1 Lezione del 27-11-24

1.1 Antitrasformata con soluzioni complesse

Esistono eccezioni al processo visto di antitrasformazione visto finora. Prendiamo ad esempio la forma rapporto di polinomi:

$$I(s) = \frac{s+2}{s^2+9}$$

Notiamo come i poli saranno numeri complessi.

Si avrà quindi:

$$= \frac{s+2}{(s+3j)(s-3j)} = \frac{A_1}{s+3j} + \frac{A_2}{s-3j}$$

Applicando il teorema dei residui per trovare A_1 e A_2 si ottiene:

$$A_1 = \lim_{s\to -3j}(s+3j)\frac{s+2}{(s+3j)(s-3j)} = \frac{2-3j}{-6j} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3}j$$

$$A_2 = \lim_{s\to 3j}(s-3j)\frac{s+2}{(s+3j)(s-3j)} = \frac{2+3j}{6j} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}j$$

da cui l'espressione in funzione di t:

$$i(t) = \left(\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}j\right)e^{-3jt} + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}j\right)e^{3jt}\right)u(t)$$

dove notiamo che anche i coefficienti, oltre che gli esponenti, risultano numeri complessi. Prese le radici complesse nell'ordine $+$, $-$, si ha che il primo esponenziale ha argomento ω negativo.

Abbiamo quindi che incontreremo generalmente soluzioni in forma:

$$i(t) = (M+jN)\,e^{-(\sigma+j\omega)t} + (M-jN)\,e^{-(\sigma-j\omega)t}$$

da cui:

$$\begin{aligned}
&= Me^{-\sigma t}e^{-j\omega t} + jNe^{-\sigma t}e^{-j\omega t} + Me^{-\sigma t}e^{j\omega t} - jNe^{-\sigma t}e^{j\omega t} \\
&= M\left(e^{-\sigma t}e^{-j\omega t} + e^{-\sigma t}e^{j\omega t}\right) + jN\left(e^{-\sigma t}e^{-j\omega t} - e^{-\sigma t}e^{j\omega t}\right) \\
&= Me^{-\sigma t}\left(e^{-j\omega t} + e^{j\omega t}\right) + jNe^{-\sigma t}\left(e^{-j\omega t} - e^{j\omega t}\right)
\end{aligned}$$

visto che:

$$\begin{cases} e^{j\omega t} = \cos(\omega t) + i\sin(\omega t) \\ e^{-j\omega t} = \cos(\omega t) - i\sin(\omega t) \end{cases}$$

si ha:

$$\begin{aligned}
i(t) &= Me^{-\sigma t}(\cos(\omega t) + i\sin(\omega t) + \cos(\omega t) - i\sin(\omega t)) \\
&+ jNe^{-\sigma t}(\cos(\omega t) - i\sin(\omega t) - \cos(\omega t) - i\sin(\omega t)) \\
&= 2Me^{-\sigma t}\cos\omega t + 2Ne^{-\sigma t}\sin(\omega t)
\end{aligned}$$

Vogliamo riportare questa forma nella più concisa $ke^{-\sigma t}\sin(\omega t + \alpha)$. Usiamo allora le formule di traduzione in forma sinusoidale, di cui una dimostrazione nel caso cosinusoidale si trova a `https://github.com/seggiani-luca/appunti-fis/blob/main/master/master.pdf`:

$$c_1\sin\omega t + c_2\cos\omega t \Leftrightarrow k\sin(\omega t + \alpha)$$

con:

$$\begin{cases} k = \sqrt{c_1^2 + c_2^2} \\ \alpha = \tan^{-1}(\frac{c1}{c2}) \end{cases}$$

da cui diciamo:

$$i(t) = 2Me^{-\sigma t}\cos\omega t + 2Ne^{-\sigma t}\sin(\omega t)$$
$$= 2e^{-\sigma t}\left(M\cos\omega t + N\sin\omega t\right) = ke^{-\sigma t}\sin(\omega t + \alpha)$$

con:

$$\begin{cases} k = 2\sqrt{M^2 + N^2} \\ \alpha = \tan^{-1}\left(\frac{M}{N}\right) \end{cases}$$

Possiamo quindi riportare l'esempio precedente in questa forma. Si avrà:

$$i(t) = \left(\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}j\right)e^{-3jt} + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}j\right)e^{3jt}\right)u(t)$$

$$= \left(2M\cos(\omega t) + 2N\sin(\omega t)\right)\Big|_{M=\frac{1}{2},\,N=\frac{1}{3}} = \cos(3t) + \frac{2}{3}\sin(3t)$$

o la forma più compatta $k\sin(\omega t + \alpha)$, con:

$$\begin{cases} k = 2\sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2} \approx 1.201 \\ \alpha = \tan^{-1}\left(\frac{M}{N}\right) \approx 0.983 \end{cases}$$