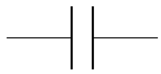
1 Lezione del 17-10-24

1.1 Condensatori

Introduciamo un nuovo dipolo: il **condensatore** o *capacitore*. Si indica come:



ed è costituito da due armature di materiale conduttore, inframezzate da un **dielettrico**.

Il verso di percorrenza nei capacitori, come nei resistori, è irrilevante. La loro funzione è quella di accumulare energia, secondo la legge:

$$q(t) = C \cdot v(t)$$

dove C è la **capacità**, misurata in Farad (F).

Nota la superficie delle armature e la distanza fra di esse, si può calcolare la capacità come:

$$C = \varepsilon \cdot \frac{s}{d}$$

Nel caso di dielettrici, si indica con ε_0 la costante dielettrica introdotta e si scrive:

$$C = \varepsilon \cdot \varepsilon_0 \cdot \frac{s}{d}$$

Si ricorda che il Farad è un'unita di misura molto grande, e solitamente si usano i sottomultipli:

Simbolo	**Ordine**
mF	10^{-3}
μF	10^{-6}
nF	10^{-9}
pF	10^{-12}

Diciamo che il condensatore ideale è:

- **Lineare:** dalla legge $q(t) = C \cdot v(t)$;
- **Tempo-invariante:** trascurando cambi di temperatura, si comportano come i resistori;
- **Con memoria:** visto che legano tensione a carica, dobbiamo prendere la corrente come derivata della carica:

  $$i(t) = \frac{dq(t)}{dt} = \frac{d}{dt}(C \cdot v(t)) = C\frac{dv(t)}{dt}$$

  Possiamo quindi integrare:

  $$v(t) = \int_{-\infty}^{t} \frac{1}{C} \cdot i(\tau)\, d\tau = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i(\tau)\, d\tau = \frac{1}{C}\left[\int_{-\infty}^{t_0} i(\tau) + \int_{t_0}^{t} i(\tau)\right] = v(t_0) + \frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} i(\tau)\, d\tau$$

  Abbiamo quindi che la tensione sul condensatore dipende dalle tensioni precedenti $v(t_0)$, ergo è un componente con memoria.

- **Passivo:** anche qui possiamo definire $p(t)$ e derivare:

$$p(t) = v_C(t)i_C(t) = v_C(t) \cdot C\frac{dv_C(t)}{dt}$$

da cui si ottiene che $p(t)$ ha qualsiasi segno. Vediamo quindi l'energia:

$$w(t) = \int_{-\infty}^{t} p(\tau)\, d\tau = \int_{-\infty}^{t} Cv_C(\tau)\frac{dv_C(\tau)}{d\tau}\, d\tau = C\int_{-\infty}^{t} v_C(\tau)dv_C(\tau) = C\left[\frac{1}{2}v_C^2(\tau)\right]_{-\infty}^{t}$$

da cui si ha, risolvendo:

$$w(t) = \frac{1}{2}Cv_C^2(t) - \frac{1}{2}Cv_C^2(-\infty)$$

Assumendo $v_C^2(-\infty) = 0$, cioè condensatore inizialmente scarico, si ha $w(t) \geq 0$, ergo è un componente passivo. Solo nel caso in cui parte da carico il condensatore può (temporaneamente) erogare energia.

Notiamo un caso particolare: se siamo in continua, $i_C(t) = \frac{Cdv_C(t)}{dt} = 0$ e il condensatore si comporta come un **aperto**.

1.2 Induttori

Introduciamo un nuovo dipolo: l'**induttore** o *induttanza*. Si indica come:

ed è costituito da spire di materiale ferromagnetico avvolte attorno a un dielettrico.

La loro funzione è ancora quella di accumulare energia, secondo la legge:

$$\phi(t) = L \cdot i_L(t)$$

dove L è l'**induttanza**, misurata in Henry (H), e ϕ è il **flusso magnetico**, misurata in Weber (Wb). L'induttanza dipende dalla geometria dell'induttore, e ad esempio in un solenoide di N spire di superficie s su una lunghezza l è:

$$L = \mu \cdot \frac{S}{l} \cdot N^2 = \mu_0 \cdot \mu_r \frac{S}{l} N^2$$

Vediamo quindi le proprietà:

- **Lineare:** sempre per la legge $\phi(t) = L \cdot i_L(t)$;
- **Tempo-invariante:** il flusso interno dipende solo dalla corrente;
- **Con memoria:** possiammo derivare la legge:

$$v_L(t) = \frac{d\phi(t)}{dt} = \frac{d(Li_L(t))}{dt} = L\frac{di_L(t)}{dt} = v_L(t)$$

e ricavare e derivare la corrente $i_L(t)$:

$$i_L(t) = \frac{1}{L}\int_{-\infty}^{t} v_L(\tau)\, d\tau = i_L(t_0) + \frac{1}{L}\int_{t_0}^{t} v_L(\tau)\, d\tau$$

da dove si ricava che, come il capacitore, l'induttore ha memoria di uno stato iniziale a t_0.

- **Passivo:** ritroviamo la potenza:
$$p(t) = v_C(t)i_C(t) = L\frac{di_C(t)}{dt} \cdot i_L(t)$$
da cui si ottiene che $p(t)$ ha qualsiasi segno. Vediamo quindi l'energia:
$$w(t) = \int_{-\infty}^{t} p(\tau)\, d\tau = \int_{-\infty}^{t} L\frac{di_L(\tau)}{d\tau} \cdot i_L(\tau)d\tau = L\int_{-\infty}^{t} i_L(\tau)di_L(\tau)$$
da cui si ha:
$$w(t) = \frac{1}{2}Li_L^2(t) - \frac{1}{2}Li_L^2(-\infty)$$
Come prima, assumendo $i_L^2(\infty) = 0$, cioè induttore inizialmente scarico, si ha $w(t) \geq 0$, e che l'induttore è un componente passivo (salvo parta da carico).

Vediamo qui un caso particolare: se siamo in continua, $v_L(t) = L\frac{di_L(t)}{dt} = 0$, ergo l'induttore si comporta come un cortocircuito.

1.2.1 Induttori mutuamente accoppiati

Si possono avere due induttanze accoppiate fra di loro attraverso l'effeto del magnetico generato da entrambe sulle reciproche spire, cioè:
$$\begin{cases} \phi_1(t) = \phi_{1.1} \pm \phi_{1.2} = L_1 \cdot i_1(t) \pm Mi_2(t) \\ \phi_2(t) = ... = L_2 \cdot i_2(t) \pm Mi_1(t) \end{cases}$$
dove M prende il nome di **coefficiente di mutua induzione**. Si ha quindi, derivando:
$$\begin{cases} v_1(t) = L_1\frac{di_1(t)}{dt} \pm M\frac{di_2(t)}{dt} \\ v_2(t) = L_2\frac{di_2(t)}{dt} \pm M\frac{di_1(t)}{dt} \end{cases}$$
Gli induttori mutuamente accoppiati vengono detti **quadripoli** o **doppi dipoli**, in quanto hanno effettivamente 4 poli.

Si calcola la potenza semplicemente sommando le potenze sulle singole induttanze:
$$\begin{aligned} p(t) &= v_1(t)i_1(t) + v_2(t)i_2(t) \\ &= \left(L_1\frac{di_1(t)}{dt} \pm M\frac{di_2(t)}{dt}\right) \cdot i_2(t) + \left(L_2\frac{di_2(t)}{dt} \pm M\frac{di_1(t)}{dt}\right) \cdot i_1(t) \\ &= L_1 i_1(t)\frac{di_1(t)}{dt} + L_2 i_2\frac{di_2(t)}{dt} \pm M\left(i_1(t)\frac{di_2(t)}{dt} + \frac{i_2 di_1(t)}{dt}\right) \end{aligned}$$
E l'energia integrando la potenza:
$$w(t) = \int_{-\infty}^{t} p(\tau)d\tau$$
$$= L_1\int_{-\infty}^{t} i_1(\tau)\frac{di_1(\tau)}{d\tau}d\tau + L_2\int_{-\infty}^{t} i_2(\tau)\frac{di_2(\tau)}{d\tau}d\tau \pm M\int_{-\infty}^{t}\left[i_1(\tau)\frac{di_2(\tau)}{d\tau} + i_2(\tau)\frac{di_1(\tau)}{d\tau}\right]d\tau$$
$$= L_1\cdot\frac{1}{2}i_1^2(t) + L_2\cdot\frac{1}{2}i_2^2(t) \pm M\int_{-\infty}^{t}\frac{d(i_1(\tau)\cdot i_2(\tau))}{d\tau}d\tau = L_1\cdot\frac{1}{2}i_1^2(t) + L_2\cdot\frac{1}{2}i_2^2(t) \pm Mi_1(t)i_2(t)$$
Si può dimostrare che $M \leq \sqrt{L_1L_2}$, e nel caso $M = \sqrt{L_1L_2}$ si parla di **accoppiamento ideale**. Nel caso peggiore si ha quindi:
$$w = \frac{1}{2}L_1i_1^2(t) + \frac{1}{2}L_2i_2^2(t) - \sqrt{L_1L_2}i_1(t)i_2(t) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{L_1}i_1(t) - \sqrt{L_2}i_2(t)\right)^2 \geq 0$$
ergo, salvo caricamenti iniziali, le induttanze mutuamente accoppiate sono componenti **passivi**.