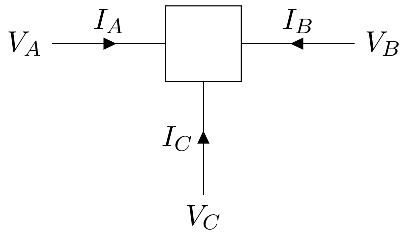
1 Lezione del 13-11-24

Avevamo visto il concetto di **bipolo**, cioè un componente circuitale con due *punti di contatto* col resto del circuito (**morsetti**), su cui passa una certa **corrente** I e su cui si trova una certa **tensione**, cioè una *differenza di potenzale* V. Potremmo avere anche un **tripolo**, cioè un componente con morsetti, su cui passano (propriamente, da cui *escono* o *entrano*), anzichè una, 3 correnti, e su cui individuiamo 3 tensioni (A, B e C) e 3 **cadute** di tensione su ogni percorso che attraversa il bipolo. Una possibile rappresentazione di un tripolo è la seguente:



le cui equazioni sono:

$$\begin{cases} I_A + I_B + I_C = 0 \\ V_{AB} = V_A - V_B \\ V_{AC} = V_A - V_C \\ V_{BC} = V_B - V_C \end{cases}$$

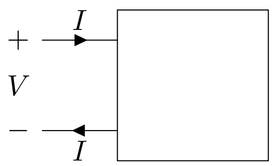
Notiamo che, dalle equazioni ai potenziali, si possono ricavare le relazioni (piuttosto scontate):

$$\begin{cases} V_{AB} + V_{BC} = V_{AC} \\ V_{BA} + V_{AC} = V_{BC} \\ V_{AC} + V_{CB} = V_{AB} \end{cases}$$

con $V_{BA} = -V_{AB}$ e $V_{CB} = -V_{BC}$ (e anche se non si è usata, $V_{CA} = -V_{AC}$).

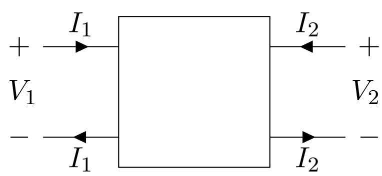
1.1 Porte

Definiamo una **porta** come una coppia di poli di un circuito dove la corrente entrante è uguale a quella uscente. Rappresentiamo una porta come segue:



Notiamo che per n poli si hanno al massimo $\frac{n}{2}$ porte (ammesso un numero pari di poli).

Ciò che ci è di interesse sono i circuiti a **due porte** (o equivalentemente a *quattro poli*):



Possiamo immaginare che un segnale *entra* da una porta, viene *elaborato* all'interno del circuito, e *esce* dalla porta opposta.

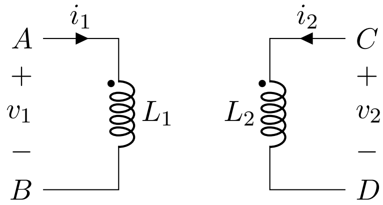
Per convenzione, scegliamo le due correnti $I_1(t)$e $I_2(t)$ come rivolte nello stesso senso, e le due tensioni $V_1(t)$ e $V_2(t)$ come con la stessa polarità:

1.2 Circuiti equivalenti di circuiti a due porte

Ciò che può interessarci quando studiamo circuiti a due porte è ricavare **circuiti equivalenti**, cioè che si comportano in maniera equivalente agli effetti esterni. L'idea è, come sempre, quella di prendere circuiti arbitrariamente complessi e ridurli a circuiti equivalenti relativamente semplici.

1.2.1 Rappresentazione a parametri Z

Una coppia di **induttori mutuamente accoppiati** rappresenta effettivamente un circuito a due porte, in quanto la stessa corrente entra e esce da ogni induttore (cioè si formano due porte).



Avevamo rappresentato questi circuiti come:

$$\begin{cases} \dot{V}_1 = j\omega L_1 \dot{I}_1 + j\omega M \dot{I}_2 \\ \dot{V}_2 = j\omega L_2 \dot{I}_2 + j\omega M \dot{I}_1 \end{cases}$$

Analogamente, decidiamo di rappresentare un circuito a due porte attraverso equazioni che legano la tensione su una porta alla corrente su entrambe le porte:

$$\begin{cases} \dot{V}_1 = \overline{z_{11}} \dot{I}_1 + \overline{z_{12}} \dot{I}_2 \\ \dot{V}_2 = \overline{z_{21}} \dot{I}_1 + \overline{z_{22}} \dot{I}_2 \end{cases}$$

Per esprimere queste relazioni in forma più compatta, possiamo sfruttare il calcolo matriciale:

$$\dot{V} = \overline{Z} \dot{I}$$

dove $\dot{V}$ e $\dot{I}$ sono matrici:

$$\begin{pmatrix} \dot{V}_1 \\ \dot{V}_2 \end{pmatrix} = \overline{Z} \begin{pmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 \end{pmatrix}$$

e $\overline{Z}$ sarà l'**impedenza** in forma matriciale:

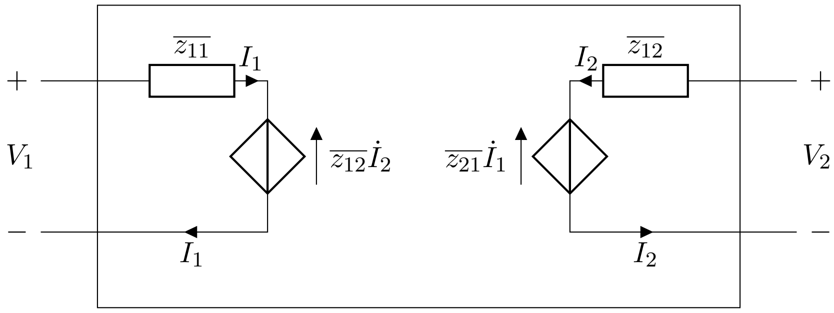
$$\overline{Z} = \begin{pmatrix} \overline{z_{11}} & \overline{z_{12}} \\ \overline{z_{21}} & \overline{z_{22}} \end{pmatrix}$$

Date le equazioni riportate sopra che legano voltaggio a corrente, possiamo ricavare il valore di ogni componente di $\overline{Z}$ come:

$$\overline{Z} = \begin{pmatrix} \overline{z_{11}} = \frac{\dot{V}_1}{\dot{I}_1}\Big|_{\dot{I}_2=0} & \overline{z_{12}} = \frac{\dot{V}_1}{\dot{I}_2}\Big|_{\dot{I}_1=0} \\ \overline{z_{21}} = \frac{\dot{V}_2}{\dot{I}_1}\Big|_{\dot{I}_2=0} & \overline{z_{22}} = \frac{\dot{V}_2}{\dot{I}_2}\Big|_{\dot{I}_1=0} \end{pmatrix}$$

dove la notazione $a\Big|_b$ significa "a quando b".

Si ha, attraverso queste relazioni, che basta misurare la tensione sulle porte in due stati ($\dot{I}_1 = 0$ e $\dot{I}_2 = 0$) per ricavare completamente i parametri $\overline{Z}$ del circuito, e ricavare quindi un circuito equivalente del tipo:



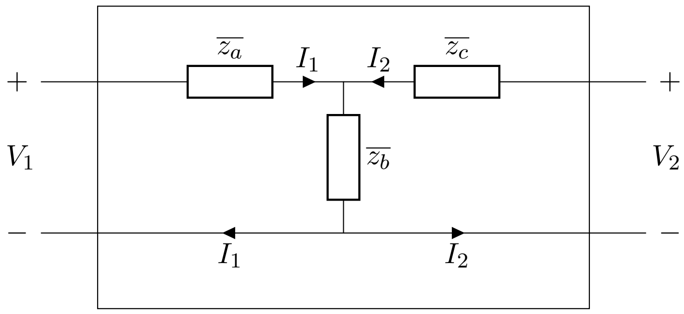
dove si inseriscono i termini di impedenza $\overline{z_{11}}$ e $\overline{z_{22}}$ semplicemente come impedenze in serie alle porte 1 e 2, e i termini "associati" $\overline{z_{12}}$ e $\overline{z_{21}}$ come generatori di tensione pilotati (che generano, appunto, cadute di tensione pilotate, rispettivamente in $\dot{I}_2$ per la porta 1 e in $\dot{I}_1$ per la porta 2).

Il metodo naturale di analisi per questo circuito è correnti di maglia, che possiamo applicare alle due porte per poi eguagliare con la matrice delle impedenze:

$$\begin{cases} \dot{V}_1 = \overline{z_{11}}\dot{I}_1 + \overline{Z_{12}}\dot{I}_2 \\ \dot{V}_2 = \overline{z_{22}}\dot{I}_2 + \overline{Z_{21}}\dot{I}_1 \end{cases}$$

che combacia con quanto definito sulla rappresentazione in impedenza.

In particolare, nel caso $\overline{z_{12}} = \overline{z_{21}}$ si dice che la rete è **reciproca** e si può formare il circuito equivalente come:



Anche qui, applicando correnti di maglia, si ha:

$$\begin{cases} \dot{V}_1 = \overline{z_a}\dot{I}_1 + \overline{z_b}\left(\dot{I}_1 + \dot{I}_2\right) = (\overline{z_a} + \overline{z_b})\dot{I}_1 + \overline{z_b}\dot{I}_2 \\ \dot{V}_2 = \overline{z_c}\dot{I}_2 + \overline{z_b}\left(\dot{I}_1 + \dot{I}_2\right) = (\overline{z_c} + \overline{z_c})\dot{I}_2 + \overline{z_b}\dot{I}_1 \end{cases}$$

che rappresenta la rete reciproca, ponendo:

$$\overline{Z} = \begin{pmatrix} \overline{z_a} + \overline{z_b} & \overline{z_b} \\ \overline{z_b} & \overline{z_b} + \overline{z_c} \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \overline{z_a} = \overline{z_{11}} - \overline{z_{12}} = \overline{z_{11}} - \overline{z_{21}} \\ \overline{z_b} = \overline{z_{12}} = \overline{z_{21}} \\ \overline{z_c} = \overline{z_{22}} - \overline{z_{12}} = \overline{z_{22}} - \overline{z_{21}} \end{cases}$$

Notiamo che, per circuiti a due porte generici, non è detto che i potenziali dei morsetti di uscita di entrambe le porte siano allo stesso potenziale: per modellizzare questo comportamento si usa una *mutua induttanza ideale*, cioè un **trasformatore ideale**.

1.2.2 Rappresentazione a parametri Y

Nella rappresentazione di un circuito a due porte possiamo parametrizzare, anzichè l'impedenza $\overline{Z}$, l'ammettenza $\overline{Y}$: se avevamo espresso il comportamento del circuito come $\begin{pmatrix} \dot{V}_1 \\ \dot{V}_2 \end{pmatrix} = \overline{Z} \begin{pmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 \end{pmatrix}$, infatti, possiamo trovare l'inverso:

$$\begin{pmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 \end{pmatrix} = \overline{Z}^{-1} \begin{pmatrix} \dot{V}_1 \\ \dot{V}_2 \end{pmatrix}$$

dove la matrice $\overline{Z}^{-1} = \overline{Y}$ è effettivamente l'**ammettenza** in forma matriciale del circuito:

$$\overline{Y} = \begin{pmatrix} \overline{y_{11}} & \overline{y_{12}} \\ \overline{y_{21}} & \overline{y_{22}} \end{pmatrix}$$

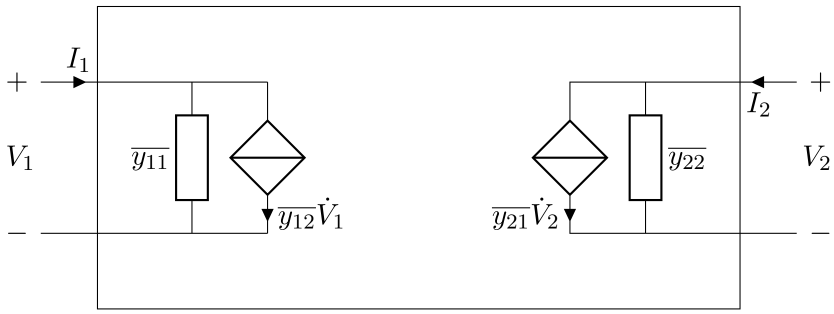
Da cui il sistema lineare:

$$\begin{cases} \dot{I}_1 = \overline{y_{11}}\dot{V}_1 + \overline{y_{12}}\dot{V}_2 \\ \dot{I}_2 = \overline{y_{21}}\dot{V}_1 + \overline{y_{22}}\dot{V}_2 \end{cases}$$

Date le equazioni riportate sopra, possiamo ricavare il valore di ogni componente di $\overline{Y}$ come:

$$\overline{Y} = \begin{pmatrix} \overline{y_{11}} = \frac{\dot{I}_1}{\dot{V}_1}\Big|_{\dot{V}_2=0} & \overline{y_{12}} = \frac{\dot{I}_1}{\dot{V}_2}\Big|_{\dot{V}_1=0} \\ \overline{y_{21}} = \frac{\dot{I}_2}{\dot{V}_1}\Big|_{\dot{V}_2=0} & \overline{y_{22}} = \frac{\dot{I}_2}{\dot{V}_2}\Big|_{\dot{V}_1=0} \end{pmatrix}$$

Possiamo quindi disporre un circuito equivalente come segue:

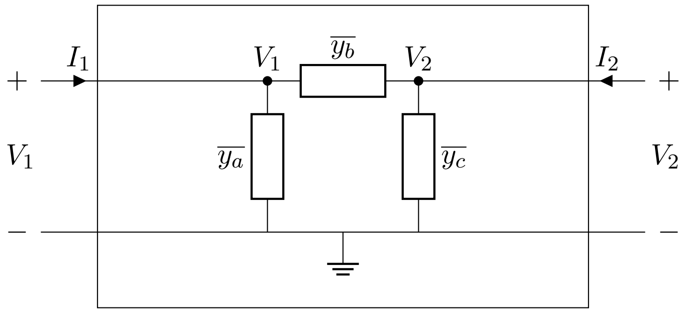


dove stavolta si inseriscono i termini di ammettenza $\overline{y_{11}}$ e $\overline{y_{22}}$ semplicemente ammettenze in parallelo alle porte 1 e 2, e i termini "associati" $\overline{y_{12}}$ e $\overline{y_{21}}$ come generatori di corrente pilotati. Possiamo analizzare questo circuito considerando le corrente sui rami impedenza e generatore di entrambe le porte, da cui si ottiene:

$$\begin{cases} \dot{I}_1 = \overline{y_{11}}\dot{V}_1 + \overline{y_{12}}\dot{V}_2 \\ \dot{I}_2 = \overline{y_{22}}\dot{V}_2 + \overline{y_{21}}\dot{V}_1 \end{cases}$$

che combacia con quanto definito sulla rappresentazione in ammettenza.

In particolare, vediamo il caso **reciproco** $\overline{y_{11}} = \overline{y_{21}}$:



Il metodo naturale di analisi per questo circuito è tensioni di nodo, che possiamo applicare alle due porte per poi eguagliare con la matrice delle ammettenze. Prendiamo i due nodi in alto come $\dot{V}_1$ e $\dot{V}_2$, il nodo in basso come terra, e scriviamo le equazioni:

$$\begin{cases} \dot{I}_1 = (\overline{y_a} + \overline{y_b})\dot{V}_1 - \overline{y_b}\dot{V}_2 \\ \dot{I}_2 = (\overline{y_b} + \overline{y_c})\dot{V}_2 - \overline{y_b}\dot{V}_1 \end{cases}$$

che rappresenta la rete reciproca, ponendo:

$$\overline{Y} = \begin{pmatrix} \overline{y_a} + \overline{y_b} & -\overline{y_b} \\ -\overline{y_b} & \overline{y_b} + \overline{y_c} \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \overline{y_a} = \overline{y_{11}} + \overline{y_{12}} \\ \overline{y_b} = -\overline{y_{12}} = -\overline{y_{21}} \\ \overline{y_c} = \overline{y_{22}} + \overline{y_{12}} \end{cases}$$

Notiamo che ancora che il circuito più generale si ottiene disaccoppiando i potenziali sul ramo in basso attraverso un trasformatore ideale.