begin{pmatrix} \hat{B}_a \\ 0 \end{pmatrix}$$

con  $\hat{A}_a \in \mathbb{R}^{n_r \times n_r}$  e  $\hat{B}_a \in \mathbb{R}^{n_r \times m}$ , e con  $n_r = \text{rank}(\mathcal{M}_{\mathcal{R}})$ ,  $n_r < n$ .

Posto:

$$\hat{x} = \begin{pmatrix} \hat{x}_r \\ \hat{x}_{nr} \end{pmatrix}$$

si avrà svolgendo le moltiplicazioni che:

$$\begin{cases} \hat{x}'_r = \hat{A}_a \hat{x}_r + \hat{A}_{ab} \hat{x}_{nr} + \hat{B}_a u \\ \hat{x}'_{nr} = \hat{A}_b \hat{x}_{nr} \end{cases}$$

ovvero si divide lo stato in una parte raggiungibile e in una parte non raggiungibile.

### 6.2.2 Ricavare la matrice $T_r$

Per ricavare la matrice di trasformazione  $T_r$  basterà scegliere  $n_r$  colonne linearmente indipendenti di  $\mathcal{M}_{\mathcal{R}}$ . Ogni stato raggiungibile sarà combinazione lineare di queste colonne. Si aggiungono poi  $n - n_r$  colonne linearmente indipendenti, prese ad arbitrio.

## 7 Lezione del 11-03-25

Vediamo alcuni esempi sulla raggiungibilità introdotta alla scorsa lezione.

### 7.0.1 Esempio: raggiungibilità della velocità di crociera

Riprendiamo l'esempio 3.0.1 (in particolare, la linearizzazione data in 3.1.2) e studiamone la raggiungibilità.

Avevamo che il sistema era espresso con le matrici  $A, B, C, D$ :

$$\begin{cases} x' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{\beta}{m} \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \frac{\gamma}{m} & -g \end{pmatrix} u \\ y = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} x \end{cases}$$

Ricaviamo quindi la matrice  $\mathcal{M}_{\mathcal{R}}$ :

$$\mathcal{M}_{\mathcal{R}} = \begin{pmatrix} B & AB \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{\gamma}{m} & -g \\ \frac{\gamma}{m} & -g & -\frac{\beta\gamma}{m^2} & \frac{g\beta}{m} \end{pmatrix}$$

notiamo che le due righe sono necessariamente indipendenti, ergo  $\text{rank}(\mathcal{M}_{\mathcal{R}}) = n = 2$ , e il sistema è completamente raggiungibile.

### 7.0.2 Esempio: raggiungibilità di una coppia di condensatori

Vediamo quindi un sistema non completamente raggiungibile per evidenziare come ricavare le parti raggiungibili e non raggiungibili.

Prendiamo il circuito dato dalla coppia di condensatori in serie:



Dal punto di vista fisico avremo che:

$$i = C \frac{dv_1}{dt} = C \frac{dv_2}{dt}$$

e dalla seconda di Kirchoff:

$$u = v_1 + v_2 + iR \implies i = \frac{u - v_1 - v_2}{R}$$

quindi:

$$\frac{u - v_1 - v_2}{RC} = \frac{dv_1}{dt} = \frac{dv_2}{dt}$$

da cui si ricava il sistema finale:

$$\begin{cases} \frac{dv_1}{dt} = -\frac{1}{RC}(v_1 + v_2) + \frac{1}{RC}u \\ \frac{dv_2}{dt} = -\frac{1}{RC}(v_1 + v_2) + \frac{1}{RC}u \end{cases}$$

con matrici  $A$  e  $B$  (la  $C$  non ci è immediatamente di interesse, e dipenderà comunque dalla variabile che desideriamo osservare):

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{RC} & -\frac{1}{RC} \\ -\frac{1}{RC} & -\frac{1}{RC} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \frac{1}{RC} \\ \frac{1}{RC} \end{pmatrix}$$

Possiamo quindi calcolare la matrice  $\mathcal{M}_{\mathcal{R}}$ :

$$\mathcal{M}_{\mathcal{R}} = \begin{pmatrix} B & AB \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{RC} & -\frac{2}{R^2C^2} \\ \frac{1}{RC} & -\frac{2}{R^2C^2} \end{pmatrix}$$

che ha chiaramente  $\text{rank}(\mathcal{M}_{\mathcal{R}}) = 1$  (righe linearmente dipendenti), cioè il sistema non è completamente raggiungibile.

In particolare, prendiamo la matrice di trasformazione  $T_r$ :

$$T_r = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad T_r^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

da cui la trasformazione in  $\hat{A}$ :

$$\hat{A} = T_r A T_r^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{RC} & -\frac{1}{RC} \\ -\frac{1}{RC} & -\frac{1}{RC} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{RC} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e in  $\hat{B}$ :

$$\hat{B} = T_r B = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{RC} \\ \frac{1}{RC} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{RC} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Si ricava quindi il sistema:

$$\begin{cases} \hat{x}'_1 = -\frac{1}{RC}(2\hat{x}_1 - u) \\ \hat{x}'_2 = 0 \end{cases}$$

Vediamo che la variabile  $x_2$  ha derivata nulla indipendentemente dall'ingresso, ergo uno stato  $x_2 \neq x_2(0)$  è impossibile da raggiungere.

Notiamo infine che questa è la stessa trasformazione che avremmo potuto ottenere, ad esempio, imponendo  $\hat{x}_2 = v_1 - v_2$ . Si sarebbe infatti passati dal sistema:

$$\begin{cases} x'_1 = -\frac{1}{RC}v_1 - \frac{1}{RC}v_2 + \frac{1}{RC}u \\ x'_2 = -\frac{1}{RC}v_1 - \frac{1}{RC}v_2 + \frac{1}{RC}u \end{cases}, \quad x_1 = v_1, \quad x_2 = v_2$$

al sistema:

$$\begin{cases} x'_1 = -\frac{2}{RC}v_1 + \frac{1}{RC}u \\ x'_2 = 0 \end{cases}, \quad x_1 = v_1, \quad x_2 = v_1 - v_2$$

che è esattamente lo stesso di prima.

Dal punto di vista fisico, abbiamo che è semplicemente impossibile variare la tensione  $u$  in modo da ottenere cadute di potenziale diverse sui due capacitori, entrambi con capacità  $C$ . L'unico modo per ottenere tale situazione sarebbe quello di rendere variabile almeno uno dei capacitori (vedi i vecchi sintonizzatori radio), o variare direttamente la topologia del circuito.



### 7.0.3 Conclusioni sulla raggiungibilità

Abbiamo quindi che, per sistemi LTI, la raggiungibilità corrisponde con la controllabilità (portare il sistema da uno stato qualsiasi all'origine). Se la parte non controllabile di un sistema è asintoticamente stabile (cioè ha parte reale degli autovalori  $< 0$  il sistema si dice **stabilizzante**). Per un sistema completamente controllabile invece esiste sempre almeno un ingresso che permette di spostarsi da uno stato  $x_a$  a uno stato  $x_b$ .

### 7.1 Osservabilità

Vediamo quindi l'ultima proprietà strutturale dei sistemi dinamici: quella di **osservabilità**. Questa dipenderà dalle relazioni fra stato e uscita, e quindi dalle matrici  $A$  e  $C$ .

Diamo innanzitutto la definizione:

#### Definizione 7.1: Osservabilità

Preso il sistema dinamico di ordine  $n$ , con  $m$  ingressi e  $p$  uscite:

$$\begin{cases} x' = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}$$

allora uno stato  $\bar{x} \neq 0$  si dice non osservabile se, qualunque sia  $\bar{t} > 0$  finito, detto  $\bar{y}_l(t)$  su  $t \geq 0$  il movimento libero dell'uscita generato da  $\bar{x}$ , risulta  $\bar{y}_l(t) = 0$  per  $0 \leq t \leq \bar{t}$ .

Come vediamo, l'osservabilità ci dà un'indicazione della possibilità di "vedere" la presenza di un certo stato in un certo sistema controllandone l'uscita.

#### 7.1.1 Completa osservabilità

Abbiamo quindi che uno stato iniziale  $x$  si dice osservabile se è possibile determinare  $x$  sulla base della misura delle uscite  $y$ . In particolare, un sistema privo di stati non osservabili (cioè un sistema dove tutti gli stati sono osservabili) si dice **completamente osservabile**.

Si può verificare se un sistema è completamente osservabile sfruttando la matrice (di osservabilità):

$$\mathcal{M}_O = \begin{pmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \dots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix}$$

e verificando se:

$$\text{rank}(\mathcal{M}_O) = n$$

Anche l'osservabilità divide gli stati in una parte osservabile e in una parte non osservabile:

$$\hat{x} = \begin{pmatrix} \hat{x}_o \\ \hat{x}_{no} \end{pmatrix}$$

sfruttando la matrice  $T_o$ :

$$x' = Ax + Bu, \quad \hat{x} = T_o x \implies \hat{x}' = \hat{A} \hat{x}$$

$$y = Cx, \quad \hat{x} = T_o x \implies y = \hat{C}\hat{x}$$

con:

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} \hat{A} & 0 \\ \hat{A}_{ba} & \hat{A}_b \end{pmatrix}, \quad \hat{C} = (\hat{C}_a \quad 0)$$

con  $\hat{A}_a \in \mathbb{R}^{n_o \times n_o}$  e  $\hat{C}_a \in \mathbb{R}^{p \times n_o}$ , e con  $n_o = \text{rank}(\mathcal{M}_O)$ ,  $n_o < n$ .

Svolgendo le moltiplicazioni si avrà che:

$$\begin{cases} \hat{x}'_o = \hat{A}_a \hat{x}_o \\ \hat{x}'_{no} = \hat{A}_{ba} \hat{x}_o + \hat{A}_b \hat{x}_{no} \\ y = \hat{C}_a \hat{x}_{no} \end{cases}$$

### 7.1.2 Ricavare la matrice $T_o$

Per ricavare la matrice di trasformazione  $T_o$  dovremo scegliere  $n - n_o$  vettori  $\xi_i$  linearmente indipendenti tali che:

$$\mathcal{M}_O \xi_i = 0, \quad \text{span}(\{\xi_i\}) = x_{no}$$

tali che compongono una base del  $\ker(\mathcal{M}_O)$ , ovvero ogni vettore rappresenta uno stato non osservabile.

Si selezionano poi  $n_o$  vettori linearmente indipendenti ad arbitrio per completare la matrice, tali che:

$$\det(T_o^{-1}) \neq 0$$

cioè  $T_o$  è invertibile.

### 7.1.3 Esempio: osservabilità di una massa con attrito

Prendiamo l'esempio di una massa soggetta ad attrito dipendente dalla velocità:

$$\begin{cases} x'_1 = -\frac{c}{m}x_1 + \frac{1}{m}u \\ x'_2 = x_1 \\ y = x_1 \end{cases}$$

dove prendiamo  $x_1$  come velocità e  $x_2$  posizione (contro ogni aspettativa, perchè qui ci piace essere imprevedibili).

Le matrici  $A$  e  $C$  saranno allora:

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{c}{m} & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$$

e la matrice di osservabilità sarà:

$$\mathcal{M}_O = \begin{pmatrix} C \\ CA \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{c}{m} & 0 \end{pmatrix}$$

che con le righe linearmente dipendenti dà  $\text{rank}(\mathcal{M}_O) = 1$ , cioè il sistema non è completamente osservabile (questo sarebbe risultato chiaro anche guardando la definizione di  $y$ , dove si ha solo lo stato  $x_1$  e nessuna informazione riguardo a  $x_2$ ).

### 7.1.4 Esempio: osservabilità della velocità di crociera

Riprendiamo nuovamente l'esempio 3.0.1 (linearizzazione 3.1.2), e studiamone, stavolta, l'osservabilità. Ricordiamo ancora che il sistema era:

$$\begin{cases} x' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{\beta}{m} \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \frac{\gamma}{m} & -g \end{pmatrix} u \\ y = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} x \end{cases}$$

Ricaviamo quindi la matrice  $\mathcal{M}_O$ :

$$\mathcal{M}_O = \begin{pmatrix} C \\ CA \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{\beta}{m} \end{pmatrix}$$

Vediamo subito che le due righe della matrice sono linearmente dipendenti, ergo  $\text{rank}(\mathcal{M}_O) = 1$  e il sistema non è completamente osservabile. Nel caso particolare dell'automobile, avremo che sarà impossibile ricostruire la posizione iniziale conoscendo solo la velocità.

## 7.2 Scomposizione canonica

Un sistema può essere sia non completamente osservabile che non completamente raggiungibile. Esiste una scomposizione che porta il sistema in una forma che ne evidenzia tutte queste caratteristiche, detta **forma canonica** (*forma canonica di Kalman*), solitamente indicata con  $T_k$ .

Vogliamo quindi la trasformazione:

$$\hat{x} = T_k x \rightarrow \begin{cases} \hat{x}' = \hat{A}\hat{x} + \hat{B}u \\ y = \hat{C}\hat{x} + \hat{D}u \end{cases}$$

che prende la forma:

$$\begin{cases} \hat{x}' = \begin{pmatrix} \hat{A}_a & \hat{A}_{ab} & \hat{A}_{ac} & \hat{A}_{ad} \\ 0 & \hat{A}_b & 0 & \hat{A}_{bd} \\ 0 & 0 & \hat{A}_c & \hat{A}_{cd} \\ 0 & 0 & 0 & \hat{A}_d \end{pmatrix} \hat{x} + \begin{pmatrix} \hat{B}_a \\ \hat{B}_b \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} u \\ y = \begin{pmatrix} 0 & \hat{C}_b & 0 & \hat{C}_d \end{pmatrix} \hat{x} \end{cases}$$

con:

$$\hat{x} = \begin{pmatrix} \hat{x}_a \\ \hat{x}_b \\ \hat{x}_c \\ \hat{x}_d \end{pmatrix}$$

dove:

- $\hat{x}_a$  rappresenta la parte **raggiungibile e non osservabile**;
- $\hat{x}_b$  rappresenta la parte **raggiungibile e osservabile**;
- $\hat{x}_c$  rappresenta la parte **non raggiungibile e non osservabile**;
- $\hat{x}_d$  rappresenta la parte **non raggiungibile e osservabile**;

Notiamo che gli autovalori della matrice triangolare a blocchi  $A$  sono gli stessi della matrice  $A$  originale (li ricaviamo dalla diagonale  $\hat{A}_a, \hat{A}_b, \hat{A}_c, \hat{A}_d$ ), ergo queste sono simili, anche se siamo riusciti ad isolare ogni parte di interesse.

## 8 Lezione del 12-03-25

### 8.1 Forma minima

Abbiamo studiato finora sistemi modellizzati attraverso *variabili di stato*, espressi come:

$$\begin{cases} x' = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}$$

Di questi, abbiamo che:

- La **stabilità** dipende da  $A$ , e in particolare dai suoi autovalori;
- La **raggiungibilità** dipende da  $A$  e  $B$ , e in particolare dal rango della matrice  $\mathcal{M}_R$  che se ne ricava. Abbiamo visto che le variabili non raggiungibili possono essere esplicitate attraverso la matrice di trasformazione  $T_r$ ;
- L'**osservabilità** dipende da  $A$  e  $C$ , e in particolare dal rango della matrice  $\mathcal{M}_O$  che se ne ricava. Anche qui, abbiamo visto che le variabili non osservabili possono essere esplicitate attraverso la matrice di trasformazione  $T_o$ .

Infine, avevamo detto che un sistema può essere stabile, raggiungibile e osservabile, nessuna di queste o una loro combinazione. Per evidenziare queste caratteristiche avevamo introdotto la **forma canonica** di Kalman.

Ripartiamo da qui per introdurre i sistemi in **forma minima**:

#### Definizione 8.1: Forma minima

Un sistema si dice in forma minima se è completamente osservabile e completamente raggiungibile.

Questo significa che non è possibile usare un numero di variabili di stato minore del suo ordine per descrivere la relazione ingresso-uscita (movimento forzato).

Le parti non raggiungibili e non osservabili non rappresentano quindi questa relazione, anche se possono essere comunque importanti per lo studio del movimento libero (ad esempio, per la stabilità).

### 8.2 Metodi di ispezione diretta

Iniziamo a vedere i metodi di **ispezione diretta** per raggiungibilità e osservabilità. Questi sono applicabili in casi particolari dove la struttura delle matrici  $A$  e  $B$  ci permette di capire direttamente la raggiungibilità del sistema.

#### 8.2.1 Ispezione diretta di raggiungibilità

Iniziamo col metodo di ispezione diretta di raggiungibilità, presentando prima il caso SISO con matrici  $A$  diagonali e generalizzandolo a sistemi MIMO con matrici  $A$  arbitrarie.

- **Caso SISO diagonale:** poniamo che il sistema sia a ingresso e uscita singola, e la matrice  $A$  sia diagonale, cioè:

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ & \dots & \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}$$

In questo caso  $\mathcal{M}_{\mathcal{R}}$  sarà:

$$\mathcal{M}_{\mathcal{R}} = \begin{pmatrix} b_1 & \lambda_1 b_1 & \dots & \lambda_1^{n-1} b_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_n & \lambda_n b_n & \dots & \lambda_n^{n-1} b_n \end{pmatrix}$$

cioè la condizione di  $\text{rank}(\mathcal{M}_{\mathcal{R}}) = n$  sarà  $B$  a elementi non nulli e  $\lambda_i$  distinti.

Possiamo interpretare questo caso come quello dove ogni variabile di stato  $x_i$  è indipendente dalle altre: in questo ogni dimensione dello spazio di stato rappresenterà effettivamente un sistema a sé, e quello che vorremo sarà che i  $\lambda_i$  della risposta di ogni sottosistema siano distinti (in modo da poterli distinguere), e che l'ingresso arrivi ad ogni sottosistema con un  $b_i \neq 0$ , cioè la variabile  $i$ -esima possa effettivamente esserne influenzata.

- **Caso MIMO in forma di Jordan:** cerchiamo di generalizzare quanto visto per il caso SISO a sistemi a più variabili, con matrici  $A$  non necessariamente diagonali.

Sfrutteremo adesso il teorema:

**Teorema 8.1: Lemma di Popov-Belevitch-Hautus (PBH) ragg.**

Il sistema dinamico LTI  $x' = Ax + Bu$  è completamente raggiungibile se e solo se  $\text{rank}(\lambda I - A \mid B) = n, \forall \lambda \in \mathbb{C}$ .

La dimensione della matrice ottenuta sarà  $n \times (n+m)$ , in quanto sia  $A$  che  $B$  hanno  $n$  righe,  $A$  ha  $n$  colonne e  $B$  ne ha  $m$ .

Abbiamo quindi che con  $\lambda$  non autovalore, la condizione è sempre verificata (in quanto  $\det(\lambda I - A) \neq 0$ , altrimenti si viola la definizione di autovalore). Nel caso in cui invece  $\lambda$  è autovalore, la condizione deve essere verificata dall'aggiunta di  $B$  (in quanto  $\det(\lambda I - A) < n$ ).

Per dimostrare questo teorema assumiamo che  $\lambda_i$  tale per cui  $\det(\lambda_i I - A \mid B) < n$ . Allora  $\exists q \neq 0$  tale che:

$$q^T(\lambda_i I - A \mid B) = 0$$

cioè  $q \in \ker(\lambda_i I - A \mid B)$  nullo sinistro (si pensi alla definizione di indipendenza lineare). Da questo si può dividere il prodotto in:

$$q^T(\lambda_i I - A) = 0, \quad q^T B = 0$$

Dalla prima, si ha, moltiplicando per  $B$ :

$$q^T \lambda_i = q^T A \implies q^T AB = \lambda_i q^T B = 0$$

quindi  $q^T AB = 0$ . Potremo moltiplicare, anziché per  $B$ , anche per  $AB, A^2B$ , ecc... e trovare sempre  $q^T A^j B = 0$ , e quindi:

$$q^T \begin{pmatrix} B & AB & \dots & A^{n-1}B \end{pmatrix} = 0$$

cioè la matrice di raggiungibilità  $\mathcal{M}_{\mathcal{R}}$  non ha rango massimo e il sistema non è completamente raggiungibile.  $\square$

Abbiamo quindi che nel caso generico MIMO, la matrice  $A$  è in forma di Jordan con  $p$  blocchi ( $p \neq$  numero di uscite) di dimensioni  $m_i$ , cioè:

$$A = \begin{pmatrix} \text{blocco}_1 & \dots & 0 \\ & \dots & \\ 0 & \dots & \text{blocco}_p \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} \\ \dots \\ b_{1m_1} \\ \dots \\ b_{p1} \\ \dots \\ b_{pm_1} \end{pmatrix}$$

con:

$$\text{blocco}_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & \dots & 0 \\ & \dots & \\ 0 & \dots & \lambda_i \end{pmatrix}$$

Se il sistema fosse SISO, la molteplicità geometrica degli autovalori sarebbe uguale a 1, e  $B$  dovrebbe avere tanti elementi diversi da zero almeno quanti gli autovalori distinti in  $A$ . Di contro, un sistema con  $\mu$  miniblocchi associati ad un unico autovalore  $\lambda$  può essere raggiungibile solo se ha almeno  $\mu$  ingressi (elementi  $\neq 0$  di  $B$ ).

### 8.2.2 Ispezione diretta di osservabilità

Esiste una variante del lemma PBH per l'osservabilità:

#### Teorema 8.2: Lemma di Popov-Belevitch-Hautus (PBH) oss.

Il sistema dinamico LTI  $x' = Ax + Bu$  è completamente osservabile se e solo se:

$$\text{rank} \begin{pmatrix} \lambda I - A \\ C \end{pmatrix} = n, \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}$$

- **Caso MIMO in forma di Jordan:** riprendiamo direttamente il caso MIMO. Stavolta le matrici saranno:

$$A = \begin{pmatrix} \text{blocco}_1 & \dots & 0 \\ & \dots & \\ 0 & \dots & \text{blocco}_p \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1m_1} & | & \dots & | & b_{p1} & \dots & b_{pm_1} \end{pmatrix}$$

con:

$$\text{blocco}_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & \dots & 0 \\ & \dots & \\ 0 & \dots & \lambda_i \end{pmatrix}$$

Vorremmo imporre le stesse condizioni di prima, cioè per  $\mu$  miniblocchi associati ad un unico autovalore  $\lambda$  vogliamo almeno  $\mu$  uscite (elementi  $\neq 0$  di  $C$ ).

### 8.3 Funzione di trasferimento

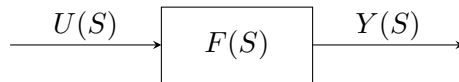
Introduciamo adesso dei metodi che evitano di sfruttare direttamente le variabili di stato per rappresentare sistemi dinamici. Utilizziamo a questo scopo la **funzione di trasferimento**.

Si noti che è sempre possibile passare dalla forma a variabili di stato alla forma a funzione di trasferimento, cioè queste sono intercambiabili e differiscono solo per la semplicità dei calcoli.

La funzione di trasferimento  $F$  di un sistema dinamico nella variabile  $s$  è il **rapporto** fra l'uscita  $Y$  e l'ingresso  $U$ :

$$F(s) = \frac{\text{uscita}}{\text{ingresso}} = \frac{Y(s)}{U(s)}$$

Possiamo rappresentare anche il diagramma a blocchi:



Questo diagramma rappresenta in particolare il sistema rappresentato dalla funzione  $F(S)$ , posto in **catena aperta**. Vedremo fra poco sistemi dove la variabile di uscita  $Y(S)$  è chiusa in retroazione sulla variabile di ingresso  $U(S)$ , cioè sistemi in **catena chiusa**.

## 8.4 Controllo in feedback

Vediamo quindi nel dettaglio il modello di controllo a catena chiusa più popolare: quello del **controllo in feedback**, o *controllo in retroazione*.

Il diagramma a blocchi avrà in questo caso l'aspetto:



L'idea fondamentale è che il sensore *rileva* l'effetto del controllo sull'impianto, e quindi la variabile di uscita, e lo usa per correggere (tramite il *feedback*) il controllo stesso.

## 9 Lezione del 18-03-25

Abbiamo introdotto alla scorsa lezione il modello di *controllo in feedback*. Rivediamone le parti:

- **Impianto:** il sistema che ci interessa controllare, cioè quello che finora avevamo modellizzato in variabili di stato come:

$$\begin{cases} x' = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}$$

Notiamo di aver introdotto (e che approfondiremo) come modellizzazioni simili si possono fare col modello a funzione di trasferimento;

- **Controllore:** l'elemento che confronta ingresso e segnale di *feedback*, in modo da ricavarne dalla differenza (*errore*) un controllo;

- **Sensore:** l'elemento che rileva gli effetti, a monte dell'applicazione dei disturbi, dell'impianto controllato generando il segnale di feedback.

Notiamo come i disturbi vengono messi in *uscita* all'impianto, cioè si prende come uscita finale  $y$ , detta  $\bar{y}$  l'uscita modellizzata dell'impianto, sarà:

$$y = \bar{y} + w$$

con  $w$  disturbi.

Notiamo che nessuno ci nega di prendere un disturbo a livello di ingresso: in ogni caso, però, possiamo modellizzare tutti i disturbi come "cumulativi" e presi alla fine della catena ingresso-controllore-impianto-uscita (cioè appena prima dell'uscita).

### 9.0.1 Esempi di sistemi in feedback

Si possono fare diversi esempi di sistemi governati da controllori in feedback, in svariati ambiti dell'industria, dei trasporti o della vita quotidiana.

- Un caso che abbiamo già visto è quello del mantenimento del livello di un liquido in un serbatoio attraverso un **galleggiante**: che agisca su una valvola o faccia da ingresso a un controllore elettronico, il galleggiante rappresenta infatti un vero e proprio sensore, che genera un feedback su cui il controllore si basa per ricavare un segnale di controllo (azionare una valvola);
- I **termostati**, sia meccanici (a barrette di metallo deformate dalla temperatura) che elettronici (a termometro e controllore elettronico), rappresentano sistemi con feedback: il termometro stesso rappresenta la variabile di feedback, che viene usata per far "combaciare" l'uscita del sistema (la temperatura) ad un certo segnale di riferimento;
- I sistemi di **cruise control** nelle moderne automobili rappresentano ancora sistemi con feedback: il sensore che determina il valore di velocità riportato sul tachimetro viene infatti usato anche per fare da segnale di feedback per un controllore, che lo confronta con un segnale di riferimento per realizzare un controllo per l'acceleratore.
- Riprendendo l'argomento del capoverso precedente, un intero sistema di controllo per la **guida autonoma** può essere rappresentato da un sistema con feedback. La sezione del cruise control vista sopra potrebbe infatti rappresentare la parte *longitudinale* del controllo (azione sull'acceleratore), mentre un sistema simile (magari basato su accelerometri o altri sensori di rotazione e accelerazione laterale) può rappresentare la parte *laterale* del controllo (azione sul volante).

Notiamo come un sistema di questo tipo (nella forma più semplice, a 2 controlli) è MIMO: in questo caso il modello che abbiamo presentato adotta l'approccio di separare le parti MIMO in più sistemi SISO. Il più spesso possibile si vorranno infatti eliminare le interdipendenze fra più parti di un solo sistema MIMO, in modo da ricavare diversi sistemi SISO tra di loro indipendenti, di più facile gestione.

- I sistemi di gestione **bancaria** possono darci un esempio di come i controlli possono applicarsi a contesti non solo industriali, meccanici o elettronici. Infatti, posto un certo obiettivo economico proposto, le operazioni di manager e funzionari



verranno influenzate dagli indici e dai risultati economici correnti della banca, a formare quello che è effettivamente un ciclo di controllo in feedback.

Sistemi di questo tipo si ritrovano in più enti economici, commerciali e politici, nell'ottica della gestione di sistemi arbitrariamente complessi. Si pensi ancora al procedimento che potrebbe adottare l'agenzia delle entrate in modo da ottenere le entrate nazionali proposte previa misura del PIL nazionale e altri indicatori economici, o ancora dei cicli che si possono formare negli organi legislativi semplicemente confrontando gli obiettivi posti con i risultati effettivamente ricavati dai tribunali/dal mondo reale, ecc...

## 9.1 Trasformata di Laplace

Introduciamo una *trasformata integrale*, detta **trasformata di Laplace**, che ci sarà utile a risolvere equazioni differenziali:

### Definizione 9.1: Trasformata di Laplace

Definiamo la trasformata di Laplace di una funzione  $f(t)$ , definita per  $t \geq 0$  e L-trasformabile, come la funzione nella variabile  $s = \sigma + i\omega$ :

$$\mathcal{L}[f](s) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-st} dt$$

La definizione di L-trasformabilità verrà data fra poco.

Notiamo che in questi appunti si è deciso mantenere separate le definizioni di *funzione trasformata di Laplace* ricavata da una funzione in dominio tempo, e *trasformazione* che porta una funzione in dominio tempo alla sua trasformata di Laplace. Lo stesso discorso vale per l'antitrasformazione.

Le trasformate integrali tornano utili in diversi campi dell'ingegneria. Ricordiamo infatti, oltre alla trasformata di Laplace, la *trasformata di Fourier* e la *trasformata Zeta*.

L'idea fondamentale delle trasformate integrali è quella di portare il problema dal **dominio tempo**, cioè espresso attraverso il linguaggio delle *equazioni differenziali*, a un dominio diverso (che per noi sarà il **dominio s** o il *dominio di Laplace*), che esprime lo stesso problema attraverso il linguaggio delle *equazioni algebriche*.

Visto che le equazioni algebriche sono di più facile risoluzione rispetto alle equazioni differenziali, basterà trovare la soluzione in tale dominio e ricondursi nuovamente al dominio tempo, per trovare la soluzione al problema iniziale.

Le funzioni particolari che ci permetteranno di passare da un dominio all'altro saranno, a punto, la **trasformazione** e la (ben più complessa) **antitrasformazione** di Laplace.

### 9.1.1 Numeri complessi

Notiamo che l'argomento della trasformata di Laplace ( $s = \sigma + i\omega$ ) appartiene al campo complesso  $\mathbb{C}$ , e facciamo un breve ripasso sui numeri complessi.

Ricordiamo di avere a disposizione due forme, dette **cartesiana** e **polare**:

$$s = \sigma + j\omega \text{ (cartesiana)}, \quad s = \rho e^{j\phi} \text{ (polare)}$$

Note le formule di trasformazione:

$$\begin{aligned} \sigma &= \rho \cos(\phi), & \omega &= \rho \sin(\phi) \\ \rho &= \sqrt{\sigma^2 + \omega^2}, & \phi &= \text{atan2}(\omega, \sigma) \end{aligned}$$

### 9.1.2 Trasformazione di Laplace

Possiamo quindi definire la trasformazione di Laplace, che è un'applicazione, come segue:

#### Definizione 9.2: Trasformazione di Laplace

Chiamiamo trasformazione di Laplace l'applicazione  $\mathcal{L}\{f(t)\} : f(t) \rightarrow F(s)$  definita come:

$$f(t) \rightarrow^{\mathcal{L}} = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-st} dt = F(s)$$

per ogni  $f(t)$  definita in  $t \geq 0$  e L-trasformabile.

cioè, semplicemente l'applicazione che porta una  $f(t)$  in dominio tempo alla sua trasformata di Laplace  $F(s)$  nel dominio di Laplace (definizione 9.1).

### 9.1.3 L-trasformabilità

Facciamo alcuni chiarimenti sulla L-trasformabilità (che abbiamo assunto come ipotesi). Abbiamo infatti che, oltre alla condizione di appartenenza di  $t$  a  $\mathbb{R}^+$ , la trasformata di Laplace richiede anche alcune condizioni riguardo a  $f(t)$ :

#### Definizione 9.3: L-trasformabilità

Una funzione  $f(t)$  è L-trasformabile, cioè trasformabile secondo Laplace, se rispetta le condizioni:

- $f(t)$  è **continua a tratti**, cioè contiene solo discontinuità del prim'ordine o eliminabili;
- $f(t)$  è di **ordine esponenziale**, cioè rispetta:

$$|f(t)e^{-\alpha t}| \leq M$$

per qualche  $M, \alpha \in \mathbb{R}^+$ .

### 9.1.4 Ascissa di convergenza

Notiamo che l'ultima condizione di L-trasformabilità non serve ad altro che a verificare la definizione dell'integrale:

$$\int_0^{+\infty} |f(t)e^{-st}| dt < \infty, \quad \forall s \in I$$

Allora si verifica subito che se l'integrale converge per un certo  $s_0 \in \mathbb{C}$  allora converge per tutti gli  $\text{Re}(s) > \text{Re}(s_0)$ , poiché:

$$|e^{-sx}| = e^{-\text{Re}(s)x}$$

e la parte complessa darà solo termini oscillanti.

Chiamiamo allora **ascissa di convergenza** il valore minimo della parte reale  $\sigma$  per cui l'integrale della trasformata di Laplace converge, cioè:

#### Definizione 9.4: Ascissa di convergenza

Data una funzione  $f(t)$ , chiamiamo ascissa di convergenza  $\alpha$  il valore:

$$\alpha = \inf \left\{ \sigma \in \mathbb{R} : \int_0^{+\infty} |f(t)e^{-\sigma t}| dt < \infty \right\}$$

Nei casi pratici abbiamo che la trasformata di Laplace esiste quasi sempre. Ad esempio, per le esponenziali  $f(t) = t^n$ , si ha:

$$|t^n| < e^{(n+1)t}$$

che ci permette di modellizzare rampe, parabole, ecc... Per funzioni più complesse possiamo stare tranquilli quando queste sono limitate (seni, coseni, ecc...) o comunque limitate da una qualche esponenziale (ad esempio gli esponenziali stessi).

#### 9.1.5 Trasformata di Laplace sul piano complesso

Notiamo che la trasformata di Laplace è una funzione estendibile in variabile complessa di argomento complesso, cioè si può definire su tutto il piano complesso (tolti i punti di singolarità).

In genere, avremo che le trasformate che calcoliamo si potranno esprimere in forma rapporto di polinomi come:

$$F(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$$

con  $s$  variabile complessa e, come dicevamo,  $F(s) \in \mathbb{C}$ . Questa sarà la forma che, possiamo anticipare, vorremo ricavare e ricondurre ai *fratti semplici* per procedere all'anti-trasformazione.

#### 9.1.6 Singolarità della trasformata di Laplace

Di particolare interesse sono gli zeri della forma  $F(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$  appena introdotta.

Distinguiamo infatti:

- **Zeri** del sistema dinamico: le radici di  $F(s)$ ;
- **Poli** del sistema dinamico: le radici di  $D(s)$ .

#### 9.1.7 Antitrasformata di Laplace

Come avevamo definito la trasformata di Laplace (definizione 9.1), possiamo definire la funzione antitrasformata, detta anche *Integrale di Bromwich*:

#### Definizione 9.5: Integrale di Bromwich

Definiamo integrale di Bromwich l'integrale:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} F(s)e^{st} ds$$

### 9.1.8 Antitrasformazione di Laplace

A questo punto l'applicazione inversa alla trasformazione di Laplace non sarà altro che l'applicazione dell'integrale di Bromwich, cioè:

#### Definizione 9.6: Antitrasformazione di Laplace

Chiamiamo antitrasformazione di Laplace l'applicazione  $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} : F(s) \rightarrow f(t)$  definita come:

$$F(s) \rightarrow \mathcal{L}^{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} F(s)e^{st} ds = f(t)$$

cioè, semplicemente l'applicazione che porta una  $F(S)$  in dominio di Laplace alla sua  $f(t)$  nel dominio tempo data dall'integrale di Bromwich (definizione 9.5).

Abbiamo che questa applicazione è in genere difficile da calcolare, e si preferisce, come accennato prima, ricondurci a fratti semplici la cui antitrasformata è nota (solitamente perché sono facili da ricavare come trasformati di Laplace, cioè agendo direttamente e non attraverso l'inversa).

## 9.2 Trasformate di funzioni elementari

Nota la teoria della trasformata di Laplace, vediamo le trasformate di alcune funzioni elementari.

### 9.2.1 Delta di Dirac

Definiamo l'**impulso**, o *delta di Dirac*, come segue.

#### Definizione 9.7: Delta di Dirac

Chiamiamo delta di Dirac la distribuzione:

$$\delta(t - t_0) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \delta_\epsilon(t - t_0)$$

con  $\delta_\epsilon$ :

$$\delta_\epsilon = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ \frac{1}{\epsilon}, & 0 \leq t \leq \epsilon \\ 0, & t > \epsilon \end{cases}$$

cioè l'impulso unitario centrato su  $t_0$ .

Proprietà importanti della delta di Dirac sono:

#### 1. L'integrale:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - t_0) dt = 1$$

che diamo per scontato, in quanto non sarebbe in verità possibile trovare una funzione analitica che rispetta tale proprietà (da qui si parla di *distribuzione*, non funzione).

## 2. La proprietà di campionamento:

$$f(t)\delta(t - t_0) = f(t_0)\delta(t - t_0)$$

che si dimostra impostando l'integrale (che assomiglia a una convoluzione ma non vi ricade completamente):

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta_{\epsilon}(t - t_0) dt$$

Notiamo subito che l'integrale ha valore  $\neq 0$  solo nell'intervallo  $[t_0, t_0 + \epsilon]$ , e quindi:

$$= \int_{t_0}^{t_0 + \epsilon} \frac{f(t)}{\epsilon} dt = \frac{F(t)}{\epsilon} \Big|_{t_0}^{t_0 + \epsilon} = \frac{F(t_0 + \epsilon) - F(t_0)}{\epsilon}$$

per una qualche primitiva  $F$ . Passando al limite  $\epsilon \rightarrow 0$ , si ha:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{F(t_0 + \epsilon) - F(t_0)}{\epsilon} = f(t_0)$$

Questo significa che vale:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t - t_0) dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t_0)\delta(t - t_0) dt$$

e visto che la delta di Dirac è definita  $\neq 0$  effettivamente in un unico punto in  $\mathbb{R}$ , dovrà valere la tesi.  $\square$

## 3. Il fatto che la delta di Dirac rappresenta l'elemento neutro del prodotto di convoluzione:

$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t - \tau) d\tau$$

presa infatti  $g(t) = \delta(t - t_0)$  si ha:

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\delta_{\epsilon}(\tau - t + t_0) d\tau = \int_{t-t_0}^{t-t_0 + \epsilon} \frac{f(\tau)}{\epsilon} d\tau = \frac{F(t)}{\epsilon} \Big|_{t-t_0}^{t-t_0 + \epsilon} = \frac{F(t - t_0 + \epsilon) - F(t - t_0)}{\epsilon}$$

Passando al limite  $\epsilon \rightarrow 0$ :

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{F(t - t_0 + \epsilon) - F(t - t_0)}{\epsilon} = f(t - t_0)$$

cioè si ottiene la stessa funzione  $f$  scostata di un valore  $t_0$ , lo stesso di cui è scostata  $\sigma$ , da cui la tesi.  $\square$

Diamo quindi la trasformata di Laplace:

### Teorema 9.1: Trasformata di Laplace della delta di Dirac

Per la delta di Dirac  $\delta(t - t_0)$  scostata di  $t_0$ , vale:

$$\mathcal{L}\{\delta(t - t_0)\} = e^{-st_0}$$

La dimostrazione è per calcolo diretto, applicando la proprietà di campionamento:

$$\mathcal{L}\{\delta(t - t_0)\} = \int_0^{+\infty} \delta(t - t_0)e^{-st} dt = \int_0^{+\infty} \delta(t - t_0)e^{-st_0} dt$$

$$= e^{-st_0} \int_0^{+\infty} \delta(t - t_0) dt = e^{-st_0}$$

□

Notiamo che in particolare, con  $t_0 = 0$  si ha:

$$\mathcal{L}\{\delta(t)\} = e^0 = 1$$

### 9.2.2 Gradino di Heaviside

Definiamo la funzione **gradino di Heaviside**.

#### Definizione 9.8: Gradino di Heaviside

Chiamiamo gradino di Heaviside la funzione:

$$H(t - t_0) = \begin{cases} 0, & t_0 < 0 \\ 1, & t_0 \geq 0 \end{cases}$$

Tra le proprietà del gradino di Heaviside, notiamo che la sua derivata è la delta di Dirac, cioè:

$$\frac{d}{dt} H(t - t_0) = \delta(t - t_0)$$

Questo si dà senza dimostrazione, in quanto abbiamo visto trattare la distribuzione di Dirac non è immediato con gli strumenti analitici che abbiamo a disposizione.

Diamo quindi la trasformata di Laplace:

#### Teorema 9.2: Trasformata di Laplace del gradino di Heaviside

Per il gradino di Heaviside  $H(t - t_0)$  scostato di  $t_0$ , vale:

$$\mathcal{L}\{H(t)\} = \frac{e^{-st_0}}{s}$$

La dimostrazione è nuovamente per calcolo diretto, cioè:

$$\mathcal{L}\{H(t)\} = \int_0^{+\infty} H(t - t_0) e^{-st} dt = \int_{t_0}^{+\infty} e^{-st} dt$$

operando il cambio di variabili  $\tau = t - t_0$ , con  $\tau|_{t=t_0} = t_0 - t_0 = 0$ , si ha:

$$= \int_0^{+\infty} e^{-s(\tau+t_0)} d\tau = \int_0^{+\infty} e^{-s\tau} e^{-st_0} d\tau = e^{-st_0} \int_0^{+\infty} e^{-s\tau} d\tau = e^{-st_0} \cdot \left. -\frac{e^{-s\tau}}{s} \right|_0^{+\infty} = \frac{e^{-st_0}}{s}$$

□

Che nuovamente, per un tempo  $t_0 = 0$  dà:

$$\mathcal{L}\{H(t)\} = \frac{e^0}{s} = \frac{1}{s}$$

Notiamo che questa è la seconda volta che incontriamo il termine  $e^{-st_0}$ . Vedremo che questo termine equivale infatti a un **ritardo**  $t_0$ . Inoltre, notiamo come questa forma assomiglia a  $\frac{1}{s}$ , che avevamo chiamato anche termine **integratore** nel dominio di Laplace (esempio 2.1.3).

### 9.2.3 Esponenziale

Vediamo infine la funzione esponenziale:

$$f(t) = H(t)e^{at}$$

dove il termine  $H(t)$  rappresenta il gradino di Heaviside definito nel paragrafo precedente. Avremo che, dalla natura della trasformata di Laplace stessa, la moltiplicazione per il gradino sarà tipica di tutte le funzioni che incontreremo.

La **trasformata di Laplace** sarà allora:

#### Teorema 9.3: Trasformata di Laplace dell'esponenziale

Per un esponenziale troncato dal gradino  $H(t)e^{at}$  vale:

$$\mathcal{L}\{H(t)e^{at}\} = \frac{1}{s-a}$$

La dimostrazione si fa nuovamente per calcolo diretto:

$$\mathcal{L}\{H(t)e^{at}\} = \int_0^{+\infty} e^{at} e^{-st} dt = \int_0^{+\infty} e^{(a-s)t} dt = \left. \frac{e^{(a-s)t}}{a-s} \right|_0^{+\infty} = \frac{1}{s-a}$$

□

Sappiamo quindi come trovare la trasformata (e quindi antitrasformare) la funzione che abbiamo detto descrive tutti i modi dei sistemi dinamici, ammesso non aver ancora visto il comportamento in caso di fenomeni oscillanti (cioè esponenti complessi).

## 10 Lezione del 20-03-25

### 10.1 Proprietà della trasformata di Laplace

Vediamo alcune proprietà della trasformata di Laplace introdotta alla scorsa lezione.

1. **Linearità:** si ha che, prese due trasformate:

$$\begin{cases} \mathcal{L}\{f_1(t)\} = F_1(s), & \text{Re}(s) > a_1 \\ \mathcal{L}\{f_2(t)\} = F_2(s), & \text{Re}(s) > a_2 \end{cases}$$

la loro combinazione lineare è semplicemente la trasformata:

$$\mathcal{L}\{c_1 \cdot f_1(t) + c_2 \cdot f_2(t)\} = c_1 \cdot F_1(s) + c_2 \cdot F_2(s), \quad \text{Re}(s) \geq \max(a_1, a_2)$$

La dimostrazione è banale e deriva dalla linearità dell'operatore integrale sulla base del quale avevamo definito la trasformata stessa.

2. **Traslazione:** abbiamo visto che il termine  $e^{-st_0}$  rappresenta una traslazione temporale, ovvero:

$$\mathcal{L}\{f(t - t_0)\} = e^{-st_0} F(s)$$

Occorre fare una precisazione. Avevamo preso, più o meno informalmente, come ipotesi per la definizione della trasformata di Laplace che  $f$  fosse nulla per  $t \leq 0$ .

Ergo potevamo esprimere equivalentemente qualsiasi funzione di cui si voleva calcolare la trasformata di Laplace come:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \mathcal{L}\{H(t)f(t)\}$$

Allo stesso modo, prendendo la traslazione  $t' \rightarrow t - t_0$ , vorremo assumere che l'argomento della trasformata sia "troncato" come:

$$\mathcal{L}\{f(t - t_0)\} = \mathcal{L}\{H(t - t_0)f(t - t_0)\}$$

Sarà questa la forma che assumeremo per tutte le translate  $f(t - t_0)$  da qui in poi. Dimostriamo quindi la proprietà, ricordando quanto abbiamo appena detto:

$$\mathcal{L}\{f(t - t_0)\} = \int_0^{+\infty} f(t - t_0) \cdot e^{-st} dt = \int_{t_0}^{+\infty} f(t - t_0) \cdot e^{-st} dt$$

da cui operando il cambio di variabile  $\tau = t - t_0$ :

$$= \int_0^{+\infty} f(\tau) \cdot e^{-s(\tau+t_0)} d\tau = e^{-st_0} \int_0^{+\infty} f(\tau) \cdot e^{-s\tau} d\tau = e^{-st_0} F(s)$$

cioè la tesi.  $\square$

3. **Cambio di scala:** prendiamo il "cambio di scala" alla variabile temporale  $f(at)$ . Avremo che il risultato dipenderà dalla L-trasformata di  $f$ , che avevamo chiamato  $F$ , come:

$$\mathcal{L}\{f(at)\} = \frac{1}{a} \cdot F\left(\frac{s}{a}\right)$$

Questo si dimostra applicando la definizione col cambio di variabile:  $\tau = at$ , con  $d\tau = a dt$ :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{f(at)\} &= \int_0^{+\infty} f(at) e^{-st} dt = \int_0^{+\infty} f(\tau) e^{-s\frac{\tau}{a}} \frac{d\tau}{a} \\ &= \frac{1}{a} \int_0^{+\infty} f(\tau) e^{-\frac{s}{a}\tau} d\tau = \frac{1}{a} \cdot F\left(\frac{s}{a}\right) \end{aligned}$$

dove notiamo che la  $a$  divide la variabile  $s$ , non  $t$ .  $\square$

4. **Derivazione in  $s$ :** vale la proprietà rispetto alle derivate su  $s$ :

$$\mathcal{L}\{t \cdot f(t)\} = -\frac{dF(s)}{ds}$$

Questo è immediato calcolando prima il termine destro:

$$\mathcal{L}\{t \cdot f(t)\} = \int_0^{+\infty} t \cdot f(t) e^{-st} dt$$

E svolgendo la derivata a destra:

$$\frac{d}{ds} \int_0^{+\infty} f(t) e^{-st} dt = \int_0^{+\infty} f(t) \frac{d}{ds} e^{-st} dt = - \int_0^{+\infty} t \cdot f(t) e^{-st} dt$$

da cui la tesi.  $\square$



Potremmo quindi notare la regola per la derivazione a catena:

$$\mathcal{L}\{t^n \cdot f(t)\} = (-1)^n \frac{d^n F(s)}{ds^n}$$

data semplicemente dall'applicazione ripetuta della proprietà di derivazione in  $s$ . Vediamo una forma che ci sarà di particolare interesse, che possiamo intendere come una versione generalizzata del gradino (che ricordiamo avere  $\mathcal{L}\{H(t)\} = \frac{1}{s}$ ):

$$\mathcal{L}\left\{\frac{t^k}{k!} \cdot H(t)\right\} = \frac{1}{s^{k+1}}$$

Questo si deriva applicando direttamente la regola di derivazione in  $s$ :

$$\mathcal{L}\{t^k \cdot H(t)\} = (-1)^k \frac{d^k}{ds^k} \left(\frac{1}{s}\right)$$

Notiamo che dalla regola di derivazione dell'inversa si ha l'andamento:

$$\frac{d}{ds} \frac{1}{s} = -\frac{1}{s^2}, \quad \frac{d}{ds} \left(-\frac{1}{s^2}\right) = \frac{2}{s^3}, \quad \dots \quad \frac{d^k}{ds^k} \frac{1}{s} = (-1)^k \frac{k!}{s^{k+1}}$$

dove il termine  $(-1)^n$  che compare si annulla con quello presente nella regola di derivazione in  $s$ . Riarrangiando ( $k!$  si può portare fuori, l'operatore laplaciano  $\mathcal{L}$  è lineare), quindi, si ottiene esattamente la tesi.  $\square$

Un modo alternativo di dimostrare lo stesso risultato è tramite l'applicazione ripetuta della legge di integrazione per parti. Al primo passaggio si ha:

$$\mathcal{L}\left\{\frac{t^k}{k!} \cdot H(t)\right\} = \int_0^{+\infty} \frac{t^k}{k!} e^{-st} dt = t^{k-1} e^{-st} \Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{t^{k-1} e^{-st}}{s} dt$$

dove il termine  $t^{k-1} e^{-st} \Big|_0^{+\infty}$  si annulla. Vediamo quindi che per il grado  $k$  si ripete il procedimento  $k$  volte ottenendo:

$$\rightsquigarrow^k \int_0^{+\infty} \frac{e^{-st}}{s^k} dt = \frac{1}{s^{k+1}}$$

che è nuovamente la tesi.  $\square$

5. **Traslazione in  $s$ :** notiamo infine che vale rispetto alla traslazione su  $s$ :

$$\mathcal{L}\{e^{at} \cdot f(t)\} = F(s - a)$$

questo si dimostra semplicemente calcolando il termine destro:

$$\mathcal{L}\{e^{at} \cdot f(t)\} = \int_0^{+\infty} e^{at} \cdot f(t) e^{-st} dt = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-(s-a)t} dt = F(s - a)$$

da cui la tesi.  $\square$

### 10.1.1 Sinusoide

Usiamo la proprietà di linearità appena trovata (la prima nella lista di proprietà dello scorso paragrafo) per calcolare l'L-trasformata di  $f(t) = H(t) \sin(\omega t)$ .

Ciò che vogliamo dimostrare è il seguente risultato:

#### Teorema 10.1: Trasformata di Laplace del seno

Per una sinusoide  $\sin(\omega t)$  vale:

$$\mathcal{L}\{H(t) \sin(\omega t)\} = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$$

Avremo che, dalla formula di Eulero:

$$\mathcal{L}\{\sin(\omega t)\} = \mathcal{L}\left\{\frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j}\right\}$$

cioè:

$$\frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j} = \frac{\cos(\omega t) + j \sin(\omega t) - \cos(\omega t) + j \sin(\omega t)}{2j} = \frac{2j \sin(\omega t)}{2j} = \sin(\omega t)$$

Potremo allora applicare la linearità:

$$\mathcal{L}\left\{\frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j}\right\} = \frac{1}{2j} \mathcal{L}\{e^{j\omega t}\} - \frac{1}{2j} \mathcal{L}\{e^{-j\omega t}\}$$

da cui si continua con semplici calcoli (attraverso la trasformata dell'esponenziale vista alla scorsa lezione):

$$= \frac{1}{2j} \left( \frac{1}{s - j\omega} - \frac{1}{s + j\omega} \right) = \frac{1}{2j} \left( \frac{2j\omega}{s^2 + \omega^2} \right) = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$$

□

### 10.1.2 Cosinusoide

Valgono considerazioni analoghe per la funzione  $f(t) = H(t) \cos(\omega t)$ .

Ciò che vogliamo dimostrare è il seguente risultato:

#### Teorema 10.2: Trasformata di Laplace del coseno

Per una cosinusoide  $\cos(\omega t)$  vale:

$$\mathcal{L}\{H(t) \cos(\omega t)\} = \frac{s}{s^2 + \omega^2}$$

Avremo che, dalla formula di Eulero:

$$\mathcal{L}\{\cos(\omega t)\} = \mathcal{L}\left\{\frac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2}\right\}$$

con un calcolo simile al precedente.

Potremo allora applicare la linearità:

$$\mathcal{L}\left\{\frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2}\right\} = \frac{1}{2}\mathcal{L}\{e^{j\omega t}\} - \frac{1}{2}\mathcal{L}\{e^{-j\omega t}\}$$

da cui:

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s - j\omega} - \frac{1}{s + j\omega}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{2s}{s^2 + \omega^2}\right) = \frac{s}{s^2 + \omega^2}$$

□

### 10.1.3 Sinusoidi/cosinusoidi con scostamento di fase

Nel caso di scostamento dato da un termine  $\phi$ , cioè  $f(t) = \sin(\omega t + \phi)$ , potremo dire:

#### Teorema 10.3: Trasformata di Laplace del seno con scostamento di fase

Per una senoide scostata di fase  $\phi$ , cioè  $\sin(\omega t + \phi)$ , vale:

$$\mathcal{L}\{\sin(\omega t + \phi)\} = \frac{\omega \cos(\phi) + s \sin(\phi)}{s^2 + \omega^2}$$

Per la dimostrazione, avremo innanzitutto dall'applicazione delle formule di addizione degli angoli:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{\sin(\omega t + \phi)\} &= \mathcal{L}\{\sin(\omega t) \cdot \cos(\phi) + \cos(\omega t) \cdot \sin(\phi)\} \\ &= \cos(\phi) \cdot \mathcal{L}\{\sin(\omega t)\} + \sin(\phi) \cdot \mathcal{L}\{\cos(\omega t)\}\end{aligned}$$

e dalle formule appena trovate sul seno/coseno:

$$= \cos(\phi) \cdot \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} + \sin(\phi) \cdot \frac{s}{s^2 + \omega^2} = \frac{\omega \cos(\phi) + s \sin(\phi)}{s^2 + \omega^2}$$

cioè la tesi.

□

## 10.2 Operazioni integro-differenziali con Laplace

La comodità della trasformata di Laplace è che ci permette di esprimere per via algebrica gli operatori integro-differenziali, nonché il prodotto di convoluzione fra due funzioni.

### 10.2.1 Derivata con Laplace

Si ha che:

#### Teorema 10.4: Derivata con Laplace

Per una certa funzione  $f$ , sotto larghe ipotesi, vale:

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d}{dt}f(t)\right\} = sF(s) - f(0)$$

Questo si dimostra ricordando la formula di integrazione per parti:

$$\int u dv = u \cdot v - \int v du$$

e applicando:

$$\mathcal{L}\left\{\frac{df}{dt}\right\} = \int_0^{+\infty} \frac{df}{dt} \cdot e^{-st} dt = f(t) \cdot e^{-(st)} \Big|_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} -s \cdot f(t) \cdot e^{-st} dt = sF(s) - f(0)$$

che è la tesi.  $\square$

Una nota importante è il valore della funzione in 0. Nel caso di funzioni discontinue (come ad esempio il gradino) si deve infatti scegliere fra  $0^-$  e  $0^+$ , cioè:

$$\mathcal{L}^- \{f(t)\} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^-} \int_{\epsilon}^{+\infty} f(t) e^{-st} dt$$

$$\mathcal{L}^+ \{f(t)\} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{\epsilon}^{+\infty} f(t) e^{-st} dt$$

Varrà:

$$\mathcal{L}^- = \mathcal{L}^+ + \int_{0^-}^{0^+} f(t) e^{-st} dt = \mathcal{L}^+ + a_0$$

dove la costante  $a_0$  rappresenterà gli effetti impulsivi che ci portano al "salto" in 0.

### 10.2.2 Esempio: derivata del gradino

Possiamo usare la formula appena trovata per la derivazione per dimostrare che in qualche modo l'impulso di Dirac rappresenta la derivata del gradino di Heaviside. Notiamo infatti che:

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d}{dt}H(t)\right\} = s \cdot \frac{1}{s} - f(0^-) = 1 = \mathcal{L}(\sigma(t))$$

assunto  $t_0 = 0$  scostando a destra o a sinistra chiaramente comparirà il termine di ritardo  $e^{-st-0}$ .

### 10.2.3 Integrale con Laplace

Si ha che:

#### Teorema 10.5: Integrale con Laplace

Per una certa funzione  $f$ , sotto larghe ipotesi, vale:

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(\tau) d\tau\right\} = \frac{F(s)}{s}$$

Questo si dimostra partendo dalla formula di derivazione, e ponendo:

$$g(t) = \int_0^t f(\tau) d\tau, \quad g(0) = 0$$

da cui:

$$\frac{dg(t)}{dt} = f(t)$$

e quindi:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) = \mathcal{L}\left\{\frac{dg}{dt}\right\} = s \cdot \mathcal{L}\{g(t)\} - g(0) \implies \mathcal{L}\{g(t)\} = \frac{F(s)}{s}$$

da cui la tesi.  $\square$

### 10.2.4 Convoluzione con Laplace

Vediamo infine la convoluzione:

#### Teorema 10.6: Convoluzione con Laplace

Per due funzioni  $f_1, f_2$ , sotto larghe ipotesi e definito un opportuno prodotto di convoluzione, vale:

$$\mathcal{L}\{f_1(t) * f_2(t)\} = F_1(s) \cdot F_2(s)$$

assunto:

$$\begin{cases} \mathcal{L}\{f_1(t)\} = F_1(s) \\ \mathcal{L}\{f_2(t)\} = F_2(s) \end{cases}$$

Per noi il prodotto di convoluzione sarà il solito:

$$f_1(t) * f_2(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau) \cdot f_2(t - \tau) d\tau$$

che sotto le ipotesi di funzioni "tagliate" a 0, come abbiamo assunto, equivale a:

$$= \int_0^t f_1(\tau) \cdot f_2(t - \tau) d\tau = \int_0^{+\infty} f_1(\tau) \cdot f_2(t - \tau) d\tau$$

Potremo allora dire:

$$\mathcal{L}\{f_1(t) * f_2(t)\} = \int_0^{+\infty} \left( \int_0^{+\infty} f_1(\tau) \cdot f_2(t - \tau) d\tau \right) e^{-st} dt$$

Posto  $e^{-st} = e^{-s(t+\tau-\tau)}$  si ha:

$$= \int_0^{+\infty} f_1(\tau) \cdot e^{-st} \left( \int_0^{+\infty} f_2(t - \tau) \cdot e^{-s(t-\tau)} dt \right) d\tau$$

a questo punto posto  $v = t - \tau$  e quindi  $dv = dt$  si ha:

$$= \int_0^{+\infty} f_1(\tau) \cdot e^{-s\tau} \left( \int_{-\tau}^{+\infty} f_2(v) \cdot e^{-sv} dv \right) d\tau$$

che notando la non interdipendenza dei due integrali (il  $-\tau$  a pedice non "prende" nulla con  $f_2$  definita per  $t > 0$ ) si divide in:

$$= \int_0^{+\infty} f_1(\tau) \cdot e^{-s\tau} d\tau \cdot \int_0^{+\infty} f_2(v) \cdot e^{-sv} dv = F_1(s) \cdot F_2(s)$$

da cui la tesi. □

## 11 Lezione del 25-03-25

Proseguiamo con la discussione delle proprietà della trasformata di Laplace.

### 11.0.1 Teorema del valor iniziale

Un utile teorema per il calcolo del valore iniziale di una funzione a partire dal suo sviluppo di Taylor è il seguente:

#### Teorema 11.1: Teorema del valor iniziale

Per una funzione  $g$  con trasformata di Laplace  $G$  vale:

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} (s \cdot G(s))$$

Conosciamo l'espansione di Taylor di una funzione:

$$f(t) = f(t_0) + f'(t_0)(t - t_0) + \dots + \frac{f^{(k)}(t_0)}{k!}(t - t_0)^k$$

che con  $t = 0$  dà:

$$f(t) = f(t_0) + f'(t_0)t + \dots + \frac{f^{(k)}(t_0)}{k!}t^k$$

Notiamo di aver già calcolato la trasformata di Laplace dei vari  $\frac{t^k}{k!}$  come (sezione 10.1, proprietà 4):

$$\mathcal{L} \left\{ \frac{t^k}{k!} \cdot H(t) \right\} = \frac{1}{s^{k+1}}$$

e quindi:

$$G(s) = f(t_0)\frac{1}{s} + f'(t_0)\frac{1}{s^2} \dots + f^{(k)}(t_0)\frac{1}{s^{k+1}}$$

Preso  $s \cdot G(s)$ :

$$s \cdot G(s) = f(t_0) + f'(t_0)\frac{1}{s} \dots + f^{(k)}(t_0)\frac{1}{s^k}$$

varrà allora che:

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} (s \cdot G(s))$$

in quanto solo il termine a coefficiente  $f(t_0)$  non decade a 0. □

Questo è uno dei cosiddetti **legami globali** fra la funzione  $f$  e la sua trasformata di Laplace  $F$ . Possiamo sfruttare questo legame per avere informazioni riguardo al valore iniziale di  $f$ : basterà prendere il limite di  $s \cdot G(s)$  ad infinito.

### 11.0.2 Teorema del valor finale

Possiamo ricavare un risultato simile per il valore finale semplicemente scambiando i punti di limite:

#### Teorema 11.2: Teorema del valor finale

Per una funzione  $f$  con trasformata di Laplace  $G$  vale:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} (s \cdot G(s))$$

Con condizione di validità che  $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t)$  esista finito.

Possiamo dimostrare il risultato partendo dalla trasformata di Laplace della derivata di  $f$ , cioè:

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d}{dt}f(t)\right\} = \int_0^{+\infty} \frac{df}{dt}(t) \cdot e^{-st} dt = sG(s) - f(0)$$

Prendendo il limite per  $s \rightarrow 0$ , si ha:

$$\lim_{s \rightarrow 0} \left[ \int_0^{+\infty} \frac{d}{dt}f(t) \cdot e^{-st} dt \right] = \lim_{s \rightarrow 0} [sG(s) - f(0)]$$

e visto che:

$$\lim_{s \rightarrow 0} \left[ \int_0^{+\infty} \frac{d}{dt}f(t) \cdot e^{-st} dt \right] = \lim_{s \rightarrow 0} \left[ \int_0^{+\infty} \frac{d}{dt}f(t) \right] = \lim_{s \rightarrow 0} [f(t) - f(0)]$$

si ha:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} [f(t) - f(0)] = \lim_{s \rightarrow 0} [sG(s) - f(0)] \implies \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sG(s)$$

che è la tesi.  $\square$

## 11.1 Scomposizione in fratti semplici

Vediamo la parte di teoria che ci facilita l'antitrasformazione delle trasformate di Laplace.

### 11.1.1 Rapporti di polinomi

La maggior parte delle trasformate di Laplace che incontreremo non sono altro che rapporti di polinomi in forma:

$$G(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{N(s)}{(s - s_1)^h (s - s_1)^{h-1} \dots (s - s_1) + R(s)}$$

presi i poli in  $s_1$ , dove gli  $(s - s_1)^{h-i+1}$  sono gli  $h$  poli di molteplicità  $h - i + 1$  in  $s_1$ , e  $R(s)$  rappresenta tutti gli altri poli.

Si potrà allora riscrivere  $G(s)$  come la somma dei residui polari:

$$G(s) = \frac{k_1}{(s - s_1)^h} + \frac{k_2}{(s - s_1)^{h-1}} \dots + \frac{k_h}{(s - s_1)} + T(s)$$

dove  $T(s)$  rappresenta i residui polari dei poli in  $R(s)$ . La speranza è che i singoli termini  $\frac{k_i}{(s - s_1)^{h-i+1}}$  siano facili da antitrasformare (speranza solitamente sodisfatta, visto che danno componenti esponenziali o oscillatorie).

### 11.1.2 Teorema dei residui

Un risultato particolarmente utile per il calcolo dei  $k_i$  è il **teorema dei residui** per poli multipli di molteplicità  $i$ .

#### Teorema 11.3: Teorema dei residui

Il coefficiente del fratto semplice di molteplicità  $h - i + 1$  associato al polo  $s_1$  della trasformata  $G(s)$  è:

$$k_i = \lim_{s \rightarrow s_1} \frac{1}{(i - 1)!} \frac{d^{(i-1)}(s - s_1)^h \cdot G(s)}{ds^{(i-1)}}$$

Riprendendo l'ultima formula dello scorso paragrafo, moltiplicando a sinistra e a destra per  $(s - s_1)^h$  si ottiene:

$$(s - s_1)^h \cdot G(s) = k_1 + k_2(s - s_1) + \dots + k_h(s - s_1)^{h-1} + T(s)(s - s_1)^h$$

Prendendo il limite per  $s \rightarrow s_1$  si ottiene:

$$\lim_{s \rightarrow s_1} ((s - s_1)^h \cdot G(s)) = k_1$$

Derivando nuovamente si ottiene  $k_2$ :

$$\lim_{s \rightarrow s_1} \frac{d}{ds} (s - s_1)^h \cdot G(s) = k_2 + \dots + k_h(h-1)(s - s_1)^{h-2} + hT(s)(s - s_1)^{h-1} = k_2$$

Continuando ad iterare si ottiene quindi:

$$k_i = \lim_{s \rightarrow s_1} \frac{1}{(i-1)!} \frac{d^{(i-1)}(s - s_1)^h \cdot G(s)}{ds^{(i-1)}}$$

che è la tesi. □

### 11.1.3 Esempio: scomposizione con poli multipli

Vediamo un esempio pratico di applicazione. Prendiamo la  $G(s)$ :

$$G(s) = \frac{s+2}{(s+3) \cdot (s+1)^3} = \frac{A}{s+3} + \frac{B}{s+1} + \frac{C}{(s+1)^2} + \frac{D}{(s+1)^3}$$

Dal punto di vista dell'automatica, se prendessimo questo  $G(s)$  come l'uscita  $Y(s)$ , staremmo effettivamente prendendo la risposta all'impulso  $\delta(t)$  in dominio tempo (ricordiamo che  $\delta(t)$  trasforma a 1).

Troviamo quindi i coefficienti dei fratti semplici sfruttando il teorema dei residui:

$$A = \lim_{s \rightarrow -3} (s+3) \cdot G(s) = \lim_{s \rightarrow -3} \frac{s+2}{(s+1)^3} = \frac{1}{8}$$

$$D = \lim_{s \rightarrow -1} (s+1)^3 \cdot G(s) = \lim_{s \rightarrow -1} \frac{s+2}{s+3} = \frac{1}{2}$$

$$C = \lim_{s \rightarrow -1} \frac{d}{ds} (s+1)^2 \cdot G(s) = \lim_{s \rightarrow -1} \frac{(s+3) - (s+2)}{(s+3)^2} = \frac{1}{4}$$

Per la  $B$ , effettuiamo semplicemente la somma:

$$G(s) = \frac{A(s+1)^3 + B(s+3)(s+1)^2 + C(s+1)(s+3) + D(s+3)}{(s+3)(s+1)^3} = \frac{s+2}{(s+3)(s+1)^3}$$

Notiamo che gli unici termini che moltiplicano un  $s^3$  saranno  $A$  e  $B$ , e che un termine  $s^3$  non compare a destra, quindi dovrà essere:

$$A + B = 0 \implies A = -B$$

e quindi:

$$B = -A = -\frac{1}{8}$$



Possiamo quindi riscrivere la  $G(s)$  come:

$$G(s) = \frac{1}{8(s+3)} - \frac{1}{8(s+1)} + \frac{1}{4(s+1)^2} + \frac{1}{2(s+1)^3}$$

da cui l'antitrasformata:

$$g(t) = \frac{1}{8}e^{-3t} - \frac{1}{8}e^{-t} + \frac{1}{4}te^{-t} + \frac{1}{4}t^2e^{-t}$$

ricordando che  $\mathcal{L}\left\{\frac{1}{s^k}\right\} = \frac{t^{k-1}}{(k-1)!}$ , e quindi dal  $k \geq 2$  in poi compaiono termini fattoriali (come ad esempio nel termine di molteplicità 3 di questo esempio).

#### 11.1.4 Esempio: scomposizione con poli complessi coniugati

Vediamo un altro esempio, con la  $G(s)$ :

$$G(s) = \frac{1}{(s^2+1)^2} = \frac{1}{(s+j)^2(s-j)^2} = \frac{A}{s+j} + \frac{A^*}{s-j} + \frac{B}{(s+j)^2} + \frac{B^*}{(s-j)^2}$$

dove notiamo che *i coniugati dei residui sono i residui dei coniugati*. Quest'ultima affermazione merita un attimo di discussione. Riducendoci al caso  $i = h$  (i casi a molteplicità diversa non modificano la situazione in quanto aggiungono solo termini non complessi) si può definire la funzione residuo Res:

$$\text{Res}(G, s_1) = \lim_{s \rightarrow s_1} (s - s_1) \cdot G(s)$$

il coniugato di questa sarà:

$$\begin{aligned} (\text{Res}(G, s_1))^* &= \left( \lim_{s \rightarrow s_1} (s - s_1) \cdot G(s) \right)^* = \lim_{s \rightarrow s_1} (s - s_1)^* G^*(s) \\ &= \lim_{s \rightarrow s_1} (s^* - s_1^*) G(s^*) = \lim_{s \rightarrow s_1^*} (s - s_1^*) G(s) \end{aligned}$$

fatta l'ipotesi (non banale):

$$G(s^*) = G^*(s)$$

Fortunatamente, se rispetta alcune (larghe) ipotesi,  $G$  rispetta tale condizione. Ci possiamo quindi accorgere che quello che abbiamo trovato non è altro che il residuo in  $s_1^*$ , cioè:

$$\text{Res}(G, s_1^*) = \lim_{s \rightarrow s_1^*} (s - s_1^*) \cdot G(s)$$

da cui la tesi. □

Troviamo quindi i residui:

$$A = \lim_{s \rightarrow -j} \frac{d}{ds} (s+j)^2 \cdot G(s) = \lim_{s \rightarrow -j} \frac{d}{ds} \frac{1}{(s-j)^2} = \frac{j}{4}$$

da cui:

$$A^* = -\frac{j}{4}$$

e:

$$B = \lim_{s \rightarrow -j} (s+j)^2 \cdot G(s) = \lim_{s \rightarrow -j} \frac{1}{(s-j)^2} = -\frac{1}{4}$$

da cui:

$$B^* = -\frac{1}{4}$$

Otteniamo quindi:

$$G(s) = \frac{j}{4(s+j)} - \frac{j}{4(s-j)} - \frac{1}{4(s+j)^2} - \frac{1}{4(s-j)^2}$$

da cui l'antitrasformata:

$$g(t) = \frac{j}{4} (e^{-jt} - e^{jt}) \cdot H(t) - \frac{1}{4} t (e^{-jt} + e^{jt}) \cdot H(t) = \frac{1}{2} (\sin(t) - t \cos(t)) \cdot H(t)$$

## 11.2 Risposta all'impulso

I sistemi LTI possono essere caratterizzati attraverso la loro risposta all'impulso, rappresentato dal delta di Dirac  $\delta(t)$ . Cioè si può dire che:

$$u(t) = \delta(t) \implies y(t) = h(t)$$

con  $h(t)$  la risposta del sistema a  $\delta(t)$ , ricordando lo schema:



dove si è notato stato iniziale nullo.

Notiamo che questo metodo fornisce solamente la relazione ingresso/uscita. L'utilità sta nel fatto che la risposta all'impulso può essere usata per determinare come il sistema risponde ad altri ingressi arbitrari ( $u(t)$ ), attraverso la convoluzione:

$$y(t) = \int_0^t h(t-\tau)u(\tau) d\tau = \int_0^t h(\tau)u(t-\tau) d\tau$$

dove  $h(t)$  è sempre la risposta all'impulso di Dirac.

La motivazione di questo procedimento deriva dal fatto che possiamo interpretare la  $u(t)$  in entrata come la sovrapposizione di infiniti impulsi  $\delta(t-\tau)$ :

$$u(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(\tau)\delta(t-\tau) d\tau$$

Allora, sfruttando la linearità del sistema, possiamo interpretare l'uscita  $y(t)$  come la combinazione lineare delle risposte  $h(t-\tau)$  alle singole delta:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(\tau)h(t-\tau) d\tau$$

che gestendo i limiti di integrazione è esattamente quello che abbiamo detto prima.  $\square$

Ricordiamo quindi che nel dominio di Laplace l'integrale di convoluzione è semplice, basta infatti moltiplicare la risposta all'ingresso:

$$Y(s) = U(s) \cdot H(s)$$

### 11.2.1 Risposta all'impulso e funzione di trasferimento

L'antitrasformata della funzione di trasferimento rappresenta la risposta all'impulso unitario, cioè noti  $Y(s)$  e  $U(s)$ :

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} \implies Y(s) = U(s) \cdot G(s)$$

cioè esattamente la definizione di risposta all'impulso unitario.

Inoltre, vale che l'integrale della risposta all'impulso unitario rappresenta la risposta al gradino unitario (sempre per applicazione della linearità dell'operatore integrale, che ricordiamo applicato all'impulso dà il gradino):

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{G(s)}{s} \right\} = \int g(t) dt$$

### 11.3 Diagrammi a blocchi

I diagrammi a blocchi sono una rappresentazione standard e uniforme di sistemi e sottosistemi interconnessi con funzioni di trasferimento. Permettono l'identificazione di ingressi, uscite ed elementi dinamici, e quindi risultano utili concettualmente in fase di progettazione e analisi.

Nel dettaglio, studieremo 3 tipi di schemi particolari, e introdurremo la cosiddetta **algebra dei blocchi**.

#### 11.3.1 Connessione in serie

La connessione in serie avviene quando più sistemi, rappresentati da una particolare funzione di trasferimento, sono connessi fra di loro ingressi ad uscite, o come si vede dal grafico:



Avremo allora che vale:

$$\begin{cases} Y(s) = G_2(s)U(s) \\ U(s) = G_1(s)E(s) \end{cases}$$

da cui:

$$Y(s) = G_2(s)G_1(s)E(s) \implies G(s) = G_1(s)G_2(s)$$

Da cui il risultato generale:

#### Teorema 11.4: Connessione in serie

Sottoinsiemi con funzioni di trasferimento  $G_1(s), \dots, G_n(s)$  posti in serie formano un unico sistema con funzione di trasferimento:

$$G_{eq}(s) = G_1(s) \dots G_n(s)$$

### 11.3.2 Connessione in parallelo

La connessione in parallelo avviene quando più sistemi, rappresentati da una particolare funzione di trasferimento, sono connessi a un unico ingresso e un'unica uscita (in un sommatore), o come si vede dal grafico:



In questo caso varrà:

$$Y(s) = G_1(s)R(s) + G_2(s)R(s) + G_3(s)R(s) = (G_1(s) + G_2(s) + G_3(s)) R(s)$$

da cui:

$$G(s) = G_1(s) + G_2(s) + G_3(s)$$

#### Teorema 11.5: Connessione in parallelo

Sottoinsiemi con funzioni di trasferimento  $G_1(s), \dots, G_n(s)$  posti in parallelo formano un unico sistema con funzione di trasferimento:

$$G_{eq}(s) = G_1(s) + \dots + G_n(s)$$

### 11.3.3 Connessione in retroazione

Vediamo un costrutto tipico dell'automatica: l'**anello di controllo**:



Notiamo che lo schema non rappresenta altro che una descrizione matematica del modello presentato nella sezione 8.4. In questo caso vale:

$$\begin{cases} Y(s) = G_1(s)E(s) \\ E(s) = R(s) - Y_m(s) \\ Y_m(s) = G_2(s)Y(s) \end{cases}$$

da cui:

$$Y(s) = G_1(s) (R(s) - Y_m(s)) = G_1(s) (R(s) - G_2(s)Y(s))$$

allora:

$$Y(s) + G_1(s)G_2(s)Y(s) = G_1(s)R(s) \implies G(s) = \frac{G_1(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)}$$

## 11.4 Raggiungibilità e osservabilità dei sistemi aggregati

Vediamo come si valutano raggiungibilità e osservabilità nell'algebra dei blocchi, guardando ai diagrammi a blocchi.

### 11.4.1 Oss. e ragg. della connessione in serie

Abbiamo che la funzione di trasferimento di una connessione in serie sarà una forma:

$$G(s) = G_1(s)G_2(s) = \frac{N_1(s)N_2(s)}{D_1(s)D_2(s)}$$

dove gli  $N_i$ ,  $D_i$  sono numeratori e denominatori (uscite e ingressi) delle funzioni di trasferimento  $G_i$ .

Possiamo sfruttare questo risultato per fare delle considerazioni su raggiungibilità e osservabilità. In particolare:

- Se  $N_1$  e  $D_2$  hanno radici in comune,  $G$  non è raggiungibile (**cancellazione zero-polo**);
- Se  $N_2$  e  $D_1$  hanno radici in comune,  $G$  non è osservabile (**cancellazione polo-zero**).

### 11.4.2 Oss. e ragg. della connessione in parallelo

Possiamo fare considerazioni simili sulla connessione in parallelo:

$$G(s) = G_1(s) + G_2(s) = \frac{N_1(s)}{D_1(s)} + \frac{N_2(s)}{D_2(s)} = \frac{N_1(s)D_2(s) + N_2(s)D_1(s)}{D_1(s)D_2(s)}$$

In questo caso, se  $D_1$  e  $D_2$  hanno radici comuni  $G$  non è raggiungibile (i poli si sovrappongono).

### 11.4.3 Oss. e ragg. della connessione in retroazione

Infine, vediamo il caso della connessione in retroazione:

$$G(s) = \frac{\frac{N_1(s)}{D_1(s)}}{1 + \frac{N_1(s)}{D_1(s)} \frac{N_2(s)}{D_2(s)}} = \frac{N_1(s)D_2(s)}{D_1(s)D_2(s) + N_1(s)N_2(s)}$$

Abbiamo quindi le regole relative alla connessione serie per il singolo prodotto  $G_1G_2$ . Le cancellazioni possono poi avvenire quando  $N_1$  e  $D_2$  hanno poli comuni.

Notiamo infine che la retroazione *modifica i poli ma non gli zeri* del sistema in catena diretta, dove i **poli** sono le radici del *denominatore* e gli **zeri** sono le radici del *numeratore*.

## 12 Lezione del 26-03-25

### 12.1 Trasformata di Laplace ed equazioni differenziali

Vediamo come applicare la trasformata di Laplace nella risoluzione delle equazioni differenziali ordinarie.

### 12.1.1 Esempio: risposta al gradino di un sistema del primo ordine

Prendiamo quindi un'equazione differenziale del primo ordine e vediamo la trasformazione nel dominio di Laplace:

$$a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 f(t) = b_0 u, \quad y(0) = 0$$

Ricordiamo quindi la trasformata di Laplace della derivata:

$$\mathcal{L}\left\{\frac{dy}{dt}\right\} = sY(s) - y(0) = sY(s)$$

nel nostro caso  $y(0) = 0$ . Otteniamo allora:

$$a_1 \cdot sY(s) + a_0 \cdot Y(s) = b_0 \cdot U(s)$$

Notiamo che quest'equazione non è più differenziale, e possiamo quindi risolverla per via algebrica. Troviamo allora la funzione di trasferimento  $G(s)$  come il rapporto uscita/ingresso:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0}{a_0 + a_1 s} = G(s)$$

L'uscita sarà allora data da:

$$Y(s) = G(s) \cdot U(s)$$

Otteniamo ad esempio la risposta a  $u(t) = H(t)$ , cioè al gradino di trasformata  $U(s) = \frac{1}{s}$ :

$$Y(s) = G(s) \cdot \frac{1}{s} = \frac{b_0}{s(a_0 + a_1 s)}$$

Possiamo applicare il teorema del valor iniziale e del valor finale per verificare, rispettivamente, l'aderenza alle condizioni iniziali ( $y(0) = 0$ ) e l'andamento a  $t \rightarrow +\infty$ :

- Valor iniziale:

$$\lim_{s \rightarrow +\infty} s \cdot Y(s) = 0 = \lim_{t \rightarrow 0} y(t)$$

- Valor finale:

$$\lim_{s \rightarrow 0} s \cdot Y(s) = \frac{b_0}{a_0} = \lim_{t \rightarrow +\infty} y(t)$$

Calcoliamo quindi l'antitrasformata. Rendiamo innanzitutto il polinomio al denominatore *monico*, e scomponiamo:

$$= \frac{\frac{b_0}{a_1}}{s \left( \frac{a_0}{a_1} + s \right)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{\frac{a_0}{a_1} + s}$$

con:

$$A = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{b_0}{s(a_0 + a_1 s)} = \frac{b_0}{a_0}$$

$$B = \lim_{s \rightarrow -\frac{a_0}{a_1}} \left( s + \frac{a_0}{a_1} \right) \frac{\frac{b_0}{a_1}}{s \left( \frac{a_0}{a_1} + s \right)} = -\frac{b_0}{a_0}$$

da cui:

$$Y(s) = \frac{b_0}{a_0 s} - \frac{b_0}{a_0 \left( s + \frac{a_0}{a_1} \right)}$$

e l'antitrasformata:

$$\mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = \frac{b_0}{a_0} \left(1 - e^{-\frac{a_0}{a_1}t}\right) \cdot H(t)$$

Notiamo che questo rispetta le condizioni iniziali, e quindi il teorema del valor iniziale, nonché il limite ad infinito posto dal teorema del valor finale.

### 12.1.2 Parametri significativi dei sistemi del primo ordine

Possiamo dare ad alcune delle grandezze trovate dei nomi significativi dal punto di vista delle grandezze. Ad esempio, introdurremo:

- Il **guadagno statico**  $G(0) = \frac{b_0}{a_0}$ ;
- La **costante tempo**, o *tempo caratteristico*  $T$ , data da  $\frac{1}{T} = \frac{a_0}{a_1}$ .

Questo ci permette di riscrivere la risposta  $y(t)$  come:

$$y(t) = G(0) \left(1 - e^{-\frac{t}{T}}\right)$$

In particolare, avremo che il valore di  $y(T)$  al tempo caratteristico  $T$  sarà approssimativamente il 63.2% del valore del guadagno statico  $G(0)$ .

Potremmo chiederci il perché di una costante apparentemente così arbitraria. Ipotezzando che al tempo  $T$  si raggiunga una qualche frazione del guadagno  $G(0)$ , allora, impostiamo:

$$y(T) = k \cdot G(0) \implies k = \frac{y(T)}{G(0)} = \frac{\frac{b_0}{a_0} \left(1 - e^{-\frac{a_0}{a_1} \cdot \frac{a_1}{a_0}}\right)}{\frac{b_0}{a_0}} = 1 - e^{-1} \approx 0.632$$

che è esattamente la costante di prima. Possiamo generalizzare questo procedimento a multipli arbitrari di  $T$ ,  $\mu T$ :

$$y(\mu T) = k \cdot G(0) \implies k = \frac{y(\mu T)}{G(0)} = \frac{\frac{b_0}{a_0} \left(1 - e^{-\frac{a_0}{a_1} \cdot \mu \frac{a_1}{a_0}}\right)}{\frac{b_0}{a_0}} = 1 - e^{-\mu}$$

ricavando quindi una funzione:

$$p(\mu) = 1 - e^{-\mu}$$

per la percentuale  $p(\mu)$  di guadagno raggiunta al multiplo  $\mu$ -esimo del tempo caratteristico  $T$ . Questa valore ottiene i seguenti valori per un insieme di  $\mu$  selezionato:

$\mu$	$p(\mu)$
0	0
1	63.2%
2	86.5%
3	95%
4	98.2%

che chiaramente tende, ma non raggiunge mai, il 100% nel limite a infinito.

Possiamo quindi tracciare un grafico dell'andamento di  $y(t)$  in Python, evidenziando il valore raggiunto in  $t = T$ :



che risulta effettivamente abbastanza vicino al  $\sim 63.2\%$ .

### 12.1.3 Tempo di assestamento

Un'altro valore di interesse è il **tempo di assestamento** alla percentuale  $i$ , inteso come il tempo che serve a un sistema dinamico per rimanere una fascia  $\pm i\%$  attorno al valore di regime.

Ad esempio, se vogliamo calcolare il tempo di assestamento al  $5\%$ , possiamo dire:

$$y(t) = G(0) \left( 1 - e^{-\frac{t_{ss}}{T}} \right) = 0.95 \cdot G(0) \implies 0.05 = e^{-\frac{t_{ss}}{T}}$$

da cui:

$$t_{ss} = T \cdot \ln(20) \approx 3T$$

cioè 3 volte il tempo caratteristico, come risultava abbastanza chiaro dalla tabella del paragrafo precedente.

## 12.2 Forme di Bode e di Evans

Vediamo un'altra equazione differenziale, dove adesso compare la derivata dell'ingresso:

$$a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = b_1 \frac{du}{dt} + b_0 u$$

Nel dominio di Laplace questa avrà l'aspetto:

$$a_1 \cdot sY(s) + a_0 \cdot Y(s) + b_1 \cdot sU(s) + b_0 \cdot U(s)$$

da cui la funzione di trasferimento:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0 + b_1 s}{a_0 + a_1 s} = G(s)$$

Nota questa funzione di trasferimento, possiamo riportare due forme standard di riscrittura, che ne evidenziano proprietà diverse:



- **Forma di Bode:** evidenzia le costanti tempo del sistema dinamico.

$$G(s) = \frac{b_0}{a_0} \frac{1 + s \cdot \frac{b_1}{b_0}}{1 + s \cdot \frac{a_1}{a_0}} = G(0) \cdot \frac{1 + s \cdot \tau_z}{1 + s \cdot \tau}$$

Notiamo che l'effetto della derivata dell'ingresso è stato quello di portare un termine  $s$  al numeratore, e quindi quello di introdurre uno zero ( $a - \frac{b_0}{b_1}$ ) nella funzione di trasferimento (zero per cui abbiamo introdotto il tempo caratteristico  $\tau_z$ ).

- **Forma di Evans:** evidenzia le singolarità dinamiche del sistema, ovvero poli e zeri:

$$G(s) = \frac{b_1}{a_1} \cdot \frac{s + \frac{b_0}{b_1}}{s + \frac{a_0}{a_1}}$$

Ad esempio, riguardo alla funzione di trasferimento dell'esempio 12.1.1, che ricordiamo essere:

$$G(s) = \frac{\frac{b_0}{a_0}}{s + \frac{a_0}{a_1}}$$

possiamo dire che si trova già in *forma di Evans*, in quanto al denominatore è esplicitato l'unico polo.

Per ricavare la forma di Bode, invece, vorremo esporre il termine tempo caratteristico  $\tau = \frac{a_1}{a_0}$ :

$$G(s) = \frac{b_0}{a_0} \cdot \frac{1}{1 + s \cdot \frac{a_1}{a_0}}$$

che è nuovamente:

$$= G(0) \cdot \frac{1}{1 + s \cdot \tau}$$

## 12.3 Sistemi del secondo ordine

Abbiamo visto finora sistemi del primo ordine risolti tramite la trasformata di Laplace. Vediamo adesso il caso dei sistemi del secondo ordine, che ci permettono di modellizzare una vasta gamma di fenomeni di interesse ingegneristico:

$$a_2 \frac{d^2 y}{dt^2} + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = b_0 u$$

complicando la situazione con condizioni iniziali non nulle ( $y(0), y'(0) \neq 0$ ).

Applichiamo quindi Laplace alle due derivate successive:

$$\mathcal{L} \left\{ \frac{dy}{dt} \right\} = s \cdot Y(s) - y(0)$$

$$\mathcal{L} \left\{ \frac{d^2 y}{dt^2} \right\} = s(Y(s) - y(0)) - y'(0)$$

da cui ricaviamo la forma:

$$a_2 \cdot (s^2 \cdot Y(s) - s \cdot y(0) - y'(0)) + a_1 \cdot (s \cdot Y(s) - y(0)) + a_0 \cdot Y(s) = b_0 \cdot U(s)$$

Esplicitando  $Y(s)$  si otterrà:

$$Y(s) = \frac{a_2 s \cdot y(0) + a_2 \cdot y'(0) + a_1 \cdot y(0)}{a_0 + a_1 s + a_2 s^2} + \frac{b_0}{a_0 + a_1 s + a_2 s^2} U(s)$$

dove riconosciamo che il primo termine rappresenta la **risposta libera** e il secondo la **risposta forzata** del sistema.

Decidiamo di concentrarci sulla risposta forzata, ricavando la funzione di trasferimento:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0}{a_2 s^2 + a_1 s + a_0} = \frac{\frac{b_0}{a_2}}{s^2 + \frac{a_1}{a_2} s + \frac{a_0}{a_2}}$$

da cui i poli al denominatore:

$$p_{1,2} = -\frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_0 a_2}}{2a_2}$$

da cui notiamo che 1) non ci interessa di considerare per i polinomi il polinomio monico, in quanto la loro posizione non cambierà e 2) prendiamo il segno  $-$ , in quanto vogliamo scrivere:

$$G(s) = \frac{\frac{b_0}{a_2}}{(s + p_1)(s + p_2)}$$

Potremo quindi individuare il **determinante**:

$$\Delta = a_1^2 - 4a_0 a_2$$

sulla base del quale distinguiamo 3 situazioni:

- $\Delta > 0$ , si hanno 2 poli **reali distinti**.
- $\Delta = 0$ , si hanno 2 poli **reali coincidenti**;
- $\Delta < 0$ , si hanno 2 poli **complessi coniugati**;

Vediamo nel dettaglio queste situazioni.

### 12.3.1 $\Delta > 0$ , 2 poli reali distinti

Risulta immediato che:

$$G(0) = \frac{b_0}{a_0}$$

e definiamo poi:

$$T_1 = \frac{1}{p_1}, \quad T_2 = \frac{1}{p_2}$$

Vogliamo innanzitutto vedere come portarci nelle forme di Bode e di Evans. Prima di tutto, però, dimostriamo due importanti proprietà:

$$1. \quad p_1 \cdot p_2 = \frac{1}{T_1 \cdot T_2} = \frac{a_0}{a_2}$$

Il lato sinistro è chiaro dalla definizione di  $T_1$  e  $T_2$ . Per dimostrare il lato destro calcoliamo direttamente  $p_1 \cdot p_2$ :

$$\begin{aligned} p_1 \cdot p_2 &= \left( -\frac{-a_1 + \sqrt{a_1^2 - 4a_0 a_2}}{2a_2} \right) \left( -\frac{-a_1 - \sqrt{a_1^2 - 4a_0 a_2}}{2a_2} \right) \\ &= \frac{1}{4a_2^2} (a_1^2 - a_1^2 + 4a_2 a_0) = \frac{a_2 a_0}{a_2^2} = \frac{a_0}{a_2} \end{aligned}$$

□

$$2. p_1 + p_2 = \frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_2} = \frac{a_1}{a_2}$$

Anche qui il lato sinistro è chiaro dalla definizione di  $T_1$  e  $T_2$ . Per dimostrare il lato destro procediamo nuovamente per calcolo diretto:

$$p_1 + p_2 = -\frac{-a_1 + \sqrt{a_1^2 - 4a_0a_2}}{2a_2} + \left( -\frac{-a_1 - \sqrt{a_1^2 - 4a_0a_2}}{2a_2} \right) = \frac{a_1}{2a_2} + \frac{a_1}{2a_2} = \frac{a_1}{a_2}$$

□

Vediamo allora le forme standard:

- **Forma di Bode:** è analoga a quella vista nel caso lineare, cioè:

$$G(s) = G(0) \cdot \frac{1}{(1 + s \cdot T_1)(1 + s \cdot T_2)}$$

la validità di questa si ricava a moltiplicando e dividendo per  $T_1T_2$  e applicando la proprietà 1:

$$= \frac{b_0}{a_0} \cdot \frac{1}{T_1T_2(\frac{1}{T_1} + s)(\frac{1}{T_2} + s)} = \frac{b_0}{a_0} = \frac{b_0}{a_0} \cdot \frac{a_0}{a_2} \cdot \frac{1}{(s + p_1)(s + p_2)} = \frac{\frac{b_0}{a_2}}{(s + p_1)(s + p_2)}$$

che riconosciamo essere la forma che abbiamo usato finora.

- **Forma di Evans:** è la forma a poli espliciti che avevamo già trovato:

$$G(s) = \frac{\frac{b_0}{a_2}}{(s + p_1)(s + p_2)}$$

Vediamo quindi la **risposta al gradino**:

$$Y(s) = G(s) \cdot U(s) = \frac{\frac{b_0}{a_2}}{(s + \frac{1}{T_1})(s + \frac{1}{T_2}) \cdot s} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s + \frac{1}{T_1}} + \frac{C}{s + \frac{1}{T_2}}$$

dove si è adottata questa forma "ibrida" di Evans, dove manteniamo esplicite le costanti tempo.

Calcoliamo quindi i residui:

$$A = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\frac{b_0}{a_2}}{(s + \frac{1}{T_1})(s + \frac{1}{T_2})} = \frac{b_0}{a_2} \cdot T_1 \cdot T_2 = \frac{b_0 \cdot a_2}{a_2 \cdot a_0} = \frac{b_0}{a_0} = G(0)$$

sfruttando la proprietà 1 riportata prima. Si ha poi:

$$B = \lim_{s \rightarrow -\frac{1}{T_1}} \frac{\frac{b_0}{a_2}}{s(s + \frac{1}{T_2})} = \frac{b_0}{a_2} \cdot \frac{1}{-\frac{1}{T_1}(\frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1})} = \frac{b_0 \cdot T_1^2 T_2}{a_2(T_2 - T_1)} = \frac{T_1}{T_2 - T_1} \cdot G(0)$$

$$C = \lim_{s \rightarrow -\frac{1}{T_2}} \frac{\frac{b_0}{a_2}}{s(s + \frac{1}{T_1})} = \frac{b_0}{a_2} \cdot \frac{1}{-\frac{1}{T_2}(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2})} = \frac{b_0 \cdot T_1 T_2^2}{a_2(T_2 - T_1)} = -\frac{T_2}{T_2 - T_1} \cdot G(0)$$

Calcoliamo quindi l'antitrasformata:

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{G(s) \cdot U(s)\} = G(0) \cdot \left(1 + \frac{T_1 e^{-\frac{t}{T_1}} - T_2 e^{-\frac{t}{T_2}}}{T_2 - T_1}\right) \cdot H(t)$$

vediamo il grafico di una classica funzione  $y(t)$  di questo tipo, che viene detta anche **sovrasmorzata**:



Notiamo che il grafico è qualitativamente simile a quello ottenuto da un sistema del primo ordine, anche se dobbiamo distinguere non una ma due costanti di tempo,  $T_1$  e  $T_2$ .

## 13 Lezione del 27-03-25

### 13.0.1 $\Delta = 0$ , poli reali coincidenti

Vediamo il caso di poli reali coincidenti, cioè  $p_1 = p_2$ . Notiamo che questo caso è puramente teorico, in quanto la risposta di un sistema reale sarà necessariamente leggermente sottosmorzata o leggermente sovrasmorzata.

Potremo quindi dire:

$$p_1 = p_2 = p, \quad T = \frac{1}{p}$$

e si avrà quindi l'unica proprietà:

$$T^2 = \frac{1}{p^2} = \frac{a_2}{a_0}$$

che deriva direttamente dalle precedenti.

Le forme standard saranno allora le seguenti:

- **Forma di Bode:** questa si ricaverà moltiplicando sopra e sotto per  $T^2$  e applicando la proprietà:

$$G(s) = \frac{\frac{b_0}{a_2}}{(s + \frac{1}{T})^2} = \frac{\frac{b_0}{a_0} T^2}{(1 + sT)^2} = \frac{\frac{b_0}{a_2} \cdot \frac{a_2}{a_0}}{(1 + sT)^2} = G(0) \cdot \frac{1}{(1 + sT)^2}$$

che mette ancora in evidenza il guadagno  $G(0)$ .

- **Forma di Evans:** è la stessa che abbiamo usato finora, cioè:

$$G(s) = \frac{\frac{b_0}{a_2}}{(s+p)^2}$$

sull'unico polo  $p$ .

Vediamo quindi la **risposta al gradino**, adottando la stessa forma "ibrida" di Evans della scorsa lezione:

$$Y(s) = G(s) \cdot U(s) = \frac{\frac{b_0}{a_2}}{\left(s + \frac{1}{T}\right)^2} \cdot \frac{1}{s} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s + \frac{1}{T}} + \frac{C}{\left(s + \frac{1}{T}\right)^2}$$

Calcoliamo quindi i residui:

$$A = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\frac{b_0}{a_2}}{\left(s + \frac{1}{T}\right)^2} = \frac{b_0 \cdot T^2}{a_2} = \frac{b_0}{a_0} = G(0)$$

$$C = \lim_{s \rightarrow -\frac{1}{T}} \frac{b_0}{a_2} \cdot \frac{1}{s} = -\frac{b_0 \cdot T}{a_2} = -\frac{b_0}{a_0} \cdot \frac{a_0}{a_2} \cdot T = -G(0) \cdot \frac{T}{T^2} = -\frac{G(0)}{T}$$

Per calcolare il residuo in  $B$  sfruttiamo la proprietà che troviamo sempre, dall'annullamento dei termini in  $s^2$  di  $A$  e  $B$  al numeratore:

$$A + B = 0 \implies B = -A = -G(0)$$

Calcoliamo quindi l'antitrasformata:

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{G(s) \cdot U(s)\} = G(0) \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{T}} \left(1 + \frac{t}{T}\right)\right) \cdot H(t)$$

dove per il termine quadrato si ha:

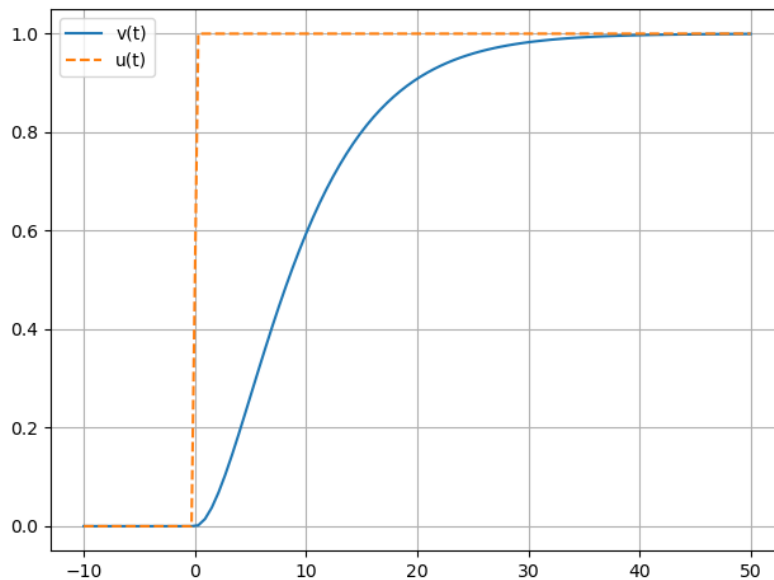
$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{k}{\left(s + \frac{1}{T}\right)^2}\right\} = k t e^{-\frac{t}{T}}$$

sfruttando la proprietà:

$$F(s-a) = \mathcal{L}\{e^{at} \cdot f(t)\}$$

presa  $f(t) = \frac{1}{s^2}$  e  $a = -\frac{1}{T}$ .

vediamo il grafico di una classica funzione  $y(t)$  di questo tipo, che viene detta anche **criticamente smorzata**:



Questa rappresenta, in particolare, il caso ideale in cui l'uscita segue il segnale in entrata il più velocemente possibile. Sistemi dinamici di secondo grado come le sospensioni delle automobili vengono solitamente tarati per essere il più vicini allo smorzamento critico possibile (nel caso particolare delle automobili, si tende ad un leggero sottosmorzamento per aumentare il comfort).

### 13.0.2 $\Delta < 0$ , poli complessi coniugati

Vediamo infine il caso con poli complessi coniugati. Avremo quindi che questi rispettano la forma:

$$p_{1,2} = -(\alpha \pm i\beta)$$

con:

$$\alpha = -\frac{a_1}{2a_2}, \quad \beta = \sqrt{\frac{a_0}{a_2} - \left(\frac{a_1}{2a_2}\right)^2} = \sqrt{\frac{a_0}{a_2} \left(1 - \frac{a_1^2}{4a_2a_0}\right)}$$

che derivano direttamente da  $p_1$  e  $p_2$  come li avevamo definiti con la formula quadratica (portando  $2a_2$  dentro per  $\beta$ , che è il termine radicale col radicando cambiato di segno).

Possiamo ricavare due valori fisicamente significativi, che sono la **pulsazione di risonanza**:

$$\omega = \sqrt{\frac{a_0}{a_2}}$$

e lo **smorzamento**:

$$\xi = \frac{a_1}{2\sqrt{a_0a_2}}$$

sapendo che questa situazione darà solitamente comportamenti oscillatori smorzati o meno (non smorzati se  $a_1 = 0$ ).

In particolare, la pulsazione di risonanza rappresenta la pulsazione che si avrebbe senza smorzamento, mentre la pulsazione effettiva sarà più piccola a seconda dello smorzamento effettivo.

Varrà infatti, rispetto ai poli:

$$\begin{cases} \alpha = -\xi\omega = -\frac{a_1}{2\sqrt{a_0a_2}}\sqrt{\frac{a_0}{a_2}} = -\frac{a_1}{2a_2} \\ \beta = \omega\sqrt{1-\xi^2} = \sqrt{\frac{a_0}{a_2}}\sqrt{1-\frac{a_1^2}{4a_0a_2}} = \sqrt{\frac{a_0}{a_2}\left(1-\frac{a_1^2}{4a_0a_2}\right)} \end{cases}$$

Potremo quindi adottare le forme standard:

- **Forma di Bode:** questa sarà:

$$G(s) = G(0) \cdot \frac{1}{\frac{1}{\omega^2} \cdot s^2 + 2\frac{\xi}{\omega} \cdot s + 1}$$

notando che:

$$\begin{cases} 2\frac{\xi}{\omega} = 2\frac{a_1}{2\sqrt{a_0a_2}} \cdot \sqrt{\frac{a_2}{a_0}} = \frac{a_1}{a_0} \\ \frac{1}{\omega^2} = \frac{a_2}{a_0} \end{cases}$$

e quindi:

$$G(s) = \frac{G(0)}{\frac{1}{\omega^2} \cdot s^2 + 2\frac{\xi}{\omega} \cdot s + 1} = \frac{\frac{b_0}{a_0}}{1 + \frac{a_1}{a_0}s + \frac{a_2}{a_0}s^2} = \frac{b_0}{a_0 + a_1s + a_2s^2}$$

cioè equivale alla forma standard.

- **Forma di Evans:** questa sarà:

$$G(s) = \frac{\frac{b_0}{a_2}}{s^2 + 2\xi\omega \cdot s + \omega^2}$$

cioè la stessa di sopra moltiplicata sopra e sotto per  $\omega^2$ .

Vediamo quindi la **risposta al gradino**. Per fare ciò, notiamo che la trasformata di Laplace risulterà:

$$Y(s) = G(s) \cdot U(s) = \frac{\frac{b_0}{a_2}}{s(s+p_1)(s+p_2)}$$

con il solito  $p_{1,2} = -(\alpha \pm i\beta)$ . Si avrà quindi la forma:

$$= \frac{A}{s} + \frac{B}{s+p_1} + \frac{B^*}{s+p_2}$$

Con residui coniugati  $B$  e  $B^*$ . Il calcolo di  $A$  è piuttosto facile:

$$A = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\frac{b_0}{a_2}}{(s+p_1)(s+p_2)} = \frac{\frac{b_0}{a_2}}{p_1p_2} = \frac{b_0}{a_2} \cdot \frac{a_2}{a_0} = \frac{b_0}{a_0} = G(0)$$

visto che:

$$p_1p_2 = \alpha^2 + \beta^2 = \frac{a_1^2}{4a_2^2} + \frac{a_0}{a_2} \left(1 - \frac{a_1^2}{4a_0a_2}\right) = \frac{a_0}{a_2}$$

Lo stesso non si può dire per  $B$  o  $B^*$ . Decidiamo allora di impostare direttamente la forma  $y(t)$ :

$$y(t) = \frac{b_0}{a_0} \left(1 + Ae^{\alpha t} \cos \omega t + Be^{\alpha t} \sin \omega t\right)$$

che sarà in ogni caso combinazione lineare delle soluzioni che potremmo trovare dall'antitrasformata  $\mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\}$ . Imponiamo quindi le condizioni iniziali  $y(0) = 0$  e  $y'(0) = 0$ :

$$\begin{cases} y(0) = \frac{b_0}{a_0} (1 + Ae^{\alpha t} \cos \beta t + Be^{\alpha t} \sin \beta t) = \frac{b_0}{a_0} (1 + A) \\ y'(0) = \frac{b_0}{a_0} (\alpha B \cos(\beta t) - \beta B e^{\alpha t} \sin(\beta t) + C \alpha e^{\alpha t} \sin(\beta t) + \beta C e^{\alpha t} \cos(\beta t)) = \frac{b_0}{a_0} (-\alpha + \beta C) \end{cases}$$

$$\Rightarrow A = -1, \quad C = \frac{\alpha}{\beta}$$

da cui l'equazione finale:

$$y(t) = \frac{b_0}{a_0} \left( 1 - e^{\alpha t} \cos(\beta t) + \frac{\alpha}{\beta} e^{\alpha t} \sin(\beta t) \right)$$

vediamo il grafico di una classica funzione  $y(t)$  di questo tipo, che viene detta anche **sottosmorzata**:



### 13.0.3 Esempio: modello a quarto di automobile

Prendiamo come esempio di sistema del secondo ordine quello del **quarto di automobile**.

Il sistema va inteso come formato dalla massa dell'automobile  $M_s$ , che agisce sulla sospensione (di costante elastica  $k_s$ ) e sull'ammortizzatore (di smorzamento  $c$ ), a loro volta collegati alla ruota di massa  $M_n$ , il cui pneumatico che agisce anch'esso da sospensione (di costante elastica  $k_p$ ) per il collegamento alla strada. Prendiamo  $x_s$  come la posizione verticale dell'auto,  $x_n$  come la posizione verticale della ruota, e  $x_f$  come la posizione verticale della strada (che *varia* mentre la vettura si muove sul tracciato stradale, in base alle asperità stesse dell'asfalto).

Possiamo riportare la costante elastica del pneumatico (di per sé complicata da calcolare, e comunque solitamente abbastanza grande da essere considerata come perfettamente solida) alla sospensione, considerando quindi la sola costante elastica  $k_s$  della sospensione.



I grafici della situazione descritta, e della semplificazione che facciamo rimuovendo l'elasticità di pneumatico, saranno i seguenti:



(a) Quarto di automobile completo



(b) Quarto di automobile semplice

Prendiamo quindi la posizione verticale dell'automobile  $x_s$  come l'uscita del sistema, e la posizione verticale della strada  $x_f$  come l'entrata.

Chiamando poi  $L_r$  la lunghezza della molla a riposo, potremmo impostare l'equazione differenziale come:

$$M_s \frac{d^2 x_s}{dt^2} = c \frac{d(x_f - x_s)}{dt} + k_s(x_f - x_s) + k_s L_r - M_s g$$

dove il termine  $k_s L_r$  deriva effettivamente dal fatto che la molla della sospensione risponde alla variazione della lunghezza a riposo della molla:

$$F_s \propto L_r - (x_s - x_f) = x_f - x_s + L_r$$

mentre tutti i termini derivati non risentono di questa  $L_r$  e quindi chiaramente la ignorano.

Dividiamo quindi la differenziale in una soluzione particolare, o di equilibrio,  $\bar{x}_s$ , e in una soluzione generale  $\Delta x_s$ :

$$x_s = \Delta x_s + \bar{x}_s$$

La condizione di equilibrio di questo sistema sarà quindi, imponendo derivate nulle:

$$\bar{x}_s = L_r - \frac{M_s g}{k_s}$$

Potremo allora prendere l'omogenea per il calcolo della soluzione generale:

$$M_s \frac{d^2 \Delta x_s}{dt^2} = c \frac{d(x_f - \Delta x_s)}{dt} + k_s(x_f - \Delta x_s)$$

Raggruppando ingressi e uscite (rispettivamente,  $\Delta x_s$  e  $x_f$ ) si ha:

$$M_s \frac{d^2 \Delta x_s}{dt^2} + c \frac{d\Delta x_s}{dt} + k_s \Delta x_s = c \frac{dx_f}{dt} + k_s x_f$$

da cui, portandosi, al dominio di Laplace:

$$(s^2 M_s + cs + k_s) \Delta x_s = (cs + k_s) x_f$$

troviamo la funzione di trasferimento  $G(s)$ :

$$G(s) = \frac{\Delta x_s}{x_f} = \frac{cs + k_s}{s^2 M_s + cs + k_s}$$

La funzione di trasferimento ha uno zero e due poli. Possiamo quindi ricavarci pulsazione naturale ( $\omega$ ) e smorzamento ( $\xi$ ):

$$\omega = \frac{k_s}{M_s}, \quad \xi = \frac{c}{2\sqrt{k_s M_s}}$$

da cui potremo ricavare la risposta come spiegato nelle ultime 3 sezioni.

In particolare, abbiamo detto che le sospensioni automobilistiche sono solitamente sottosmorzate, da cui potremo ricavare i termini di smorzamento e pulsazione effettivi come:

$$\begin{cases} \alpha = -\xi\omega \\ \beta = \omega\sqrt{1-\xi^2} \end{cases}$$

A questo punto, definita una funzione  $x_f(t)$  per l'altezza del fondo stradale, si potrà ricavare la posizione  $x_s(t)$  dell'automobile come la convoluzione:

$$\Delta x_s(t) = (g(t) * x_f(t))$$

dove  $g(t)$  rappresenta la risposta all'impulso del sistema, data da:

$$g(t) = \mathcal{L}^{-1} \{G(s) \cdot 1\} = Ae^{\alpha t} \cos(\beta t) + Be^{\alpha t} \sin(\beta t)$$

cioè la forma che abbiamo trovato nella sezione 13.0.2, tolto il termine costante (visto che prendiamo la risposta all'impulso, un termine costante compare comunque in  $\bar{x}_s$ ). Vorremo quindi imporre a  $g(t)$  le condizioni iniziali  $y(0) = 0$  e  $y'(0) = 1$ , da cui:

$$A = 0, \quad B = \frac{1}{\beta}$$

da cui:

$$g(t) = \frac{1}{\beta} e^{\alpha t} \sin(\beta t)$$