

0.1 Lezione del 25-09-24

Introduzione

Il corso di elettrotecnica riguarda lo studio dei **circuiti elettrici** e dei **macchinari elettrici**.

Analisi dei circuiti elettrici

Le leggi di Maxwell vanno a descrivere come si evolvono, nel tempo e nello spazio, i campi elettrici e magnetici. Purtroppo, le equazioni di Maxwell sono equazioni differenziali e legate fra di loro, ergo si possono spesso avere solo soluzioni numeriche. Esistono però casi particolari in cui si possono fare semplificazioni considerevoli.

Un **circuito elettrico** è formato da fili conduttori e **componenti circuitali**. All'interno di un circuito si va a descrivere un'onda elettrica:

$$\psi(s, t)$$

rappresentata come una funzione di spazio e tempo. Poniamo ad esempio la funzione, sulla sola posizione x :

$$\psi(x, t) = y \sin \left(\frac{2\pi}{\lambda} x - \frac{2\pi}{T} t \right)$$

Questa funzione ha comunque due variabili: la posizione x e il tempo t . Immaginiamo di prendere un punto x_0 sul circuito elettrico:

$$\psi(t) = y \sin \left(\frac{2\pi}{\lambda} x_0 - \frac{2\pi}{T} t \right)$$

Con $x_0 = 0$, annulliamo il primo termine. A questo punto abbiamo ottenuto una funzione in una sola variabile:

$$\psi(x_0, t) = y \sin \left(-\frac{2\pi}{T} t \right)$$

ovvero una sinusoide invertita che oscilla fra un massimo di y e un minimo di $-y$.

Questo significa che, mettendoci sul punto $x_0 = 0$ del circuito elettrico, notiamo che il valore dell'onda elettrica varia nel tempo seguendo questa funzione sinusoidale.

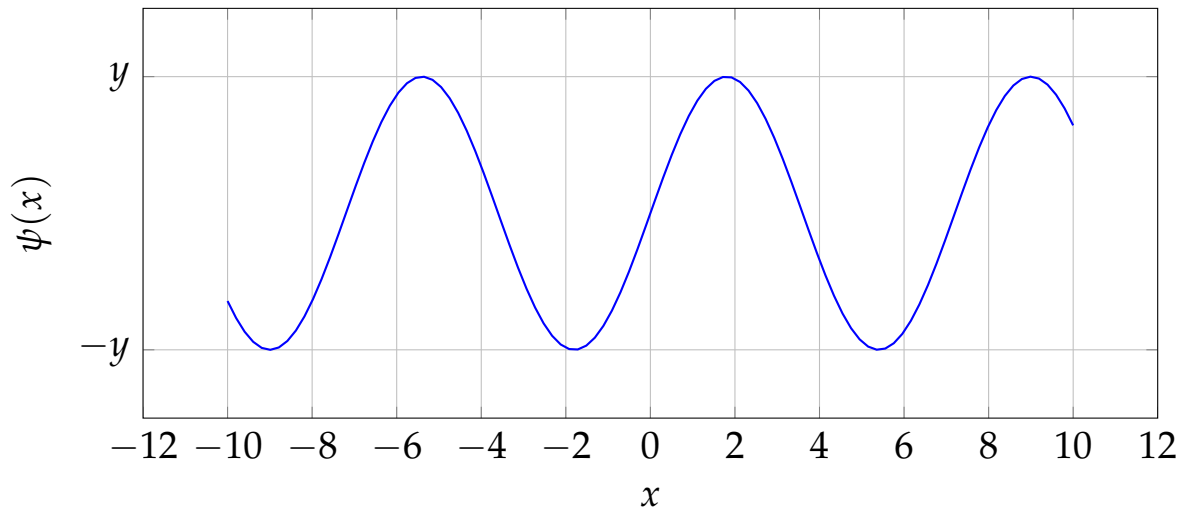
Possiamo fare il processo inverso: fissiamo il tempo t , e vediamo come varia l'onda elettrica su diverse posizioni x nel circuito. Abbiamo, simbolicamente:

$$\psi(x) = y \sin \left(\frac{2\pi}{\lambda} x - \frac{2\pi}{T} t_0 \right)$$

da cui ricaviamo l'equazione in una sola variabile t :

$$\psi(x) = y \sin \left(\frac{2\pi}{\lambda} x \right)$$

ovvero una senoide che, come prima, oscilla fra un massimo di y e un minimo di $-y$. Si riporta un grafico:



Questo significa che, all'istante $t_0 = 0$ notiamo che il valore dell'onda elettrica varia sulla lunghezza del circuito seguendo ancora questa funzione sinusoidale.

Possiamo provare a calcolare lunghezza d'onda e periodo di questa oscillazione: visto che il periodo del seno è 2π , abbiamo che nello spazio la lunghezza d'onda è λ e nel tempo il periodo è T .

Proviamo a calcolare λ : sappiamo che la lunghezza d'onda equivale alla velocità di propagazione sulla frequenza dell'oscillazione, ovvero:

$$\lambda = \frac{v}{f}$$

Posti i valori $300 \cdot 10^6$ m/s per v e 50 Hz per f (la frequenza della rete elettrica), abbiamo:

$$\lambda = \frac{3.00 \cdot 10^6 \text{ m/s}}{50 \text{ Hz}} = 6000 \text{ km}$$

Questa lunghezza d'onda diventa rilevante in trasmissioni elettriche su larga scala.

Possiamo fare considerazioni diverse se prendiamo in esempio le comunicazioni radio, dove si parla di frequenze $f \gg 50$ Hz, nell'ordine dei megahertz o gigahertz.

L'elevata velocità della corrente ci permette di fare un'importante approssimazione e considerare **circuiti a parametri concentrati**. Quest'ipotesi, in inglese *lumped element model*, ci permette di ignorare l'estensione fisica del circuito, e quindi le variazioni delle funzioni d'onda sulla variabile spazio s , concentrandosi sulla variabile tempo t .

Grandezze

Si usano le seguenti grandezze:

Intensità di corrente

0.1.1: Corrente elettrica

Si indica con I la corrente elettrica, misurata in Ampere [A], e definita come la variazione di carica:

$$I = \frac{dq}{dt}$$

Si prende come positivo il verso in cui si muovono i portatori di carica positive, anche se sappiamo nella stragrande maggioranza dei casi i portatori di carica essere negativi, e quindi il movimento vero e proprio degli elettroni in direzione opposta.

Notiamo che se un segmento di circuito da A a B si ha una corrente I_{AB} , vale:

$$I_{AB} = -I_{BA}$$

Differenza di potenziale

0.1.2: Differenza di potenziale

Si indica con V la differenza di potenziale o *tensione*, misurata in Volt [V], e definita come il lavoro necessario a spostare una carica elementare positiva da un punto A ad un punto B sulla carica:

$$V_{AB}(t) = \frac{L_{AB}(t)}{q(t)}$$

Il segno del potenziale è definito come *positivo* quando si deve vincere il campo magnetico per spingere la carica, ergo il campo elettrico svolge lavoro *negativo* sulla carica. Come prima, su segmenti di circuito da A a B vale:

$$V_{AB} = -V_{BA}$$

Riferimenti associati e non associati

I componenti circuitali, presi a sé, vengono detti **bipoli elettrici**, dal fatto che hanno 2 poli. Di un bipolo elettrico si può misurare la differenza di potenziale ai capi e la corrente che vi scorre attraverso.

Quando si parla di tensione, o si parla di differenze di potenziale, o si assume un riferimento (lo zero del potenziale). Non possiamo sapere a priori se il potenziale al capo di un bipolo è maggiore del potenziale all'altro capo: bisogna prima scegliere una direzione e poi vedere se il segno ricavato è concorde o meno con la nostra scelta.

Lo stesso vale per la corrente. I riferimenti concordi al verso della corrente si dicono **associati**, quelli discordi si dicono **non associati**.

Potenza elettrica

0.1.3: Potenza elettrica

Si indica con P la potenza elettrica, misurata in Watt [W] e definita come il prodotto:

$$P = IV$$

fra corrente e tensione.

Anche la potenza ha un segno, che in questo caso si riferisce a potenza *erogata* o *dissipata*. La potenza calcolata sui riferimenti associati positiva è dissipata, quella negativa è erogata. Viceversa, la potenza calcolata sui riferimenti non associati positiva è erogata, quella negativa è dissipata.

Energia

0.1.4: Energia

Si indica con W (non Watt!) l'energia, misurata in Joule [J], o in Kilowatt/ora (KW/h), e definita come l'integrale sul tempo della potenza:

$$W = \int_{-\infty}^t P dt$$

Leggi di Kirchhoff

Iniziamo col dare dei nomi a particolari punti del circuito elettrico: i punti di incontro di più fili prendono il nome di **nodi**, e i fili che collegano i bipoli ai nodi prendono il nome di **rami**. Da questo abbiamo che nei nodi si incontrano 3 o più rami.

Da qui possiamo definire la legge:

0.1.1: Prima legge di Kirchhoff

La somma algebrica delle correnti dei rami tagliati da una linea chiusa è uguale a 0. In particolare, la somma algebrica delle correnti entranti e uscenti da un nodo è uguale a 0.

Definiamo quindi il concetto di **maglia**: una maglia è un percorso chiuso di nodi e rami, ovvero un sottoinsieme di rami tali per cui spostandosi da un nodo all'altro si percorre ogni ramo una sola volta. Sulle maglie si ha:

0.1.2: Seconda legge di Kirchhoff

La somma algebrica delle cadute di potenziale lungo una maglia è uguale a 0.

0.2 Lezione del 26-09-24

Bipolo elettrico

Abbiamo introdotto i componenti circuitali come **bipoli elettrici**. In particolare, diciamo che un bipolo elettrico è un componente, con una certa differenza di potenziale V_{AB} ai suoi capi e una corrente $i_{AB}(t)$ che vi scorre all'interno, tale per cui si può definire una funzione del tipo:

$$V_{AB} = f(i_{AB}(t))$$

Possiamo individuare alcune caratteristiche importanti dei bipoli:

- **Linearità:** un bipolo si dice lineare se la funzione che lega voltaggio e corrente è lineare. Tutti i bipoli che studieremo sono lineari (resistenze, capacitori, ecc...). Esistono però svariati bipoli che hanno risposte non lineari ai voltaggi/correnti a cui vengono sottoposti (diodi (risposte diverse a direzioni diverse della corrente), amplificatori operazionali, ecc...).
- **Tempo invarianza:** un bipolo si dice tempo invariante quando le sue caratteristiche non variano nel tempo.
- **Memoria:** un bipolo si dice dotato di memoria quando i suoi valori di corrente e tensione attuali dipendono da valori di corrente e tensioni ad un'istante t precedente. I bipoli dotati di memoria presentano solitamente *cicli di isteresi*.
- **Passività/attività:** si dice **passivo** un bipolo che dissipa potenza, e **attivo** un bipolo che la eroga. Più propriamente, si ha che un bipolo è passivo quando l'energia su di esso, presa un riferimento associato, è ≥ 0 .

Resistori

Un resistore è un componente circuitale caratterizzato dalla legge di Ohm ($J = \sigma E$), e quindi formato da un materiale *ohmico* che ha risposta lineare in densità di corrente alle variazioni del campo. Si indica come:



0.2.1: Prima legge di Ohm

Il voltaggio è legato alla corrente, in un resistore, secondo la relazione:

$$V_R(t) = R i_R(t)$$

dove R prende il nome di **resistenza**, misurata in Ohm $[\Omega]$, definita come:

$$R = \frac{V}{i}$$

Resistenza e resistività

Conosciamo la legge di Ohm sui materiali ohmici riportata prima. Da questa legge si ricava:

0.2.2: Seconda legge di Ohm

La resistenza di un filo di lunghezza l e sezione s è data da:

$$R = \rho \frac{l}{s}$$

dove ρ prende il nome di **resistività**, misurata in Ohm per metro [$\Omega \cdot \text{m}$].

Questo significa che la resistenza cresce con il crescere della lunghezza, e diminuisce con il crescere della sezione.

In verità questa non sono le uniche caratteristiche che influenzano la resistenza: un apporto significativo è dato anche dalla **temperatura**, alla quale la resistenza ha proporzionalità quasi lineare, ma che noi ignoreremo.

Conduttanza e conducibilità

Conviene definire altre due unità di misura: l'inverso della resistenza, detta **conduttanza**, che si misura in Siemens [$\Omega^{-1} = \text{S}$], o in **mho** [$\mathcal{U} = \Omega^{-1}$]:

$$G = \frac{1}{R}$$

e l'inverso della resistività, detta **conducibilità**, che si misura in [$\Omega^{-1} \cdot \text{m}^{-1}$]:

$$\sigma = \frac{1}{\rho}$$

I resistori sono inoltre:

- Tempo invarianti (a patto di trascurare la temperatura);
- Senza memoria;
- Passivi (dissipano potenza per **effetto Joule**). Ciò si può dimostrare calcolando la potenza dalla prima legge di Ohm:

$$p(t) = v_{AB}(t) \cdot i_{AB}(t) = R i_{AB}^2(t) \geq 0$$

e calcolando l'energia come integrale:

$$w(t) = \int_{-\infty}^t p(t) dt \Rightarrow w(t) > 0$$

Circuiti aperti/chiusi

Le resistenza, soprattutto nei loro casi limite, aiutano a modellizzare varie parti di un circuito:

- **Cortocircuito:** indicato da una resistenza nulla, ergo:

$$V_{AB}(t) = 0 \Leftrightarrow R = 0$$

Modellizza il filo ideale, ergo ciò che per noi è un ramo.

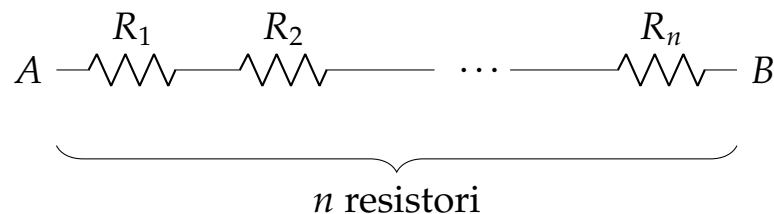
- **Circuito aperto:** indicato da una corrente nulla, ergo:

$$i_{AB} = 0 \Leftrightarrow R = +\infty$$

Modellizza interruzioni nel circuito: si può dimostrare che la corrente attraverso un'interruzione in un circuito è nulla sfruttando la prima legge di Kirchhoff: una linea chiusa che comprende il nodo finale di un'interruzione avrà un ramo entrante e 0 uscenti, ovvero corrente entrante nulla.

Resistenze in serie

Poniamo di avere una configurazione di resistenze del tipo:



Vogliamo calcolare una resistenza R_{eq} che valga quando la resistenza cumulativa di tutte e n le resistenze. Abbiamo allora che la corrente lungo ogni resistenza $i(t)$ è costante, mentre ogni resistenza contribuisce al potenziale V_{AB} con una certa caduta di potenziale $V_1(t), V_2(t), \dots, V_n(t)$. Si applica quindi la prima legge di Ohm:

$$\begin{aligned} V_{AB} &= V_1 t + V_2 t + \dots + V_n t = R_1 \cdot i(t) + R_2 \cdot i(t) + \dots + R_n \cdot i(t) \\ &= i(t) \cdot (R_1 + R_2 + \dots + R_n) \end{aligned}$$

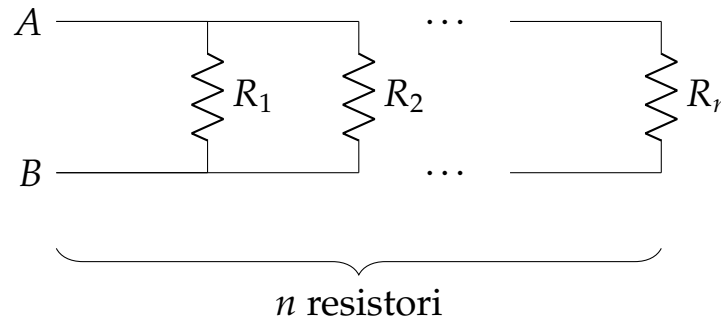
quindi, da $V_{AB} = i(t) R_{eq}$ si ha:

0.2.3: Resistenze in serie

$$R_{eq} = R_1 + R_2 + \dots + R_n$$

Resistenze in parallelo

Poniamo di avere le resistenze in parallelo invece che in serie:



Vogliamo ancora calcolare una resistenza R_{eq} che valga quando la resistenza cumulativa di tutte e n le resistenze. Qui abbiamo che la differenza di potenziale lungo ogni resistenza $V(t)$ costante. Si applica ancora la prima legge di Ohm:

$$i = i_1(t) + i_2(t) + \dots + i_n(t) = \frac{V_{AB}(t)}{R_1} + \frac{V_{AB}(t)}{R_2} + \dots + \frac{V_{AB}(t)}{R_n}$$

conviene raccogliere e passare alle conduttanze:

$$G_{eq} = V_{AB}(t)(G_1 + G_2 + \dots + G_n) = G_{eq} \cdot V_{AB}(t)$$

Ora, se $G = \frac{1}{R}$:

$$R_{eq} = G_{eq}^{-1} = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_n} \right)^{-1}$$

quindi, si ha:

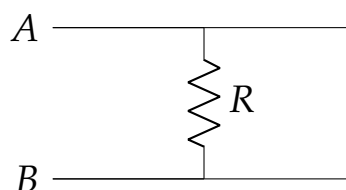
0.2.4: Resistenze in parallelo

$$R_{eq} = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_n} \right)^{-1}$$

0.3 Lezione del 27-09-24

Resistenza e cortocircuito in parallelo

Poniamo di avere la configurazione:



Dove un resistore è in parallelo ad un corto circuito. Intuitivamente, tutta la corrente passerà dal cortocircuito, e non dalla resistenza. Possiamo modellizzare questo fatto in due modi:

- Attraverso la formula per le resistenze in parallelo, avremo che:

$$R_{eq} = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)^{-1} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}, \quad R_1 = 0 \Rightarrow R_{eq} = \frac{0}{R_2} = 0$$

ergo resistenza nulla.

La prima trasformazione è necessaria in quanto rimuove i vincoli sul dominio di R_1 e R_2 (che altrimenti non potrebbero essere 0).

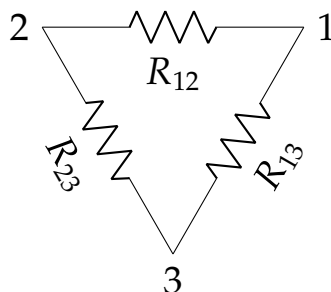
- Notiamo che A e B sono effettivamente allo stesso potenziale, ergo abbiamo differenza di potenziale $V_{AB} = 0$ ai capi della resistenza. Applicando quindi la prima legge di Ohm $V_{AB} = i(t)R$ si ha $i(t) = 0$, cioè corrente costante nulla sulla resistenza.

Altre configurazioni di resistenze

Esistono altri modi di configurare le resistenze, che permettono di studiare circuiti su cui i metodi studiati finora non funzionano.

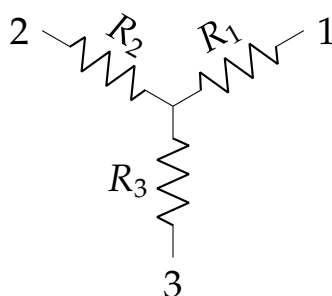
Resistenze a triangolo

Nelle resistenze a triangolo, una singola maglia di 3 nodi forma un triangolo con i lati 3 resistenze:



Resistenze a stella

Nelle resistenze a stella, più resistenze vengono collegate, da un'estremo, ad un singolo nodo centrale:



Si possono trasformare resistenze a triangolo in resistenze a stella aggiungendo un nodo centrale O e collegandovi i 3 nodi già esistenti attraverso le resistenze interne:

0.3.1: Resistenze da triangolo a stella

$$R_1 = \frac{R_{12}R_{13}}{R_{12} + R_{13} + R_{23}}$$

$$R_2 = \frac{R_{12}R_{23}}{R_{12} + R_{13} + R_{23}}$$

$$R_3 = \frac{R_{23}R_{13}}{R_{12} + R_{13} + R_{23}}$$

Allo stesso modo, si possono trasformare resistenze a stella in resistenze a triangolo unendo i nodi fra di loro attraverso le resistenze esterne:

0.3.2: Resistenze da stella a triangolo

$$R_{12} = \frac{R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3}{R_3}$$

$$R_{13} = \frac{R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3}{R_2}$$

$$R_{23} = \frac{R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3}{R_1}$$

Algoritmo per la resistenza equivalente

A questo punto, si possono semplificare circuiti di resistori arbitrari applicando l'algoritmo:

La resistenza equivalente è a volte detta anche *resistenza vista*. Questo perché l'intero circuito si comporterà, per una qualsiasi rete esterna, come un singolo resistore di resistenza R_{eq} , ovvero avrà la stessa **risposta** di un singolo resistore di resistenza R_{eq} . Analiticamente, questo significa che la funzione f in $v(t) = f(i(t))$ (o la sua inversa) sono uguali per i due circuiti.

Algoritmo 1 Calcolo della resistenza equivalente

```
while ci sono  $> 1$  resistenze do  
  Semplificare le resistenze in serie  
  Semplificare le resistenze in parallelo  
  Se non hai semplificato niente, trasforma un triangolo in stella o  
  viceversa.  
end while
```

0.4 Lezione del 02-10-24

Generatori

I generatori sono i componenti che spostano le cariche attraverso le reti elettriche. Dividiamo i generatori in due macrocategorie, in base alle loro caratteristiche:

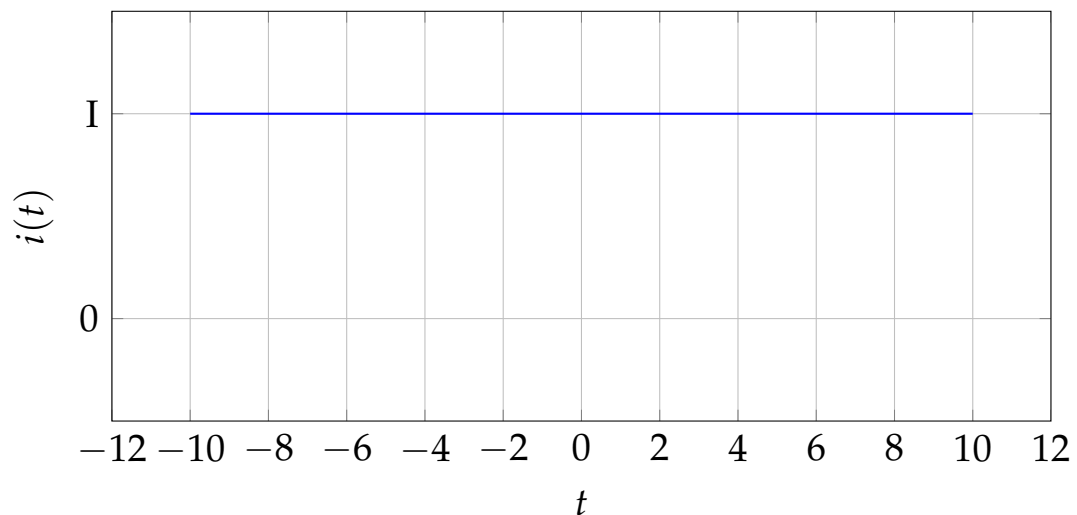
- **Indipendenti:** hanno sempre le stesse caratteristiche, e portano energia all'interno del circuito;
- **Dipendenti:** hanno caratteristiche *pilotate* da altri fattori del circuito, non portano energia in esso e quindi non sono diversi dagli altri bipoli passivi già visti.

Inoltre dividiamo entrambe in altre due categorie, in base al tipo di operazione che svolgono:

- **Generatori di tensione:** mantengono i loro capi a differenza di potenziale costante;
- **Generatori di corrente:** mantengono una corrente costante al loro interno.

Infine, dividiamo in due ulteriori modalità di operazione:

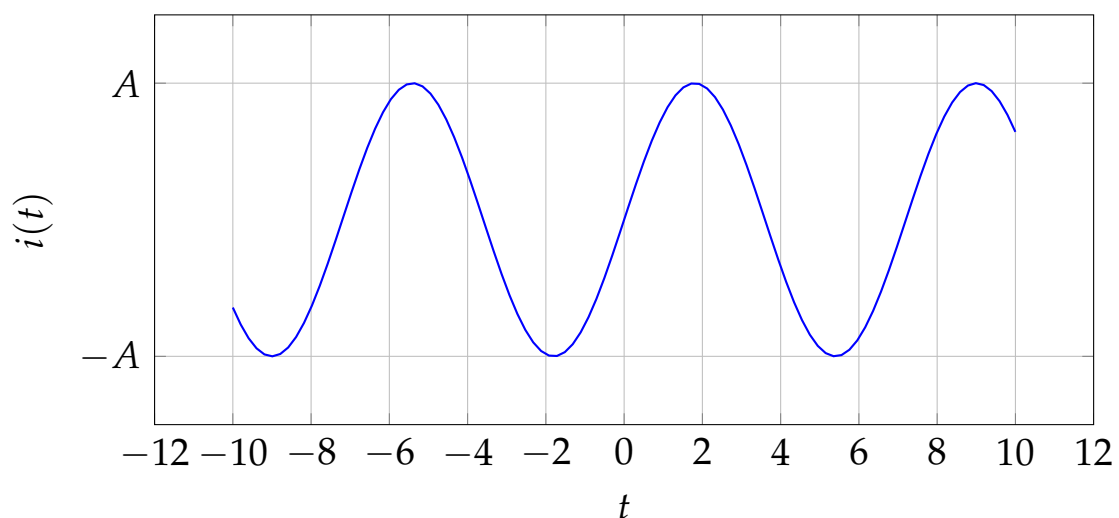
- **Corrente continua:** mantengono la corrente costante. Si dicono C.C. (Corrente Continua), o D.C. (Direct Current). Il grafico della corrente sarà:



- **Corrente alternata:** mantengono la corrente in regime sinusoidale. Si dicono C.A. (Corrente Alternata), o A.C. (Alternating Current). Il grafico della corrente alternata è stato già visto all'inizio del corso, ha equazione:

$$i(t) = A \sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right)$$

con A ampiezza e T periodo, e grafico:



Esistono poi altri regimi di applicazione della corrente, che vedremo per casi specifici (impulsi, gradini, ecc...).

Riportiamo intanto ogni combinazione delle prime quattro tipologie nel dettaglio.

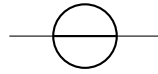
Generatori di tensione

Un generatore di tensione (o voltaggio) ideale è un componente circuitale che mantiene i suoi capi A e B ad una differenza di potenziale V_{AB} costante,

ovvero:

$$v(t) = E(t) = V$$

dove con E si indica la forza elettromotrice. Si indica come:



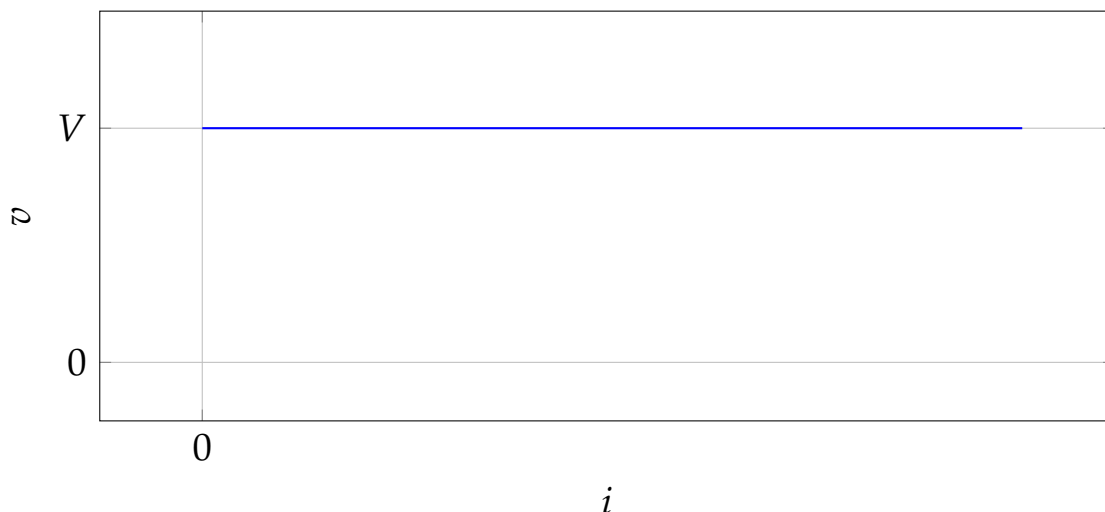
Si nota che a voltaggio nullo, un generatore di tensione equivale a un corto circuito (un filo ideale).

Correlazione con la corrente

La tensione erogata da un generatore di tensione è costante, qualsiasi sia la corrente che lo attraversa:

$$v(i) = \text{const.}$$

Il grafico di correlazione corrente-voltaggio sarà quindi:



Correlazione con la potenza

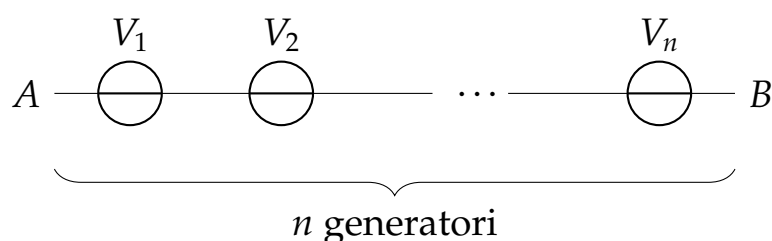
Tradizionalmente si descrivono i generatori di tensione attraverso riferimenti non associati di corrente e tensione. Resta il fatto che la potenza:

$$p(t) = v(t)i(t) = E(t)i(t)$$

quando è erogata dal generatore, è > 0 .

Collegamenti in serie

Per sommare i contributi al voltaggio di più generatori di voltaggio, li disponiamo in serie:

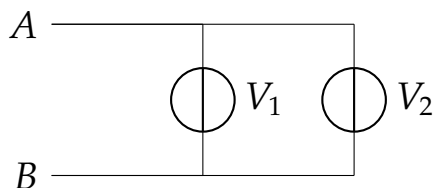


Abbiamo che il contributo totale dei generatori equivale a quello di un singolo generatore E_T di voltaggio:

$$V_T = V_1 + V_2 + \dots + V_n$$

Collegamenti in parallelo

Non si possono collegare generatori di voltaggio in parallelo, a meno che questi non abbiano lo stesso voltaggio (e quindi risultino in movimento nullo di carica):



Dove si ha, dall'applicazione della seconda legge di Kirchoff:

$$V_1 - V_2 = 0 \Rightarrow V_1 = V_2$$

che sarebbe altrimenti violata.

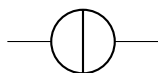
Nella realtà, se si provasse a collegare due generatori di tensione di voltaggio diverso in parallelo, questi proverebbero a imporre la loro differenza di potenziale sui due rami del circuito, creando forti correnti, e probabilmente causando danni termici ad esso o a loro stessi.

Generatori di corrente

Un generatore di corrente ideale è un componente circuitale che mantiene attraverso di sé una corrente costante, ovvero:

$$i(t) = I$$

Si indica come:



Si nota che a corrente nulla, un generatore di corrente equivale a un circuito aperto.

Correlazione con il voltaggio

Un generatore di corrente mantiene la stessa corrente qualsiasi sia il voltaggio.

$$i(v) = \text{const.}$$

Il grafico di correlazione corrente-voltaggio sarà quindi:



Correlazione con la potenza

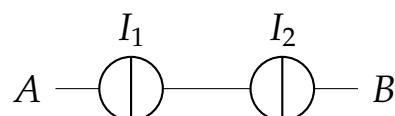
Come per i generatori di tensione, si descrivono i generatori di corrente attraverso riferimenti non associati di corrente e tensione. Resta comunque il fatto che la potenza:

$$p(t) = v(t)i(t) = v(t)I(t)$$

quando è erogata dal generatore, è > 0 .

Collegamenti in serie

Non si possono collegare generatori di corrente in serie, a meno che questi non abbiano la stessa carica (e quindi risultino in movimento uniforme di carica):



Dove si ha, dall'applicazione della prima legge di Kirchhoff:

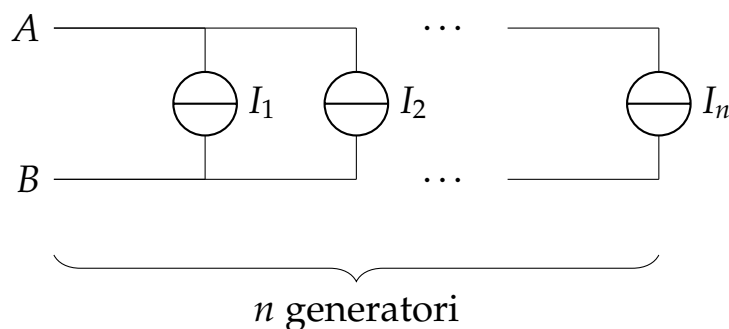
$$I_1 - I_2 = 0 \Rightarrow I_1 = I_2$$

che sarebbe altrimenti violata.

Come prima, questa situazione non è effettivamente modellizzabile nella realtà usando il modello studiato. In verità il generatore di corrente in sé per sé è più uno strumento teorico che serve a modellizzare fenomeni diversi (transistor, amplificatori, ecc...).

Collegamenti in parallelo

Per sommare i contributi alla corrente di più generatori di corrente, li disponiamo in parallelo:



Abbiamo che il contributo totale dei generatori equivale a quello di un singolo generatore E_T di corrente:

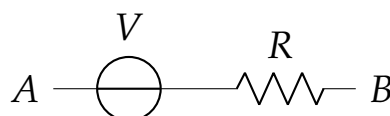
$$I_T = I_1 + I_2 + \dots + I_n$$

Resistenza interna

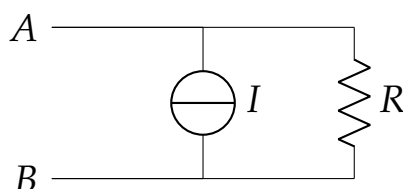
Possiamo combinare i componenti visti finora per creare modelli più realistici. Innanzitutto, è improbabile che un generatore reali applichi resistenza nulla alle cariche che vi scorrono dentro. Aggiungiamo quindi una resistenza (solitamente piccola per i generatori di tensione ed elevata per i generatori di corrente) al generatore, che chiameremo **resistenza interna**. Questa resistenza rappresenterà la potenza che viene dissipata per effetto Joule.

La resistenza si disporrà come segue per i diversi tipi di generatore:

- **Generatore di tensione:** resistenza in serie;



- **Generatore di corrente:** resistenza in parallelo.



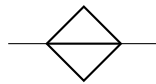
Notiamo che i casi visti prima come impossibili, di generatori di tensione in parallelo e di generatori di corrente in serie, sono rappresentabili quando si rilascia l'ipotesi che i generatori siano ideali e si introducono resistenze interne.

Generatori dipendenti

I generatori dipendenti, detti anche controllati o pilotati, sono particolari tipi di generatore il cui voltaggio (o corrente) dipende dal valore del voltaggio (o corrente) di un'altro punto del circuito, scalato di un qualche coefficiente. Si indicano come i generatori indipendenti ma all'interno di un rombo invece che di un cerchio.

Abbiamo quindi 4 tipi fondamentali di generatori dipendenti:

- **Generatori di tensione**, si indicano come:



- **Generatore di tensione pilotato in tensione:** comandato dalla funzione:

$$v(t) = \alpha \cdot v(t)$$

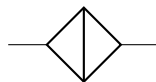
su un punto arbitrario dove si calcola $i(t)$.

- **Generatore di tensione pilotato in corrente:** comandato dalla funzione:

$$v(t) = \alpha \cdot i(t)$$

su un punto arbitrario dove si calcola $v(t)$.

- **Generatori di corrente**, si indicano come:



- **Generatore di corrente pilotato in tensione:** comandato dalla funzione:

$$i(t) = \alpha \cdot v(t)$$

su un punto arbitrario dove si calcola $v(t)$.

- **Generatore di corrente pilotato in corrente:** comandato dalla funzione:

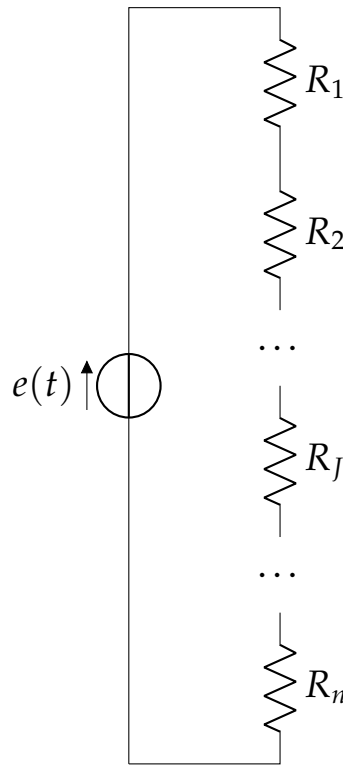
$$i(t) = \alpha \cdot i(t)$$

su un punto arbitrario dove si calcola $i(t)$.

Bisogna notare che, come già riportato, un generatore dipendente non è diverso da un bipolo passivo in termini di potenza: non porta nessuna energia esterna all'interno del circuito. Si può anzi dire che è necessario avere almeno un generatore indipendente per avere spostamento di carica all'interno del circuito.

Partitore di tensione

Analizziamo il seguente circuito:



Reti di questo tipo prendono il nome di **partitori di tensione**, e hanno lo scopo di partizionare una certa differenza di potenziale in diverse frazioni proprie.

Poniamo di voler calcolare la caduta di potenziale su una particolare resistenza, diciamo la R_J . Avremo allora, dalla seconda legge di Kirchhoff:

$$-e(t) + R_1(t)i(t) + R_2(t)i(t) + \dots + R_J(t)i(t) + \dots + R_n(t)i(t) = 0$$

che raccogliendo la corrente comune diventa:

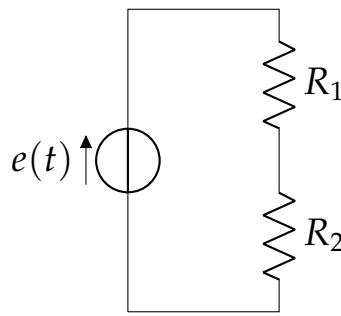
$$e(t) = (R_1 + R_2 + \dots + R_J + R_n)i(t) = i(t) \sum_{i=1}^n R_i$$

somma delle resistenze per corrente. A questo punto possiamo applicare la legge di Ohm per ottenere la caduta di potenziale:

$$V_J(t) = R_J i(t) = e(t) \frac{R_J}{\sum_{i=1}^n R_i}$$

cioè il rapporto fra la resistenza interessata e la resistenza complessiva del circuito, moltiplicata per la tensione.

Vediamo l'esempio di un partitore di tensione con due resistenze, in due casi particolari:



- **Caso 1:** $R_1 = R_2$

Applicando la formula per V_1 , si avrà:

$$V_1 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} e(t) = \frac{1}{2} e(t) = \dots = V_2$$

uguale per V_2 , cioè a resistenze uguali partizioniamo il voltaggio in parti uguali.

- **Caso 2:** $R_2 = 0$

Prendiamo il caso dove una resistenza è nulla, ergo corrisponde ad un cortocircuito. Avremo, dalla formula per V_1 :

$$V_1 = \frac{R_1}{R_1 + 0} e(t) = e(t)$$

cioè l'intero potenziale si distribuisce su R_1 . Su R_2 avremo invece:

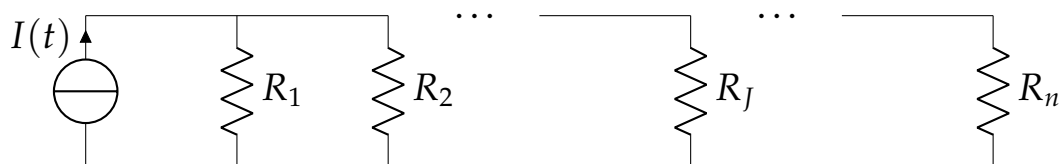
$$V_2 = \frac{0}{R_1 + 0} e(t) = 0$$

cioè, non c'è caduta di potenziale su V_2 .

Questi ultimi due calcoli, che potevamo chiaramente svolgere applicando semplicemente la legge di Ohm, dimostrano comunque che le leggi funzionano anche in questi casi semplici.

Partitore di corrente

Analizziamo quindi il seguente circuito:



Reti di questo tipo hanno uno scopo simile a quello della rete vista prima, solo riguardo alla corrente: prendono infatti il nome di **partitori di corrente**.

Poniamo di voler calcolare la corrente su una singola resistenza. Potremo dire che la corrente complessiva è, dalla prima legge di Kirchhoff:

$$I_T(t) = I_1(t) + I_2(t) + \dots + I_J(t) + \dots + I_n(t)$$

Un'altro modo di ottenere queste correnti è dalla legge di Ohm, usando le conduttanze invece delle resistenze:

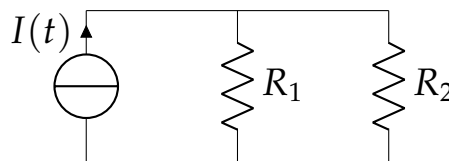
$$I = \frac{V}{R} \Rightarrow I = GR, \quad I(t) = v(t) \sum_{i=1}^n G_i$$

A questo punto, possiamo dire che la corrente nella J-esima resistenza vale:

$$I_J(t) = v(t)G_n = I(t) \frac{G_J}{\sum_{i=1}^n G_i}$$

cioè il rapporto fra la conduttanza (della resistenza) interessata e la conduttanza complessiva del circuito, moltiplicata per la corrente.

Vediamo, come prima, l'esempio di un partitore di corrente con due resistenze, in due casi particolari:



- **Caso 1:** $R_1 = R_2$

Applicando la formula per I_1 , si avrà:

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{\frac{1}{R_1}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}} I(t) = \frac{\frac{1}{R_1}}{\frac{R_2 + R_1}{R_1 R_2}} I(t) = \frac{R_1 + R_2}{R_1(R_1 + R_2)} I(t) \\ &= \frac{R_2}{R_1 + R_2} I(t) = \frac{1}{2} I(t) = \dots = I_2 \end{aligned}$$

uguale per I_2 , cioè a resistenze uguali partizioniamo la corrente in parti uguali.

- **Caso 2:** $R_2 = 0$

Prendiamo il caso dove una resistenza è nulla, ergo corrisponde ad un cortocircuito. Avremo, dalla formula per I_1 :

$$I_1 = \frac{\frac{1}{R_1}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}} I(t) = \dots = \frac{R_2}{R_1 + 0} I(t) = 0$$

cioè, non c'è corrente su R_1 . Su R_2 avremo invece:

$$I_2 = \dots = \frac{R_1}{R_1 + 0} I(t) = I(t)$$

cioè, l'intera corrente passa dal cortocircuito.

Come prima, questi calcoli dimostrano che le leggi funzionano anche su casi semplici.

0.5 Lezione del 03-10-24

Principio di sovrapposizione degli effetti

Possiamo sfruttare la linearità delle equazioni che descrivono i circuiti visti finora per dimostrare il seguente risultato:

0.5.1: Principio di sovrapposizione

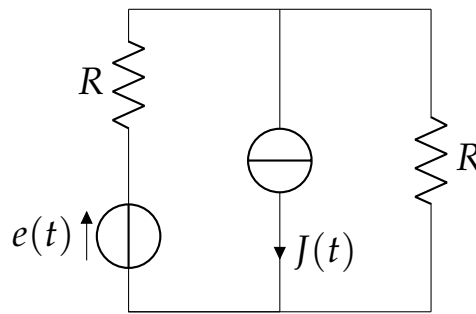
La risposta di una rete alla sollecitazione di più generatori indipendenti può essere ottenuta considerando ciascun generatore *separatamente attivo* e sommando algebricamente le risposte.

Nel dettaglio, in un circuito con generatori di voltaggio e tensione, questo significa prendere ogni generatore, uno per volta, e considerarlo come l'unico attivo, disattivando gli altri. Disattivare un generatore significa impostare il voltaggio (o la corrente) emessa a 0. Quindi:

- **Generatori di tensione:** disattivare significa trasformare in cortocircuiti ($e(t) = 0$);
- **Generatori di corrente:** disattivare significa trasformare in circuiti aperti ($I(t) = 0$).

Algebricamente, se vogliamo ricavare la corrente o il voltaggio su una maglia di un circuito con n generatori, possiamo porla come la somma delle $I'_x + I''_x + \dots + I^n_x$ correnti ($V'_x + V''_x + \dots + V^n_x$ voltaggi) ricavati da ogni generatore preso singolarmente.

Facciamo un'esempio:



Poniamo di voler calcolare la potenza dissipata dal resistore destro. Potremo applicare quanto ricavato da Ohm, ergo:

$$P_R = RI_x^2$$

con I_x la corrente che passa sul resistore destro.

Questa corrente si calcola agilmente attraverso il principio di sovrapposizione. Poniamo quindi $I_x = I'_x + I''_x$, con I'_x data dal generatore di tensione $e(t)$, e I''_x data dal generatore di corrente $J(t)$.

Calcoliamo quindi le correnti trovate in entrambi i casi:

- I'_x , **generatore di tensione attivo**. Si ha che il generatore di corrente, disattivato, equivale al circuito aperto, ergo l'unica maglia è quella che collega in serie le due resistenze. Da qui si calcola velocemente che:

$$I'_x = \frac{e(t)}{2R}$$

oppure si applica la seconda legge di Kirchhoff:

$$e(t) - I'_x R - I'_x R = 0$$

da cui si ricava lo stesso risultato.

- I''_x , **generatore di corrente attivo**. Si ha che il generatore di tensione, disattivato, equivale al circuito chiuso, ergo abbiamo quello che è effettivamente un partitore di corrente formato da due resistenze in parallelo. Visto che le due resistenze sono uguali, possiamo dire che la corrente è partizionata ugualmente, facendo attenzione ai segni (il generatore di corrente ha direzione opposta al generatore di tensione), cioè:

$$I''_x = -J(t) \frac{G_R}{G_{tot.}} = -J(t) \frac{R}{R + R} = -\frac{J(t)}{2}$$

A questo punto otteniamo la corrente totale come:

$$I_x = I'_x + I''_x = \frac{e(t)}{2R} - \frac{J(t)}{2}$$

e la potenza come:

$$P_R = R \left(\frac{e(t)}{2R} - \frac{J(t)}{2} \right)^2$$

0.6 Lezione del 04-10-24

Metodo del tableau

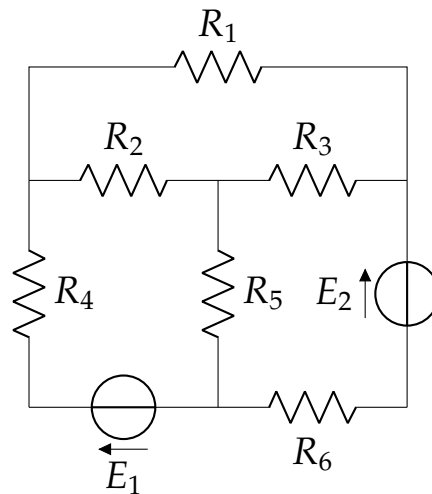
Vediamo un metodo generale per la risoluzione completa di un circuito, detto metodo delle correnti di ramo, o *del tableau*. Di base, si hanno r incognite per r rami, ergo le correnti che passano nei rispettivi rami. Applichiamo quindi il seguente algoritmo:

1. Dare un nome a tutti i nodi (A_1, A_2, \dots, A_n);
2. Dare un nome a tutte le correnti di ramo (I_1, I_2, \dots, I_n). Si noti che in questo passaggio il verso delle correnti è puramente arbitrario: il segno positivo o negativo della corrente trovata ci darà il verso rispetto al riferimento (associato o meno) scelto.
3. Scrivere $n - 1$ equazioni per $n - 1$ nodi applicando la prima legge di Kirchhoff. Si scelgono $n - 1$ equazioni perché, essendo la corrente vincolata dalla legge di Kirchhoff, la n -esima equazione sarà linearmente dipendente alle altre, ergo ridondante in informazioni riguardo al circuito.
4. Scrivere $r - n + 1$ equazioni con la seconda legge di Kirchhoff. La prima maglia si sceglie a caso, mentre le successive maglie si scelgono cancellando un ramo della maglia scelta al passaggio scorso. Questa procedura è, ancora una volta, necessaria per evitare la dipendenza lineare delle equazioni trovate.

Seguendo questi passaggi, si trova un sistema lineare in r variabili con r equazioni, che sappiamo essere determinato e risolvibile come:

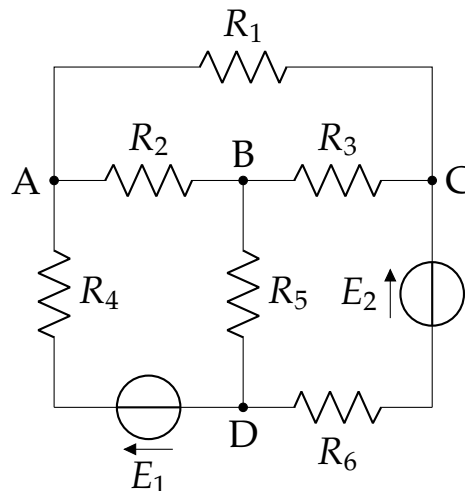
$$Ax = b \Rightarrow x = A^{-1}b$$

Prendiamo in esempio il seguente circuito:

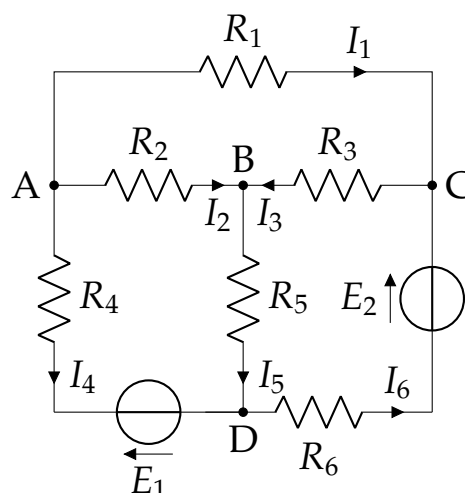


Eseguiamo i passi in ordine.

1. Innanzitutto, si danno i nomi A , B , C e D ai nodi del circuito:



2. Quindi, si danno i nomi I_1 , I_2 , I_3 , I_4 , I_5 e I_6 , e i versi di percorrenza alle correnti sui rispettivi rami:



3. A questo punto possiamo applicare la prima legge di Kirchhoff su $n - 1$ nodi, diciamo A , B e C :

$$A : I_1 + I_2 + I_4 = 0$$

$$B : I_2 + I_3 = I_5$$

$$C : I_1 + I_6 = I_3$$

La legge di Kirchhoff applicata al nodo D qui sarebbe inutile, in quanto fornirebbe:

$$D : I_5 + I_4 = I_6$$

che potevamo già ottenere sostituendo la C alla B :

$$C : I_2 + I_3 = I_5 \Rightarrow I_2 + I_1 + I_6 = I_5$$

e a questo punto usando la A come $I_1 + I_2 = -I_4$:

$$\Rightarrow -I_4 + I_6 = I_5 \Rightarrow I_5 + I_4 = I_6$$

4. Completiamo il sistema introducendo $r - n + 1 = 3$ equazioni ricavate applicando la seconda legge di Kirchhoff in senso antiorario. Dovremo prendere i segni delle cadute di potenziale tenendo conto della direzione della corrente scelta su quel ramo.

Prendiamo innanzitutto la maglia in basso a sinistra:

$$-E_1 + R_5 I_5 + R_2 I_2 - R_4 I_4 = 0$$

ed eliminiamo il ramo di corrente I_4 . Quindi prendiamo la maglia formata dalla parte superiore e dalla parte in basso a destra del circuito:

$$E_2 + R_1 I_1 - R_2 I_2 - R_5 I_5 - R_6 I_6 = 0$$

ed eliminiamo il ramo di corrente I_5 o I_6 (è irrilevante per il prossimo passaggio), in quanto prenderemo come ultima la maglia in alto:

$$R_1 I_1 - R_2 I_2 + R_3 I_3 = 0$$

Conclusi questi passaggi, abbiamo ricavato il sistema lineare:

$$\begin{cases} I_1 + I_2 + I_4 = 0 \\ I_2 + I_3 = I_5 \\ I_1 + I_6 = I_3 \\ -E_1 + R_5 I_5 + R_2 I_2 - R_4 I_4 = 0 \\ E_2 + R_1 I_1 - R_2 I_2 - R_5 I_5 - R_6 I_6 = 0 \\ R_1 I_1 - R_2 I_2 + R_3 I_3 = 0 \end{cases}$$

Possiamo ricavare le matrici A , x e b del sistema, ed esprimerlo come $Ax = b$:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & R_2 & 0 & -R_4 & R_5 & 0 \\ R_1 & -R_2 & 0 & 0 & -R_5 & -R_6 \\ R_1 & -R_2 & R_3 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_A \underbrace{\begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_5 \\ I_6 \end{pmatrix}}_x = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ E_1 \\ -E_2 \\ 0 \end{pmatrix}}_b$$

Il sistema si risolve con qualsiasi metodo di risoluzione di sistemi lineari.

Notiamo come il metodo del tableau ci permette di notare due fatti già visti sui circuiti.

Innanzitutto, abbiamo che fra i termini noti b compaiono solo le correnti e i voltaggi dei generatori indipendenti. Senza di questi, il sistema sarebbe di equazioni omogenee, e quindi ammetterebbe unica soluzione 0. Questa affermazione è equivalente a quella già vista: sono i generatori indipendenti a portare energia dentro il circuito.

Possiamo poi dire che il metodo del tableau è compatibile col principio di sovrapposizione. Presi separatamente i generatori, infatti, avremo x', x'', \dots, x^n soluzioni date da b', b'', \dots, b^n vettori b , ergo:

$$x = x' + x'' + \dots + x^n = A^{-1}b' + A^{-1}b'' + \dots + A^{-1}b^n$$

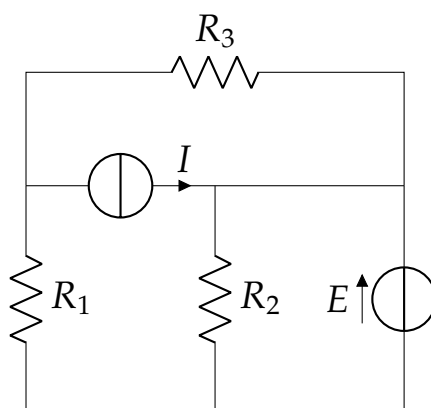
Intuitivamente, la matrice A rappresenta la risposta del circuito a diversi stimoli b', b'', \dots, b^n . Nell'esempio, questi sono i generatori indipendenti:

$$b' : \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ E_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad b'' : \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -E_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

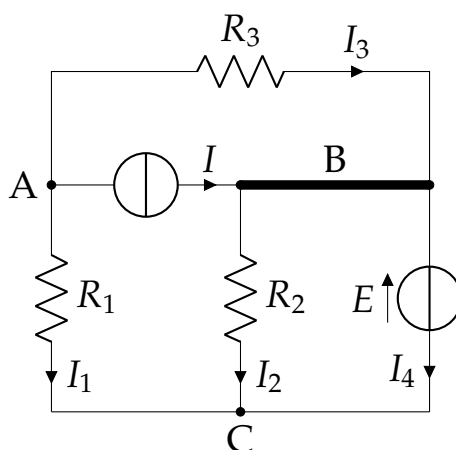
Circuiti con generatori di corrente

Quando si applica il metodo del tableau ad un circuito con generatori di corrente, bisogna notare che questi riducono il numero di incognite (le correnti) del sistema, cioè portano il numero di correnti di ramo a $r - N_I$ dove N_I è il numero di generatori di corrente. In seguito, bisogna fare attenzione a tagliare preliminarmente i rami contenenti generatori di correnti prima di eseguire il punto 4) dell'algoritmo, visto che il potenziale su quei rami potrebbe essere qualsiasi.

Prendiamo in esempio il seguente circuito:



Si ricava che i nodi e le correnti sono le seguenti, facendo attenzione alla disposizione di B , che viene detto **macronodo**. Un nodo del genere è utile in quanto il potenziale di ogni suo punto è effettivamente equivalente.



Calcoliamo quindi la prima legge di Kirchhoff sui nodi A e B :

$$A : I + I_1 + I_3 = 0$$

$$B : I + I_3 = I_2 + I_4$$

Adesso calcoliamo la seconda legge di Kirchhoff sulle maglie. Abbiamo detto che dobbiamo ignorare i rami contenenti generatori di corrente. Questo è vero perché provando, ad esempio, il ramo in basso a sinistra, avremmo:

$$-V_I - R_1 I_1 + R_2 I_2 = 0$$

dove V_I è la differenza di potenziale sul generatore di corrente, che sappiamo può essere qualsiasi.

Usiamo quindi altre due maglie: quella data dalle maglie in alto e in basso a sinistra, e quella in basso a destra:

$$R_3 I_3 - R_1 I_1 + R_2 I_2 = 0$$

$$-E + R_2 I_2 = 0$$

Ricaviamo il sistema:

$$\begin{cases} I + I_1 + I_3 = 0 \\ I + I_3 = I_2 + I_4 \\ R_3 I_3 - R_1 I_1 + R_2 I_2 = 0 \\ -E + R_2 I_2 = 0 \end{cases}$$

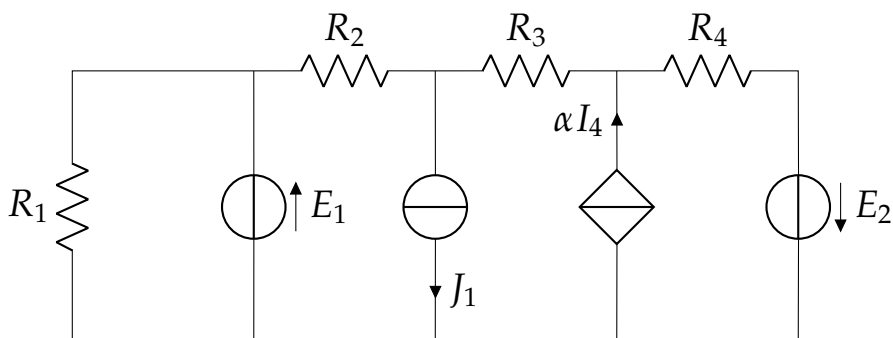
ovvero:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ -R_1 & R_2 & R_3 & 0 \\ 0 & R_2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -I \\ -I \\ 0 \\ E \end{pmatrix}$$

Circuiti con generatori pilotati

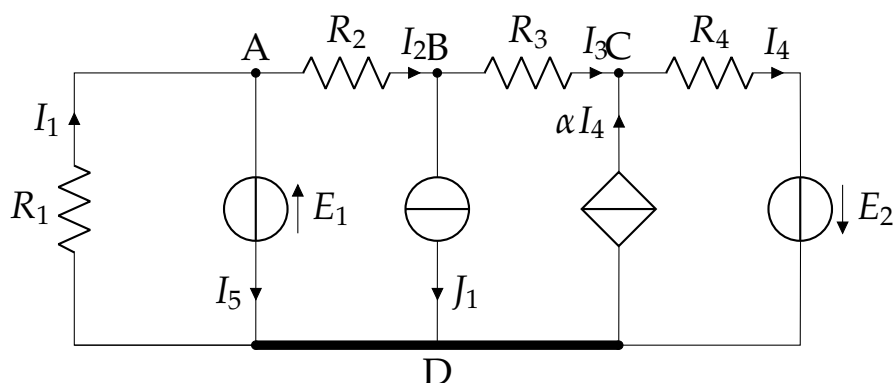
I generatori pilotati possono esprimere nuove incognite, in quanto la grandezza pilota è una corrente o una tensione ricavata su qualche ramo del circuito. Inoltre, bisogna comunque tagliare fuori dal circuito o meno la sorgente in base al fatto che essa sia di voltaggio o di corrente, come avevamo già visto per i generatori indipendenti.

Prendiamo in esempio il seguente circuito:



dove compare una sorgente pilotata in corrente di corrente. Per quanto riguarda le maglie, la considereremo come una qualsiasi sorgente indipendente di corrente. La grandezza pilota, invece, è una corrente (\$I_4\$) comune: fosse stata un voltaggio, avremmo dovuto esplicitarla con una variabile ed un'equazione a sé (ad esempio \$v_{CD} = R_4 I_4\$).

Disponiamo quindi nodi e cariche (si noti anche qui il macronodo \$D\$):



Calcoliamo con la prima legge di Kirchhoff:

$$A : I_1 = I_2 + I_5$$

$$B : I_2 = I_3 + J_1$$

$$D : I_5 + J_1 + I_4 = I_1 + \alpha I_4$$

e con la seconda, applicata alla maglia sinistra e alle tre rimanenti (ricordando che i generatori di corrente vanno ignorati):

$$E_1 + R_1 I_1 = 0$$

$$-E_1 - E_2 + R_4 I_4 + R_3 I_3 + R_2 I_2 = 0$$

da cui il sistema:

$$\begin{cases} I_1 = I_2 + I_5 \\ I_2 = I_3 + J_1 \\ I_5 + J_1 + I_4 = I_1 + \alpha I_4 \\ E_1 + R_1 I_1 = 0 \\ -E_1 - E_2 + R_4 I_4 + R_3 I_3 + R_2 I_2 = 0 \end{cases}$$

ovvero:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 - \alpha & 1 \\ R_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R_2 & R_3 & R_4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ J_1 \\ -J_1 \\ -E_1 \\ E_1 + E_2 \end{pmatrix}$$

0.7 Lezione del 09-10-24

Teorema di Thevenin

Poniamo di avere un certo bipolo, inteso come una sottorete con due morsetti. All'interno del bipolo avremo resistori, generatori di corrente e generato-

ri di tensioni. Quello che vogliamo fare è rappresentare la sottorete con un circuito semplificato, come avevamo fatto con circuiti di solo resistori.

Pensiamo di mettere un generatore di corrente fra i morsetti del bipolo, in modo da imporre una certa corrente, e calcolare la tensione risultante. Facendo misure diverse a correnti diverse, dovremmo essere in grado di trovare un legame fra tensione $v(t)$ e corrente $i(t)$ attraverso, ad esempio, la legge di Ohm. A questo punto sapremmo sostituire l'intera rete con un singolo dispositivo che rappresenti la sua risposta interna a qualsiasi stimolo esterno.

Questo è quello che ci permette di fare il teorema di Thevenin:

0.7.1: Teorema di Thevenin

Qualsiasi circuito lineare, visto da due morsetti, è equivalente a un generatore di tensione in serie a un resistore.

- La **resistenza di Thevenin** R_{th} , equivale alla resistenza vista da dai morsetti calcolata dopo aver disattivato tutti i generatori indipendenti della sottorete;
- La **tensione di Thevenin** V_{th} , è pari al valore della tensione a vuoto misurata fra i morsetti, dove per tensione a vuoto si intende la tensione della sottorete isolata da altri circuiti. Questo equivale a **tagliare** fuori i rami del circuito che vanno ai morsetti, compresi eventuali bipoli presenti su quei rami (non vi scorrerà alcuna corrente).

Poste R_{th} e V_{th} , si può dire che la correlazione fra voltaggio e corrente del circuito è:

$$v(t) = V_{th} - R_{th}i(t)$$

dove il segno meno alla corrente è lì perchè, all'aumentare della corrente fatta passare attraverso i morsetti (considerando, per il principio di sovrapposizione, i generatori interni disattivati), aumenta la differenza di potenziale fra di loro ($v_{load} = R_{th}i(t)$), e quindi diminuisce quella sul generatore equivalente di Thevenin $v(t)$. Infatti, V_{th} era stata definita come la differenza di potenziale a vuoto fra i morsetti, e quindi dovrà essere:

$$v_{load} + v(t) = V_{th}$$

Teorema di Norton

Il teorema di Thevenin ammette un duale: come possiamo usare un generatore di tensione, possiamo infatti usare un generatore di corrente per rappresentare un'intera sottorete. Formuliamo quindi:

0.7.2: Teorema di Norton

Qualsiasi circuito lineare, visto da due morsetti, è equivalente a un generatore di corrente in parallelo a un resistore.

- La **resistenza di Norton** R_{no} , equivale alla resistenza di Thevenin, cioè alla resistenza vista da dai morsetti calcolata dopo aver disattivato tutti i generatori indipendenti della sottorete;
- La **corrente di Norton** I_{no} , è pari al valore della corrente misurata su un ramo (posto da noi per effettuare la misura) che unisce i morsetti.

Con Norton, anziché la differenza di potenziale a vuoto V_{th} ricavata per Thevenin, si considera la corrente che scorrerebbe fra i morsetti se fossero collegati fra di loro. Avremo quindi che la corrente al variaggio della differenza di potenziale fra le maglie è:

$$i(t) = I_{no} - \frac{v(t)}{R_{no}}$$

Questo perché, come prima, dovrà essere che la corrente fra i morsetti, disattivati i generatori interni, i_{load} e la corrente sul circuito equivalente di Norton $i(t)$ sono legate da:

$$i_{load} + i(t) = I_{no}$$

Possiamo stabilire una relazione fra la resistenza e la tensione di Thevenin, R_{th} e V_{th} , e la resistenza e la corrente di Norton, R_{no} e I_{no} :

$$\begin{cases} R_{th} = R_{no} \\ V_{th} = I_{no} \cdot R_{no} \end{cases}$$

In ogni caso, vale $R_{th} = R_{no} = R_{eq}$ del circuito.

Si può quindi ricavare il corollario:

0.7.3: Corollario da Thevenin e Norton

Un generatore di corrente in parallelo a una resistenza equivale ad un generatore di tensione in serie alla stessa resistenza (salvo casi limite).

Generatori dipendenti

Nel caso si incontrino generatori di corrente o di tensione dipendenti, bisogna considerare che potrebbe essere impossibile applicare Thevenin o Norton

su una parte di circuito, poiché la grandezza pilota del generatore potrebbe trovarsi nell'altra parte del circuito.

Nel caso questo sia possibile, invece, si adotta un **generatore di prova** che può essere arbitrariamente di tensione o di corrente. Potremo infatti ricavare l'una dall'altra come:

$$R_{eq} = \frac{V_p}{I_p}$$

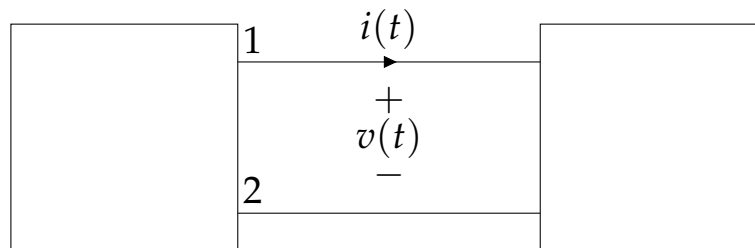
dalla legge di Ohm.

0.8 Lezione del 10-10-24

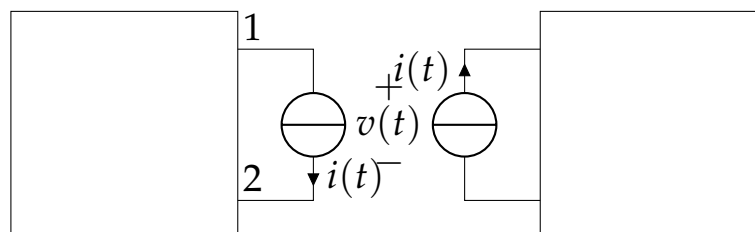
Dimostrazione di Thevenin

Avevamo detto che, attraverso Thevenin, si può trasformare qualsiasi rete come vista da due morsetti in una rete equivalente formata da un resistore e un generatore di tensione in serie. Dimostriamo questo risultato.

Supponiamo di avere un circuito elettrico che andiamo a dividere in due sottoreti. Poniamo di voler semplificare una di queste sottoreti (magari quella di sinistra), presi due morsetti, 1 e 2, che la collegano all'altra. Avremo che da questi morsetti passa una corrente $i(t)$ e che essi si trovano ad una differenza di potenziale $v(t)$.

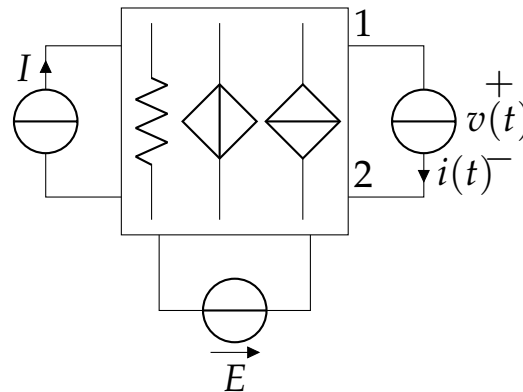


Possiamo quindi pensare di separare le due sottoreti, e di sostituire ai morsetti dei generatori di corrente che replicano la corrente $i(t)$ vista prima. Se la tensione ai capi dei generatori resta $v(t)$, allora i circuiti non sono cambiati.



Questo prende il nome di **principio di sostituzione**.

A questo punto possiamo dire che all'interno delle sottoreti troveremo bipoli attivi (generatori di tensione e di corrente), e passivi (resistori e generatori pilotati di tensione e di corrente):



Si decide di applicare il principio di sovrapposizione, ponendo il voltaggio dato dai generatori interni come $v'(t)$ e quello dato dal generatore esterno come $v''(t)$, da cui:

$$v(t) = v'(t) + v''(t)$$

Staccate dal resto del circuito si ha che le sottoreti portano i morsetti a tensione $v'(t) = v_0(t)$. Incluso il generatore di corrente di prova, possiamo pensare di disattivare i generatori dipendenti propri della sottorete, per ricavare un'altra tensione $v''(t)$. Visto che il circuito è formato effettivamente da componenti passivi, possiamo calcolare una resistenza vista, che chiamiamo R_{12} . Abbiamo allora che, incluso il generatore di corrente di prova $i(t)$:

$$v''(t) = -R_{12} \cdot i(t)$$

dove il segno meno è dato dal fatto che abbiamo preso il generatore esterno come un riferimento non associato (spinge carica dal potenziale positivo a quello negativo), e quindi la tensione totale è:

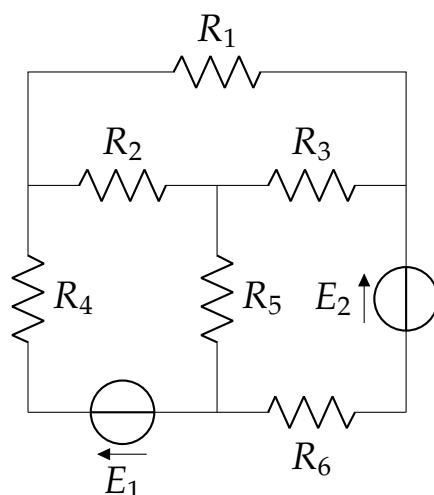
$$v(t) = v_0(t) - R_{12} \cdot i(t)$$

Questo equivale a rappresentare il circuito come un generatore di tensione $v_{TH} = v_0(t)$ in serie ad una resistenza $v_{TH} = R_{12}$.

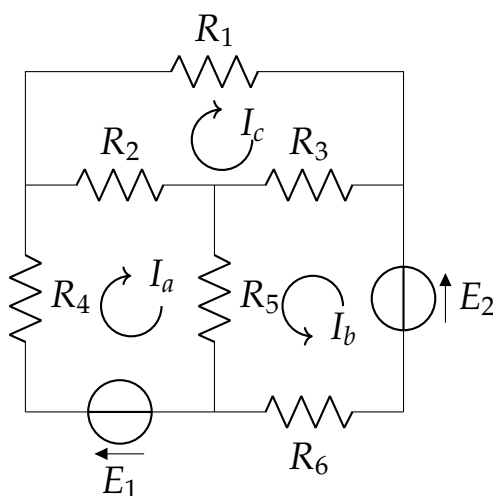
Metodo delle correnti di maglia

Vediamo un metodo alternativo per la risoluzione dei circuiti, simile a quello delle correnti di ramo ma che genera meno variabili. Questo metodo presuppone di prendere, anziché le correnti su ogni ramo, un numero minore di correnti, prese su intere maglie. Le maglie vengono scelte secondo lo stesso metodo del tableau: dopo aver usato una maglia, se ne taglia un ramo.

Prendiamo in esempio il circuito:



Avevamo già risolto questa rete usando il metodo del tableau, che potremmo dire "*metodo delle correnti di ramo*", trovando un sistema lineare dalla prima e seconda legge di Kirchhoff. Il problema di tale metodo era la grande quantità di variabili: una per ogni ramo. Applichiamo adesso il metodo delle correnti di maglia. Scegliamo ogni maglia a sé stante: in basso a sinistra, in basso a destra e in alto. Diamo un nome alla corrente su ognuna di queste maglie, rispettivamente I_a , I_b e I_c . Le direzioni delle correnti sono come in figura (scelte ad arbitrio):



Iniziamo con la maglia in basso a sinistra: percorsa in senso orario, avremo che la seconda legge di Kirchhoff dà:

$$E_1 - R_4 I_a + R_2 (I_c - I_a) + R_5 (-I_a - I_b) = 0$$

dove si nota che per bipoli percorsi da più correnti di maglia, si prende come corrente la somma algebrica delle correnti sulla base del loro segno. Appliciamo quindi lo stesso metodo alle altre due maglie, percorrendo quella in basso a destra in senso antiorario e quella in alto in senso orario:

$$E_2 + R_3 (-I_b - I_c) + R_5 (-I_b - I_a) - R_6 I_b = 0$$

$$-R_1 I_c + R_3(-I_c - I_b) + R_2(I_a - I_c) = 0$$

Da cui si ricava il sistema lineare:

$$\begin{cases} E_1 - R_4 I_a + R_2(I_c - I_a) + R_5(-I_a - I_b) = 0 \\ E_2 + R_3(-I_b - I_c) + R_5(-I_b - I_a) - R_6 I_b = 0 \\ -R_1 I_c + R_3(-I_c - I_b) + R_2(I_a - I_c) = 0 \end{cases}$$

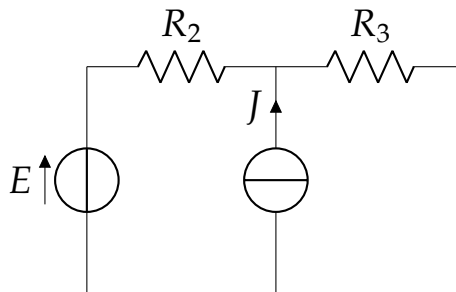
in forma matriciale:

$$\begin{pmatrix} -R_4 - R_2 - R_5 & -R_5 & R_2 \\ -R_5 & -R_3 - R_5 - R_6 - R_3 & \\ R_2 & -R_3 & -R_1 - R_3 - R_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_a \\ I_b \\ I_c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -E_1 \\ -E_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Come sempre, questo sistema si risolve con qualsiasi metodo di risoluzione dei sistemi lineari.

Circuiti con generatori di corrente

Notiamo un caso particolare per l'applicazione di questo problema: nel caso il circuito contenga generatori di corrente, bisogna evitare di introdurre tensioni incognite, come nel metodo del tableau. Si sceglie quindi una maglia contenente il generatore di corrente per prima, e poi si taglia quel ramo. Prendiamo ad esempio:



Qui il generatore di corrente J genera una differenza di potenziale V_J , che non vogliamo come incognita. Prenderemo quindi per prima una maglia che lo contiene (in questo caso qualsiasi tranne la più esterna), e poi taglieremo il suo ramo. Ad esempio, prendendo prima la maglia a destra, si ha al primo passo:

$$-E + R I_x + 2R(I_x + J) = 0$$

dove si è potuto chiamare l'unica corrente incognita I_x .

Non ci è effettivamente negato scegliere di scegliere le maglie in quest'ordine, ma se lo facciamo, allora non dobbiamo usare la corrente J nel calcolo, ma introdurre una corrente incognita per ogni maglia. Ad esempio, se volessimo considerare le due maglie a sinistra (I_s) e a destra (I_d) separatamente:

$$R I_s + E - V_j = 0$$

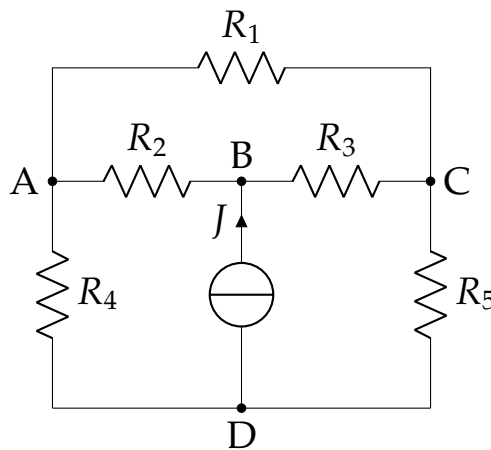
$$J = I_x + I_b$$

0.9 Lezione del 11-10-24

Metodo delle tensioni di nodo

Vediamo ora un metodo per la risoluzione dei circuiti dove le incognite non sono le correnti (come nel tableau o nelle correnti di maglia), ma le tensioni. Calcoleremo quindi le **tensioni di nodo**, che sappiamo essere relative a qualche zero del potenziale, attraverso la conduttanza anziché la resistenza.

Prendiamo in esempio il circuito:



dove abbiamo già evidenziato i nodi. Da qui possiamo proseguire in due modi:

- **Col nodo di riferimento:** prendiamo D come nodo di riferimento, e impostiamo il suo potenziale V_D a 0. Le incognite saranno quindi V_A , V_B e V_C . Scriviamo un'equazione per il potenziale V_A :

$$V_A \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_4} \right) - \frac{V_B}{R_2} - \frac{V_C}{R_1} = 0$$

Il primo termine è detto **termine di auto ammettenza**, ed è dato dal prodotto del potenziale sul nodo V_i e la somma delle conduttanze su tutti i rami connessi al nodo. I termini successivi sono detti **termini di mutua ammettenza**, e sono dati dalla legge di Ohm applicata ai rami connessi al nodo.

Nel caso uno dei rami contenga un generatore di corrente, si esclude dall'auto e mutua ammettenza e si mette come termine noto sul lato destro dell'equazione.

Ad esempio, sul nodo B avremo:

$$V_B \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right) - \frac{V_A}{R_2} - \frac{V_C}{R_3} = J$$

dove la J è la corrente erogata dall generatore di corrente sul ramo BD, che abbiamo detto non compare nei termini di auto o mutua ammettenza. Si noti che il segno positivo significa corrente *entrante* sul nodo, altrimenti si avrebbe segno negativo.

Infine, sul nodo C avremo:

$$V_C \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R-5} \right) - \frac{V_A}{R_1} - \frac{V_B}{R_3} = 0$$

Abbiamo quindi un sistema sulle 3 tensioni (abbiamo detto che la tensione D vale 0):

$$\begin{cases} V_A \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_4} \right) - \frac{V_B}{R_2} - \frac{V_C}{R_1} = 0 \\ V_B \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right) - \frac{V_A}{R_2} - \frac{V_C}{R_3} = J \\ V_C \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R-5} \right) - \frac{V_A}{R_1} - \frac{V_B}{R_3} = 0 \end{cases}$$

che possiamo portare in forma matriciale:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_4} & -\frac{1}{R_2} & -\frac{1}{R_1} \\ -\frac{1}{R_2} & \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} & -\frac{1}{R_3} \\ -\frac{1}{R_1} & -\frac{1}{R_3} & \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_A \\ V_B \\ V_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ J \\ 0 \end{pmatrix}$$

e che possiamo risolvere.

- **Senza nodo di riferimento:** possiamo decidere di continuare senza alcun riferimento del potenziale. Abbiamo già trovato le equazioni del potenziale sui primi 3 nodi, quindi impostiamo l'equazione per V_D :

$$V_D \left(\frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5} \right) - \frac{V_A}{R_4} - \frac{V_C}{R_5} = J$$

e insieriamola nel sistema precedente:

$$\begin{cases} V_A \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_4} \right) - \frac{V_B}{R_2} - \frac{V_C}{R_1} = 0 \\ V_B \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right) - \frac{V_A}{R_2} - \frac{V_C}{R_3} = J \\ V_C \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R-5} \right) - \frac{V_A}{R_1} - \frac{V_B}{R_3} = 0 \\ V_D \left(\frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5} \right) - \frac{V_A}{R_4} - \frac{V_C}{R_5} = -J \end{cases}$$

in forma matriciale, abbiamo un sistema in 4 variabili con 3 equazioni:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_4} & -\frac{1}{R_2} & -\frac{1}{R_1} & -\frac{1}{R_4} \\ -\frac{1}{R_2} & \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} & -\frac{1}{R_3} & 0 \\ -\frac{1}{R_1} & -\frac{1}{R_3} & \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_5} & -\frac{1}{R_5} \\ -\frac{1}{R_4} & 0 & -\frac{1}{R_5} & \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_A \\ V_B \\ V_C \\ V_D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ J \\ 0 \\ -J \end{pmatrix}$$

Sappiamo dal teorema di Rouché-Capelli che questo sistema è indeterminato, o almeno ammette soluzioni su una retta, quindi per un certo fattore di spostamento λ . Questo rappresenta semplicemente il fatto che non abbiamo scelto uno zero del potenziale: il potenziale dei nodi non esiste se non in riferimento agli altri, quindi qualsiasi valore λ aggiunto non cambia i risultati. Scegliamo il valore $\lambda = 0$ per convenienza, che equivale a impostare V_D a zero.

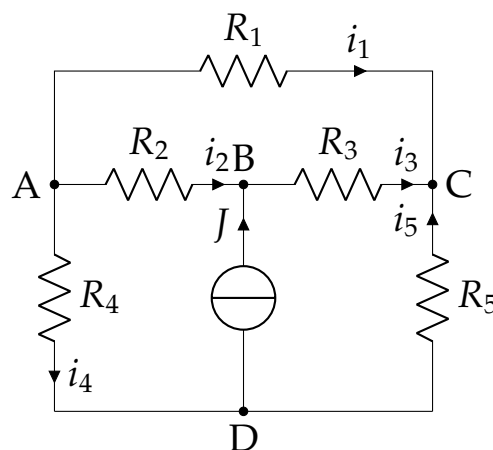
A questo punto, vogliamo risolvere effettivamente il circuito, e quindi trovare le tensioni e le correnti di ramo. Per le tensioni, prendiamo semplicemente le differenze di potenziale sui nodi:

$$V_{AB} = V_A - V_B, \quad \text{ecc...}$$

mentre per le correnti applichiamo la legge di Ohm sul ramo scelto. Ad esempio, sul ramo AB avremo:

$$V = IR, \quad I_{AB} = \frac{V_{AB}}{R_2}$$

Un caso particolare è rappresentato dalla tensione su BD. In questo caso si ha un generatore di corrente, e nessuna resistenza, quindi I_{BD} è ben definito, ma non V_{BD} . Quello che vogliamo fare è calcolare la caduta di potenziale $V_J = V_{BD}$ sul generatore di corrente. Per fare ciò applichiamo la seconda legge di Kirchhoff, magari applicata in senso orario sulla maglia in basso a sinistra, con le direzioni di corrente:



Si ha quindi:

$$V_J + R_2 i_2 - R_4 i_4 = 0 \quad V_J = R_4 i_4 - R_2 i_2$$

Abbiamo così determinato tutte le tensioni e tutte le correnti.

Circuiti con generatori di tensione

- **Generatori ideali di tensione**

Il bipolo particolare quando si applica il metodo delle tensioni di nodo è il generatore ideale di tensione. In questo caso, possiamo semplificare il sistema: se il generatore collega un nodo al nodo di riferimento, allora il voltaggio del nodo è uguale al voltaggio erogato dal generatore, tenendo conto dei segni in base alle direzioni delle tensioni erogate.

Se si hanno serie di generatori di tensione, si può applicare ripetutamente questa regola sui nodi coinvolti nella serie.

Nel caso non si possano scegliere agevolmente nodi di riferimento che prendono serie di generatori di tensione, si può impostare:

$$E = V_A - V_B$$

dove E è la tensione erogata dal generatore, e V_A e V_B le tensioni sui nodi che collega, ancora una volta opportunamente segnate in base alle direzioni delle tensioni erogate.

- **Generatori reali di tensione**

Un caso particolare è determinato dai generatori reali di tensione, cioè i generatori ideali in serie a resistenze. In questi casi conviene trasformare i generatori nei loro equivalenti di Norton, e risolvere. Si ha che per un generatore reale di voltaggio V e resistenza R , l'equivalente di Norton è un generatore di corrente $\frac{V}{R}$ in parallelo ad una resistenza R .

0.10 Lezione del 17-10-24

Condensatori

Introduciamo un nuovo bipolo: il **condensatore** o *capacitore*. Si indica come:



ed è costituito da due armature di materiale conduttore, inframezzate da un **dieletrico**.

Il verso di percorrenza nei condensatori, come nei resistori, è irrilevante. La loro funzione è quella di accumulare energia, secondo la legge:

$$q(t) = C \cdot v(t)$$

dove C è la **capacità**, misurata in Farad (F).

Nota la superficie delle armature e la distanza fra di esse, si può calcolare la capacità come:

$$C = \varepsilon \cdot \frac{S}{d}$$

Nel caso di dielettrici, si indica con ε_0 la costante dielettrica introdotta e si scrive:

$$C = \varepsilon \cdot \varepsilon_0 \cdot \frac{S}{d}$$

Si ricorda che il Farad è un'unità di misura molto grande, e solitamente si usano i sottomultipli:

Simbolo	Ordine
mF	10^{-3}
μ F	10^{-6}
nF	10^{-9}
pF	10^{-12}

Diciamo che il condensatore ideale è:

- **Lineare:** dalla legge $q(t) = C \cdot v(t)$;
- **Tempo-invariante:** trascurando cambi di temperatura, si comportano come i resistori;
- **Con memoria:** visto che legano tensione a carica, dobbiamo prendere la corrente come derivata della carica:

$$i(t) = \frac{dq(t)}{dt} = \frac{d}{dt}(C \cdot v(t)) = C \frac{dv(t)}{dt}$$

Possiamo quindi integrare:

$$\begin{aligned} v(t) &= \int_{-\infty}^t \frac{1}{C} \cdot i(\tau) d\tau = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i(\tau) d\tau = \frac{1}{C} \left[\int_{-\infty}^{t_0} i(\tau) d\tau + \int_{t_0}^t i(\tau) d\tau \right] \\ &= v(t_0) + \frac{1}{C} \int_{t_0}^t i(\tau) d\tau \end{aligned}$$

Abbiamo quindi che la tensione sul condensatore dipende dalla tensione iniziale $v(t_0)$ e dalle correnti precedenti $i(t')$ a $t' < t$, ergo è un componente con memoria.

- **Passivo:** anche qui possiamo definire $p(t)$ e derivare:

$$p(t) = v_C(t)i_C(t) = v_C(t) \cdot C \frac{dv_C(t)}{dt}$$

da cui si ottiene che $p(t)$ ha qualsiasi segno. Vediamo quindi l'energia:

$$\begin{aligned} w(t) &= \int_{-\infty}^t p(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^t C v_C(\tau) \frac{dv_C(\tau)}{d\tau} d\tau \\ &= C \int_{-\infty}^t v_C(\tau) dv_C(\tau) = C \left[\frac{1}{2} v_C^2(\tau) \right]_{-\infty}^t \end{aligned}$$

da cui si ha, risolvendo:

$$w(t) = \frac{1}{2} C v_C^2(t) - \frac{1}{2} C v_C^2(-\infty)$$

Assumendo $v_C^2(-\infty) = 0$, cioè condensatore inizialmente scarico, si ha $w(t) \geq 0$, ergo è un componente passivo. Solo nel caso in cui parte da carico il condensatore può (temporaneamente) erogare energia.

Induttori

Introduciamo un nuovo bipolo: l'**induttore** o *induttanza*. Si indica come:



ed è costituito da spire di materiale ferromagnetico avvolte attorno a un dielettrico.

La loro funzione è ancora quella di accumulare energia, secondo la legge:

$$\phi(t) = L \cdot i_L(t)$$

dove L è l'**induttanza**, misurata in Henry (H), e ϕ è il **flusso magnetico**, misurata in Weber (Wb). L'induttanza dipende dalla geometria dell'induttore, e ad esempio in un solenoide di N spire di superficie s su una lunghezza l è:

$$L = \mu \cdot \frac{S}{l} \cdot N^2 = \mu_0 \cdot \mu_r \frac{S}{l} N^2$$

Vediamo quindi le proprietà:

- **Lineare:** sempre per la legge $\phi(t) = L \cdot i_L(t)$;
- **Tempo-invariante:** il flusso interno dipende solo dalla corrente;
- **Con memoria:** possiamo derivare la legge:

$$v_L(t) = \frac{d\phi(t)}{dt} = \frac{d(L i_L(t))}{dt} = L \frac{di_L(t)}{dt}$$

e ricavare e derivare la corrente $i_L(t)$:

$$i_L(t) = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^t v_L(\tau) d\tau = i_L(t_0) + \frac{1}{L} \int_{t_0}^t v_L(\tau) d\tau$$

da dove si ricava che, come il condensatore, l'induttore ha memoria di uno stato iniziale a t_0 .

- **Passivo:** ritroviamo la potenza:

$$p(t) = v_C(t)i_C(t) = L \frac{di_C(t)}{dt} \cdot i_L(t)$$

da cui si ottiene che $p(t)$ ha qualsiasi segno. Vediamo quindi l'energia:

$$w(t) = \int_{-\infty}^t p(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^t L \frac{di_L(\tau)}{d\tau} \cdot i_L(\tau) d\tau = L \int_{-\infty}^t i_L(\tau) di_L(\tau)$$

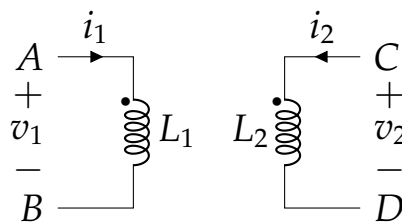
da cui si ha:

$$w(t) = \frac{1}{2} Li_L^2(t) - \frac{1}{2} Li_L^2(-\infty)$$

Come prima, assumendo $i_L^2(\infty) = 0$, cioè induttore inizialmente scarico, si ha $w(t) \geq 0$, e che l'induttore è un componente passivo (salvo parta da carico).

Induttori mutuamente accoppiati

Si possono avere più induttanze (prendiamo 2 per semplicità) accoppiate fra di loro attraverso l'effetto del magnetico generato da entrambe sulle reciproche spire, cioè:



Dove il flusso su una e l'altra induttanza è espresso come:

$$\begin{cases} \phi_1(t) = \phi_{1.1} \pm \phi_{1.2} = L_1 \cdot i_1(t) \pm Mi_2(t) \\ \phi_2(t) = \phi_{1.2} \pm \phi_{1.1} = L_2 \cdot i_2(t) \pm Mi_1(t) \end{cases}$$

Qui M prende il nome di **coefficiente di mutua induzione**. Anche questo coefficiente dipende dalla geometria della configurazione degli induttori.

Chiamiamo quindi la componente $L_i \cdot i_i$ **caduta di auto**, per *caduta di auto induttanza*, e la componente $M \cdot i_i$ **caduta di mutua**, per *caduta di mutua induttanza*. Conviene fare una riflessione sui segni delle cadute di auto e di mutua:

- Prendendo riferimenti associati, cioè percorrendo le induttanze nella direzione della corrente propria, si ha che le cadute di auto sono positive. In caso contrario, si prendono come negative;
- Per i segni delle cadute di mutua si usa la regola dei **contrassegni**:
 - Se la corrente entra al terminale contrassegnato di un induttore e induce una forza elettromotrice \mathcal{E} positiva al terminale contrassegnato dell'altro induttore, si ha che $M > 0$;
 - Altrimenti, se la corrente entra al terminale contrassegnato di un induttore e induce una forza elettromotrice \mathcal{E} negativa al terminale contrassegnato dell'altro induttore, si ha che $M < 0$;

ergo, scelti riferimenti associati per le cadute di auto, si ha che se le correnti raggiungono il contrassegno della propria induttanza entrambe entrando o uscendo dall'induttore, le cadute di mutua sono positive. Altrimenti, se le correnti raggiungono il contrassegno della propria induttanza una entrando e una uscendo dall'induttore, o viceversa, le cadute di mutua sono negative.

Si ha quindi, derivando:

$$\begin{cases} v_1(t) = L_1 \frac{di_1(t)}{dt} \pm M \frac{di_2(t)}{dt} \\ v_2(t) = L_2 \frac{di_2(t)}{dt} \pm M \frac{di_1(t)}{dt} \end{cases}$$

Gli induttori mutuamente accoppiati vengono detti **quadripoli** o **doppi bipoli**, in quanto hanno effettivamente 4 poli.

Si calcola la potenza semplicemente sommando le potenze sulle singole induttanze:

$$\begin{aligned} p(t) &= v_1(t)i_1(t) + v_2(t)i_2(t) \\ &= \left(L_1 \frac{di_1(t)}{dt} \pm M \frac{di_2(t)}{dt} \right) \cdot i_1(t) + \left(L_2 \frac{di_2(t)}{dt} \pm M \frac{di_1(t)}{dt} \right) \cdot i_2(t) \\ &= L_1 i_1(t) \frac{di_1(t)}{dt} + L_2 i_2(t) \frac{di_2(t)}{dt} \pm M \left(i_1(t) \frac{di_2(t)}{dt} + i_2(t) \frac{di_1(t)}{dt} \right) \end{aligned}$$

E l'energia integrando la potenza:

$$\begin{aligned} w(t) &= \int_{-\infty}^t p(\tau) d\tau = L_1 \int_{-\infty}^t i_1(\tau) \frac{di_1(\tau)}{d\tau} d\tau + L_2 \int_{-\infty}^t i_2(\tau) \frac{di_2(\tau)}{d\tau} d\tau \\ &\quad \pm M \int_{-\infty}^t \left[i_1(\tau) \frac{di_2(\tau)}{d\tau} + i_2(\tau) \frac{di_1(\tau)}{d\tau} \right] d\tau \\ &= L_1 \cdot \frac{1}{2} i_1^2(t) + L_2 \cdot \frac{1}{2} i_2^2(t) \pm M \int_{-\infty}^t \frac{d(i_1(\tau) \cdot i_2(\tau))}{d\tau} d\tau \end{aligned}$$

$$= L_1 \cdot \frac{1}{2} i_1^2(t) + L_2 \cdot \frac{1}{2} i_2^2(t) \pm M i_1(t) i_2(t)$$

Si può dimostrare che $M \leq \sqrt{L_1 L_2}$, e nel caso $M = \sqrt{L_1 L_2}$ si parla di **accoppiamento ideale**. Nel caso peggiore si ha quindi:

$$w = \frac{1}{2} L_1 i_1^2(t) + \frac{1}{2} L_2 i_2^2(t) - \sqrt{L_1 L_2} i_1(t) i_2(t) = \frac{1}{2} \left(\sqrt{L_1} i_1(t) - \sqrt{L_2} i_2(t) \right)^2 \geq 0$$

ergo, salvo carichi iniziali, le induttanze mutuamente accoppiate sono componenti **passivi**.

Circuiti con impedenze a regime costante

Vediamo il comportamento dei condensatori e degli induttori in circuiti a regime costante, cioè come quelli che abbiamo studiato finora.

- **Condensatori:** il condensatore ha legge $q(t) = C \cdot v_C(t) \Rightarrow i_C(t) = C \frac{dv_C(t)}{dt}$, ergo se siamo in continua, $i_C(t) = C \cdot 0 = 0$ e il condensatore si comporta come un **aperto**;
- **Induttori:** l'induttore ha legge $\phi(t) = L \cdot i_L(t) \Rightarrow V_L(t) = L \frac{di_L(t)}{dt}$. ergo se siamo in continua, $v_L(t) = L \cdot 0 = 0$, e l'induttore si comporta come un **cortocircuito**.

Abbiamo quindi che non si possono apprezzare gli effetti di questi nuovi bipoli finché si studiano circuiti a regime stazionario. Infatti vedremo più nel dettaglio quali sono le loro caratteristiche quando parleremo di circuiti in regime sinusoidale.

0.11 Lezione del 23-10-24

Circuiti RC a regime sinusoidale

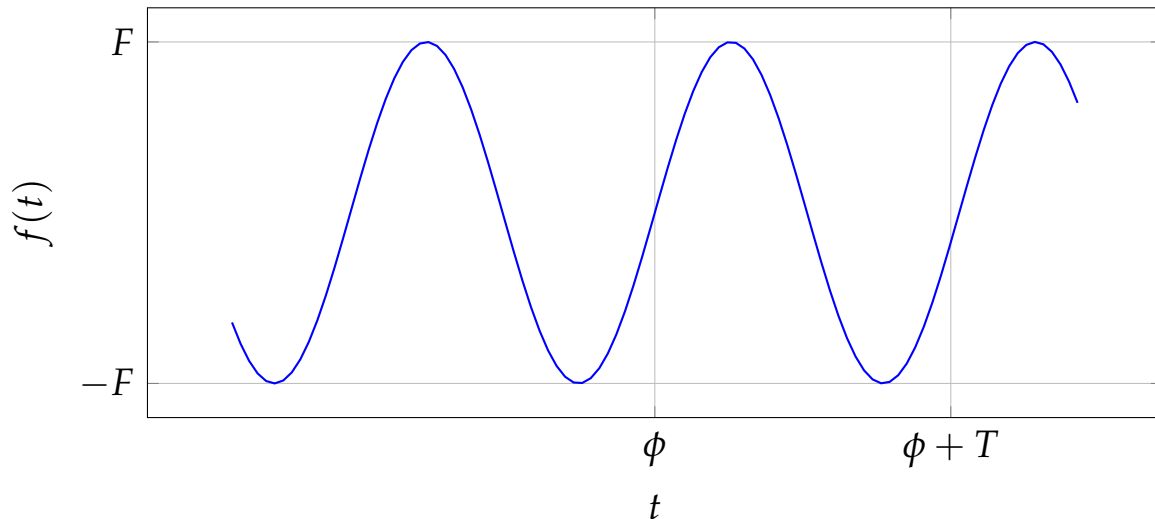
Veniamo quindi a studiare circuiti dove i generatori non sono in regime costante, ma **sinusoidali**. Un circuito si dice in **regime periodico sinusoidale** se tutte le correnti $i(t)$ e tutte le tensioni $v(t)$ possono essere espresse come funzioni sinusoidali con la stessa pulsazione. Le grandezze devono quindi essere descritte da funzioni **periodiche**, ergo:

$$f(t + T) = f(t) \quad \forall t$$

dove T si dice **periodo**. Notiamo che periodico non significa sinusoidale, in quanto altri tipi di onde (quadre, a dente di sega, ecc...) sono ugualmente periodiche. In particolare, noi tratteremo funzioni in forma:

$$f(t) = F \cdot \sin(\omega t + \phi)$$

dove F è l'**ampiezza** dell'oscillazione, ω la **pulsazione** e ϕ **fase**.



Abbiamo che esiste una relazione fra pulsazione ω e periodo T , e che si può introdurre la **frequenza** f :

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f \quad f = \frac{1}{T}$$

Si ha che il periodo si misura in secondi, la frequenza in Herz (Hz), e la pulsazione in rad/s.

Fasori

Si ha che per lo studio delle equazioni differenziali date da sistemi a regime sinusoidale, torna utile passare ad un dominio **fasoriale** delle grandezze in questione.

Prendiamo una funzione sinusoidale in forma:

$$x(t) = x_M \cdot \sin(\omega t + \phi)$$

e trasformiamola in un numero complesso, nella sua forma esponenziale:

$$x(t) = x_m \cdot e^{j(\omega t + \phi)}$$

dove j rappresenta la **costante immaginaria**.

Lo stesso complesso (più propriamente, una **funzione complessa**) potrà essere espresso in forma cartesiana, come:

$$x(t) = a(t) \cdot j b(t)$$

Potremo allora ricavare, dalla **formula di Eulero**:

$$e^{j\phi} = \cos(\phi) + j \sin(\phi)$$

le seguenti trasformazioni:

$$\begin{cases} x_M = \sqrt{a^2 + b^2} \\ \phi = \text{atan2}\left(\frac{b}{a}\right) \end{cases} \quad \begin{cases} a = x_M \cos(\phi) \\ b = x_M \sin(\phi) \end{cases}$$

dove si è definito atan2 come:

$$\text{atan2}(\phi) = \begin{cases} \arctan \frac{b}{a}, & a > 0, b \in \mathbb{R} \\ \pi + \arctan \frac{b}{a}, & a < 0, b > 0 \\ -\pi + \arctan \frac{b}{a}, & a < 0, b < 0 \\ \frac{\pi}{2}, & a = 0, b > 0 \\ -\frac{\pi}{2}, & a = 0, b < 0 \\ 0 & a > 0, b > 0 \\ \pi / -\pi & a < 0, b > 0 \\ \emptyset & a = 0, b = 0 \end{cases}$$

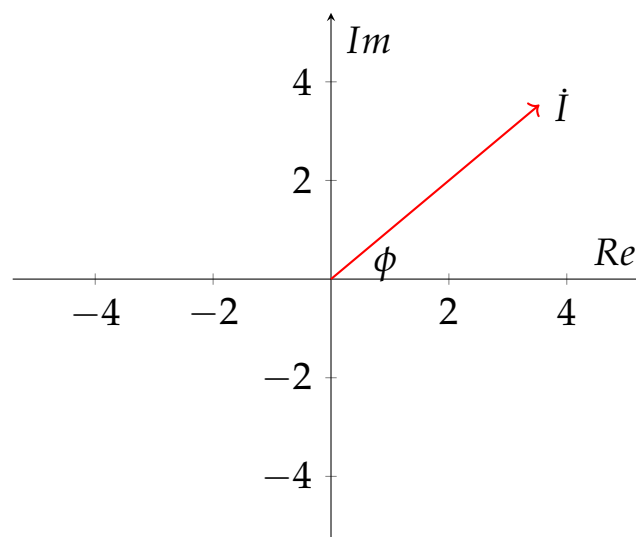
Chiamiamo $x(t)$ **vettore rotante**. Si ha che il vettore rotante ha distanza dall'origine pari all'ampiezza dell'oscillazione, e si muove di moto rotante sul piano di Gauss con velocità angolare pari alla pulsazione dell'oscillazione, con relativa fase.

Infine, definiamo quando ci interessa:

0.11.1: Fasore

Chiamiamo il valore assunto da un vettore rotante $x(t)$ in un dato momento $t_0 = 0$ **fasore** (da *phase vector*), e lo indichiamo come \dot{X} .

Chiaramente, il vettore rotante assume valori complessi e il fasore stesso è un numero complesso:



Nell'esempio, posto $i(t) = 5 \cdot \sin(1000t + \frac{\pi}{4})A$, avremo il fasore a $t_0 = 0$:

$$\dot{I} = 5 \cdot e^{j\frac{\pi}{4}}$$

Dal grafico vediamo poi che il modulo del vettore coincide col valore della corrente o della tensione che rappresenta, e che l'angolo che forma con l'asse delle ascisse rappresenta la fase ϕ .

Visto che le pulsazioni sono comuni fra fasori diversi (circuiti a regime sinusoidale), abbiamo che le uniche informazioni che conserviamo nel diagramma dei fasori sono l'ampiezza e la fase.

Proprietà dei fasori

1. **Addizione e sottrazione:** dati due fasori \dot{I}_1 e \dot{I}_2 si ha che:

$$\begin{aligned}\dot{I}_1 + \dot{I}_2 &= I_1 \cdot e^{j\phi_1} + I_2 \cdot e^{j\phi_2} \\ &= I_1 \cdot \cos(\phi_1) + j \cdot I_1 \cdot \sin(\phi_1) + I_2 \cdot \cos(\phi_2) + j \cdot I_2 \cdot \sin(\phi_2) \\ &= (I_1 \cdot \cos(\phi_1) \pm I_2 \cdot \cos(\phi_2)) + j(I_1 \cdot \sin(\phi_1) \pm I_2 \cdot \sin(\phi_2))\end{aligned}$$

dove I_1 e I_2 sono i moduli rispettivamente di \dot{I}_1 e \dot{I}_2 . Abbiamo che si sommano separatamente parti reali e immaginarie, ergo si va calcolare banalmente la **somma vettoriale** nel piano di Gauss dei due fasori.

2. **Derivata:** definiamo la derivata di $x(t)$ rispetto al tempo come:

$$\begin{aligned}y(t) &= \frac{d(x(t))}{dt} = \text{Im} \{ \dot{X} e^{j\omega t} \} = \frac{d(\text{Im} \{ \dot{X} e^{j\omega t} \})}{dt} = \text{Im} \left\{ \frac{d(\dot{X} e^{j\omega t})}{dt} \right\} \\ &= \text{Im} \left\{ \dot{X} \cdot \frac{d(e^{j\omega t})}{dt} \right\} = \text{Im} \{ \dot{X} e^{j\omega t} \cdot j\omega \} = \text{Im} \{ j\omega \cdot \dot{X} \cdot e^{j\omega t} \}\end{aligned}$$

da cui:

$$\dot{Y} = j\omega \dot{X}$$

3. **Integrale:** definiamo l'integrale di un fasore come:

$$\begin{aligned}y(t) &= \int x(t) dt = \text{Im} \{ \hat{Y} e^{j\omega t} \} = \int \text{Im} \{ \dot{X} e^{j\omega t} \} dt = \text{Im} \left\{ \int \dot{X} e^{j\omega t} dt \right\} \\ &= \text{Im} \left\{ \dot{X} \cdot \int e^{j\omega t} dt \right\} = \text{Im} \left\{ \dot{X} \cdot \frac{e^{j\omega t}}{j\omega} \right\} = \text{Im} \left\{ \frac{\dot{X}}{j\omega} e^{j\omega t} \right\}\end{aligned}$$

da cui:

$$\dot{Y} = \frac{\dot{X}}{j\omega}$$

Bipoli in regime sinusoidale

Vediamo come si comportano i bipoli visti finora in regime sinusoidale.

Resistori

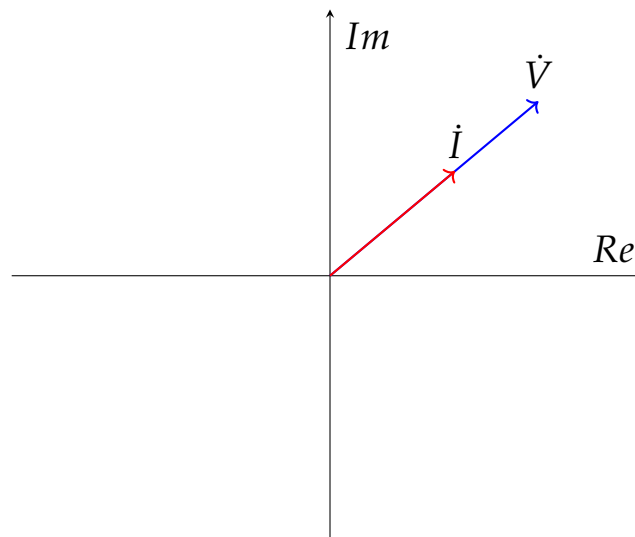
Poniamo di avere un resistore in regime sinusoidale. Avevamo che:

$$v_R(t) = Ri_R(t)$$

In quanto a fasori, avremo la stessa legge:

$$\dot{V}_R = R\dot{I}_R$$

Ergo non cambia niente rispetto a quanto avevamo in regime costante. Sul diagramma dei fasori, avremmo che i fasori tensione e corrente saranno fra di loro paralleli:



Induttori

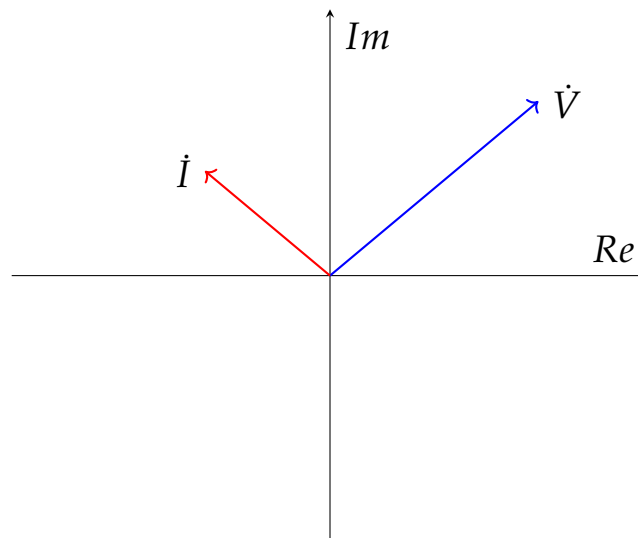
Un induttore è governato dalla legge:

$$v_L(t) = L \frac{di_L(t)}{dt}$$

Sui fasori si avrà, applicando la legge di derivazione dei fasori:

$$\dot{V}_L = Lj\omega\dot{I}_L = j\omega L \cdot \dot{I}_L$$

Notiamo come il legame differenziale della prima legge diventa algebrico nella seconda, e anzi si riconduce ad una forma che ricorda la legge di Ohm. Sul diagramma dei fasori, avremo che i fasori tensione e corrente formano fra di loro un angolo di $\frac{\pi}{2}$:



Condensatori

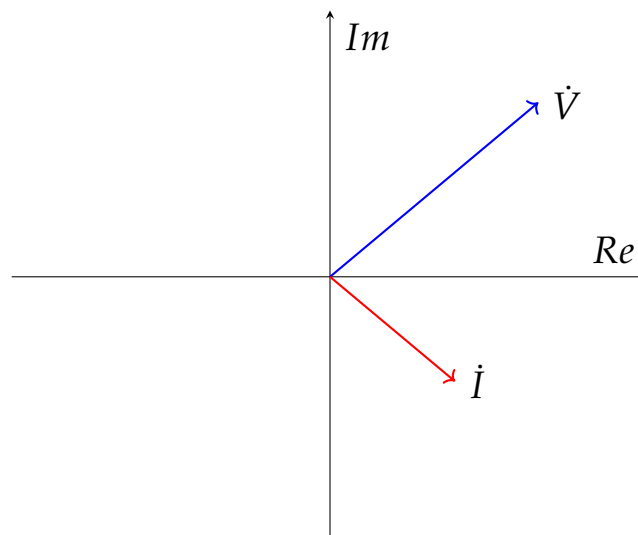
Un condensatore è governato dalla legge:

$$v_C(t) = \frac{1}{C} \int i_C(t) dt$$

Sui fasori si avrà, applicando la legge di integrazione dei fasori:

$$\dot{V}_C = \frac{1}{C} \frac{\dot{I}_C}{j\omega} = \frac{\dot{I}_C}{j\omega C}$$

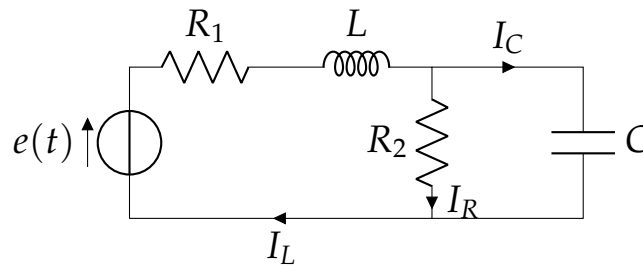
Come prima, ci riportiamo in una forma lineare. Sul diagramma dei fasori, avremo che i fasori tensione e corrente formano fra di loro un angolo di $-\frac{\pi}{2}$:



Analisi circuitale coi fasori

La definizione dei fasori ci permette di studiare circuiti in regime sinusoidali attraverso gli stessi strumenti che abbiamo studiato finora, a patto di dover

risolvere un sistema di equazioni complesse (che possiamo sempre dividere in parte reale e immaginaria). Prendiamo ad esempio il circuito:



La legge che governa il generatore di tensione è:

$$e(t) = A \sin(\omega t + \phi), \quad \dot{E} = A e^{j\phi}$$

Vediamo come risolvere il circuito usando il **tableau** e le **correnti di maglia**.

- **Metodo del tableau:** prendendo il nodo in basso, si ha dalla prima legge di Kirchhoff:

$$I_R + I_C - I_L = 0$$

Ricordando che, nel campo complesso, un'equazione di questo tipo significa:

$$\begin{cases} \operatorname{Re}\{I_R\} + \operatorname{Re}\{I_C\} - \operatorname{Re}\{I_L\} = 0 \\ \operatorname{Im}\{I_R\} + \operatorname{Im}\{I_C\} - \operatorname{Im}\{I_L\} = 0 \end{cases}$$

In ogni caso, possiamo poi applicare la seconda legge di Kirchhoff sulle due maglie, in modo da ottenere il sistema completo:

$$\begin{cases} I_R + I_C - I_L = 0 \\ \dot{E} + R_1 \dot{I}_L + j\omega L \dot{I}_L + R_2 \dot{I}_R = 0 \\ -R_2 \dot{I}_R + \frac{1}{j\omega C} \dot{I}_C = 0 \end{cases}$$

Questo si riconduce ad un sistema lineare:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ R_2 & R_1 + j\omega L & 0 \\ -R_2 & 0 & \frac{1}{j\omega L} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{I}_R \\ \dot{I}_L \\ \dot{I}_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \dot{E} \\ 0 \end{pmatrix}$$

che possiamo risolvere con qualsiasi risolutore di sistemi lineari.

Assumiamo $\phi = \frac{\pi}{2}$, così che $\dot{E} = A j$. In modalità simbolica, allora, MATLAB restituisce:

$$\begin{cases} I_L = -\frac{A(C R_2 \omega - i)}{R_1 + R_2 + L \omega^2 - C L R_2 \omega^2 + C R_1 R_2 \omega} \\ I_R = \frac{A i}{R_1 + R_2 + L \omega^2 - C L R_2 \omega^2 + C R_1 R_2 \omega} \\ I_C = -\frac{A C R_2 \omega}{R_1 + R_2 + L \omega^2 - C L R_2 \omega^2 + C R_1 R_2 \omega} \end{cases}$$

- **Metodo delle correnti di maglia:** prendiamo la maglia a sinistra in senso orario e quella destra in senso antiorario, con le correnti rispettivamente I_1 e I_2 :

$$\begin{cases} \dot{E} = R_1 \dot{I}_1 + j\omega L \dot{I}_1 + R_2 (\dot{I}_1 - \dot{I}_2) \\ 0 = \frac{\dot{I}_2}{j\omega C} + R_2 (\dot{I}_2 - \dot{I}_1) \end{cases}$$

da cui il sistema:

$$\begin{pmatrix} R_1 + R_2 + j\omega L & -R_2 \\ -R_2 & \frac{1}{j\omega C} + R_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{E} \\ 0 \end{pmatrix}$$

che dà lo stesso risultato.

0.12 Lezione del 24-10-24

Mutua induttanza nel dominio fasoriale

Avevamo le formule per la mutua induttanza:

$$\begin{cases} v_1(t) = L_1 \frac{di_1(t)}{dt} \pm M \frac{di_2(t)}{dt} \\ v_2(t) = L_2 \frac{di_2(t)}{dt} \pm M \frac{di_1(t)}{dt} \end{cases}$$

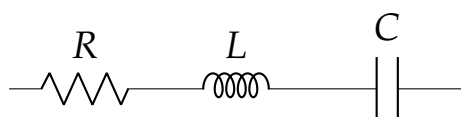
nel dominio tempo. Portandoci nel dominio fasoriale, abbiamo:

$$\begin{cases} \dot{V}_1 = j\omega L_1 \dot{I}_1 \pm j\omega M \dot{I}_2 \\ \dot{V}_2 = j\omega L_2 \dot{I}_2 \pm j\omega M \dot{I}_1 \end{cases}$$

Vedremo poi metodi specifici di risoluzione applicabili su circuiti in corrente alternata con mutue induttanze.

Circuito RLC

Poniamo di avere un circuito con un resistore, un induttore e un capacitore.



Avremo le cadute di potenziale \dot{V}_R , \dot{V}_L e \dot{V}_C sui singoli componenti, da cui:

$$\dot{V} = \dot{V}_R + \dot{V}_L + \dot{V}_C = R\dot{I} + j\omega L\dot{I} + \frac{1}{j\omega C}\dot{I} = \left(R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C} \right) \dot{I}$$

Portando in forma cartesiana, si ha:

$$= (R + j\omega L - \frac{j}{\omega C})\dot{I} = \left(R + j \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \right) \dot{I}$$

che possiamo riscrivere come:

$$\dot{V} = \bar{Z}\dot{I}, \quad Z = R + j \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)$$

Impedenza

Il numero Z , un complesso, è chiamato **impedenza** del circuito. Abbiamo che l'equazione $\dot{V} = \bar{Z}\dot{I}$ è un'equazione complessa, ergo che potremmo riscrivere in forma esponenziale come:

$$\Rightarrow V_M \cdot e^{j\phi_v} = Z \cdot e^{j\phi_z} I_M e^{j\phi_i}$$

e quindi ridurre al sistema:

$$\begin{cases} V_M = Z I_M \\ \phi_v = \phi_z + \phi_i \end{cases}$$

Spesso si indica ϕ_z come semplicemente ϕ , cioè la **fase dell'impedenza**, definita quindi come:

$$\phi = \phi_v - \phi_i$$

Possiamo scrivere l'impedenza come:

$$\bar{Z} = Z \cdot e^{j\phi} = R + jX, \quad z = |\bar{Z}|$$

dove R corrisponde alla **resistenza** che già conosciamo, mentre X viene detta **reattanza**.

Vediamo le reattanze dei bipoli studiati finora:

- **Resistenza:** da $\dot{V} = R\dot{I}$ abbiamo $X_R = 0$, cioè reattanza nulla (e chiaramente $R_R = R$);
- **Induttore:** da $\dot{V} = j\omega L\dot{I}$, ricaviamo:

$$\begin{cases} R_L = 0 \\ X_L = \omega L \end{cases}$$

- **Condensatore:** da $\dot{V} = \frac{1}{j\omega C}$, ricaviamo:

$$\begin{cases} R_C = 0 \\ X_C = -\frac{1}{\omega C} \end{cases}$$

dove l'ultima X_C si è ricavata da $-\frac{j}{\omega C}$, già usato sopra nella forma cartesiana dell'RLC in serie.

Avremo che, riguardo all'impedenza, avremo solitamente i valori di fase:

$$\bar{Z} = R \cdot jX = ze^{j\phi} : \begin{cases} \phi = \frac{\pi}{2} \\ \phi = 0 \\ \phi = -\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Classifichiamo questi valori.

- $\phi = \frac{\pi}{2}$, si dice che l'impedenza è **induttiva**;
- $0 < \phi < \frac{\pi}{2}$, si dice che l'impedenza è **ohmico-induttiva**;
- $\phi = 0$, si dice che l'impedenza è **resistiva**;
- $-\frac{\pi}{2} < \phi < 0$, si dice che l'impedenza è **ohmico-capacitiva**;
- $\phi = -\frac{\pi}{2}$, si dice che l'impedenza è **capacitiva**;

Ammettenza

Possiamo definire l'opposto dell'impedenza:

$$\bar{Y} = \frac{1}{\bar{Z}}$$

Chiamiamo Y **ammettenza**. Possiamo dividere anche l'ammettenza in componenti cartesiane, cioè:

$$\bar{Y} = G + jB$$

dove G è la **conduttanza**, e B viene detta **suscettanza**.

Possiamo eliminare il complesso al denominatore come:

$$\bar{Y} = \frac{1}{\bar{Z}} = \frac{1}{R + jX} = \frac{R - jX}{R^2 + X^2} = \frac{R}{R^2 + X^2} + j \left(-\frac{X}{R^2 + X^2} \right)$$

da cui:

$$\begin{cases} G = \frac{R}{R^2 + X^2} \\ B = -\frac{X}{R^2 + X^2} \end{cases}$$

Unità di misura

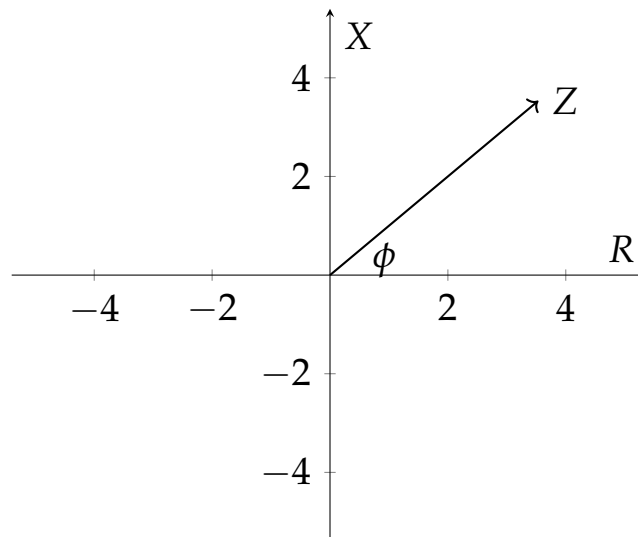
Abbiamo che, essendo quantità omogenee (le abbiamo sommate fra di loro senza problemi), l'impedenza Z , la reattanza X e la resistenza R si misurano in Ohm, mentre l'ammettenza Y , la suscettanza B e la conduttanza G si misurano in Siemens.

Rappresentazione grafica dell'impedenza

Abbiamo che il vettore di Z rappresentato sul piano di Argand-Gauss rappresenta in componenti R e X (com'è ovvio), e che l'angolo che forma con l'asse delle x rappresenta ϕ .

Inoltre, si ha che l'ammettenza corrispondente è un vettore con modulo $\frac{1}{Z}$ e angolo $-\phi$, da:

$$\bar{Y} = \frac{1}{\bar{Z}} = \frac{1}{Ze^{j\phi}} = \frac{1}{Z}e^{-j\phi}$$



Notiamo il significato dei quadranti:

- **Primo quadrante:** $R > 0$, $X > 0$ abbiamo che sia la resistenza che la reattanza sono positive, quindi si parla di impedenza ohmico-induttiva.
- **Secondo quadrante:** $R < 0$, $X > 0$ abbiamo che la resistenza è negativa e la reattanza è positiva, quindi si parla di impedenza ohmico-induttiva negativa.
- **Terzo quadrante:** $R < 0$, $X < 0$ abbiamo che sia la resistenza che la reattanza sono negative, quindi si parla di impedenza ohmico-capacitiva negativa.

- **Quarto quadrante:** $R < 0, X > 0$ abbiamo che la resistenza è positiva e la reattanza è negativa, quindi si parla di impedenza ohmico-capacitiva.

In parallelo a quanto detto prima sull'angolo ϕ . Ai vettori paralleli agli assi corrispondono, come ci si aspetterebbe, abbiamo l'impedenza puramente induttiva ($R = 0, X > 0$), puramente capacitiva ($R = 0, X < 0$) e puramente resistiva positiva ($R > 0, X = 0$) e negativa ($R < 0, X = 0$).

0.13 Lezione del 25-10-24

Potenza in circuiti a regime sinusoidale

Vediamo come si studia la potenza nei circuiti in corrente alternata. Avevamo definito la potenza come:

$$p(t) = v(t)i(t) = Ri^2(t)$$

A regime costante, abbiamo che $v(t)$ e $i(t)$ sono costanti, come lo è (ovviamente) R , ergo $p(t)$ ha un valore definito e positivo.

A regime sinusoidale, invece, abbiamo una forma del tipo:

$$i(t) = I_M \cdot \sin(\omega t)$$

assumendo $\phi = 0$.

Abbiamo quindi che in $p(t) = Ri^2(t)$ non c'è modo di eliminare la dipendenza temporale. Notiamo però che vale comunque $p(t) \geq 0$ dal quadrato a $i(t)$.

Valore efficace

Potremmo quindi chiederci se è il circuito a regime costante o quello a regime sinusoidale a dissipare più energia sul solito intervallo di tempo ΔT . Sul costante, abbiamo l'integrale:

$$W(t) = \int_0^T RI^2 dt = RI^2 \cdot T$$

mentre sul sinusoidale vale:

$$W(t) = \int_0^T Ri^2(t) dt = R \int_0^T i^2(t) dt$$

Eguagliamo quindi le due:

$$RI_{eff}^2 T = R \int_0^T i^2(t) dt$$

dove abbiamo chiamato $I \rightarrow I_{eff}$ per dare una definizione preliminare di **corrente efficace**, cioè la corrente in regime costante che dissipa la stessa potenza della corrispondente corrente in regime sinusoidale. Si ha quindi:

$$I_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2(t) dt}$$

Vediamo che questa definizione è generica:

0.13.1: Valore efficace

Definiamo il valore efficace X_{eff} di una grandezza $x(t)$ in regime sinusoidale su un intervallo T come:

$$X_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T x^2(t) dt}$$

Possiamo quindi sostituire la definizione che avevamo dato di $i(t)$, ottenendo:

$$\begin{aligned} I_{eff} &= \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T I_M^2 \cdot \sin^2(\omega t) dt} = \sqrt{\frac{1}{T} I_M^2 \int_0^T (1 - \cos^2(\omega t)) dt} \\ &= \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T \frac{1 - \cos(2\omega t)}{2} dt} \\ &= \sqrt{\frac{1}{T} I_M^2 \left(\int_0^T \frac{1}{2} dt - \int_0^T \frac{\cos(2\omega t)}{2} dt \right)} = \sqrt{\frac{1}{T} I_M^2 \left(\frac{1}{2} \int_0^T 1 \cdot dt - \frac{1}{2} \int_0^T \cos(2\omega t) dt \right)} \\ &= \sqrt{\frac{I_M^2}{2}} \end{aligned}$$

da cui abbiamo il valore:

$$I_{eff} = \frac{I_M}{\sqrt{2}}$$

Notiamo come $I_{eff} \geq 0$, dal fatto che I_M corrente di picco è ≥ 0 .

Ad esempio, la rete elettrica nazionale funziona a 220 volts. Questo non è altro che il valore efficace della tensione. Si ha infatti:

$$V_M = 220 \cdot \sqrt{2} \approx 311V$$

cioè il valore di picco della tensione alla presa è circa 331 V.

Calcolo della potenza

Definiamo quindi la potenza su circuiti a regime periodico sinusoidale. Definiamo la **potenza istantanea**:

$$p(t) = i(t)v(t)$$

Avevamo definito $i(t)$ e $v(t)$ come:

$$\begin{cases} i(t) = I_M \sin(\omega t) \\ v(t) = V_M \sin(\omega t + \phi) \end{cases}$$

dove ϕ è la **fase dell'impedenza**, da $\phi_V = \phi + \phi_i$, $\dot{V} = \bar{Z}\dot{I}$.

Possiamo quindi sostituire:

$$\begin{aligned} p(t) &= V_M \sin(\omega t + \phi) \cdot I_M \sin(\omega t) = V_M I_M \sin(\omega t) \sin(\omega t + \phi) \\ &= V_M I_M \sin(\omega t) (\sin(\omega t) \cos(\phi) + \cos \omega t \sin \phi) \\ &= V_M I_M (\sin^2(\omega t) \cos(\phi) + \sin(\omega t) \cos(\omega t) \sin(\phi)) \\ &= V_M I_M ((1 - \cos^2(\omega t)) \cos(\phi) + \sin(\omega t) \cos(\omega t) \sin(\phi)) \\ &= V_M I_M \left(\frac{1 - \cos(2\omega t)}{2} \cos(\phi) + \frac{\sin(2\omega t)}{2} \sin(\phi) \right) \\ &= \frac{V_M I_M}{2} ((1 - \cos(2\omega t)) \cos(\phi) + \sin(2\omega t) \sin(\phi)) \end{aligned}$$

da cui:

$$p(t) = \frac{V_M I_M}{2} (1 - \cos(2\omega t)) \cos(\phi) + \frac{V_M I_M}{2} \sin(2\omega t) \sin(\phi)$$

Il primo termine viene detto **potenza attiva istantanea**, mentre il secondo viene detto **potenza reattiva istantanea**. Componenti come i generatori generano potenza attiva istantanea, mentre componenti come gli induttori e i capacitori generano potenza reattiva istantanea.

Potenza attiva

Sarebbe comodo avere una misura di potenza che non dipende dal tempo, cioè un **valore medio**. Definiamo quindi:

0.13.2: Potenza attiva

Definiamo la potenza attiva P , sulla base della potenza istantanea $p(t)$, come la media integrale:

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T p(t) dt$$

Sostituendo quanto trovato prima, abbiamo:

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T p(t) dt = \frac{1}{T} \frac{V_M I_M}{2} \int_0^T (1 - \cos(2\omega t)) \cos(\phi) + \sin(2\omega t) \sin(\phi) dt$$

$$= \frac{1}{T} \frac{V_M I_M}{2} \left(\int_0^T \cos(\phi) dt + \int_0^T \cos(2\omega t) \cos(\phi) dt + \int_0^T \sin(2\omega t) \sin(\phi) dt \right)$$

dove l'unico integrale che resta è $\int_0^T \cos(\phi) dt = T \cos(\phi)$, ergo:

$$P = \frac{V_M I_M}{2} \cos(\phi) = \frac{V_{eff} \sqrt{2} \cdot I_{eff} \sqrt{2}}{2} \cos \phi = V_{eff} I_{eff} \cos \phi$$

Si nota la comodità di usare i valori efficaci: non compare $\sqrt{2}$ al denominatore.

Notiamo poi che avevamo, dall'impedenza e l'ammettenza:

$$\dot{V} = \bar{Z} \dot{I} \Rightarrow P = Z I^2 \cos \phi = R I^2 = Y V^2 \cos(\phi) = G V^2$$

Potenza reattiva

Definiamo quindi la **potenza reattiva**:

0.13.3: Potenza reattiva

Definiamo la potenza reattiva Q come il massimo della potenza reattiva istantanea.

Da quanto calcolato prima, si ha:

$$Q = \max \frac{V_M I_M}{2} \sin(2\omega t) \sin(\phi) = \frac{V_M I_M}{2} \sin(\phi)$$

La potenza reattiva si misura in [VAR], cioè *Volt Ampere Reattivi*. Si ha anche qui, riguardo il triangolo delle impedenze:

$$Q = \frac{V_{eff} \sqrt{2} \cdot I_{eff} \sqrt{2}}{2} \sin(\phi) = V_{eff} I_{eff} \sin(\phi)$$

$$= Z I^2 \sin(\phi) = X I^2 = Y V^2 \sin(\phi) = -B V^2$$

Notiamo che, riguardo alla potenza attiva, avevamo che è una grandezza sempre ≥ 0 , mentre la potenza reattiva è **indeterminata in segno**.

Potenza apparente

Definiamo infine la potenza **apparente**:

0.13.4: Potenza apparente

Definiamo la potenza reattiva S come il valore massimo raggiungibile della potenza, cioè:

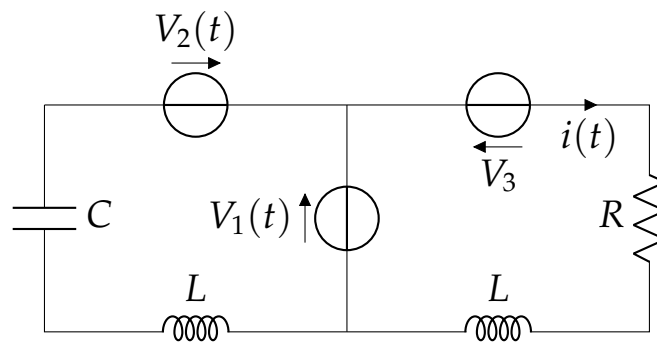
$$S = \frac{V_M I_M}{2}$$

Come prima,

$$S = \frac{V_M I_M}{2} = \frac{V_{eff} \sqrt{2} \cdot I_{eff} \sqrt{2}}{2} = VI = ZI^2 = YV^2$$

L'unità della misura della potenza apparente è il [VA], cioè *Volt Ampere*.

Prendiamo in esempio il circuito:



con i generatori guidati dalla legge:

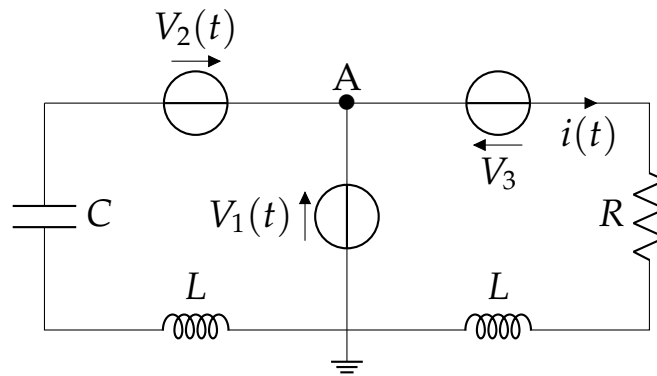
$$\begin{cases} V_1(t) = 10\sqrt{2} \sin(1000t) \text{ V} \\ V_2(t) = 20\sqrt{2} \sin(1000t + \frac{\pi}{2}) \text{ V} \\ V_3(t) = 30\sqrt{2} \sin(1000t + \pi) \text{ V} \end{cases}$$

Ci chiediamo quanto valga la corrente $i(t)$ sul generatore di tensione V_3 , in direzione opposta al contrassegno.

Prima di tutto, portiamo le equazioni dei generatori in forma fasoriale, usando il valore efficace del voltaggio. Usare il valore efficace o il valore proprio del voltaggio è indifferente, ma abbiamo che i calcoli si semplificano se si usa il primo. Abbiamo quindi:

$$\begin{cases} \dot{V}_1 = 10e^{j \cdot 0} = 10V \\ \dot{V}_2 = 20e^{j \frac{\pi}{2}} = 20jV \\ \dot{V}_3 = 30e^{j \pi} = -30V \end{cases}$$

Possiamo quindi usare il metodo delle correnti di nodo. Poniamo il nodo:



A questo punto, $V_A = V_1 = 10V$, e si può applicare Kirchhoff alla maglia a destra:

$$-\dot{V}_1 + \dot{V}_3 + R\dot{I} + \dot{I} \cdot j\omega L = 0 \Rightarrow i(t) = \frac{\dot{V}_1 - \dot{V}_3}{R + j\omega L}$$

Poniamo che, risolvendo con qualche valore di R e C , si ha $\dot{I} = 2 - 2j$. A questo punto, possiamo ritrovare il valore di $i(t)$ effettivo attraverso il modulo di \dot{I} e l'angolo:

$$i(t) = \sqrt{2^2 + 2^2} \sqrt{2} \cdot \sin\left(1000t - \frac{\pi}{4}\right) = 4 \sin\left(1000t - \frac{\pi}{4}\right)$$

dove si è reintrodotto $\sqrt{2}$ per ritornare al valore di picco.

0.14 Lezione del 30-10-24

Potenza complessa

Introduciamo un'ulteriore misura della potenza, comoda perché non necessita (a differenza di quelle studiate finora) di lavorare coi valori efficaci.

0.14.1: Potenza complessa

Definiamo la **potenza complessa** \bar{S} come il prodotto dei fasori di tensione e corrente, cioè come:

$$\bar{S} = \dot{V} \dot{I}^*$$

Notiamo che si prende il **coniugato complesso** di \dot{I} . Il suo significato si può mostrare svolgendo il calcolo:

$$\bar{S} = \dot{V} \dot{I}^* = V \cdot e^{j\phi_v} \cdot I \cdot e^{-j\phi_i} = VI e^{j(\phi_v - \phi_i)} = VI e^{j\phi}$$

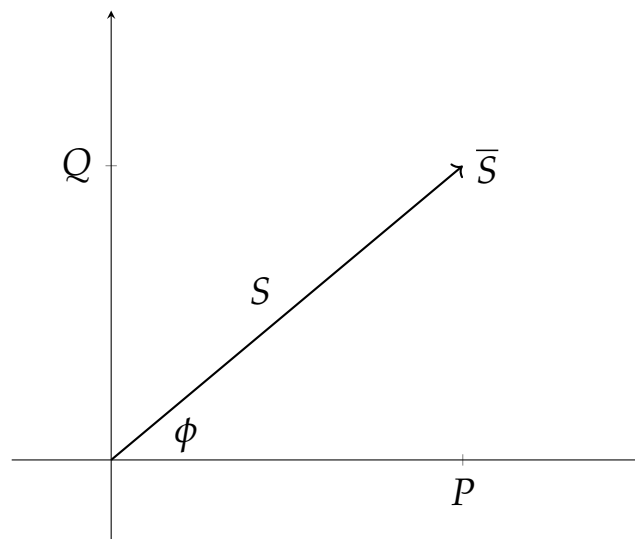
cioè possiamo sfruttare la formula sulle fasi $\phi_v - \phi_i = \phi$.

In forma cartesiana, abbiamo che \bar{S} vale:

$$\bar{S} = VI e^{j\phi} = VI \cos(\phi) + jVI \sin \phi = P + jQ$$

e quindi la potenza complessa è uguale al complesso dato da potenza attiva e reattiva. Notiamo che finora nei calcoli si è inteso, con V e I , i **valori efficaci** di queste grandezze: da qui in poi infatti prenderemo qualsiasi versore privo di pedice con valore efficace a modulo.

Possiamo rappresentare questa relazione nel cosiddetto **triangolo delle potenze**: la base è la potenza attiva, l'altezza la potenza resistiva, e inoltre notiamo che l'ipotenusa è la potenza apparente:



Possiamo poi sfruttare:

$$\dot{V} = \bar{Z}\dot{I} \Leftrightarrow \begin{cases} V = ZI \\ \phi_v = \phi_z + \phi_i \end{cases}, \quad \dot{I} = \frac{\dot{V}}{\bar{Z}} = \bar{Y}\dot{V} \Leftrightarrow \begin{cases} I = YV \\ \phi_i = \phi_y + \phi_v \end{cases}$$

e quindi possiamo esprimere \bar{S} come funzione:

- In funzione dell'impedenza:

$$\bar{S} = \dot{V}\dot{I}^* = \bar{Z}I^2$$

- In funzione dell'ammettenza:

$$\bar{S} = \dot{V}\dot{I}^* = \bar{Y}V^2$$

Teorema di Tellegen

Dimostriamo il seguente risultato:

0.14.1: Teorema di Tellegen

La somma algebrica delle potenze istantanee impiegate su tutti i rami di una rete elettrica è uguale a 0, ovvero:

$$\sum_{jk=1}^n v_{jk}(t) \cdot i_{jk}(t) = 0$$

Notiamo che j e k sono indici che scorrono lungo n , dove n è il numero di nodi della rete presa in considerazione, ergo x_{jk} è quella grandezza considerata su ogni arco (ad archi inesistenti sarà evidentemente 0).

Possiamo riformulare la formula precedente come segue:

$$\sum_{jk=1}^n (v_{j,0}(t) - v_{k,0}(t)) \cdot i_{j,k}(t) = 0$$

Dove si è usato $v_{jk} = v_{j,0} - v_{k,0}$ dal secondo principio di Kirchhoff. Abbiamo quindi:

$$= \sum_{jk=1}^n v_{j,0}(t) \cdot i_{j,k}(t) - \sum_{jk=1}^n v_{k,0}(t) \cdot i_{j,k}(t) = \sum_{j=1}^n v_{j,0}(t) \left(\sum_{k=1}^n i_{jk}(t) \right) - v_{k,0}(t) \left(\sum_{j=1}^n i_{jk}(t) \right)$$

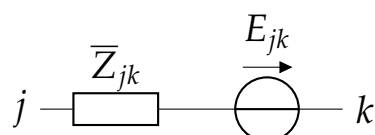
Abbiamo che il secondo termine sommatoria è la somma delle correnti che escono dal nodo j , che quindi è 0 dal primo di Kirchhoff, e il quarto termine, allo stesso modo, è la somma delle correnti che escono dal nodo k , e quindi l'intera espressione è nulla, da cui il teorema.

Teorema di Boucherot

Dal teorema di Tellegen sul caso sinusoidale deriva il **teorema di Boucherot**. Prendiamo come ipotesi:

$$\sum_{jk=1}^n \dot{V}_{jk} \dot{I}_{jk}^* = 0$$

Questo deriva dal teorema di Tellegen considerato in regime sinusoidale. Prendiamo quindi un qualunque ramo jk : su questo ramo avremo chiaramente impedenze e generatori, a cui diamo il nome \bar{Z}_{jk} e \dot{E}_{jk} , e corrente e voltaggio, a cui diamo il nome di \dot{I}_{jk} e \dot{V}_{jk} :



Sostituiamo quindi la caduta di potenziale \dot{V}_{jk} nell'ipotesi con:

$$\sum_{jk=1}^n (\bar{Z}_{jk} \dot{I}_{jk} - \dot{E}_{jk}) \cdot \dot{I}_{jk}^* = 0$$

notando che i due termini coinvolti nella sommatoria sono:

$$\sum_{jk=1}^n \bar{Z}_{jk} \cdot I_{jk}^2 = \sum_{jk=1}^n \dot{E}_{jk} \dot{I}_{jk}^* = \sum_{jk=1}^n \bar{S}_{jk}^{(G)}$$

cioè le potenze dissipate sulle impedenze e le potenze erogate dai generatori del ramo. Da questo si deriva il teorema:

0.14.2: Teorema di Boucherot

La somma delle potenze complesse dissipate sulle impedenze di un circuito è uguale alla somma delle potenze complesse erogate dai generatori, cioè:

$$\sum_{jk=1}^n \bar{Z}_{jk} \cdot I_{jk}^2 = \sum_{jk=1}^n \dot{E}_{jk} \dot{I}_{jk}^*$$

Possiamo rendere questo risultato anche come:

$$\sum_{jk=1}^n (R_{jk} + jX_{jk}) I_{jk}^2 = \sum_{jk=1}^n (P_{jk}^{(G)} + jQ_{jk}^{(G)})$$

Da cui in poi si possono equagliare separatamente parte reale e parte immaginaria:

$$\begin{cases} \sum_{jk=1}^n R_{jk} I_{jk}^2 = \sum_{jk} P_{jk}^{(G)} \\ \sum_{jk=1}^n X_{jk} I_{jk}^2 = \sum_{jk} Q_{jk}^{(G)} \end{cases}$$

ergo, non solo la somma delle potenze complesse dissipate sulle impedenze di un circuito è uguale alla somma delle potenze complesse erogate dai generatori, ma sia la potenza attiva che la potenza reattiva dissipata sulle impedenze sono uguali a le corrispondenti erogate dai generatori.

Sulla potenza attiva, che sappiamo non poter avere segno negativo, si ha che i generatori devono compensare le potenze dissipate sulle impedenze.

Potenza apparente e Boucherot

Preso un ramo con due generatori P_1 e P_2 , abbiamo che la potenza attiva e reattive associate valgono quanto le somme delle potenze attive e reattive

sui singoli generatori:

$$P^{(G)} = P_1 + P_2, \quad Q^{(G)} = Q_1 + Q_2$$

e quindi, da Boucherot, o semplicemente applicando la definizione di potenza complessa \bar{S} :

$$\bar{S}^{(G)} = P^{(G)} + jQ^{(G)} = (P_1 + P_2) + j(Q_1 + Q_2)$$

Cioè la potenza complessa si conserva.

Dobbiamo notare che questo non vale per la potenza apparente: si ha che $S^{(G)} = \sqrt{P_{(G)}^2 + Q_{(G)}^2}$, ergo la dipendenza non è lineare, e non possiamo assumere che si conservi, cioè vale:

$$S^{(G)} = \sqrt{P_{(G)}^2 + Q_{(G)}^2} \neq \sqrt{P_1^2 + Q_1^2} + \sqrt{P_2^2 + Q_2^2}$$

0.15 Lezione del 06-11-24

Potenza su induttori mutuamente accoppiati

Abbiamo visto che i componenti come i resistori, hanno potenza **attiva**, cioè contribuiscono alla parte reale della potenza complessa, mentre componenti come condensatori e induttori hanno potenza **reattiva**, cioè contribuiscono alla parte complessa della potenza complessa. Vediamo adesso se la potenza su due induttori mutuamente accoppiati è attiva o reattiva.

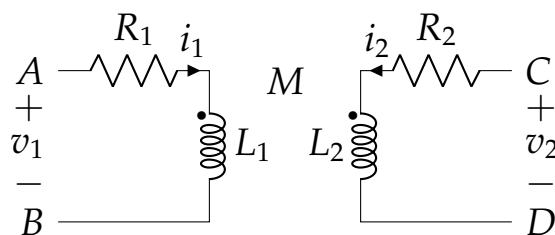
Iniziamo col dire che la formula che conosceamo per la mutua induttanza, assunte correnti concordi sui contrassegni, cioè:

$$\dot{V} = j\omega L_1 \dot{I}_1 + j\omega M \dot{I}_2$$

può anche esprimersi attraverso l'ammettenza \bar{Z} , con $\dot{V} = \bar{Z} \dot{I}$, cioè:

$$\dot{V} = \bar{Z} \dot{I}_1 + \bar{Z} \dot{I}_2$$

Prendiamo quindi una coppia di induttori **reali** (quindi in serie ad una resistenza) mutuamente accoppiati:



Potremo esprimere la potenza complessa come:

$$\begin{aligned}\bar{S} &= V_1 \dot{I}_1^* + V_2 \dot{I}_2^* = (R_1 \dot{I}_1 + j\omega L_1 \dot{I}_1 + j\omega M \dot{I}_2) \cdot \dot{I}_1^* + (R_2 \dot{I}_2 + j\omega L_2 \dot{I}_2 + j\omega M \dot{I}_1) \cdot \dot{I}_2^* \\ &= R_1 I_1^2 + j\omega L_1 I_1^2 + j\omega M \dot{I}_2 \cdot \dot{I}_1^* + R_2 I_2^2 + j\omega L_2 I_2^2 + j\omega M \dot{I}_1 \cdot \dot{I}_2^* \\ &= R_1 I_1^2 + R_2 I_2^2 + j\omega L_1 I_1^2 + j\omega L_2 I_2^2 + j\omega M (\dot{I}_2 \cdot \dot{I}_1^* + \dot{I}_1 \cdot \dot{I}_2^*)\end{aligned}$$

Da cui notiamo i primi quattro termini essere reali, ergo l'unico termine con possibile componente complessa è $j\omega M (\dot{I}_2 \cdot \dot{I}_1^* + \dot{I}_1 \cdot \dot{I}_2^*)$. Possiamo dire che:

$$\dot{I}_1 = I_1 e^{j\phi_1}, \quad \dot{I}_2 = I_2 e^{j\phi_2}$$

da cui:

$$\begin{aligned}\bar{S} &= \dots + j\omega M (I_2 e^{j\phi_2} \cdot I_1 e^{-j\phi_1} + I_1 e^{j\phi_1} \cdot I_2 e^{-j\phi_2}) = \dots + j\omega M I_1 I_2 (e^{j(\phi_2 - \phi_1)} + e^{j(\phi_1 - \phi_2)}) \\ &= \dots + j\omega M I_1 I_2 (\cos(\phi_2 - \phi_1) + j \sin(\phi_2 - \phi_1) + \cos(\phi_1 - \phi_2) + j \sin(\phi_1 - \phi_2))\end{aligned}$$

E quindi dalle proprietà di seni e coseni di argomento negato:

$$\bar{S} = R_1 I_1^2 + R_2 I_2^2 + j\omega L_1 I_1^2 + j\omega L_2 I_2^2 + 2j\omega M I_1 I_2 \cos(\phi_2 - \phi_1)$$

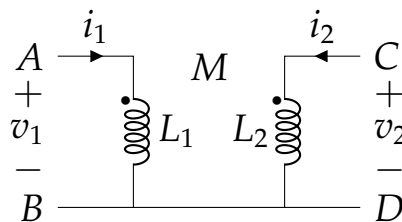
Da cui si ha che potenza attiva e reattiva sono rispettivamente:

$$P = R_1 I_1^2 + R_2 I_2^2, \quad jQ = j\omega L_1 I_1^2 + j\omega L_2 I_2^2 + 2j\omega M I_1 I_2 \cos(\phi_1 - \phi_2)$$

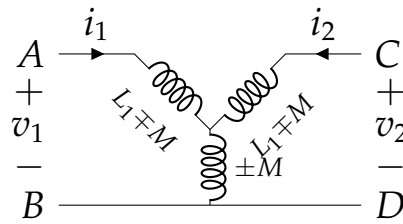
e quindi la potenza sulle mutue induttanze reali non ha solo componente reattiva (come nelle comuni induttanze), ma anche attiva.

Circuiti equivalenti a induttori mutuamente accoppiati

Possiamo creare circuiti equivalenti, usando induttori non mutuamente accoppiati, quando si hanno induttori mutuamente accoppiati con nodi in comune:



In questo caso si può usare l'equivalente a stella, scelto un nuovo nodo centrale O:

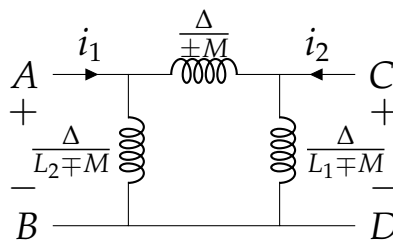


dove i segni superiori si usano nel caso di contrassegni coincidenti rispetto al nodo centrale, e i segni inferiori si usano nel caso di contrassegni opposti.

Possiamo verificare che il circuito è effettivamente equivalente calcolando le cadute di potenziale, ad esempio sul lato sinistro del circuito:

$$\begin{aligned}\dot{V}_1 &= j\omega(L_1 - M)\dot{I}_1 + j\omega M(\dot{I}_1 + \dot{I}_2) = j\omega L_1 \dot{I}_1 - j\omega M \dot{I}_1 + j\omega M \dot{I}_1 + j\omega M \dot{I}_2 \\ &= j\omega L_1 \dot{I}_1 + j\omega M \dot{I}_2\end{aligned}$$

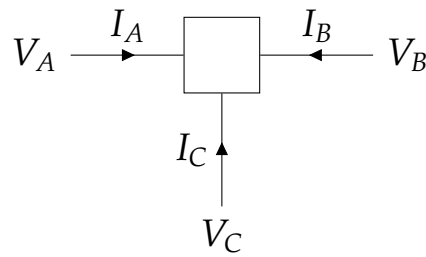
Un montaggio alternativo, ma comunque equivalente, è quello a π :



Dove $\Delta = L_1 L_2 - M^2$, assunto $L_1 L_2 \neq M^2$ (con $M = \sqrt{L_1 L_2}$, siamo in condizioni di mutua induttanza *ideale*). Come prima, i segni superiori significano induttanze con contrassegni concordi in direzione del polo comune, e i segni inferiori significano induttanze con contrassegni discordi.

0.16 Lezione del 13-11-24

Avevamo visto il concetto di **bipolo**, cioè un componente circuitale con due *punti di contatto* col resto del circuito (**morsetti**), su cui passa una certa **corrente** I e su cui si trova una certa **tensione**, cioè una *differenza di potenziale* V . Potremmo avere anche un **tripolo**, cioè un componente con morsetti, su cui passano (propriamente, da cui *escono* o *entrano*), anzichè una, 3 correnti, e su cui individuiamo 3 tensioni (A , B e C) e 3 **cadute** di tensione su ogni percorso che attraversa il bipolo. Una possibile rappresentazione di un tripolo è la seguente:



le cui equazioni sono:

$$\begin{cases} I_A + I_B + I_C = 0 \\ V_{AB} = V_A - V_B \\ V_{AC} = V_A - V_C \\ V_{BC} = V_B - V_C \end{cases}$$

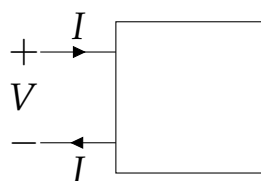
Notiamo che, dalle equazioni ai potenziali, si possono ricavare le relazioni (piuttosto scontate):

$$\begin{cases} V_{AB} + V_{BC} = V_{AC} \\ V_{BA} + V_{AC} = V_{BC} \\ V_{AC} + V_{CB} = V_{AB} \end{cases}$$

con $V_{BA} = -V_{AB}$ e $V_{CB} = -V_{BC}$ (e anche se non si è usata, $V_{CA} = -V_{AC}$).

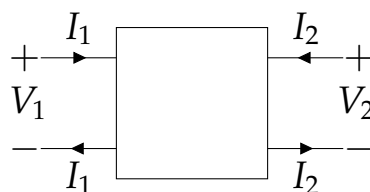
Porte

Definiamo una **porta** come una coppia di poli di un circuito dove la corrente entrante è uguale a quella uscente. Rappresentiamo una porta come segue:



Notiamo che per n poli si hanno al massimo $\frac{n}{2}$ porte (ammesso un numero pari di poli).

Ciò che ci è di interesse sono i circuiti a **due porte** (o equivalentemente a *quattro poli*):



Possiamo immaginare che un segnale *entra* da una porta, viene *elaborato* all'interno del circuito, e *esce* dalla porta opposta.

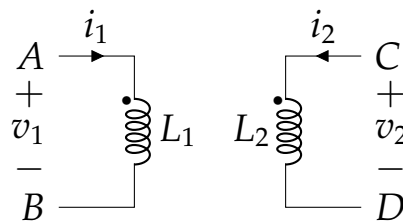
Per convenzione, scegliamo le due correnti $I_1(t)$ e $I_2(t)$ come rivolte nello stesso senso, e le due tensioni $V_1(t)$ e $V_2(t)$ come con la stessa polarità:

Circuiti equivalenti di circuiti a due porte

Ciò che può interessarci quando studiamo circuiti a due porte è ricavare **circuiti equivalenti**, cioè che si comportano in maniera equivalente agli effetti esterni. L'idea è, come sempre, quella di prendere circuiti arbitrariamente complessi e ridurli a circuiti equivalenti relativamente semplici.

Rappresentazione a parametri Z

Una coppia di **induttori mutuamente accoppiati** rappresenta effettivamente un circuito a due porte, in quanto la stessa corrente entra e esce da ogni induttore (cioè si formano due porte).



Avevamo rappresentato questi circuiti come:

$$\begin{cases} \dot{V}_1 = j\omega L_1 \dot{I}_1 + j\omega M \dot{I}_2 \\ \dot{V}_2 = j\omega L_2 \dot{I}_2 + j\omega M \dot{I}_1 \end{cases}$$

Analogamente, decidiamo di rappresentare un circuito a due porte attraverso equazioni che legano la tensione su una porta alla corrente su entrambe le porte:

$$\begin{cases} \dot{V}_1 = \overline{z}_{11} \dot{I}_1 + \overline{z}_{12} \dot{I}_2 \\ \dot{V}_2 = \overline{z}_{21} \dot{I}_1 + \overline{z}_{22} \dot{I}_2 \end{cases}$$

Per esprimere queste relazioni in forma più compatta, possiamo sfruttare il calcolo matriciale:

$$\dot{V} = \overline{Z} \dot{I}$$

dove \dot{V} e \dot{I} sono matrici:

$$\begin{pmatrix} \dot{V}_1 \\ \dot{V}_2 \end{pmatrix} = \overline{Z} \begin{pmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 \end{pmatrix}$$

e \overline{Z} sarà l'**impedenza** in forma matriciale:

$$\overline{Z} = \begin{pmatrix} \overline{z}_{11} & \overline{z}_{12} \\ \overline{z}_{21} & \overline{z}_{22} \end{pmatrix}$$

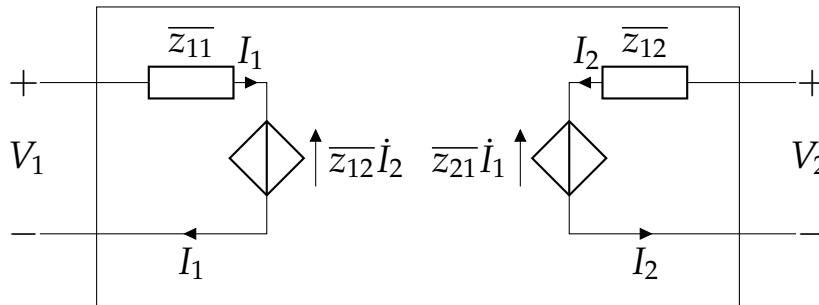
Date le equazioni riportate sopra che legano voltaggio a corrente, possiamo ricavare il valore di ogni componente di \overline{Z} come:

$$\overline{Z} = \begin{pmatrix} \overline{z}_{11} = \left. \frac{\dot{V}_1}{\dot{I}_1} \right|_{\dot{I}_2=0} & \overline{z}_{12} = \left. \frac{\dot{V}_1}{\dot{I}_2} \right|_{\dot{I}_1=0} \\ \overline{z}_{21} = \left. \frac{\dot{V}_2}{\dot{I}_1} \right|_{\dot{I}_2=0} & \overline{z}_{22} = \left. \frac{\dot{V}_2}{\dot{I}_2} \right|_{\dot{I}_1=0} \end{pmatrix}$$

dove la notazione $a \Big|_b$ significa "a quando b".

Circuito equivalente

Si ha, attraverso queste relazioni, che basta misurare la tensione sulle porte in due stati ($\dot{I}_1 = 0$ e $\dot{I}_2 = 0$) per ricavare completamente i parametri \overline{Z} del circuito, e ricavare quindi un circuito equivalente del tipo:



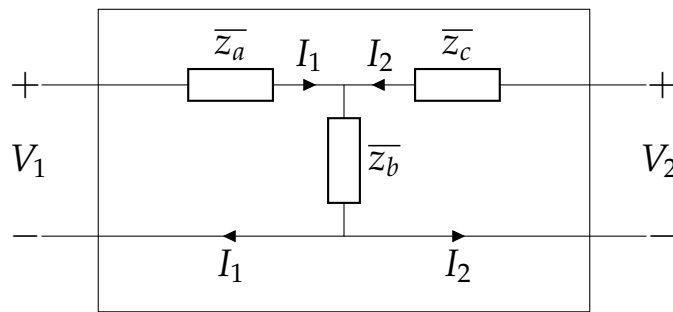
dove si inseriscono i termini di impedenza \overline{z}_{11} e \overline{z}_{22} semplicemente come impedenze in serie alle porte 1 e 2, e i termini "associati" \overline{z}_{12} e \overline{z}_{21} come generatori di tensione pilotati (che generano, appunto, cadute di tensione pilotate, rispettivamente in \dot{I}_2 per la porta 1 e in \dot{I}_1 per la porta 2).

Il metodo naturale di analisi per questo circuito è correnti di maglia, che possiamo applicare alle due porte per poi eguagliare con la matrice delle impedenze:

$$\begin{cases} \dot{V}_1 = \overline{z}_{11}\dot{I}_1 + \overline{z}_{12}\dot{I}_2 \\ \dot{V}_2 = \overline{z}_{22}\dot{I}_2 + \overline{z}_{21}\dot{I}_1 \end{cases}$$

che combacia con quanto definito sulla rappresentazione in impedenza.

In particolare, nel caso $\overline{z}_{12} = \overline{z}_{21}$ si dice che la rete è **reciproca** e si può formare il circuito equivalente come:



Anche qui, applicando correnti di maglia, si ha:

$$\begin{cases} \dot{V}_1 = \bar{z}_a \dot{I}_1 + \bar{z}_b (\dot{I}_1 + \dot{I}_2) = (\bar{z}_a + \bar{z}_b) \dot{I}_1 + \bar{z}_b \dot{I}_2 \\ \dot{V}_2 = \bar{z}_c \dot{I}_2 + \bar{z}_b (\dot{I}_1 + \dot{I}_2) = (\bar{z}_c + \bar{z}_b) \dot{I}_2 + \bar{z}_b \dot{I}_1 \end{cases}$$

che rappresenta la rete reciproca, ponendo:

$$\bar{Z} = \begin{pmatrix} \bar{z}_a + \bar{z}_b & \bar{z}_b \\ \bar{z}_b & \bar{z}_b + \bar{z}_c \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \bar{z}_a = \bar{z}_{11} - \bar{z}_{12} = \bar{z}_{11} - \bar{z}_{21} \\ \bar{z}_b = \bar{z}_{12} = \bar{z}_{21} \\ \bar{z}_c = \bar{z}_{22} - \bar{z}_{12} = \bar{z}_{22} - \bar{z}_{21} \end{cases}$$

Notiamo che, per circuiti a due porte generici, non è detto che i potenziali dei morsetti di uscita di entrambe le porte siano allo stesso potenziale: per modellizzare questo comportamento si usa una *mutua induttanza ideale*, cioè un **trasformatore ideale**.

Rappresentazione a parametri Y

Nella rappresentazione di un circuito a due porte possiamo parametrizzare, anzichè l'impedenza \bar{Z} , l'ammettenza \bar{Y} : se avevamo espresso il comportamento del circuito come $\begin{pmatrix} \dot{V}_1 \\ \dot{V}_2 \end{pmatrix} = \bar{Z} \begin{pmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 \end{pmatrix}$, infatti, possiamo trovare l'inverso:

$$\begin{pmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 \end{pmatrix} = \bar{Z}^{-1} \begin{pmatrix} \dot{V}_1 \\ \dot{V}_2 \end{pmatrix}$$

dove la matrice $\bar{Z}^{-1} = \bar{Y}$ è effettivamente l'**ammettenza** in forma matriciale del circuito:

$$\bar{Y} = \begin{pmatrix} \bar{y}_{11} & \bar{y}_{12} \\ \bar{y}_{21} & \bar{y}_{22} \end{pmatrix}$$

Da cui il sistema lineare:

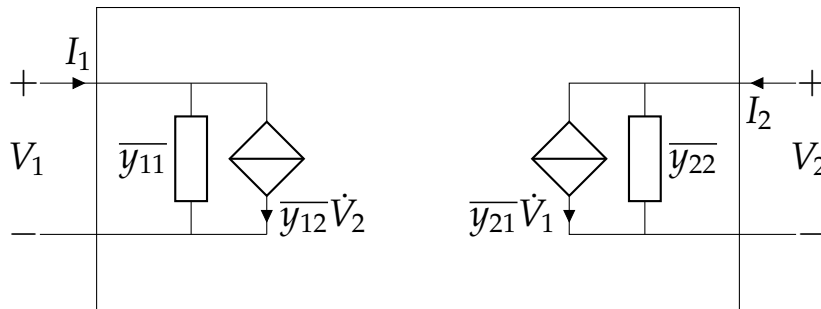
$$\begin{cases} \dot{I}_1 = \bar{y}_{11} \dot{V}_1 + \bar{y}_{12} \dot{V}_2 \\ \dot{I}_2 = \bar{y}_{21} \dot{V}_1 + \bar{y}_{22} \dot{V}_2 \end{cases}$$

Date le equazioni riportate sopra, possiamo ricavare il valore di ogni componente di \bar{Y} come:

$$\bar{Y} = \begin{pmatrix} \bar{y}_{11} = \frac{i_1}{\dot{V}_1} \Big|_{\dot{V}_2=0} & \bar{y}_{12} = \frac{i_1}{\dot{V}_2} \Big|_{\dot{V}_1=0} \\ \bar{y}_{21} = \frac{i_2}{\dot{V}_1} \Big|_{\dot{V}_2=0} & \bar{y}_{22} = \frac{i_2}{\dot{V}_2} \Big|_{\dot{V}_1=0} \end{pmatrix}$$

Circuito equivalente

Possiamo quindi disporre un circuito equivalente come segue:

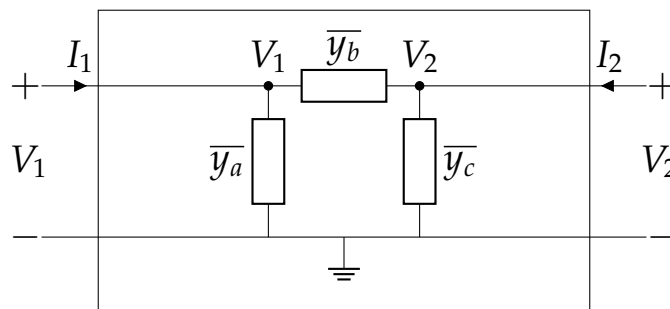


dove stavolta si inseriscono i termini di ammettenza \bar{y}_{11} e \bar{y}_{22} semplicemente ammettenze in parallelo alle porte 1 e 2, e i termini "associati" \bar{y}_{12} e \bar{y}_{21} come generatori di corrente pilotati. Possiamo analizzare questo circuito considerando le correnti sui rami impedenza e generatore di entrambe le porte, da cui si ottiene:

$$\begin{cases} I_1 = \bar{y}_{11}\dot{V}_1 + \bar{y}_{12}\dot{V}_2 \\ I_2 = \bar{y}_{22}\dot{V}_2 + \bar{y}_{21}\dot{V}_1 \end{cases}$$

che combacia con quanto definito sulla rappresentazione in ammettenza.

In particolare, vediamo il caso **reciproco** $\bar{y}_{11} = \bar{y}_{21}$:



Il metodo naturale di analisi per questo circuito è tensioni di nodo, che possiamo applicare alle due porte per poi eguagliare con la matrice delle ammettenze. Prendiamo i due nodi in alto come \dot{V}_1 e \dot{V}_2 , il nodo in basso come terra, e scriviamo le equazioni:

$$\begin{cases} I_1 = (\bar{y}_a + \bar{y}_b)\dot{V}_1 - \bar{y}_b\dot{V}_2 \\ I_2 = (\bar{y}_b + \bar{y}_c)\dot{V}_2 - \bar{y}_b\dot{V}_1 \end{cases}$$

che rappresenta la rete reciproca, ponendo:

$$\bar{Y} = \begin{pmatrix} \bar{y}_a + \bar{y}_b & -\bar{y}_b \\ -\bar{y}_b & \bar{y}_b + \bar{y}_c \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \bar{y}_a = \bar{y}_{11} + \bar{y}_{12} \\ \bar{y}_b = -\bar{y}_{12} = -\bar{y}_{21} \\ \bar{y}_c = \bar{y}_{22} + \bar{y}_{12} \end{cases}$$

Notiamo che ancora che il circuito più generale si ottiene disaccoppiando i potenziali sul ramo in basso attraverso un trasformatore ideale.

0.17 Lezione del 14-11-24

Legge di Ohm per circuiti a due porte

Abbiamo visto come, su circuiti a due porte, *tensione* e *corrente* sono **vettori** e *impedenza* e *ammettenza* sono **matrici**, ergo valgono le equazioni:

$$\begin{cases} \dot{V} = \bar{Z} \dot{I} \\ \dot{I} = \bar{Y} \dot{V} \end{cases}$$

con $\bar{Y} = \bar{Z}^{-1}$.

Inoltre, abbiamo visto la rappresentazioni in parametri Z e Y che si possono ricavare da queste due forme. Esistono altre rappresentazioni, che non si basano direttamente sulle equazioni della legge di Ohm rispetto all'impedenza o all'ammettenza, ma su altre caratteristiche del circuito. Vediamo infatti una rappresentazione utile a modellizzare parametri significativi di circuiti a due porte, la **rappresentazione a parametri h**.

Rappresentazione parametri ibridi

Finora abbiamo scelto le variabili indipendenti come entrambe le tensioni o entrambe le correnti. Nessuno ci nega però di scegliere come variabili indipendenti una tensione e una corrente. Chiamiamo la parametrizzazione che otteniamo da questa scelta **sintesi a parametri ibridi**, o **a parametri h**.

La forma generale di una sintesi a parametri h è:

$$\begin{cases} \dot{V}_1 = \bar{h}_{11} \dot{I}_1 + \bar{h}_{12} \dot{V}_2 \\ \dot{I}_2 = \bar{h}_{21} \dot{I}_1 + \bar{h}_{22} \dot{V}_2 \end{cases}$$

o come matrice:

$$\begin{pmatrix} \dot{V}_1 \\ \dot{I}_2 \end{pmatrix} = \bar{h} \begin{pmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{V}_2 \end{pmatrix}$$

Le componenti di \bar{h} si ricavano quindi come:

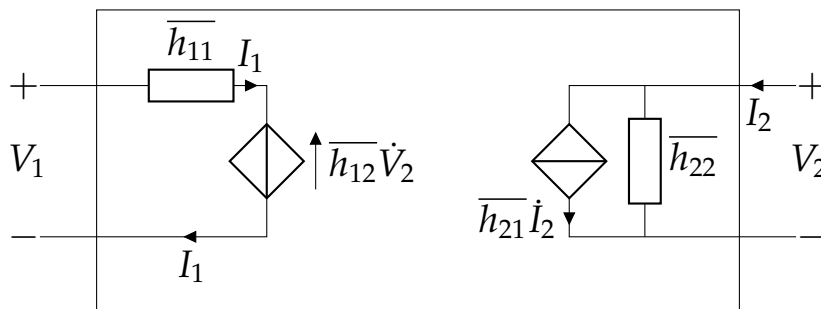
$$h : \begin{pmatrix} \bar{h}_{11} = \frac{\dot{V}_1}{\dot{I}_1} \Big|_{\dot{V}_2=0} & \bar{h}_{12} = \frac{\dot{V}_1}{\dot{V}_2} \Big|_{\dot{I}_1=0} \\ \bar{h}_{21} = \frac{\dot{I}_2}{\dot{I}_1} \Big|_{\dot{V}_2=0} & \bar{h}_{22} = \frac{\dot{I}_2}{\dot{V}_2} \Big|_{\dot{I}_1=0} \end{pmatrix}$$

Questo tipo di sintesi ha un significato interessante sui vari parametri:

- \bar{h}_{11} : impedenza in entrata;
- \bar{h}_{12} : inverso dell'amplificazione di tensione;
- \bar{h}_{21} : amplificazione di corrente;
- \bar{h}_{22} : inverso dell'impedenza in uscita (ammettenza in uscita).

Circuito equivalente

Il circuito equivalente che possiamo formare da una rappresentazione a parametri ibridi è il seguente:



da cui l'impedenza \bar{h}_{11} e l'ammettenza \bar{h}_{22} vengono rese come impedenze rispettivamente in serie e in parallelo, l'inverso dell'amplificazione di tensione \bar{h}_{12} come il coefficiente di un generatore di tensione pilotato, e l'amplificazione di corrente \bar{h}_{21} come il coefficiente di un generatore di corrente pilotato. Si noti che sia \bar{h}_{12} che \bar{h}_{21} sono numeri puri, mentre \bar{h}_{11} e \bar{h}_{22}

Condizioni di reciprocità

Vediamo quindi quando ci troviamo in condizioni di reciprocità. Si ha dalle formule della rappresentazione:

$$\begin{cases} \dot{V}_1 = \bar{h}_{11}\dot{I}_1 + \bar{h}_{12}\dot{V}_2 \\ \dot{I}_2 = \bar{h}_{21}\dot{I}_1 + \bar{h}_{22}\dot{V}_2 \end{cases}$$

Dalla seconda equazione possiamo scrivere:

$$\bar{h}_{22}\dot{V}_2 = -\bar{h}_{21}\dot{I}_1 + \dot{I}_2 \Rightarrow \dot{V}_2 = -\frac{\bar{h}_{21}}{\bar{h}_{22}}\dot{I}_1 + \frac{1}{\bar{h}_{22}}\dot{I}_2$$

dove $-\frac{\overline{h_{21}}}{\overline{h_{22}}} = \overline{z_{21}}$ e $\frac{1}{\overline{h_{22}}} = \overline{z_{22}}$ sono effettivamente i parametri Z del circuito. Analogamente, dalla prima equazione possiamo scrivere:

$$\dot{V}_1 = \overline{h_{11}}\dot{I}_1 + \overline{h_{12}}\left(-\frac{\overline{h_{21}}}{\overline{h_{22}}}\dot{I}_1 + \frac{1}{\overline{h_{22}}}\dot{I}_2\right) \Rightarrow \dot{V}_1 = \left(\overline{h_{11}} - \frac{\overline{h_{12}}\overline{h_{21}}}{\overline{h_{22}}}\right)\dot{I}_1 + \frac{\overline{h_{12}}}{\overline{h_{22}}}\dot{I}_2$$

dove ancora una volta $\overline{h_{11}} - \frac{\overline{h_{12}}\overline{h_{21}}}{\overline{h_{22}}} = \overline{z_{11}}$ e $\frac{\overline{h_{12}}}{\overline{h_{22}}} = \overline{z_{12}}$ sono i parametri Z del circuito.

Si ricavano quindi i parametri Z in funzione dei parametri h:

$$\overline{Z} = \begin{pmatrix} \overline{h_{11}} - \frac{\overline{z_{12}}\overline{z_{21}}}{\overline{h_{22}}} & \frac{\overline{h_{12}}}{\overline{h_{22}}} \\ -\frac{\overline{h_{21}}}{\overline{h_{22}}} & \frac{1}{\overline{h_{22}}} \end{pmatrix}$$

Imponendo la condizione di reciprocità $\overline{z_{12}} = \overline{z_{21}}$, si ha:

$$\frac{\overline{z_{12}}}{\overline{z_{22}}} = -\frac{\overline{z_{21}}}{\overline{z_{22}}} \Rightarrow \overline{z_{12}} = -\overline{z_{21}}$$

posto $\overline{z_{22}} \neq 0$, che è comunque assunto rispettato (l'impedenza non può essere nulla).

Dalle equazioni si ha che quindi che il circuito è **reciproco** quando la matrice dei parametri h è "antisimmetrica", cioè ha valori negati lungo la diagonale (si noti che questa definizione non è assolutamente quella data in algebra lineare, cioè $A^T = -A$: questa implicherebbe diagonale nulla).

0.18 Lezione del 15-11-24

Rappresentazione a parametri T

Vediamo un ultimo tipo di parametrizzazione, la **parametrizzazione T**. Le equazioni di rappresentazione sono:

$$\begin{cases} \dot{V}_1 = \overline{A}\dot{V}_2 + \overline{B}(-\dot{I}_2) \\ \dot{V}_2 = \overline{C}\dot{V}_2 + \overline{D}(-\dot{I}_2) \end{cases}$$

Notiamo come le grandezze indipendenti qui sono sempre sia tensioni e correnti, ma non in alternanza come nella parametrizzazione h. Inoltre, notiamo che il termine \dot{I}_2 compare con segno negativo.

Potremmo pensare di calcolare i parametri T come segue:

$$T : \begin{pmatrix} \overline{A} = \left. \frac{\dot{V}_1}{\dot{V}_2} \right|_{-\dot{I}_2=0} & \overline{B} = -\left. \frac{\dot{V}_1}{\dot{I}_2} \right|_{\dot{V}_2=0} \\ \overline{C} = \left. \frac{\dot{I}_1}{\dot{V}_2} \right|_{-\dot{I}_2=0} & \overline{D} = -\left. \frac{\dot{I}_1}{\dot{I}_2} \right|_{\dot{V}_2=0} \end{pmatrix}$$

ma notiamo che risulta difficile calcolare, ad esempio \bar{A} , in quanto si chiede di mettere sia un generatore che un aperto alla porta 2. Scriviamo quindi una matrice del tipo:

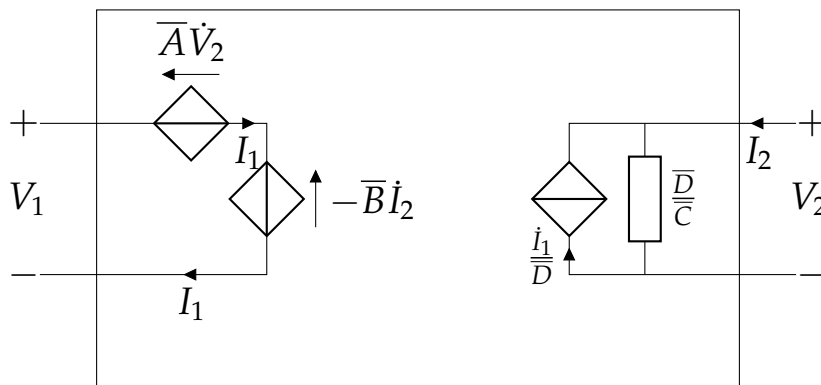
$$T : \begin{pmatrix} \frac{1}{\bar{A}} = \left. \frac{\dot{V}_2}{\dot{V}_1} \right|_{-\dot{I}_2=0} & \frac{1}{\bar{B}} = \left. -\frac{\dot{I}_2}{\dot{V}_1} \right|_{-\dot{V}_2=0} \\ \frac{1}{\bar{C}} = \left. \frac{\dot{V}_2}{\dot{I}_1} \right|_{-\dot{I}_2=0} & \frac{1}{\bar{D}} = \left. -\frac{\dot{I}_2}{\dot{I}_1} \right|_{-\dot{V}_2=0} \end{pmatrix}$$

Circuito equivalente

Riscriviamo la seconda equazione di rappresentazione come:

$$\dot{I}_1 = \bar{C}\dot{V}_2 + \bar{D}(-\dot{I}_2) \Rightarrow -\dot{I}_2 = \frac{1}{\bar{D}}\dot{I}_1 - \frac{\bar{C}}{\bar{D}}\dot{V}_2$$

Un possibile circuito equivalente di una parametrizzazione T sarà quindi il seguente:



Condizioni di reciprocità

Troviamo quindi le condizioni di reciprocità. Come avevamo fatto per i parametri h, riportiamoci in parametri Z, ad esempio partendo dalla seconda equazione:

$$\dot{V}_2 = \frac{1}{\bar{C}}\dot{I}_1 + \frac{\bar{D}}{\bar{C}}\dot{I}_2$$

da cui $\frac{1}{\bar{C}} = \bar{z}_{21}$ e $\frac{\bar{D}}{\bar{C}} = \bar{z}_{22}$, e analogamente per la prima:

$$\dot{V}_1 = \bar{A} \left(\frac{1}{\bar{C}}\dot{I}_1 + \frac{\bar{D}}{\bar{C}}\dot{I}_2 \right) + \bar{B}(-\dot{I}_2) = \dot{I}_1 \frac{1}{\bar{C}} + \dot{I}_2 \left(\frac{\bar{D}}{\bar{C}} - \bar{B} \right)$$

da cui $\bar{z}_{11} = \frac{\bar{A}}{\bar{C}}$ e $\bar{z}_{12} = \frac{\bar{A}\bar{D}}{\bar{C}} - \bar{B}$. Si ricavano quindi i parametri Z in funzione dei parametri T:

$$\bar{Z} = \begin{pmatrix} \frac{\bar{A}}{\bar{C}} & \frac{\bar{A}\bar{D}}{\bar{C}} - \bar{B} \\ \frac{1}{\bar{C}} & \frac{\bar{D}}{\bar{C}} \end{pmatrix}$$

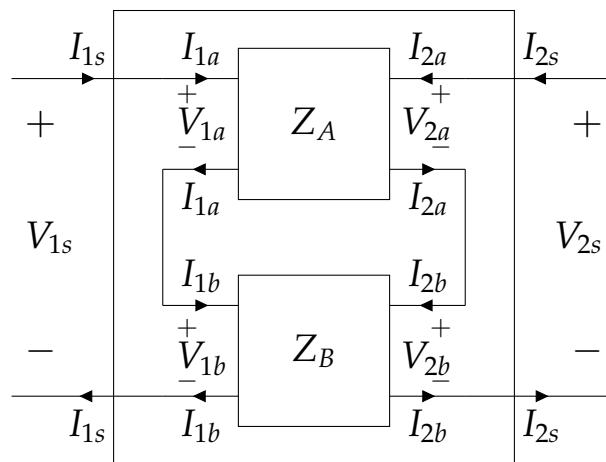
Imponendo la condizione di reciprocità $\overline{z_{12}} = \overline{z_{21}}$, si ha:

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{C}} - \overline{B} = \frac{1}{\overline{C}} \Rightarrow \overline{AD} - \overline{BC} = 1$$

cioè, il circuito è **reciproco** quando la matrice dei parametri T ha determinante $\det(T) = 1$.

Circuiti a due porte in serie

Poniamo di avere due circuiti a due porte A e B , percorsi rispettivamente dalle correnti I_{1a} e I_{2a} , e I_{1b} e I_{2b} . collegati fra di loro in **serie**, cioè su cui scorre la *stessa corrente*:



Dimostriamo che il circuito così formato è di nuovo un circuito a due porte. Guardando alla porta 1, si ha che la corrente sulla porta a corrente I_{1a} di Z_A è la stessa che entra (e quindi esce) sulla porta Z_B , cioè $\dot{I}_{1a} = \dot{I}_{1b} = \dot{I}_{1s}$. Lo stesso vale per la porta 2, cioè $\dot{I}_{2a} = \dot{I}_{2b} = \dot{I}_{2s}$.

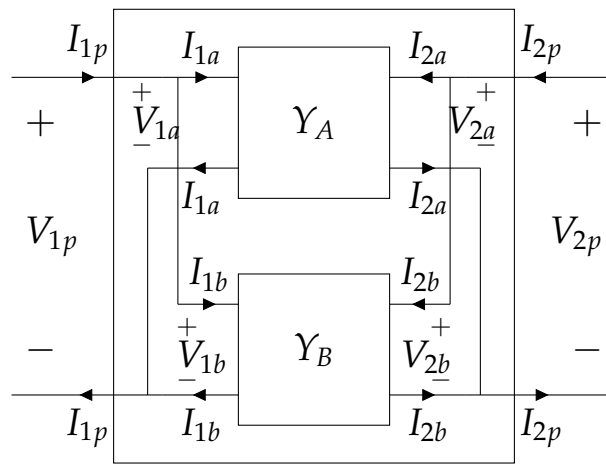
Calcoliamo quindi la caduta di potenziale sulle due porte (1 e 2) attraverso l'impedenza sui circuiti (\overline{Z}_a e \overline{Z}_b):

$$\begin{pmatrix} \dot{V}_{1s} \\ \dot{V}_{2s} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{V}_{1a} \\ \dot{V}_{2a} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \dot{V}_{1b} \\ \dot{V}_{2b} \end{pmatrix} = \overline{Z}_a \begin{pmatrix} \dot{I}_{1a} \\ \dot{I}_{2a} \end{pmatrix} + \overline{Z}_b \begin{pmatrix} \dot{I}_{1b} \\ \dot{I}_{2b} \end{pmatrix} = (\overline{Z}_a + \overline{Z}_b) \begin{pmatrix} \dot{I}_{1s} \\ \dot{I}_{2s} \end{pmatrix}$$

che è quello che ci aspettavamo: la matrice dei parametri Z di due circuiti a due porte in serie è data dalla *somma* delle matrici dei parametri Z dei singoli circuiti, ergo l'impedenza complessiva della circuito sulle due porte è data da $\overline{Z}_a + \overline{Z}_b$.

Circuiti a due porte in parallelo

Poniamo adesso di avere due circuiti a due porte A e B , percorsi sempre dalle correnti I_{1a} e I_{2a} , e I_{1b} e I_{2b} . collegati fra di loro in **parallelo**, cioè che si trovano allo *stesso potenziale*:



Dimostriamo che anche questo circuito è sempre un circuito a due porte. Si ha, ad esempio sulla porta 1, che dalla prima legge di Kirchhoff $\dot{I}_{1p} = \dot{I}_{1a} + \dot{I}_{1b}$, e visto che questo accade sia sulle correnti entranti che sulle correnti uscenti da Z_A e Z_B , la \dot{I}_{1p} entrante è uguale all'uscente (anche perché altrimenti non gli avremmo dato lo stesso nome...).

Calcoliamo quindi la corrente che attraversa le porte:

$$\begin{pmatrix} \dot{I}_{1p} \\ \dot{I}_{2p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{I}_{1a} \\ \dot{I}_{2a} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \dot{I}_{1b} \\ \dot{I}_{2b} \end{pmatrix} = \overline{Y}_a \begin{pmatrix} \dot{V}_{1a} \\ \dot{V}_{2a} \end{pmatrix} + \overline{Y}_b \begin{pmatrix} \dot{V}_{1b} \\ \dot{V}_{2b} \end{pmatrix} = (\overline{Y}_a + \overline{Y}_b) \begin{pmatrix} \dot{V}_{1p} \\ \dot{V}_{2p} \end{pmatrix}$$

Questa volta, avremo che l'ammettenza complessiva del circuito sulle due porte è $\overline{Y}_a + \overline{Y}_b$.

Notiamo come la **paramerizzazione Z** è tornata utile per circuiti a due porte *in serie*, mentre la **parametrizzazione Y** è invece stata più adeguata per circuiti a due porte *in parallelo*.

A scapito della semplicità dei calcoli, potremmo aver bisogno di ricavare l'impedenza (parametri Z) su circuiti in parallelo, o viceversa l'ammettenza (parametri Y) su circuiti in serie. In questo caso possiamo notare, ad esempio sulla serie:

$$\overline{Z}_a + \overline{Z}_b = \left(\frac{1}{\overline{Y}_a} + \frac{1}{\overline{Y}_b} \right) = \overline{Z}_s, \quad \overline{Y}_s = \frac{1}{\overline{Z}_s} = \left(\frac{1}{\overline{Y}_a} + \frac{1}{\overline{Y}_b} \right)^{-1}$$

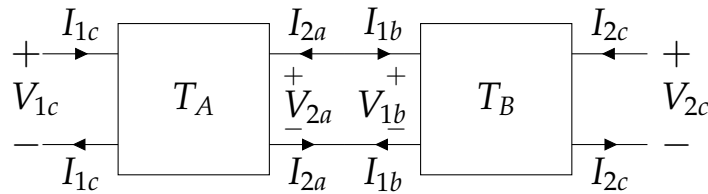
In parallelo varrà analogamente:

$$\overline{Z}_p = \left(\frac{1}{\overline{Z}_a} + \frac{1}{\overline{Z}_b} \right)^{-1}$$

L'associazione fra parametrizzazioni e tipo di collegamento studiato rimane anche per i parametri h e T. In particolare, vedremo come i **parametri h** risultano utili per collegamenti *ibridi serie/parallelo*, da cui la h di *hybrid parameters*, e i **parametri T** risultano utili per collegamenti a porte in cascata, da cui la T di *Transmission parameters*.

Circuiti a due porte in cascata

Nel collegamento **a cascata**, l'uscita di una porta v  direttamente in ingresso a una seconda porta, cio :



dove si nota che le correnti discordi sullo stesso ramo sono semplicemente quelle che le porte "interne" dei due circuiti intendono su quel ramo.

Non dobbiamo dimostrare che anche questo circuito   una porta, in quanto si prende come ingresso l'ingresso della porta T_A (I_{1c} , V_{1c}) e come uscita l'uscita della porta T_B (I_{2c} , V_{2c}).

Possiamo quindi esprimere queste relazioni fra le i circuiti interni e le porte esterne come segue:

$$\begin{pmatrix} \dot{V}_{1c} \\ \dot{I}_{1c} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{V}_{1a} \\ \dot{I}_{1a} \end{pmatrix} = \overline{T}_a \begin{pmatrix} \dot{V}_{2a} \\ -\dot{I}_{2a} \end{pmatrix} = \overline{T}_a \begin{pmatrix} \dot{V}_{1b} \\ \dot{I}_{1b} \end{pmatrix} = (\overline{T}_a \overline{T}_b) \begin{pmatrix} \dot{V}_{2b} \\ -\dot{I}_{2b} \end{pmatrix} = (\overline{T}_a \overline{T}_b) \begin{pmatrix} \dot{V}_{2c} \\ -\dot{I}_{2c} \end{pmatrix}$$

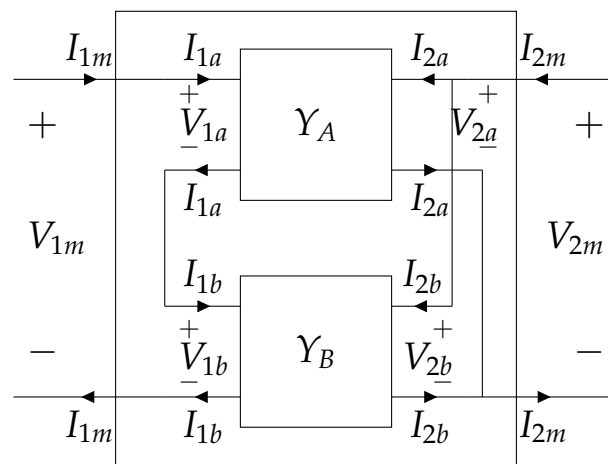
da cui:

$$\begin{pmatrix} \dot{V}_{1c} \\ \dot{I}_{1c} \end{pmatrix} = (\overline{T}_a \overline{T}_b) \begin{pmatrix} \dot{V}_{2c} \\ -\dot{I}_{2c} \end{pmatrix}$$

e la parametrizzazione T complessiva   $\overline{T}_a \overline{T}_b$. Notiamo quindi il significato del segno negativo a \dot{I}_2 nella parametrizzazione T : tenere conto del verso negativo della corrente entrante sul circuito T_A considerata come uscente da T_B .

Collegamento ibrido serie/parallelo

Attraverso le porte abbiamo a disposizione un ulteriore tipo di collegamento, il cosiddetto collegamento **ibrido**, cio  dove una coppia di porte viene connessa in serie e l'altra coppia in parallelo:



Per questo tipo di circuiti potremmo dire:

$$\begin{pmatrix} \dot{V}_{1m} \\ \dot{I}_{2m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{V}_{1a} \\ \dot{I}_{2a} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \dot{V}_{1b} \\ \dot{I}_{2b} \end{pmatrix} = \overline{h}_a \begin{pmatrix} \dot{I}_{1a} \\ \dot{V}_{2a} \end{pmatrix} + \overline{h}_b \begin{pmatrix} \dot{I}_{1b} \\ \dot{V}_{2b} \end{pmatrix} = (\overline{h}_a + \overline{h}_b) \begin{pmatrix} \dot{I}_{1m} \\ \dot{V}_{2m} \end{pmatrix}$$

e quindi la parametrizzazione h complessiva è data da $(\overline{h}_a + \overline{h}_b)$.

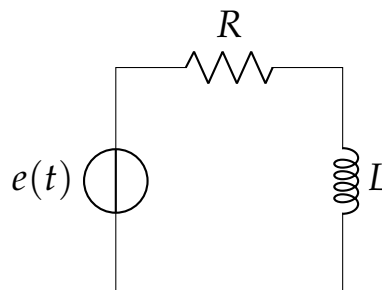
0.19 Lezione del 21-11-24

Analisi di circuiti aperiodici

Finora abbiamo studiato circuiti in **corrente continua** e in **regime sinusoidale**. Adesso vedremo come studiare circuiti dove le forme d'onda dei generatori sono arbitrarie.

Circuito RL

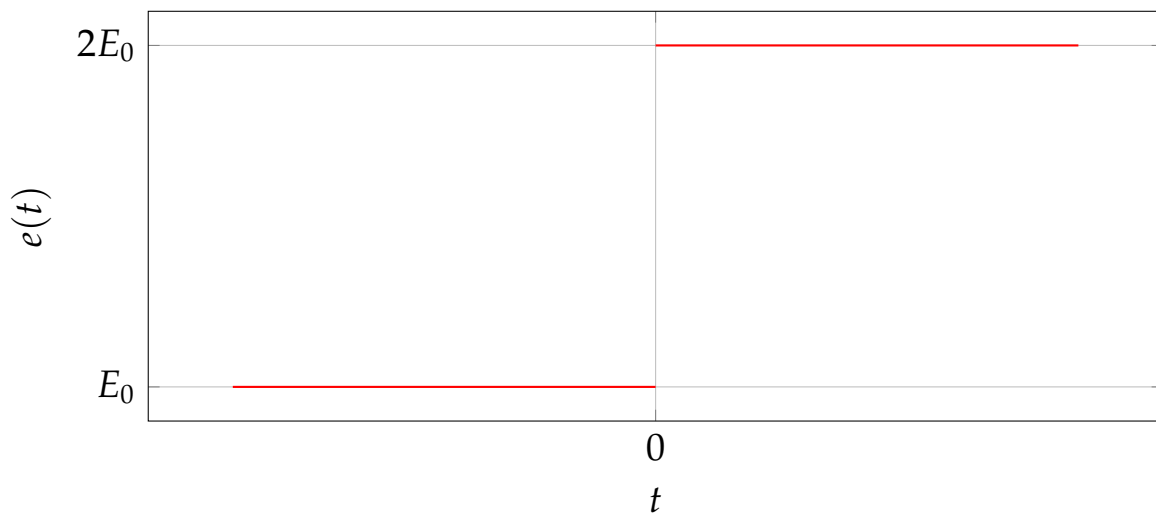
Poniamo un circuito formato da un resistore in serie a un induttore, come segue:



Diciamo che il generatore di tensione $e(t)$ ha forma d'onda:

$$e(t) = \begin{cases} E_0, & t < 0 \\ 2E_0, & t \geq 0 \end{cases}$$

di cui si riporta un grafico:



Nell'intervallo negativo possiamo assumere che il circuito sia rimasto a E_0 costante per un tempo tale da poterlo studiare nello stato di equilibrio. Cioè, se cercavamo $i(t)$, avremo semplicemente:

$$i(t) = \frac{E_0}{R}, \quad t < 0$$

Allo stesso modo, per tempi $t \gg 0$, quindi con $t \rightarrow \infty$, potremo immaginare che il circuito si trova nuovamente allo stato di equilibrio, cioè:

$$i(t) = \frac{2E_0}{R} \quad t \gg 0$$

La domanda è quindi come *varia* la corrente $i(t)$ nell'intervallo immediatamente $t \geq 0$. Chiamiamo il comportamento della corrente in questa fase **transitorio**.

Potremo applicare la prima legge di Kirchhoff all'unica maglia del circuito, ricordando la caduta di potenziale sull'induttanza in funzione della corrente $i(t)$:

$$-2E_0 + Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt} = 0$$

Questa è un'equazione differenziale del primo ordine, che sappiamo ha soluzione omogenea e disomogenea (o generale e particolare *specifica*, insomma qualsiasi nomenclatura viene riportata nel testo di Analisi 1 preferito del lettore):

$$i(t) = i_o(t) + i_p(t)$$

Risolvendo per $i_o(t)$:

$$Ri_o(t) + L \frac{di_o(t)}{dt} = 0, \quad i_o(t) = Ae^{\lambda t}$$

$$R\lambda^0 + L\lambda^1 = 0 \Rightarrow \lambda = -\frac{R}{L}$$

da cui:

$$i_o(t) = Ae^{-\frac{R}{L}t}$$

Troviamo quindi $i_p(t)$, posto $i_p(t) = I$ e dal regime costante in $t < 0$, $\frac{dI}{dt} = 0$:

$$-2E_0 + RI = 0 \Rightarrow I = i_p(t) = 2\frac{E_0}{R}$$

Otteniamo quindi la soluzione:

$$i(t) = i_o(t) + i_p(t) = 2\frac{E_0}{R} + Ae^{-\frac{R}{L}t}$$

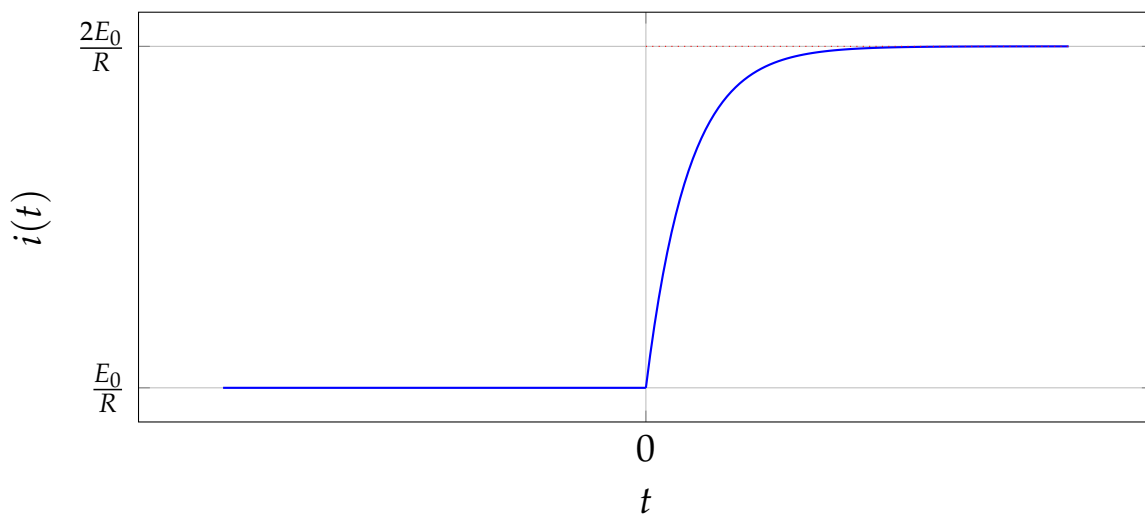
Imponiamo la condizione iniziale, cioè $i(t) = \frac{E_0}{R}$ per $t < 0$:

$$i(0) = \frac{E_0}{R} = \frac{2E_0}{R} + A \Rightarrow A = \frac{E_0}{R} - \frac{2E_0}{R} = -\frac{E_0}{R}$$

da cui:

$$i(t) = \frac{2E_0}{R} - \frac{E_0}{R}e^{-\frac{R}{L}t} = \frac{E_0}{R} \left(2 - e^{-\frac{R}{L}t} \right)$$

Da cui la soluzione finale. Possiamo tracciare un grafico dell'andamento della corrente:



Questa procedura, sebbene sia completamente generale, è difficilmente applicabile su circuiti più complessi. Convienne quindi spostarsi in un nuovo dominio, seguendo un procedimento simile a quello che avevamo seguito usando i fasori.

Trasformata di Laplace

Rappresentato un segnale come una funzione $f(t)$, la **trasformata di Laplace** viene indicata come:

$$F(s) = \mathcal{L} \{f(t)\} = \int_{0^-}^{+\infty} f(t)e^{-st} dt$$

dove s è un complesso $\sigma + i\omega$.

Questa trasformata risulta molto utile in quanto ci permette di ricondurre le funzioni con cui lavoriamo nel cosiddetto spazio s , all'interno del cui le operazioni di derivazione e integrazione si riducono a divisioni e moltiplicazioni, e quindi all'algebra.

Proprietà della trasformata di Laplace

- **Derivata:** la trasformata di Laplace di $f'(t)$ sarà:

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = \int_{0^-}^{+\infty} f'(t)e^{-st}dt$$

dove possiamo applicare la formula di integrazione per parti:

$$\begin{aligned} \int_{0^-}^{+\infty} f'(t)e^{-st}dt &= f(t)e^{-st} \Big|_{0^-}^{+\infty} - \int_{0^-}^{+\infty} f(t) \cdot -se^{-st}dt \\ &= s \int_{0^-}^{+\infty} f(t)e^{-st}dt + \lim_{t \rightarrow +\infty} f(t)e^{-st} - f(0^-) = sF(s) - f(0^-) \end{aligned}$$

dove compare un termine $f(0^-)$ dovuto alle condizioni iniziali.

- **Integrale:** la trasformata di Laplace dell'integrale $g(t) = \int_{-\infty}^t f(\tau)d\tau$ sarà:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left\{\frac{dg(t)}{dt}\right\} &= \mathcal{L}\{f(t)\} = s\mathcal{L}\{g(t)\} - g(0^-) \\ &= s\mathcal{L}\left\{\int_{-\infty}^t f(\tau)d\tau\right\} - \int_{-\infty}^{0^-} f(\tau)d\tau \end{aligned}$$

da cui possiamo ricavare la trasformata dell'integrale:

$$\mathcal{L}\left\{\int_{-\infty}^t f(\tau)d\tau\right\} = \frac{F(s)}{s} + \frac{1}{s} \int_{-\infty}^{0^-} f(\tau)d\tau$$

dove nuovamente compare un termine $\frac{1}{s} \int_{-\infty}^{0^-} f(\tau)d\tau$ dovuto alle condizioni iniziali.

0.20 Lezione del 22-11-24

Leggi dei bipoli con la trasformata di Laplace

Vediamo quindi come possiamo esprimere il legame fra corrente e tensione dei bipoli visti finora attraverso la trasformata di Laplace.

Resistori

Poniamo di avere un resistore. Avevamo che:

$$v_R(t) = Ri_R(t)$$

Visto che non abbiamo derivate o integrali, possiamo passare direttamente al dominio s :

$$V_R(s) = RI_R(s)$$

Induttori

Rispetto agli induttori, avevamo che:

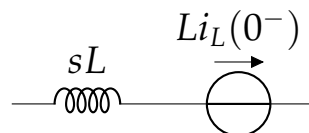
$$v_L(t) = L \frac{di_L(t)}{dt}$$

che nella trasformata di Laplace, applicando la legge di derivata, diventerà:

$$V_L(s) = L (sI_L(s) - i_L(0^-)) = sLI_L(s) - Li_L(0^-)$$

dove appare un termine dovuto alle condizioni iniziali, cioè $Li_L(0^-)$.

Abbiamo quindi che un circuito equivalente all'induttore secondo la trasformata di Laplace è dato da una serie fra un induttore con induttanza generalizzata sL e un generatore di tensione (detto **generatore di condizioni iniziali**) $Li_L(0^-)$, cioè:



Condensatori

Rispetto ai condensatori, avevamo che:

$$v_C(t) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i_C(\tau) d\tau$$

che nella trasformata di Laplace, applicando la legge di integrale, diventerà:

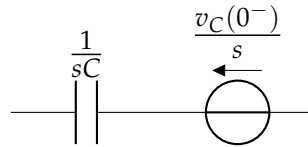
$$V_C(s) = \frac{1}{C} \left(\frac{I_C(s)}{s} + \frac{1}{s} \int_{-\infty}^{0^-} i_C(t) dt \right) = \frac{I_C(s)}{sC} + \frac{1}{sC} q(0^-)$$

ricordando che $\int_{-\infty}^{0^-} i(t) dt = q(t)$. Potrebbe però essere più conveniente applicare la definizione di capacità, da cui $v_C(t) = \frac{q(t)}{C}$ e quindi:

$$V_C(s) = \frac{I_C(s)}{sC} + \frac{v_C(0^-)}{s}$$

cioè anche qui appare un termine dovuto alle condizioni iniziali, $\frac{v_C(0^-)}{s}$.

Abbiamo quindi che un circuito equivalente al condensatore secondo la trasformata di Laplace è dato da una serie fra un condensatore $\frac{1}{sC}$ e un generatore di tensione (il generatore di condizioni iniziali) $\frac{v_C(0^-)}{s}$, cioè:



Induttanze mutuamente accoppiate

Due induttanze mutuamente accoppiate venivano governate dalla legge:

$$\begin{cases} v_1(t) = L_1 \frac{di_1(t)}{dt} \pm M \frac{di_2(t)}{dt} \\ v_2(t) = L_2 \frac{di_2(t)}{dt} \pm M \frac{di_1(t)}{dt} \end{cases}$$

Nel dominio s , queste diventano:

$$\begin{cases} V_1(s) = L_1 (sI_1(s) - i_1(0^-)) \pm M (sI_2(s) - i_2(0^-)) \\ V_2(s) = L_2 (sI_2(s) - i_2(0^-)) \pm M (sI_1(s) - i_1(0^-)) \end{cases}$$

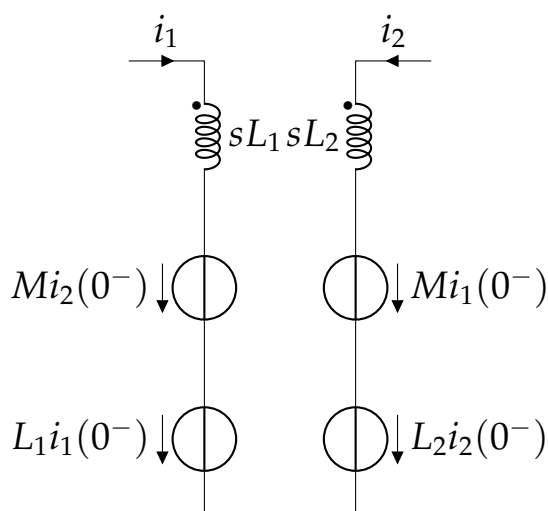
che dà:

$$\begin{cases} V_1(s) = sL_1 I_1(s) \pm sM I_2(s) - L_1 i_1(0^-) \mp M i_2(0^-) \\ V_2(s) = sL_2 I_2(s) \pm sM I_1(s) - L_2 i_2(0^-) \mp M i_1(0^-) \end{cases}$$

Abbiamo allora che un circuito equivalente alle induttanze mutuamente accoppiate secondo la trasformata di Laplace è dato da, su ogni ramo, una serie di:

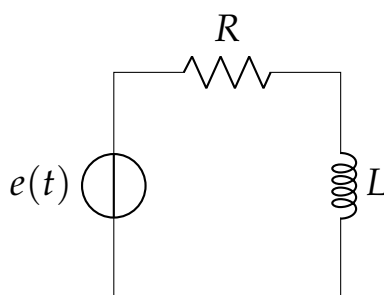
- Un generatore di tensione $L_1 i_1(0^-)$ ($L_2 i_2(0^-)$);
- Un generatore di tensione $\pm M i_2(0^-)$ ($\pm M i_1(0^-)$)

entrambi con contrassegni concordi alla direzione della corrente:



Analisi circuitale nel dominio s

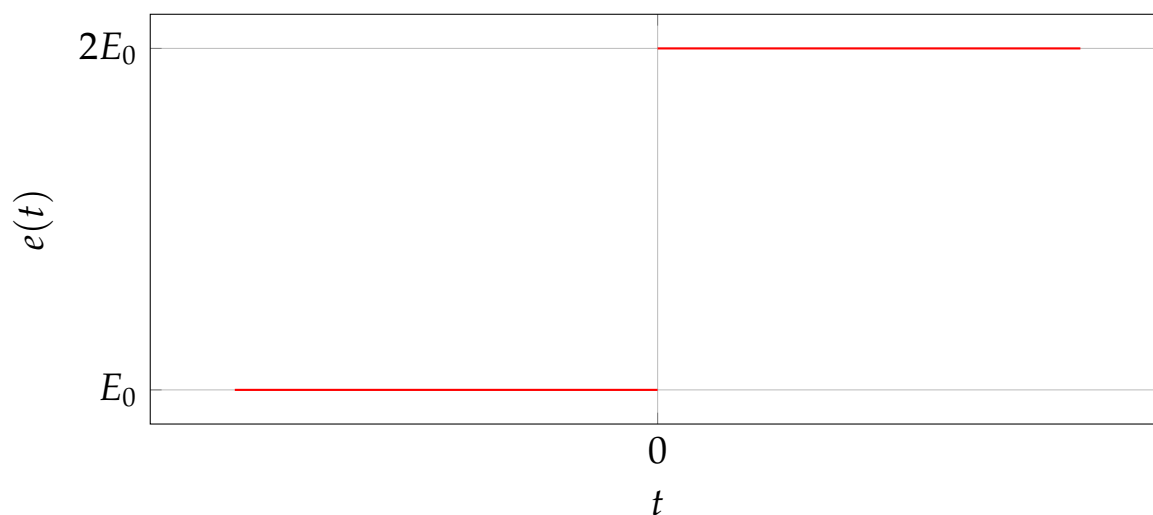
Vediamo quindi come usare la trasformata di Laplace per risolvere il circuito (RL) che abbiamo usato per introdurre i circuiti a regime aperiodico:



Dove avevamo che il generatore di tensione $e(t)$ ha forma d'onda:

$$e(t) = \begin{cases} E_0, & t < 0 \\ 2E_0, & t \geq 0 \end{cases}$$

di cui si riporta un grafico:

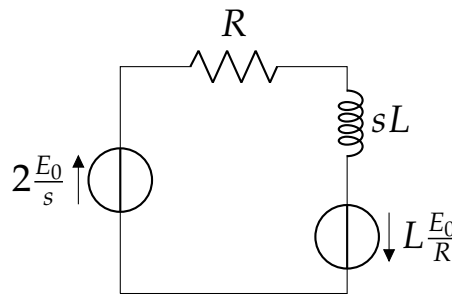


Iniziamo la risoluzione. Dovremmo dividere il problema in intervalli temporali:

- $t < 0$: qui sarà incognita, oltre a $i(t)$, anche la condizione iniziale $i_L(0^-)$. Appare quindi chiaro come mai abbiamo usato 0^- nelle formule: le condizioni iniziali che ci interessano sono quelle *un attimo prima* della transizione, e non dopo.

La corrente $i_L(0^-)$ sull'induttore varrà quindi quanto quella nel circuito a regime costante, ergo $i_L(0^-) = \frac{E_0}{R}$.

- $t \geq 0$: ci troviamo sul transitorio, e dobbiamo quindi usare Laplace. Trasformiamo l'induttanza nel circuito equivalente col generatore di condizioni iniziali:



A questo punto l'incognita sarà la corrente $i_x(t)$ sul circuito, che potremo trovare con la seconda legge di Kirchhoff:

$$-2\frac{E_0}{s} + RI_x(s) + sLI_x(s) - L\frac{E_0}{R} = 0 \Rightarrow I_x(s) = \frac{L\frac{E_0}{R} + 2\frac{E_0}{s}}{r + sL} = \frac{LE_0s + 2RE_0}{RLs^2 + R^2s}$$

Infine, vorremo riportare l'espressione ottenuta nel dominio del tempo, in quanto quello che abbiamo trovato è effettivamente:

$$I_x(s) = \mathcal{L}\{i_x(t)\}$$

Per fare questo abbiamo bisogno dell'**antitrasformata** di Laplace. Vediamo come si ricava.

Antitrasformata di Laplace

Data una forma $I_x(s) = \mathcal{L}\{i_x(t)\}$, vediamo come calcolare $i_x(t) = \mathcal{L}^{-1}\{I_x(t)\}$. Facciamo l'esempio con la trasformata:

$$I(s) = \frac{s^2 + 5}{3s^3 + 9s^2 + 6s}$$

Innanzitutto vorremo riportare il denominatore in forma *normalizzata*, cioè esprimere il termine di grado più alto senza coefficienti:

$$I(s) = \frac{\frac{s^2}{3} + \frac{5}{3}}{s^3 + 3s^2 + 2s}$$

A questo punto vorremo **fattorizzare** il denominatore:

$$I(s) = \frac{\frac{s^2}{3} + \frac{5}{3}}{s(s^2 + 3s + 1)} = \frac{\frac{s^2}{3} + \frac{5}{3}}{s(s + 1)(s + 2)}$$

Poniamo quindi:

$$I(s) = \frac{A_1}{s} + \frac{A_2}{s + 1} + \frac{A_3}{s + 2}$$

che ci permetterà di sfruttare il fatto che $\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s+a} \right\} = e^{-at}$ e $\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s} \right\} = u(t)$ (gradino di Heaviside), e quindi dire che:

$$i(t) = (A_1 + A_2 e^{-t} + A_3 e^{-2t}) u(t)$$

Questo equivale a riportare la frazione trovata in **fratti semplici**, da cui si ottiene:

$$A_1 = \frac{5}{6}, \quad A_2 = -2, \quad A_3 = \frac{3}{2}$$

e quindi:

$$i(t) = \left(\frac{5}{6} - 2e^{-t} + \frac{3}{2}e^{-2t} \right) u(t)$$

Vediamo un metodo rapido per il calcolo dei fratti semplici.

Teorema dei residui

Abbiamo visto che le trasformate di Laplace sulle funzioni che ricaviamo dai circuiti danno forme del tipo:

$$I(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$$

dove sia $N(s)$ che $D(s)$ sono polinomi. Scomponendo $D(s)$ in fattori $(s - p_1)^{\mu_1}, (s - p_2)^{\mu_2}, \dots$, dove ogni fattore ha la sua molteplicità μ , si ha che $I(s)$ può ridursi a:

$$I(s) = \frac{A_1}{(s - p_1)^{\mu_1}} + \frac{A_2}{(s - p_2)^{\mu_2}} + \dots$$

cioè assunti tutti $\mu = 1$:

$$I(s) = \sum_{i=1}^n \frac{A_i}{s - p_i}$$

Veniamo a come ricavare gli A_i . Dall'analisi complessa, possiamo usare il **teorema dei residui**:

$$A_i = \lim_{s \rightarrow p_i} (s - p_i) I(s)$$

dove i singoli p_i sono i **poli** della nostra funzione.

Ad esempio, applichiamo sull'esempio precedente:

$$A_1 = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{\frac{s^2}{3} + \frac{5}{3}}{s(s+1)(s+2)} = \frac{\frac{s^2}{3} + \frac{5}{3}}{(s+1)(s+2)} = \frac{\frac{5}{3}}{3} = \frac{5}{6}$$

e via dicendo.

Possiamo quindi risolvere l'ultimo passaggio dell'esercizio precedente. Avevamo ricavato la trasformata:

$$I_x(s) = \frac{LE_0s + 2RE_0}{RLs^2 + R^2s}$$

Normalizzando, si ha:

$$I_x(s) = \frac{\frac{E_0}{R}s + 2\frac{E_0}{L}}{s^2 + \frac{R}{L}s} = \frac{\frac{E_0}{R}s + 2\frac{E_0}{L}}{s(s + \frac{R}{L})}$$

A questo punto possiamo impostare i fratti semplici:

$$I(s) = \frac{A_1}{s} + \frac{A_2}{s + \frac{R}{L}}$$

e risolvere col metodo dei residui:

$$A_1 = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{\frac{E_0}{R}s + 2\frac{E_0}{L}}{s(s + \frac{R}{L})} = \frac{2E_0}{L} \cdot \frac{L}{R} = \frac{2E_0}{R}$$

$$A_2 = \lim_{s \rightarrow -\frac{R}{L}} \left(s + \frac{R}{L}\right) \cdot \frac{\frac{E_0}{R}s + 2\frac{E_0}{L}}{s(s + \frac{R}{L})} = \frac{\frac{2E_0}{L} - \frac{E_0}{L}}{-\frac{R}{L}} = \frac{E_0}{R}$$

Si ritrova quindi la funzione di t :

$$i(t) = \left(2\frac{E_0}{R} - \frac{E_0}{R}e^{-\frac{R}{L}t}\right) u(t) = \frac{E_0}{R} \left(2 - e^{-\frac{R}{L}t}\right) u(t)$$

che equivale a quanto avevamo trovato risolvendo direttamente l'equazione differenziale, salvo il termine $u(t)$ per il gradino di Heaviside, che però non ci interessa in quanto avremmo preso comunque il transiente da $t = 0$ in poi, cioè combinando le soluzioni:

$$i(t) = \begin{cases} \frac{E_0}{R}, & t < 0 \\ \frac{E_0}{R} \left(2 - e^{-\frac{R}{L}t}\right), & t \geq 0 \end{cases}$$

Verifica dei risultati

Potremmo voler fare una verifica della validità dei risultati ottenuti dopo la risoluzione di un circuito con la trasformata di Laplace. Una prima verifica potrebbe essere considerare il limite:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} i(t)$$

cioè, dopo un tempo $t \gg 0$, il circuito tende a un regime stazionario che corrisponde con quello che avremmo previsto prendendo il circuito a corrente continua? Nel caso precedente, notiamo come la corrente $i(t)$ dà:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{E_0}{R} \left(2 - e^{-\frac{R}{L}t} \right)$$

che tende giustamente a $\frac{2E_0}{R}$.

Una verifica più sofisticata si può fare considerando le **variabili di stato** del circuito, cioè quei valori che non possono variare in maniera discontinua. Ad esempio, nell'esempio precedente, una variabile di stato è l'energia nell'induttore, cioè:

$$W_L(t) = \frac{1}{2} L i_L^2(t)$$

Questa non potrà mai essere discontinua, in quanto implicherebbe derivata infinita sulla discontinuità, e visto che $\frac{dW_L(t)}{dt} = P$ potenza, avremmo dal teorema di Boucherot che da qualche parte nel circuito erogherebbe (seppur istantaneamente) una potenza infinita, che è impossibile.

Verifichiamo quindi la continuità:

$$\lim_{t \rightarrow 0^-} i_L(t) \stackrel{?}{=} \lim_{t \rightarrow 0^+} i_L(t)$$

che nell'esempio è verificata da:

$$\lim_{t \rightarrow 0^-} i_L(t) = \lim_{t \rightarrow 0^+} i_L(t) = \frac{E_0}{R}$$

0.21 Lezione del 27-11-24

Antitrasformata con soluzioni complesse

Esistono eccezioni al processo visto di antitrasformazione visto finora. Prendiamo ad esempio la forma rapporto di polinomi:

$$I(s) = \frac{s+2}{s^2+9}$$

Notiamo come i poli saranno numeri complessi.

Si avrà quindi:

$$= \frac{s+2}{(s+3j)(s-3j)} = \frac{A_1}{s+3j} + \frac{A_2}{s-3j}$$

Applicando il teorema dei residui per trovare A_1 e A_2 si ottiene:

$$A_1 = \lim_{s \rightarrow -3j} (s+3j) \frac{s+2}{(s+3j)(s-3j)} = \frac{2-3j}{-6j} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3}j$$

$$A_2 = \lim_{s \rightarrow 3j} (s-3j) \frac{s+2}{(s+3j)(s-3j)} = \frac{2+3j}{6j} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}j$$

da cui l'espressione in funzione di t :

$$i(t) = \left(\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}j \right) e^{-3jt} + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}j \right) e^{3jt} \right) u(t)$$

dove notiamo che anche i coefficienti, oltre che gli esponenti, risultano numeri complessi. Prese le radici complesse nell'ordine $+$, $-$, si ha che il primo esponenziale ha argomento ω negativo.

Abbiamo quindi che incontreremo generalmente soluzioni in forma:

$$i(t) = (M + jN) e^{-(\sigma + j\omega)t} + (M - jN) e^{-(\sigma - j\omega)t}$$

da cui:

$$\begin{aligned} &= Me^{-\sigma t} e^{-j\omega t} + jNe^{-\sigma t} e^{-j\omega t} + Me^{-\sigma t} e^{j\omega t} - jNe^{-\sigma t} e^{j\omega t} \\ &= M(e^{-\sigma t} e^{-j\omega t} + e^{-\sigma t} e^{j\omega t}) + jN(e^{-\sigma t} e^{-j\omega t} - e^{-\sigma t} e^{j\omega t}) \\ &= Me^{-\sigma t} (e^{-j\omega t} + e^{j\omega t}) + jNe^{-\sigma t} (e^{-j\omega t} - e^{j\omega t}) \end{aligned}$$

visto che:

$$\begin{cases} e^{j\omega t} = \cos(\omega t) + i \sin(\omega t) \\ e^{-j\omega t} = \cos(\omega t) - i \sin(\omega t) \end{cases}$$

si ha:

$$\begin{aligned} i(t) &= Me^{-\sigma t} (\cos(\omega t) + i \sin(\omega t) + \cos(\omega t) - i \sin(\omega t)) \\ &\quad + jNe^{-\sigma t} (\cos(\omega t) - i \sin(\omega t) - \cos(\omega t) - i \sin(\omega t)) \\ &= 2Me^{-\sigma t} \cos \omega t + 2Ne^{-\sigma t} \sin(\omega t) \end{aligned}$$

Vogliamo riportare questa forma nella più concisa $ke^{-\sigma t} \sin(\omega t + \alpha)$. Usiamo allora le formule di traduzione in forma sinusoidale, di cui una dimostrazione nel caso cosinusoidale si trova a <https://github.com/seggiani-luca/appunti-fis/blob/main/master/master.pdf>:

$$c_1 \sin \omega t + c_2 \cos \omega t \Leftrightarrow k \sin(\omega t + \alpha)$$

con:

$$\begin{cases} k = \sqrt{c_1^2 + c_2^2} \\ \alpha = \tan^{-1}(\frac{c_1}{c_2}) \end{cases}$$

da cui diciamo:

$$\begin{aligned} i(t) &= 2Me^{-\sigma t} \cos \omega t + 2Ne^{-\sigma t} \sin(\omega t) \\ &= 2e^{-\sigma t} (M \cos \omega t + N \sin \omega t) = ke^{-\sigma t} \sin(\omega t + \alpha) \end{aligned}$$

con:

$$\begin{cases} k = 2\sqrt{M^2 + N^2} \\ \alpha = \tan^{-1}(\frac{M}{N}) \end{cases}$$

Possiamo quindi riportare l'esempio precedente in questa forma. Si avrà:

$$\begin{aligned} i(t) &= \left(\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}j \right) e^{-3jt} + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}j \right) e^{3jt} \right) u(t) \\ &= (2M \cos(\omega t) + 2N \sin(\omega t)) \Big|_{M=\frac{1}{2}, N=\frac{1}{3}} = \cos(3t) + \frac{2}{3} \sin(3t) \end{aligned}$$

o la forma più compatta $k \sin(\omega t + \alpha)u(t)$, con:

$$\begin{cases} k = 2\sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2} \approx 1.201 \\ \alpha = \tan^{-1}\left(\frac{M}{N}\right) \approx 0.983 \end{cases}$$

0.22 Lezione del 28-11-24

Antitrasformata con poli multipli

Vediamo un'altra particolarità del processo di antitrasformazione, in particolare nel caso di **poli multipli**, cioè poli che compaiono con molteplicità ≥ 2 al denominatore. Prendiamo ad esempio la forma rapporto di polinomi:

$$I(s) = \frac{s^2 + 2s + 3}{(s + 1)^3}$$

Avremo che, per esprimere i residui, non basterà il rapporto su $s + 1$ al primo grado, ma servirà bensì:

$$I(s) = \frac{A_1}{s + 1} + \frac{A_2}{(s + 1)^2} + \frac{A_3}{(s + 1)^2}$$

Vorremo quindi portare le soluzioni con poli multipli nella forma generale:

$$I(s) = \frac{A_1}{(s-p)} + \frac{A_2}{(s-p)^2} + \dots + \frac{A_n}{(s-p)^n} = \sum_{i=1}^n \frac{A_i}{(s-p)^i}$$

su cui si userà agevolmente la regola di antitrasformazione:

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{A_i}{(s-p)^i} \right\} = \frac{A_i}{(i-1)!} t^{i-1} e^{pt}$$

da cui quindi:

$$\mathcal{L}^{-1}(I(s)) = A_1 e^{pt} + \frac{A_2}{2} t e^{pt} + \dots + \frac{A_n}{(n-1)!} t^{n-1} e^{pt} = \sum_{i=1}^n \frac{A_i}{(i-1)!} t^{i-1} e^{pt}$$

A questo punto basterà calcolare i residui, cosa che potremo fare applicando il **teorema dei residui ai poli multipli**:

$$A_i = \lim_{s \rightarrow p} \frac{1}{(n-1)!} \frac{\partial^{n-i} (s-p)^n \cdot I(s)}{\partial s^{n-i}}$$

Riprendendo l'esempio:

$$A_1 = \lim_{s \rightarrow -1} \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 (s+1)^3 \frac{s^2+2s+3}{(s+1)^3}}{\partial s^2} = \lim_{s \rightarrow -1} \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial s^2} (s^2 + 2s + 3) = \lim_{s \rightarrow -1} \frac{1}{2} 2 = 1$$

$$A_2 = \lim_{s \rightarrow -1} \frac{1}{1!} \frac{\partial (s+1)^3 \frac{s^2+2s+3}{(s+1)^3}}{\partial s} = \lim_{s \rightarrow -1} 1 \cdot (2s + 2) = (2s + 2) \Big|_{s=-1} = 0$$

$$A_3 = \lim_{s \rightarrow -1} \frac{1}{0!} \frac{\partial^0 (s+1)^3 \frac{s^2+2s+3}{(s+1)^3}}{\partial s^0}$$

che assumendo $\frac{\partial^0}{\partial s^0} = 1$ significa:

$$A_3 = \lim_{s \rightarrow -1} = 1 \cdot (s^2 + 2s + 3) \Big|_{s=-1} = 2$$

Si ha quindi il risultato finale:

$$i(t) = (e^{-t} + t^2 e^{-t}) u(t)$$