1 Lezione del 27-11-24

1.1 Eccezioni al processo di antitrasformata

Esistono eccezioni al processo visto di antitrasformazione. Prendiamo ad esempio la forma rapporto di polinomi:

$$I(s) = \frac{s+2}{s^2+9}$$

Notiamo come i poli saranno numeri complessi.

Si avrà quindi:

$$= \frac{s+2}{(s+3j)(s-3j)} = \frac{A_1}{s+3j} + \frac{A_2}{s-3j}$$

Applicando il teorema dei residui per trovare A_1 e A_2 si ottiene:

$$A_1 = \lim_{s \to -3j} (s+3j) \frac{s+2}{(s+3j)(s-3j)} = \frac{2-3j}{-6j} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3}j$$

$$A_2 = \lim_{s \to 3j} (s-3j) \frac{s+2}{(s+3j)(s-3j)} = \frac{2+3j}{6j} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}j$$

da cui l'espressione in funzione di t:

$$i(t) = \left(\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}j \right) e^{-3jt} + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}j \right) e^{3jt} \right) u(t)$$

dove notiamo che anche i coefficienti, oltre che gli esponenti, risultano numeri complessi.

Abbiamo quindi che incontreremo generalmente soluzioni in forma:

$$i(t) = (M + jN) e^{-(\sigma + j\omega)t} + (M - jN) e^{-(\sigma - j\omega)t}$$

da cui:

$$\begin{aligned} &= Me^{-\sigma t}e^{-j\omega t} + jNe^{-\sigma t}e^{-j\omega t} + Me^{-\sigma t}e^{j\omega t} - jNe^{-\sigma t}e^{j\omega t} \\ &= M\left(e^{-\sigma t}e^{-j\omega t} + e^{-\sigma t}e^{j\omega t}\right) + jN\left(e^{-\sigma t}e^{-j\omega t} - e^{-\sigma t}e^{j\omega t}\right) \\ &= Me^{-\sigma t}\left(e^{-j\omega t} + e^{j\omega t}\right) + jNe^{-\sigma t}\left(e^{-j\omega t} - e^{j\omega t}\right) \end{aligned}$$

visto che:

$$\begin{cases} e^{j\omega t} = \cos(\omega t) + i\sin(\omega t) \\ e^{-j\omega t} = \cos(\omega t) - i\sin(\omega t) \end{cases}$$

si ha:

$$\begin{aligned} i(t) &= Me^{-\sigma t}(\cos(\omega t) + i\sin(\omega t) + \cos(\omega t) - i\sin(\omega t)) \\ &+ jNe^{-\sigma t}(\cos(\omega t) - i\sin(\omega t) - \cos(\omega t) - i\sin(\omega t)) \\ &= 2Me^{-\sigma t}\cos\omega t + 2Ne^{-\sigma t}\sin(\omega t) \end{aligned}$$

Vogliamo riportare questa forma nella più concisa $ke^{-\sigma t}\sin(\omega t + \alpha)$. Usiamo allora le formule di traduzione in forma sinusoidale, di cui una dimostrazione nel caso cosinusoidale si trova a `https://github.com/seggiani-luca/appunti-fis/blob/main/master/master.pdf`:

$$c_1 \sin\omega t + c_2 \cos\omega t \Leftrightarrow k\sin(\omega t + \alpha)$$

con:

$$\begin{cases} k = \sqrt{c_1^2 + c_2^2} \\ \alpha = \tan^{-1}(\frac{c1}{c2}) \end{cases}$$

da cui diciamo:

$$i(t) = 2Me^{-\sigma t}\cos\omega t + 2Ne^{-\sigma t}\sin(\omega t)$$
$$= 2e^{-\sigma t}\left(M\cos\omega t + N\sin\omega t\right) = ke^{-\sigma t}\sin(\omega t + \alpha)$$

con:

$$\begin{cases} k = 2\sqrt{M^2 + N^2} \\ \alpha = \tan^{-1}\left(\frac{M}{N}\right) \end{cases}$$