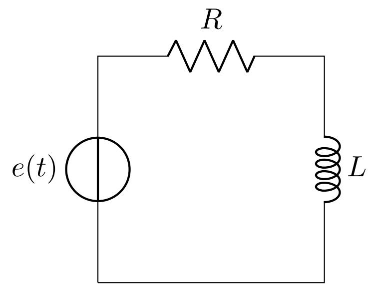
1 Lezione del 21-11-24

1.1 Analisi di circuiti aperiodici

Finora abbiamo studiato circuiti in **corrente continua** e in **regime sinusoidale**. Adesso vedremo come studiare circuiti dove le forme d'onda dei generatori sono arbitrarie.

1.1.1 Circuito RL

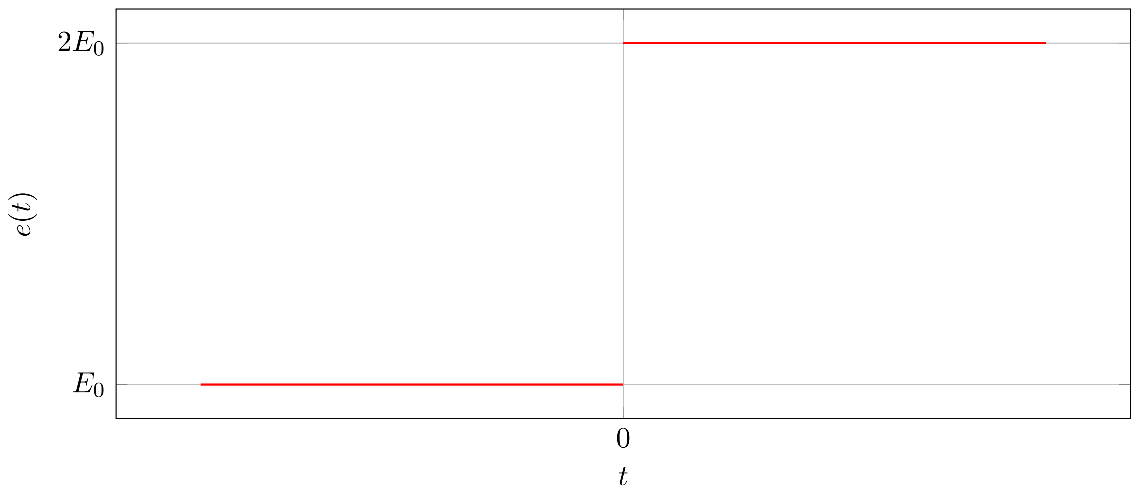
Poniamo un circuito formato da un resistore in serie a un induttore, come segue:



Diciamo che il generatore di tensione $e(t)$ ha forma d'onda:

$$e(t) = \begin{cases} E_0, & t < 0 \\ 2E_0, & t \geq 0 \end{cases}$$

di cui si riporta un grafico:



Nell'intervallo negativo possiamo assumere che il circuito sia rimasto a E_0 costante per un tempo tale da poterlo studiare nello stato di equilibrio. Cioè, se cercavamo $i(t)$, avremo semplicemente:

$$i(t) = \frac{E_0}{R}, \quad t < 0$$

Allo stesso modo, per tempi $t >> 0$, quindi con $t \to \infty$, potremo immaginare che il circito si trova nuovamente allo stato di equilibrio, cioè:

$$i(t) = \frac{2E_0}{R} \quad t >> 0$$

La domanda è quindi come *varia* la corrente $i(t)$ nell'intervallo immediatamente $t \geq 0$. Chiamiamo il comportamento della corrente in questa fase **transitorio**.

Potremo applicare la prima legge di Kirchoff all'unica maglia del circuito, ricordando la caduta di potenziale sull'induttanza in funzione della corrente $i(t)$:

$$-2E_0 + Ri(t) + L\frac{d\,i(t)}{dt} = 0$$

Questa è un'equazione differenziale del primo ordine, che sappiamo ha soluzione omogenea e disomogenea (o generale e particolare *specifica*, insomma qualsiasi nomenclatura viene riportata nel testo di Analisi 1 preferito del lettore):

$$i(t) = i_o(t) + i_p(t)$$

Risolvendo per $i_o(t)$:

$$Ri_o(t) + L\frac{d\,i_o(t)}{dt} = 0, \quad i_o(t) = Ae^{\lambda t}$$

$$R\lambda^0 + L\lambda^1 = 0 \Rightarrow \lambda = -\frac{R}{L}$$

da cui:

$$i_o(t) = Ae^{-\frac{R}{L}t}$$

Troviamo quindi $i_p(t)$, posto $i_p(t) = I$ e dal regime costante in $t < 0$, $\frac{dI}{dt} = 0$:

$$-2E_0 + RI = 0 \Rightarrow I = i_p(t) = 2\frac{E_0}{R}$$

Otteniamo quindi la soluzione:

$$i(t) = i_o(t) + i_p(t) = 2\frac{E_0}{R} + Ae^{-\frac{R}{l}t}$$

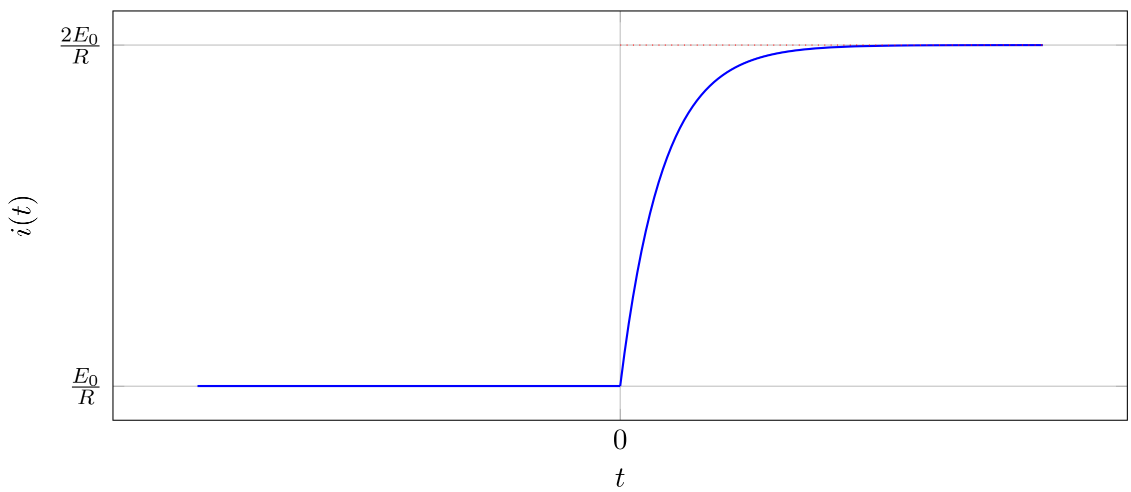
Imponiamo la condizione iniziale, cioè $i(t) = \frac{E_0}{R}$ per $t < 0$:

$$i(0) = \frac{E_0}{R} = \frac{2E_0}{R} + A \Rightarrow A = \frac{E_0}{R} - \frac{2E_0}{R} = -\frac{E_0}{R}$$

da cui:

$$i(t) = \frac{2E_0}{R} - \frac{E_0}{R}e^{-\frac{R}{L}t} = \frac{E_0}{R}\left(2 - e^{-\frac{R}{L}t}\right)$$

Da cui la soluzione finale. Possiamo tracciare un grafico dell'andamento della corrente:



Questa procedura, sebbene sia completamente generale, è difficilmente applicabile su circuiti più complessi. Conviene quindi spostarsi in un nuovo dominio, seguendo un procedimento simile a quello che avevamo seguito usando i fasori.

1.2 Trasformata di Laplace

Rappresentato un segnale come una funzione $f(t)$, la **trasformata di Laplace** viene indicata come:

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_{0^-}^{+\infty} f(t)e^{-st}\,dt$$

dove s è un complesso $\sigma + i\omega$.

Questa trasformata risulta molto utile in quanto ci permette di ricondurre le funzioni con cui lavoriamo nel cosiddetto spazio s, all'interno del cui le operazioni di derivazione e integrazione si riducono a divisioni e moltiplicazioni, e quindi all'algebra.

1.2.1 Proprietà della trasformata di Laplace

- **Derivata:** la trasformata di Laplace di $f'(t)$ sarà:

  $$\mathcal{L}\{f'(t)\} = \int_{0^-}^{+\infty} f'(t)e^{-st}dt$$

  dove possiamo applicare la formula di integrazione per parti:

  $$\int_{0^-}^{+\infty} f'(t)e^{-st}dt = f(t)e^{-st}\Big|_{0^-}^{+\infty} - \int_{0^-}^{+\infty} f(t)\cdot -se^{-st}dt$$

  $$= s\int_{0^-}^{+\infty} f(t)e^{-st}dt + \lim_{t\to+\infty} f(t)e^{-st} - f(0^-) = sF(s) - f(0^-)$$

  dove compare un termine $f(0^-)$ dovuto alle condizioni iniziali.

- **Integrale:** la trasformata di Laplace dell'integrale $g(t) = \int_{-\infty}^{t} f(\tau)d\tau$ sarà:

  $$\mathcal{L}\left\{\frac{d\,g(t)}{dt}\right\} = \mathcal{L}\{f(t)\} = s\mathcal{L}\{g(t)\} - g(0^-) = s\mathcal{L}\left\{\int_{\infty}^{t} f(\tau)d\tau\right\} - \int_{-\infty}^{0^-} f(\tau)d\tau$$

  da cui possiamo ricavare la trasformata dell'integrale:

  $$\mathcal{L}\left\{\int_{-\infty}^{t} f(\tau)d\tau\right\} = \frac{F(s)}{s} + \frac{1}{s}\int_{-\infty}^{0^-} f(\tau)d\tau$$

  dove nuovamente compare un termine $\frac{1}{s}\int_{-\infty}^{0^-} f(\tau)d\tau$ dovuto alle condizioni iniziali.