1 Lezione del 22-11-24

1.1 Leggi dei bipoli con la trasformata di Laplace

Vediamo quindi come possiamo esprimere il legame fra corrente e tensione dei bipoli visti finora attraverso la trasformata di Laplace.

1.1.1 Resistori

Poniamo di avere un resistore. Avevamo che:

$$v_R(t) = Ri_R(t)$$

Visto che non abbiamo derivate o integrali, possiamo passare direttamente al dominio s:

$$V_R(s) = RI_R(s)$$

1.1.2 Induttori

Rispetto agli induttori, avevamo che:

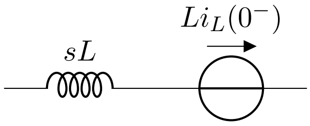
$$v_L(t) = L\frac{di_L(t)}{dt}$$

che nella trasformata di Laplace, applicando la legge di derivata, diventerà:

$$V_L(s) = L\left(sI_L(s) - i_L(0^-)\right) = sLI_L(s) - Li_L(0^-)$$

dove appare un termine dovuto alle condizioni iniziali, cioè $Li_L(0^-)$.

Abbiamo quindi che un circuito equivalente all'induttore secondo la trasformata di Laplace è dato da una serie fra un induttore con induttanza generalizzata sL e un generatore di tensione (detto **generatore di condizioni iniziali**) $Li_L(0^-)$, cioè:



1.1.3 Condensatori

Rispetto ai condensatori, avevamo che:

$$v_C(t) = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i_C(\tau)d\tau$$

che nella trasformata di Laplace, applicando la legge di integrale, diventerà:

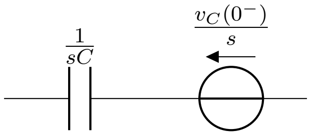
$$V_C(s) = \frac{1}{C}\left(\frac{I_C(s)}{s} + \frac{1}{s}\int_{-\infty}^{0^-} i_C(t)dt\right) = \frac{I_C(s)}{sC} + \frac{1}{sC}q(0^-)$$

ricordando che $\int_{-\infty}^{0^-} i(t)dt = q(t)$. Potrebbe però essere più conveniente applicare la definizione di capacità, da cui $v_C(t) = \frac{q(t)}{C}$ e quindi:

$$V_C(s) = \frac{I_C(s)}{sC} + \frac{v_C(0^-)}{s}$$

cioè anche qui appare un termine dovuto alle condizioni iniziali, $\frac{v_C(0^-)}{s}$.

Abbiamo quindi che un circuito equivalente al condensatore secondo la trasformata di Laplace è dato da una serie fra un condensatore $\frac{1}{sC}$ e un generatore di tensione (il generatore di condizioni iniziali) $\frac{v_C(0^-)}{s}$, cioè:



1.1.4 Induttanze mutuamente accoppiate

Due induttanze mutuamente accoppiate venivano governate dalla legge:

$$\begin{cases} v_1(t) = L_1 \frac{di_1(t)}{dt} \pm M \frac{di_2(t)}{dt} \\ v_2(t) = L_2 \frac{di_2(t)}{dt} \pm M \frac{di_1(t)}{dt} \end{cases}$$

Nel dominio s, queste diventano:

$$\begin{cases} V_1(s) = L_1 \left(sI_1(s) - i_1(0^-) \right) \pm M \left(sI_2(s) - i_2(0^-) \right) \\ V_2(s) = L_2 \left(sI_2(s) - i_2(0^-) \right) \pm M \left(sI_1(s) - i_1(0^-) \right) \end{cases}$$

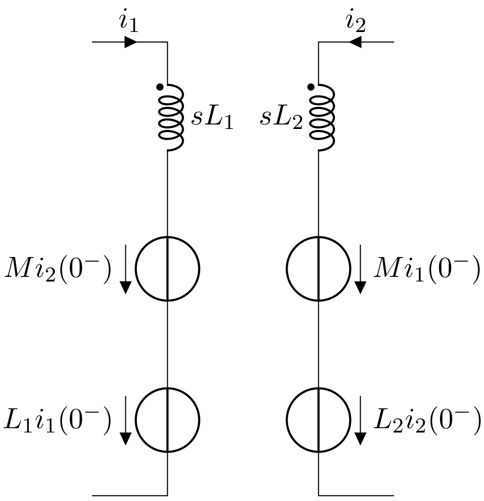
che dà:

$$\begin{cases} V_1(s) = sL_1 I_1(s) \pm sMI_2(s) - L_1 i_1(0^-) \mp Mi_2(0^-) \\ V_2(s) = sL_2 I_2(s) \pm sMI_1(s) - L_2 i_2(0^-) \mp Mi_1(0^-) \end{cases}$$

Abbiamo allora che un circuito equivalente alle induttanze mutuamente accoppiate secondo la trasformata di Laplace è dato da, su ogni ramo, una serie di:

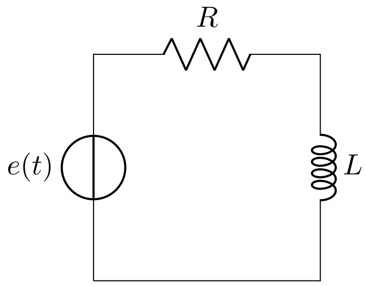
- Un generatore di tensione $L_1 i_1(0^-)$ $(L_2 i_2(0^-))$;
- Un generatore di tensione $\pm Mi_2(0^-)$ $(\pm Mi_1(0^-))$

entrambi con contrassegni concordi alla direzione della corrente:



1.2 Analisi circuitale nel dominio s

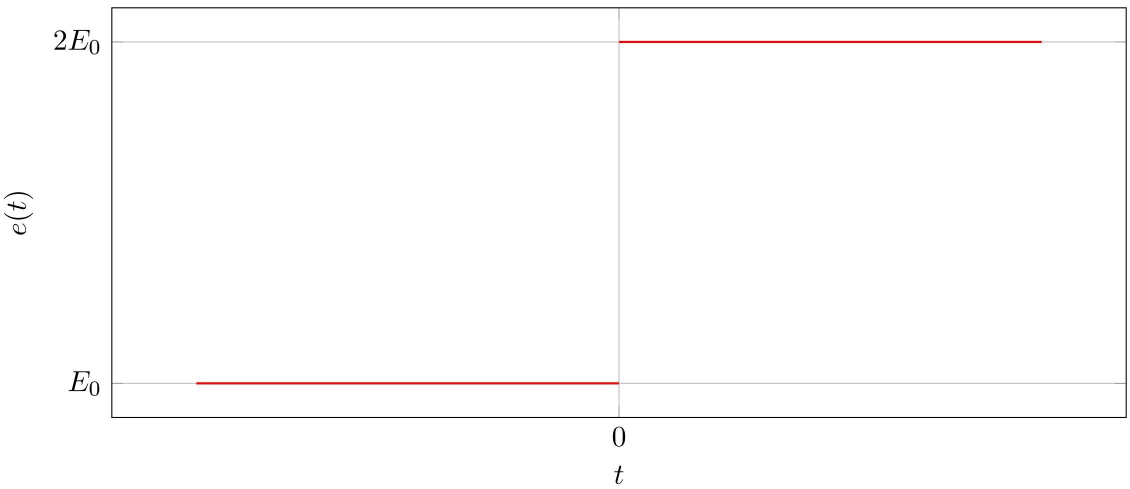
Vediamo quindi come usare la trasformata di Laplace per risolvere il circuito (RL) che abbiamo usato per introdurre i circuiti a regime aperiodico:



Dove avevamo che il generatore di tensione $e(t)$ ha forma d'onda:

$$e(t) = \begin{cases} E_0, & t < 0 \\ 2E_0, & t \geq 0 \end{cases}$$

di cui si riporta un grafico:

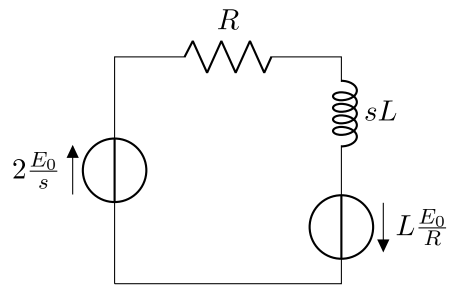


Iniziamo la risoluzione. Dovremmo dividere il problema in intervalli temporali:

- $t < 0$: qui sarà incognita, oltre a $i(t)$, anche la condizione iniziale $i_L(0^-)$. Appare quindi chiaro come mai abbiamo usato 0^- nelle formule: le condizioni iniziali che ci interessano sono quelle *un attimo prima* della transizione, e non dopo.

  La corrente $i_L(0^-)$ sull'induttore varrà quindi quanto quella nel circuito a regime costante, ergo $i_L(0^-) = \frac{E_0}{R}$.

- $t \geq 0$: ci troviamo sul transitorio, e dobbiamo quindi usare Laplace. Trasformiamo l'induttanza nel circuito equivalente col generatore di condizioni iniziali:



A questo punto l'incognita sarà la corrente $i_x(t)$ sul circuito, che potremo trovare con la seconda legge di Kirchoff:

$$-2\frac{E_0}{s} + RI_x(s) + sLI_x(s) - L\frac{E_0}{R} = 0 \Rightarrow I_x(s) = \frac{L\frac{E_0}{R} + 2\frac{E_0}{s}}{r + sL} = \frac{LE_0 s + 2RE_0}{RLs^2 + R^2 s}$$

Infine, vorremo riportare l'espressione ottenuta nel dominio del tempo, in quanto quello che abbiamo trovato è effettivamente:

$$I_x(s) = \mathcal{L}\{i_x(t)\}$$

Per fare questo abbiamo bisogno dell'**antitrasformata** di Laplace. Vediamo come si ricava.

1.3 Antitrasformata di Laplace

Data una forma $I_x(s) = \mathcal{L}\{i_x(t)\}$, vediamo come calcolare $i_x(t) = \mathcal{L}^{-1}\{I_x(t)\}$. Facciamo l'esempio con la trasformata:

$$I(s) = \frac{s^2 + 5}{3s^3 + 9s^2 + 6s}$$

Innanzitutto vorremo riportare il denominatore in forma *normalizzata*, cioè esprimere il termine di grado più alto senza coefficienti:

$$I(s) = \frac{\frac{s^2}{3} + \frac{5}{3}}{s^3 + 3s^2 + 2s}$$

A questo punto vorremo **fattorizzare** il denominatore:

$$I(s) = \frac{\frac{s^2}{3} + \frac{5}{3}}{s(s^2 + 3s + 1)} = \frac{\frac{s^2}{3} + \frac{5}{3}}{s(s+1)(s+2)}$$

Poniamo quindi:

$$I(s) = \frac{A_1}{s} + \frac{A_2}{s+1} + \frac{A_3}{s+2}$$

che ci permetterà di sfruttare il fatto che $\mathcal{L}^-1\left\{\frac{1}{s+a}\right\} = e^{-at}$ e $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} = u(t)$ (gradino di Heaviside), e quindi dire che:

$$i(t) = \left(A_1 + A_2 e^{-t} + A_3 e^{-2t}\right) u(t)$$

Questo equivale a riportare la frazione trovata in **fratti semplici**, da cui si ottiene:

$$A_1 = \frac{5}{6}, \quad A_2 = -2, \quad A_3 = \frac{3}{2}$$

e quindi:

$$i(t) = \left(\frac{5}{6} - 2e^{-t} + \frac{3}{2}e^{-2t}\right)u(t)$$

Vediamo un metodo rapido per il calcolo dei fratti semplici.

1.3.1 Teorema dei residui

Abbiamo visto che le trasformate di Laplace sulle funzioni che ricaviamo dai circuiti danno forme del tipo:

$$I(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$$

dove sia $N(s)$ che $D(s)$ sono polinomi. Scomponendo $D(s)$ in fattori $(s - p_1)^{\mu_1}, (s - p_2)^{\mu_2}, ...$, dove ogni fattore ha la sua molteplicità μ, si ha che $I(s)$ può ridursi a:

$$I(s) = \frac{A_1}{(s - p_1)^{\mu_1}} + \frac{A_2}{(s - p_2)^{\mu_2}} + ...$$

cioè assunti tutti $\mu = 1$:

$$I(s) = \sum_{i=1}^{n} \frac{A_i}{s - p_i}$$

Veniamo a come ricavare gli A_i. Dall'analisi complessa, possiamo usare il **teorema dei residui**:

$$A_i = \lim_{s \to p_i} (s - p_i) I(s)$$

dove i singoli p_i sono i **poli** della nostra funzione.

Ad esempio, applichiamo sull'esempio precedente:

$$A_1 = \lim_{s \to 0} s \cdot \frac{\frac{s^2}{3} + \frac{5}{3}}{s(s+1)(s+2)} = \frac{\frac{s^2}{3} + \frac{5}{3}}{(s+1)(s+2)} = \frac{\frac{5}{3}}{3} = \frac{5}{6}$$

e via dicendo.

Possiamo quindi risolvere l'ultimo passaggio dell'esercizio precendente. Avevamo ricavato la trasformata:

$$I_x(s) = \frac{LE_0 s + 2RE_0}{RLs^2 + R^2 s}$$

Normalizzando, si ha:

$$I_x(s) = \frac{\frac{E_0}{R}s + 2\frac{E_0}{L}}{s^2 + \frac{R}{L}s} = \frac{\frac{E_0}{R}s + 2\frac{E_0}{L}}{s\left(s + \frac{R}{L}\right)}$$

A questo punto possiamo impostare i fratti semplici:

$$I(s) = \frac{A_1}{s} + \frac{A_2}{s + \frac{R}{L}}$$

e risolvere col metodo dei residui:

$$A_1 = \lim_{s \to 0} s \cdot \frac{\frac{E_0}{R}s + 2\frac{E_0}{L}}{s\left(s + \frac{R}{L}\right)} = \frac{2E_0}{L} \cdot \frac{L}{R} = \frac{2E_0}{R}$$

$$A_2 = \lim_{s \to -\frac{R}{L}} \left(s + \frac{R}{L}\right) \cdot \frac{\frac{E_0}{R}s + 2\frac{E_0}{L}}{s\left(s + \frac{R}{L}\right)} = \frac{\frac{2E_0}{L} - \frac{E_0}{L}}{-\frac{R}{L}} = \frac{E_0}{R}$$

Si ritrova quindi la funzione di t:

$$i(t) = \left(2\frac{E_0}{R} - \frac{E_0}{R}e^{-\frac{R}{L}t}\right)u(t) = \frac{E_0}{R}\left(2 - e^{-\frac{R}{L}t}\right)u(t)$$

che equivale a quanto avevamo trovato risolvendo direttamente l'equazione differenziale, salvo il termine $u(t)$ per il gradino di Heaviside, che però non ci interessa in quanto avremmo preso comunque il transiente da $t = 0$ in poi, cioè combinando le soluzioni:

$$i(t) = \begin{cases} \frac{E_0}{R}, & t < 0 \\ \frac{E_0}{R}\left(2 - e^{-\frac{R}{L}t}\right), & t \geq 0 \end{cases}$$

1.3.2 Verifica dei risultati

Potremmo voler fare una verifica della validità dei risultati ottenuti dopo la risoluzione di un circuito con la trasformata di Laplace. Una prima verifica potrebbe essere considerare il limite:

$$\lim_{t \to +\infty} i(t)$$

cioè, dopo un tempo $t >> 0$, il circuito tende a un regime stazionario che corrisponde con quello che avremmo previsto prendendo il circuito a corrente continua? Nel caso precedente, notiamo come la corrente $i(t)$ dà:

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{E_0}{R}\left(2 - e^{-\frac{R}{L}t}\right)$$

che tende giustamente a $\frac{2E_0}{R}$.

Una verifica più sofisticata si può fare considerando le **variabili di stato** del circuito, cioè quei valori che non possono variare in maniera discontinua. Ad esempio, nell'esempio precedente, una variabile di stato è l'energia nell'induttore, cioè:

$$W_L(t) = \frac{1}{2}Li_L^2(t)$$

Questa non potrà mai essere discontinua, in quanto implicherebbe derivata infinita sulla discontinuità, e visto che $\frac{dW_L(t)}{dt} = P$ potenza, avremmo dal teorema di Boucherot che da qualche parte nel circuito erogherebbe (seppur istantaneamente) una potenza infinita, che è impossibile.

Verifichiamo quindi la continuità:

$$\lim_{t \to 0^-} i_L(t) \stackrel{?}{=} \lim_{t \to 0^+} i_L(t)$$

che nell'esempio è verificata da:

$$\lim_{t \to 0^-} i_L(t) = \lim_{t \to 0^+} i_L(t) = \frac{E_0}{R}$$