1 Lezione del 06-12-24

Nei circuiti visti finora scorrono **correnti elettriche**. Una corrente elettrica genera inevitabilmente **campi magnetici**. A volte questi campi magnetici sono effetti indesiderati che vogliamo schermare attraverso appositi meccanismi per evitare l'interferenza fra i componenti. Altre volte questi campi possono esserci utili a compiere lavoro, come nel caso delle **macchine elettriche**.

1.0.1 Campo magnetico

Introduciamo le grandezze $\vec{H}$, detta **intensità di campo magnetico** e misurata in $\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}}$, e $\vec{B}$, detta **induzione magnetica** e misurata in Tesla (T). Intensità e induzione magnetica sono legati da:

$$\vec{B} = \mu\vec{H} = \mu_0\mu_r\vec{H}$$

dove μ_r è la **permeabilità magnetica** *di un certo materiale* e μ_0 è la **permeabilità magnetica del vuoto**. In particolare, quindi, la prima equazione si riferisce all'induzione magnetica *nel vuoto*, e la seconda all'induzione magnetica *in un certo materiale*.

Introduciamo poi il **flusso magnetico** Φ, misurato in Weber (Wb), e definito come l'integrale di superficie dell'induzione magnetica:

$$\Phi = \int_S \vec{B}\, ds = \vec{B} \cdot \hat{N} = BS$$

dove l'ultima relazione vale se $\vec{B} \cdot \hat{N}$ con N normale a s è uguale a 1 (altrimenti compare il solito termine $\cos\theta$).

Da questa definizione, a volte, l'induzione magnetica viene dettà **densità di flusso magnetico**.

1.0.2 Legge di Ampère

La relazione matematica che ci aiuta a studiare i campi magnetici è la legge di Ampère:

1.1: Legge di Ampère

La circuitazione del campo magnetico lungo una curva chiusa γ è data dalla sommatoria delle correnti concatenate alla curva I_j:

$$\int_\gamma H\, dl = \sum_{j=1}^{n} I_j(t)$$

Possiamo esprimere la legge di Ampère anche attraverso l'induzione magnetica, come:

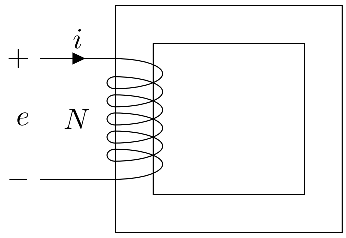
$$\int_\gamma H\, dl = \mu_0 \sum_{j=1}^{n} I_j(t)$$

nel vuoto e:

$$\int_\gamma H\, dl = \mu_0\mu_r \sum_{j=1}^{n} I_j(t)$$

in un materiale con permeabilità magnetica μ_r.

Un caso di esempio che possiamo studiare è quello di un avvolgimento di filo in N spire attorno a un corpo ferromagnetico, nel nostro caso un blocco perforato:



Ogni sezione del blocco viene detta **tronco**, e assumiamo le superfici trasversali S dei tronchi pressoché costanti fra tronchi e sulla lunghezza di un tronco. Sottoposto a un campo magnetico, il materiale ferromagnetico si magnetizza nella direzione imposta dalle correnti che scorrono nell'avvolgimento di filo, e il blocco presenta effettivamente quello che possiamo modellizzare come un fenomeno di conduzione di $\vec{B}$. In particolare, nello studio di sistemi che coinvolgono materiali ferromagnetici, facciamo due ipotesi:

1. Il rapporto fra le permeabiltà magnetiche associate al materiale ferromagnetico μ_{fe} e all'aria circostante μ_a tende a $+\infty$ o comunque è $\mu_{fe} >> \mu_a$, cioè non ci sono (o sono molto limitate) linee di campo magnetico che si chiudono al di fuori del materiale ferromagnetico stesso;

2. In ogni sezione del ferromagnetico si ha una distribuzione uniforme dell'induzione magnetica $\vec{B}$, cioè modulo verso e direzione di $\vec{B}$ sono costanti su ogni superficie S trasversale dei tronchi del ferromagnetico.

Prendiamo quindi una superficie chiusa γ all'interno del blocco perforato. Le ipotesi scelte ci permetteranno di dire:

$$\int_\gamma H\,dl = Ni$$

che riportandosi al caso discreto dei 4 tronchi dell'esempio significa:

$$\int_\gamma H\,dl = \sum_{i=1}^{A} H_i \cdot l_i = \sum_{i=1}^{A} \frac{\vec{B}_i}{\mu_0 \mu_r} \cdot l_i = \sum_{i=1}^{A} \frac{\Phi_i}{\mu_0 \mu_r S_i} \cdot l_i = Ni$$

In particolare, l'ipotesi (1) ci permette di passare alla sommatoria in $\vec{B}_i$, cioè affermare che il campo magnetico è tutto interno al tronco, mentre l'ipotesi (2) ci permette invece di prendere il campo come $\vec{B}_i = \frac{\Phi_i}{S_i}$ su una superficie S_i assunta costante. Inoltre, l'ipotesi (1) ci permette di ridurre i flussi Φ_i all'unico flusso Φ che scorrerà in comune su tutti i tronchi del corpo ferromagnetico, mentre attraverso la (2), assunti tronchi di superficie identica, ridurremo le S_i a un unica S comune:

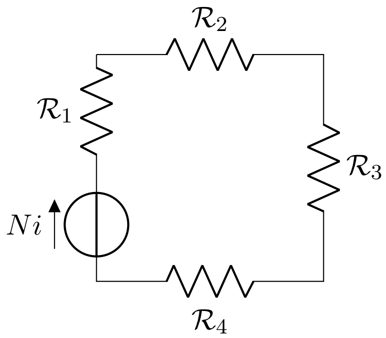
$$Ni = \sum_{i=1}^{A} \frac{\Phi}{\mu_0 \mu_r S} \cdot l_i$$

Notiamo quindi che il campo magnetico magnetico, o meglio il flusso magnetico Φ, scorre effettivamente come una corrente all'interno dei tronchi del blocco cavo. Potremo definire la grandezza $\mathcal{R}$, detta **riluttanza**:

$$\mathcal{R}_i = \frac{l_i}{\mu \mu_r s_i}$$

E dire che $\sum_{i=1}^{A} \Phi_i \mathcal{R}_i = Ni$ rappresenta una **tensione magnetica**.

Le definizioni di riluttanza e tensione magnetica ci permettono di realizzare, sempre sotto le precedenti ipotesi, una modellizzazione che prende il nome di **circuito magnetico**:



La legge riportata sopra, che aveva forma simile alla legge di Ohm, è detta **legge di Hopkinson**. Riportiamo la forma completa:

1.2: Legge di Hopkinson

Su un circuito magnetico con n avvolgimenti di N_i spire dove scorre corrente I_i, e m tronchi con riluttanza $\mathcal{R}_j$ su cui scorre un flusso Φ_j, si ha che:

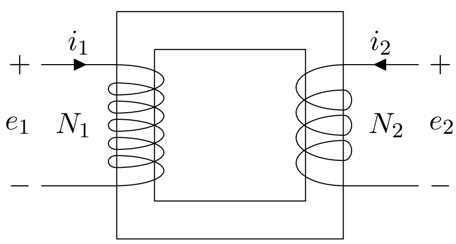
$$\sum_{i=1}^{n} N_i i_i = \sum_{j=1}^{m} \Phi_j \mathcal{R}_j$$

Notiamo come questa relazione ha una forma simile alla legge di Ohm $V = IR$, dove si possono confrontare le seguenti grandezze:

Campi elettrici	**Campi magnetici**
V	Ni
I	Φ
R	$\mathcal{R}$

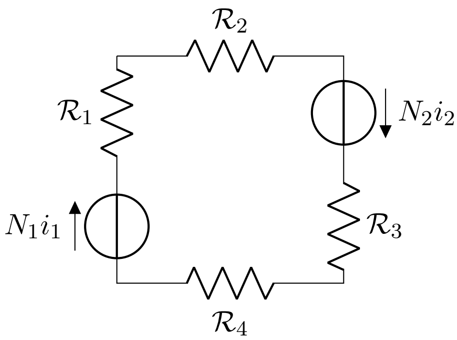
1.1 Trasformatore

Collegando un'ulteriore spira al lato destro del blocco perforato cavo visto prima, otteniamo una macchina elettrica detta **trasformatore**:



Chiamiamo l'avvolgimento a sinistra **primario**, che assumiamo come *alimentato*, e l'avvolgimento a destra **secondario**, che assumiamo come legato a un **carico**, solitamente resistivo, induttivo o ohmico-induttivo (carichi ohmico-capacitivi o puramente capacitivi sono più rari, in quanto solitamente le macchine elettriche lavorano con campi magnetici, quindi intrinsecamente induttivi). Il primario avrà N_1 spire e il secondario N_2. Notiamo il circuito elettrico dovrà a trovarsi a regime non costante, in quanto in caso contrario l'induttore si comporterà come un cortocircuito e non ci sarà variazione di campo magnetico: prendiamo, ad esempio, un generatore di funzione sinusoidale.

Possiamo disegnare il circuito magnetico:



dove si trattano gli avvolgimenti di filo come generatori di tensione $N_1 i_1$ e $N_2 i_2$ e i tronchi come riluttanze $\mathcal{R}_i$ con $i = 1, ..., 4$. Potremo studiare questo circuito come qualsiasi altro:

$$-N_1 I_1 + \mathcal{R}_1 \Phi_1 + \mathcal{R}_2 \Phi_2 + \mathcal{R}_3 \Phi_3 - N_2 I_2 + R_4 \Phi_4 = 0$$

che non è altro che la legge di Hopkinson applicata all'unica maglia del circuito:

$$\mathcal{R}_1 \Phi_1 + \mathcal{R}_2 \Phi_2 + \mathcal{R}_3 \Phi_3 + R_4 \Phi_4 = N_1 I_1 + N_2 I_2$$

1.1.1 Trasformatore ideale

Nel trasformatore ideale facciamo 3 ipotesi semplificative:

1. La resistenza R degli avvolgimenti dovrà essere uguale a 0;
2. Il rapporto fra le permeabiltà magnetiche associate al materiale ferromagnetico μ_{fe} e all'aria circostante μ_a tenderà a $+\infty$, quindi non ci saranno flussi dispersi in aria: questo ci permette di ridurre i flussi Φ_i a un unico flusso Φ;
3. μ_{fe} è costante nel tempo.

Possiamo quindi riportare l'equazione precedente, dalla (2), a:

$$(\mathcal{R}_1 + \mathcal{R}_2 + \mathcal{R}_3 + \mathcal{R}_4)\Phi = N_1 I_1 + N_2 I_2$$

Ricordando la definizione di riluttanza:

$$\mathcal{R}_i = \frac{l_i}{\mu \mu_r s_i}$$

e imponendo la sempre la (2), si avrà che $\mathcal{R} \to 0$, quindi:

$$N_1 I_1 + N_2 I_2 = 0 \implies I_1 = -\frac{N_2}{N_1} I_2 = -\frac{1}{n} I_2$$

dove n viene detto **rapporto spire** $n = \frac{N_1}{N_2}$.

Reintroducendo le tensioni ai capi degli avvolgimenti $\dot{E}_1$ ed $\dot{E}_2$, abbiamo nel dominio fasoriale:

$$\dot{E}_1 = j\omega\dot{\Phi}_1 N_1, \quad \dot{E}_2 = j\omega\dot{\Phi}_2 N_2$$

da cui prendiamo il rapporto:

$$\frac{\dot{E}_1}{\dot{E}_2} = \frac{j\omega\dot{\Phi}_1 N_1}{j\omega\dot{\Phi}_2 N_2} = \frac{N_1}{N_2} = n$$

Abbiamo quindi le due relazioni per il trasformatore ideale:

$$\begin{cases} \dot{I} = -\frac{1}{n}\dot{I}_2 \\ \dot{E}_1 = n\dot{E}_2 \end{cases}$$

Distinguiamo quindi 3 casi, notando che la convenzione si riferisce alle tensioni:

- $n > 1$: trasformatore **riduttore** di tensione, *elevatore* di corrente;
- $n < 1$: trasformatore **elevatore** di tensione, *riduttore* di corrente;
- $n = 1$: in questo caso il trasformatore si comporta da **isolatore galvanico** e viene detto **accoppiamento induttivo**.

1.1.2 Potenza sui trasformatori ideali

Facciamo le solite considerazioni di **potenza**. Si ha riguardo alla potenza apparente che:

$$S_1 = E_1 N_1 = nE_2\left(-\frac{1}{n}I_2\right) = -E_2 I_2 = S_2$$

1.1.3 Circuito equivalente del trasformatore ideale

Un circuito equivalente a un trasformatore ideale è dato alle induttanze mutuamente accoppiate:

disegno

dove si impone alle induttanze:

$$L_1 = \mu\mu_r \frac{s}{l} N_1^2$$

$$L_2 = \mu\mu_r \frac{s}{l} N_2^2$$

Con mutuo accoppiamento ideale si ha:

$$M = \sqrt{L_1 L_2} = \mu\mu_r \frac{s}{l} N_1 N_2$$

Possiamo applicare le relazioni tensione corrente delle mutue induttanze:

$$\begin{cases} v_1(t) = L_1 \frac{d\,i_1(t)}{dt} + M \frac{d\,i_2(t)}{dt} \\ v_2(t) = M \frac{d\,i_1(t)}{dt} + L_2 \frac{d\,i_2(t)}{dt} \end{cases} \implies \begin{cases} v_1(t) = L_1 \left(\frac{d\,i_1(t)}{dt} + \frac{M}{L_1}\frac{d\,i_2(t)}{dt}\right) \\ v_2(t) = M \left(\frac{d\,i_1(t)}{dt} + \frac{L_2}{M}\frac{d\,i_2(t)}{dt}\right) \end{cases}$$

da cui il rapporto:

$$\frac{v_1(t)}{v_2(t)} = \frac{L_1 \left(\frac{d\,i_1(t)}{dt} + \frac{M}{L_1}\frac{d\,i_2(t)}{dt}\right)}{M \left(\frac{d\,i_1(t)}{dt} + \frac{L_2}{M}\frac{d\,i_2(t)}{dt}\right)} = \frac{L_1}{M} = \frac{N_1}{N_2} = n$$

Abbiamo quindi dimostrato che il circuito è effettivamente equivalente a un trasformatore ideale.

1.1.4 Isolatore

Possiamo fare un esempio dell'utilità di un trasformatore con $n = 1$ riprendendo il circuito equivalente di una rete due porte recipreca a parametri Z:

rete due porte reciproca a parametri Z

Questa non era altro che la semplificazione della rete generale a parametri Z:

rete due porte a parametri Z

Notiamo che il potenziale ai due nodi in basso non è identico nel caso del circuito generale, mentre lo abbiamo posto come tale nel circuito reciproco. Questa è una semplificazione che potremmo non voler fare: possiamo permettere potenziali diversi introducendo appunto un disaccoppiatore:

io penso si chiami disaccoppiatore poi che ne so, cmq disegno

1.1.5 Adattamento di impedenza

Poniamo il circuito magnetico dato da generatore di tensione che alimenta, attraverso un trasformatore, un carico $\overline{z_C}$:

disegno

Si avrà che, preso il circuito come una rete due porte:

$$\dot{E}_2 = -\overline{z_C}\dot{I}_2$$

e dal circuito magnetico:

$$\dot{E}_1 = n\dot{E}_2 \Rightarrow \dot{E}_2 = \frac{\dot{E}_1}{n}$$

$$\dot{I}_1 = -\frac{1}{n}\dot{I}_2 \Rightarrow \dot{I}_2 = -n\dot{I}_1$$

quindi sostituendo:

$$\frac{\dot{E}_1}{n} = -\overline{z_C}(-n\dot{I}_1) \Rightarrow \dot{E}_1 = \overline{z_C}n^2\dot{I}_1$$

troppo forte riguarda

1.1.6 Trasformatore reale

Riprendiamo il trasformatore reale. Il circuito equivalente non può più essere formato prendendo due induttori in accoppiamento ideale. Introduciamo quindi due resistenze R_{1d} e R_{2d} in entrata agli induttori in maniera tale da modellizzare la resistenza R degli avvolgimenti (ipotesi 1), e altre due induttanze L_{1d} e L_{2d} per modellizzare i flussi dispersi in aria da un coefficiente μ_{fe} non ideale (cioè non tendente a $+\infty$, dall'ipotesi 2).

Notiamo che la permeabilità μ_{fe} non è nemmeno costante: il rapporto fra intensità di campo magnetico e induzinoe magnetica, che finora avevamo descritto come:

$$B = \mu\mu_{fe}H$$

presenta in verità delle non linearità date dall'**isteresi** del materiale.

grafichino classico