1 Lezione del 27-03-25

1.0.1 $\Delta = 0$, poli reali coincidenti

Vediamo il caso di poli reali coincidenti, cioè $p_1 = p_2$. Notiamo che questo caso è puramente teorico, in quanto la risposta di un sistema reale sarà necessariamente leggermente sottosmorzata o leggermente sovrasmorzata.

Potremo quindi dire:

$$p_1 = p_2 = p, \quad T) = \frac{1}{p}$$

e si avrà quindi l'unica proprietà:

$$T^2 = \frac{1}{p^2} = \frac{a_2}{a_0}$$

che deriva direttamente dalle precedenti.

Le forme standard saranno allora le seguenti:

- **Forma di Bode:** questa si ricaverà moltiplicando sopra e sotto per T^2 e applicando la proprietà:

$$G(s) = \frac{\frac{b_0}{a_2}}{(s + \frac{1}{T})^2} = \frac{\frac{b_0}{a_0}T^2}{(1 + sT)^2} = \frac{\frac{b_0}{a_2} \cdot \frac{a_2}{a_0}}{(1 + sT)^2} = G(0) \cdot \frac{1}{(1 + sT)^2}$$

  che mette ancora in evidenza il guadagno $G(0)$.

- **Forma di Evans:** è la stessa che abbiamo usato finora, cioè:

$$G(s) = \frac{\frac{b_0}{a_2}}{(s + p)^2}$$

  sull'unico polo p.

Vediamo quindi la **risposta al gradino**, adottando la stessa forma *"ibrida"* di Evans della scorsa lezione:

$$Y(s) = G(s) \cdot U(s) = \frac{\frac{b_0}{a_2}}{\left(s + \frac{1}{T}\right)^2} \cdot \frac{1}{s} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s + \frac{1}{T}} + \frac{C}{\left(s + \frac{1}{T}\right)^2}$$

Calcoliamo quindi i residui:

$$A = \lim_{s \to 0} \frac{\frac{b_0}{a_2}}{\left(s + \frac{1}{T}\right)^2} = \frac{b_0 \cdot T^2}{a_2} = \frac{b_0}{a_0} = G(0)$$

$$C = \lim_{s \to -\frac{1}{T}} \frac{b_0}{a_2} \cdot \frac{1}{s} = -\frac{b_0 \cdot T}{a_2} = -\frac{b_0}{a_0} \cdot \frac{a_0}{a_2} \cdot T = -G(0) \cdot \frac{T}{T^2} = -\frac{G(0)}{T}$$

Per calcolare il residuo in B sfruttiamo la proprietà che troviamo sempre, dall'annullamento dei termini in s^2 di A e B al numeratore:

$$A + B = 0 \implies B = -A = -G(0)$$

Calcoliamo quindi l'antitrasformata:

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{G(s) \cdot U(s)\} = G(0) \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{T}} \left(1 + \frac{t}{T}\right)\right) \cdot H(t)$$

dove per il termine quadrato si ha:

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{k}{\left(s + \frac{1}{T}\right)^2} \right\} = k\, t e^{-\frac{t}{T}}$$

sfruttando la proprietà:

$$F(s-a) = \mathcal{L}\{e^{at} \cdot f(t)\}$$

presa $f(t) = \frac{1}{s^2}$ e $a = -\frac{1}{T}$.

1.0.2 $\Delta < 0$, poli complessi coniugati

Vediamo infine il caso con poli complessi coniugati. Avremo quindi che questi rispettano la forma:

$$p_{1,2} = -(\alpha \pm i\beta)$$

con:

$$\alpha = -\frac{a_1}{2a_2}, \quad \beta = \sqrt{\frac{a_0}{a_2} - \left(\frac{a_1}{2a_2}\right)^2} = \sqrt{\frac{a_0}{a_2}\left(1 - \frac{a_1^2}{4a_2a_0}\right)}$$

che derivano direttamente da p_1 e p_2 come li avevamo definiti con la formula quadratica (portando $2a_2$ dentro per β, che è il termine radicale col radicando cambiato di segno).

Possiamo ricavare due valori fisicamente significativi, che sono la **pulsazione di risonanza**:

$$\omega = \sqrt{\frac{a_0}{a_2}}$$

e lo **smorzamento**:

$$\xi = \frac{a_1}{2\sqrt{a_0a_2}}$$

sapendo che questa situazione darà solitamente comportamenti oscillatori smorzati o meno (non smorzati se $a_1 = 0$).

Varrà allora, rispetto ai poli:

$$\begin{cases} \alpha = -\xi\omega = -\frac{a_1}{2\sqrt{a_0a_2}}\sqrt{\frac{a_0}{a_2}} = -\frac{a_1}{2a_2} \\ \beta = \omega\sqrt{1-\xi^2} = \sqrt{\frac{a_0}{a_2}}\sqrt{1 - \frac{a_1^2}{4a_0a_2}} = \sqrt{\frac{a_0}{a_2}\left(1 - \frac{a_1^2}{4a_0a_2}\right)} \end{cases}$$

Potremo quindi adottare le forme standard:

- **Forma di Bode:** questa sarà:

$$G(s) = G(0) \cdot \frac{1}{\frac{1}{\omega^2} \cdot s^2 + 2\frac{\xi}{\omega} \cdot s + 1}$$

  notando che:

$$\begin{cases} 2\frac{\xi}{\omega} = 2\frac{a_1}{2\sqrt{a_0a_2}} \cdot \sqrt{\frac{a_2}{a_0}} = \frac{a_1}{a_0} \\ \frac{1}{\omega^2} = \frac{a_2}{a_0} \end{cases}$$

e quindi:

$$G(s) = \frac{G(0)}{\frac{1}{\omega^2} \cdot s^2 + 2\frac{\xi}{\omega} \cdot s + 1} = \frac{\frac{b_0}{a_0}}{1 + \frac{a_1}{a_0}s + \frac{a_2}{a_0}s^2} = \frac{b_0}{a_0 + a_1 s + a_2 s^2}$$

cioè equivale alla forma standard.

- **Forma di Evans:** questa sarà:

$$G(s) = \frac{\frac{b_0}{a_2}}{s^2 + 2\xi\omega \cdot s + \omega^2}$$

cioè la stessa di sopra moltiplicata sopra e sotto per ω^2.

Vediamo quindi la **risposta al gradino**:

1.0.3 Esempio: modello a quarto di automobile

Prendiamo come esempio di sistema del secondo ordine quello del **quarto di automobile**, inteso come il sistema formato dalla massa dell'automobile M_s, che agisce sulla sospensione (di costante elastica k_s) e sull'ammortizzatore (di smorzamento c), a loro volta collegati al pneumatico di massa M_n, che agisce anch'esso da sospensione (di costante elastica k_p) per il collegamento alla strada.

Prendiamo x_s come la posizione verticale dell'auto, x_n come la posizione verticale del pneumatico, e x_f come la posizione verticale della strada (che *varia* mentre la vettura si muove sul tracciato stradale, in base alle asperità stesse dell'asfalto).

Possiamo riportare la costante elastica del pneumatico (di per sé complicata da calcolare, e comunque solitamente abbastanza grande da essere considerata come perfettamente solida) alla sospensione, considerando quindi la sola costante elastica k_s della sospensione.

Prendiamo quindi la posizione verticale dell'automobile x_s come l'uscita del sistema, e la posizione verticale della strada x_f come l'entrata.

Chiamando poi L_r la lunghezza della molla a riposo, potremmo impostare l'equazione differenziale come:

$$M_s \frac{d^2 x_s}{dt^2} = c\frac{d(x_f - x_s)}{dt} + k_s(x_f - x_s) + k_s L_r - M_s g$$

dove il termine $k_s L_r$ deriva effettivamente dal fatto che la molla della sospensione risponde alla variazione della lunghezza a riposo della molla:

$$F_s \propto L_r - (x_s - x_f) = x_f - x_s + L_r$$

mentre tutti i termini derivati non risentono di questa L_r e quindi chiaramente la ignorano.

Dividiamo quindi la differenziale in una soluzione particolare, o di equilibrio, $\overline{x}_s$, e in una soluzione generale Δx_s:

$$x_s = \Delta x_s + \overline{x}_s$$

La condizione di equilibrio di questo sistema sarà quindi, imponendo derivate nulle:

$$\overline{x}_s = L_r - \frac{M_s g}{k_s}$$

Potremo allora prendere l'omogenea per il calcolo della soluzione generale:

$$M_s \frac{d^2 \Delta x_s}{dt^2} = c \frac{d(x_f - \Delta x_s)}{dt} + k_s(x_f - \Delta x_s)$$

Raggruppando ingressi e uscite (rispettivamente, Δx_s e x_f) si ha:

$$M_s \frac{d^2 \Delta x_s}{dt^2} + c \frac{d\Delta x_s}{dt} + k_s \Delta x_s = c \frac{dx_f}{dt} + k_s x_f$$

da cui, portandosi, al dominio di Laplace:

$$\left(s^2 M_s + cs + k_s\right) \Delta x_s = (cs + k_s) x_f$$

troviamo la funzione di trasferimento $G(s)$:

$$G(s) = \frac{\Delta x_s}{x_f} = \frac{cs + k_s}{s^2 M_s + cs + k_s}$$

La funzione di trasferimento ha uno zero e due poli. Possiamo intanto ricavarci pulsazione (ω) e smorzamento (ξ):

$$\omega = \frac{k_s}{M_s}, \quad \xi = \frac{c}{2\sqrt{k_s M_s}}$$