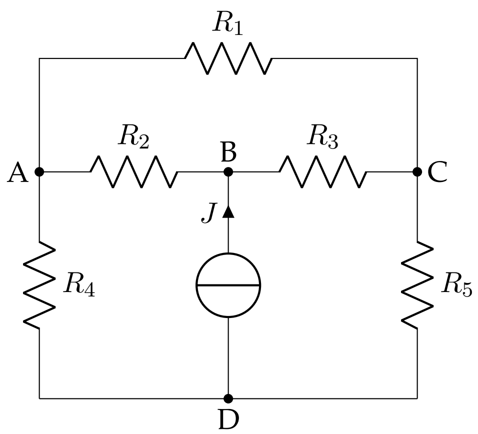
1 Lezione del 11-10-24

1.1 Metodo delle tensioni di nodo

Vediamo ora un metodo per la risoluzione dei circuiti dove le incognite non sono le correnti (come nel tableau o nelle correnti di maglia), ma le tensioni. Calcoleremo quindi le **tensioni di nodo**, che sappiamo essere relative a qualche zero del potenziale, attraverso la conduttanza anziché la resistenza.

Prendiamo in esempio il circuito:



dove abbiamo già evidenziato i nodi. Da qui possiamo proseguire in due modi:

- **Col nodo di riferimento:** prendiamo D come nodo di riferimento, e impostiamo il suo potenziale V_D a 0. Le incognite saranno quindi V_A, V_B e V_C. Scriviamo un equazione per il potenziale V_A:

  $$V_A\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_4}\right)-\frac{V_B}{R_2}-\frac{V_C}{R_1}=0$$

  Il primo termine è detto **termine di auto ammettenza**, ed è dato dal prodotto del potenziale sul nodo V_i e la somma delle conduttanze su tutti i rami connessi al nodo. Il termini sucessivi sono detti **termini di mutua ammettenza**, e sono dati dalla legge di Ohm applicata ai rami connessi al nodo.

  Nel caso uno dei rami contenga un generatore di corrente, si esclude dall'auto e mutua ammettenza e si mette come termine noto sul lato destro dell'equazione.
  Ad esempio, sul nodo B avremo:

  $$V_B\left(\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}\right)-\frac{V_A}{R_2}-\frac{V_C}{R_3}=J$$

  dove la J è la corrente erogata dall generatore di corrente sul ramo BD, che abbiamo detto non compare nei termini di auto o mutua ammettenza. Si noti che il segno positivo significa corrente *entrante* sul nodo, altrimenti si avrebbe segno negativo.
  Infine, sul nodo C avremo:

  $$V_C\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_3}+\frac{1}{R-5}\right)-\frac{V_A}{R_1}-\frac{V_B}{R_3}=0$$

Abbiamo quindi un sistema sulle 3 tensioni (abbiamo detto che la tensione D vale 0):

$$\begin{cases} V_A\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_4}\right)-\frac{V_B}{R_2}-\frac{V_C}{R_1}=0 \\ V_B\left(\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}\right)-\frac{V_A}{R_2}-\frac{V_C}{R_3}=J \\ V_C\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_3}+\frac{1}{R-5}\right)-\frac{V_A}{R_1}-\frac{V_B}{R_3}=0 \end{cases}$$

che possiamo portare in forma matriciale:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_4} & -\frac{1}{R_2} & -\frac{1}{R_1} \\ -\frac{1}{R_2} & \frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3} & -\frac{1}{R_3} \\ -\frac{1}{R_1} & -\frac{1}{R3} & \frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_3}+\frac{1}{R_5} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} V_A \\ V_B \\ V_C \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ J \\ 0 \end{pmatrix}$$

e che possiamo risolvere.

- **Senza nodo di riferimento:** possiamo decidere di continuare senza alcun riferimento del potenziale. Abbiamo già trovato le equazioni del potenziale sui primi 3 nodi, quindi impostiamo l'equazione per V_D:

$$V_D\left(\frac{1}{R_4}+\frac{1}{R_5}\right)-\frac{V_A}{R_4}-\frac{V_C}{R_5}=J$$

e insieriamola nel sistema precedente:

$$\begin{cases} V_A\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_4}\right)-\frac{V_B}{R_2}-\frac{V_C}{R_1}=0 \\ V_B\left(\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}\right)-\frac{V_A}{R_2}-\frac{V_C}{R_3}=J \\ V_C\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_3}+\frac{1}{R-5}\right)-\frac{V_A}{R_1}-\frac{V_B}{R_3}=0 \\ V_D\left(\frac{1}{R_4}+\frac{1}{R_5}\right)-\frac{V_A}{R_4}-\frac{V_C}{R_5}=-J \end{cases}$$

in forma matriciale, abbiamo un sistema in 4 variabili con 3 equazioni:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_4} & -\frac{1}{R_2} & -\frac{1}{R_1} & -\frac{1}{R_4} \\ -\frac{1}{R_2} & \frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3} & -\frac{1}{R_3} & 0 \\ -\frac{1}{R_1} & -\frac{1}{R3} & \frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_3}+\frac{1}{R_5} & -\frac{1}{R_5} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} V_A \\ V_B \\ V_C \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ J \\ 0 \\ -J \end{pmatrix}$$

Sappiamo dal teorema di Rouché-Capelli che questo sistema è indeterminato, o almeno ammette soluzioni su una retta, quindi per un certo fattore di scala λ. Questo rappresenta semplicemente il fatto che non abbiamo scelto uno zero del potenziale: il potenziale dei nodi non esiste se non in riferimento agli altri, quindi qualsiasi valore λ aggiunto non cambia i risultati. Scegliamo il valore $\lambda = 0$ per convenienza, che equivale a impostare V_D a zero.

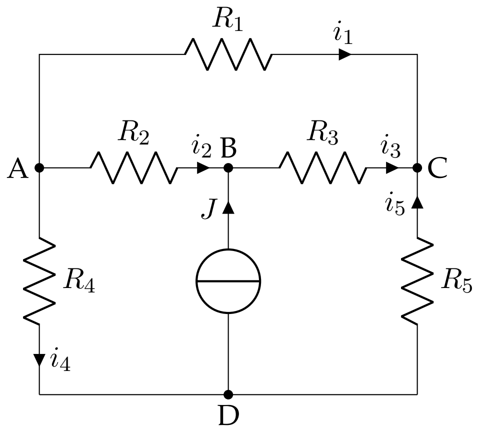
A questo punto, vogliamo risolvere effettivamente il circuito, e quindi trovare le tensioni e le correnti di ramo. Per le tensioni, prendiamo semplicemente le differenze di potenziale sui nodi:

$$V_{AB}=V_A-V_B, \quad \text{ecc...}$$

mentre per le correnti applichiamo la legge di Ohm sul ramo scelto. Ad esempio, sul ramo AB avremo:

$$V=IR, \quad I_{AB}=\frac{V_{AB}}{R_2}$$

Un caso particolare è rappresentato dalla tensione su BD. In questo caso si ha un generatore di corrente, e nessuna resistenza, quindi I_{BD} è ben definito, ma non V_{BD}. Quello che vogliamo fare è calcolare la caduta di potenziale $V_J = V_{BD}$ sul generatore di corrente. Per fare ciò applichiamo la seconda legge di Kirchoff, magari applicata in senso orario sulla maglia in basso a sinistra, con le direzioni di corrente:



Si ha quindi:

$$V_j + R_2 i_2 - R_4 i_4 = 0 \quad V_j = R_4 i_4 - R_2 i_2$$

Abbiamo così determinato tutte le tensioni e tutte le correnti.

1.1.1 Circuiti con generatori di tensione

Il dipolo particolare quando si applica il metodo delle tensioni di nodo è il generatore ideale di tensione. In questo caso, possiamo semplificare il sistema: se il generatore collega un nodo al nodo di riferimento, allora il voltaggio del nodo è uguale al voltaggio erogato dal generatore, tenendo conto dei segni.

In caso contrario, si può sempre impostare un'equazione del tipo:

$$E = V_A - V_B$$

dove E è la tensione erogata dal generatore, e V_A e V_B le tensioni sui nodi che collega.

Un caso particolare è determinato dai generatori reali di tensione, cioè i generatori ideali in serie a resistenze. In questi casi conviene trasformare i generatori nei loro equivalenti di Norton, e risolvere.