1 Lezione del 05-03-25

Avevamo visto la forma standard per sistemi lineari:

$$\begin{cases} x' = Ax + Bx \\ y = Cx + Du \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

(con D solitamente nulla), e la soluzione data da:

$$\begin{cases} x(t) = e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau \\ y(t) = Ce^{At}x_0 + C\int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau + Du \end{cases}$$

per il calcolo di tale soluzione sfruttavamo l'*esponenziale di matrice:*

$$e^{At} = I + At + \frac{1}{2}A^2t^2 + ... + \frac{(At)^n}{n!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(At)^k}{k!}$$

Abbiamo visto che se la matrice A ha autovalori distinti, allora è diagonalizzabile:

$$A = T^{-1}A_DT, \quad A_D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

e l'esponenziale di matrice è semplice:

$$e^{At} = T^{-1}e^{A_Dt}T = T^{-1}\begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & 0 \\ 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix}T$$

In particolare, se gli autovalori sono complessi e coniugati, si avrà:

$$\lambda_i = \sigma_i + j\omega_i, \quad \overline{\lambda_i} = \sigma_i - j\omega_i$$

da cui:

$$e^{\lambda_i t} = e^{\sigma_i t}e^{j\omega_i t}, \quad e^{\overline{\lambda_i}t} = e^{\sigma_i t}e^{-j\omega_i t}$$

e si avranno quindi modi oscillatori ed esponenziali.

Avevamo inoltre definito come **modi propri** associati i:

$$C(t)e^{\lambda t} = C(t) = \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2t^2 + ... + \alpha_{k-1}t^{k-1}$$

1.0.1 Matrice reale, autovalori complessi

Se A è reale ma i suoi autovalori sono complessi, si avra una forma del tipo:

$$A_D = \begin{pmatrix} \sigma + j\omega & 0 \\ 0 & \sigma - j\omega \end{pmatrix}$$

Questa forma è *simile* alla matrice reale S:

$$S = \begin{pmatrix} \sigma & \omega \\ -\omega & \sigma \end{pmatrix}$$

1.0.2 Calcolo degli autovalori

Ripassiamo brevemente come calcolare gli autovalori. Se V è autovettore e λ l'autovalore associato, allora vale:

$$Av = \lambda v \implies (A - \lambda I)v = 0 \implies \det(A - \lambda I) = 0$$

detta **equazione caratteristica** $p(\lambda)$:

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \lambda^n + \alpha_1 \lambda^{n-1} + \alpha_2 \lambda^{n-2} + ... + \alpha_{n-1}\lambda + \alpha_n$$

Avremo quindi che le soluzioni di λ^* di $p(\lambda) = 0$ rappresentano gli autovalori di A.

1.0.3 Esempio: soluzione di differenziale con derivata prima dell'ingresso

Avevamo visto l'equazione differenziale (esempio 4.2.2):

$$y'' + y = 2u + u'$$

da cui avevamo ricavato il sistema:

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u \\ y = \begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix} u \end{cases}$$

Abbiamo quindi le matrici:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix}$$

Vediamo come calcolare una soluzione specifica di questo sistema. Per fare ciò sfrutteremo la formula di Lagrange, e quindi l'esponenziale di matrice, il cui calcolo sarà molto semplificato dal calcolo degli autovalori di A.

Abbiamo quindi:

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{pmatrix} \implies \lambda^2 + 1 = 0$$

da cui:

$$\lambda_{1,2} = \pm j$$

Avremo quindi la matrice diagonale:

$$A \sim \begin{pmatrix} j & 0 \\ 0 & j \end{pmatrix}$$

Notiamo che si sarebbe anche potuto notare la matrice simile:

$$A \sim \begin{pmatrix} j & 0 \\ 0 & j \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Troviamo quindi e^{At} come:

$$e^{At} = \begin{pmatrix} e^j & 0 \\ 0 & e^{-j} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(t) + j\sin(t) & 0 \\ 0 & \cos(t) - j\sin(t) \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ -\sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix}$$

Possiamo quindi scrivere la formula di Lagrange, assumendo per semplicità $x_0 = 0$ e $u(t) = 1$ costante:

$$x = e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau$$

dove il termine libero $z_l = e^{At}x_0$ va a zero, e rimane quindi:

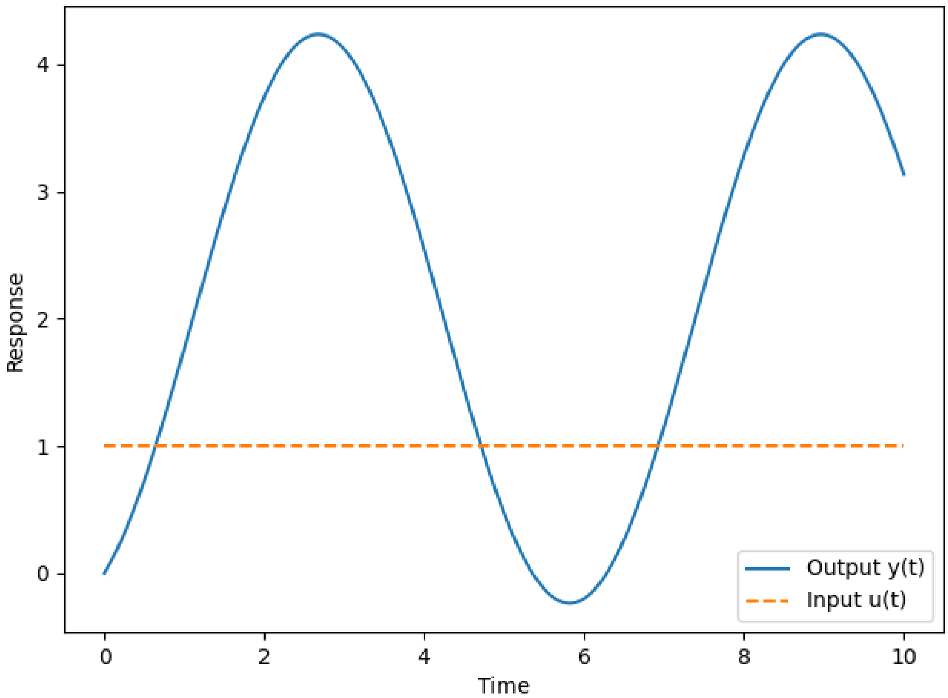
$$\int_0^t \begin{pmatrix} \cos(t-\tau) & \sin(t-\tau) \\ -\sin(t-\tau) & \cos(t-\tau) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} d\tau = \begin{pmatrix} \int_0^t \sin(t-\tau)\,d\tau \\ \int_0^t \cos(t-\tau)\,d\tau \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-\cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$$

Abbiamo quindi trovato un'espressione chiusa per lo stato del sistema sul tempo. A questo punto basterà solamente trovare l'uscita come combinazione lineare delle variabili di stato:

$$y = Bx = \begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1-\cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} = 2 - 2\cos(t) + \sin(t)$$

che è l'espressione dell'uscita in funzione del tempo secondo le ipotesi date.

Verifichiamo il risultato anche con un approssimazione numerica in Python:



1.1 Forma di Jordan

Se gli autovalori sono multipli ma A non è diagonalizzabile, abbiamo visto, occore sfruttare la **forma di Jordan** attraverso la trasformazione:

$$J = QAQ{-}1$$

dove Q è la matrice degli **autovettori generalizzati** con:

$$J = \begin{pmatrix} J_1 & 0 & 0 \\ 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & J_N \end{pmatrix}$$

dove ogni J_i è detto **miniblocco di Jordan**:

$$J_i = \begin{pmatrix} \lambda_h & 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & \lambda_h & 1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & \lambda_h & 1 \\ 0 & 0 & ... & 0 & \lambda_h \end{pmatrix}$$

Ogni blocco di Jordan ha sulla diagonale lo stesso autovalore, che compare tante volte quanto è la sua *molteplicità algebrica*. Inoltre, ci sono tanti blocchi J_i associati allo stesso autovattore tante volte quanto è la sua *molteplicità geometrica*.

Se riprendiamo la matrice esponenziale abbiamo:

$$e^{At} = e^{QJQ^{-1}t} = Q\left(I + Jt + \frac{J^2t^2}{2!} + ... + \frac{(Jt)^n}{n!}\right)Q^{-1} = Qe^{Jt}Q^{-1}$$

dove e^{Jt} è *diagonale a blocchi*:

$$e^{Jt} = \begin{pmatrix} e^{J_1t} & 0 & ... & 0 \\ 0 & e^{J_2t} & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & ... & 0... & e^{J_nt} \end{pmatrix}$$

dove ogni blocco e^{J_it} ha la forma:

$$e^{J_it} = e^{\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & ... & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}t} = e^{(\lambda I + J_{0i})t} = e^{\lambda t}e^{J_{0i}t}$$

dove con J_{0i} ci riferiamo alla **parte nilpotente** di J_i. Il problema sarà quindi capire la forma di $e^{J_{0i}t}$:

$$e^{J_{0i}t} = I + J_{0i}t + \frac{J_{0i}^2}{2!} + ... + \frac{J_{0i}^{q-i}t^{q-1}}{(q-1)!}$$

dove ogni coefficiente moltiplicativo di t^i ha la proprietà di avere le entrate spostate in diagonale, verso l'alto a destra, per cui:

$$e^{J_{0i}t} = \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} & ... & \frac{t^{(q-1)}}{(q-1)!} \\ 0 & 1 & t & ... & ... \\ 0 & 0 & 1 & t & \frac{t^2}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e quindi i modi del sistema sarano:

$$t^k\frac{e^{\lambda t}}{k!}, \quad 0 \leq k \leq q-1$$

dove abbiamo finalmente capito il significato dell'intero k.

Notiamo che la proprietà di similarità che avevamo trovato:

$$M = \begin{pmatrix} \sigma + j\omega & 0 \\ 0 & \sigma - j\omega \end{pmatrix} \sim S = \begin{pmatrix} \sigma & \omega \\ -\omega & \sigma \end{pmatrix}$$

ha un equivalente per le matrici in forma di Jordan:

$$M = \begin{pmatrix} \sigma + j\omega & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma + j\omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma - j\omega & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma - j\omega \end{pmatrix} \sim S = \begin{pmatrix} \sigma & \omega & 1 & 0 \\ -\omega & \sigma & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \sigma & \omega \\ 0 & 0 & -\omega & \sigma \end{pmatrix}$$

e via dicendo.

1.2 Stabilità nei sistemi lineari stazionari

Riprendiamo la definizione di *stabilità* (3.3 e 3.4). Quello che interessa sono le **perturbazioni** dello stato.

Per un sistema lineare e stazionario l'origine è sempre punto di equilibrio per ingresso nullo. Se l'origine è stabile, allora lo è qualsiasi altro punto di equilibrio. Si può allore dire che un sistema è **stabile** solo guardando alla risposta *libera* del sistema:

$$x' = Ax + Bu, \quad u = 0, \quad x(0) = x_0$$

$$x(t) = e^{At} x_0$$

In particolare, la stabilità del sistema dipende dai *modi propri* del sistema. In particolare, se gli autovalori hanno parte reale $\mathrm{Re}(\lambda_i) < 0$ il sistema è **asintoticamente stabile**, mentre se hanno parte reale $\mathrm{Re}(\lambda_i) \leq 0$ e gli $\mathrm{Re}(\lambda_i) = 0$ hanno molteplicità $\mu = 1$ il sistema è solo **stabile**. Quest'ultimo caso è propriamente quello delle matrici non diagonalizzabili (quindi messe in forma di Jordan).

Possiamo riassumere la relazione fra stabilità, modi e autovalori come segue:

Stabilità	**Modi**	**Autovalori**
Stabilità asintotica	Tendono a zero	$\mathrm{Re}(\lambda_i) < 0$
Stabilità semplice o marginale	Non vanno a infinito, ma almeno uno non converge a zero	$\mathrm{Re}(\lambda_i) \leq 0$, $\exists \lambda_i^* : \mathrm{Re}(\lambda_i^*) = 0$, $\mu = 1$
Instabilità	Almeno uno va a infinito	$\mathrm{Re}(\lambda_i) > 0$ o $\exists \lambda_i^* : \mathrm{Re}(\lambda_i^*)$, $\mu_a(\lambda_i^*) \neq \mu_g(\lambda_i^*)$

1.2.1 Stabilità dei sistemi linearizzati

Avevamo visto che nei sistemi non lineari conviene *linearizzare* trascurando i termini oltre il primo ordine nell'intorno di uno stato di equilibrio noto. Se il sistema linearizzato è *asintoticamente stabile*, si avrà che lo stato di equilibrio del sistema non lineare è **stabile**. Di contro, se il sistema linearizzato è *semplicemente stabile* non possiamo concludere nulla sul sistema non lineare (potrebbero esserci instabilità ai termini superiori).