1 Lezione del 15-11-24

1.1 Rappresentazione a parametri T

Vediamo un ultimo tipo di parametrizzazione, la **parametrizzazione T**. Le equazioni di rappresentazione sono:

$$\begin{cases} \dot{V}_1 = \overline{A}\dot{V}_2 + \overline{B}(-\dot{I}_2) \\ \dot{V}_2 = \overline{C}\dot{V}_2 + \overline{D}(-\dot{I}_2) \end{cases}$$

Notiamo come le grandezze indipendenti qui sono sempre sia tensioni e correnti, ma non in alternanza come nella parametrizzazione h. Inoltre, notiamo che il termine $\dot{I}_2$ compare con segno negato.

Potremmo pensare di calcolare i parametri T come segue:

$$T: \begin{pmatrix} \overline{A} = \left.\frac{\dot{V}_1}{\dot{V}_2}\right|_{-\dot{I}_2=0} & \overline{B} = -\left.\frac{\dot{V}_1}{\dot{I}_2}\right|_{\dot{V}_2=0} \\ \overline{C} = \left.\frac{\dot{I}_1}{\dot{V}_2}\right|_{-\dot{I}_2=0} & \overline{D} = -\left.\frac{\dot{I}_1}{\dot{I}_2}\right|_{\dot{V}_2=0} \end{pmatrix}$$

ma notiamo che risulta difficile calcolare, ad esempio $\overline{A}$, in quanto si chiede di mettere sia un generatore che un aperto alla porta 2 Scriviamo quindi una matrice del tipo:

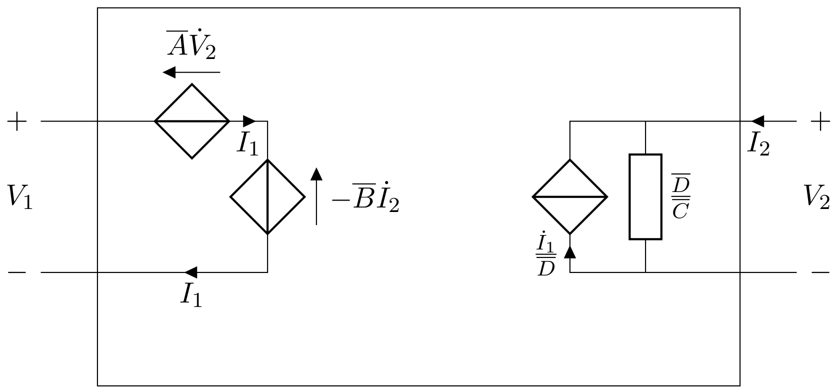
$$T: \begin{pmatrix} \frac{1}{\overline{A}} = \left.\frac{\dot{V}_2}{\dot{V}_1}\right|_{-\dot{I}_2=0} & \frac{1}{\overline{B}} = -\left.\frac{\dot{I}_2}{\dot{V}_1}\right|_{-\dot{V}_2=0} \\ \frac{1}{\overline{C}} = \left.\frac{\dot{V}_2}{\dot{I}_1}\right|_{-\dot{I}_2=0} & \frac{1}{\overline{D}} = -\left.\frac{\dot{I}_2}{\dot{I}_1}\right|_{-\dot{V}_2=0} \end{pmatrix}$$

1.1.1 Circuito equivalente

Riscriviamo la seconda equazione di rappresentazione come:

$$\dot{I}_1 = \overline{C}\dot{V}_2 + \overline{D}(-\dot{I}_2) \Rightarrow -\dot{I}_2 = \frac{1}{\overline{D}}\dot{I}_1 - \frac{\overline{C}}{\overline{D}}\dot{V}_2$$

Un possibile circuito equivalente di una parametrizzazione T sarà quindi il seguente:



1.1.2 Condizioni di reciprocità

Troviamo quindi le condizioni di reciprocità. Come avevamo fatto per i parametri h, riportiamoci in parameri Z, ad esempio partendo dalla seconda equazione:

$$\dot{V}_2 = \frac{1}{\overline{C}}\dot{I}_1 + \frac{\overline{D}}{\overline{C}}\dot{I}_2$$

da cui $\frac{1}{\overline{C}} = \overline{z_{21}}$ e $\frac{\overline{D}}{\overline{C}} = \overline{z_{22}}$, e analogamente per la prima:

$$\dot{V}_1 = \overline{A}\left(\frac{1}{\overline{C}}\dot{I}_1 + \frac{\overline{D}}{\overline{C}}\dot{I}_2\right) + \overline{B}\left(-\dot{I}_2\right) = \dot{I}_1\frac{1}{\overline{C}} + \dot{I}_2\left(\frac{\overline{D}}{\overline{C}} - \overline{B}\right)$$

da cui $\overline{z_{11}} = \frac{\overline{A}}{\overline{C}}$ e $\overline{z_{12}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{C}} - \overline{B}$. Si ricavano quindi i parametri Z in funzione dei parametri T:

$$\overline{Z} = \begin{pmatrix} \frac{\overline{A}}{\overline{C}} & \frac{\overline{AD}}{\overline{C}} - \overline{B} \\ \frac{1}{\overline{C}} & \frac{\overline{D}}{\overline{C}} \end{pmatrix}$$

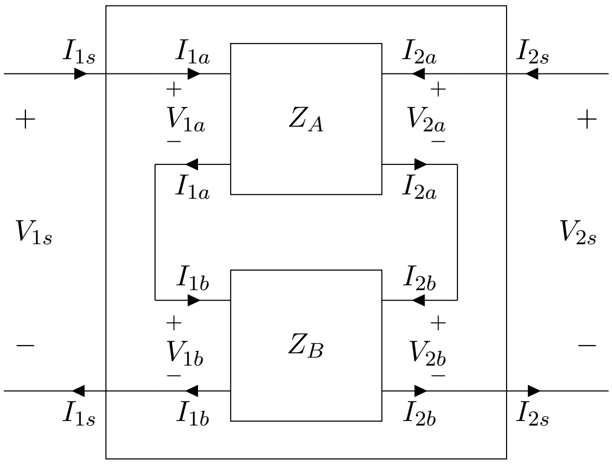
Imponendo la condizione di reciprocitá $\overline{z_{12}} = \overline{z_{21}}$, si ha:

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{C}} - \overline{B} = \frac{1}{\overline{C}} \Rightarrow \overline{AD} - \overline{BC} = 1$$

cioè, il circuito è **reciproco** quando la matrice dei parametri T ha determinante $\det(T) = 1$.

1.2 Circuiti a due porte in serie

Poniamo di avere due circuiti a due porte A e B, percorsi rispettivamente dalle correnti I_{1a} e I_{2a}, e I_{1b} e I_{2b}. collegati fra di loro in **serie**, cioè su cui scorre la *stessa corrente*:



Dimostriamo che il circuito così formato è di nuovo un circuito a due porte. Guardando alla porta 1, si ha che la corrente sulla porta a corrente I_{1a} di Z_A è la stessa che entra (e quindi esce) sulla porta Z_B, cioè $\dot{I}_{1a} = \dot{I}_{1b} = \dot{I}_{1s}$. Lo stesso vale per la porta 2, cioè $\dot{I}_{2a} = \dot{I}_{2b} = \dot{I}_{2s}$.

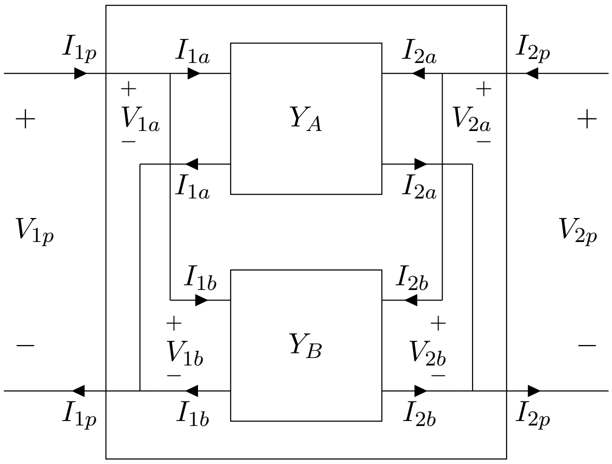
Calcoliamo quindi la caduta di potenziale sulle due porte (1 e 2) attraverso l'impedenza sui circuiti ($\overline{Z_a}$ e $\overline{Z_b}$):

$$\begin{pmatrix} \dot{V}_{1s} \\ \dot{V}_{2s} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{V}_{1a} \\ \dot{V}_{2a} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \dot{V}_{1b} \\ \dot{V}_{2b} \end{pmatrix} = \overline{Z_a}\begin{pmatrix} \dot{I}_{1a} \\ \dot{I}_{1b} \end{pmatrix} + \overline{Z_b}\begin{pmatrix} \dot{I}_{2a} \\ \dot{I}_{2b} \end{pmatrix} = \left(\overline{Z_a} + \overline{Z_b}\right)\begin{pmatrix} \dot{I}_{1s} \\ \dot{I}_{2s} \end{pmatrix}$$

che è quello che ci aspettavamo: la matrice dei parametri Z di due circuiti a due porte in serie è data dalla *somma* delle matrici dei parametri Z dei singoli circuiti, ergo l'impedenza complessiva della circuito sulle due porte è data da $\overline{Z_a} + \overline{Z_b}$.

1.2.1 Circuiti a due porte in parallelo

Poniamo adesso di avere due circuiti a due porte A e B, percorsi sempre dalle correnti I_{1a} e I_{2a}, e I_{1b} e I_{2b}. collegati fra di loro in **parallelo**, cioè che si trovano allo *stesso potenziale*:



Dimostriamo che anche questo circuito è sempre un circuito a due porte. Si ha, ad esempio sulla porta 1, che dalla prima legge di Kirchoff $\dot{I}_{1p} = \dot{I}_{1a} + \dot{I}_{1b}$, e visto che questo accade sia sulle correnti entranti che sulle correnti uscenti da Z_A e Z_B, la $\dot{I}_{1p}$ entrante è uguale all'uscente (anche perché altrimenti non gli avremmo dato lo stesso nome...).

Calcoliamo quindi la corrente che attraversa le porte:

$$\begin{pmatrix} \dot{I}_{1p} \\ \dot{I}_{2p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{I}_{1a} \\ \dot{I}_{2a} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \dot{I}_{1b} \\ \dot{I}_{2b} \end{pmatrix} = \overline{Y_a} \begin{pmatrix} \dot{V}_{1a} \\ \dot{V}_{2a} \end{pmatrix} + \overline{Y_b} \begin{pmatrix} \dot{V}_{1b} \\ \dot{V}_{2b} \end{pmatrix} = (\overline{Y_a} + \overline{Y_b}) \begin{pmatrix} \dot{V}_{1p} \\ \dot{V}_{2p} \end{pmatrix}$$

Questa volta, avremo che l'*ammettenza* complessiva del circuito sulle due porte è $\overline{Y_a} + \overline{Y_b}$.

Notiamo come la **paramerizzazione Z** è tornata utile per circuiti a due porte *in serie*, mentre la **parametrizzazione Y** è invece stata più adeguata per circuiti a due porte *in parallelo*.

A scapito della semplicità dei calcoli, potremmo aver bisogno di ricavare l'impedenza (parametri Z) su circuiti in parallelo, o viceversa l'ammettenza (parametri Y) su circuiti in serie. In questo caso possiamo notare, ad esempio sulla serie:

$$\overline{Z_a} + \overline{Z_b} = \left(\frac{1}{\overline{Y_a}} + \frac{1}{\overline{Y_b}} \right) = \overline{Z_s}, \quad \overline{Y_s} = \frac{1}{\overline{Z_s}} = \left(\frac{1}{\overline{Y_a}} + \frac{1}{\overline{Y_b}} \right)^{-1}$$

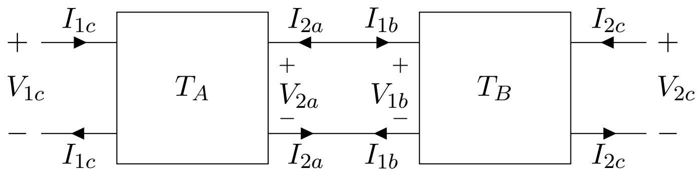
In parallelo varrà analogamente:

$$\overline{Z_p} = \left(\frac{1}{\overline{Z_a}} + \frac{1}{\overline{Z_b}} \right)^{-1}$$

L'associazione fra parametrizzazioni e tipo di collegamento studiato rimane anche per i parametri h e T. In particolare, vedremo come i **parametri h** risultano utili per collegamenti *ibridi serie/parallelo*, da cui la h di *hybrid parameters*, e i **parametri T** risultano utili per collegamenti a porte in cascata, da cui la T di *Transmission parameters*.

1.3 Circuiti a due porte in cascata

Nel collegamento **a cascata**, l'uscita di una porta và direttamente in ingresso a una seconda porta, cioè:



dove si nota che le correnti discordi sullo stesso ramo sono semplicemente quelle che le porte "interne" dei due circuiti intendono su quel ramo.

Non dobbiamo dimostrare che anche questo circuito è una porta, in quanto si prende come ingresso l'ingresso della porta T_A (I_{1c} , V_{1c}) e come uscita l'uscita della porta T_B (I_{2c} , V_{2c}).

Possiamo quindi esprimere queste relazioni fra le i circuiti interni e le porte esterne come segue:

$$\begin{pmatrix} \dot{V}_{1c} \\ \dot{I}_{1c} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{V}_{1a} \\ \dot{I}_{1a} \end{pmatrix} = \overline{T_a} \begin{pmatrix} \dot{V}_{2a} \\ -\dot{I}_{2a} \end{pmatrix} = \overline{T_a} \begin{pmatrix} \dot{V}_{1b} \\ \dot{I}_{1b} \end{pmatrix} = (\overline{T_a T_b}) \begin{pmatrix} \dot{V}_{2b} \\ -\dot{I}_{2b} \end{pmatrix} (\overline{T_a T_b}) \begin{pmatrix} \dot{V}_{2c} \\ -\dot{I}_{2c} \end{pmatrix}$$

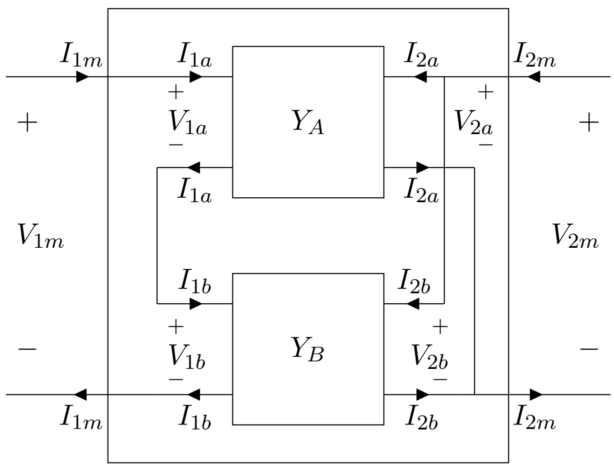
da cui:

$$\begin{pmatrix} \dot{V}_{1c} \\ \dot{I}_{1v} \end{pmatrix} = (\overline{T_a T_b}) \begin{pmatrix} \dot{V}_{2c} \\ -\dot{I}_{2c} \end{pmatrix}$$

e la parametrizzazione T complessiva è $\overline{T_a T_b}$. Notiamo quindi il significato del segno negativo a $\dot{I}_2$ nella parametrizzazione T: tenere conto del verso negativo della corrente entrante sul circuito T_A considerata come uscente da T_B.

1.4 Collegamento ibrido serie/parallelo

Attraverso le porte abbiamo a disposizione un ulteriore tipo di collegamento, il cosiddetto collegamento **ibrido**, cioè dove una coppia di porte viene connessa in serie e l'altra coppia in parallelo:



Per questo tipo di circuiti potremmo dire:

$$\begin{pmatrix} \dot{V}_{1m} \\ \dot{I}_{2m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{V}_{1a} \\ \dot{I}_{2a} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \dot{V}_{1b} \\ \dot{I}_{2b} \end{pmatrix} = \overline{h_a} \begin{pmatrix} \dot{I}_{1a} \\ \dot{V}_{2a} \end{pmatrix} + \overline{h_b} \begin{pmatrix} \dot{I}_{1b} \\ \dot{V}_{2b} \end{pmatrix} = (\overline{h_a} + \overline{h_b}) \begin{pmatrix} \dot{I}_{1m} \\ \dot{V}_{2m} \end{pmatrix}$$

e quindi la parametrizzazione h complessiva è data da $(\overline{h_a} + \overline{h_b})$.