1 Lezione del 25-10-24

1.0.1 Potenza in circuiti a regime sinusoidale

Vediamo come si studia la potenza nei circuiti in corrente alternata. Avevamo definito la potenza come:

$$p(t) = v(t)i(t) = Ri^2(t)$$

A regime costante, abbiamo che $v(t)$ e $i(t)$ sono costanti, come lo è (ovviamente) R, ergo $p(t)$ ha un valore definito e positivo.

A regime sinusoidale, invece, abbiamo una forma del tipo:

$$i(t) = I_M \cdot \sin(\omega t)$$

assumendo $\phi = 0$.

Abbiamo quindi che in $p(t) = Ri^2(t)$ non c'è modo di eliminare la dipendenza temporale. Notiamo però che vale comunque $p(t) \geq 0$ dal quadrato a $i(t)$.

1.0.2 Valore efficace

Potremmo qundi chiederci se è il circuito a regime costante o quello a regime sinusoidale a dissipare più energia sul solito intervallo di tempo ΔT. Sul costante, abbiamo l'integrale:

$$W(t) = \int_0^T RI^2 dt = RI^2 \cdot T$$

mentre sul sinusoidale vale:

$$W(t) = \int_0^T Ri^2(t)dt = R\int_0^T i^2(t)dt$$

Eguagliamo quindi le due:

$$RI_{eff}^2 T = R\int_0^T i^2(t)dt$$

dove abbiamo chiamato $I \rightarrow I_{eff}$ per dare una definizione preliminare di **corrente efficace**, cioè la corrente in regime costante che dissipa la stessa potenza della corrispondente corrente in regime sinusoidale. Si ha quindi:

$$I_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T i^2(t)dt}$$

Vediamo che questa definizione è generica:

1.1: Valore efficace

Definiamo il valore efficace X_{eff} di una grandezza $x(t)$ in regime sinusoidale su un intervallo T come:

$$X_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T x^2(t)dt}$$

Possiamo quindi sostituire la definizione che avevamo dato di $i(t)$, ottenendo:

$$I_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T I_M^2 \cdot \sin^2(\omega t)dt} = \sqrt{\frac{1}{T}I_M^2\int_0^T \left(1 - \cos^2(\omega t)\right)dt} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T \frac{1-\cos(2\omega t)}{2}dt}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{T} I_M^2 \left(\int_0^T \frac{1}{2} dt - \int_0^T \frac{\cos(2\omega t)}{2} dt \right)} = \sqrt{\frac{1}{T} I_M^2 \left(\frac{1}{2} \int_0^T 1 \cdot dt - \frac{1}{2} \int_0^T \cos(2\omega t) dt \right)} = \sqrt{\frac{I_M^2}{2}}$$

da cui abbiamo il valore:

$$I_{eff} = \frac{I_M}{\sqrt{2}}$$

Notiamo come $I_{eff} \geq 0$, dal fatto che I_M corrente di picco è ≥ 0.

Ad esempio, si dice che la rete elettrica funziona a 220 volts. Questo non è altro che il valore efficace della corrente. Si ha infatti:

$$V_M = 220 \cdot \sqrt{2} \approx 311\text{V}$$

1.0.3 Calcolo della potenza

Definiamo quindi la potenza su circuiti a regime periodico sinusoidale. Definiamo la **potenza istantanea**:

$$p(t) = i(t)v(t)$$

Avevamo definito $i(t)$ e $v(t)$ come:

$$\begin{cases} i(t) = I_M \sin(\omega t) \\ v(t) = V_M \sin(\omega t + \phi) \end{cases}$$

dove ϕ è la **fase dell'impedenza**, da $\phi_V = \phi + \phi_i$, $\dot{V} = \bar{Z}\dot{I}$.

Possiamo quindi sostituire:

$$p(t) = V_M \sin(\omega t + \phi) \cdot I_M \sin(\omega t) = V_M I_M \sin(\omega t) \sin(\omega t + \phi)$$

$$= V_M I_M \sin(\omega t) \left(\sin(\omega t) \cos(\phi) + \cos \omega t \sin \phi\right) = V_M I_M \left(\sin^2(\omega t) \cos(\phi) + \sin(\omega t) \cos(\omega t) \sin(\phi)\right)$$

$$= V_M I_M \left(\left(1 - \cos^2(\omega t)\right) \cos(\phi) + \sin(\omega t) \cos(\omega t) \sin(\phi)\right)$$

$$= V_M I_M \left(\frac{1 - \cos(2\omega t)}{2} \cos(\phi) + \frac{\sin(2\omega t) 2}{\sin} (\phi)\right) = \frac{V_M I_M}{2} \left((1 - \cos(2\omega t) \cos(\phi) + \sin(2\omega t) \sin(\phi))\right)$$

da cui:

$$p(t) = \frac{V_M I_M}{2} (1 - \cos(2\omega t)) \cos(\phi) + \frac{V_M I_M}{2} \sin(2\omega t) \sin(\phi)$$

Il primo termine viene detto **potenza attiva istantanea**, mentre il secondo viene detto **potenza reattiva istantanea**. Componenti come i generatori generano potenza attiva istantanea, mentre componenti come gli induttori e i capacitori generano potenza reattiva istantanea.

1.0.4 Potenza attiva

Sarebbe comodo avere una misura di potenza che non dipende dal tempo, cioè un **valore medio**. Definiamo quindi:

1.2: Potenza attiva

Definiamo la potenza attiva P, sulla base della potenza istantanea $p(t)$, come la media integrale:

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T p(t) dt$$

Sostituendo quanto trovato prima, abbiamo:

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T p(t)dt = \frac{1}{T}\frac{V_M I_M}{2}\int_0^T (1-\cos(2\omega t))\cos(\phi) + \sin(2\omega t)\sin(\phi)dt$$
$$= \frac{1}{T}\frac{V_M I_M}{2}\left(\int_0^T \cos(\phi)dt + \int_0^T \cos(2\omega t)\cos(\phi)dt + \int_0^t \sin(2\omega t)\sin(\phi)dt\right)$$

dove l'unico integrale che resta è $\int_0^T \cos(\phi)dt = T\cos(\phi)$, ergo:

$$P = \frac{V_M I_M}{2}\cos(\phi) = \frac{V_{eff}\sqrt{2}\cdot I_{eff}\sqrt{2}}{2}\cos\phi = V_{eff} I_{eff}\cos\phi$$

Si nota la comodità di usare i valori efficaci: non compare $\sqrt{2}$ al denominatore.

Notiamo poi che avevamo, dall'impedenza e l'ammettenza:

$$\dot{V} = \bar{Z}\dot{I} \Rightarrow P = ZI^2\cos\phi = RI^2 = YV^2\cos(\phi) = GV^2$$

1.0.5 Potenza reattiva

Definiamo quindi la **potenza reattiva**:

1.3: Potenza reattiva

Definiamo la potenza reattiva Q come il massimo della potenza reattiva istantanea.

Da quanto calcolato prima, si ha:

$$Q = \max \frac{V_M I_M}{2}\sin(2\omega t)\sin(\phi) = \frac{V_M I_M}{2}\sin(\phi)$$

La potenza reattiva si misura in [VAR], cioè *Volt Ampere Reattivi*. Si ha anche qui, riguardo il triangolo delle impedenze:

$$Q = \frac{V_{eff}\sqrt{2}\cdot I_{eff}\sqrt{2}}{2}\sin(\phi) = V_{eff}I_{eff}\sin(\phi) = ZI^2\sin(\phi) = XI^2 = YV^2\sin(\phi) = -BV^2$$

1.0.6 Potenza apparente

Definiamo infine la potenza **apparente**:

1.4: Potenza apparente

Definiamo la potenza reattiva S come il valore massimo raggiungibile della potenza, cioè:

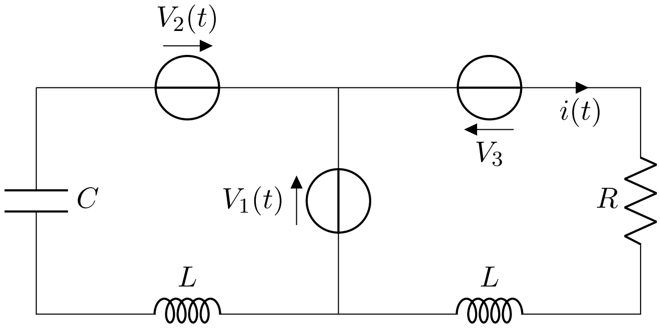
$$S = \frac{V_M I_M}{2}$$

Come prima,

$$S = \frac{V_M I_M}{2} = \frac{V_{eff}\sqrt{2}\cdot I_{eff}\sqrt{2}}{2} = VI = ZI^2 = YV^2$$

L'unita della misura della potenza apparente è il [VA], cioè *Volt Ampere*.

Prendiamo in esempio il circuito:



con i generatori guidati dalla legge:

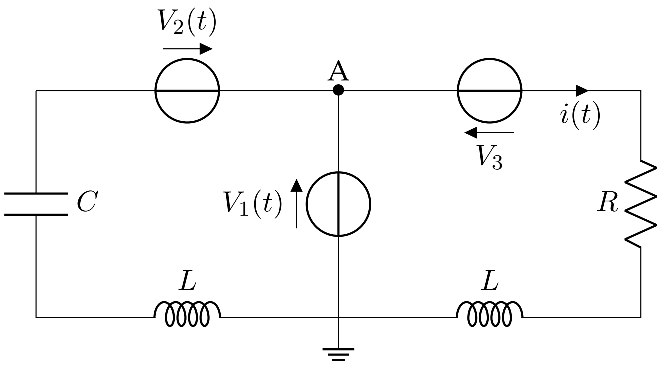
$$\begin{cases} V_1(t) = 10\sqrt{2}\sin(1000t)\, V \\ V_2(t) = 20\sqrt{2}\sin(1000t + \frac{\pi}{2})\, V \\ V_3(t) = 30\sqrt{2}\sin(1000t + \pi)\, V \end{cases}$$

Ci chiediamo quanto valga la corrente $i(t)$ sul generatore di tensione V_3, in direzione opposta al contrassegno.

Prima di tutto, portiamo le equazioni dei generatori in forma fasoriale, usando il valore efficace del voltaggio. Usare il valore efficace o il valore proprio del voltaggio è indifferente, ma abbiamo che i calcoli si semplificano se si usa il primo. Abbiamo quindi:

$$\begin{cases} \dot{V}_1 = 10e^{j\cdot 0} = 10V \\ \dot{V}_2 = 20e^{j\frac{\pi}{2}} = 20jV \\ \dot{V}_3 = 30e^{j\pi} = -30V \end{cases}$$

Possiamo quindi usare il metodo delle correnti di nodo. Poniamo il nodo:



A questo punto, $V_A = V_1 = 10V$, e si puà applicare Kirchoff alla maglia a destra:

$$-\dot{V}_1 + \dot{V}_3 + R\dot{I} + \dot{I} \cdot j\omega L = 0 \Rightarrow i(t) = \frac{\dot{V}_1 - \dot{V}_3}{R + j\omega L}$$

Poniamo che, risolvendo con qualche valore di R e C, si ha $\dot{I} = 2 - 2j$. A questo punto, possiamo ritrovare il valore di $i(t)$ effettivo attraverso il modulo di $\dot{I}$ e l'angolo:

$$i(t) = \sqrt{2^2 + 2^2}\sqrt{2} \cdot \sin\left(1000t - \frac{\pi}{4}\right) = 4\sin\left(1000t - \frac{\pi}{t}\right)$$

dove si è reintrodotto $\sqrt{2}$ per ritornare al valore di picco.