

1 Lezione del 28-04-25

1.1 Diagrammi di Nyquist

Vediamo quindi l'ultimo strumento che sfrutteremo per poi progettare i regolatori, cioè i **diagrammi di Nyquist**. Questi rappresentano la forma polare della risposta in frequenza associata alla funzione di trasferimento di un sistema lineare $G(s)$.

Tracciare un diagramma di Nyquist significherà quindi tracciare una curva sul piano complesso parametrizzata dalla pulsazione (o frequenza).

Avremo che:

- L'asse delle ascisse riporta i valori di $\text{Re}(G(j\omega))$;
- L'asse delle ordinate riporta i valori di $\text{Im}(G(j\omega))$;
- Tutti gli assi sono espressi in scala lineare.

Il diagramma di Nyquist non prevede l'addittività dei termini elementari. Per pulsazioni elevate non riesce a specificare nel dettaglio l'andamento della risposta armonica quando il modulo tende a diventare piccolo.

Altre proprietà dei diagrammi di Nyquist sono:

- I diagrammi sono graduati in funzione della pulsazione ω ;
- I diagrammi polari sono utili per lo studio della stabilità dei sistemi in retroazione, attraverso il cosiddetto **criterio di stabilità di Nyquist**;
- Se conosciamo la funzione di trasferimento $G(s)$, il diagramma polare si può tracciare per punti separando le parti reali e immaginarie di $G(j\omega)$ e determinandone i valori corrispondenti a certi valori di ω , cioè dicendo:

$$G(s) \xrightarrow{s=j\omega} G(j\omega), \quad \omega = 0, 1, 10, \dots$$

1.1.1 Tracciamento del diagramma di Nyquist

Vediamo quindi nel dettaglio come tracciare il diagramma di Nyquist. Avremo effettivamente la possibilità di sfruttare 2 metodi:

1. Per il primo metodo partiremo dalla funzione di trasferimento in forma generica:

$$G(j\omega) = K \frac{(j\omega - z_1) \dots (j\omega - z_m)}{(j\omega - p_1) \dots (j\omega - p_n)}$$

e la divideremo in parte reale e complessa:

$$\begin{cases} \text{Re}(G(j\omega)) = K \frac{M_{z1} \dots M_{zm}}{M_{p1} \dots M_{pn}} \\ \text{Im}(G(j\omega)) = \phi_{z1} + \dots + \phi_{zm} - \phi_{p1} - \dots - \phi_{pn} \end{cases}$$

$$\Rightarrow G(j\omega) = K \frac{M_{z1} \dots M_{zm}}{M_{p1} \dots M_{pn}} e^{\theta_1 - \phi_1 - \phi_2 - \phi_3}$$

A questo punto dovremo solo valutare i vari punti:

$$p_i = (\text{Re}(G(j\omega_i)), \text{Im}(G(j\omega_i))), \quad \omega_i = 0, 1, 10, \dots$$

e collegarli per ottenere il diagramma di Nyquist.

Chiamiamo questo metodo **metodo analitico**;

2. Per il secondo metodo cercheremo un'approssimazione di tipo *qualitativo*, come avevamo fatto per i diagrammi di Bode.

Supponiamo che il sistema sia di **tipo zero**, cioè poniamo il sistema con funzione di trasferimento:

$$G(s) = K \frac{b_0 + b_1 s + b_2 s^2 + \dots + s^m}{s^h (a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + \dots + a_{n-h} s^{n-h})}$$

e imponiamo $h = 0$.

- A questo punto vorremo trovare il punto a $\omega = 0$, dato dal guadagno statico:

$$G(0) = \lim_{\omega \rightarrow 0} G(j\omega) = K \cdot \frac{b_0}{a_0}$$

con fase:

$$\begin{cases} \phi_{\omega \rightarrow 0} = 0, & G(0) > 0 \\ \phi_{\omega \rightarrow 0} = -\pi, & G(0) < 0 \end{cases}$$

per sistemi non di tipo 0, invece, cioè con $h \neq 0$, avremo:

$$G(0) = \lim_{\omega \rightarrow 0} |G(j\omega)| = \infty$$

con fase:

$$\angle G(j\omega) = \frac{1}{s^h} = -h \cdot \frac{\pi}{2}$$

se $k_1 > 0$.

- Potrebbe poi interessarci il punto a $\omega \rightarrow \infty$, dato da:

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} G(j\omega) = \begin{cases} 0, & n > m \\ K, & n = m \end{cases}$$

con fase se $n > m$:

$$\begin{cases} \phi_{\omega \rightarrow \infty} = \frac{1}{s^{n-m}} = -(n-m) \cdot \frac{\pi}{2}, & G(0) > 0 \\ \phi_{\omega \rightarrow \infty} = \frac{1}{s^{m-n}} = -(m-n) \cdot \frac{\pi}{2}, & G(0) < 0 \end{cases}$$

e se $n = m$ corrispondente alla fase di K .

A questo punto cerchiamo ulteriori punti per il tracciamento, fra cui ad esempio sono immediati quelli di intersezione con gli assi. Per trovare questi poniamo la parte reale e immaginaria separatamente a 0.

A questo punto basterà ricordare i punti trovati per avere una stima approssimata del diagramma di Nyquist.