1 Lezione del 12-03-25

1.1 Forma minima

Abbiamo studiato finora sistemi modellizzati attraverso *variabili di stato*, espressi come:

$$\begin{cases} x' = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}$$

Di questi, abbiamo che:

- La **stabilità** dipende da A, e in particolare dai suoi autovalori;
- La **raggiungibilità** dipende da A e B, e in particolare dal rango della matrice $\mathcal{M}_\mathcal{R}$ che se ne ricava. Abbiamo visto che le variabili non raggiungibili possono essere esplicitate attraverso la matrice di trasformazione T_r;
- L'**osservabilità** dipende da A e C, e in particolare dal rango della matrice $\mathcal{M}_\mathcal{O}$ che se ne ricava. Anche qui, abbiamo visto che le variabili non osservabili possono essere esplicitate attraverso la matrice di trasformazione T_o.

Infine, avevamo detto che un sistema può essere stabile, raggiungibile e osservabili, nessuna di queste o una loro combinazione. Per evidenziare queste caratteristiche avevamo introdotto la **forma canonica** di Kalman.

Ripartiamo da qui per introdurre i sistemi in **forma minima**:

Definizione 1.1: Forma minima

Un sistema si dice in forma minima se è completamente osservabile e completamente raggiungibile.

Questo significa che non è possibile usare un numero di variabili di stato minore del suo ordine per descrivere la relazione ingresso-uscita (movimento forzato).

Le parti non raggiungibili e non osservabili non rappresentano quindi questa relazione, anche se possono essere comunque importanti per lo studio del movimento libero (ad esempio, per la stabilità).

1.2 Metodi di ispezione diretta

Iniziamo a vedere i metodi di **ispezione diretta** per raggiungibilità e osservabilità. Questi sono applicabili in casi particolari dove la struttura delle matrici A e B ci permette di capire direttamente la raggiungibilità del sistema.

1.2.1 Ispezione diretta di raggiungibilità

Iniziamo col metodo di ispezione diretta di raggiungibilità, presentando prima il caso SISO con matrici A diagonali e generalizzandolo a sistemi MIMO con matrici A arbitrarie.

- **Caso SISO diagonale**: poniamo che il sistema sia a ingresso e uscita singola, e la matrice A sia diagonale, cioè:

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ & \dots & \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}$$

In questo caso $\mathcal{M}_{\mathcal{R}}$ sarà:

$$\mathcal{M}_{\mathcal{R}} = \begin{pmatrix} b_1 & \lambda_1 b_1 & \dots & \lambda_1^{n-1} b_1 \\ \dots & & & \\ b_n & \lambda_n b_n & \dots & \lambda_n^{n-1} b_n \end{pmatrix}$$

cioè la condizione di $\operatorname{rank}(\mathcal{M}_{\mathcal{R}}) = n$ sarà B a elementi non nulli e λ_i distinti.

Possiamo interpretare questo caso come quello dove ogni variabile di stato x_i è indipendente dalle altre: in questo ogni dimensione dello spazio di stato rappresenterà effettivamente un sistema a sé, e quello che vorremo sarà che i λ_i della risposta di ogni *sottosistema* siano distinti (in modo da poterli distinguere), e che l'ingresso arrivi ad ogni sottosistema con un $b_i \neq 0$, cioè la variabile i-esima possa effettivamente esserne influenzata.

- **Caso MIMO in forma di Jordan**: cerchiamo di generalizzare quanto visto per il caso SISO a sistemi a più variabili, con matrici A non necessariamente diagonali.

  Sfrutteremo adesso il teorema:

  Teorema 1.1: Lemma di Popov-Belevitch-Hautus (PBH) ragg.

  Il sistema dinamico LTI $x' = Ax + Bu$ è completamente raggiungibile se e solo se $\operatorname{rank}(\lambda I - A \,|\, B) = n$, $\forall \lambda \in \mathbb{C}$.

  La dimensione della matrice ottenuta sara $n \times (n+m)$, in quanto sia A che B hanno n righe, A ha n colonne e B ne ha m.

  Abbiamo quindi che con λ non autovalore, la condizione è sempre verificata (in quanto $\det(\lambda I - A) \neq 0$, altrimenti si viola la definizione di autovalore). Nel caso in cui invece λ è autovalore, la condizione deve essere verificata dall'aggiunta di B (in quanto $\det(\lambda I - A) < n$).

  Per dimostrare questo teorema assumiamo che λ_i tale per cui $\det(\lambda_i I - A \,|\, B) < n$. Allora $\exists q \neq 0$ tale che:

  $$q^T (\lambda_i I - A \,|\, B) = 0$$

  cioè $q \in \ker(\lambda_i I - A \,|\, B)$ *nullo sinistro* (si pensi alla definizione di indipendenza lineare). Da questo si può dividere il prodotto in:

  $$q^T (\lambda_i - A) = 0, \quad q^T B = 0$$

  Dalla prima, si ha, moltiplicando per B:

  $$q^T \lambda_i = q^T A \implies q^T AB = \lambda_i q^T B = 0$$

  quindi $q^T AB = 0$. Potremo moltiplicare, anziché per B, anche per AB, $A^2 B$, ecc... e trovare sempre $q^T A^j B = 0$, e quindi:

  $$q^T \begin{pmatrix} B & AB & \dots & A^{n-1} B \end{pmatrix} = 0$$

  cioè la matrice di raggiungibilità $\mathcal{M}_{\mathcal{R}}$ non ha rango massimo e il sistema non è completamente raggiungibile. □

Abbiamo quindi che nel caso generico MIMO, la matrice A è in forma di Jordan con p blocchi ($p \neq$ numero di uscite) di dimensioni m_i, cioè:

$$A = \begin{pmatrix} \text{blocco}_1 & \dots & 0 \\ & \dots & \\ 0 & \dots & \text{blocco}_p \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} \\ \dots \\ b_{1m_1} \\ \dots \\ b_{p1} \\ \dots \\ b_{pm_1} \end{pmatrix}$$

con:

$$\text{blocco}_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & \dots & 0 \\ & \dots & \\ 0 & \dots & \lambda_i \end{pmatrix}$$

Se il sistema fosse SISO, la molteplicità geometrica degli autovalori sarebbe uguale a 1, e B dovrebbe avere tanti elementi diversi da zero almeno quanti gli autovalori distinti in A. Di contro, un sistema con μ miniblocchi associati ad un unico autovalore λ può essere raggiungibile solo se ha almeno μ ingressi (elementi $\neq 0$ di B).

1.2.2 Ispezione diretta di osservabilità

Esiste una variante del lemma PBH per l'osservabilità:

Teorema 1.2: Lemma di Popov-Belevitch-Hautus (PBH) oss.

Il sistema dinamico LTI $x' = Ax + Bu$ è completamente osservabile se e solo se:

$$\text{rank} \begin{pmatrix} \lambda I - A \\ B \end{pmatrix} = n, \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}$$

- **Caso MIMO in forma di Jordan:** riprendiamo direttamente il caso MIMO. Stavolta le matrici saranno:

$$A = \begin{pmatrix} \text{blocco}_1 & \dots & 0 \\ & \dots & \\ 0 & \dots & \text{blocco}_p \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1m_1} | & \dots & | b_{p1} & \dots & b_{pm_1} \end{pmatrix}$$

con:

$$\text{blocco}_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & \dots & 0 \\ & \dots & \\ 0 & \dots & \lambda_i \end{pmatrix}$$

Vorremmo imporre le stesse condizioni di prima, cioè per μ miniblocchi associati ad un unico autovalore λ vogliamo almeno μ uscite (elementi $\neq 0$ di C).

1.3 Funzione di trasferimento

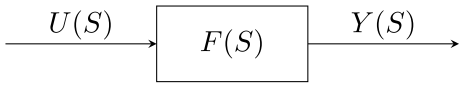
Introduciamo adesso dei metodi che evitano di sfruttare direttamente le variabili di stato per rappresentare sistemi dinamici. Utilizziamo a questo scopo la **funzione di trasferimento**.

Si noti che è sempre possibile passare dalla forma a variabili di stato alla forma a funzione di trasferimento, cioè queste sono intercambiabili e differsicono solo per la semplicità dei calcoli.

La funzione di trasferimento F di un sistema dinamico nella variabile s è il **rapporto** fra l'*uscita* Y e l'*ingresso* U:

$$F(s) = \frac{\text{uscita}}{\text{ingresso}} = \frac{Y(s)}{U(s)}$$

Possiamo rappresentare anche il diagramma a blocchi:

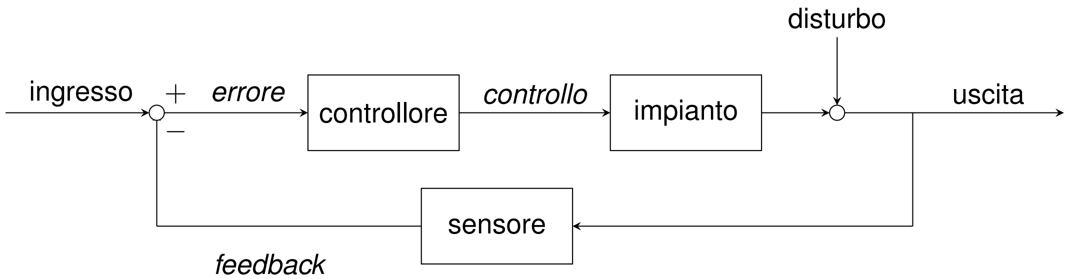


Questo diagramma rappresenta in particolare il sistema rappresentato dalla funzione $F(S)$, posto in **catena aperta**. Vedremo fra poco sistemi dove la variabile di uscita $Y(S)$ è chiusa in retroazione sulla variabile di ingresso $U(S)$, cioè sistemi in **catena chiusa**.

1.4 Controllo in feedback

Vediamo quindi nel dettaglio il modello di controllo a catena chiusa più popolare: quello del **controllo in feedback**, o *controllo in retroazione*.

IL diagramma a blocchi avrà in questo caso l'aspetto:



L'idea fondamentale è che il sensore *rileva* l'effetto del controllo sull'impianto, e quindi la variabile di uscita, e lo usa per correggere (tramite il *feedback*) il controllo stesso.