1 Lezione del 30-10-24

1.1 Potenza complessa

Introduciamo un'ulteriore misura della potenza, comoda perché non necessita (a differenza di quelle studiate finora) di lavorare coi valori efficaci.

1.1: Potenza complessa

Definiamo la **potenza complessa** $\overline{S}$ come il prodotto dei fasori di tensione e corrente, cioè come:

$$\overline{S} = \dot{V}\dot{I}^*$$

Notiamo che si prende il **coniugato complesso** di $\dot{I}$. Il suo significato si può mostrare svolgendo il calcolo:

$$\overline{S} = \dot{V}\dot{I}^* = V \cdot e^{j\phi_v} \cdot I \cdot e^{-j\phi_i} = VIe^{j(\phi_v - \phi_i)} = VIe^{j\phi}$$

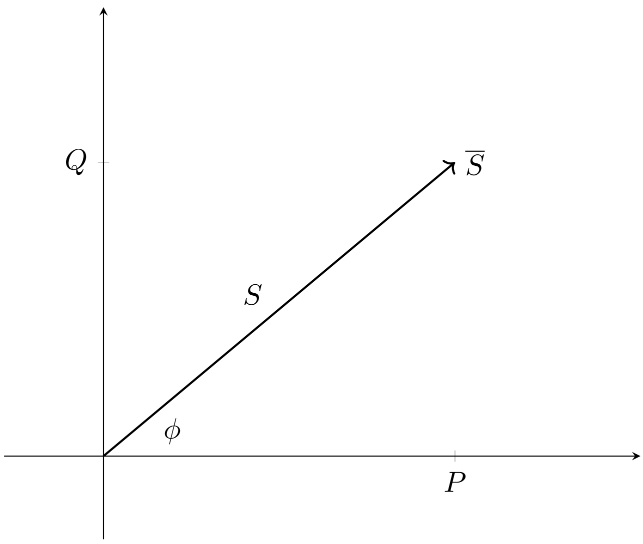
cioè possiamo sfruttare la formula sulle fasi $\phi_v - \phi_i = \phi$.

In forma cartesiana, abbiamo che $\overline{S}$ vale:

$$\overline{S} = VIe^{j\phi} = VI\cos(\phi) + jVI\sin\phi = P + jQ$$

e quindi la potenza complessa è uguale al complesso dato da potenza attiva e reattiva. Notiamo che finora nei calcoli si è inteso, con V e I, i **valori efficaci** di queste grandezze: da qui in poi infatti prenderemo qualsiasi versore privo di pedice con valore efficace a modulo.

Possiamo rappresentare questa relazione nel cosiddetto **triangolo delle potenze**: la base è la potenza attiva, l'altezza la potenza resistiva, e inoltre notiamo che l'ipotenusa è la potenza apparente:



Possiamo poi sfruttare:

$$\dot{V} = \overline{Z}\dot{I} \Leftrightarrow \begin{cases} V = ZI \\ \phi_v = \phi_z + \phi_i \end{cases} \quad , \quad \dot{I} = \frac{\dot{V}}{\overline{Z}} = \overline{Y}\dot{V} \Leftrightarrow \begin{cases} I = YV \\ \phi_i = \phi_y + \phi_v \end{cases}$$

e quindi possiamo esprimere $\overline{S}$ come funzione:

- In funzione dell'impedenza:
$$\overline{S} = \dot{V}\dot{I}^* = \overline{Z}I^2$$
- In funzione dell'ammettenza:
$$\overline{S} = \dot{V}\dot{I}^* = \overline{Y}V^2$$

1.2 Teorema di Tellegen

Dimostriamo il seguente risultato:

1.1: Teorema di Tellegen

La somma algebrica delle potenze istantanee impiegate su tutti i rami di una rete elettrica è uguale a 0, ovvero:

$$\sum_{jk=1}^{n} v_{jk}(t) \cdot i_{jk}(t) = 0$$

Notiamo che j e k sono indici che scorrono lungo n, dove n è il numero di nodi della rete presa in considerazione, ergo x_{jk} è quella grandezza considerata su ogni arco (ad archi inesistenti sarà evidentemente 0).

Possiamo riformulare la formula precedente come segue:

$$\sum_{jk=1}^{n} (v_{j,0}(t) - v_{k,0}(t)) \cdot i_{j.k}(t) = 0$$

Dove si è usato $v_{jk} = v_{j,0} - v_{k,0}$ dal secondo principio di Kirchoff. Abbiamo quindi:

$$= \sum_{jk=1}^{n} v_{j,0}(t) \cdot i_{j.k}(t) - \sum_{jk=1}^{n} v_{k,0}(t) \cdot i_{j.k}(t) = \sum_{j=1}^{n} v_{j,0}(t) \left(\sum_{k=1}^{n} i_{jk}(t) \right) - v_{k,0}(t) \left(\sum_{j=1}^{n} i_{jk}(t) \right)$$

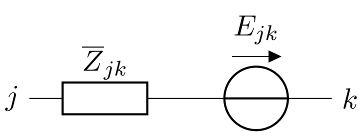
Abbiamo che il secondo termine sommatoria è la somma delle correnti che escono dal nodo j, che quindi è 0 dal primo di Kirchoff, e il quarto termine, allo stesso modo, è la somma delle correnti che escono dal nodo k, e quindi l'intera espressione è nulla, da cui il teorema.

1.2.1 Teorema di Boucherot

Dal teorema di Tellegen sul caso sinusoidale deriva il **teorema di Boucherot**. Prendiamo come ipotesi:

$$\sum_{jk=1}^{n} \dot{V}_{jk}\dot{I}^*_{jk} = 0$$

Questo deriva dal teorema di Tellegen considerato in regime sinusoidale. Prendiamo quindi un qualunque ramo jk: su questo ramo avremo chiaramente impedenze e generatori, a cui diamo il nome $\overline{Z}_{jk}$ e $\dot{E}_{jk}$, e corrente e voltaggio, a cui diamo il nome di $\dot{I}_{jk}$ e $\dot{V}_{jk}$:



Sostituiamo quindi la caduta di potenziale $\dot{V}_{jk}$ nell'ipotesi con:

$$\sum_{jk=1}^{n} \left(\overline{Z}_{jk} \dot{I}_{jk} - \dot{E}_{jk} \right) \cdot \dot{I}_{jk}^{*} = 0$$

notando che i due termini coinvolti nella sommatoria sono:

$$\sum_{jk=1}^{n} \overline{Z}_{jk} \cdot I_{jk}^{2} = \sum_{jk=1}^{n} \dot{E}_{jk} \dot{I}_{jk}^{*} = \sum_{jk=1}^{n} \overline{S}_{jk}^{(G)}$$

cioè le potenze dissipate sulle impedenze e le potenze erogate dai generatori del ramo. Da questo si deriva il teorema:

1.2: Teorema di Boucherot

La somma delle potenze complesse dissipate sulle impedenze di un circuito è uguale alla somma delle potenze complesse erogate dai generatori, cioè:

$$\sum_{jk=1}^{n} \overline{Z}_{jk} \cdot I_{jk}^{2} = \sum_{jk=1}^{n} \dot{E}_{jk} \dot{I}_{jk}^{*}$$

Possiamo rendere questo risultato anche come:

$$\sum_{jk=1}^{n} \left(R_{jk} + jX_{jk} \right) I_{jk}^{2} = \sum_{jk=1}^{n} \left(P_{jk}^{(G)} + jQ_{jk}^{(G)} \right)$$

Da cui in poi si possono equagliare separatamente parte reale e parte immaginaria:

$$\begin{cases} \sum_{jk=1}^{n} R_{jk} I_{jk}^{2} = \sum_{jk}^{n} P_{jk}^{(G)} \\ \sum_{jk=1}^{n} X_{jk} I_{jk}^{2} = \sum_{jk}^{n} Q_{jk}^{(G)} \end{cases}$$

ergo, non solo la somma delle potenze potenze complesse dissipate sulle impedenze di un circuito è uguale alla somma delle potenze complesse erogate dai generatori, ma sia la potenza attiva che la potenza reattiva dissipata sulle impedenze sono uguali a le corrispondenti erogate dai generatori.

Sulla potenza attiva, che sappiamo non poter avere segno negativo, si ha che i generatori devono compensare le potenze dissipate sulle impedenze.

1.2.2 Potenza apparente e Boucherot

Preso un ramo con due generatori P_1 e P_2, abbiamo che la potenza attiva e reattive associate valgono quanto le somme delle potenze attive e reattive sui singoli generatori:

$$P^{(G)} = P_1 + P_2, \quad Q^{(G)} = Q_1 + Q_2$$

e quindi, da Boucherot, o semplicemente applicando la definizione di potenza complessa $\overline{S}$:

$$\overline{S}^{(G)} = P^{(G)} + jQ^{(G)} = (P_1 + P_2) + j(Q_1 + Q_2)$$

Cioè la potenza complessa si conserva.

Dobbiamo notare che questo non vale per la potenza apparente: si ha che $S^{(G)} = \sqrt{P_{(G)}^2 + Q_{(G)}^2}$, ergo la dipendenza non è lineare, e non possiamo assumere che si conservi, cioè vale:

$$S^{(G)} = \sqrt{P_{(G)}^2 + Q_{(G)}^2} \neq \sqrt{P_1^2 + Q_1^2} + \sqrt{P_2^2 + Q_2^2}$$