1 Lezione del 06-11-24

1.1 Potenza su induttori mutuamente accoppiati

Abbiamo visto che i componenti come i resistori, hanno potenza **attiva**, cioè contribuiscono alla parte reale della potenza complessa, mentre componenti come condensatori e induttori hanno potenza **reattiva**, cioè contribuiscono alla parte complessa della potenza complessa. Vediamo adesso se la potenza su due induttori mutuamente accoppiati è attiva o reattiva.

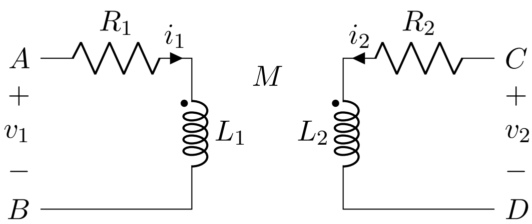
Iniziamo col dire che la formula che conoscevamo per la mutua induttanza, assunte correnti concordi sui contrassegni, cioè:

$$\dot{(V)} = j\omega L_1 \dot{I}_1 + j\omega M \dot{I}_2$$

può anche esprimersi attraverso l'ammettenza $\overline{Z}$, con $\dot{V} = \overline{Z}\dot{I}$, cioè:

$$\dot{V} = \overline{Z}\dot{I}_1 + \overline{Z}\dot{I}_2$$

Prendiamo quindi una coppia di induttori **reali** (quindi in serie ad una resistenza) mutuamente accoppiati:



Potremo esprimere la potenza complessa come:

$$\overline{S} = V_1 \dot{I}_1^{\,*} + V_2 \dot{I}_2^{\,*} = \left(R_1 \dot{I}_1 + j\omega L_1 \dot{I}_1 + j\omega M \dot{I}_2\right) \cdot \dot{I}_1^{\,*} + \left(R_2 \dot{I}_2 + j\omega L_2 \dot{I}_2 + j\omega M \dot{I}_1\right) \cdot \dot{I}_2^{\,*}$$

$$= R_1 I_1^2 + j\omega L_1 I_1^2 + j\omega M \dot{I}_2 \cdot \dot{I}_1^{\,*} + R_2 I_2^2 + j\omega L_2 I_2^2 + j\omega M \dot{I}_1 \cdot \dot{I}_2^{\,*}$$

$$= R_1 I_1^2 + R_2 I_2^2 + j\omega L_1 I_1^2 + j\omega L_2 I_2^2 + j\omega M (\dot{I}_2 \cdot \dot{I}_1^{\,*} + \dot{I}_2 \cdot \dot{I}_1^{\,*})$$

Da cui notiamo i primi quattro termini essere reali, ergo l'unico termine con possibile componente complessa è $j\omega M(\dot{I}_2 \cdot \dot{I}_1^{\,*} + \dot{I}_2 \cdot \dot{I}_1^{\,*})$. Possiamo dire che:

$$\dot{I}_1 = I_1 e^{j\phi_1}, \quad \dot{I}_2 = I_2 e^{j\phi_2}$$

da cui:

$$\overline{S} = ... + j\omega M \left(I_2 e^{j\phi_2} \cdot I_1 e^{-j\phi_1} + I_1 e^{j\phi_1} \cdot I_2 e^{-j\phi_2}\right) = ... + j\omega M I_1 I_2 \left(e^{j(\phi_2 - \phi_1)} + e^{j(\phi_1 - \phi_2)}\right)$$

$$= ... + j\omega M I_1 I_2 \left(\cos(\phi_2 - \phi_1) + j\sin(\phi_2 - \phi_1) + \cos(\phi_1 - \phi_2) + j\sin(\phi_1 - \phi_2)\right)$$

E quindi dalle proprietà di seni e coseni di argomento negato:

$$\overline{S} = R_1 I_1^2 + R_2 I_2^2 + j\omega L_1 I_1^2 + j\omega L_2 I_2^2 + 2j\omega M I_1 I_2 \cos(\phi_2 - \phi_2)$$

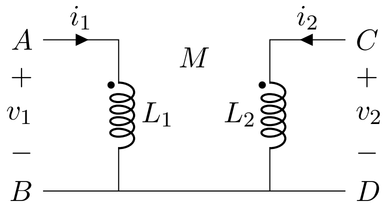
Da cui si ha che potenza attiva e reattiva sono rispettivamente:

$$P = R_1 I_1^2 R_2 I_2^2, \quad jQ = j\omega L_1 I_1^2 + j\omega L_2 I_2^2 + 2j\omega M I_1 I_2 \cos(\phi_1 - \phi_2)$$

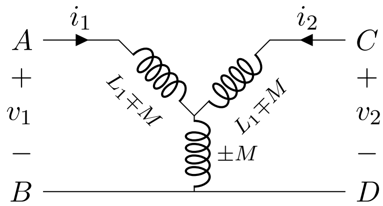
e quindi la potenza sulle mutue induttanze reali non ha solo componente reattiva (come nelle comuni induttanze), ma anche attiva.

1.2 Circuiti equivalenti a induttori mutuamente accoppiati

Possiamo creare circuiti equivalenti, usando undattori non mutuamente accoppiati, quando si hanno induttori mutuamente accoppiati con nodi in comune:



In questo caso si può usare l'equivalente a stella, selto un nuovo nodo centrale O:

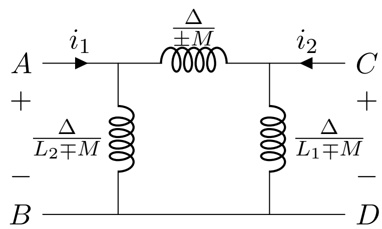


dove i segni superiori si usano nel caso di contrassegni coincidenti rispetto al nodo centrale, e i segni inferiori si usano nel caso di contrassegni opposti.

Possiamo verificare che il circuito è effettivamente equivalente calcolando le cadute di potenziale, ad esempio sul lato sinistro del circuito:

$$\dot{V}_1 = j\omega(L_1 - M)\dot{I}_1 + j\omega M(\dot{I}_1 + \dot{I}_2) = j\omega L_1 \dot{I}_1 - j\omega M \dot{I}_1 + j\omega M \dot{I}_1 + j\omega M \dot{I}_2 = j\omega L \dot{I}_1 + j\omega M \dot{I}_2$$

Un montaggio alternativo, ma comunque equivalente, è quello a π:



Dove $\Delta = L_1 L_2 - M^2$, assunto $L_1 L_2 \neq M^2$ (con $M = \sqrt{L_1 L_2}$, siamo in condizioni di mutua induttanza *ideale*). Come prima, i segni superiori significano induttanze con contrassegni concordi in direzione del polo comune, e i segni inferiori significano induttanze con contrassegni discordi.