1 Lezione del 28-11-24

1.1 Antitrasformata con poli multipli

Vediamo un'altra particolarità del processo di antitrasformazione, in particolare nel caso di **poli multipli**, cioè poli che compaiono con molteplicità ≥ 2 al denominatore. Prendiamo ad esempio la forma rapporto di polinomi:

$$I(s) = \frac{s^2 + 2s + 3}{(s+1)^3}$$

Avremo che, per esprimere i residui, non basterà il rapporto su $s+1$ al primo grado, ma servirà bensì:

$$I(s) = \frac{A_1}{s+1} + \frac{A_2}{(s+1)^2} + \frac{A_3}{(s+1)^2}$$

Vorremo quindi portare le soluzioni con poli multipli nella forma generale:

$$I(s) = \frac{A_1}{(s-p)} + \frac{A_2}{(s-p)^2} + ... + \frac{A_n}{(s-p)^n} = \sum_{i=1}^{n} \frac{A_i}{(s-p)^i}$$

su cui si userà agevolmente la regola di antitrasformazione:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{A_i}{(s-p)^i}\right\} = \frac{A_i}{(i-1)!}t^{i-1}e^{pt}$$

da cui quindi:

$$\mathcal{L}^{-1}(I(s)) = A_1 e^{pt} + \frac{A_2}{2}te^{pt} + ... + \frac{A_n}{(n-1)!}t^{n-1}e^{pt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{A_i}{(i-1)!}t^{i-1}e^{pt}$$

A questo punto basterà calcolare i residui, cosa che potremo fare applicando il **teorema dei residui ai poli multipli**:

$$A_i = \lim_{s \to p} \frac{1}{(n-1)!} \frac{\partial^{n-i} (s-p)^n \cdot I(s)}{\partial s^{n-i}}$$

Riprendendo l'esempio:

$$A_1 = \lim_{s \to -1} \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 (s+1)^3 \frac{s^2+2s+3}{(s+1)^3}}{\partial s^2} = \lim_{s \to -1} \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial s^2}(s^2 + 2s + 3) = \lim_{s \to -1} \frac{1}{2} 2 = 1$$

$$A_2 = \lim_{s \to -1} \frac{1}{1!} \frac{\partial (s+1)^3 \frac{s^2+2s+3}{(s+1)^3}}{\partial s} = \lim_{s \to -1} 1 \cdot (2s+2) = (2s+2)\Big|_{s=-1} = 0$$

$$A_3 = \lim_{s \to -1} \frac{1}{0!} \frac{\partial^0 (s+1)^3 \frac{s^2+2s+3}{(s+1)^3}}{\partial s^0}$$

che assumendo $\frac{\partial^0}{\partial s^0} = 1$ significa:

$$A_3 = \lim_{s \to -1} = 1 \cdot (s^2 + 2s + 3)\Big|_{s=-1} = 2$$

Si ha quindi il risultato finale:

$$i(t) = \left(e^{-t} + \frac{2}{3}t^2 e^{-t}\right) u(t)$$