

# Fisica I

Luca Seggiani

28 maggio 2024

## 1 Introduzione al corso

*"Che cos'è la fisica?"* La fisica è la disciplina che si occupa della descrizione quantitativa dei fenomeni naturali. Fondamentale alla fisica è il metodo scientifico, che si applica attraverso:

- Osservazione del fenomeno
- Realizzazione di misure
- Formulazione di un'ipotesi
- Sperimentazione dell'ipotesi
- Formalizzazione di una teoria (o formulazione di una nuova ipotesi)

per la realizzazione di misure, è necessaria la scelta di apposite:

## 2 Unità di misura

Le unità di misura permettono di confrontare grandezze fisiche a campioni scelti prima della misurazione. Si possono fare le seguenti distinzioni:

### **Grandezze scalari e vettoriali**

- Grandezze scalari: grandezze che possono essere rappresentate da semplici numeri reali (e.g. temperatura, massa, tempo...)
- Grandezze vettoriali: grandezze che vengono rappresentate da vettori sul piano o nello spazio (e.g. spazio, accelerazione, forza...)

### Grandezze intensive ed estensive

- Grandezze intensive: grandezze che non dipendono dall'estensione fisica di un corpo ma dalle proprietà delle sostanze che lo compongono
- Grandezze estensive: grandezze che dipendono dall'estensione fisica di un corpo

### Grandezze fondamentali e derivate

- Grandezze fondamentali: grandezze che vengono definite indipendentemente da altre
- Grandezze derivate: grandezze che si definiscono sulla base delle grandezze fondamentali

Le grandezze fondamentali (e le loro unità di misura nel S.I.) sono:

Grandezza	U. D. M.	Simbolo
Spazio	Metro	m
Massa	Kilogrammo	kg
Tempo	Secondo	s
Temperatura	Kelvin	K
Intensità di corrente	Ampere	A
Intensità luminosa	Candela	Ca
Quantità di materia	Mole	mol

## 3 Analisi dimensionale

In fisica le equazioni devono essere dimensionalmente coerenti, ovvero le grandezze espresse in entrambi i lati dell'equazione devono essere omogenee fra di loro (avere la stessa unità di misura). Per verificare la correttezza di un'equazione si può effettuare l'analisi dimensionale, ad esempio:

$$x = \frac{1}{2}at^2$$

(spostamento  $x$  di un corpo sottoposto ad accelerazione  $a$  in tempo  $t$ ) diventerà:

$$[L] = \frac{[L]}{[t^2]}[t^2]$$

che è chiaramente vero.

(Nota: i coefficienti dei termini non figurano nell'analisi dimensionale)

## 4 Errori, precisione ed accuratezza

L'errore misura la discrepanza fra la grandezza effettiva che vogliamo misurare e il valore restituito dallo strumento di misura utilizzato. Esempio: un righello con riportati centimetri e millimetri restituirà valori del tipo:  $15.2\text{cm} \pm 1\text{mm}$ , ovvero 15 centimetri e 2 millimetri con un'errore di 1 millimetro.

Di una misurazione ottenuta da uno strumento possiamo conoscere la precisione e l'accuratezza:

- Accuratezza: L'accuratezza di una misura rappresenta la differenza (quindi l'errore) fra la misura e la grandezza effettiva
- Precisione: La precisione di una misura è data dal numero delle sue cifre significative

Le comuni operazioni algebriche modificano la precisione di una misura in tale modo:

- Somma / Differenza: La precisione di una somma o una differenza è data dal numero minore di posizioni decimali occupate degli operandi
- Prodotto / Rapporto: La precisione di un prodotto o di un rapporto è data dal numero minore di cifre significative degli operandi

## 5 Sistemi di riferimento

Criterio generale per la scelta di un sistema di riferimento è la semplicità (ad esempio, è conveniente scegliere sistemi con basi fra loro ortogonali e levogiri). Vediamo alcuni esempi di sistemi di riferimento comuni su una retta, su curve parametriche, sul piano e nello spazio:

## 6 Sistemi di riferimento monodimensionali

Su una determinata retta  $r$ , è sufficiente scegliere un'origine  $O$  e una direzione di scorrimento della retta. Avremo quindi:

$$P(x)$$

sulla singola coordinata  $x$  per indicare qualsiasi punto su  $r$ . Il concetto si estende facilmente a curve parametriche di qualsiasi tipo, assumendo la nostra coordinata (adesso  $t$ ) come fattore di scorrimento sulla curva ( $C$ ):

$$C(t) = (C_x(t), C_y(t), C_z(t))$$

## 7 Sistemi di riferimento bidimensionali

Su un piano possiamo definire i due sistemi di riferimento comuni:

- Coordinate cartesiane: individuo univocamente ogni punto con una coppia ordinata  $(x, y)$  (ascissa e ordinata)
- Coordinate polari: allo stesso modo, individuo ogni punto con l'angolo  $\theta$  all'origine e la distanza  $\rho$  dalla stessa.

Si può agilmente passare da coordinate cartesiane a polari e viceversa in questo modo:

- Polari  $\rightarrow$  cartesiane: notato che  $\rho$  è l'ipotenusa di un triangolo rettangolo di angolo  $\theta$ , ho;

$$x = \rho \cos \theta \quad y = \rho \sin \theta$$

- Cartesiane  $\rightarrow$  polari: ottengo  $\rho$  con pitagora:

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$

e  $\theta$  applicando:

$$\theta = \arctan \frac{y}{x}$$

ricordando il quadrante di appartenenza di  $(x, y)$  (l'inversione di  $\tan(x)$  comporta la restrizione del dominio a  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ )

## 8 Sistemi di riferimento tridimensionali

Come per i sistemi bidimensionali, in 3 dimensioni abbiamo:

- Coordinate cartesiane: individuo univocamente ogni punto con una tripla ordinata  $(x, y, z)$  (asse x, y, e z)
- Coordinate cilindriche: come per le coordinate polari, definisco un  $r > 0$  distanza dall'origine, un'angolo  $\theta$  sull'asse z, e un'elevazione  $z$  sempre sull'asse z, ottenendo la tripla  $(r, \theta, z)$ . Posso convertire agevolmente in coordinate cartesiane attraverso:

$$x = r \cos \theta \quad y = r \sin(\theta) \quad z = z$$

e viceversa:

$$z = z \quad r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \theta = \arctan \frac{y}{x}$$

- Coordinate sferiche: questa volta scelgo due angoli,  $\phi \in [0, 2\pi]$  sull'asse  $z$  e  $\theta \in [0, \pi]$  sulla perpendicolare del segmento che forma angolo  $\phi$  con l'asse  $x$  (che deciderà l'elevazione del punto), e sempre una distanza  $r$  dall'origine. Questa volta dovrò usare le formule di conversione:

$$z = r \cos \theta \quad x = r \sin \theta \cos \phi \quad y = r \sin \theta \sin \phi$$

e viceversa:

$$\cos \theta = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad \tan \phi = \frac{y}{x}$$

Si può notare che questo sistema è lo stesso delle coordinate geografiche, sebbene con intervalli di angoli differenti:

- la longitudine corrisponde a  $\phi$  con  $\phi \in [-180^\circ, 180^\circ]$ , mentre la latitudine corrisponde a  $\theta$  con  $\theta \in [-90^\circ, 90^\circ]$

## 9 Sommatorie ed integrali di vettori

Notiamo brevemente la differenza fra le forme:

$$(1) \quad \left| \sum_{i=1}^n \vec{l}_i \right| \quad \text{e} \quad (2) \quad \sum_{i=1}^n |\vec{l}_i|$$

con  $\vec{l}_i$  un'insieme di vettori in un determinato spazio. Se la forma (1) tiene conto solamente della somma finale dei vettori (prendi e.g. la posizione di un corpo traslato dai suddetti), la forma (2) restituisce invece la somma di ogni singolo vettore, qualsiasi la sua direzione. Allo stesso modo, su profili (prendo  $y_1$ ) non discreti:

$$(3) \quad \left| \int_{y_1} d\vec{l} \right| \quad \text{e} \quad (4) \quad \int_{y_1} |d\vec{l}|$$

la forma (3) restituisce la sola somma integrale dei differenziali  $d\vec{l}$ , mentre la forma (4) considera lo spostamento (in qualsiasi direzione) totale di  $\vec{l}$ .

## 10 Prodotto scalare e prodotto vettoriale

Si riportano adesso le formule per il prodotto scalare e il prodotto vettoriale ottenute sfruttando i versori  $\hat{i}$ ,  $\hat{j}$  e  $\hat{k}$ . prenderemo in esame due vettori,  $a = (a_x, a_y, a_z)$  e  $b = (b_x, b_y, b_z)$ .

### Prodotto scalare

$$\begin{aligned}(\hat{i}A_x + \hat{j}A_y + \hat{k}A_z) \cdot (\hat{i}B_x + \hat{j}B_y + \hat{k}B_z) = \\(\hat{i})^2 A_x B_x + \hat{i}\hat{j}A_x B_y + \hat{i}\hat{k}A_x B_z + \\ \hat{j}\hat{i}A_y B_x + (\hat{j})^2 A_y B_y + \hat{j}\hat{k}A_y B_z + \\ \hat{k}\hat{i}A_z B_x + \hat{k}\hat{j}A_z B_y + (\hat{k})^2 A_z B_z\end{aligned}$$

visto che il prodotto scalare di due vettori perpendicolari (quindi di due versori diversi fra di loro) vale 0, e che il prodotto scalare di un vettore per se stesso vale se stesso al quadrato (su vettori di modulo 1), possiamo riscrivere come:

$$A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$$

che è la definizione di prodotto scalare.

### Prodotto vettoriale

$$\begin{aligned}(\hat{i}A_x + \hat{j}A_y + \hat{k}A_z) \times (\hat{i}B_x + \hat{j}B_y + \hat{k}B_z) = \\(\hat{i})^2 A_x B_x + \hat{i}\hat{j}A_x B_y + \hat{i}\hat{k}A_x B_z + \\ \hat{j}\hat{i}A_y B_x + (\hat{j})^2 A_y B_y + \hat{j}\hat{k}A_y B_z + \\ \hat{k}\hat{i}A_z B_x + \hat{k}\hat{j}A_z B_y + (\hat{k})^2 A_z B_z\end{aligned}$$

di nuovo, visto che il prodotto vettoriale fra due vettori paralleli vale 0, e il prodotto vettoriale fra due versori unitari vale quanto il loro perpendicolare secondo la regola della mano destra in un sistema di riferimento levogiro, possiamo riscrivere come:

$$\hat{i}(A_y B_z - A_z B_y) + \hat{j}(A_z B_x - A_x B_z) + \hat{k}(A_x B_y - A_y B_x)$$

che è la definizione di prodotto vettoriale sui versori  $\hat{i}$ ,  $\hat{j}$  e  $\hat{k}$ . Si noti il fattore  $\hat{j}$ , che ha un segno negativo (distribuito sui fattori). Questo fatto viene dal sistema dalle proprietà del prodotto vettoriale su un sistema levogiro. Si ricorda inoltre una mnemonica per il prodotto vettoriale come determinante della matrice:

$$\begin{pmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{pmatrix}$$

## 11 Concetto di campo

In fisica definiamo un campo come una funzione multivariabile dallo spazio o dal piano ad un campo scalare o ad uno spazio vettoriale, rispettivamente (nello spazio):

- Campo scalare:

$$T = T(x, y, z)$$

- Campo vettoriale:

$$V = V(x, y, z) = V_x(x, y, z)\hat{i} + V_y(x, y, z)\hat{j} + V_z(x, y, z)\hat{k}$$

## 12 Introduzione alla meccanica classica

La meccanica classica è la branca della fisica che si occupa dello studio di corpi statici e in movimento, con dimensioni superiori a quelle delle particelle subatomiche e velocità non comparabili a quella della luce, (compito rispettivamente della meccanica quantistica e relativistica). Possiamo ulteriormente dividere la meccanica classica in:

- Cinematica: descrizione della traiettoria dei corpi in funzione del tempo, senza tener conto delle cause dei loro moti
- Dinamica: studio delle cause dei moti dei corpi (quindi delle forze)
- Statica: studio dell'equilibrio dei corpi in quiete.

### Il punto materiale

Il punto materiale è un'approssimazione che adottiamo nel caso in cui l'estensione dei corpi di cui parliamo sia irrilevante alla situazione che vogliamo analizzare. Un punto materiale non ha quindi estensione, ma solamente una posizione ed una certa massa (da cui la dicitura "punto di massa, *mass point*").

**Moto rettilineo** Definisco la posizione  $x$  di un corpo su una retta in funzione del tempo come:

$$x(t)$$

che prende il nome di *legge oraria* del moto. Una variazione di spazio (quindi uno spostamento) da  $x(t_2)$  a  $x(t_1)$  punti distinti nel tempo sarà quindi:

$$\Delta x = x(t_1) - x(t_2)$$

A questo punto la variazione di tempo fra  $t_1$  e  $t_2$ , noto  $t_2 > t_1$ , sarà:

$$\Delta t = t_2 - t_1$$

e potrò definire la velocità media:

$$v_x = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x(t_2) - x(t_1)}{t_2 - t_1}$$

si nota che questo corrisponde di fatto a  $\tan \alpha$  con  $\alpha$  uguale all'angolo formato dalla tangente del grafico della legge oraria in un dato punto  $x_0 \in [x(t_1), x(t_2)]$ .

Si definisce poi la traiettoria di un punto materiale come il "*Luogo geometrico dei punti occupati nel tempo da un punto materiale*", ergo tutti i punti che la mia legge oraria  $x(t)$  restituisce in un dato intervallo di  $t$ .

Prendiamo adesso in esempio la legge oraria di un moto rettilineo uniformemente accelerato:

$$x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a_0 t^2$$

considerando le unità di misura di  $x_0$ ,  $v_0$  e  $a_0$ , ovvero m,  $\frac{\text{m}}{\text{s}}$  e  $\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ , posso studiare la coerenza dimensionale:

$$[L] + \frac{[L]}{[T]}[T] + \frac{[L]}{[T]^2}[T]^2 = [L] + [L] + [L]$$

che è dimensionalmente coerente.

Adottiamo adesso alcuni degli strumenti del calcolo per ottenere da una curva continua della legge oraria (magari ottenuta dal curve-fitting di dati sperimentali), il grafico della velocità del punto materiale. Si renderà necessario un passaggio da velocità media a velocità *istantanea*, definita come la derivata della legge oraria  $x(t)$  in un dato punto  $x_0$ . Formalmente, presa la precedente definizione di velocità media possiamo dire:

$$v_x = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} \rightarrow \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t}$$

ovvero il limite del rapporto incrementale in un punto  $x_0 = x(t)$  su variazioni infinitesimali di  $t$ . Questo si può inoltre esprimere come:

$$v(t_0) = \left. \frac{dx}{dt} \right|_{t=t_0}$$

e si nota inoltre che in fisica è comune la notazione  $\dot{x}$  per le derivate.



## 13 Accelerazione media e istantanea nel moto rettilineo

Poniamoci il problema di come definire l'accelerazione media e istantanea nel moto rettilineo. Ricaviamo in modo simile a ciò che avevamo fatto per la velocità media:

$$a_x = \frac{\Delta v_x}{\Delta t} = a_m = \frac{v_x(t + \Delta t) - v_x(t)}{\Delta t}$$

e quindi istantanea:

$$a_x^i = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} a_x = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v_x(t + \Delta t) - v_x(t)}{\Delta t} = \frac{d^2 x}{dt^2}$$

chiaramente, l'accelerazione istantanea di un corpo non è altro che la derivata seconda della posizione di quel corpo in funzione del tempo. Si ricorda infine la notazione  $\ddot{x}$  per le derivate seconde.

Vediamo un esempio. presa la legge oraria:

$$v_x(t) = \frac{dx}{dt} = v_0 + a_0 t$$

la velocità non è costante, ma varia linearmente col tempo. Possiamo calcolare quindi l'accelerazione media come:

$$a_m = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1}, \quad [a_m] = \frac{m}{s^2}$$

### Ricavare l'accelerazione dalla legge oraria

Se conosciamo la posizione di un corpo in funzione del tempo secondo la legge oraria  $x(t)$ , possiamo allora determinare, come prima affermato, velocità e accelerazione:

$$v = \frac{dx(t)}{dt}, \quad a = \frac{dv(t)}{dt}$$

**Ricavare la legge oraria dall'accelerazione** Possiamo svolgere l'operazione inversa attraverso l'operazione di integrale. Noto che accelerazione e velocità sono:

$$v = \frac{dx(t)}{dt}, \quad a = \frac{dv(t)}{dt}, \quad v dt = dx$$

e ho quindi per la velocità:

$$\int_{t_0}^t a_x dt' = \int_{t_0}^t \frac{dv_x}{dt'} dt' = v_x - v_{0x}, \quad v_x = v_{0x} + \int_{t_0}^t a_x dt'$$

e per lo spostamento:

$$\int_{t_0}^t v_x dt' = \int_{t_0}^t \frac{dx}{dt'} dt' = \int_{x(t_0)}^{x(t)} dx = x(t) - x(t_0)$$
$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^t v_x dt' = x(t_0) + \int_{t_0}^t v_x dt'$$

## 14 Moto rettilineo uniforme

Il moto rettilineo uniforme è un tipo di moto dove la velocità è costante e l'accelerazione nulla. Dalle formule precedenti, abbiamo:

$$a_x(t) = \frac{dv_x}{dt} = 0, \quad \text{da} \quad v_x = \frac{dx}{dt} = v_{0x} \quad v_{0x} dt = dx$$
$$\int_{t_0}^t v_{0x} dt' = \int_{t_0}^t \frac{dx}{dt'} dt' = \int_{x(t_0)}^{x(t)} dx = x(t) - x(t_0)$$
$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^t v_{0x} dt' = x(t_0) + v_0(t - t_0)$$

da cui ricaviamo l'ultima formula, legge oraria del moto rettilineo uniforme.

## 15 Moto uniformemente accelerato

Dalle stesse formule precedenti, possiamo ricavare:

$$\begin{aligned}\int_{t_0}^t a_x dt' &= \int_{t_0}^t a dt' = a(t - t_0) = \int_{t_0}^t \frac{dv_x}{dt'} dt' = v_x - v_{0x} \\ v_x &= v_{0x} + a(t - t_0) \\ \int_{t_0}^t v_x dt' &= \int_{t_0}^t [v_{0x} + a(t' - t_0)] dt' = \int_{t_0}^t \frac{dx}{dt'} dt' = \int_{x(t_0)}^{x(t)} dx = x(t) - x(t_0) \\ x(t) &= x(t_0) + v_{0x}(t - t_0) + \frac{1}{2}a(t - t_0)^2\end{aligned}$$

Ricordiamo inoltre la formula utile:

$$\begin{aligned}t &= \frac{v - v_0}{a} \\ x &= x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2 = x_0 + v_0 \frac{v - v_0}{a} + \frac{1}{2}a\left(\frac{v - v_0}{a}\right)^2 \\ x - x_0 &= [...] = \frac{v^2 - v_0^2}{2a}\end{aligned}$$

## 16 Formule del moto circolare

Riportiamo brevemente la formula del vettore  $\vec{OP}$ , raggio di angolo  $\theta$  di una circonferenza di raggio  $r$ :

$$\vec{OP} = (r \cos \theta, r \sin \theta), \quad \hat{OP} = (\cos \theta, \sin \theta)$$

troviamo adesso il vettore con la coda corrispondente alla punta di  $\vec{OP}$  tangente alla circonferenza. Iniziando dalla definizione di prodotto scalare:

$$\begin{aligned}\vec{A} \cdot \vec{B} &= |\vec{A}| |\vec{B}| \cos \theta = 0 \Rightarrow \text{ortogonale} \\ \vec{A} &= (a, b), \quad \vec{B} = (-b, a) \quad \text{o} \quad \vec{B} = (b, -a)\end{aligned}$$

## 17 Moto dei gravi

Studiamo adesso il moto dei corpi in caduta libera. Prendiamo  $g$  (accelerazione di gravità) di  $9.81 \frac{m}{s^2}$  (misurata sul  $45^\circ$  parallelo). Potremo allora definire la velocità e la legge oraria di un corpo in caduta libera come:

$$v(t) = -gt, \quad y(t) = -\frac{1}{2}gt^2$$

Poniamo di voler trovare la posizione spaziotemporale della pallina nel suo momento di quota massima. Sapendo che a quota massima  $v = 0$ :

$$v = at + v_0, \quad 0 = t^* = -\frac{v_0}{a}$$

$$y = y_0 + v_0t + -\frac{1}{2}gt^2, \quad y_{max} = y_0 + v_0t^* + \frac{1}{2}g(t^*)^2$$

infine, cerchiamo il tempo impiegato per tornare nella posizione di partenza :

$$t^* = \frac{-2v_0}{a}$$

## 18 Moto di un punto materiale sul piano e nello spazio

Definiamo una traiettoria (o supporto di una curva)  $r(t)$  sulle diverse componenti  $x$ ,  $y$  e  $z$ :

$$\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)) = \vec{OP}(t), \quad O, P \in \vec{r}(t)$$

a questo punto posizione, velocità ed accelerazione di un punto materiale in moto su tale traiettoria saranno vettori tridimensionali nello spazio (o bidimensionali sul piano).

### Vettore spostamento

Individuiamo due momenti nel tempo  $t_1$  e  $t_2$ , e ricaviamo da  $\vec{r}(t)$  due posizioni lungo la curva ( $r_1$  e  $r_2$ ). A questo punto lo spostamento di un punto materiale in moto sulla curva che si sposta dal primo al secondo punto sarà:

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}(t_2) - \vec{r}(t_1) = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$$

oppure, definito un certo intervallo di tempo  $\Delta t = t_2 - t_1$ :

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)$$

## Velocità

Iniziamo col definire la velocità media, proprio come era stato fatto per il moto rettilineo uniforme:

$$\vec{V}_m = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{t_2 - t_1} = \frac{\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t}$$

e la velocità istantanea:

$$\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \vec{V}_m = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t}$$

vediamo che sulle singole componenti, la velocità  $\vec{V}_m$  sarà:

$$\vec{V} = (V_x, V_y, V_z) = \left( \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt} \right) = (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$$

Si noti che geometricamente la velocità calcolata in un certo punto è la tangente a  $\vec{r}(t)$  in quel punto.

## Accelerazione

Definiamo, come prima, accelerazione media:

$$\vec{a}_m = \frac{\Delta \vec{V}}{\Delta t} = \frac{\vec{V}(t_2) - \vec{V}(t_1)}{t_2 - t_1}$$

ed istantanea:

$$\vec{a}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{v}(t + \Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t} = \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2}$$

sulle singole componenti:

$$\vec{a}(t) = \frac{dv_x}{dt} \hat{i} + \frac{dv_y}{dt} \hat{j} + \frac{dv_z}{dt} \hat{k} = \frac{d^2 x}{dt^2} \hat{i} + \frac{d^2 y}{dt^2} \hat{j} + \frac{d^2 z}{dt^2} \hat{k} = \ddot{x} \hat{i} + \ddot{y} \hat{j} + \ddot{z} \hat{k}$$

È fondamentale notare che, fosse  $|v_1| = |v_2|$ , non è per forza detto che  $a = 0$ ! L'accelerazione infatti sarà influenzata sia dalla variazione longitudinale di velocità del mio punto materiale che dalla sua variazione in quanto a direzione. Poniamo i due versori  $\hat{u}_T$  e  $\hat{u}_N$ , rispettivamente nella direzione tangente e radiale del mio punto materiale. Avremo allora:

$$\vec{v} = v \hat{u}_T, \quad \vec{a} = \frac{dv}{dt} \hat{u}_T + v \frac{d\hat{u}_T}{dt}$$

$\hat{u}_T$  dipende dal tempo, ma

$$\frac{d(\hat{u}_T \cdot \hat{u}_T)}{dt} = 0 = 2\hat{u}_T \cdot \frac{d(\hat{u}_T)}{dt} \Rightarrow \frac{d\hat{u}_T}{dt} \perp \hat{u}_T$$

ovvero  $a_n$ , accelerazione lungo la direzione radiale (o normale, ma comunque stabilita secondo un sistema di riferimento levogiro) della curva è perpendicolare all'accelerazione longitudinale (o tangente)  $a_t$ . Vediamo poi:

$$\vec{a} = a_t \hat{u}_T + a_n \hat{u}_N$$

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt} \hat{u}_T + v \frac{d\hat{u}_T}{dt}$$

da cui si nota che:

- $a_t$  è legata alla variazione del modulo della velocità,
- $a_n$  alla variazione della sua direzione.

Si dice che  $a_n$  è l'accelerazione centripeta diretta verso l'interno della traiettoria. Inoltre, approssimando un qualsiasi intorno della curva con un segmento di circonferenza, vediamo che l'accelerazione centripeta è diretta proprio verso il centro di tale circonferenza. Dal punto di vista delle forze, l'accelerazione centripeta è proprio ciò che serve a mantenere il corpo lungo la traiettoria descritta da  $\vec{r}(t)$  (ed è l'unica forza / accelerazione in gioco! Non esiste alcuna forza centrifuga, è solamente apparente).

Riassumiamo le formule trovate finora:

$$\vec{a} = \vec{a}_n + \vec{a}_t$$

$$a_t = |\vec{a}_t| = \frac{d|\vec{v}|}{dt}, \quad a_n = |\vec{a}_n| = \frac{v^2}{r}$$

e in totale:

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_n^2 + a_t^2}$$

Per concludere l'argomento, osserviamo come, invece di partire dalla definizione di spostamento derivando fino all'accelerazione, possiamo procedere per la strada inversa: partendo dall'accelerazione e integrando fino allo spostamento. Partiamo quindi da accelerazione a velocità:

$$\vec{a} = (a_x, a_y, a_z), \quad t > t_0$$

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = dv_x = a_x dt = v_x(t) - v_x(t_0) = \int_{v_{x0}}^{v_x} dv_x = \int_{t_0}^t a_x dt$$

E torniamo da velocità a spostamento:

$$v_x(t) = v_x(t_0) + \int_{t_0}^t a_x(t') dt'$$

potrò procedere analogamente sulle altre componenti, utilizzando opportunamente i versori  $\hat{i}, \hat{j}$  e  $\hat{k}$ .

## 19 Moti piani su coordinate polari

Avendo visto la definizione di sistema di coordinate polari, con  $(R, \theta)$  raggio e angolo rispetto all'asse delle ascisse, definiamo:

$$\vec{R} = (x, y, 0) = (R \cos \theta, R \sin \theta, 0)$$

$$\hat{R} = (x/R, y/R, 0) = (\cos \theta, \sin \theta, 0)$$

$$\vec{\theta} = (-\sin \theta, \cos \theta, 0)$$

Generalmente,  $\vec{R}$  individuerà un certo punto su una circonferenza di raggio  $R$ , e  $\vec{\theta}$  sarà la direzione della sua velocità (tangenziale alla circonferenza).

### Moto piano vario

Nel caso di moto piano vario, quindi non ben definito su una circonferenza o qualsiasi altra funzione analitica, avremo banalmente:

$$\theta = \theta(t), \quad R = R(t)$$

### Moto piano circolare uniforme non uniforme

Nel caso almeno il luogo su cui avviene il moto sia una circonferenza, potremo stabilire:

$$\theta = \theta(t), \quad R = a$$

Vediamo ora più nel dettaglio un moto circolare a velocità costante.

## 20 Moto piano circolare uniforme

Nel caso il moto avvenga su una circonferenza e a velocità costante, potremo definire completamente velocità e posizione:

$$\theta = \omega_0 t + \theta_0, \quad R = a$$

si noti che qua e nel caso precedente  $a$  è il raggio della nostra circonferenza.

### Velocità angolare

Definiamo la "posizione angolare", cioè semplicemente l'angolo, come un vettore nella direzione  $\hat{z}$  di modulo proporzionale all'angolo stesso:

$$\vec{\theta} = (0, 0, \theta) = \theta \hat{z}$$

a questo punto la velocità angolare (misurata in  $\frac{\text{rad}}{\text{s}}$ , o visto che l'angolo è una grandezza adimensionale (rapporto di due lunghezze (parentesi innestate)), semplicemente  $\text{s}^{-1}$ ) non sarà altro che:

$$\vec{\omega} = \frac{d\theta}{dt} = (0, 0, \dot{\theta}) = \dot{\theta} \hat{z}$$

### Velocità tangenziale

Definiamo ora la velocità tangenziale, ovvero quella effettiva del punto materiale lungo la tangente alla circonferenza:

$$\begin{aligned}\vec{v} &= \frac{d\vec{R}}{dt} = \frac{d}{dt}(R \cos \theta, R \sin \theta, 0) = (-R\dot{\theta} \sin \theta, R\dot{\theta} \cos \theta, 0) \\ &= R\dot{\theta}(-\sin \theta, \cos \theta, 0) = \dot{\theta}R\hat{\theta} = \omega R\hat{\theta}\end{aligned}$$

dove  $\hat{\theta}$  è il versore tangente alla traiettoria del punto materiale. Vediamo inoltre rispetto al valore assoluto:

$$|\vec{v}| = \omega R$$

e rispetto alla componente radiale:

$$v_r = \dot{R} = 0$$

ovvero il raggio non cambia (ed era infatti costante da ipotesi). Riportiamo quindi il vettore finale, in coordinate polari:

$$\vec{v} = (v_r, v_\theta, v_z) = (0, \omega R, 0), \quad \vec{v} \perp \vec{R}$$

dove è inoltre riportato il fatto che la velocità è perpendicolare al vettore posizione sulla circonferenza  $\vec{R}$  in qualsiasi punto.

Dimostriamo adesso un fatto importante riguardo alla velocità, conseguenza dell'asse scelto per  $\vec{\omega}$ , usando il prodotto vettoriale:

$$\begin{aligned}\vec{v} &= \vec{\omega} \times \vec{R} \\ &= \dot{\theta}\hat{z} \times \vec{R} = \dot{\theta}\hat{z} \times (\hat{x}R \cos \theta + \hat{y}R \sin \theta) \\ &= \dot{\theta}R(\hat{z} \times \hat{x} \cos \theta + \hat{z} \times \hat{y} \sin \theta) = \dot{\theta}R(\hat{y} \cos \theta - \hat{x} \sin \theta) \\ &= \omega R\hat{\theta}\end{aligned}$$

### Accelerazione centripeta

Basandoci proprio su quest'ultima equivalenza, studiamo il valore dell'accelerazione centripeta che mantiene il nostro punto materiale sulla circonferenza:

$$\begin{aligned}\vec{a} &= \frac{d(\vec{\omega} \times \vec{R})}{dt} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{R} + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{R}}{dt} \\ &= \vec{\omega} \times \frac{d\vec{R}}{dt} = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{R})\end{aligned}$$



Notiamo come il primo termine della somma ottenuta nella terza equazione si annulli in quanto la derivata della velocità angolare  $\omega$ , costante, sarà nulla. Risolviamo quindi l'ultimo termine usufruendo della relazione:

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B}(\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{C}(\vec{A} \cdot \vec{B})$$

ottenendo:

$$\begin{aligned} \vec{\omega}(\vec{\omega} \cdot \vec{R}) - \vec{R}(\vec{\omega} \cdot \vec{\omega}) &= -\omega^2 R \hat{R} \\ -\omega &= -\frac{v^2}{r^2}, \quad -\omega^2 R \hat{R} = \frac{-v^2 R}{R^2} \hat{R} = -\frac{V^2}{R} \hat{R} \end{aligned}$$

notiamo che l'ultima e la terzultima formula, egualmente valide, hanno segno negativo: questo perchè, scelto un riferimento levogiro sulla circonferenza, il versore  $\hat{R}$  viene ad orientarsi verso l'esterno della circonferenza, mentre per definizione la forza centripeta è diretta verso il centro della circonferenza.

### Periodo e pulsazione

Infine, riprendiamo brevemente le nozioni di periodo e pulsazione applicate al moto circolare uniforme. Diciamo che la velocità angolare  $\omega$  può essere chiamata anche pulsazione. A questo punto, trovato un periodo  $T$ , avremo:

$$VT = |\omega|RT = 2\pi R \Rightarrow T = \frac{2\pi}{|\omega|}$$

ricordando anche la frequenza  $v$ , definita come:

$$v = \frac{1}{|T|}$$

## 21 Moto circolare non uniforme

Data la velocità:

$$\vec{V} = \omega R \hat{\theta}$$

determiniamo l'accelerazione:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d(\vec{\omega} \times \vec{R})}{dt} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{R} + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{R}}{dt} = \vec{\alpha} \times \vec{R} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{R})$$

dove  $\alpha$  è l'accelerazione angolare:

$$\vec{\alpha} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \Rightarrow \alpha = \dot{\omega} = \ddot{\theta}$$

$$\vec{\alpha} = (\alpha_r, \alpha_\theta, \alpha_z) = (0, 0, \ddot{\theta}) = \ddot{\theta} \hat{z}$$

$$\vec{a} = \vec{\alpha} \times \vec{R} - \omega^2 R \hat{R} = \alpha \hat{z} \times \vec{R} - \omega^2 R \hat{R} = \alpha R \hat{\theta} - \omega^2 R \hat{R}$$

da cui:

$$\vec{a} = (-\omega^2 R, \alpha R)$$

In sostanza, l'accelerazione angolare ha 2 componenti:

- Componente radiale centripeta:

$$\omega^2 R$$

- Componente tangenziale dipendente dall'accelerazione angolare

$$\alpha R$$

A questo punto potremo ritrovare la velocità angolare come:

$$\omega(t) = \omega_{t_0} + \int_{t_0}^t \alpha(t') dt'$$

## 22 Moto piano vario

Vediamo adesso il caso generale dove sia la velocità angolare che la distanza dalla'origine sono funzioni di  $t$ :

### Velocità

Posto  $|\vec{R}| = R(t)$  e  $\vec{\omega} = \omega(t)$ :

$$\vec{V} = \hat{\theta} V_\theta + \hat{R} V_R = \vec{\omega} \times \vec{R} + \hat{R} \frac{d|\vec{R}|}{dt} = \dot{R} \hat{R} + \vec{\omega} \times \vec{R}$$

Ovvero la velocità ha componenti polari:

$$V_R = \dot{R}, \quad V_\theta = \omega R$$

Ciò si dimostra da:

$$\begin{aligned} \vec{V} &= \frac{d\vec{R}}{dt} = \frac{d}{dt}(R \cos \theta, R \sin \theta, 0) = (-R\dot{\theta} \sin \theta, R\dot{\theta} \cos \theta, 0) + (\dot{R} \cos \theta, \dot{R} \sin \theta, 0) \\ &= \dot{R} \hat{R} + \omega R \hat{\theta} = \dot{R} \hat{R} + R \omega \hat{z} \times \hat{R} = \dot{R} \hat{R} + R \vec{\omega} \times \hat{R} \end{aligned}$$

possiamo inoltre dimostrare che, riguardo al solo versore  $\hat{R}$ :

$$\frac{d\vec{R}}{dt} = \frac{d(R)}{dt} = \hat{R} \frac{dR}{dt} + R \frac{d\hat{R}}{dt} = \hat{R} \dot{R} + R \frac{d\hat{R}}{dt}$$

da cui;

$$\frac{d\hat{R}}{dt} = \hat{\theta}\dot{\theta} = \vec{\omega} \times \hat{R}$$

### Accelerazione

Poniamoci adesso il problema di descrivere l'accelerazione di un moto sul piano qualsiasi, descritto da coordinate polari:

$$\begin{aligned}\vec{a} &= \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d(\vec{\omega} \times \vec{R} + \dot{R}\hat{R})}{dt} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{R} + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{R}}{dt} + \ddot{R}\hat{R} + \dot{R}\frac{d\hat{R}}{dt} \\ &= \vec{\alpha} \times \vec{R} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{R} + \dot{R}\hat{R}) + \ddot{R}\hat{R} + \dot{R}\vec{\omega} \times \hat{R}\end{aligned}$$

usiamo la stessa formula per il prodotto vettoriale vista prima:

$$\vec{a} = \vec{\alpha} \times \vec{R} - \omega^2 \vec{R} + \ddot{R}\hat{R} + 2\dot{R}\vec{\omega} \times \hat{R}$$

notando le solite relazioni coi prodotti vettoriali, ovvero:

$$\vec{\alpha} \times \vec{R} = \alpha R \hat{z} \times \hat{R} = \alpha R \hat{\theta}, \quad \vec{\omega} \times \hat{R} = \omega \hat{z} \times \hat{R} = \omega \hat{\theta}$$

potremo riscrivere come:

$$\vec{a} = (-\omega^2 R + \ddot{R})\hat{R} + (\alpha R + 2\dot{R}\omega)\hat{\theta}$$

ricordando che  $\hat{R}$  è il versore in direzione radiale, e  $\hat{\theta}$  quello in direzione tangenziale alla traiettoria del nostro punto materiale.

## 23 Moto dei proiettili

Studiamo adesso il moto dei proiettili, ovvero corpi lanciati con una certa velocità iniziale  $\vec{v}_0$  e da lì in poi soggetti all'accelerazione di gravità  $g$ . Il moto avviene nel piano individuato da  $g$  e  $\vec{v}_0$ , e può essere diviso nelle componenti:

$$\begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = -g \end{cases} \quad \begin{cases} v_x = v_{0x} = \text{const.} \\ v_y = v_{0y} - gt \end{cases} \quad \begin{cases} x = x_0 + v_{0x}t \\ y = y_0 + v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2 \end{cases}$$

troviamo adesso dei risultati interessanti riguardo al moto dei proiettili. Possiamo innanzitutto determinare:

### Traiettoria

Eliminiamo  $t$  dalle equazioni della posizione ricavando  $t$  dalla prima e sostituendolo nella seconda:

$$x = x_0 + v_{0x}t, \quad t = \frac{x - x_0}{v_{0x}}$$

$$y = y_0 + v_{0y}\left(\frac{x - x_0}{v_{0x}}\right) - \frac{1}{2}g\left(\frac{x - x_0}{v_{0x}}\right)^2$$

impostiamo un sistema di riferimento cartesiano centrato sul punto da dove viene lanciato il proiettile, ponendo quindi  $x_0$  e  $y_0$  coordinate iniziali uguali a zero. Inoltre, definiamo  $\vec{v}_0$  in coordinate polari, ovvero in funzione dell'angolo di lancio  $\theta$  e del suo modulo  $v_0$ :

$$x_0, y_0 = 0, \quad \vec{v}_0 = (v_0 \cos \theta, v_0 \sin \theta)$$

ottenendo l'equazione finale della traiettoria:

$$y = \tan \theta x - \frac{gx^2}{2(v_0 \cos \theta)^2}$$

Determiniamo adesso la distanza percorsa dal proiettile, ovvero la:

### **Gittata**

Cerchiamo il punto dove il proiettile tocca terra, ponendo la seconda equazione dello spostamento a 0:

$$0 = v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2, \quad \frac{1}{2}gt^2 = v_{0y}t$$

da cui, escludendo la soluzione triviale  $t = 0$  (sarebbe il punto da cui lo lanciamo, che ovviamente coincide con terra), abbiamo:

$$t = 2\frac{v_{0y}}{g}$$

sostituendo nella prima equazione:

$$x = v_{0x}t, \quad x = 2\frac{v_{0x}v_{0y}}{g}$$

Notiamo che per la proprietà trigonometrica:

$$\sin 2x = 2 \cos x \sin x$$

$v_{0x}v_{0y}$  vale:

$$\frac{v_0^2 \sin(2\theta)}{2}$$

da cui la formula finale per la gittata:

$$\frac{v_0^2 \sin(2\theta)}{g}$$

da cui è tra l'altro ovvio che la gittata massima si otterrà ad un angolo  $\theta = 45^\circ$  ( $\sin 2\frac{\pi}{4} = 1$ ).

## 24 Relatività galileiana

Consideriamo due sistemi di riferimento. Il primo,  $S$ , detto riferimento stazionario o di laboratorio, è "relativamente" in quiete. Il secondo,  $S'$ , è in moto rettilineo uniforme con una certa velocità  $v_0$ , detta velocità di trascinamento. Al tempo  $t = 0$  le origini di  $S$  e  $S'$  coincidono. Vale allora, che per un qualsiasi vettore  $\vec{r}'$  individuato da  $S'$ , lo stesso vettore nel riferimento  $S$  sarà:

$$\vec{r} = \vec{r}' + \vec{v}_0 t$$

Andiamo a derivare questa espressione (trasformazione di Galileo):

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{v}_0$$

Derivando nuovamente avremo:

$$\vec{a} = \vec{a}'$$

ovvero l'accelerazione non cambia al cambiare del sistema di riferimento (questo finché i sistemi di riferimento considerati sono inerziali, ovvero in quiete o in moto rettilineo uniforme). Si dice che l'accelerazione è un invariante della relatività galileiana.

Diciamo inoltre che nelle formule appena riportate,  $\vec{v}$  prende il nome di velocità assoluta,  $\vec{v}'$  di velocità relativa, e come già detto,  $\vec{v}_0$  di velocità di trascinamento.

### Riferimenti non inerziali

Esaminiamo il caso in cui il nostro sistema di riferimento  $SM$  (sistema mobile) si muove di velocità  $\vec{v}_t$  e accelerazione costante  $\vec{a}_t$  rispetto al sistema di laboratorio  $SL$ . La relazione fra le posizioni diventa:

$$\vec{r} = \vec{r}' + \vec{r}_{OO'}(t)$$

che deriveremo per ottenere la velocità:

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{v}_t, \quad \vec{v}_t = \frac{d\vec{r}_{OO'}}{dt}$$

e l'accelerazione (notiamo che non è più invariante):

$$\vec{a} = \vec{a}' + \vec{a}_t, \quad \vec{a}_t = \frac{d^2\vec{r}_{OO'}}{dt^2}$$

con  $\vec{r}_{OO'}$  uguale al vettore spostamento dall'origine in  $SL$  all'origine in  $SM$ . Ricordiamo poi che i sistemi di riferimento non sono sistemi di coordinate: più propriamente sono sistemi di coordinate dotati di una certa misura dello spazio (un metro) e del tempo (un orologio).

## 25 Introduzione alla dinamica

Introduciamo ora le leggi fondamentali della dinamica. Innanzitutto possiamo dire che queste leggi si applicano nei casi in cui:

- Le velocità prese in considerazione sono molto più piccole di quelle della luce ( $\vec{V} < c$ );
- Le dimensioni dei corpi non sono in ordini di grandezza subatomici;
- I campi gravitazionali sono deboli.

nel primo e nel secondo caso, avremo bisogno rispettivamente della relatività ristretta e generale. Nel terzo caso invece ci servirà la meccanica quantistica.

### Definizione di Forza

La forza è un'interazione fra due corpi, che può essere:

- **A distanza**, ovvero attraverso le cosiddette forze fondamentali o di campo (gravitazionali, elettriche, magnetiche, ecc...);
- **Per contatto**, ovvero le forze che si studiano nella meccanica (attrito, forza elastica, ecc...). Derivano da manifestazioni macroscopiche delle interazioni elettromagnetiche.

Le forze sono grandezze fisiche vettoriali (hanno punto d'applicazione, direzione modulo e verso). Si misurano staticamente con il dinamometro.

**Prima legge di Newton** Il primo principio della dinamica, detto anche prima legge di Newton o legge d'inerzia, riguarda l'assenza di interazioni (forze):

Esiste almeno un sistema di riferimento in cui un corpo non soggetto a forze (oppure soggetto ad un sistema di forze a risultante nulla  $\sum \vec{F} = \vec{0}$ ) prosegue nel suo stato di quiete o di moto rettilineo uniforme.

in simboli:

$$\sum \vec{F} = \vec{0} \Rightarrow \vec{a} = \vec{0}$$

### **Sistemi di riferimento inerziali**

Un sistema di riferimento inerziale è un sistema in cui vale il principio d'inerzia (e quindi  $\vec{F} = m\vec{a}$ ). I sistemi di riferimento inerziali formano una classe di sistemi (godono di riflessività, simmetria e transitività, ergo tutti i sistemi in movimento fra di loro con velocità costante sono inerziali).

### **Seconda legge di Newton**

Il secondo principio della dinamica, detto anche seconda legge di Newton o legge fondamentale della dinamica, mette in relazione massa, forza e accelerazione di un corpo:

$$\sum \vec{F} = m\vec{a}$$

dove  $m$  è la massa, una grandezza scalare, proprietà intrinseca della composizione di un corpo.

### **Terza legge di Newton**

Il terzo principio della dinamica, detto anche terza legge di Newton o principio di azione-reazione, stabilisce che ogni forza esercitata su di un corpo è seguita da una reazione, ovvero una forza con lo stesso modulo e direzione in verso opposto. Un esempio classico della terza legge di Newton è la forza vincolante espressa da ogni corpo in collisione con un'altro corpo, che ad esempio permette al terreno di impedirci di sprofondare verso il centro della terra sotto l'effetto della gravità.

### **Le quattro interazioni fondamentali**

Adesso può essere conveniente esaminare, almeno a livello superficiale, le quattro interazioni (forze) fondamentali individuate ad oggi dalla comunità scientifica:

- **Forza gravitazionale**

La gravità è la forza che attrae fra di loro corpi come la Terra e il sole, o ancora i corpi sulla superficie terrestre alla Terra stessa. Di gran lunga è la forza più debole fra le quattro fondamentali. La comprensione più completa che ne abbiamo è quella come espressione della geometria

spazio-tempo secondo la relatività generale.

La forza di gravità si applica fra due corpi nella direzione della retta che li congiunge, è direttamente proporzionale alle loro masse e inversamente proporzionale alla distanza fra i due:

$$\vec{F}_g = \frac{m_1 m_2}{R^2} G \hat{R}, \quad G = 6.67 \times 10^{-11} \frac{\text{Nm}^2}{\text{kg}^2}$$

dove  $\hat{R}$  è il versore nella direzione della distanza fra i due corpi. Chiamamente i corpi sono attratti fra di loro quanto più sono vicini e le loro masse sono grandi. Inoltre, la forza gravitazionale a raggio di azione infinito (seppur insignificante su distanze abbastanza grandi).

- **Forza elettromagnetica**

La forza elettromagnetica dà origine ai legami chimici, alle proprietà di atomi e molecole, alla luce nonché a gran parte delle forze di contatto studiate nella meccanica classica. La forza elettromagnetica si applica fra cariche: la carica elettrica, misurata in Coulomb (C), ne determina infatti il verso. Cariche concordi si respingono, cariche discordi si attraggono. In simboli:

$$\vec{F}_c = \frac{q_1 q_2}{R^2} k \hat{R}$$

dove  $k$  è la costante di Coulomb, ovvero:

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9 \times 10^9 \frac{\text{Nm}^2}{\text{C}^2}$$

Come per la forza gravitazionale, la forza elettromagnetica ha raggio di azione infinito. La differenza però sta nel verso, che può essere sia attrattivo (come la gravità) che repulsivo.

- **Forza nucleare (forte)**

La forza nucleare entra in gioco su distanze estremamente piccole, inferiori ai  $10^{-15}\text{m}$ . La si può osservare nei nuclei di atomi, formati da protoni carichi positivamente, che però non si disperdono a causa della forza elettromagnetica proprio grazie all'azione della forza nucleare che li mantiene uniti. La forza nucleare determina le interazioni fra particelle elementari come quark e gluoni.

- **Forza nucleare debole**

La forza nucleare debole è responsabile delle forze che entrano in gioco nei meccanismi di decadimento nucleare. Ha un range estremamente limitato, di  $10^{-18}\text{m}$ .



### Forze di contatto

Vediamo quali sono i tipi principali di forze di contatto fra corpi, o fra corpi e fluidi:

- Fra corpi rigidi
  - Forze vincolari
    - \* normali fra superfici
    - \* ganci o fili inestensibili
    - \* cerniere
    - \* ...
  - Attriti (paralleli alla superficie di contatto):
    - \* statico
    - \* dinamico
- Fra corpi deformabili:
  - Forze elastiche
  - Forze anelastiche
- Fra un corpo solido e un fluido
  - Attrito viscoso
  - Forze di pressione

### Forza gravitazionale

Riprendendo la legge di gravitazione universale:

$$\vec{F}_m = \frac{mM_t}{r^2}G$$

con  $M_t$  massa della Terra ( $6 \times 10^{24}$ ) e  $m$  massa dell'oggetto in questione, possiamo dire:

$$\vec{a} = \frac{M_t}{R^2}G$$

in accordo con:

$$\vec{F}_m = m\vec{a}$$

Chiaramente, nei pressi della Terra  $\vec{a}$  sarà uguale a  $g$ , ovvero l'accelerazione gravitazionale terrestre. La forza  $F_m$  prende il nome di forza peso (da non confondersi con la massa!). La forza peso è diretta approssimativamente verso

il centro della terra e vale circa  $9.81 \cdot m$  per un corpo di massa  $m$ , sulla superficie terrestre attorno al  $45^\circ$  parallelo.

### **Forze normali**

Vediamo adesso tutte quelle forze vincolari che i corpi esercitano l'uno sull'altro perpendicolarmente alle loro superfici. Le forze normali si verificano solamente in caso di compressione. Notiamo che la forza normale esercitata da un corpo che sorregge un'altro corpo non è sempre uguale al peso: ad esempio, il corpo sorretto potrebbe da parte sua subire altre forze, con una componente parallela alla forza peso ma diretta verso l'alto o verso il basso, che andrebbero rispettivamente a diminuire o decrementare la reazione vincolare.

### **Piano inclinato**

Notiamo adesso come la forza normale non è necessariamente diretta verso l'asse verticale. Prendiamo in esempio un piano inclinato di angolo  $\theta$ . Potremo allora dividere la forza di gravità che agisce sul corpo in due componenti: quella parallela e quella perpendicolare alla superficie del piano. Chiamandole rispettivamente  $F_{\parallel}$  e  $F_{\perp}$  potremo dire:

$$F_{\parallel} = F_g \sin \theta, \quad F_{\perp} = -F_g \cos \theta$$

In questo caso, il piano inclinato compenserà con una reazione vincolare soltanto la componente  $F_{\perp}$ , mentre la componente  $F_{\parallel}$  resterà invariata nella direzione parallela al piano.

### **Contatto diretto**

Due oggetti di massa  $m_1$  e  $m_2$ , in contatto diretto e su cui viene applicata una forza (e che quindi si spingono fra di loro), possono essere considerati dal punto di vista della forza come un unico oggetto di massa  $m_1 + m_2$ , da cui l'accelerazione complessiva:

$$a = \frac{F}{m_1 + m_2}$$

Possiamo a questo punto trovare le due forze di reazione  $R_1$  e  $R_2$  che i corpi applicano l'uno sull'altro:

$$R_1 = \frac{F m_1}{m_1 + m_2}, \quad R_2 = \frac{F m_2}{m_1 + m_2}$$

Notiamo inoltre che  $R_1 = F - R_2$  e  $R_2 = F - R_1$ , ovvero:

$$F = R_1 + R_2$$

### **Funi e corde**

Consideriamo funi e corde come vincoli monodimensionali privi di massa inerziale e inestensibili. Trasferiscono la forza, detta tensione ( $T$ ) fra i loro estremi.

## 26 Forze di contatto

La forza di attrito si esprime parallelamente alle superfici di contatto fra i corpi. Si tratta di un'interazione di contatto, mediata dalle interazioni elettromagnetiche fra le superfici dei corpi. Si oppone al moto dei corpi, e ha valore variabile rispetto al loro stato di quiete o moto:

- **Attrito statico:** è la forza che mantiene fermo un'oggetto in quiete. In questo caso la forza di attrito ha valore massimo.
- **Attrito dinamico:** si esprime quando un corpo si muove ("scivola") su una superficie scabra, e agisce nella direzione opposta a quella del movimento.

In generale, con  $F_s$  forza di attrito statico,  $F_d$  forza di attrito dinamico, e  $N$  una forza applicata ad un corpo, avremo che l'equilibrio si raggiunge con:

$$F_s \leq N\mu_s \quad F_d = N\mu_d$$

$\mu_s$  e  $\mu_d$  sono rispettivamente i coefficienti di attrito statico e dinamico, compresi fra circa 0.05 e 1.5. In genere,  $\mu_d < \mu_s$ , e le due grandezze non dipendono dall'area di contatto. La forza di attrito si esprime in direzione parallela a quella del moto, proporzionalmente alla forza normale che il corpo applica sulla superficie.

### Attrito sul piano inclinato in discesa

Su un piano scabro, con un corpo in quiete, abbiamo che:

$$f_s = \mu_s N, \quad N = mg \cos \theta$$

Perchè il corpo sia in quiete, avremo bisogno che:

$$mg \sin \theta = f_s = \mu_s N = \mu_s mg \cos \theta$$

da cui si ricava che:

$$\mu_s = \tan \theta$$

ovvero il coefficiente di attrito statico corrisponde alla tangente dell'angolo di pendenza massimo in cui il corpo è in grado di restare fermo senza scivolare. Nel caso il corpo sia in movimento, avremo allora che:

$$mg \sin \theta > f_d, \quad \tan \theta > \mu_s$$

da cui potremo ricavare l'accelerazione sull'asse parallelo al piano:

$$a_x = g(\sin \theta - \mu_d \cos \theta)$$

## 27 Resistenza fluidodinamica

Un fluido (quindi un liquido o gas) esercita una forza di resistenza  $\vec{R}$  su di un oggetto che si muove immerso in esso. La direzione di  $\vec{R}$  è opposta alla direzione  $\vec{v}$  del moto dell'oggetto relativo al fluido. Il suo modulo dipende invece dalle caratteristiche del fluido, dalla forma dell'oggetto immerso e dalla sua velocità.

### Proporzionalità diretta

Generalmente, in un fluido possiamo applicare una qualche proporzionalità diretta del tipo:

$$\vec{R} = -\beta \vec{v}$$

Ad esempio, volessimo modellizzare il moto di una particella in un fluido, con resistenza proporzionale alla velocità, avremo l'equazione differenziale:

$$m \frac{dv}{dt} = -\beta v + mg \Rightarrow \frac{dv}{dt} = -\frac{\beta}{m}v + g$$

la cui omogenea associata è:

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{\beta}{m}v$$

L'omogenea è a variabili separabili, e abbiamo quindi:

$$\frac{dv}{v} = -\frac{\beta}{m}dt \Rightarrow \int \frac{dv}{v} = \int -\frac{\beta}{m}dt \Rightarrow \log v = -\frac{\beta}{m}t + A, \quad v(t) = Ae^{-\frac{\beta}{m}t}$$

La soluzione generale si ottiene imponendo la condizione di regime (velocità costante):

$$\frac{dv}{dt} = 0 \Rightarrow 0 = -\frac{\beta}{m}v_l + g, \quad v_l = \frac{mg}{\beta}$$

da cui ricaviamo la soluzione globale:

$$v(t) = Ae^{-\frac{\beta}{m}t} + v_l = Ae^{-\frac{\beta}{m}t} + \frac{mg}{\beta}$$

A questo punto possiamo imporre le nostre condizioni iniziali. Assumiamo che la velocità del corpo all'istante  $t = 0$  sia nulla:

$$0 = A + \frac{mg}{\beta}, \quad A = -\frac{mg}{\beta}$$

da cui otteniamo:

$$v(t) = -\frac{mg}{\beta}e^{-\frac{\beta}{m}t} + \frac{mg}{\beta} = \frac{mg}{\beta}(1 - e^{-\frac{\beta}{m}t})$$

### Proporzionalità quadratica

Nel caso di corpi non piccoli che si muovono a velocità elevate, la resistenza  $\vec{R}$  è circa proporzionale a  $v^2$  invece che a  $v$ , secondo la formula:

$$\vec{R} = \frac{1}{2}C\rho Av^2$$

dove  $C$  è il coefficiente di attrito (resistenza aerodinamica),  $\rho$  la densità del fluido, e  $A$  l'area efficace (la sezione trasversale nella direzione del moto). Possiamo già da questa forza ricavare la velocità limite:

$$ma = mg - \frac{1}{2}C\rho Av^2$$
$$mg - \frac{1}{2}C\rho Av_l^2 = 0 \Rightarrow v_l = \sqrt{\frac{2mg}{CA\rho}}$$

## 28 Moto circolare uniforme sul piano orizzontale

Vediamo ora le forze in gioco in un moto circolare uniforme. Abbiamo che l'accelerazione centripeta è:

$$|a_r| = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r$$

Di conseguenza, perchè si verifichi un moto circolare, significherà che esiste una forza:

$$F = m \cdot \frac{v^2}{r} = m \cdot \omega^2 r$$

detta forza centripeta. N.B.: La forza centripeta non è un particolare tipo di forza, ma solamente una forza qualsiasi che si comporta come tale.

### Pendolo conico

Prendiamo adesso in esempio un pendolo, formato da una corda di lunghezza  $L$  fissata ad un punto fisso, posta ad angolo  $\theta$  rispetto all'asse verticale, con una massa  $m$  fissata ad un'estremità. La massa si muove di moto circolare uniforme su una certa orbita di raggio  $r$  con velocità costante  $\omega$ . Conviene allora stabilire un sistema di riferimento cilindrico centrato sul centro dell'orbita, con  $\hat{k}$  ( $z$ ) orientato nella direzione opposta alla forza peso. Avremo allora che la tensione  $T$  della corda lungo l'interno della circonferenza e lungo l'asse verticale è:

$$\begin{cases} T \sin \theta = m\omega^2 r \\ T \cos \theta = mg \end{cases}.$$

Sostituiamo  $r$  nella prima equazione, notando che:

$$r = L \sin \theta$$

ottenendo:

$$T \sin \theta = m\omega^2 L \sin \theta \Rightarrow T = m\omega^2 L$$

Dalla seconda equazione otteniamo invece:

$$T = \frac{mg}{\cos \theta}$$

eguagliando  $T$  nelle due equazioni otteniamo:

$$m\omega^2 L = \frac{mg}{\cos \theta} \Rightarrow \omega^2 = \frac{mg}{mL \cos \theta}, \quad \omega = \sqrt{\frac{g}{L \cos \theta}}$$

da cui notiamo tra l'altro che la velocità del pendolo non dipende dalla massa del corpo.

### **Conca sferica**

Impostiamo un problema sostanzialmente analogo: quello di un corpo che ruota su una conca sferica di raggio  $r$ . Notiamo che la reazione vincolare della conca è esattamente identica a quella della tensione della corda nel caso precedente, solo nella direzione opposta. Possiamo allora dire che come prima:

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{L \cos \theta}}$$

### Veicoli in curva

Esaminiamo adesso un'automobile che percorre una curva di raggio  $r$  a velocità tangenziale  $v$  costante, sfruttando la componente radiale (scelto un sistema di riferimento cilindrico) della forza d'attrito statico degli pneumatici (sia il coefficiente di attrito statico  $\mu_s$ ). La forza centripeta necessaria per percorrere la curva sarà:

$$f_s = ma_r = m \frac{v^2}{r}$$

e la forza di attrito statico sarà invece:

$$f_a = \mu_s N = \mu_s mg$$

Ponendo la disuguaglianza:

$$m \frac{v^2}{r} \leq \mu_s mg \Rightarrow v \leq \sqrt{\mu_s gr} = v_{crit}$$

otteniamo la velocità critica  $v_{crit}$ , al di sopra della quale l'attrito degli pneumatici non è più in grado di mantenere l'automobile sulla sua traiettoria circolare, e di conseguenza si verifica uno sbandamento.

### Veicoli in curva sopraelevata

Un caso migliore sarà quello della percorrenza di una curva sopraelevata, ovvero a sezione longitudinale approssimativamente parabolica. Curve del genere si possono trovare negli autodromi, per permettere alle automobili di raggiungere, a parità di aderenza, velocità più elevate. Impostiamo l'accelerazione dell'automobile, con  $N$  reazione vincolare della superficie della curva:

$$\begin{cases} ma_z = 0 = N \cos \theta - mg \\ ma_r = -m \frac{v^2}{r} = -N \sin \theta \end{cases}.$$

da cui:

$$\frac{N \sin \theta}{N \cos \theta} = \frac{mv^2}{rmg} = \frac{v^2}{rg} \Rightarrow \tan \theta = \frac{v^2}{rg}, \quad \theta = \tan^{-1} \frac{v^2}{rg}$$

Trovo  $\theta$ , l'angolo necessario a percorrere una curva di raggio  $r$  a velocità  $v$ . A  $\theta$  troppo grandi, la componente orizzontale  $ma_r$  è troppo grande, con conseguente scivolamento verso l'interno della curva a causa della gravità. In caso contrario,  $ma_r$  è troppo piccola, e si verifica uno sbandamento.

### Veicoli in curva sopraelevata con attrito

Vediamo adesso il caso in cui una vettura percorre una curva sopraelevata di angolo  $\theta$  e raggio  $r$ , a velocità  $v$ , con coefficiente di attrito statico degli pneumatici sulla strada di  $\mu_s$ . Chiamando  $f_s$  la forza di attrito:

$$f_s = -\mu_s mg \sin \theta$$

$$\begin{cases} ma_z = 0 = N \cos \theta - mg - f_s \sin \theta \\ ma_r = -m \frac{v^2}{r} = -f_s \cos \theta - N \sin \theta \end{cases}.$$

visto che  $N = -mg \sin \theta$ , avremo:

$$m \frac{v^2}{r} = N(\sin \theta + \mu_s \cos \theta), \quad mg = N(\cos \theta - \mu_s \sin \theta)$$

da cui:

$$m \frac{v^2}{r} = mg \frac{\sin \theta + \mu_s \cos \theta}{\cos \theta - \mu_s \sin \theta}, \Rightarrow v = \sqrt{gr \frac{\sin \theta + \mu_s \cos \theta}{\cos \theta - \mu_s \sin \theta}}$$

dove  $v$  rappresenta la velocità massima di percorrenza del tratto di curva.

## 29 Moto circolare uniforme sul piano verticale

Vediamo adesso il moto circolare uniforme, dal punto di vista delle forze, svolto su un piano verticale, ovvero sotto l'effetto della forza di gravità. Supponiamo di avere un corpo che ruota su un giro della morte. Poniamo  $T$  come la reazione vincolare della superficie, che mantiene il corpo sulla traiettoria circolare. L'accelerazione del corpo sarà allora:

$$\vec{T} + m\vec{g} = m\vec{a}$$

o sulle componenti di un sistema di riferimento polare:

$$-T + mg \cos \theta = ma_r = -m \frac{v^2}{r}$$

$$-mg \sin \theta = ma_\theta = m \frac{dv}{dt}$$

Queste sono le equazioni di un moto vario, ovvero dove l'accelerazione sulla direzione tangenziale del corpo varia. Vediamo qual'è la velocità minima



perchè il corpo raggiunga la posizione  $\theta = \pi$ , ovvero riesca a svolgere un giro completo. Abbiamo da prima:

$$g \cos \theta \leq \frac{v^2}{r}, \quad v_{min} = \sqrt{gr}$$

visto che  $T$  sarà maggiore di zero nel caso di un contatto con la superficie della rampa.

## 30 Forze fra corpi deformabili

Vediamo ora le forze dovute all'interazione fra due corpi deformabili in contatto fra di loro. Questo tipo di forze si dividono in:

- Forze fra due corpi deformabili anelasticamente, spesso in modo permanente. In questo caso non esistono leggi, e si può solo applicare il terzo principio della dinamica.
- Forze fra due corpi deformabili elasticamente, che si possono modellizzare come molle.

### Forza elastica

Vediamo nel dettaglio l'ultima categoria. Una molla con un certo coefficiente elastico  $k$ , sottoposta ad una sollecitazione che riesce a spostarla di una certa  $\Delta R$ , esprime in direzione opposta una forza pari a:

$$\vec{F}_{el} = -k\Delta R$$

La costante  $k$  è detta costante della molla e si misura in  $\frac{N}{m}$ . Notiamo che le molle che prenderemo in considerazione sono molle ideali, ovvero prive di massa e indeformabili (a  $k$  costante).

## 31 Moto armonico

Vediamo una configurazione dove una massa collegata da una molla ad una parete oscilla attorno alla posizione di riposo. Abbiamo che in ogni istante:

$$ma = m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx$$

ovvero

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} = -\frac{k}{m}x(t) = -\omega^2x(t)$$

introducendo  $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ , detta pulsazione della molla.  
L'equazione differenziale ha soluzione:

$$x(t) = A \cos(\omega t + \phi)$$

dove  $A$  è l'ampiezza,  $\omega$  la pulsazione e  $\phi$  la fase. Posso ricavare poi la velocità:

$$v(t) = -A\omega \sin \omega t + \phi$$

e l'accelerazione:

$$a(t) = -A\omega^2 \cos(\omega t + \phi)$$

## Dimostrazione

- **Equazione differenziale del moto armonico**

prendiamo la legge elastica  $\vec{F} = -kx$ . Applicando la seconda legge della dinamica, abbiamo che:

$$m\vec{a} = -kx, \quad \vec{a} = -\frac{kx}{m}, \quad \frac{d^2x(t)}{dt^2} = -\frac{kx}{m}$$

da cui si ricava l'equazione differenziale ordinaria di secondo grado:

$$\ddot{x}(t) + \frac{k}{m}x(t) = 0$$

il polinomio caratteristico dell'equazione è:

$$\lambda^2 + \frac{k}{m} = 0$$

da cui si ottengono 2 soluzioni immaginarie coniugate,  $\pm i\sqrt{\frac{k}{m}}$ . L'integrale generale è quindi:

$$x(t) = c_1 e^{+i\frac{k}{m}t} + c_2 e^{-i\frac{k}{m}t}$$

Convien a questo punto chiamare  $\sqrt{\frac{k}{m}} = \omega$ , detta pulsazione dell'oscillatore armonico (impropriamente velocità angolare). A questo punto potremo, tra l'altro, riscrivere la differenziale come:

$$\ddot{x}(t) + \omega^2 x(t) = 0$$

Applicando la legge di Eulero all'integrale generale, avremo:

$$x(t) = c_1 \cos \sqrt{\frac{k}{m}}t + c_2 \sin \sqrt{\frac{k}{m}}t = c_1 \cos \omega t + c_2 \sin \omega t$$

- **Forma cosinusoidale**

A questo punto riportiamo la formula nella forma  $A \cos \omega t + \phi$ , in funzione di ampiezza, pulsazione e fase. Diciamo innanzitutto:

$$A = \sqrt{c_1^2 + c_2^2} \Rightarrow \frac{A^2}{A^2} = \frac{c_1^2 + c_2^2}{A^2}, \quad \left(\frac{c_1}{A}\right)^2 + \left(\frac{c_2}{A}\right)^2 = 1$$

Notiamo la somiglianza con l'identità trigonometrica fondamentale  $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ . Possiamo infatti avere che:

$$\frac{c_1}{A} = \cos \psi, \quad \frac{c_2}{A} = \sin \psi \Rightarrow c_1 = A \cos \psi, \quad c_2 = A \sin \psi$$

per un qualsiasi angolo  $\psi$ . Sostituiamo quindi nell'integrale generale:

$$x(t) = A \cos \psi \cos \omega t + A \sin \psi \sin \omega t = A(\cos \psi \cos \omega t + \sin \psi \sin \omega t)$$

su cui possiamo applicare la formula della sottrazione del coseno  $\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$ :

$$A(\cos \psi \cos \omega t + \sin \psi \sin \omega t) = A \cos(\omega t - \psi)$$

dove  $\cos(\omega t - \psi) = \cos(\psi - \omega t)$  (per la parità del coseno o per la commutatività della moltiplicazione nella formula di sottrazione, fai un po' te). Troviamo allora  $\psi$  in funzione di  $c_1$  e  $c_2$ , accorgendoci di poter ricavare dalle formule sopra riportate  $\tan \psi$ :

$$\tan \psi = \frac{\sin \psi}{\cos \psi} = \frac{c_1}{A} \cdot \frac{A}{c_2} = \frac{c_2}{c_1}$$

definiamo, per convenienza, l'opposto di  $\psi$  come  $\phi = -\psi$ . Questo ci permette di scrivere:

$$x(t) = A \cos(\omega t + \phi)$$

Dalla disparità della tangente, avremo che:

$$\tan \phi = -\tan(-\phi) = -\tan \psi = \tan -\psi$$

$$\phi = \arctan\left(-\frac{c_2}{c_1}\right), \quad \psi = \arctan \frac{c_2}{c_1}$$

### • Condizioni iniziali

Diamo infine un significato fisico alle costanti  $c_1$ , e  $c_2$ , imponendo le condizioni iniziali dell'equazione differenziale. Iniziamo dalla posizione al tempo 0, ovvero  $x(t = 0)$ :

$$x(0) = c_1 \cos 0 + c_2 \sin 0 = c_1, \quad c_1 = x(0)$$

Deriviamo poi  $x(t)$  per ricavare la velocità  $\frac{d}{dt}x(t) = v(t)$ :

$$\frac{d}{dt}x(t) = -c_1\omega \sin \omega t + c_2\omega \cos \omega t$$

e quindi la velocità al tempo 0, ovvero  $v(t = 0)$ :

$$v(0) = -c_1\omega \sin 0 + c_2\omega \cos 0 = c_2\omega, \quad c_2 = \frac{v(0)}{\omega}$$

chiamiamo  $v(0) = v_0$  e  $x(0) = x_0$  e sostituiamo nella formula cosinusoidale:

$$A \cos(\omega t + \phi) = \sqrt{c_1^2 + c_2^2} \cos(\omega t + \arctan(-\frac{c_2}{c_1}))$$

$$A = \sqrt{c_1^2 + c_2^2} = \sqrt{x_0^2 + (\frac{v_0}{\omega})^2}, \quad \phi = \arctan(-\frac{c_2}{c_1}) = \arctan(-\frac{v_0}{\omega x_0})$$

$$A \cos(\omega t + \phi) = \sqrt{x_0^2 + (\frac{v_0}{\omega})^2} \cos(\omega t + \arctan(-\frac{v_0}{\omega x_0}))$$

## 32 Energia e Lavoro

Possiamo trattare i problemi della dinamica, invece che dal punto di vista delle forze e delle accelerazioni, attraverso i concetti di energia e lavoro. L'energia compare in diverse branche della fisica, ad esempio:

- Energia cinetica  $\leftrightarrow$  velocità;
- Energia potenziale  $\leftrightarrow$  posizione;
- Energia termica  $\leftrightarrow$  temperatura.

Possiamo definire l'energia come la capacità di compiere un lavoro.

### Energia cinetica

Definiamo l'energia cinetica come:

$$K = \frac{1}{2}mv^2$$

Si misura in Joule:  $1\text{J} = 1\text{kg} \times \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}$ . In un sistema formato da più particelle, l'energia cinetica complessiva è la somma delle energie cinetiche di tutte le particelle:

$$K = \sum_i K_i = \sum_i \frac{1}{2}m_i v_i^2$$

L'energia cinetica è dovuta al moto delle particelle ed è presente anche a livello microscopico: equivale all'energia termica della termodinamica. Notare inoltre che:

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(\vec{v} \times \vec{v})$$

### Lavoro

Sia  $P$  un certo punto che si sposta su una curva  $\gamma$ , spinto da una forza  $\vec{F}$ .

Quando il punto si sposta dalla posizione  $\vec{R}_i$  alla posizione  $\vec{R}_f$ , il suo lavoro sarà:

$$L_{\vec{R}_i \rightarrow \vec{R}_f} = \int_{\vec{R}_i}^{\vec{R}_f(\gamma)} \vec{F} \cdot d\vec{R}$$

per ogni punto conosceremo quindi:

- Il differenziale dello spostamento  $d\vec{R}$ ;
- La forza  $\vec{F}$  lungo la curva;

e fare il loro prodotto scalare  $dL = \vec{F} \cdot d\vec{R}$ . Notare che l'integrale è un integrale di linea su  $\gamma$ .

### Teorema delle forze vive

Un'importante teorema detto teorema delle forze vive o **dell'energia cinetica** afferma che il lavoro effettuato dalla risultante delle forze  $\vec{F}$  agenti su un punto materiale di massa inerziale  $m$  tra  $R_i$  e  $R_f$  è uguale alla variazione di energia cinetica del punto materiale tra  $R_i$  e  $R_f$ :

$$\Delta K = K_f - K_i = L_{if} = \int_{i(\gamma)}^f \vec{F} \cdot d\vec{R}$$

Se il lavoro è:

- **Positivo**, l'energia cinetica aumenta;
- **Negativo**, l'energia cinetica diminuisce.

### Lavoro svolto da una forza costante

Se  $\vec{F}$  è una forza costante che spinge un punto materiale su un segmento dal punto  $A$  al punto  $B$ , con distanza,  $\Delta\vec{r}$ , il lavoro (grandezza scalare) eseguito dalla forza  $F$  su  $P$  si definisce come:

$$L_{AB} = F \Delta r \cos \theta$$

dove  $\theta$  è l'angolo che la forza  $F$  forma con il segmento. Questo deriva da:

$$L_{AB} = \int_{\vec{r}_A}^{\vec{r}_B} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \vec{F} \cdot (\vec{r}_b - \vec{r}_a)$$

### Lavoro elementare su ascissa curvilinea

Definiamo il lavoro elementare di una forza:

$$dL = \vec{F} \cdot d\vec{r} = F dr \cos \theta$$

$$dL \vec{F} \cdot d\vec{r} = (\vec{F}_t + \vec{F}_m) \cdot d\vec{r} = (\vec{F}_t + \vec{F}_n) \cdot (\hat{t}ds), \quad dL = F_t(s)ds$$

il lavoro della forza si può definire si può scrivere in termini di tale componente:

$$L_{if} = \int_{S_i}^{S_f} F_t(s)ds$$

Il prodotto scalare può essere calcolato anche in funzione delle coordinate cartesiane:

$$dL = (F_x \hat{i} + F_y \hat{j} + F_z \hat{k}) \cdot (dx \hat{i}, dy \hat{j}, dz \hat{k}) = F_x dx + F_y dy + F_z dz$$

dove:

$$dL = (dx \hat{i}, dy \hat{j}, dz \hat{k}) = (v_x(t) \hat{i}, v_y(t) \hat{j}, v_z(t) \hat{k})$$

conoscendo le leggi orarie.

### 33 Lavoro svolto da forze costanti

#### Lavoro di forze orizzontali

Prendiamo in esempio un blocco trainato su un piano orizzontale scabro a velocità costante per un tratto  $\vec{d} = d\hat{i}$ . Il lavoro della forza  $F$  sarà:

$$L_f = \vec{F} \cdot \vec{d} = Fd \cos \theta > 0$$

Mentre il lavoro della reazione del piano  $N$  sarà:

$$L_n = \vec{N} \cdot \vec{d} = 0$$

e il lavoro della forza di gravità  $mg$  sarà:

$$L_{mg} = m\vec{g} \cdot \vec{d} = 0$$

Come vediamo, il lavoro delle forze sul piano verticale è effettivamente nullo in quanto il blocco non si muove verticalmente. Si può in generale dire che le forze vincolari compiono lavoro 0:

$$L_{\vec{N}} = 0(\vec{F} \perp d\vec{r})$$

Resta il lavoro della forza d'attrito:

$$L_d = \vec{F}_d \cdot \vec{d} = -F_d d = -\mu_d N d < 0$$

possiamo a questo punto imporre accelerazione nulla:

$$-Fd + F \cos \theta = -N\mu_d + F \cos \theta = ma_x = 0 \Rightarrow L_f + L_d = (-N\mu_d + F \cos \theta)d = 0$$

### Lavoro della gravità nelle vicinanze della superficie terrestre

La gravità terrestre esercita su tutti i corpi nelle sue vicinanze una forza  $mg$ , che svolge un lavoro pari a :

$$L = L_{if} = m\vec{g} \cdot \vec{s} = -mg(y_f - y_i)$$

dove  $\vec{s}$  rappresenta la variazione dell'altitudine tra le ordinate  $y_f$  e  $y_i$ . Osserviamo quindi che il lavoro dipende quindi solamente dalla quota finale e della quota iniziale. Possiamo in generale dire che il lavoro della gravità alla superficie terrestre di un corpo ad altitudine  $h$  è:

$$L_{M\vec{g}} = -Mg\Delta h$$

### Lavoro delle forze di contatto

Le forze di attrito dinamico compie lavoro:

$$L_{\vec{F}_{AD}} = \int -\mu_d |\vec{N}| |d\vec{R}| < 0$$

mentre la forza di attrito statico, visto che agisce su distanze nulla, sarà:

$$L_{\vec{F}_{AD}} = 0$$

### Teorema dell'energia cinetica

Il lavoro svolto dalla risultante delle forze  $\vec{F}$  agenti su un punto materiale di massa inerziale  $M$  che si sposta da un punto  $\vec{R}_0$  a un punto  $\vec{R}_1$  è uguale alla variazione di energia cinetica del punto materiale tra  $\vec{R}_0$  e  $\vec{R}_1$ . La stessa cosa vale anche per sistemi di punti materiali.

$$K(\vec{R}_1) - K(\vec{R}_0) = \sum \int_{\vec{R}_0}^{\vec{R}_1} \vec{F}_i \cdot d\vec{R}$$

Dimostriamo il caso dei punti materiali:

$$\sum \int_{\vec{R}_0}^{\vec{R}_1} \vec{F}_i \cdot d\vec{R} = \int_{\vec{R}_0}^{\vec{R}_1} (\sum \vec{F}_i) \cdot d\vec{R} = \int_{\vec{R}_0}^{\vec{R}_1} M\vec{a} \cdot d\vec{R} = \int_{\vec{R}_0}^{\vec{R}_1} M \frac{d\vec{V}}{dt} \cdot d\vec{R} = \int_{t_0}^{t_1} M \frac{d\vec{V}}{dt} \cdot \vec{V} dt$$

Prendiamo il termine  $\frac{d\vec{V}}{dt} \cdot \vec{V}$ . Possiamo riscriverlo come:

$$\frac{1}{2} \frac{dV^2}{dt} = \frac{1}{2} \cdot 2\vec{V} \cdot \left( \frac{d\vec{V}}{dt} \right) = \vec{V} \cdot \frac{d\vec{V}}{dt}$$

Sostituiamo per ottenere:

$$\int_{t_0}^{t_1} M \frac{d}{dt} \frac{V^2}{2} dt = \left| M \frac{V^2}{2} \right|_{t_0}^{t_1} = \frac{M}{2} (V^2(t_1) - V^2(t_0))$$



### Lavoro della forza elastica

Studiamo una molla di lunghezza  $L_0$ . La molla potrà essere spostata dalla sua posizione di riposo nelle due direzioni lungo il suo asse: diciamo di avere in momenti distinti spostamenti  $L_i$  e  $L_f$ , con variazione della posizione rispetto alla posizione di riposo  $L_0$  pari a  $x_i = L_i - L_0$ ,  $x_f = L_f - L_0$ . A questo punto possiamo ricordare la legge elastica che determina la forza applicata dalla molla in funzione degli spostamenti  $x_i$  e  $x_f$ :

$$\vec{F} = -kx$$

e calcolare l'integrale:

$$L_{x_i x_f} = \int_{x_i}^{x_f} \vec{F} \cdot d\vec{r} = - \int_{x_i}^{x_f} kx d\vec{r} = -\frac{k}{2}(x_f^2 - x_i^2)$$

Notiamo che se  $x_f = -x_i$ , il lavoro svolto è nullo. **Lavoro svolto nel moto parabolico**

Prendiamo l'esempio del moto parabolico. La forza peso compirà un lavoro in qualsiasi punto della parabola pari a:

$$L_p = -mg(y_f - y_i) = -mgy$$

$$\Delta K = \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_i^2 = \frac{1}{2}m(v_y^2 - v_0^2 \sin^2 \theta)$$

Eguagliando:

$$\Delta K = -mgy = \frac{1}{2}m(v_y^2 - v_0^2 \sin^2 \theta)$$

Possiamo applicare il teorema delle forze vive:

$$-2gy = v_y^2 - (v_0 \sin \theta)^2 \Rightarrow v_y^2 = (v_0 \sin \theta)^2 - 2gy$$

che con quanto trovato attraverso la cinematica:

$$2a_y(y(t) - y_0) = v_y(t)^2 - v_{0y}^2$$

### Lavoro della forza elettrostatica o gravitazionale

Possiamo dire, per le forze che dipendono dall'inverso del quadrato della distanza:

$$\vec{F} = -\frac{K}{r^2} \hat{r}$$

attrattiva con  $k > 0$ , repulsiva con  $k < 0$ , che il lavoro svolto è:

$$L = \int_i^f \vec{F} \cdot d\vec{s} = -k \int_i^f \frac{\hat{r} \cdot d\vec{s}}{r^2} = -k \int_{r_i}^{r_f} \frac{dr}{r^2} = k\left(\frac{1}{r_f} - \frac{1}{r_i}\right)$$

## 34 Potenza

La potenza è la velocità con cui viene sviluppata una forza:

$$P = \vec{F} \cdot \vec{v} = \frac{L}{t}$$

La potenza è una quantità scalare e si misura in  $\frac{J}{s} = W$  (watt). Possiamo dimostrare la formula sopra riportata con:

$$P = \frac{dL}{dt} = \frac{d}{dt} \int \vec{F} \cdot d\vec{r} = \frac{d}{dt} (\vec{F} \cdot \vec{v}) dt = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

## 35 Forze conservative

Una forza  $\vec{F}$  è detta conservativa se il lavoro che svolge non dipende dal percorso scelto  $\gamma$ , ma solamente dagli estremi. In simboli:

$$L = \int_{\vec{r}_0(\gamma)}^{\vec{r}_1} \vec{F} \cdot d\vec{L} = \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}_1} \vec{F} \cdot d\vec{L}$$

non dipende dal  $\gamma$ , ma solamente da  $r_0$  e  $r_1$ . Esempi di forze conservative sono la gravità, la forza elettrostatica e la forza elastica. Esempi di forze non conservative sono invece l'attrito dinamico e l'attrito viscoso.

Si consideri una forza  $\vec{F}$ . Per ogni linea chiusa  $\gamma$  si ha:

$$\oint_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{l} = 0 \Rightarrow L = \int_{\vec{R}_0}^{\vec{R}_1} \vec{F} \cdot d\vec{l}$$

Ciò si dimostra prendendo sul percorso chiuso due linee arbitrarie  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$ , con gli estremi coincidenti:

$$\oint_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{l} = 0 = \int_{\vec{R}_0(\gamma_1)}^{\vec{R}_1} \vec{F} \cdot d\vec{L} + \int_{\vec{R}_1(\gamma_2)}^{\vec{R}_0} \vec{F} \cdot d\vec{L} = \int_{\vec{R}_0(\gamma_1)}^{\vec{R}_1} \vec{F} \cdot d\vec{L} - \int_{\vec{R}_0(\gamma_2)}^{\vec{R}_1} \vec{F} \cdot d\vec{L}$$

ovvero:

$$\int_{\vec{R}_0(\gamma_1)}^{\vec{R}_1} \vec{F} \cdot d\vec{L} = \int_{\vec{R}_0(\gamma_2)}^{\vec{R}_1} \vec{F} \cdot d\vec{L}$$

Quindi, se per una forza  $\vec{F}$  su un percorso chiuso  $\gamma$  si ha:

$$\oint_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{L} = 0 \Rightarrow \int_{\vec{R}_0(\gamma_1)}^{\vec{R}_1} \vec{F} \cdot d\vec{L} = \int_{\vec{R}_0(\gamma_2)}^{\vec{R}_1} \vec{F} \cdot d\vec{L}$$

Ovvero la forza dipende solamente dalla posizione iniziale e finale per qualsiasi  $\gamma$ . In altre parole:

$$L = \int_{\vec{R}_0}^{\vec{R}_1} \vec{F} \cdot d\vec{L} = f(\vec{R}_0, \vec{R}_1)$$

il lavoro è funzione di  $\vec{R}_0$  e  $\vec{R}_1$ .

## 36 Campo di forza e linee di forza

Un campo di forze è un campo vettoriale, ovvero una funzione  $\vec{F}(x, y, z)$  delle componenti  $x, y, z$ . Rappresenta l'insieme di valori che una grandezza fisica (in questo caso una forza) assume in un certo punto dello spazio. Una **linea di forza** è una linea formata dall'involuppo delle direzioni della forza nella regione del campo. La direzione della forza è in ogni punto tangente alla linea di forza. Notiamo che le linee di forza non possono intersecarsi. Inoltre, un campo di forza conservativo non può contenere linee chiuse. Una **superficie equipotenziale** è una superficie perpendicolare in ogni punto alla direzione delle linee di forza.

## 37 Energia potenziale

Se una forza è conservativa allora esiste una funzione della posizione del punto materiale tramite la quale si può esprimere il lavoro:

$$L_{A \rightarrow B_1} = L_{A \rightarrow B_2} = L_{A \rightarrow B} = f(A, B)$$

Chiamiamo allora variazione di energia potenziale l'integrale:

$$\Delta U = U(\vec{R}) - U(\vec{R}_0) = -L_{\vec{R}_0 \rightarrow \vec{R}} = - \int_{\vec{R}_0}^{\vec{R}} \vec{F} \cdot d\vec{l}$$

al pari di qualche costante. L'energia potenziale è l'opposto del lavoro, ed entrambe si misurano in Joule. Sulle superfici equipotenziali l'energia potenziale è costante.

### Energia potenziale gravitazionale nelle vicinanze della superficie terrestre

Abbiamo che, vicino alla crosta terrestre, l'energia potenziale è maggiore tanto quanto aumenta la nostra altitudine, ovvero:

$$U(Z) - U(Z_0) = L_{Z_0 \rightarrow Z} = - \int_{Z_0}^Z M\vec{g} \cdot d\vec{l} = MgZ - MgZ_0 = Mgh$$

$$U(Z) = MgZ + \text{const.}$$

Prendiamo  $U(Z_0) = MGZ_0$ :

$$U(Z) = MgZ$$

### **Energia potenziale di una molla**

Ricordiamo che per una molla:

$$L_{x_i, x_f} = \int_{x_i}^{x_f} \vec{F} \cdot d\vec{r} = - \int_{x_i}^{x_f} kx dx = -\frac{k}{2}(x_f^2 - x_i^2) = \frac{k}{2}(l_i - l_0)^2 - \frac{k}{2}(l_f - l_0)^2$$

Dove si nota che il lavoro dipende unicamente dalla lunghezza iniziale  $l_i$  e finale  $l_f$  della molla. Possiamo cambiare variabile indicando con  $x$  la lunghezza della molla:

$$U(x) - U(x_i) = -L = \frac{k}{2}(x - l_0)^2 - \frac{k}{2}(l_f - l_0)^2$$

Ponendo l'origine delle coordinate in  $l_0$ :

$$U(x) - U(x_i) = -L = \frac{k}{2}(x - l_0)^2$$

### **Conseguenze delle forze conservative**

Dalla definizione di differenza di energia potenziale deriva:

$$U(\vec{R}) - U(\vec{R}_0) = - \int_{\vec{R}_0}^{\vec{R}} \vec{F} \cdot d\vec{l} \Rightarrow U(\vec{R}) = U(\vec{R}_0) - \int_{R_0}^R \vec{F} \cdot d\vec{l}$$

Che sulle componenti diventa:

$$U(x, y, z) = U(x_0, y_0, z_0) - \int_{(x_0, y_0, z_0)}^{(x, y, z)} (F_x dx + F_y dy + F_z dz)$$

da cui:

$$F_x = -\frac{\partial U(x, y, z)}{\partial x} \quad F_y = -\frac{\partial U(x, y, z)}{\partial y} \quad F_z = -\frac{\partial U(x, y, z)}{\partial z}$$

Che si riassume in:

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}U$$

Ovvero, in qualsiasi punto del campo dell'energia potenziale possiamo ricavare su un intorno il vettore forza come gradiente.

### Modelli d'analisi basati sull'energia

L'energia e il lavoro forniscono un modello d'analisi fisico spesso più conveniente di quello della cinematica. Prendiamo in esempio il moto di un punto materiale sul piano inclinato: il corpo inizia il suo moto alla base del piano (inclinato di angolo  $\theta$ ) con una certa velocità  $v_0$ . Risale il piano per una certa distanza  $l$ , ostacolato dalla forza d'attrito (con coefficiente di attrito dinamico  $\mu_d$ ) e dalla forza gravitazionale  $g$ . Ci chiediamo quale sia la posizione massima raggiunta dal punto materiale, e quale sia, una volta iniziata la sua discesa da dato punto, la velocità con cui ripassa dalla posizione di partenza. Vediamo le forze agenti sul punto materiale: la forza peso  $mg$ , diretta verso  $-\hat{j}$ , che possiamo dividere nelle due componenti parallele e perpendicolari alla superficie del piano. Abbiamo poi la reazione vincolare del piano  $N$ , parallela alla componente perpendicolare della forza peso che andrà ad annullare (e quindi perpendicolare alla superficie del piano). Abbiamo infine la forza di attrito, proporzionale ad  $|N|$ , e diretta nella direzione opposta alla velocità  $\vec{v}_0$  del corpo.

### Spostamento massimo, approccio cinematico

Possiamo impostare:

$$F_p = -mg, \quad F_{p\perp} = -mg \cos \theta, \quad F_{o\parallel} = -mg \sin \theta$$

con  $N = -F_{p\perp} = mg \cos \theta$ . A questo punto l'attrito sarà:

$$F_{att} = -\mu_d |N| = -\mu_d mg \cos \theta$$

Abbiamo già detto che la forza gravitazionale nella direzione perpendicolare al piano viene annullata dalla reazione  $N$ , e quindi l'unica componente che rimane a determinare l'accelerazione è:

$$F = ma = \mu_d N + mg \sin \theta \Rightarrow a = g(\sin \theta + \mu_d \cos \theta)$$

Siamo nel caso del moto rettilineo uniformemente accelerato (nella direzione parallela al piano), e possiamo quindi impostare le leggi orarie:

$$\begin{cases} s = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 \\ v = v_0 + a t \end{cases}$$

Imponendo  $v = 0$ , come accadrà nel punto di altezza massima (e quindi di cambio direzione), avremo che:

$$v_0 = g(\sin \theta + \mu_d \cos \theta) \Rightarrow t = \frac{v_0}{g(\sin \theta + \mu_d \cos \theta)}$$

Da cui ricaviamo lo spostamento (chiamiamolo  $l = s$ ):

$$l = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 = \frac{v_0^2}{2g(\sin \theta + \mu_d \cos \theta)}$$

### **Spostamento massimo, approccio energetico**

Impostiamo la differenza dell'energia cinetica, applicando il teorema delle forze vive:

$$K_f - K_i = L_{att} + L_{mg}$$

Ricaviamo il lavoro svolto dalla forza di attrito:

$$L_{att} = \int_0^l \mu_d mg dx = -\mu_d mgl \cos \theta$$

e dalla forza peso:

$$L_{mg} = \int_0^l mg \sin \theta = mgl \sin \theta$$

Diciamo che la variazione di energia cinetica  $\Delta K$  è uguale a a:

$$\Delta K = -\frac{1}{2} m v^2 = -\mu_d mgl \cos \theta - mgl \sin \theta$$

da cui si ottiene:

$$l = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 = \frac{v_0^2}{2g(\sin \theta + \mu_d \cos \theta)}$$

Notiamo che attraverso entrambi gli approcci otteniamo risposte identiche, ma l'approccio energetico richiede meno calcoli (soprattutto vettoriali!). Concludiamo ricavando attraverso entrambi gli approcci la velocità di ritorno attraverso il punto di partenza.

### **Velocità di ritorno, approccio cinematico**

In questo il corpo parte da distanza  $l$  dall'inizio del piano, con velocità iniziale nulla. Forza gravitazionale e forza di attrito saranno discordi:

$$F = ma = mg \sin \theta - \mu_d mg \cos \theta, \quad a = g(\sin \theta - \mu_d \cos \theta)$$

che sostituito nelle legge orarie:

$$\begin{cases} s = \frac{1}{2} a t^2 \\ v = a t \end{cases}$$

fornisce:

$$t = \sqrt{\frac{2l}{a}}, \quad v^2 = 2la = 2lg(\sin \theta - \mu_d \cos \theta)$$

### **Velocità di ritorno, approccio cinematico**

Impostiamo in modo analogo a prima il lavoro svolto dalla forza di gravità e di attrito sul punto materiale, ponendoli adesso discordi:

$$L_{att} = -\mu_d mgl \cos \theta, \quad L_{mg} = mgl \sin \theta$$

che possiamo eguagliare alla variazione di energia cinetica:

$$\Delta K = \frac{1}{2} Mv^2 = -\mu_d mgl \cos \theta + mgl \sin \theta$$

Da cui si ricava subito  $v$ :

$$v^2 = 2lg(\sin \theta - \mu_d \cos \theta)$$

Ancora una volta, i risultati coincidono (che è come dovrebbe essere!), e l'approccio energetico risulta più agile nei calcoli.

## **38 Equilibrio**

Il grafico dell'energia potenziale ci permette di ottenere informazioni riguardanti l'equilibrio del sistema studiato. In particolare, distinguiamo i casi:

- Punto stazionario, massimo locale: si parla di equilibrio instabile. Una minima variazione delle condizioni del sistema porterebbe all'alterazione di esso, probabilmente verso un punto di equilibrio stabile
- Punto stazionario, minimo locale: si parla di equilibrio stabile. Una variazione delle condizioni del sistema sufficientemente piccola non ha grandi conseguenze sul sistema, che torna naturalmente al suo stato di equilibrio
- Punto stazionario, funzione costante in un suo intorno: si parla di equilibrio indifferente. Il sistema non reagisce a minime variazioni delle sue condizioni.

## 39 Energia meccanica e principio di conservazione dell'energia meccanica

Riprendiamo il teorema delle forze vive:

$$K_f - K_i = L_{totale} = L_{cons} + L_{non\ cons} = -(U_f - U_i) + L_{non\ cons}$$

Definiamo allora l'**energia meccanica**:

$$E = K + U$$

per cui la formula precedente diventa:

$$K_f + U_f - (K_i + U_i) = E_f - E_i = L_{non\ cons}$$

noto anche come **principio di conservazione dell'energia meccanica**. In particolare, se on ci sono forze non conservative, o se ci sono ma compiono lavoro nullo:

$$E(P) = K(P) + U(P) = \text{const.} = K(P_1) + U(P_1)$$

su due punti  $P$  e  $P_1$  arbitrari.

## 40 Applicazioni della conservazione dell'energia

Vediamo alcuni esempi di problemi che richiedono l'applicazione del principio di conservazione dell'energia.

### **Pendolo sul piano verticale senza attrito**

Poniamo un pendolo, ovvero una massa legata da un filo di lunghezza  $r$  a un perno centrale. Vogliamo spingere la massa, modellizzata come un punto materiale, dal punto più basso  $P_1$  a quello più alto  $P_2$  della circonferenza, e vogliamo quindi calcolare la velocità minima con cui il punto deve partire da  $P_1$ . Notiamo che non basterà raggiungere  $P_1$ , ma dovremo raggiungerlo con una velocità tale da proseguire il moto circolare senza cadere per via della gravità. Notiamo inoltre che l'unico punto critico sarà  $P_2$ , in quanto il suo raggiungimento (e superamento) significa anche il raggiungimento di tutti gli altri punti ad esso sottostanti.

Cerchiamo innanzitutto la velocità minima necessaria all'arrivo sulla verticale. La reazione del filo sarà:

$$T = mg \cos \theta + m \frac{v^2}{r} \geq 0$$



Una  $T$  maggiore di zero ci assicura che il filo sta esercitando una forza per mantenere la massa in rotazione, e quindi che è in tensione. Poniamo quindi:

$$\frac{v^2}{r} \geq -g \cos \theta, \quad v_{P_2} = \sqrt{gr \cos \theta}$$

Infine, prendiamo  $v_{P_2}$ , con  $\theta = \pi$ :  $v_{P_2} = \sqrt{gr}$  in valore assoluto.

Utilizziamo allora il principio della conservazione dell'energia: sappiamo che:

$$\Delta K = -\Delta U$$

ovvero la variazione di energia cinetica è uguale all'opposto della variazione di energia potenziale. La variazione di energia cinetica equivale alla differenza fra l'energia cinetica alla velocità minima appena trovata (nel caso peggiore, più lento possibile) e quella alla velocità  $v_i$  che volevamo cercare:

$$\Delta K = \frac{1}{2}mv_{P_2}^2 - \frac{1}{2}mv_i^2 = \frac{1}{2}mgr - \frac{1}{2}mv_i^2$$

Posto poi l'origine del sistema di riferimento alla base della circonferenza, avremo che l'energia potenziale è 0 in  $P_1$ , ergo la sua variazione una volta toccato  $P_2$  sarà:

$$\Delta U = 2mgr$$

Possiamo allora impostare:

$$\frac{1}{2}mgr - \frac{1}{2}mv_i^2 = -2mgr$$

da cui si ricava la velocità iniziale necessaria,  $v_i = \sqrt{5gr}$ .

### **Pendolo sul piano verticale senza attrito, $\theta$ arbitrario**

Cerchiamo di trovare la velocità necessaria al raggiungimento di angoli  $\theta_0$  arbitrari. Definiamo l'energia potenziale, invece che in funzione dell'altezza massima  $2r$ , in funzione dell'angolo, con:

$$U(\theta) = mgL(1 - \cos \theta)$$

Avremo dalla conservazione dell'energia che:

$$U(0) + \frac{1}{2}mv^2 = U(\theta_0) + \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow \frac{1}{2}mv^2 = mgL(1 - \cos \theta_0)$$

visto che la potenziale all'istante 0 è nulla, come è nulla l'energia cinetica nel punto che vogliamo raggiungere (che sarà di cambio direzione). Da questo otteniamo  $v_0 = \sqrt{2gL(1 - \cos \theta)}$ .

### Pendolo oscillante

Descriviamo adesso il fenomeno oscillatorio presentato dal pendolo. Possiamo individuare le forze agenti sulla sua massa in direzione radiale:

$$-T + mg \cos \theta = ma_r = -m \frac{v^2}{r}$$

e tangenziale:

$$-mg \sin \theta = ma_\theta = m \frac{dv}{dt}$$

Il moto analizzato è effettivamente un moto circolare vario, con accelerazione centripeta in direzione radiale, e inoltre accelerazione variabile in direzione longitudinale. Conviene definire quest'ultima in funzione della velocità tangenziale, sfruttando l'equivalenza dell'arco  $s = L\theta$ :

$$v(t) = \frac{ds}{dt} = \frac{dL\theta}{dt} = L \frac{d\theta}{dt} = L\omega(t)$$

$$a_\theta(t) = \frac{dv(t)}{dt} = \frac{d\omega}{dt} = L \frac{d\omega}{dt} = L \frac{d^2\omega}{dt^2}$$

da cui ricaviamo nuovamente la componente tangenziale:

$$-mg \sin \theta = mL \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

ma stavolta in funzione di una derivata di  $\theta$ . Questo ci permette di impostare l'equazione differenziale:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L} \sin \theta = 0$$

Notiamo che compare la funzione seno. Per piccoli angoli  $\theta$  conviene usare l'approssimazione  $x$  per il seno, ovvero la sua formula di Taylor di primo grado centrata in 0 (quindi formula di MacLaurin...):

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L} \theta = 0 \Rightarrow \frac{d^2\theta}{dt^2} + \Omega^2 \theta = 0, \quad \Omega = \sqrt{\frac{g}{L}}$$

Che è l'equazione differenziale del moto armonico, e ha come soluzione:

$$\omega t = A \cos \Omega t + \phi$$

con pulsazione  $\Omega$  e periodo  $T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$ . Come sempre, le costanti si determinano dalle condizioni iniziali di velocità e posizione.

## 41 Sistemi di riferimento inerziali

Si riportano alcuni esempi di applicazione della relatività galileiana.

### 41.1 Treno in moto

Facciamo l'esempio di un treno in moto con velocità  $v_0$  costante. Sul treno, un passeggero lascia cadere un gesso che si muove spinto dall'accelerazione gravitazionale  $g$ . Sia  $S'$  il sistema di riferimento del treno, e  $S$  il sistema di riferimento di laboratorio (poniamo della banchina), e siano i due sistemi di riferimento coincidenti nell'istante in cui si lascia cadere il gesso. Possiamo applicare le trasformazioni di Galileo:

$$\begin{cases} \vec{r} = \vec{r}' + \vec{v}_0 t \\ \vec{v} = \vec{v}' + \vec{v}_0 \\ \vec{a} = \vec{a}' \end{cases}$$

in  $t = 0$  le coordinate del gesso sono identiche nei due sistemi, e il gesso ha velocità iniziale nulla e accelerazione  $-g\hat{y}$  sull'asse verticale identica nei due sistemi. Sia  $(x_0, y_0)$  la posizione iniziale del gesso, la sua posizione rispetto al treno sarà allora:

$$\vec{r}' = (x_0, y_0 - \frac{1}{2}gt^2)$$

Applicando le trasformazioni galileiane avremo che, rispetto al laboratorio:

$$\vec{a} = -g\hat{y}, \quad \vec{v} = v_0\hat{x} - g\hat{y}, \quad \vec{r} = (x_0 + v_0t, y_0 - \frac{1}{2}gt^2)$$

Avremo allora che il tempo impiegato a toccare terra sarà uguale nei due sistemi di riferimento sarà identico:

$$t^* = \sqrt{\frac{2y_0}{g}}$$

mentre le velocità saranno diverse:

$$\vec{v}'(t^*) = -\sqrt{2gy_0}\hat{y}, \quad \vec{v}(t^*) = v_0\hat{x} - \sqrt{2gy_0}\hat{y}$$

### 41.2 Angolo della pioggia

Calcoliamo l'angolo ottimale a cui va tenuto un ombrello se ci sposta con velocità  $v_u$  di 3m/s e la pioggia cade a  $v_p$  di 8m/s. Applicando le trasformazioni avremo che:

$$\vec{v}'_p = \vec{v}_p - v_u\hat{x}$$

L'angolo di  $\vec{v}_p'$ , ovvero la velocità della pioggia nel sistema di riferimento dell'uomo, sarà allora:

$$\tan^{-1} \frac{v_u}{v_p} = 20.55^\circ$$

### 41.3 Barca con velocità relativa

Una barca parte dall'origine e si dirige verso la riva opposta di un fiume di larghezza  $L$  dove la corrente scorre con velocità  $V_A$  costante. La barca, di per sé, si muove con velocità  $V_B$  costante verso la riva, mantenendosi sempre perpendicolare al fiume. Calcoliamo allora il punto  $K$  dove la barca arriva a riva. Avremo un sistema di riferimento  $S'$  solidale all'acqua, dove:

$$\vec{v}_0 = -V_A \hat{x}, \quad \vec{v}' = V_B \hat{y}$$

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{v}_0 = (V_A, V_B)$$

Il tempo impiegato a toccare riva sarà:

$$t = \frac{L}{V_B}$$

E avremo quindi che il punto  $K$  sarà dato da:

$$\vec{K} = (V_A t, V_B t) = (V_A t, L)$$

Mettiamo che il punto  $K$  si trovi oltre una pericolosa cascata: avremo quindi bisogno di opporci alla corrente per raggiungere un secondo punto, detto  $H$ , più vicino. La velocità  $V_B$  della barca non sarà quindi perpendicolare alla riva, ma formerà con essa un certo angolo  $\theta$ :

$$\vec{v}' = \vec{V}_B = -V_B \cos \theta \hat{x} + V_B \sin \theta \hat{y}$$

da cui:

$$\vec{v} = (V_A - V_B \sin \theta, V_B \cos \theta) = (0, V_B \cos \theta)$$

Il tempo di raggiungimento della riva sarà allora:

$$t = \frac{L}{V_B \cos \theta}$$

Abbiamo chiaramente che:

$$\frac{L}{V_B} \leq \frac{L}{V_B \cos \theta}$$

ovvero, opporsi alla corrente significa evitare la cascata, ma anche impiegare un tempo maggiore a raggiungere la riva!

## 42 Sistemi di riferimento uniformemente accelerati

Prendiamo adesso in considerazione un sistema di riferimento mobile  $SM$  in moto con velocità  $\vec{v}_t$  e accelerazione costante  $\vec{a}_t$ . Il moto di  $SM$  va considerato come puramente traslatorio, i suoi assi non ruotano. La relazione fra le posizioni diventa quindi:

$$\vec{r} = \vec{r}' + \vec{r}_{OO'}(t)$$

che deriveremo in:

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{v}_t, \quad \vec{v}_t = \frac{d\vec{r}_{OO'}}{dt}$$

$$\vec{a} = \vec{a}' + \vec{a}_t, \quad \vec{a}_t = \frac{d\vec{v}_t}{dt}$$

$$\vec{a} = \vec{a}' + \vec{a}_r$$

Ovvero:

$$\begin{cases} \vec{r} = \vec{r}' + \vec{r}_{OO'}(t) \\ \vec{v} = \vec{v}' + \vec{v}_t \\ \vec{a} = \vec{a}' + \vec{a}_T \end{cases}$$

Si noti che nel sistema di riferimento accelerato non vale l'inerzia. Se in un sistema di riferimento inerziale si ha:

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} = m(\vec{a} + \vec{a}_r)$$

nel sistema accelerato questa legge non vale:

$$m\vec{a}' = \sum \vec{F} - m\vec{a}_T$$

E si osserva una forza, detta forza apparente, pari a  $\vec{F}_a = -m\vec{a}_T$ :

$$\sum \vec{F} - m\vec{a}_T = \sum (\vec{F} + \vec{F}_{app})$$

Una forza apparente non è data da l'interazione fra due corpi, ma dall'inerzia. Per essa non vale il terzo principio della dinamica (azione e reazione). La stessa cosa non si osserva in un sistema inerziale (e qui dovrebbe diventare chiaro) in quanto:

$$m\vec{a}_T = 0 \Rightarrow \vec{F}_{app}, \quad m\vec{a} = \sum \vec{F} + 0$$

## 42.1 Treno in frenata

Consideriamo lo stesso treno di prima, che dopo un tratto a velocità costante  $v_0$ , inizia a frenare e si arresta in tempo  $t$ . Un passeggero di massa  $m$ , che resta seduto durante la frenata, percepisce una certa forza apparente, pari a  $ma_T$ , dove  $a_T$  è l'accelerazione del treno in frenata, data da:

$$a_T = \frac{v_0}{t}$$

Quando il treno si ferma, rispetto al treno il viaggiatore è fermo, ergo  $|\vec{a}| = 0$ , e:

$$m\vec{a} = \sum(\vec{F} + \vec{F}_{app}) = 0 \Rightarrow \sum \vec{F} = -\vec{F}_{app} = m\vec{a}_T$$

## 42.2 Cartellina sul tettuccio

Un signore sbadato dimentica sul tettuccio della sua automobile una cartellina, prima di partire di moto rettilineo uniformemente accelerato. Vogliamo calcolare il coefficiente di attrito statico minimo fra la cartellina e il tettuccio dell'automobile necessario a non farla scivolare via. Nel sistema di riferimento della cartellina, avremo una forza apparente data dall'accelerazione dell'automobile:

$$F_{app} = -m\vec{a}_T$$

E una forza d'attrito:

$$F_s = mg\mu_s$$

diretta nella direzione dello spostamento dell'automobile. La condizione di equilibrio sarà raggiunta quando queste due forze (di cui una apparente!) si eguaglieranno in modulo (in modo da annullarsi):

$$m\vec{a}_T = mg\mu_s, \quad \mu_s = \frac{\vec{a}_T}{g}$$

Mettiamo che il coefficiente di attrito effettivo  $\mu_s$  sia minore del coefficiente ottimale appena calcolato. In questo caso la cartellina scivola via opposta da una forza di attrito dinamico con coefficiente  $\mu_d$ . Possiamo calcolare l'accelerazione subita dalla cartellina nel sistema di riferimento dell'automobile e di laboratorio (fermo rispetto alla cartellina e all'automobile). Da terra vedremo che l'unica accelerazione a cui è sottoposta la cartellina è quella dell'attrito dinamico:

$$m\vec{a} = F_d = mg\mu_d$$

mentre dal punto di vista dell'automobile l'accelerazione è pari alla differenza fra l'accelerazione impressa dall'attrito dinamico e quella propria dell'automobile stessa:

$$m\vec{a}' = F_d - ma_T = mg\mu_d - ma_T$$

### 42.3 Treno accelerato

Un treno si muove sui binari di moto rettilineo uniformemente accelerato. In un certo istante, diciamo  $t = 0$  (con treno in partenza da fermo), viene lanciata una monetina con una certa velocità iniziale verso l'alto  $v_0$ . Ci poniamo il problema di calcolare la distanza sul pavimento del treno a cui atterra la monetina, ovvero lo spazio percorso dalla monetina lungo l'asse  $x$ , nel sistema di riferimento del treno, una volta caduta nuovamente a terra. Impostando le relazioni:

$$\begin{cases} \vec{r} = \vec{r}' + \vec{r}_{OO'}(t) \\ \vec{v} = \vec{v}' + \vec{v}_t \\ \vec{a} = \vec{a}' + \vec{a}_T \end{cases}$$

osserviamo che, sul sistema di riferimento del treno non è accelerato rispetto all'asse  $y$ , ergo sull'asse verticale il moto uniformemente accelerato della monetina in caduta libera si svolge in modo identico a quanto si sarebbe svolto in un sistema di riferimento inerziale. A questo punto la velocità percorsa dalla monetina sarà uguale alla distanza percorsa dal treno nel tempo che la monetina impiega a cadere nuovamente a terra (questo rispetto al treno, avessimo voluto calcolare la distanza rispetto a terra avremmo dovuto tenere conto della velocità iniziale della monetina lungo la direzione di spostamento del treno, che potrebbe essere stata maggiore di zero per  $t > 0$ ). Possiamo quindi calcolare il tempo di caduta della monetina sull'asse verticale:

$$h = v_0 t - \frac{1}{2}gt^2, \quad t_1 = 0, \quad t_2 = \frac{2v_0}{g}$$

dove le due soluzioni della quadratica rappresentano il punto di partenza a  $t = 0$ , quando la monetina è chiaramente al livello del pavimento, e il punto di atterraggio che a noi interessa. A questo punto calcoliamo la distanza percorsa dal treno nel tempo calcolato (che potremmo chiamare  $t^*$ ):

$$d = \frac{1}{2}at^{*2} = \frac{2av_0^2}{g^2}$$

dove si è chiaramente assunto spostamento e velocità iniziale del treno come nulle.

Potremo allora porci il problema, leggermente più complesso, di ricavare la traiettoria percorsa dalla monetina nel sistema di riferimento del treno, come in quello di laboratorio (che non sono uguali!):

- **Traiettoria nel S.R. di laboratorio:** possiamo applicare le relazioni impostate prima, con le leggi orarie dei moti verticali ed orizzontali della monetina:

$$\vec{r} = \vec{r}' + \vec{r}_{OO'}(t), \quad \vec{r}_{OO'}(t) = \vec{r}_{OO'}(0) + \vec{v}_{OO'}(0)t + \frac{at^2}{2}\hat{x}$$

$$\vec{r}' = -\frac{at^2}{2}\hat{x} + \left(-\frac{gt^2}{2} + v_0t\right)\hat{y}$$

da cui:

$$\vec{r} = \left(-\frac{gt^2}{2} + v_0t\right)\hat{y} + \vec{r}_{OO'}(0) + \vec{v}_{OO'}(0)t$$

che è l'equazione (simmetrica) di una parabola.

- **Traiettoria nel S.R. del treno:** nel sistema di riferimento del treno, potremo assumere  $g'$  come la nostra forza di gravità, composta non solo dalla componente verticale  $g\hat{y}$ , ma anche dalla componente orizzontale data dall'accelerazione del treno  $-a_T\hat{x}$ . Modulo e angolo di questa forza saranno rispettivamente:

$$|g'| = \sqrt{a^2 + g^2}, \quad \theta = \tan^{-1}\left(\frac{a}{g}\right)$$

Il risultato, come nel caso precedente, sarà una parabola, ma questa volta asimmetrica: l'asse sarà infatti parallelo alla direzione della "nuova" accelerazione di gravità percepita all'interno del treno, e avrà quindi angolo:

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{a}{g}\right)$$

Può essere interessante considerare la traiettoria della monetina nel caso il treno si muova di moto rettilineo uniforme anziché uniformemente accelerato.

- **Traiettoria nel S.R. di laboratorio:** visto che la monetina viene lanciata con una velocità iniziale pari a quella del treno, si ha dalle relazioni galileiane che la velocità sull'asse x è:

$$v_x = v'_x + v_0, \quad v'_x = v_0 \Rightarrow v_0 = 0$$

ergo la monetina resta ferma sull'asse x, parte da un punto sul pavimento del treno e atterra esattamente al solito posto.



- **Traiettoria nel S.R. del treno:** il caso sarà qui analogo agli esempi visti prima, la legge oraria sarà infatti:

$$\vec{r} = (v_0 t, v_i t - \frac{1}{2} g t^2)$$

che è la traiettoria di una parabola simmetrica (come conseguenza, qui anche più chiara, del teorema della funzione implicita).

## 43 Sistemi di riferimento rotanti

Consideriamo il caso in cui il nostro sistema mobile non inerziale ruota con una certa velocità angolare  $\vec{\omega}$ . Si può ricavare l'accelerazione di trascinamento:

$$\vec{a}_T = 2\vec{\omega} \times \vec{v}' - \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) = 2\vec{\omega} \times \vec{v}' - \omega^2 \vec{R}$$

Da cui si ha la relazione fra accelerazioni:

$$\vec{a} = \vec{a}' + \vec{a}_T = \vec{a}' + 2\vec{\omega} \times \vec{v}' - \omega^2 \vec{R}$$

Dove:

- $2\vec{\omega} \times \vec{v}'$  è l'accelerazione di Coriolis, dipendente dalla velocità del SM sul sistema in rotazione.
- $-\omega^2 \vec{R}$  è un'accelerazione centrifuga dovuta alla forza centripeta che mantiene l'oggetto in rotazione.

Possiamo quindi esprimere le forze apparenti con:

$$m\vec{a}' = \sum \vec{F} + \vec{F}_{app} \Rightarrow \vec{F}_{app} = m(-2\vec{\omega} \times \vec{v}' + \omega^2 \vec{R})$$

dove le due componenti di  $\vec{F}_{app}$  rappresentano rispettivamente la forza di Coriolis e la forza centrifuga.

Possiamo dimostrare che queste due componenti sono necessarie facendo l'esempio di un moto circolare uniforme, e osservando la relazione fra l'accelerazione osservata dal punto in rotazione e quella osservata da un sistema di riferimento inerziale fermo rispetto al moto. Sia  $\vec{a}'$  l'accelerazione rispetto al sistema in quiete, abbiamo:

$$\vec{a}' = -\omega^2 \vec{R}, \quad \vec{v} = -\vec{\omega} \times \vec{R}$$

che sono le formule dell'accelerazione centripeta e della velocità tangenziale di un punto in rotazione di moto circolare uniforme. Possiamo allora applicare la relazione:  $\vec{a} = \vec{a}' + \vec{a}_T$ , con  $\vec{a}_T$  accelerazione apparente:

$$\vec{a} = \vec{a}' + \vec{a}_T \Rightarrow \vec{a}' = \vec{a} - \vec{a}_T$$

$$\vec{a}' = \vec{a} - 2\vec{\omega} \times \vec{v}' + \omega^2 \vec{R}$$

A questo punto, sappiamo  $\vec{a}$  essere nulla in quanto il punto in rotazione è effettivamente in quiete rispetto al suo sistema di riferimento (non inerziale), ergo:

$$\Rightarrow \vec{a}' = -2\omega^2 \vec{R} + \omega^2 \vec{R} = -\omega^2 \vec{R}$$

che è coerente con quanto detto prima.

Dal punto di vista opposto, ovvero con  $\vec{a}'$  uguale all'accelerazione del punto in rotazione dal suo stesso punto di riferimento, avremo:

$$\vec{a}' = 0, \quad \vec{a} = -\omega^2 \vec{R}, \quad \vec{v} = -\vec{\omega} \times \vec{R}$$

di cui le ultime due analoghe al caso precedente. Possiamo allora applicare nuovamente la relazione:

$$\vec{a}' = \vec{a} - 2\vec{\omega} \times \vec{v}' + \omega^2 \vec{R} = -\omega^2 \vec{R} + \omega^2 \vec{R} = 0$$

che è nuovamente coerente con quanto detto prima, come dovrebbe essere.

### **Dimostrazione dell'accelerazione di trascinamento**

Diamo adesso una dimostrazione formale della formula riportata sopra. Impostiamo, come prima,  $S$  come sistema di riferimento stazionario, e  $S'$  come sistema in rotazione. Avremo allora le relazioni:

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{r} = \vec{r}' + \vec{r}_{OO'}(t) \\ \vec{v} = \vec{v}' + \vec{v}_t \\ \vec{a} = \vec{a}' + \vec{a}_T \end{array} \right.$$

Notiamo a questo punto che per una qualsiasi posizione  $\vec{r}'$  rispetto al sistema mobile  $S'$ , la relativa posizione in  $S$  sarà, in termini di derivate:

$$\frac{d}{dt}\vec{r} = \frac{d}{dt}\vec{r}' + \vec{\omega} \times \vec{r} \quad (1)$$

e visto che la derivata della posizione non è altro che la velocità, avremo anche:

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{\omega} \times \vec{r} \quad (2)$$

Useremo queste due ultime equazioni nel corso della dimostrazione. Impostiamo allora l'accelerazione, come definita dalla relazione precedente:

$$\vec{a} = \frac{d}{dt}\vec{v} = \frac{d}{dt}(\vec{v}' + \vec{\omega} \times \vec{r}) = \frac{d}{dt}\vec{v}' + \frac{d}{dt}(\vec{\omega} \times \vec{r})$$

si applica la (2) e la regola di derivazione del prodotto (vettoriale):

$$= \frac{d}{dt}\vec{v}' + \vec{\omega} \times \vec{v}' + \frac{d}{dt}\vec{\omega} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \frac{d}{dt}\vec{r}$$

si applica la (1), e si riconosce che  $\frac{d}{dt}\vec{v}' = \vec{a}'$  e  $\frac{d}{dt}\vec{r}' = \vec{v}'$ :

$$= \frac{d}{dt}\vec{v}' + \vec{\omega} \times \vec{v}' + \frac{d}{dt}\vec{\omega} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \left(\frac{d}{dt}\vec{r}' + \vec{\omega} \times \vec{r}\right) = \frac{d}{dt}\vec{v}' + \vec{\omega} \times \vec{v}' + \frac{d}{dt}\vec{\omega} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \vec{v}' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$$

Da cui l'equazione finale:

$$\vec{a} = \vec{a}' + \frac{d}{dt}\vec{\omega} \times \vec{r} + 2\vec{\omega} \times \vec{v}' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$$

di cui notiamo l'ultimo fattore può essere riportato anche come  $(-\omega^2\vec{r})$ . Classifichiamo tutti i termini dell'equazione:

- $\vec{a}'$  è semplicemente l'accelerazione rispetto al sistema di riferimento mobile;
- $\frac{d}{dt}\vec{\omega} \times \vec{r}$  è una forza (qua accelerazione) conseguente della variazione di velocità angolare del moto, nota come forza di Eulero;
- $2\vec{\omega} \times \vec{v}'$  è l'accelerazione di Coriolis, che agisce su corpi in movimento rispetto al sistema di riferimento mobile, e influenza ad esempio le correnti dei venti terrestri, provocando fenomeni quali gli uragani (che sulla terra girano in senso antiorario sopra l'equatore e orario sotto).
- $\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$  oppure  $(-\omega^2\vec{r})$  è l'accelerazione centrifuga.

Tutte queste forze sono apparenti! Esistono soltanto come conseguenza del sistema di riferimento scelto, e non dall'interazione fra corpi. In questo non rispettano le leggi di Newton.

## 44 Quantità di moto

La quantità di moto è una grandezza vettoriale definita come:

$$\vec{P} = m\vec{v}$$

dove  $m$  è la massa di un corpo e  $v$  la sua velocità in un dato istante. Si misura in  $\text{kg}\cdot\text{m/s}$ .

### Quantità di moto e leggi di Newton

La quantità di moto ci permette di riformulare il primo principio della dinamica, riguardante l'inerzia, specificando che la quantità di un punto materiale isolato resta costante: la sua massa non varia, e per inerzia nemmeno la sua velocità.

$$\Delta\vec{p} = \vec{p}(f) - \vec{p}(i) = \int_i^f \vec{F} = 0 \Rightarrow \vec{p} = \text{const.}$$

Se invece una forza (e quindi un'accelerazione) agisce sul corpo cambiandone la velocità, la quantità di moto varierà come:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = m\vec{a} = \vec{F}$$

## 45 Impulso di una forza

L'impulso di una forza è definito, fra due istanti  $t_0$  e  $t$ , come:

$$\vec{I}_{t_0 \rightarrow t} = \int_{t_0}^t \vec{F} dt'$$

L'impulso è una grandezza vettoriale espressa in  $\text{kg}\cdot\text{m/s}$ , la stessa unità di misura della quantità di moto. Si può quindi dimostrare:

### Teorema dell'impulso

La variazione della quantità di moto  $\Delta\vec{p}$  di un punto materiale è pari all'impulso totale delle forze esterne:

$$\Delta\vec{p} = \Delta\vec{p}(t) - \Delta\vec{p}(t_0) = \int_{t_0}^t \vec{F} dt'$$

Questo si può dimostrare da:

$$\int_{t_0}^t \vec{F} dt' = \int_{t_0}^t m\vec{a} dt' = [m\vec{v}]_{t_0}^t = m\vec{v}(t) - m\vec{v}(t_0) = \vec{p}(t) - \vec{p}(t_0) = \Delta\vec{p}$$

## 46 Moto di un corpo composto

Un corpo composto non'è altro che un corpo formato da un insieme di punti materiali. Quando si considerano sistemi formati da più punti materiali connessi fra loro, occorre fare una distinzione fra:

- **Forze interne:** forze che sono interne al sistema, esercitate fra i corpi appartenenti al sistema fra di loro;
- **Forze esterne** forze che sono esterne al sistema. esercitate dall'ambiente sui punti materiali.

### Dinamica di un sistema di punti materiali

Per ciascuno dei punti materiali di un sistema possiamo scrivere:

$$m\vec{a}_i = \vec{R}_i$$

Dove  $\vec{R}_i$  è la risultante di tutte le forze sul punto materiale, interne ed esterne.

$$\sum m_i \vec{a}_i = \sum R_i^{est} + \sum_{j \neq i} \vec{F}_{ij} = \sum R_i^{est} + \sum_{j \neq i} \sum \vec{F}_{ij}$$

dove tutte le sommatorie da senza pedice sono da 1 a  $n$  numero di punti materiali nel sistema.

### Centro di massa di un sistema

Definiamo come centro di massa di un sistema il "punto medio" della massa:

$$\vec{r}_{CM} = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{\sum m_i}$$

Definendo la massa del sistema  $M$  come:  $\sum m_i$  possiamo riscrivere come:

$$\vec{r}_{CM} = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{M}$$

Le coordinate del punto di massa su  $x, y$  e  $z$  saranno a questo punto:

$$x_{CM} = \frac{\sum m_i x_i}{\sum m_i}, \quad y_{CM} = \frac{\sum m_i y_i}{\sum m_i}, \quad z_{CM} = \frac{\sum m_i z_i}{\sum m_i}$$

Si può definire l'impulso del centro di massa  $\vec{P}_{CM}$  come l'impulso sulla massa  $M$ :

$$\vec{P}_{CM} = M \vec{v}_{CM} = \sum m_i \vec{v}_i$$

Dove dovremo definire la velocità del centro di massa  $\vec{V}_{CM}$ :

$$\vec{V}_{CM} = \frac{d\vec{r}_{CM}}{dt} = \frac{d}{dt} \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{M} = \frac{1}{M} \frac{d}{dt} \sum m_i \vec{r}_i = \frac{1}{M} \sum m_i \vec{v}_i$$

Questo ci permette di dire, riguardo all'impulso del centro di massa:

$$\vec{P}_{CM} = \sum \vec{p}_i = \sum m_i \vec{v}_i = M \vec{V}_{CM}$$

### Primo teorema del centro di massa

La quantità di moto totale di un sistema (ergo la somma delle quantità di moto di ogni punto del sistema) è uguale alla quantità di un punto materiale avente massa uguale alla massa del sistema e velocità uguale alla velocità del centro di massa del sistema:

$$P_{CM}^{\vec{}} = MV_{CM}^{\vec{}} = \sum m_i \vec{a}_i$$

### Forze interne di sistemi di punti materiali

Se prendiamo un sistema formato da più punti materiali soggetti sia a forze interne (fra di loro), sia a forze esterne (esercitate da altri corpi sul sistema), abbiamo dalle equazioni precedenti:

$$P_{CM}^{\vec{}} = MV_{CM}^{\vec{}} \Rightarrow \sum m_i \vec{a}_i = M a_{CM}^{\vec{}} \\ \sum m_i \vec{a}_i = \sum R_i^{est} + \sum \sum_{j \neq i} \vec{F}_{ij}$$

Se prendiamo il termine  $\sum R_i^{est} + \sum \sum_{j \neq i} \vec{F}_{ij}$ , abbiamo che la sommatoria  $\vec{F}_{12} + \vec{F}_{21} + \dots$  non è altro che la somma di tutte le forze interne del sistema, e quindi di ogni forza con la sua reazione, e non potrà che essere 0. Questo ci permette di enunciare la:

### Prima equazione cardinale dei sistemi

La variazione della quantità di moto di un sistema di punti materiali è uguale alla risultante delle forze esterne agenti sul sistema:

$$\frac{d}{dt} P_{CM}^{\vec{}} = \sum m_i \vec{a}_i = \sum R_i^{est}$$

### Secondo teorema del centro di massa

Il centro di massa di un sistema si muove come un punto materiale di massa uguale alla massa del sistema e sottoposto alla risultante delle forze esterne agenti sul sistema:

$$M a_{CM}^{\vec{}} = \sum R_i^{est}$$

## 47 Applicazioni di quantità di moto e centro di massa

Vediamo alcuni esempi che possono essere modellizzati attraverso centro di massa e quantità di moto.

### Esplosione di un proiettile a mezz'aria

Poniamo di avere un proiettile, come quelli già studiati, il cui moto comincia dall'origine, con una certa velocità  $v_0$  formante un certo angolo  $\theta$  con l'asse  $x$ . Nel punto di altezza massima del proiettile, esso esplode dividendosi in due pezzi. Il primo pezzo cade direttamente verso il basso, accelerato dalla gravità, mentre l'alto prosegue di moto parabolico. Si vuole calcolare le posizioni dove atterrano i due frammenti del proiettile. Inizialmente possiamo dire che le forze coinvolte nell'esplosione sono tutte interne, ergo non influenzano la posizione del centro di massa. Questo significa che il centro di massa proseguirà di moto parabolico. Calcoliamo quindi la "gittata" del centro di massa, applicando le formule già note del moto dei proiettili:

$$x_{CM} = R = \frac{v_0^2 \sin 2\theta}{g}$$

Possiamo allora impostarne la posizione  $x$ :

$$x_{CM} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}$$

Dove  $x_1$  e  $x_2$  saranno rispettivamente la posizione del frammento caduto verso il basso e del frammento che prosegue il moto.  $x_1$  sarà quindi nota, essendo essa coincidente con il punto di altezza massima della parabola descritta dal proiettile prima della caduta, ovvero la metà della gittata del C.M.:

$$x_1 = \frac{R}{2} = \frac{v_0^2 \sin 2\theta}{2g}$$

Questo ci porta a scrivere la gittata completa:

$$R = \frac{m \frac{R}{2} + m x_2}{m_1 + m_2} \Rightarrow x_2 = \frac{3}{2} R = \frac{3}{2} \frac{v_0^2 \sin 2\theta}{g}$$

$x_1$  e  $x_2$  sono i valori cercati (si noti che il frammento con posizione orizzontale  $x_1$  resta sulla stessa ascissa finché non tocca terra).

### Disco rotante con massa sul perimetro

Si abbia un disco in rotazione, quindi in moto circolare uniforme, di raggio  $r$  e di massa  $M$ . Sull'estremità del disco, ovvero sul suo perimetro, è disposta una massetta  $m$ , che chiaramente ruoterà solidalmente al disco. Il centro di massa di questo sistema sarà in costante rotazione, in quanto verrà sfasato dalla presenza della massetta  $m$ . In particolare, possiamo impostare:

$$x_{CM} = \frac{m x_1 + M x_2}{m + M}, \quad y_{CM} = \frac{m y_1 + M y_2}{m + M}$$

Scelto un sistema di coordinate cartesiane centrato sul disco in rotazione, si avrà che  $x_2$ , ovvero il raggio che collega il centro del disco a se stesso, sarà 0, mentre  $x_1$ , ovvero il raggio che collega il centro del disco alla massetta, è il raggio stesso del disco. Questo ci permette di ottenere un raggio  $r_{CM}$ , che collega il centro del disco al centro di massa:

$$r_{CM} = \frac{mr}{m+M}$$

Applicando le solite formule del moto circolare uniforme avremo velocità e accelerazione:

$$v = \omega \frac{mR}{m+M}, \quad a = \omega^2 \frac{mr}{m+M}$$

## 48 Corpo rigido

Vediamo alcune nozioni preliminari per il calcolo del centro di massa del corpo rigido. Si inizia con le definizioni di densità:

- **Densità (di volume) di massa**

La densità di massa  $\rho_m$  è definita come la derivata della massa rispetto al volume:

$$\rho_m = \frac{dM}{dV}$$

si misura in  $\frac{kg}{m^3}$ .

- **Densità superficiale di massa**

La densità superficiale di massa  $\sigma_m$  è definita come la derivata della massa rispetto alla superficie:

$$\sigma_m = \frac{dM}{dA}$$

si misura in  $\frac{kg}{m^2}$ . La densità superficiale di massa viene usata nei casi in cui lo spessore dell'oggetto considerato sia trascurabile.

- **Densità lineare di massa**

La densità lineare di massa  $\lambda_m$  è definita come la derivata della massa rispetto alla lunghezza:

$$\lambda_m = \frac{dM}{dl}$$

si misura in  $\frac{kg}{m}$ . La densità lineare di massa viene utilizzata nei casi in cui l'unica grandezza rilevante del corpo è la lunghezza.



Notiamo che in generale,  $\rho_m, \sigma_m$  e  $\lambda_m$  sono funzioni delle dimensioni (grandezze estensive) dei corpi considerati.

### Calcolo del centro di massa di un corpo rigido

Se per un sistema contenente un numero finito di punti materiali avevamo:

$$r_{CM}^{\vec{}} = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{M} = \frac{1}{M} \sum m_i \vec{r}_i$$

Per un corpo rigido di forma qualsiasi, sarà necessario passare al corrispettivo continuo della sommatoria, cioè l'integrale:

$$r_{CM}^{\vec{}} = \frac{1}{M} \int \vec{r}_i dm$$

che diventerà, sulla base delle definizioni precedenti potremo esprimere:

$$r_{CM}^{\vec{}} = \frac{1}{M} \int \vec{r} \rho(\vec{r}) dV$$

in funzione del volume  $V$  (o di altre grandezze estensive nel caso si decida di utilizzarle). Vediamo quindi come si svolge il calcolo dei centri di massa di alcuni corpi:

- **Sbarra con densità lineare di massa costante**

Supponiamo di avere una sbarra di larghezza e profondità trascurabile, e di cui ci interessa quindi solamente la lunghezza  $L$ . Calcoleremo allora la densità lineare di massa  $\lambda_m \frac{dM}{dL} = \frac{M}{L}$  (densità lineare costante). Appliciamo allora l'equazione precedente per la posizione del centro di massa  $R_{CM}^{\vec{}}$ :

$$x_{CM} = \frac{1}{M} \int_0^L x \lambda_m dx = \frac{\lambda_m}{M} \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_0^L = \frac{\lambda_m}{M} \frac{L^2}{2} = \frac{L}{2}$$

che corrisponde al punto medio della sbarra, come l'intuito potrebbe suggerire.

- **Lamina a profilo semicircolare**

Prendiamo una lamina di forma semicircolare, abbastanza sottile da trascurarne la profondità, e calcoliamone il baricentro. Prima di tutto sarà necessario trovare la densità superficiale di massa  $\sigma_m = \frac{dM}{dA}$ :

$$A = \frac{\pi r^2}{2} \Rightarrow \sigma_m = \frac{2M}{\pi r^2}$$

Il centro di massa avrà posizione  $x = 0$  per la simmetria della semicirconferenza. Resta da calcolare la posizione  $y$ . Possiamo impostare l'integrale prendendo "strisce" di altezza  $\Delta y$  dalla posizione  $y = 0$  alla posizione  $y = R$  sull'asse verticale della circonferenza. La larghezza di queste strisce sarà sempre uguale a  $2x$ , con  $x$  la larghezza di uno dei due segmenti in cui l'asse centrale divide la striscia presa sulla circonferenza. L'area della striscia sarà quindi  $2xy$ . Ciò si esprime come:

$$y_{CM} = \frac{1}{M} \int_0^r \sigma_m 2xy dy$$

per eliminare la  $x$  possiamo prendere dall'equazione della circonferenza:

$$x^2 + y^2 = r^2 \Rightarrow x = \sqrt{r^2 - y^2}$$

da cui:

$$y_{CM} = \frac{1}{M} \int_0^r \sigma_m 2y \sqrt{r^2 - y^2} dy$$

L'integrale di  $y\sqrt{r^2 - y^2}$  è:

$$\int y\sqrt{r^2 - y^2} dy = -\frac{1}{3}(r^2 - y^2)^{\frac{3}{2}}, \quad \int_0^r y\sqrt{r^2 - y^2} dy = -\frac{1}{3}(r^2 - y^2)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^r = \frac{1}{3}r^3$$

da cui:

$$y_{CM} = \frac{1}{M} \sigma_m \frac{2}{3} r^3 = \frac{1}{M} \frac{2M}{\pi r^2} \frac{2}{3} r^3 = \frac{4r}{3\pi}$$

#### • Lamina a profilo triangolare

Facciamo un'esempio simile al precedente, ma con un profilo triangolare retto anziché semicircolare. Chiameremo  $a$  e  $b$  i lati del triangolo. Adottiamo la metodologia usuale: calcoliamo innanzitutto la densità di massa superficiale  $\sigma_m$ :

$$A = \frac{ab}{2} \Rightarrow \sigma_m = \frac{2M}{ab}$$

E adottiamo un approccio di calcolo integrale. Possiamo pensare di dividere il triangolo in strisce orizzontali e verticali per calcolare le posizioni  $x$  e  $y$  del centro di massa. Avremo che per la  $x$ , la striscia ha area:

$$x \cdot by$$

su altezza  $y$  con larghezza  $x$ . Volendo eliminare la  $y$ , riscriviamola in funzione di  $x$ :

$$x \cdot \frac{b}{a}x$$

dove notiamo fra l'altro il termine  $\frac{b}{a} = \tan \theta$  angolo al centro. Impostiamo quindi l'integrale.

$$x_{CM} = \frac{1}{M} \int_0^a \sigma_x \cdot \frac{b}{a} x dx = \frac{1}{M} \frac{2M}{ab} \frac{b}{a} \int_0^a x^2 dx = \frac{2}{a^2} \frac{a^3}{3} = \frac{2}{3}a$$

Per il calcolo di  $y$ , il procedimento è analogo, con l'unica differenza il fatto che la larghezza in  $y$  più piccoli è più grande, e viceversa, ovvero l'area è:

$$y \cdot \frac{a}{b}(b-y)$$

da cui l'integrale:

$$y_{CM} = \frac{1}{M} \int_0^b \sigma_y y \cdot \frac{a}{b}(b-y) dy = \frac{2}{b^2} \int_0^b (yb-y^2) dy = \frac{2}{b^2} \left( b \frac{y^2}{2} \Big|_0^b - \frac{y^3}{3} \Big|_0^b \right) = \frac{1}{3}a$$

abbiamo quindi che il baricentro del triangolo è in  $(\frac{2}{3}a, \frac{1}{3}b)$ . Questo risultato si può avere anche, più direttamente, dalle formule per il baricentro di un triangolo qualsiasi:

$$x_{CM} = \frac{x_A + x_B + x_C}{3}, \quad y_{CM} = \frac{y_A + y_B + y_C}{3}$$

sui punti  $A = (0, 0)$ ,  $B = (a, 0)$ ,  $C = (a, b)$ .

- **Semianello rigido**

Prendiamo un'esempio apparentemente simile a quello della semicirconferenza: quello di un semianello rigido di raggio  $r$  e massa  $M$ . Considereremo la densità lineare di massa, che sarà uguale a  $\lambda_m = \frac{M}{\pi r}$ . Per la simmetria, come nell'esempio semicircolare, la posizione orizzontale del centro di massa sarà  $x = 0$ . Resta da calcolare la componente verticale: può rendersi utile in questo caso un passaggio alle coordinate polari, con:

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta$$

da cui l'integrale:

$$y_{CM} = \frac{1}{M} \int_0^\pi \lambda_m R \cdot R \sin \theta d\theta = \frac{1}{M} \frac{M}{2\pi} r^2 (-\cos \theta \Big|_0^\pi) = \frac{2r}{\pi}$$

## 49 Conservazione della quantità di moto

Consideriamo un sistema a 2 masse,  $m_1$  e  $m_2$ , connesse da una molla su un piano privo di attrito. Estendendo la molla, i due punti materiali si allontaneranno fra di loro e la molla esprimerà sui due capi (e quindi sui punti

materiali stessi) due forze identiche in modulo ma in verso opposto. In simboli, visto che la derivata rispetto al tempo della quantità di moto equivale alla forza, avremo che:

$$\frac{d\vec{p}_1}{dt} = \vec{F}_1, \quad \frac{d\vec{p}_2}{dt} = \vec{F}_2 \Rightarrow \vec{F}_2 = -\vec{F}_1$$

Definendo il vettore quantità di moto totale del sistema  $\vec{P}$ :

$$\vec{P} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2, \quad \frac{d\vec{P}}{dt} = \frac{d\vec{p}_1}{dt} + \frac{d\vec{p}_2}{dt} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = 0$$

Ciò significa che la variazione di quantità di moto è nulla, ergo la quantità di moto non cambia nel tempo. Più propriamente, se su un sistema di punti materiali agiscono solamente forze interne, o se la risultante delle forze esterne è nulla (\*), allora la quantità di moto  $\vec{P}$  del sistema è un vettore costante nel tempo. Ricordando il teorema dell'impulso (riportato negli appunti come principio cardinale dei sistemi):

$$\frac{d}{dt}P_{CM} = \sum \vec{R}^{(est)}$$

la condizione (\*) diventa  $\sum \vec{R}^{(est)} = 0$ , che come vediamo già risultava in variazione nulla della quantità di moto.

Questa legge di conservazione può essere applicata, più generalmente, in due casistiche:

- La risultante delle forze esterne è nulla;
- Le forze esterne non sono nulle, ma esse sono limitate, e la durata dell'interazione è trascurabile ( $t \rightarrow 0$ ).

Possiamo inoltre applicare la conservazione su un solo asse, nel caso le condizioni precedenti non siano rispettate su assi diversi.

### Applicazioni della conservazione della quantità di moto

La conservazione della quantità di moto, assieme alla conservazione dell'energia, può essere utilizzata per modellizzare semplicemente numerosi fenomeni fisici riguardanti l'interazione fra più corpi (si ricordano ad esempio gli urti). Vediamo un esempio interessante: una pallina di massa  $m_1$  parte dalla cima di una superficie a profilo semicircolare di massa  $m_2$ , situata su un piano senza attrito. Cadendo, la pallina spinge la superficie, così che al termine della caduta entrambe saranno in moto rettilineo uniforme verso direzioni

opposte. Si vuole calcolare le velocità finali di entrambi i corpi. Iniziamo dalla conservazione dell'energia. L'energia potenziale della pallina sospesa sulla superficie nell'istante iniziale verrà interamente convertita in energia cinetica sia della pallina che della superficie, ergo:

$$m_1gh = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2$$

Per eliminare le due incognite  $v_1$  e  $v_2$ , potremo sfruttare il fatto che la conservazione della quantità di moto vale sull'asse x del sistema, in quanto non intervengono forze esterne. Si ha quindi:

$$m_1v_1 + m_2v_2 = p_i$$

dove  $p_i$  è la quantità di moto nell'istante  $t = 0$ , che possiamo subito impostare come nulla in quanto prima della caduta entrambi i corpi sono in quiete. Si avrà quindi che:

$$m_1v_1 + m_2v_2 = 0, \quad m_1v_1 = -m_2v_2 \Rightarrow v_1 = -\frac{m_2v_2}{m_1}$$

Sostituendo nella conservazione dell'energia, avremo:

$$gh = \frac{1}{2}\left(\frac{m_2v_2}{m_1}\right)^2 + \frac{1}{2}\frac{m_2}{m_1}v_2^2 \Rightarrow v_2 = -\sqrt{\frac{m_1^2gh}{m_2(m_1 + m_2)}}$$

Con ragionamenti simili avrà poi:

$$v_2 = -\frac{m_1v_1}{m_2}, \quad gh = \frac{1}{2}v_1^2 + \frac{1}{2}\frac{m_2}{m_1}\left(\frac{m_2v_2}{m_1}\right)^2 \Rightarrow v_1 = \sqrt{\frac{2m_2gh}{m_1 + m_2}}$$

N.B.: i segni sono stati scelti in modo da rispettare la conservazione della quantità di moto. Si assume che la pallina venga spinta verso destra, e la superficie verso sinistra.

## 50 Urti

Ricordiamo la definizione di impulso per una forza:

$$\vec{I}_{t_0 \rightarrow t} = \int_{t_0}^t \vec{F} dt'$$

e il fatto che la sua variazione sulle forze esterne equivale alla variazione della quantità di moto di un sistema:

$$\vec{p}(t) - \vec{p}(t_0) = \int_{t_0}^t \vec{F} dt'$$

### Forze impulsive

Una forza impulsiva è una forza che viene esercitata per un tempo estremamente limitato. Spesso l'intensità di una forza impulsiva  $F_{imp}$  è talmente grande che il suo effetto viene comunque apprezzato, e anzi è talmente predominante da permettere di trascurare gli effetti di altre forze, ovvero:

$$\sum_{i=0}^n \vec{F}_i^{(est)} \approx \vec{F}_{imp}$$

A volte si conosce la variazione della quantità di moto di un corpo su cui ha agito una forza impulsiva per un certo periodo di tempo, ma di cui è sconosciuta l'intensità. Si può allora determinare la forza media impulsiva  $\langle F_{imp} \rangle$  che avrebbe sortito il medesimo effetto fosse stata applicata sull'intervallo  $\Delta t$ :

$$\langle \vec{F}_{imp} \rangle = \frac{\int_{t_i}^{t_f} \vec{F}_{imp} dt}{\Delta t} = \frac{\Delta \vec{p}}{\Delta t}$$

Facciamo un'esempio non intuitivo sulla forza media. Un corpo in movimento con velocità costante  $v_1$  subisce ad un certo punto un'impulso che lo spinge verso l'alto, dandogli nell'istante immediatamente successivo velocità uguale in modulo a  $v_1$  ma orientata di un'angolo  $\theta$  rispetto all'orizzontale. Possiamo impostare:

$$v_1 = (v_1, 0), \quad v_2 = (v_1 \cos \theta, v_1 \sin \theta)$$

Possiamo impostare la conservazione per trovare la forza media:

$$\langle \vec{F}_{imp} \rangle + mg = \frac{\int_0^t \vec{F} dt'}{t} = \frac{m(v_1 - v_2)}{t}$$

possiamo impostare quindi le equazioni sui diversi assi, ricordando che  $mg$  agisce solamente sull'asse  $y$ !

$$\langle F_{imp_x} \rangle = \frac{m(v_{2x} - v_{1x})}{t} = m\left(\frac{v_1(\cos \theta - 1)}{t}\right)$$

$$\langle F_{imp_y} \rangle = \frac{m(v_{2y} - v_{1y})}{t} = m\left(\frac{v_1 \sin \theta}{t}\right)$$

### Collisioni

Quando due punti materiali si avvicinano fra di loro, la loro mutuale interazione produce un cambiamento del loro stato di moto, comportando:

- Scambio di quantità di moto;
- Scambio di energia cinetica.

Quando la variazione di quantità di moto è notevole, mentre la durata dell'interazione molto piccola, si parla di un urto (o collisione). Le forze che producono un urto sono forze impulsive e interne al sistema dei due corpi che collidono, quindi come sempre possiamo trascurare l'effetto delle altre forze non impulsive. Cosa ancorà più importante, visto che le forze impulsive sviluppate sono forze interne al sistema, la quantità di moto totale del sistema si conserva sempre durante un urto. Come vedremo non sempre vale lo stesso per l'energia cinetica.

Analizziamo adesso il moto di due sfere che si incontrano l'un l'altra. Possiamo dividere il moto in 3 fasi:

- Nella prima fase, entrambi i corpi si muovono l'uno verso l'altro, imperturbati da qualsiasi interazione reciproca;
- la seconda fase avviene durante l'urto, in cui avviene l'interazione vera e propria fra i due corpi. In questa fase entrambi i corpi tendono ad occupare lo spazio altrui provocando deformazioni reciproche. Queste deformazioni portano allo sviluppo di una forza elastica che si oppone alla deformazione stessa e cerca di ristabilire l'equilibrio precedente, allontanando quindi le sfere. La variazione è brusca, ergo esiste una forza impulsiva.
- Nella fase immediatamente successiva all'urto, i due corpi si trovano nuovamente in moto imperturbati, ma con moti diversi a quelli di partenza.

### Classificazione delle collisioni

Possiamo classificare gli urti in due categorie principali:

- **Urti anelastici**, dove l'energia cinetica  $K$  non si conserva, perchè le forze di deformazione trasformano l'energia meccanica in altre forme.  $\vec{P}$  come sempre si conserva. Un caso particolare è l'urto completamente anelastico, dove dopo l'urto i corpi restano attaccati fra di loro.
- **Urti elastici**, dove sia  $K$  che  $\vec{P}$  si conservano.

### Urti elastici monodimensionali

Calcoliamo i valori delle velocità di due corpi a seguito di un urto monodimensionale. Impostiamo la conservazione della quantità di moto:

$$\vec{P}_i = \vec{P}_f = m_1 v_{1i} + m_2 v_{2f} = m_1 v_{1f} + m_2 v_{2i}$$

$$-\Delta \vec{P}_1 = \Delta \vec{P}_2 = m_1 (v_{1i} - v_{1f}) = m_2 (v_{2f} - v_{2i})$$

e la conservazione dell'energia:

$$\frac{1}{2}m_1v_{1i}^2 + \frac{1}{2}m_2v_{2i}^2 = \frac{1}{2}m_1v_{1f}^2 + \frac{1}{2}m_2v_{2f}^2$$

con alcuni raccoglimenti, si ha che:

$$\frac{1}{2}m_1(v_{1i}^2 - v_{1f}^2) = \frac{1}{2}m_2(v_{2f}^2 - v_{2i}^2)$$

che è molto simile alla conservazione della quantità di moto. Riscriviamo infatti come:

$$\frac{1}{2}m_1(v_{1i} - v_{1f})(v_{1i} + v_{1f}) = \frac{1}{2}m_2(v_{2f} - v_{2i})(v_{2f} + v_{2i})$$

L'uguaglianza dei termini di questa equazione che presentano differenze di velocità è assicurata dalla conservazione dell'energia. Resta quindi soltanto:

$$v_{1i} + v_{1f} = v_{2i} + v_{2f} \Rightarrow v_{1i} - v_{2i} = v_{2f} - v_{1f}$$

ovvero le velocità relative dei due oggetti si conservano dopo l'urto. Abbiamo quindi che:

$$\begin{cases} v_{1i} - v_{2i} = v_{2f} - v_{1f} \\ m_1(v_{1i} - v_{1f}) = m_2(v_{2f} - v_{2i}) \end{cases}$$

Da questo sistema possiamo ricavare algebricamente le velocità  $v_{1f}$  e  $v_{2f}$ :

$$v_{1f} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}v_{1i} + \frac{2m_2}{m_1 + m_2}v_{2i}$$

$$v_{2f} = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}v_{2i} + \frac{2m_1}{m_1 + m_2}v_{1i}$$

### Urti perfettamente anelastici monodimensionali

Gli urti elastici sono più complessi da modellizzare, in quanto disponiamo solamente di un'equazione per risolvere il problema, la conservazione della quantità di moto ( $P$ ). Nell'urto perfettamente anelastico si ha però che dopo l'urto i due corpi procedono assieme attaccati l'uno all'altro, con la stessa velocità  $v_f$ . Avremo quindi che:

$$\vec{P} = m_1v_{1i} + m_2v_{2i} = (m_1 + m_2)v_f, \quad v_f = \frac{m_1v_{1i} + m_2v_{2i}}{m_1 + m_2}$$

dove  $v_f$  era l'unica incognita del sistema. Possiamo allora considerare l'energia cinetica:

$$K_f - K_i = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v_f^2 - \frac{1}{2}m_1v_{1i}^2 - \frac{1}{2}m_2v_{2i}^2 = -\frac{1}{2}\frac{m_1m_2}{m_1 + m_2}(v_{1i} - v_{2i})^2 < 0$$



ovvero notiamo che a seguito del processo di urto l'energia cinetica del sistema è diminuita (è stata "usata" nella deformazione degli oggetti in collisione, oppure trasformata in suono, energia termica, ecc...).

### **Pendolo balistico**

Vediamo un esempio: un pendolo balistico usato per rilevare la velocità dei proiettili. Il pendolo è costituito da un blocco sospeso da due funi. Il blocco, inizialmente fermo, una volta colpito dal proiettile (di urto completamente anelastico, il proiettile rimane infatti conficcato nel blocco), sale di una certa distanza verso l'alto, sottoposto alla spinta infertagli. Le condizioni iniziali sono quindi  $v_{1i} > 0$ ,  $v_{2i} = 0$ . Il sistema è soggetto sia a forze impulsive che si esplicano durante l'urto, sia alla forza peso, che però non consideriamo durante l'urto. Abbiamo innanzitutto che la velocità finale del pendolo sarà:

$$v_f = \frac{m_1 v_{1i}}{m_1 + m_2}$$

Notiamo adesso che dopo l'urto, l'energia si conserva: tutte le forze non conservative agiscono solamente nell'istante dell'urto. Posso quindi applicare la conservazione dell'energia:

$$\frac{1}{2}(m_1 + m_2)v_f^2 = (m_1 + m_2)gh, \quad v_f = \sqrt{2gh}$$

Se diversamente alle nostre ipotesi l'urto fosse stato elastico, oltre ad una situazione particolarmente pericolosa, avremo che l'energia cinetica si conserverebbe. Possiamo quindi impostare:

$$\begin{cases} v_{1f} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_{1i} \\ v_{2f} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_{1i} \end{cases}$$

## **51 Moto di un corpo rigido**

Per corpo rigido si intende un sistema di punti materiali le cui distanze l'uno dall'altro non variano nel tempo. In altre parole, un corpo rigido non subisce deformazioni. Ricordiamo che il centro di massa di un corpo rigido è dato da:

$$r_{CM} = \frac{1}{M} \int \vec{r} dm = \frac{1}{m} \int \vec{r} \rho dV = \frac{1}{V} \int \vec{r} dV$$

Si rimanda per le altre formule agli appunti relativi al centro di massa.

### **Moto di pura traslazione**

In un moto di pura traslazione, tutte le particelle del corporigido subiscono

lo stesso spostamento nello stesso intervallo di tempo, ergo hanno la stessa velocità (che corrisponderà obbligatoriamente con la velocità del CM). La velocità dei vari punti rispetto al centro di massa sarà allora nulla.

$$v_{\vec{CM}} = \frac{d\vec{r}_{CM}}{dt}, \quad v_{\vec{CM}} = \frac{\int \vec{v} dm}{M} = \vec{v} \int dm/M = \vec{v}, \quad P_{\vec{CM}} = M v_{\vec{CM}} = M \vec{v}$$

Se il corpo non è di pura traslazione vale:

$$v_{\vec{CM}} = \frac{\int \vec{v}(x, y, z) dm}{M}, \quad P_{\vec{CM}} = M v_{\vec{CM}} = M \frac{\int \vec{v}(x, y, z) dm}{M}$$

Vediamo quindi l'accelerazione:

$$a_{\vec{CM}} = \frac{\int \vec{a} dm}{M} = \vec{a} \frac{\int dm}{M} = \vec{a}, \quad M a_{\vec{CM}} = M \vec{a}$$

ovvero in ogni punto del corpo l'accelerazione è la stessa. Come prima, non fosse stato il moto di pura traslazione, vale:

$$a_{\vec{CM}} = \frac{\int \vec{a}(x, y, z) dm}{M}, \quad M a_{\vec{CM}} = \int \vec{a}(x, y, z) dm$$

### Prima equazione cardinale per un corpo rigido

In modo analogo a quanto detto sui sistemi, su un corpo rigido si può dire che la derivata della quantità di moto totale è uguale alla risultante delle sole forze esterne:

$$\frac{dP_{\vec{CM}}}{dt} = M a_{\vec{CM}} = \sum \vec{R}^{est}$$

### Secondo teorema del CM per un corpo rigido

Il centro di massa si muove come un punto di massa totale  $M$  soggetto alla sola risultante delle forze esterne al sistema. Questo ci permette di enunciare la conservazione della quantità di moto: quando la risultante delle forze esterne è nulla, la quantità di moto del corpo rigido resta costante in modulo, direzione e verso.

### Lavoro delle forze interne

Essendo il lavoro dipendente dalla variazione di distanza (spostamento), avremo che il lavoro totale svolto dalle forze interne, o, in simboli:

$$dL_{ij} = \vec{F}_{ij} \cdot d\vec{r}_i + \vec{F}_{ji} \cdot d\vec{r}_j = \vec{F}_{ij} \cdot d\vec{r}_i - \vec{F}_{ij} \cdot d\vec{r}_j = \vec{F}_{ij} \cdot (d\vec{r}_i - d\vec{r}_j) = 0$$

Ciò deriva dal fatto che, per definizione di corpo rigido, le variazioni di posizione fra i punti materiali che compongono il sistema e il centro di massa è

nulla, e lo è quindi anche fra i punti materiali stessi. Questo ci permette di affermare che in un corpo rigido solo le forze esterne determinano la variazione della quantità di moto, ovvero la prima equazione cardinale. Ad esempio, prendiamo la forza di gravità:

$$Ma\vec{C}_M = \int \vec{a}dm = \int \vec{g}dm = Mg$$

## 52 Dinamica rotazionale del corpo rigido

Le forze agenti su un corpo rigido producono, oltre che una traslazione, anche una rotazione. Questa messa in rotazione dipende dal punto di applicazione delle forze rispetto all'asse di rotazione. Ad esempio, immaginiamo il banale gesto di aprire una porta: chiaramente risulterà più facile mettere la porta in rotazione spingendo sulla maniglia, che non sui cardini. Possiamo quindi dire che la nostra azione sulla maniglia produce sulla porta un'accelerazione angolare, accelerazione che è direttamente proporzionale al modulo della forza applicata, al seno che essa forma con l'asse orizzontale della porta, e soprattutto alla distanza fra l'asse di rotazione e il punto di applicazione della forza:

$$\alpha \propto |\vec{F}|R \sin \theta$$

notiamo che  $R \sin \theta$ , che chiameremo  $d$  braccio della forza, rappresenta la lunghezza del segmento perpendicolare alla proiezione dell'asse di applicazione delle forze che si congiunge al centro dell'asse di rotazione. Questa grandezza sarà uguale a  $\vec{R}$  nel caso la forza venga applicata al corpo nella direzione perfettamente perpendicolare all'asse. Negli esempi successivi verrà assunto questo caso: in caso contrario servirà considerare  $\vec{R}$  per quello che dovrebbe veramente essere, ovvero il braccio  $d = R \sin \theta$ . A questo punto  $\alpha$  sarà perpendicolare ad  $\vec{F}$  e  $\vec{R}$ , e quindi diretta lungo l'asse di rotazione.

### Momento di una forza

Definiamo il momento di una forza rispetto a un certo polo  $O$ :

$$\vec{\tau}_0 = \vec{R} \times \vec{F}$$

$\vec{\tau}$  è una grandezza fisica vettoriale, misurata in  $N \cdot m$ , e non in Joule, in quanto non ha nulla a che fare con il lavoro. Sarà nulla nel caso la forza sia parallela a  $\vec{R}$ . Nel caso si parli di rotazione assiale, definiamo poi il momento assiale specifico a quel singolo asse:

$$\tau_z = (\vec{R} \times \vec{F})_z$$

Il momento della forza è positivo nel caso se causa una rotazione in senso orario, negativo se in senso antiorario. La componente lungo l'asse di rotazione del momento di una forza nota anche come momento assiale o momento torcente.

### Momento angolare

Definiamo adesso il momento angolare rispetto ad un polo per un punto materiale. Questa grandezza è nota anche come momento della quantità di moto:

$$\vec{L}_0 = \vec{R} \times m\vec{V} = \vec{R} \times \vec{P}$$

$\vec{L}_0$  ci dà informazioni riguardo all'effettiva rotazione di un punto attorno al polo ( $\omega$  diretta lungo  $\vec{R} \times \vec{V}$ ), è una grandezza fisica vettoriale misurata in  $J \cdot s$ . Per un moto piano attorno al polo  $O$  avremo:

$$\vec{L}_z = mV_\theta R = mR^2\omega$$

sul solo asse  $z$ . Anche in questo caso otteniamo un vettore perpendicolare al piano della rotazione.

### Teorema del momento angolare

La derivata rispetto al tempo del momento angolare di un punto materiale è uguale alla somma vettoriale dei momenti agenti sul piano materiale:

$$\vec{\tau}_{tot} = \frac{d\vec{L}_0}{dt} = \sum \vec{\tau}_i$$

N.B.: questo quando momento angolare e momento delle forze sono definiti rispetto allo stesso polo  $O$ !

Possiamo dimostrare questo risultato con dei semplici passaggi algebrici:

$$\frac{d\vec{L}_0}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{R} \times m\vec{V}) = \left(\frac{d\vec{R}}{dt}\right) \times m\vec{V} + \vec{R} \times \frac{d}{dt}(m\vec{V}) = \vec{V} \times m\vec{V} + \vec{R} \times \sum \vec{F}$$

Notiamo che  $\vec{V} \times m\vec{V} = 0$ , ergo:

$$\frac{d\vec{L}_0}{dt} = \sum \vec{R} \times \vec{F} = \tau_{tot}$$

### Legge di conservazione del momento angolare

Una conseguenza importante del teorema appena dimostrato è che:

$$\vec{\tau}_{tot} = \frac{d\vec{L}_0}{dt} \Rightarrow \vec{\tau}_{tot} = 0 \Leftrightarrow \vec{L} = \text{const.}$$

ovvero, il momento della quantità di moto (momento angolare) è costante nel caso non agiscano altre forze esterne con momento  $\tau > 0$ .

### Forze centrali

Le forze centrali sono forze che possono essere scritte nella formula generica:

$$\vec{F}(R) = \hat{R}f(R)$$

dove  $f(R)$  è una funzione scalare della distanza dal centro di forza e il punto di applicazione della forza stessa. Esempi di queste forze sono:

- La forza gravitazionale;
- La forza coulombiana
- La forza elastica;
- ecc...

Se cerchiamo di calcolare il momento di una forza centrale, troviamo subito che tale momento è nullo, in quanto  $\vec{R}$  e  $\hat{R}$  sono paralleli per definizione. In altre parole, sotto l'effetto di forze centrali il momento angolare si conserva, ovvero è una costante del moto.

### Momento angolare di un sistema di punti materiali

Possiamo estendere il concetto di momento angolare a sistemi di punti materiali:

$$\vec{L} = \sum_i^n \vec{L}_i = \sum_i^n \vec{R}_i \times \vec{P}_i$$

Sempre rispetto al solito polo  $O$  per tutti i punti. Questo ci permette di enunciare:

### Seconda equazione cardinale della meccanica

$$\vec{\tau}_{est} = \sum_i^n \vec{R}_i \times \vec{F}_{est_i} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

Possiamo dimostrare questo risultato:

$$\vec{L} = \sum_i^n \vec{L}_i = \sum_i^n \vec{R}_i \times \vec{P}_i, \quad \frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_i^n \frac{d\vec{L}_i}{dt} = \sum_i^n \tau_i = \sum_i^n (\tau_{int_i} + \tau_{est_i}) = \tau_{est}$$

Questo vale e si dimostra esattamente nello stesso modo per sistemi di punti materiali.

### Applicazione del momento angolare al pendolo

Il momento delle forze e il momento angolare ci permettono di descrivere il moto del pendolo senza dover ricorrere all'accelerazione centripeta. Posto

un pendolo formato da una massa  $M$  legata da un filo di lunghezza  $l$  ad un perno centrale, potremo calcolare il momento della risultante delle forze sulla massa, ovvero la gravità  $-Mg$  e la tensione del filo  $\vec{T}$ :

$$\tau_{tot} = \vec{R} \times \vec{F}_T + \vec{R} \times \vec{F}_{Mg} = \vec{R} \times Mg \sin \theta = -Mgl \sin \theta$$

Calcoliamo poi il momento angolare della massa:

$$\vec{L} = \vec{R} \times M\vec{V} = \vec{R} \times M(\omega \times \vec{R}) = M\omega l^2$$

possiamo calcolarne la derivata:

$$\frac{d}{dt}\vec{L} = \sum \tau = -Mgl \sin \theta$$

Ricordiamo a questo punto che  $\omega = \dot{\theta}$ ,  $\alpha = \ddot{\theta}$ , ovvero possiamo riscrivere  $\frac{d}{dt}\vec{L}$  anche come:

$$\frac{d}{dt}\vec{L} = Ml^2\alpha = -Mgl \sin \theta$$

da cui si ottiene l'equazione differenziale:

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{l} \sin \theta$$

Possiamo applicare l'usuale approssimazione attraverso Taylor di  $\sin \theta = \theta$  per valori piccoli di  $\theta$ , porre  $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$ ,  $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ , ed ottenere il risultato:

$$\ddot{\theta} = -\omega^2\theta \Rightarrow \theta = A \cos(\omega t + \phi)$$

Che è coerente con quanto già dimostrato riguardo al pendolo semplice in moto piano. Ovviamente  $A$  e  $\phi$  dipenderanno dalle condizioni iniziali dell'eq. differenziale.

### Applicazione dell'energia al pendolo

Tanto per restare in tema, vediamo come il moto del pendolo può essere agilmente spiegato anche attraverso la conservazione dell'energia. Consideriamo il lavoro delle forze: sono tutte conservative, in quanto non c'è attrito, e in particolare  $\vec{T}$  e la gravità  $mg$  nella direzione opposta al filo non compiono alcun lavoro. Possiamo impostare la l'energia, notando che l'altezza da terra  $h$  della pallina è data da  $h = 1 - l \cos \theta$  e la velocità tangenziale  $v$  è  $v = \dot{\theta}l$ :

$$E = U + K = Mgh + \frac{1}{2}Mv^2 = Mg(1 - l \cos \theta) + \frac{1}{2}M\dot{\theta}^2l^2$$

Dalla conservazione dell'energia, avremo che:

$$\frac{d}{dt}E = 0 = 0 - Mgl \sin \theta \cdot \dot{\theta} + \frac{2M\dot{\theta}\ddot{\theta}l^2}{2} = -g \sin \theta + \ddot{\theta}$$

da cui si ricava sempre la solita equazione differenziale:

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{l} \sin \theta$$

### Coppia di forze

Osserviamo come due forze con direzione uguale e verso opposto non generano necessariamente momento nullo. Potremo infatti avere:

$$F_{1_{est}} + F_{2_{est}} = 0, \quad \sum \tau_{est} = \vec{R}_1 \times \vec{F}_{1_{est}} + \vec{R}_2 \times \vec{F}_{2_{est}} = -\frac{d}{2} \vec{F}_z - \frac{d}{2} \vec{F}_z = -d \vec{F}_z \neq 0$$

Questo è il caso di una coppia di forze, applicate su assi sfasati, oppure ad un certo angolo fra di loro, su una certa distanza  $d$  lungo l'oggetto (equivalente a due volte il braccio). Una coppia di forze genera sul corpo una rotazione, ma non una traslazione. Per quanto riguarda le forze interne, vediamo che condividono la retta di applicazione (un braccio passante per il polo), ergo:

$$\sum \tau_{int} = 0$$

## 53 Dinamica del corpo rigido

Possiamo a questo punto riportare le formule trovate finora sul corpo rigido. Ricordiamo che un corpo rigido non è altro che un sistema di punti materiali le cui distanze l'uno dall'altro non cambiano. Una conseguenza di questa limitazione è che gli unici due moti possibili di un corpo rigido sono la pura traslazione (del centro di massa) e la pura rotazione attorno ad un asse. Abbiamo le leggi:

- **Prima equazione cardinale**

$$\frac{d\vec{P}_{CM}}{dt} = M \vec{A}_{CM} = \vec{R}_{est}$$

- **Seconda equazione cardinale**

$$\tau_{est} = \sum \vec{R} \times \vec{F}_{est} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

## 54 Energia potenziale gravitazionale per sistemi di punti materiali

Possiamo dare una definizione di energia potenziale gravitazionale per sistemi di punti materiali, e quindi corpi rigidi, tale per cui l'altezza  $h$  in  $mgh$  (come

avevamo trovato per i punti materiali) vale quanto l'altezza del corpo rigido, ovvero:

$$U_{grav} = \sum_i^n m_i g z_i = Mg \frac{\sum_i^f m_i z_i}{M} = Mg z_{CM}$$

notando che:

$$\frac{\sum_i^f m_i z_i}{M} = \frac{1}{M} \int z dm = z_{CM}$$

## 55 Teorema di König per i sistemi di punti materiali

Dimostriamo adesso un'importante risultato riguardante l'energia cinetica. Stiamo considerando un sistema di punti materiali: definiamo due sistemi di riferimento inerziali. Il primo è il sistema di laboratorio  $S_0(x, y, z)$ , e il secondo è il sistema del centro di massa  $S_{CM}(x', y', z')$  con assi paralleli a  $S_0$  la cui origine è solidale al centro di massa. Vale la relazione:

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{r}_i = \vec{r}_i + \vec{v}_i' t \\ \vec{v}_i = v_{CM} \vec{e} + \vec{v}_i' \\ \vec{a}_i = \vec{a}_i' \end{array} \right.$$

possiamo ricavare sulla base di questa relazione una formula per l'energia cinetica:

$$K = \sum \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \sum \frac{1}{2} m_i (v_{CM} \vec{e} + \vec{v}_i')^2 = \sum \frac{1}{2} m_i v_{CM}^2 + \sum \frac{1}{2} m_i \vec{v}_i'^2 + v_{CM} \vec{e} \cdot \sum m_i \vec{v}_i'$$

Notiamo a questo punto che il termine  $\sum m_i \vec{v}_i'$  equivale alla quantità di moto complessiva nel sistema di riferimento del centro di massa, che è nulla. Possiamo quindi riscrivere il tutto come:

$$K = \frac{1}{2} M v_{CM}^2 + \sum \frac{1}{2} m_i \vec{v}_i'^2$$

Questa formula rappresenta ciò che viene enunciato dal teorema di König: L'energia cinetica totale di un sistema di punti materiali coincide con la somma dell'energia cinetica di traslazione del centro di massa (ovvero l'energia cinetica che avrebbe un corpo di massa uguale alla massa totale dei punti materiali e velocità pari a quella del centro di massa) e dell'energia cinetica



di tutti i punti materiali misurata in un sistema di riferimento con origine solidale al centro di massa e assi paralleli a quelli di laboratorio. L'energia cinetica del centro di massa è data da  $\frac{1}{2}Mv_{CM}^2$ , e quella dei punti materiali nel sistema di riferimento proprio da  $\sum \frac{1}{2}m_i\vec{v}_i'^2$ , da cui la formula sopra riportata.

## 56 Teorema di König per il corpo rigido

Vediamo il significato del teorema di König per i corpi rigidi. Ripartiamo dalla definizione data per i sistemi di punti materiali:

$$K = \frac{1}{2}Mv_{CM}^2 + \sum \frac{1}{2}m_i\vec{v}_i'^2$$

Si avrà che il primo termine, riguardante il centro di massa, avrà esattamente la stessa forma per il corpo rigido. A cambiare sarà il secondo termine, riguardante i moti dei punti materiali rispetto al sistema di riferimento centrato sul centro di massa del sistema: nel caso del corpo rigido, dove le distanze relative fra punti materiali sono costanti, avremo che tale fattore dipende dal moto rotazionale del corpo stesso. Per la precisione, avremo che per qualsiasi punto a distanza  $d_i$  dal centro di massa, la velocità relativa  $\vec{v}_i'$  sarà:

$$\vec{v}_i' = \omega d_i \Rightarrow K = \frac{1}{2}Mv_{CM}^2 + \frac{1}{2}\sum m_id_i^2\omega^2$$

Definiamo la quantità  $I_{CM}$ , detta momento d'inerzia.

$$I_{CM} = \sum_i^n m_id_i^2$$

Il momento di inerzia andrà inteso come il "corrispettivo rotazionale della massa", anche se è importante notare che, a differenza della massa, dipende dall'asse di rotazione scelto. In ogni caso, possiamo ricavare la formula definitiva:

$$K = \frac{1}{2}Mv_{CM}^2 + \frac{1}{2}I_{CM}\omega^2$$

dove il primo termine dipende, come già detto, dal moto traslatorio del centro di massa, e il secondo termine dal moto rotazionale del corpo rigido e dal suo momento di inerzia.

## 57 Momento di inerzia rispetto ad un asse

Consideriamo una massa  $M$  in rotazione a distanza  $R$  dal suo asse. Potremo calcolare il suo momento di inerzia come:

$$I_0 = \sum m_i r_i^2 = MR^2$$

### Momento di inerzia di una sbarretta sottile

Calcoliamo il momento di inerzia di una sbarretta sottile di massa  $M$  e lunghezza  $L$  in rotazione rispetto al suo punto medio. Dovremo conoscere la densità lineare di massa  $\lambda$  della sbarretta:

$$\lambda = \frac{M}{L} = \frac{dm}{dx}, \quad dm = \lambda dx$$

Potremo allora calcolare il momento di inerzia applicando la definizione:

$$I = \int dm x^2, \quad I = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \lambda dx x^2 = \frac{2\lambda}{3} \left( \frac{L}{2} \right)^3 = \frac{ML^2}{12}$$

### Momento di inerzia di un anello omogeneo

Calcoliamo il momento di inerzia di un'anello di massa  $M$  e raggio  $R$ , vuoto, in rotazione rispetto al suo centro. Ragioniamo in modo analogo a prima. La densità lineare di massa sarà:

$$\lambda = \frac{M}{2\pi R}$$

mentre la variazione di lunghezza sull'anello  $dl$  sarà:

$$dm = \lambda dl, \quad dl = R d\phi$$

da cui possiamo quindi calcolare la massa su  $dl$ :

$$dm = \lambda dl = \frac{M}{2\pi R} R d\phi = \frac{M}{2\pi} d\phi$$

Impostiamo allora il momento di inerzia dalla definizione:

$$I = \int_{\text{anello}} R^2 dm = R^2 \int_0^{2\pi} \frac{M}{2\pi} d\phi$$

Notiamo che l'integrale rappresenta semplicemente tutta la massa dell'anello. Avremo quindi che, come prima:

$$I = MR^2$$

### Momento di inerzia di un disco omogeneo

Studiamo il caso analogo al precedente, ma dove l'anello è pieno. Avremo bisogno della densità superficiale di massa:

$$\rho = \frac{dm}{ds} = \frac{M}{\pi R^2}, \quad dm = \rho ds, \quad ds = 2\pi r dr$$

Calcoliamo allora il momento d'inerzia:

$$I = \int dm d^2 = \int \rho ds r^2 = \rho \int 2\pi r dr r^2 = \rho 2\pi \frac{R^4}{4} = M \frac{R^2}{2}$$

### Cubo di masse puntiformi

Calcoliamo il centro di massa di un cubo formato da un punto materiale per ogni suo vertice. Possiamo iniziare sull'asse x: 4 delle masse avranno coordinata  $x = 0$ , e le altre 4 avranno coordinata  $x = l$  con  $l$  lato del cubo. Questo mi porta a dire:

$$x_{CM} = \frac{(4x_l + 4x_0)m}{8m} = \frac{l}{2}$$

Possiamo ripetere quest'operazione su tutti e tre gli assi, ottenendo:

$$r_{\vec{CM}} = \left( \frac{l}{2}, \frac{l}{2}, \frac{l}{2} \right)$$

Com'è abbastanza intuitivo.

Vediamo ora di calcolare il momento di inerzia dello stesso corpo. Sull'asse x si avrà che:

$$I_x = \sum m_i (y_i^2 + z_i^2)$$

Se abbiamo centrato la figura facendo corrispondere il centro di massa all'origine degli assi cartesiani, è vero che:

$$x = \pm \frac{l}{2}, \quad y = \pm \frac{l}{2}, \quad z = \pm \frac{l}{2}$$

Potrò sostituire queste coordinate nella formula precedente ottenendo:

$$I_x = 8m \left( \frac{l^2}{2} \right) = 4ml^2, \quad I_{\vec{CM}} = 4ml^2$$

### Cubo omogeneo

Rifacciamo quanto appena fatto per un cubo omogeneo di massa  $M$ . Per quanto riguarda il centro di massa, avremo che il baricentro è dato da:

$$r_{\vec{CM}} = \frac{1}{M} \int dm \vec{r}$$

Con la densità volumetrica di massa:

$$dm = \rho dv, \quad \rho = \frac{dm}{dv} = \frac{M}{l^3}$$

Possiamo quindi impostare l'integrale:

$$x_{\vec{C}M} = \frac{\rho}{M} \int_0^l x dx \int_0^l dy \int_0^l dz = \frac{\rho}{M} \frac{l^4}{2} = \frac{l}{2}$$

Che è identico al caso discreto.

Calcoliamo allora il momento di inerzia:

$$I_x = \int dm(y^2 + z^2)$$

è perfettamente analogo al caso precedente, solo considerando variazioni continue di massa. Si riprende la densità volumetrica di massa:

$$dm = \rho dv, \quad \rho = \frac{dm}{dv} = \frac{M}{l^3}$$

e si imposta l'integrale:

$$I_x = \rho \int dx dy dz (y^2 + z^2) = \rho \int_{\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} dx \int_{\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} dy \int_{\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} (y^2 + z^2) dz = \rho l \int_{\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} (lx^2 + \frac{y^3}{3} \Big|_{\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}}) dx = [...]$$

che dà il risultato finale di:

$$I = \frac{Ml^2}{6}$$

### **Teorema degli assi paralleli**

Il teorema degli assi paralleli, anche noto come teorema di Steiner, ci permette di calcolare in modo più agevole il momento d'inerzia di un corpo. Supponiamo di aver calcolato il momento di inerzia di un corpo rispetto al suo centro di massa. Poniamo però che il corpo stia adesso ruotando, ma non attorno al suo centro di massa, bensì attorno ad un asse che è parallelo a quello da cui eravamo partiti e sta da esso ad una certa distanza  $D$ . Possiamo allora dire che:

$$I' = I_{CM} + MD^2$$

Dimostriamo questo risultato. Se il momento d'inerzia era stato calcolato ad una distanza  $d'$  da  $dm$ , allora:

$$\vec{a}' = \vec{D} + \vec{d}$$

Da cui si imposta l'integrale:

$$\begin{aligned} I' &= \int dm d'^2 = \int dm (\vec{D} + \vec{d}) \cdot (\vec{D} + \vec{d}) = \int dm (D^2 + 2\vec{d} \cdot \vec{D} + d^2) \\ &= D^2 \int dm + 2\vec{D} \cdot \int dm \vec{d} + \int dm d^2 \end{aligned}$$

Notiamo che:

$$2\vec{D} \cdot \int dm \vec{d} = 2D_x \int dm x + 2D_y \int dm y = 0$$

L'integrale allora potrà ridursi a:

$$I' = D^2 \int dm + \int dm (x^2 + y^2) = MD^2 + I_{CM}$$

Vediamo un'applicazione.

### **Applicazione del teorema di Steiner**

Supponiamo di avere un manubrio formato da due sfere di massa  $M$  e raggio  $R$  unite fra di loro da un'asta lunga  $L$  e di massa  $m$ . Cerchiamo di calcolare il momento di inerzia del corpo rispetto a un asse passante per il centro dell'asta. Innanzitutto potremo calcolare il momento di inerzia dell'asta, rispetto all'asse che passa attraverso il suo centro:

$$I_{asta} = I_{asta}^{CM} = \frac{mL^2}{12}$$

Si calcolerà poi il momento di inerzia di una sfera, applicando il teorema di Steiner:

$$I_{sfera} = I_{sfera}^{CM} + M(R + \frac{L}{2})^2 = \frac{2}{5}MR^2 + M(R + \frac{L}{2})^2$$

Il momento di inerzia totale a questo punto sarà dato da:

$$I_{tot} = I_{asta} + 2I_{sfera} = \frac{mL^2}{12} + 2(\frac{2}{5}MR^2 + M(R + \frac{L}{2})^2)$$

## **58 Momento angolare di un corpo rigido attorno ad un asse**

Vediamo come descrivere il momento angolare di un corpo rigido formato da una distribuzione di massa continua di punti materiali. Avremo che, se il corpo ruota attorno ad un asse con  $\omega$  velocità angolare costante, allora ogni suo

punto ruoterà attorno a tale asse con velocità angolare costante, descrivendo una circonferenza ortogonale all'asse e di raggio tale alla distanza del punto dall'asse. Possiamo allora applicare la definizione di momento angolare:

$$\vec{L} = \sum m_i \vec{R}_i \times \vec{v}_i$$

Ricordiamo allora che  $\vec{v}_i = \vec{\omega} \times \vec{R}_i$  per quanto riguarda il moto circolare uniforme. Allora:

$$\vec{L} = \sum m_i \vec{R}_i \times (\vec{\omega} \times \vec{R}_i)$$

Questo può essere risolto applicando il prodotto vettoriale triplo (niente baci sui taxi!):

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b} \times (\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c} \times (\vec{a} \cdot \vec{b})$$

da cui:

$$\vec{L} = \sum m_i (R_i^2 \vec{\omega} - (\vec{R}_i \cdot \vec{\omega}) \vec{R}_i) = \sum m_i (R_i^2 \vec{\omega} - \omega R_i \vec{R}_i \cos \theta_i)$$

A questo punto conviene scomporre  $\vec{R}_i$  in due componenti (e da qui la grande intuizione): una parallela alla velocità angolare  $\vec{\omega}$  ( $\hat{\omega}$ ), e una ortogonale ad essa ( $\hat{u}$ ):

$$\vec{R}_i = \hat{\omega} R_i \cos \theta_i + \hat{u} R_i \sin \theta_i$$

Questo ci porta a riscrivere  $\vec{L}$  in due componenti, quella lungo  $\hat{\omega}$  e quella lungo  $\hat{u}$ . Dai calcoli, si avrà che la componente lungo  $\hat{\omega}$  (detta componente assiale) varrà:

$$\vec{L}_z = \sum m_i d_i^2 \omega = I_z \omega$$

Ovvero momento di inerzia per velocità angolare, come si era già trovato. Notiamo che siamo passati da  $R_i$  a  $d_i$ , ovvero  $R_i \sin \theta_i$ , la distanza del punto dall'asse di rotazione del corpo.

Particolare sarà invece la componente ortogonale  $\hat{u}$ , che però si osserverà solo nel caso l'asse di rotazione non sia coincidente con uno degli assi di simmetria della distribuzione di massa del corpo rigido:

$$L_u = \sum m_i \omega R_i^2 \sin \theta_i \cos \theta_i$$

Lo svolgimento completo dei calcoli si può trovare a pagina 68 di: [https://github.com/Guray00/IngegneriaInformatica/blob/master/PRIMO%20ANNO/II%20SEMESTRE/Fisica%20Generale%20I/Dispense%20\(A.A.%20corrente\)/Lezione11-Moto\\_di\\_un\\_Corpo\\_RIgido.pdf](https://github.com/Guray00/IngegneriaInformatica/blob/master/PRIMO%20ANNO/II%20SEMESTRE/Fisica%20Generale%20I/Dispense%20(A.A.%20corrente)/Lezione11-Moto_di_un_Corpo_RIgido.pdf)

### Rotazione in distribuzione di massa asimmetrica

Vediamo nel dettaglio la situazione dove la distribuzione di massa è asimmetrica rispetto all'asse di rotazione (può comunque essere simmetrica, solo su

un asse sghembo rispetto a quello di rotazione). Immaginiamo un manubrio formato da un'asta di massa trascurabile e lunghezza  $l$  e due punti materiali di massa  $M$  alle sue estremità. Il manubrio è piegato di un angolo  $\theta$  rispetto alla verticale, e ruota invece proprio attorno alla verticale. Avremo che il suo momento angolare sarà la somma dei momenti delle due masse:

$$\vec{L} = \vec{L}_1 + \vec{L}_2$$

L'angolo formato tra la velocità angolare e il momento angolare sarà allora  $(\frac{\pi}{2} - \theta)$ , da cui:

$$\vec{L} = \sum m_i \vec{R}_i \times \vec{v}_i, \quad v_i = \omega \frac{l}{2} \sin \theta \Rightarrow L_1 = L_2 = M \frac{l}{2} \omega \frac{l}{2} \sin \theta$$

Dividiamo allora questo momento sui due assi:

$$L_{1z} = L_{2z} = L_1 \cos \frac{\pi}{2} - \theta = L_1 \sin \theta = 2L_1 \sin \theta = \frac{M}{2} l^2 \omega \sin \theta^2 = I_z \omega$$

Che corrisponde al momento di inerzia rispetto all'asse di rotazione  $\hat{\omega}$ . Notiamo che qui il momento angolare vale  $I_z = \frac{M}{2} l^2 \sin^2 \theta$ , e  $l \sin \theta$  non è altro che la distanza  $d_i$  del punto materiale dall'asse di rotazione. Ergo vale la solita formula per il momento d'inerzia di una massa sospesa:

$$I_z = m d_i^2, \quad d_i = l \sin \theta \Rightarrow I_z = \frac{M}{2} l^2 \sin^2 \theta$$

Il momento angolare è inoltre costante lungo l'asse  $z$ : il momento delle forze sarà tutto sull'asse  $x$ , visto che l'unica forza in gioco è la forza peso. Si avrà allora che:

$$\tau_z = 0, \quad \frac{dL}{dt} = \vec{\tau} \Rightarrow \frac{dL_z}{dt} = 0, \quad L_z = \text{const.}$$

La componente  $L_{\perp}$  sarà invece in continua variazione, come avevamo già visto.

### **Seconda equazione cardinale per momento angolare parallelo all'asse**

Abbiamo quindi che per distribuzioni di massa simmetrica ( $\vec{L} \parallel \vec{\omega}$ ):

$$\vec{L} = I_z \vec{\omega}$$

Possiamo derivare  $\vec{L}$ :

$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{dI_z \vec{\omega}}{dt} = I_z \vec{\alpha}$$

Questo significa che il momento delle forze esterne agenti rispetto all'asse di rotazione permette di calcolare l'accelerazione angolare  $\vec{\alpha}$ .

## 59 Lavoro nel moto rotazionale

Prendiamo il caso di una carrucola spinta da una forza  $T$  posta ad una distanza  $R$  dal centro. Avremo che il lavoro su uno spostamento infinitesimo  $d\mathcal{L}$  è:

$$d\mathcal{L} = \vec{T} \cdot \vec{dr} = T dr \cos 0, \quad dr = R d\theta$$

$$d\mathcal{L} = T R d\theta = \tau_z d\theta$$

Quindi il momento torcente compie un lavoro pari al momento della forza per la variazione dell'angolo. In generale il lavoro per una rotazione finita dall'angolo  $\theta_i$  all'angolo  $\theta_f$  sarà:

$$\mathcal{L}_{\theta_i \rightarrow \theta_f} = \int_{\theta_i}^{\theta_f} \tau_z d\theta = \int_{\theta_i}^{\theta_f} I_z \dot{\omega} d\theta = \int_{\theta_i}^{\theta_f} I_z \dot{\omega} \omega dt = \int_{\theta_i}^{\theta_f} I_z \frac{d\omega}{dt} \omega dt = \int_{\theta_i}^{\theta_f} I_z \omega d\omega$$

Che da il risultato:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} I_z \omega_f^2 - \frac{1}{2} I_z \omega_i^2$$

### Conservazione dell'energia rotazionale

Riprendiamo la nostra carrucola. Sia una massa  $m$  attaccata alla carrucola attraverso una fune. Calcoliamo allora la variazione di energia meccanica quando la massa scende di un tratto  $h$ , notando che  $h = R\theta$ :

$$\Delta E = L_{NC} = L_{\vec{T}} - L_{\vec{T}} + L_{R_v} = 0$$

Ergo se non ci sono forze non conservative l'energia meccanica si conserva:

$$E_i = E_f, \quad E_i = mgh_i, \quad E_f = \frac{1}{2} m v_m^2 + \frac{1}{2} I \omega^2 + mgh_f$$

$$\Rightarrow mg(h_i - h_f) = \frac{1}{2} m v_m^2 + \frac{1}{2} I \omega^2$$

### Esempio di applicazione della dinamica rotazionale

Vediamo un problema che sapevamo già risolvere attraverso la dinamica, e applichiamo quello che adesso conosciamo sulla dinamica rotazionale per trovare risultati più precisi.

Il problema presuppone una carrucola di raggio  $R$  con due masse,  $m_1$  e  $m_2$ . Le masse collegate dalla carrucola agiranno su di essa con due tensioni,  $T_1$  e  $T_2$ , dipendenti dalla forza peso. Possiamo immaginare queste due tensioni identiche (ovvero sia il filo che la carrucola trascurabili in massa) e impostare le equazioni dinamiche:

$$\begin{cases} m_1 \vec{a}_1 = \vec{T}_1 - m_1 g \\ m_2 \vec{a}_2 = \vec{T}_2 - m_2 g \end{cases}, \quad \vec{T}_1 = \vec{T}_2, \quad \vec{a}_1 = -\vec{a}_2 \Rightarrow m_1 \vec{a} + m_1 g = m_2 g - m_2 \vec{a}$$



Questo si ottiene dal fatto che l'accelerazione in alto di una massa comporta l'accelerazione in basso dell'altra, e viceversa, e dà il risultato:

$$\vec{a} = g \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}$$

Questo risultato è corretto nel caso la carrucola, ricordiamo, abbia massa nulla: le equazioni della dinamica rotazionale ci forniscono un sistema più completo che può invece tenere conto della sua massa. Partiamo dall'equazione trovata prima:

$$I_z \vec{\alpha} = \vec{\tau}_{tot}$$

Dove  $\vec{\alpha}$  è l'accelerazione angolare della carrucola,  $I_z$  il suo momento d'inerzia, e  $\vec{\tau}_{tot}$  il momento risultante delle forze che agiscono su di essa. Possiamo calcolare separatamente questi termini. Iniziamo dal momento d'inerzia, assumendo la carrucola come un disco di massa uniforme  $M$ :

$$I_z = \frac{MR^2}{2}$$

Vediamo poi il momento risultante delle forze  $\vec{\tau}_{tot}$ . Sarà necessario, per tener conto della massa della carrucola, adoperare due diverse tensioni, una per ogni capo della corda,  $T_1$  e  $T_2$ , da non assumere come uguali fra loro:

$$\vec{\tau}_{tot} = \vec{R} \times (T_2 - T_1)$$

Infine  $\vec{\alpha}$  accelerazione angolare è proporzionale di  $R$  all'accelerazione  $a$ , che definiamo come prima come l'accelerazione in direzione di una sola massa (la prima):

$$\vec{\alpha} = \frac{a}{R}$$

Possiamo sostituire quanto trovato nella formula iniziale per ottenere che:

$$I_z \vec{\alpha} = \vec{\tau}_{tot} = \frac{MR^2}{2} \frac{a}{R} = (T_2 - T_1)R \Rightarrow \frac{Ma}{2} = (T_2 - T_1)$$

Ricaviamo quindi la  $(T_2 - T_1)$  dalle equazioni dinamiche ricavate precedentemente:

$$T_2 - T_1 = m_2g - m_2a - m_1a - m_1g$$

Da cui l'equazione finale:

$$\frac{Ma}{2} = m_2g - m_2a - m_1a - m_1g \Rightarrow a = g \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2 + \frac{M}{2}}$$

Notiamo che l'unica differenza dall'approccio precedente è il termine  $\frac{M}{2}$  al denominatore. Se assumiamo  $M = 0$ , le formule corrispondono (che è come dovrebbe essere!).

### Applicazione della conservazione dell'energia rotazionale

Lo stesso risultato si può ottenere attraverso la conservazione dell'energia rotazionale. Nel sistema non agiscono forze non conservative, o almeno le tensioni della fune non svolgono lavoro e non lo fa nemmeno la reazione vincolare della carrucola. Avremo quindi che in qualsiasi momento, l'energia meccanica si conserva:

$$\frac{d}{dt}E = 0$$

Possiamo quindi impostare l'energia meccanica come:

$$E = m_1gh_1 + m_2gh_2 + \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 + \frac{1}{2}I_z\omega^2$$

Dove abbiamo le energie potenziali e cinetiche delle masse e l'energia rotazionale della carrucola. Problematici potrebbero essere i fattori  $h_1$  e  $h_2$ . Imponiamo allora l'inestensibilità della fune: diciamo che la sua lunghezza complessiva  $l$  è sempre costante, ergo le altezze  $h_1$  e  $h_2$  delle masse dovranno essere una l'opposta dell'altra:

$$h_1 = -h_2$$

Otteniamo così un'equazione da derivare, applicando la relazione già usata prima riguardo alle accelerazioni,  $a_1 = -a_2$ .

$$E = m_1gh - m_2gh + \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 + \frac{1}{2}I_z\omega^2$$

$$\frac{d}{dt}E = m_1gv - m_2gv + m_1av + m_2av + \frac{Mva}{2} = 0$$

Per quanto riguarda il fattore  $\frac{Mva}{2}$ , possiamo vedere come si svolgono i calcoli sostituendo  $I_z$  prima o dopo la derivazione:

$$\frac{1}{2}I_z\omega^2 = \frac{1}{2}\frac{MR^2}{2}\omega^2 = \frac{MR^2\omega^2}{4} = \frac{Mv^2}{2}, \quad \text{da } \omega R = v, \quad \frac{d}{dt}\frac{Mv^2}{2} = \frac{Mva}{4}$$

oppure:

$$\frac{d}{dt}\frac{1}{2}I_z\omega^2 = I_z\omega\alpha = \frac{MR^2}{2}\omega\alpha = \frac{MR^2}{2}\frac{va}{R^2} = \frac{Mva}{4}$$

Come vediamo, dividendo per  $v$  (che sappiamo essere  $\neq 0$  in caso di non equilibrio) si ha:

$$\frac{Ma}{2} = m_2g - m_2a - m_1a - m_1g \Rightarrow a = g\frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2 + \frac{M}{2}}$$

Che è esattamente identico a quanto avevamo ottenuto con gli altri metodi. Tomato tomato.

## 60 Teorema di König per il momento angolare

Per un corpo rigido in rotazione con velocità  $\omega$ , il momento rispetto ad un asse di simmetria di distribuzione della masse, o un asse ad esso parallelo, vale per il teorema di König:

$$\vec{L} = M\vec{R}_{CM} \times \vec{V}_{CM} + I\omega$$

dove il primo termine rappresenta il momento angolare del centro di massa rispetto al polo scelto, e il secondo termine rappresenta il momento angolare dovuto alla rotazione attorno al centro di massa.

### Dimostrazione

Dimostriamo adesso questo risultato: iniziamo con la definizione di momento angolare per un sistema di punti materiali:

$$\vec{L} = \sum m_i(\vec{R}_i \times \vec{V}_i)$$

Adesso scomponiamo  $\vec{R}_i$  e  $\vec{V}_i$  in  $(\vec{R}'_i + \vec{R}_{CM})$  e  $(\vec{V}'_i + \vec{V}_{CM})$  rispettivamente, ovvero posizione e velocità del corpo rigido e del punto  $i$  rispetto al punto rigido. Lo svolgimento dei calcoli porterà a:

$$\begin{aligned} L &= \sum m_i(\vec{R}'_i + \vec{R}_{CM}) \times (\vec{V}'_i + \vec{V}_{CM}) \\ &= \sum m_i(\vec{R}'_i \times \vec{V}'_i) + \sum m_i(\vec{R}'_i \times \vec{V}_{CM}) + \sum m_i(\vec{R}_{CM} \times \vec{V}'_i) + M(\vec{R}_{CM} \times \vec{V}_{CM}) \end{aligned}$$

Fra questi termini notiamo  $\sum m_i(\vec{R}'_i \times \vec{V}_{CM})$  e  $\sum m_i(\vec{R}_{CM} \times \vec{V}'_i)$ , entrambi nulli, in quanto il primo rappresenta la posizione del CM nel sistema di riferimento del CM, e il secondo la quantità di moto del CM nel sistema di riferimento del CM. Abbiamo quindi:

$$L = \sum m_i(\vec{R}'_i \times \vec{V}'_i) + M(\vec{R}_{CM} \times \vec{V}_{CM})$$

Riconosciamo il primo termine: è la quantità di moto del corpo rigido attorno ad un asse, divisa nelle componenti  $\hat{z}$  e  $\hat{u}$ :

$$L_z = I\omega, \quad L_u = \sum m_i \omega R_i^2 \sin \theta_i \cos \theta_i$$

Assumendo un asse su una distribuzione di massa simmetrica, o un asse ad esso parallelo, avremo:

$$\vec{L} = M\vec{R}_{CM} \times \vec{V}_{CM} + I\omega$$

che è quanto volevamo dimostrare.

## 61 Pendolo fisico o composto

Vediamo il comportamento di un corpo rigido imperniato su un asse diverso da quello passante per il suo centro di massa. Potremo innanzitutto studiare la condizione di equilibrio, imponendo:

$$\begin{cases} \vec{R} + m\vec{g} = 0 \\ \vec{\tau} = 0 \end{cases}$$

Ovvero la risultante di reazione vincolare e gravità è nulla, e il momento delle forze è nullo. Per la prima equazione potremo vedere i due assi:

$$\begin{cases} \vec{R}_x = 0 \\ \vec{R}_y = m\vec{g} \end{cases}$$

Mentre per il momento avremo:

$$\vec{\tau} = 0 \Rightarrow \vec{R}_{CM} \times Mg = -\vec{R}_C MG \sin \theta = 0, \quad \theta = 0$$

Ovvero, il corpo è in equilibrio se il centro di massa si trova esattamente il polo, come l'intuito potrebbe suggerire.

Più interessante è il caso di non equilibrio, dove il sistema si comporta effettivamente come un oscillatore armonico per piccole oscillazioni. Avremo la prima cardinale:

$$\vec{R} + m\vec{g} = m\vec{a}_{CM}$$

e la seconda cardinale:

$$\vec{\tau} = I\vec{\alpha} = \vec{R}_{CM} \times m\vec{g}$$

Scriviamo  $\alpha$  come  $\ddot{\theta}$ , ovvero la derivata seconda della posizione angolare:

$$I\ddot{\theta} = -\vec{R}_{CM} mg \sin \theta$$

Il fattore  $\sin \theta$  risulta svantaggioso: per piccole oscillazioni, possiamo prendere il primo termine dello sviluppo di Taylor:

$$\ddot{\theta} + \frac{\vec{R}_{CM} \times m\vec{g}}{I} \theta = 0$$

Da cui otterremo la pulsazione (indicata con  $\Omega$  per distinguerla dalla velocità angolare  $\theta$ ), il periodo e la posizione angolare in funzione del tempo:

$$\Omega = \sqrt{\frac{\vec{R}_{CM} \times m\vec{g}}{I}}, \quad T = \frac{2\pi}{\Omega}, \quad \theta(t) = A \cos(\Omega t + \phi)$$

### Urti fra corpi rigidi e punti materiali

Vediamo adesso come studiare urti fra corpi rigidi, vincolati e non:

- **Urti fra corpi rigidi non vincolati e punti materiali**

In un urto fra un corpo rigido non vincolato e un punto materiale, si conserveranno:

- Quantità di moto del sistema (sui due assi),
- Momento angolare rispetto a un *qualunque* polo.

Nel caso l'urto sia elastico, si conserverà anche l'energia. Notiamo che questo da solo non ci permette di assumere che l'energia si conservi in ogni caso: dovremo prima determinare il tipo di urto. L'indifferenza nella scelta del polo significa che potremo scegliere un polo ottimo per il tipo di situazione che stiamo analizzando (spesso il centro di massa).

- **Urti fra corpi rigidi vincolati e punti materiali**

Vediamo adesso il caso in cui il corpo sia vincolato attorno a un qualche asse. La presenza del vincolo comporterà l'azione di una forza impulsiva applicata dal vincolo sul corpo rigido, identica all'impulsiva generata dalla collisione del punto materiale e opposta in verso. Chiamando questa forza  $\vec{R}$  reazione, avremo sul tempo dell'impulso  $\tau$ :

$$I = \int_0^\tau \vec{R}(t) dt' = \vec{P}(\tau) - \vec{P}(0) = \Delta \vec{P}$$

ergo non si conserva la quantità di moto.

Si conserverà invece il momento angolare sul polo coincidente con l'asse del vincolo: questo perchè qualsiasi forza impulsiva applicata sul punto del vincolo avrà raggio distanza  $\vec{R}_i = 0$  dal polo, e quindi momento angolare nullo.

Come prima, poi, nel caso l'urto sia elastico, si conserverà anche l'energia.

## 62 Conservazione del momento angolare

Ricapitoliamo il significato dell'assenza di forze esterne per il momento angolare. Abbiamo, dalla definizione:

$$\tau_{tot} = \frac{d\vec{L}}{dt} \rightarrow \tau_{tot} = 0 \Leftrightarrow \vec{L} = \text{const.} \quad (\vec{L}_f = \vec{L}_i)$$

Ergo, se sul sistema non agiscono momenti di forze esterne, allora il momento angolare del sistema. Si può dire che il sistema si oppone alla variazione del momento angolare. Possiamo dire da:

$$\vec{L} = I\omega$$

che una diminuzione del momento d'inerzia provoca come conseguente risposta un'aumento della velocità angolare, e viceversa un suo aumento provoca un rallentamento. Possiamo osservare questo fenomeno osservando una pattinatrice sul ghiaccio ruotare su stessa: una volta che essa sta ruotando, può variare la sua velocità angolare avvicinando o allontanando dal suo asse verticale le braccia: quello che sta effettivamente accadendo è che il momento di inerzia sta variando, e la velocità varia di conseguenza per mantenere costante il momento angolare.

La conservazione del momento angolare è alla base dei sistemi di controllo dell'assetto che mantengono i satelliti in orientamento corretto verso la superficie terrestre: attraverso la rotazione di grandi volani, infatti, si può provocare una variazione della velocità angolare, e quindi variare l'angolazione del satellite. Più nello specifico, poniamo di avere un sistema composto da un satellite (rotazionalmente) in quiete, e un volano ad esso solidale inizialmente statico. Se si fa ruotare il volano fino al raggiungimento di una velocità angolare  $\omega$ , allora il satellite inizierà a ruotare con una velocità angolare opposta per mantenere costante la quantità di moto. Viceversa, se si rallenta il volano, il satellite ruoterà nella direzione opposta. Sistemi di questo tipo sono suscettibili alla cosiddetta *saturazione*: una volta accumulata troppa velocità angolare, i volani non possono più apportare modifiche significative alla rotazione del satellite. In questo caso si adottano processi di desaturazione utilizzando propulsori esterni (cosa che non rende meno conveniente l'uso dei volani, che permettono effettivamente (in condizioni normali) manovre senza l'uso di propulsori).

## 63 Moto di puro rotolamento

Vediamo adesso di studiare un moto piuttosto intuitivo: quello di un corpo in rotolamento. Iniziamo col prendere un corpo a simmetria sferica o cilindrica (quindi un disco, un anello, un cilindro o una sfera, ecc...). Vediamo il suo comportamento in 3 casi preliminari:

- **Pura traslazione**

Nella situazione di pura traslazione, ogni punto del corpo rigido è in moto con velocità  $V$ , identica in modulo e verso. Le distanze relative fra il centro di massa e ogni punto del corpo rigido  $r_0$  restano costanti. In questo caso, osserviamo uno *strisciamento* sul punto di contatto  $P$  col piano di traslazione: nel caso di superfici scabre, osserveremo una forza d'attrito diretta nella direzione opposta al moto (e atta a mettere quel moto in rotazione nella direzione del rotolamento).

- **Pura rotazione**

Vediamo allora il comportamento d un corpo fissato sul suo centro di massa, e messo in rotazione con un certo momento angolare, e quindi una certa velocità angolare  $\omega$ . Anche in questo caso osserveremo uno strisciamento sul punto di contatto  $P$ . Per la precisione, tale punto avrà velocità:

$$\vec{V}_p = \vec{\omega} \times \vec{R}$$

- **Roto-traslazione**

E' questo il caso di rotazione e traslazione combinate: ancora non si parla di rotolamento puro, in quanto il punto di contatto  $P$  è sempre libero di strisciare. Si ha che, nel sistema di riferimento del centro di massa, velocità e accelerazione di un punto  $i$  del corpo è:

$$\begin{cases} \vec{v}'_i = \vec{\omega} \times \vec{R}_i \\ \vec{a}'_i = \vec{\alpha} \times \vec{R}_i \end{cases}$$

e gli stessi valori nel sistema di riferimento di laboratorio sono quindi:

$$\begin{cases} \vec{v}_i = \vec{v}_{CM} + \vec{\omega} \times \vec{R}_i \\ \vec{a}_i = \vec{a}_{CM} + \vec{\alpha} \times \vec{R}_i \end{cases}$$

### **Moto di puro rotolamento**

Possiamo adesso descrivere il moto di puro rotolamento. Si impone la condizione di puro rotolamento, ovvero il fatto che il punto di contatto  $P$  sia stazionario, o in altre parole:

$$\vec{V}_{CM} = -\vec{\omega} \times \vec{R}$$

Questo sta a significare che, se il piano su cui si svolge il rotolamento è scabro (come deve essere per iniziare un rotolamento in primo luogo!), l'attrito fra il corpo rigido e il piano è di tipo stazionario (non c'è strisciamento). Possiamo trovare la velocità di altri punti: abbiamo detto che  $P$  ha velocità nulla ( $\vec{V}_p = 0$ ), il centro di massa ha velocità  $\vec{V}_{CM} = -\vec{\omega} \times \vec{R}$ , mentre un punto diametralmente opposto  $T$  ha velocità  $\vec{V}_T = -2\vec{\omega} \times \vec{R}$  (questo risultato verrà dimostrato fra poco).

### **Leggi orarie del puro rotolamento**

Cerchiamo di trovare una formula chiusa per la posizione e la velocità di un punto su una circonferenza di raggio  $R$  in puro rotolamento con velocità

angolare  $\omega$ , in funzione del tempo  $t$ . Abbiamo che, riguardo la posizione, la curva descritta è il cicloide:

$$\begin{cases} x(t) = \omega R t - R \sin \omega t \\ y(t) = R - R \cos \omega t \end{cases}$$

Possiamo poi dire che per un punto interno alla circonferenza, la curva descritta sarà più propriamente un trocoide (la cui parametrizzazione non riportiamo). Una visualizzazione interattiva si può trovare al seguente link: <https://www.desmos.com/calculator/ynfbmkkyf95>.

Calcoliamo allora dalla parametrizzazione del punto sulla circonferenza, la sua velocità:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \omega R - \omega R \cos \omega t \\ \dot{y}(t) = \omega R \sin \omega t \end{cases}$$

Si ha che in  $t' = \frac{2k\pi}{\omega}$ , il modulo della velocità è nullo (entrambi gli assi si annullano). Questo ha senso: al tempo  $t'$  si trova il punto stazionario  $P$ , che ha per definizione velocità nulla.

### Velocità di un punto interno

Possiamo ricavare la velocità di un punto  $P'$  qualsiasi, interno alla circonferenza, ponendo:

$$\begin{aligned} \vec{V}(P') &= \vec{V}(P') - \vec{V}(P) = \vec{V}_{CM} + \vec{\omega} \times \vec{OP}' \\ &= \vec{V}_{CM} + \vec{\omega} \times \vec{OP}' - (\vec{V}_{CM} + \vec{\omega} \times \vec{OP}) = \vec{\omega} \times (\vec{OP}' + \vec{PO}) \end{aligned}$$

Notiamo che, alla fine di tutti i calcoli, il vettore  $\vec{OP}' + \vec{PO}$  è semplicemente la corda che collega  $P$  (punto stazionario) a  $P'$ .  $O$  è il centro di massa.

### Determinare attrito e accelerazione

Vediamo come determinare la forza di attrito (necessaria alla manifestazione di un moto di puro rotolamento) e l'accelerazione del corpo in diverse situazioni.

#### • Forza costante sul C.M.

Vediamo il caso in cui un corpo di raggio  $R$  e massa  $m$  è fatto rotolare su un piano scabro (con coefficiente di attrito statico  $\mu_s$ ) da una forza applicata sul centro di massa,  $\vec{F}$ . Si comincia con l'impostare le equazioni cardinali, chiamando  $\vec{F}_a$  la forza di attrito e  $\vec{N}$  la reazione planare:

$$\begin{cases} \vec{F} + \vec{F}_a + \vec{N} + m\vec{g} = m\vec{a}_{CM} \\ \vec{\tau} = \vec{OP} \times \vec{F}_a \end{cases}$$



proiettiamo la prima equazione sugli assi:

$$\begin{cases} \vec{F} - \vec{F}_a = m\vec{a}_{CM_x} = m\vec{a}_{CM} \\ \vec{N} - m\vec{g} = m\vec{a}_{CM_y} = 0 \end{cases}$$

e notiamo che  $\vec{a}$  ha solo componente sull'asse x. Vediamo allora il momento delle forze (cioè la seconda equazione cardinale):

$$\vec{\tau} = I\vec{\alpha} = \vec{OP} \times \vec{F}_a = -R\vec{F}_a\hat{z}$$

da cui:

$$\vec{\alpha} = -\frac{\vec{R}\vec{F}_a}{I}\hat{z}$$

ci portiamo dietro il versore  $\hat{z}$  per esprimere meglio la direzione della rotazione. Potremo allora passare dall'accelerazione angolare  $\vec{\alpha}$  all'accelerazione del centro di massa  $\vec{a}_{CM}$  imponendo la condizione di puro rotolamento, cioè:

$$\vec{v}_{CM} = -\vec{\omega} \times \vec{R}, \quad \vec{a}_{CM} = -\vec{\alpha} \times \vec{R} \Rightarrow \vec{a}_{CM} = \frac{R\vec{F}_a}{I}\hat{z} \times (-R\hat{y}) = \frac{R^2\vec{F}_a}{I}\hat{x}$$

Da questo, e dalla prima cardinale, possiamo ricavare il valore della forza di attrito:

$$\vec{F} = \vec{F}_a + m\vec{a}_{CM} = F_a + \frac{mR^2\vec{F}_a}{I} = F_a \left(1 + \frac{mR^2}{I}\right), \quad F_a = \frac{F}{1 + \frac{mR^2}{I}}$$

Notiamo che, in quanto la forza di attrito non è altro che:

$$F_a = \mu_s \vec{N} = \mu_s m\vec{g}$$

bisognerà imporre:

$$F \leq \mu_s m\vec{g} \left(1 + \frac{mR^2}{I}\right)$$

perchè il moto sia effettivamente di rotolamento. Per valori di  $\vec{F}$  troppo grandi, si verificherà uno strisciamento.

#### • Momento di una forza costante

Facciamo un'esempio simile, ma dove la rotazione non è mantenuta da una forza, bensì dal momento  $\vec{M}$  di una forza che agisce sull'asse di rotazione del corpo. Si impostano, come prima, le cardinali:

$$\begin{cases} \vec{F} + \vec{F}_a + \vec{N} + m\vec{g} = m\vec{a}_{CM} \\ \vec{\tau} = \vec{M} + \vec{OP} \times \vec{F}_a \end{cases}$$

possiamo quindi proiettare la prima cardinale sugli assi:

$$\begin{cases} \vec{F}_a = m\vec{a}_{CMx} = m\vec{a}_{CM} \\ \vec{N} - m\vec{g} = m\vec{a}_{CMy} = 0 \end{cases}$$

Come prima, l'accelerazione è tutta sull'asse x. Vediamo allora il momento nella seconda cardinale:

$$\vec{\tau} = \vec{M} + \vec{OP} \times \vec{F}_a = -m\hat{z} + \vec{R}\vec{F}_a\hat{z} = I\vec{\alpha}$$

da cui:

$$\vec{\alpha} = \frac{\vec{R}\vec{F}_a - M}{I}\hat{z} = \frac{\vec{R}m\vec{a}_{CM} - M}{I}\hat{z}$$

Come prima, possiamo ricavare l'accelerazione del centro di massa  $\vec{a}_{CM}$  dall'accelerazione angolare  $\vec{\alpha}$  imponendo la condizione di puro rotolamento:

$$\begin{aligned} \vec{v}_{CM} &= -\vec{\omega} \times \vec{R}, \quad \vec{a}_{CM} = -\vec{\alpha} \times \vec{R} \Rightarrow \vec{a}_{CM} = -\alpha_z \hat{z} \times (-R\hat{y}) \\ &= -\left(\frac{Rm\vec{a}_{CM} - M}{I}\right) R\hat{x} \Rightarrow \vec{a}_{CM} = \frac{MR}{mR^2 + I} \end{aligned}$$

Ponendo nuovamente:

$$F_a = \mu_s \vec{N} = \mu_s m\vec{g}$$

si ha il limite per il momento:

$$\vec{M} \leq \mu_s m\vec{g}R \left(1 + \frac{I}{mR^2}\right)$$

### • Applicazione di impulso

Facciamo adesso un caso più complesso (e più interessante). Abbiamo, come prima, un disco di massa  $m$  e raggio  $R$ , Su cui viene applicato, al CM, un impulso dal valore di  $J$ . Posto  $J = mv_0$ , questo equivale a dire che il centro di massa inizia a muoversi con una velocità di  $v_0$ . Le grandezze di interesse saranno la velocità del centro di massa  $v_{CM}(t)$  in funzione del tempo, e il tempo  $t^*$  necessario affinché la forza di attrito rallenti abbastanza il centro di massa, e fornisca una velocità angolare al corpo abbastanza grande, da trasformare il moto in un moto di puro rotolamento. Impostiamo le equazioni cardinali:

$$\begin{cases} \vec{F}_a + \vec{N} + m\vec{g} = m\vec{a}_{CM} \\ \vec{\tau} = \vec{F}_a \times \vec{R} \end{cases}$$

Abbiamo, come prima, che la componente verticale della prima cardinale non ha alcun'effetto sulla velocità (ci importa soltanto di  $\vec{N}$  per il valore dell'attrito  $\vec{F}_a$ ). Allora, diciamo:

$$\vec{F}_a = m\vec{a}_{CM} = -m\vec{g}\mu_d, \quad \vec{a}_{CM} = -g\mu_d$$

il moto è effettivamente un moto uniformemente accelerato (nel solo asse x) con velocità iniziale  $v_0$  e accelerazione  $a_{CM}$ :

$$v_{CM}(t) = v_0 - a_{CM}t = \frac{J}{m} - g\mu_d t = \frac{J - mg\mu_d t}{m}$$

Abbiamo quindi trovato la velocità del centro di massa  $v_{CM}(t)$  in funzione del tempo. Facciamo la stessa cosa per la velocità angolare, usando la seconda cardinale:

$$\vec{\tau} = I\vec{\alpha} = \mu_d m g \vec{R}$$

Come per la velocità lineare, la velocità angolare aumenta linearmente col tempo. Si ha:

$$I\vec{\omega} = \mu_d m g \vec{R} t, \quad \omega(t) = \frac{\mu_d m g R}{I} t$$

Imponiamo quindi la condizione di puro rotolamento:

$$\omega(t^*) \cdot R = v(t^*), \quad \frac{\mu_d m g R^2}{I} t^* = \frac{J - mg\mu_d}{m} t^* \Rightarrow t^* = \frac{J}{mg\mu_d \left(1 + \frac{mR^2}{I}\right)}$$

Dopo il tempo  $t^*$ , il moto diventa di puro rotolamento (almeno in condizioni di attrito ideali).

### Lavoro svolto dalla forza di attrito

Vediamo adesso di calcolare il lavoro svolto dalla forza di attrito per rallentare il centro di massa (e applicare una coppia sufficiente sul corpo), dal momento  $t = 0$  fino a  $t = t^*$ . Impostiamo l'equazione di bilancio energetico. Per il teorema delle forze vive, avremo:

$$\mathcal{L} = \Delta E = \frac{m}{2} v(t^*)^2 + \frac{I}{2} \omega(t^*)^2 - \frac{m}{2} v(0)^2$$

si pone il problema di calcolare  $v(t^*)$ ,  $\omega(t^*)$ , e  $v(0)$ . Fra i primi due varrà la relazione  $v(t^*) = \omega(t^*) \times R$ , mentre l'ultimo sarà semplicemente:

$$v(0) = \frac{J}{m} - \mu_d g \cdot 0 = \frac{J}{m}$$

Abbiamo allora due modi di calcolare  $v(t^*)$ : attraverso la formula per  $v(t)$  appena usata, o attraverso la formula di  $\omega(t)$ . Vediamoli entrambi:

1. Da  $v(t)$ , si ha:

$$v(t^*) = \frac{J}{m} - \mu_d g \frac{J}{m \mu_d g \left(1 + \frac{m R^2}{I}\right)} = \frac{2}{3} \frac{J}{m}$$

2. Da  $\omega(t)$ , si ha:

$$v(t) = \omega(t)R, \quad \omega(t) = \frac{\mu_d m g R}{I} t$$

$$\Rightarrow v(t^*) = \frac{\mu_d m g R^2}{I} \frac{J}{m g \mu_d \left(1 + \frac{m R^2}{I}\right)} = \frac{2}{3} \frac{J}{m}$$

I risultati corrispondono, come dovrebbe essere. Possiamo allora calcolare  $\omega(t^*)$  con facilità:

$$\omega(t^*) = \frac{v(t^*)}{R} = \frac{2}{3} \frac{J}{m R}$$

A questo punto, sostituiamo nell'equazione di bilancio:

$$\mathcal{L} = \Delta E = \frac{mv(t^*)}{2} + \frac{I\omega(t^*)}{2} - \frac{mv(0)}{2} = -\frac{1}{6} \frac{J^2}{m}$$

### Energia cinetica nel moto di puro rotolamento

L'energia cinetica di un corpo in puro rotolamento può essere trovata con un polo all'origine, o (in modo molto più conveniente) con un polo al punto di contatto: questo perché il punto di contatto è effettivamente fermo, e la forza di attrito statico non compie lavoro. Abbiamo quindi

$$K = \frac{1}{2} I_p \omega^2 = \frac{1}{2} I_{CM} \omega^2 + \frac{1}{2} M v_{CM}^2$$

Possiamo notare l'uguaglianza delle due forme attraverso Steiner-Huygens:

$$I_p = I_{CM} + M R^2$$

Da cui:

$$\frac{1}{2} I_p \omega^2 = \frac{1}{2} (I_{CM} + M R^2) \omega^2 = \frac{1}{2} I_{CM} \omega^2 + \frac{1}{2} M R^2 \omega^2 = \frac{1}{2} I_{CM} \omega^2 + \frac{1}{2} M v_{CM}^2$$

che è uguale a prima.

### Teorema dell'impulso o del momento dell'impulso

Sappiamo che all'applicazione di una forza impulsiva  $\vec{F}$  in un tempo molto ristretto  $t - t_0 = \tau$  comporta una variazione di quantità di moto:

$$\vec{I} = \int_{t_0}^t \vec{F} dt' = \Delta \vec{P} = \vec{P}(t) - \vec{P}(t_0)$$

Analogamente, possiamo definire rispetto al momento delle forze l'impulso angolare:

$$\vec{J} = \int_{t_0}^t \vec{\tau} dt' = \Delta \vec{L} = \vec{L}(t) - \vec{L}(t_0)$$

Impulso e impulso angolare sono legati dal **teorema del momento dell'impulso**:

$$\vec{J} = \vec{r} \times \vec{I}$$

Questo significa che, con un'applicazione a  $r$  raggio diverso da zero, una forza impulsiva comporta anche una variazione del momento angolare.

## 64 Introduzione all'elettrostatica

L'elettrostatica è la branca della fisica che si occupa di cariche elettriche. Possiamo interpretare la carica come la capacità di un corpo di esercitare forza elettrostatica.

### Carica

La carica è una caratteristica di un corpo data dalla struttura molecolare, o meglio dall'interazione degli elettroni e dei protoni che costituiscono le sue molecole. La carica ha un segno: può essere positiva o negativa. Si decide per convenzione la carica dell'elettrone essere negativa. Vale il principio secondo cui cariche dello stesso segno si respingono e cariche di segno discorde si respingono. Può essere utile osservare brevemente la struttura dell'atomo:

### Introduzione informale all'atomo

L'atomo è la particella fondamentale degli elementi chimici. E' formato da un nucleo di neutroni e protoni attorno al quale orbitano gli elettroni. Queste tre particelle elementari hanno le seguenti caratteristiche:

Particella	Massa	Carica
Protone	$1.673 \times 10^{-27}$ kg	+1 $e$
Elettrone	$9.109 \times 10^{-31}$ kg	- 1 $e$
Neutrone	$1.675 \times 10^{-27}$ kg	0

Introduciamo un'unità di misura per la carica: il Coulomb (C). Si definisce la carica fondamentale come la carica di un protone o l'opposto della carica di un elettrone, che vale  $1.602 \times 10^{-19}$  C. Visto che la carica viene espressa da quantità discrete di particelle elementari, è deducibile che essa sia quantizzata.

Possiamo poi dire che la dimensione di un nucleo di atomo è nell'ordine del Fermi, unità di misura corrispondente a  $10^{-15}$  m, mentre il raggio atomico è nell'ordine dell'angstrom, corrispondente invece a  $10^{-10}$  m. Dell'atomo possiamo definire il numero di massa  $A$  e il numero atomico  $Z$ . Il numero di massa corrisponde al numero di particelle elementari (protoni e neutroni) che compongono il nucleo, mentre il numero atomico corrisponde al solo numero di protoni. In generale è quindi vero che  $A > Z$ . Si ha poi che il numero di elettroni, in un atomo con carica neutra, è uguale al numero di protoni. Il numero atomico caratterizza periodicamente gli elementi chimici: si ha che un atomo con un numero di massa (quindi di neutroni) diverso da quello del suo elemento è un isotopo, e un atomo con numero di elettroni diverso da quello dei suoi protoni è uno ione (che può essere positivamente carico, quando perde elettroni, e negativamente carico, quando ne acquista).

### **Materiali neutri e a reticolo polare**

Si possono distinguere comportamenti diversi della materia:

- **Neutro** Di materiali caratterizzati da legami covalenti, e che quindi hanno una distribuzione neutra di carica.
- **Polare** Di materiali caratterizzati da legami ionici, dove alcuni ioni hanno carica positiva e altri carica negativa. Nel complesso, in genere, la carica è neutra, ma si potrà polarizzare il materiale in modo da renderlo localmente carico in una certa zona.

### **Elettricità statica in una bacchetta**

Poniamo di avere una bacchetta di vetro e di strofinarla contro un panno di lana. Saremo adesso in grado di sollevare dei piccoli pezzi di carta semplicemente avvicinandogli la bacchetta. Questo semplice esperimento può essere spiegato dall'elettrostatica: strofinando la bacchetta sul panno, abbiamo costretto i due corpi a scambiarsi cariche. La carica complessiva resterà costante, per il principio di conservazione della carica: la bacchetta cederà carica negativa al panno e si caricherà quindi positivamente. Quando la avviciniamo alla carta, la bacchetta, ora carica positivamente, indurrà nella carta una carica negativa sul lato superiore (e di conseguenza una carica positiva sul lato inferiore). Questo produrrà una forza di attrazione (forza di Coulomb) che vincerà l'attrazione gravitazionale, portando i pezzi di carta a sollevarsi.

### Induzione elettrostatica

Il comportamento appena dimostrato dalla carta è un'esempio di induzione elettrostatica. Supponiamo di avere una sbarretta metallica: avvicinando una carica positiva alla sua destra, o una negativa alla sua sinistra, costringiamo la carica positiva ad accumularsi a destra e quella negativa a sinistra, caricando localmente la sbarretta. Nella pratica, la variazione di carica è data dalla migrazione degli elettroni, liberi di spostarsi nel metallo, da destra verso sinistra: gli ioni rimasti a destra saranno carichi positivamente. Se a questo punto dividessi l'oggetto a metà, otterrei due corpi carichi globalmente (o almeno che non potrebbero trasferire fra di loro carica per contatto).

### Distribuzione simmetrica di carica

Intuitivamente, una sfera carica positivamente tende a concentrare le sue cariche verso l'esterno, in modo da minimizzare le forze repulsive. In modo analogo a prima, non sono le "cariche" in sé per sé a muoversi, ma gli elettroni che vengono trasferiti dall'esterno verso l'interno, lasciando gli ioni sul bordo carichi positivamente.

### Bilancia a torsione

L'attrazione o repulsione elettromagnetica (quindi la forza elettromagnetica) può essere misurata attraverso uno strumento noto come bilancia a torsione. La bilancia a torsione è un'apparato formato da una sbarra avente due sferette cariche alle estremità: la sbarra può ruotare su se stessa rispetto ad un asse verticale, torcendo il perno che la tiene ferma. Avvicinando cariche diverse alle sferette, possiamo osservare una rotazione della sbarra proporzionale alla forza elettromagnetica esercitata dalle due sferette. Chiaramente, se le due sferette tenderanno ad avvicinarsi, le loro cariche saranno opposte, uguali se viceversa. Un'apparato simile fu usato da Cavendish per misurare la costante gravitazionale  $G$ , usando però masse molto più grandi.

## 65 Forza di Coulomb

La forza di Coulomb è la forza che due cariche esprimono fra di loro. Poste due cariche  $a$  e  $b$ , la sua espressione è:

$$\vec{F}_{ab} = k \frac{q_a \cdot q_b}{r^2} \hat{r}$$

Questa sarà la forza espressa su  $b$  da  $a$ .  $q_a$  e  $q_b$  sono rispettivamente le cariche di  $a$  e  $b$ ,  $r$  distanza fra di loro, e  $\hat{r}$  il vettore:

$$\hat{r} = \frac{\vec{r}_b - \vec{r}_a}{|\vec{r}_b - \vec{r}_a|}$$

Notiamo che questa forza è espressa come inverso del quadrato delle distanze, proprio come lo era l'attrazione gravitazionale. La differenza sta nel fatto che la forza di Coulomb può avere segno negativo, quindi respingere oltre che attrarre. Ovvero, rispetta il terzo principio della dinamica:

$$\vec{F}_{ab} = -\vec{F}_{ba}$$

e le caratteristiche di repulsività e attrattività che avevamo prima riportato: con  $qA$  e  $qB$  discordi, dirige l'uno verso l'altro corpo. In caso contrario, li allontana. Vediamo la costante  $k$ :

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$$

dove  $\epsilon_0$  è la **costante dielettrica nel vuoto**, anche detta permittività dielettrica nel vuoto, che vale  $8.85 \times 10^{-12} \frac{C^2}{Nm^2}$ , e  $k$ , chiamata **costante di Coulomb**, vale  $9 \times 10^9 \frac{Nm^2}{C^2}$ .

### Principio di sovrapposizione

Nel caso su una carica agiscano più cariche, la forza risultante sarà semplicemente la somma delle forze rispetto ad ogni singola carica:

$$\vec{F} = k \sum_i^n \frac{q_1 q_i}{r_i^2} \hat{r}_i$$

Nel caso le cariche non siano allineate, occorrerà dividere la forza nelle componenti relative agli assi, e trovare quindi il vettore risultante.

## 66 Campo elettrico

Dal principio appena enunciato ricaviamo che la forza di Coulomb relativa a una singola carica  $q_1$  è:

$$\vec{F} = k \sum_i^n \frac{q_1 q_i}{r_i^2} \hat{r}_i = q_1 \sum k \frac{q_i}{r_i^2} \hat{r}_i$$

Diciamo che  $q_1$  è la nostra carica di prova, dal valore di 1 C. Possiamo allora dividere entrambi i lati dell'eguaglianza per  $q_1$ :

$$\frac{\vec{F}}{q_1} = \sum k \frac{q_i}{r_i^2} \hat{r}_i = \vec{E}$$

chiamiamo questa nuova misura campo elettrico. Il campo elettrico è un campo, ovvero una funzione:

$$\vec{E} : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$$



che associa ad ogni punto nello spazio un vettore, che rappresenta la forza che subirebbe una carica di 1 C in quel punto. Questa definizione operativa può essere usata nella pratica per calcolare il campo elettrico in un punto: si collochi una carica nello spazio, ne si misuri la forza risultante, il quoziente fra questi due valori sarà il campo elettrico in quel punto. Converrà che la nostra carica di prova sia piccola in modo da non influire sulla configurazione di cariche che vogliamo analizzare.

### Campo generato da una carica

Analizziamo un caso ad alta simmetria: una singola carica nello spazio. Applicando la definizione, abbiamo che il campo nei pressi della carica sarà:

$$\frac{F}{q_p} = \frac{k \frac{q_p q_1}{r^2} \hat{r}}{q_p} = k \frac{q_1}{r^2} \hat{r}$$

Il campo elettrico avrà quindi simmetria sferica attorno al punto generatore del campo stesso. Per avere una visione migliore del campo, introduciamo le:

### Linee di campo

Le linee di campo di un campo vettoriale sono un'insieme di linee parallele in ogni punto al campo vettoriale. Possiamo usare le linee di campo per visualizzare gli andamenti dei campi.

### Dipolo elettrico

Consideriamo il campo elettrico generato da una coppia di cariche  $q$  di segno opposto  $+q$  e  $-q$  separate da una distanza  $d$ . Sia l'origine del piano cartesiano coincidente col centro del dipolo: avremo che  $+q$  ha coordinata  $(0, 0, \frac{d}{2})$ , e  $-q$  ha coordinata  $(0, 0, -\frac{d}{2})$ . Calcoliamo il campo lungo l'asse del dipolo  $z$  e lungo un'asse ad esso perpendicolare (prendiamo  $x$ ,  $y$  sarebbe equivalente).

- **Lungo  $z$ :** sarà il caso più semplice, basterà applicare la formula del campo elettrico generato da una carica ad entrambe le cariche:

$$\vec{E} = \sum k \frac{q_i}{r_i^2} \hat{r}_i$$

considerando la distanza  $\pm \frac{d}{2}$  dall'origine lungo  $z$ :

$$\begin{aligned} \vec{E}(0, 0, z) &= \frac{kq\hat{z}}{(z - \frac{d}{2})^2} - \frac{kq\hat{z}}{(z + \frac{d}{2})^2} = kq\hat{z} \left( \frac{1}{(z - \frac{d}{2})^2} - \frac{1}{(z + \frac{d}{2})^2} \right) \\ &= kq\hat{z} \left( \left( z - \frac{d}{2} \right)^{-2} - \left( z + \frac{d}{2} \right)^{-2} \right) = \frac{kq\hat{z}}{z^2} \left( \left( 1 - \frac{d}{2z} \right)^{-2} - \left( 1 + \frac{d}{2z} \right)^{-2} \right) \end{aligned}$$

A noi interessa il caso in cui  $z$  sia molto maggiore di  $d$ , ovvero  $z \gg d$ . Questo ci permette di usare l'approssimazione:

$$z \gg d \Rightarrow \left(1 + \frac{d}{2z}\right)^{-2} \approx \left(1 - 2\frac{d}{2z}\right) = \left(1 - \frac{d}{z}\right)$$

Questo ci dà il risultato:

$$\frac{kq\hat{z}}{z^2} \left( \left(1 - \frac{d}{z}\right)^{-2} - \left(1 + \frac{d}{2z}\right)^{-2} \right) \approx \frac{kq\hat{z}}{z^2} \left( \left(1 + \frac{d}{z}\right) - \left(1 - \frac{d}{z}\right) \right) = 2\frac{kqd}{z^3}\hat{z}$$

Ciò significa che a grandi distanze  $z$ , o a distanze  $d$  trascurabili, il campo elettrico a  $z$  dal dipolo lungo il suo asse vale  $2\frac{kqd\hat{z}}{z^3} \frac{N}{C}$ . Definiamo allora la quantità  $p$ , detta **momento di dipolo**, come:

$$p = qd, \quad \vec{E}(0, 0, z) = 2\frac{kqd}{z^3}\hat{z} = 2\frac{kp}{z^3}\hat{z}$$

Che ci dà il risultato finale. Notiamo  $\hat{z}$  versore essere diretto verso  $\vec{z}$  ovvero lo spostamento: in sostanza, il campo del dipolo è sempre diretto nella stessa direzione. Se siamo vicini al polo positivo, tenderemo ad allontanarci dal dipolo; se siamo vicini al polo negativo, tenderemo ad avvicinarci.

- **Lungo x/y:** assumiamo il caso  $x$  essere uguale a  $y$ : in entrambi i casi il campo sarà calcolato sul piano ortogonale al dipolo. Calcoliamo, come prima, il campo generato dalle cariche: avremo che la componente lungo  $x$ , parallela all'asse del dipolo, è nulla (le componenti ortogonali si annullano fra di loro). A restare sarà solamente la componente parallela all'asse del dipolo, che avrà il valore di due volte il campo generato da una singola carica in quel punto, negativo. Calcoliamo quest'ultimo valore: è utile costruire un triangolo rettangolo con un cateto sulla semidistanza fra i poli e l'altro sulla distanza tra il centro del dipolo e il punto  $(x, 0, 0)$ . A questo punto la distanza  $r$  sarà l'ipotenusa del triangolo:

$$r = \sqrt{x^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2}$$

e il campo:

$$\vec{E}(x, 0, 0) = -2\frac{kq\hat{z}}{\left(x^2 + \frac{d^2}{4}\right)}$$

A noi interessa soltanto il campo lungo  $z$ , ergo dobbiamo moltiplicare il campo per il seno dell'angolo  $\alpha$  che l'ipotenusa forma sull'asse  $x$ .  $\sin \alpha$  è dato da cateto minore su ipotenusa, ergo:

$$\sin \alpha = \frac{\frac{d}{2}}{\sqrt{x^2 + \frac{d^2}{4}}}, \quad \vec{E}(x, 0, 0) = -2 \frac{kq\hat{z}}{\left(x^2 + \frac{d^2}{4}\right)} \frac{\frac{d}{2}}{\sqrt{x^2 + \frac{d^2}{4}}} = -\frac{kqd\hat{z}}{\left(x^2 + \frac{d^2}{4}\right)^{\frac{3}{2}}}$$

Come prima, imponiamo il fatto che  $x$  è molto maggiore di  $d$ :

$$x \gg d \Rightarrow \vec{E}(x, 0, 0) = -\frac{kqd}{x^3}\hat{z} = -\frac{kp}{x^3}\hat{z}$$

Notiamo dal risultato finale che il campo lungo l'asse ortogonale ad un dipolo è antiparallelo all'asse del dipolo stesso.

## 67 Densità di carica

Passiamo al calcolo del campo elettrico su distribuzioni continue di cariche.

- **Densità (di volume) di carica**

Consideriamo l'incremento di carica  $dq$  sul volume infinitesimo  $dV$ . Possiamo definire una densità  $\rho_q$  di carica tale per cui:

$$\rho_q = \frac{dq}{dV}$$

si misura in  $\frac{C}{m^3}$ . Possiamo calcolare il campo elettrico dalla densità di carica su un infinitesimo di volume in  $\vec{r}$  visto da  $\vec{r}'$  applicando la forza di Coulomb, come:

$$d\vec{E}(\vec{r}) = \frac{k\rho_q\vec{r}'dV}{(r-r')^3}(\vec{r}-\vec{r}')$$

Dove notiamo il cubo al denominatore è lì solamente per normalizzare  $(\vec{r}-\vec{r}')$  in  $(r-\hat{r}r')$  versore. A questo punto potremo passare alla distribuzione completa di cariche sul volume  $V$  prendendo l'integrale:

$$\vec{E}(\vec{R}) = \int_V \frac{k\rho_q\vec{r}'}{(r-r')^3}(\vec{r}-\vec{r}')dV$$

- **Densità superficiale di carica**

Similmente, possiamo definire la densità superficiale di carica:

$$\sigma_q = \frac{dq}{dA}$$

si misura in  $\frac{C}{m^2}$ .

- **Densità lineare di carica**

Infine, possiamo definire la densità lineare di carica:

$$\lambda_q = \frac{dq}{dl}$$

si misura in  $\frac{C}{m}$ .

Vediamo alcune applicazioni della densità di carica per descrivere il campo generato da diversi oggetti:

- **Anello uniformemente carico**

Calcoliamo la campo generato da un'anello metallico  $A$  uniformemente carico, giacente sul piano  $xy$  dello spazio, lungo il suo asse di simmetria centrale. Consideriamo l'oggetto solo nella sua lunghezza, ergo usiamo la densità lineare di carica  $\lambda_q$ . Anche in questo caso è efficace costruire un triangolo rettangolo, con un cateto posto sulla distanza fra l'origine il punto  $(0, 0, z)$ , e l'altro posto sul raggio dell'anello. Avremo che le componenti lungo il piano parallelo a  $xy$  si annullano, e l'unica risultante è quella in  $z$ . Calcoliamo allora il campo infinitesimo come il campo generato sul punto  $(0, 0, z)$  per il coseno dell'angolo fra l'asse  $z$  e la congiungente del punto con un altro punto sul raggio, ovvero il rapporto fra la distanza  $z$  e l'ipotenusa del triangolo:

$$d\vec{E}(0, 0, z) = \frac{k dq \hat{z}}{(r^2 + z^2)} \frac{z}{\sqrt{r^2 + z^2}}$$

Calcoliamo allora il campo totale come l'integrale:

$$\vec{E}(0, 0, z) = \int_A \frac{k \hat{z}}{(r^2 + z^2)} \frac{z}{\sqrt{r^2 + z^2}} \lambda_q dl$$

Notiamo che nessun termine dentro l'integrale dipende da  $l$ , e  $\int_A dl$  non è altro che  $2\pi r$ , ergo:

$$\vec{E}(0, 0, z) = \frac{k \hat{z}}{(r^2 + z^2)} \frac{z}{\sqrt{r^2 + z^2}} \lambda_q \int_A dl = \frac{k 2\pi r \lambda_q \hat{z}}{(r^2 + z^2)} \frac{z}{\sqrt{r^2 + z^2}}$$

Abbiamo che la carica totale sull'anello è:

$$Q = 2\pi r \lambda_q, \quad \vec{E}(0, 0, z) = \frac{k z Q}{(r^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \hat{z}$$

Da cui la soluzione esatta. Possiamo ora considerare il comportamento "da lontano" dell'anello, applicando la stessa approssimazione di prima:

$$z \gg r \Rightarrow \vec{E}(0, 0, z) = \frac{k Q}{z^2} \hat{z}$$

Può essere interessante fare la considerazione inversa: in punti molto vicini all'anello, ovvero dove  $z \ll r$ , si ha:

$$z \ll r \Rightarrow \vec{E}(0, 0, z) = z \frac{kQ}{r^3}$$

Si nota che per una carica  $-q$  di segno opposto alla  $Q$  dell'anello, la forza ha effettivamente la forma della legge di Hooke, e forma un'oscillatore armonico.

- **Disco uniformemente carico** Vediamo un caso simile: il campo generato da un disco  $D$  uniformemente carico, giacente sul piano  $xy$  dello spazio, lungo il suo asse di simmetria centrale. In questo caso considereremo l'oggetto sulla sua superficie, ergo useremo la densità superficiale di carica  $\sigma_q$ . Consideriamo lo stesso schema precedente, ma variando  $r$  dal centro della circonferenza fino al suo bordo: avremo che su un frammento infinitesimo del disco (ergo una circonferenza con lunghezza  $2\pi r$ ) il campo generato sarà:

$$d\vec{E}(0, 0, z) = \frac{kz\hat{z}}{(r^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} 2\pi r \sigma_m dr$$

Troviamo allora il campo totale prendendo l'integrale:

$$\begin{aligned} \vec{E}(0, 0, z) &= \int_0^R \frac{kz\hat{z}}{(r^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} 2\pi r \sigma_m dr = kz\sigma_m \hat{z} \pi \int_0^R \frac{2r dr}{(r^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \\ &= kz\sigma_m \hat{z} \pi \left[ -\frac{2}{\sqrt{r^2 + z^2}} \right]_0^R = kz\sigma_m \hat{z} \pi \left( \frac{2}{z} - \frac{2}{\sqrt{R^2 + z^2}} \right) \\ &= 2k\sigma_m \pi \left( 1 - \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}} \right) \end{aligned}$$

Da cui l'equazione finale. Notiamo come per:

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \vec{E} = 2k\sigma_m = \frac{\sigma_m}{2\epsilon_0}$$

è il campo generato da un piano infinito (a qualunque distanza!), che è una buona approssimazione per l'armatura di un condensatore lontano dai bordi.

- **Filo uniformemente carico**

Come ultimo esempio prendiamo un filo di lunghezza  $2l$ , centrato sull'origine, e calcoliamone il campo a una certa distanza  $x$ . Applicando

la forza di Coulomb osserviamo che di poter prendere due punti, ad un capo e all'altro del filo, e calcolarne il contributo: se prendiamo y uguali ma opposte abbiamo che le forze si annullano lungo l'asse verticale z, e la risultante è tutta diretta verso il piano ortogonale (prendo x) con modulo pari a 2 volte la componente x della forza esercitata da un singolo punto. Notiamo che questo approccio ci permette però di trovare la forza esercitata da 2 punti per volta, ergo dividiamo per due per ottenere il contributo:

$$d\vec{E}(x, 0, 0) = \frac{k\lambda dz}{z^2 + x^2} \frac{x}{\sqrt{z^2 + x^2}} \hat{x}$$

Dove il primo denominatore è il quadrato della distanza del punto sul filo da quello dove calcoliamo il campo, ovvero l'ipotenusa di un triangolo costruito sull'asse x con cateti  $l$  e  $x$ , e la seconda frazione rappresenta il coseno dell'angolo formato dall'ipotenusa e l'asse x. Prendiamo allora l'integrale per avere il campo totale:

$$\vec{E}(x, 0, 0) = \int_{-l}^l \frac{k\lambda dz}{z^2 + x^2} \frac{x}{\sqrt{z^2 + x^2}} \hat{x} = k\lambda x \hat{x} \int_{-l}^l \frac{dz}{(z^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

L'integrale calcolato si risolve attraverso sostituzione trigonometrica, e dà il risultato:

$$\int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{x}{a^2 \sqrt{x^2 + a^2}} + c$$

con cui possiamo quindi risolvere:

$$\begin{aligned} \vec{E}(x, 0, 0) &= k\lambda x \hat{x} \int_{-l}^l \frac{dz}{(z^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} = k\lambda x \hat{x} \left[ \frac{z}{x^2 \sqrt{z^2 + x^2}} \right]_{-l}^l \\ &= k\lambda x \hat{x} \frac{2l}{x^2 \sqrt{l^2 + x^2}} = k\lambda \frac{2l}{x \sqrt{l^2 + x^2}} \hat{x} \end{aligned}$$

Che è la formula per il campo generato dal filo di lunghezza finita. Sostituiamo a  $k$  il suo valore, ovvero  $\frac{1}{4\pi\epsilon_0}$ :

$$\vec{E}(x, 0, 0) = k\lambda \frac{2l}{x \sqrt{l^2 + x^2}} \hat{x} = \frac{l\lambda}{2\pi\epsilon_0 x \sqrt{l^2 + x^2}}$$

e vediamo il caso per un filo di lunghezza infinita prendendo il limite:

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \frac{l\lambda}{2\pi\epsilon_0 x \sqrt{l^2 + x^2}} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 x}$$

## 68 Flusso del campo elettrico

Si introduce adesso il concetto di flusso di un campo vettoriale, e in particolare di flusso del campo elettrico. Si inizia con un esempio piuttosto semplice:

### Flusso lungo una superficie piana

Prendiamo una superficie piana  $A$ , immersa in un campo vettoriale  $\vec{E}$ . Definiamo un vettore  $\vec{A}$  corrispondente alla normale della superficie, con modulo pari alla sua area. Definiremo allora il flusso del campo sulla superficie come:

$$\Phi_E = EA$$

Ruotiamo adesso la superficie di un certo angolo  $\theta$  (o ruotiamo il campo dello stesso angolo, poco cambia). Avremo che il flusso non è più attraverso l'intera superficie, ma attraverso una sua frazione, data dal prodotto scalare:

$$\Phi_E = EA \cos \theta = \vec{E} \cdot \vec{A}$$

### Flusso su una superficie

Le definizioni date finora sono valide su superfici localmente piane, ma spesso saremo interessati a calcolare flussi su superfici anche irregolari. Definiamo quindi, sulla base della scorsa formula, il flusso su un'elemento infinitesimo di superficie  $d\vec{A}$ :

$$d\Phi_E = \vec{E} \cdot d\vec{A}$$

Questo ci permette di calcolare il flusso lungo un'intera superficie  $\Omega$ , prendendo l'**integrale di superficie**:

$$\Phi_E = \int_{\Omega} \vec{E} \cdot d\vec{A}$$

Notiamo che il flusso può avere verso positivo (superficie e campo sono allineati), verso negativo (l'esatto contrario) e, intuitivamente, può essere nullo (nel caso in cui il campo scorra perpendicolare alla superficie).

### Flusso del campo elettrico

Il flusso può essere usato sul campo elettrico: cariche  $q$  influenzeranno il campo elettrico  $\vec{E}$  che avrà un certo flusso  $\Phi_E$  su diverse superfici. Sarà a noi utile considerare superfici chiuse, ovvero superfici che delimitano porzioni finite di spazio. Considerata una certa superficie chiusa  $\Omega$ , vediamo l'impatto sul flusso della stessa che hanno cariche poste al suo interno e al suo esterno.

- **Cariche esterne:** abbiamo una carica  $q$  posta esternamente alla nostra superficie  $\Omega$ . Possiamo dividere il flusso lungo  $\Omega$  in flusso in entrata e

in uscita, ovvero il flusso del campo *entrante* nella superficie e il flusso del campo *uscente* dalla superficie:

$$\begin{aligned} d\Phi_E &= d\Phi_{Ei} + d\Phi_{Ef} = -|d\vec{A}_i \cdot \vec{E}_i| + |d\vec{A}_u \cdot \vec{E}_u| \\ &= -|d\vec{A}_i \cdot \vec{E}_i| + d\vec{A}_i \left( \frac{du}{di} \right)^2 \cdot \vec{E}_i \left( \frac{di}{du} \right)^2 = 0 \end{aligned}$$

ovvero, tutte le linee di campo che entrano nella superficie prima o poi escono dalla superficie, e il flusso netto vale necessariamente 0. I differenziali quadri rappresentano il fatto che il campo scala col quadrato della variazione dell'elemento di superficie, la superficie l'esatto opposto. In sostanza, il campo di una carica esterna alla superficie, una volta uscito, avrà valore proporzionale all'inverso del quadrato della distanza su un'area che scala come il quadrato della distanza: i due effetti si annullano e il flusso totale risulta nullo.

- **Cariche interne:** poniamo adesso  $q$  all'interno della superficie, e assumiamo temporaneamente la suddetta essere sferica. Applicando la definizione di flusso abbiamo:

$$\Phi_E = \int_{\Omega} \vec{E} \cdot d\vec{A} = \vec{E} \int_{\Omega} d\vec{A}$$

Visto che il campo, dipendente dal raggio, non varia su una sfera. Il secondo termine sarà semplicemente la superficie della sfera stessa. Applichiamo quindi questo e la definizione di campo sulla forza di Coulomb:

$$\Phi_E = k \frac{q}{r^2} (4\pi r^2) = 4\pi k q$$

Questo spiega perchè  $k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$ :

$$\Phi_E = 4\pi k q = \frac{q}{\epsilon_0}$$

Quest'ultimo risultato, fondamentale, prende il nome di:

## 69 Teorema di Gauss

Abbiamo appena dimostrato l'assunto fondamentale del teorema di Gauss: su una superficie sferica, il flusso del campo elettrico è:

$$\Phi_E = \frac{q}{\epsilon_0}$$



Facciamo alcune generalizzazioni. Innanzitutto, generalizziamo il risultato a superfici chiuse di qualsiasi forma: notiamo che tutte le linee di campo uscenti dalla sfera sono anche uscenti da una qualsiasi superficie chiusa, ergo il teorema vale per ognuna. Infine, possiamo dire che il risultato vale per qualsiasi combinazioni di cariche *interne* alla superficie, ergo:

$$\Phi_E = \sum_i^n \frac{q_i}{\epsilon_0}$$

per tutte le cariche  $i < n$  comprese all'interno della superficie. Ricordiamo che le cariche esterne non hanno invece alcun contributo.

Vediamo alcune applicazioni del teorema di Gauss per il calcolo di flussi e campi elettrici:

- **Flusso di un dipolo**

Calcoliamo il flusso generato da un dipolo su una superficie gaussiana ad esso circostante. Si ha che, su una superficie gaussiana che comprende entrambe le cariche, tutte le linee di campo escono ed entrano nella superficie, ergo il flusso totale vale 0:

$$\Phi(\vec{E}) = 0$$

Nel caso si prenda una superficie gaussiana che circonda solamente una delle cariche di dipolo, dovremo considerare tale come carica puntiforme. Ricordiamo che, data la proporzionalità del campo elettrico  $\vec{E}$  generato dal dipolo, e quella della superficie  $S$  al crescere del raggio:

$$\vec{E} \propto \frac{1}{r^3}, \quad S \propto r^2 \Rightarrow \Phi(\vec{E}) \propto \frac{1}{r}$$

Ergo un eventuale flusso dovrebbe scalare come l'inverso del raggio. N.B.: In realtà, non dovrebbe essere possibile applicare il teorema di Gauss ad un dipolo, in quanto non è possibile trovare una superficie gaussiana che "racchiuda" l'interezza del campo. Il professore è quantomai ombroso sull'argomento, il risultato viene riportato solo a scopo indicativo.

- **Campo generato da un filo uniformemente carico con Gauss**

Possiamo usare il teorema di Gauss per calcolare il campo elettrico generato da un filo uniformemente carico. Riprendiamo la nozione di densità lineare di carica:

$$dQ = \lambda dl$$

su una qualche lunghezza infinitesima  $dl$ . La carica complessiva di un filo di lunghezza  $h$  sarà allora:

$$Q = h\lambda$$

Vediamo poi che il sistema formato dal filo (disposto sull'asse  $z$ ) è invariante a rotazione assiale. Il campo deve quindi essere radiale. Prendiamo una superficie gaussiana cilindrica che contiene interamente il filo. Impostiamo il flusso attraverso il teorema di Gauss:

$$\Phi(\vec{E}) = \frac{h\lambda}{\epsilon_0}$$

e attraverso la definizione, tenendo conto del fatto che il flusso totale sarà la somma del flusso sulle basi  $\Phi_B(\vec{E})$  e sull'area laterale del cilindro  $\Phi_L(\vec{E})$ :

$$\Phi(\vec{E}) = \Phi_B(\vec{E}) + \Phi_L(\vec{E})$$

Notiamo quindi il campo lungo le basi è nullo, in quanto aventi vettori normali ortogonali alle linee di campo. La totalità del flusso sarà quindi data dalla superficie laterale, che forma in ogni punto un angolo  $\theta = 0$  con il campo, e restituisce quindi:

$$\Phi(\vec{E}) = \int_L d\vec{A} \cdot d\vec{E}(\vec{r}) = \int_L d\vec{A} E(d) = E(d)2\pi dh$$

dove  $d$  è la distanza dal centro del filo dove si calcola il campo elettrico. Notiamo il passaggio da  $\vec{E}$  a  $E$  in solo modulo, possibile in quanto il campo a una distanza  $d$  dal centro (e quindi su una circonferenza) è costante. Possiamo a questo punto eguagliare le due espressioni trovate per  $\Phi(\vec{E})$ :

$$E(d)2\pi dh = \frac{h\lambda}{\epsilon_0} \Rightarrow E(d) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 d}$$

Che è in accordo con quanto trovato precedentemente attraverso il principio di sovrapposizione.

- **Campo generato da una sfera uniformemente carica**

Per calcolare il campo elettrico generato da una sfera uniformemente carica, possiamo sfruttare la sua simmetria radiale: in ogni punto posto a distanza  $r$  avremo campo costante. Appliciamo allora la densità (volumetrica) di carica  $\rho$ :

$$dq = \rho dV, \quad Q = \rho V = \rho \frac{4}{3}\pi R^3$$

dove  $\frac{4}{3}\pi R^3$  è il volume della sfera. Possiamo quindi applicare Gauss:

$$\Phi(\vec{E}) = \frac{Q}{\epsilon_0} = \frac{\rho 4\pi R^3}{3\epsilon_0}$$

Troviamo un'altra espressione per il flusso applicando la definizione, scegliendo una certa superficie gaussiana  $S$  (anch'essa sferica) di raggio  $r$ , che contenga la circonferenza. Avremo che il flusso su tale superficie vale:

$$\Phi \vec{E} = \int_S d\vec{A} \cdot d\vec{E} = E(r) \int_S d\vec{A}$$

Avremo che l'integrale di superficie di  $\vec{A}$  su  $S$  non sarà altro che la superficie della sfera, ergo:

$$\int_S d\vec{A} = 4\pi r^2, \quad \Phi \vec{E} = E(r) 4\pi r^2$$

Eguagliando, come prima, questo con il risultato ottenuto da Gauss abbiamo:

$$E(r) 4\pi r^2 = \frac{\rho 4\pi R^3}{3\epsilon_0} = \frac{Q}{\epsilon_0}, \quad E(r) = \frac{\rho R^3}{3r^2\epsilon_0} = k \frac{Q}{r^2}$$

Questo ci assicura che il campo elettrico prodotto da una distribuzione di carica a simmetria sferica è proporzionale a  $\frac{1}{r^2}$ . Potremmo essere interessati al campo generato dalla carica al suo interno: in questo caso dovremo scegliere una superficie gaussiana di raggio  $r < R$ . Si avrà in questo caso che la carica su cui applichiamo il teorema di Gauss (che chiameremo  $Q_{int}$ ) è minore: comprende soltanto del volume di sfera in  $r$ :

$$Q_{int} = \rho \frac{4}{3}\pi r^3$$

Possiamo allora applicare la stessa uguaglianza precedente:

$$E(r) 4\pi r^2 = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}, \quad E(r) = k \frac{Q_{int}}{r^2}$$

Sostituire la formula di  $Q_{int}$  sarebbe possibile, ma non conveniente: calcoliamo piuttosto il rapporto  $\frac{Q}{Q_{int}}$ .

$$\frac{Q}{Q_{int}} = \frac{\rho \frac{4}{3}\pi R^3}{\rho \frac{4}{3}\pi r^3} = \frac{R^3}{r^3}$$

e moltiplichiamo numeratore e denominatore del campo:

$$E(r) = k \frac{Q_{int} \cdot \frac{Q}{Q_{int}}}{r^2 \cdot \frac{R^3}{r^2}} = k \frac{Q}{R^3} r$$

Notiamo che per  $r = R$ , ovvero avvicinandosi alla superficie della sfera, abbiamo:

$$k \frac{Q}{r^2} = k \frac{Q}{R^2} = k \frac{Q}{R^3} R$$

ovvero quanto calcolato per  $r$  interni ed esterni alla sfera va a coincidere. Riassumendo, abbiamo quindi che il campo generato dalla sfera vale esattamente 0 nel suo punto di centro, cresce linearmente fino ad un massimo di  $k \frac{Q}{R^2}$  sulla sua superficie, e poi decresce quadraticamente al suo esterno.

- **Campo generato da un guscio sferico uniformemente carico**  
Calcoliamo il campo elettrico generato da un guscio sferico completamente cavo, di spessore trascurabile. Avremo bisogno della densità di carica superficiale del disco  $\sigma$ , e potremo calcolare la carica:

$$Q = 4\pi R^2 \sigma$$

Racchiudiamo adesso il guscio con una superficie gaussiana non dissimile da quella adoperata per la sfera carica. Avremo l'uguaglianza:

$$E(r) 4\pi r^2 = \frac{Q}{\epsilon_0}, \quad E(r) = k \frac{Q}{r^2}$$

Risultato esattamente identico a quello della sfera. Vediamo adesso cosa succede se prendiamo  $r < R$ . In questo caso dovremo considerare una superficie gaussiana completamente interna al guscio. Questa superficie non conterrà alcuna carica! In altre parole, il campo elettrico generato da un guscio sferico uniformemente carico al suo interno è nullo. Questo risultato viene spiegato più generalmente nel cosiddetto **teorema del guscio sferico**, riguardante perlopiù la forza gravitazionale, che stabilisce:

- Un guscio sferico di massa uniforme genera lo stesso campo di una carica puntiforme posta esattamente al suo centro;
- Il campo generato dal guscio sferico in un punto al suo interno è nullo.

- **Campo generato da un guscio spesso uniformemente carico**

Facciamo un esempio analogo al precedente, ma considerando il nostro guscio come dotato di un certo spessore. Questo da solo renderà necessario l'utilizzo della densità (volumetrica) di carica  $\rho$ , da cui potremo impostare, chiamando il raggio interno  $a$  e quello esterno  $b$ :

$$Q = \rho \frac{4}{3} \pi (b^3 - a^3)$$

Su un raggio  $r$  esterno al guscio, il risultato sarà coincidente con i due precedenti: prendiamo sempre una superficie gaussiana sferica che racchiuda l'intero oggetto, applichiamo Gauss ed otteniamo:

$$E(r)4\pi r^2 = \frac{Q}{\epsilon_0}, \quad E(r) = k \frac{Q}{r^2}$$

Il caso interessante è quello in cui il campo viene calcolato all'interno del guscio. Avremo che la carica a questo punto varrà:

$$Q_{int} = \rho \frac{4}{3} \pi (r^3 - a^3)$$

questo ci darà:

$$E(r)4\pi r^2 = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}, \quad E(r) = \rho \frac{4}{3} \pi \frac{r^3 - a^3}{4\pi r^2}$$

che, a differenza del caso sferico, non è una funzione lineare di  $r$ . Notiamo che per  $a \rightarrow 0$ , questa forma tende al caso lineare: ciò ha senso in quanto un guscio sferico con raggio minore nullo non è altro che una sfera.

- **Campo generato da una distribuzione di carica piana, uniforme e infinita**

Vediamo il caso di una distribuzione di carica piana, uniformemente carica e infinita. Ricordiamo che tale distribuzione di carica può essere rappresentata da un disco uniformemente carico di raggio infinito, il cui campo abbiamo già calcolato attraverso il principio di sovrapposizione. Ne risulterà che il limite per il raggio che tende ad infinito della formula che avevamo trovato corrisponderà a quanto ricaveremo adesso. Iniziamo col considerare una lastra piana e uniformemente carica: definita la densità di carica superficiale  $\sigma$  potremo applicare Gauss:

$$Q = A\sigma, \quad \Phi \vec{E} = \frac{A\sigma}{\epsilon_0}$$

Possiamo scegliere un'altra superficie gaussiana: per un qualsiasi punto  $\vec{r}$  sulla lastra a distanza  $d$ , consideriamo un cilindro perpendicolare alla lastra. Avremo che il flusso lungo tale cilindro è diviso nel flusso lungo il lato, che sarà nullo, e il flusso sulle basi:

$$\Phi \vec{E} = \Phi_L \vec{E} + \Phi_B \vec{E} = 2AE(d)$$

Imponendo l'uguaglianza delle formule per il flusso si avrà:

$$2AE(d) = \frac{A\sigma}{\epsilon_0}, \quad E(d) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

- **Campo generato dalle lastre di un condensatore ad armature parallele**

Il risultato appena trovato si presta al calcolo del campo generato all'interno ed all'esterno di un componente circuitale assai comune: il condensatore. Assumiamo un condensatore come formato da due lastre piane, che prendiamo come infinite (come si è visto, questa approssimazione descrive piuttosto bene ciò che succede lontano dai bordi). Assegneremo alle due lastre le densità di carica superficiale  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$ . Un calcolo immediato si può fare attraverso il principio di sovrapposizione, per due lastre generanti campo  $\frac{\sigma_i}{2\epsilon_0}$ , il campo totale esterno sarà:

$$E_{int} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2\epsilon_0}$$

mentre il campo totale interno sarà (dovremo considerare segni invertiti, in quanto avviciniamo le lastre da direzioni opposte):

$$E_{est} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2\epsilon_0}$$

Un calcolo simile può essere fatto usufruendo del teorema di Gauss, giungendo allo stesso risultato. Sia  $L$  una superficie gaussiana, identica a quella usata sulla lastra nell'esempio precedente, posta sulla lastra  $\sigma_1$ ;  $R$  una superficie simile sulla lastra  $\sigma_2$ , e infine  $C$  una superficie gaussiana che comprenda di entrambe le lastre. Possiamo impostare uguaglianze simili a quelle già usate finora (fra flusso calcolato "a mano" e con Gauss) su queste superfici. Ad esempio, riguardo a  $L$ :

$$AE_L = \frac{Q_{est}}{\epsilon_0} = \frac{A\sigma_1}{2\epsilon_0}, \quad E_L = \frac{\sigma_1}{2\epsilon_0}$$

Ciò ci permette di ricavare il sistema:

$$\begin{cases} E_L = \frac{\sigma_1}{2\epsilon_0} \\ E_R = \frac{\sigma_2}{2\epsilon_0} \\ E_C = E_L - E_R \end{cases}$$

da cui:

$$E_C = E_{est} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2\epsilon_0}$$

Per il campo esterno. Per quanto riguarda il campo interno, basterà prendere una superficie gaussiana che comprende solamente la parte interna delle lastre  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$ . Impostando Gauss si avrà:

$$\int E \cdot dA = E \cdot A = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0} = \frac{(\sigma_1 + \sigma_2)A}{2\epsilon_0}, \quad E_{int} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2\epsilon_0}$$

Che corrisponde con quanto trovato prima. Possiamo adesso considerare il caso particolare del condensatore, dove  $\sigma_1 = -\sigma_2$ :

$$E_{est} = \frac{\sigma - \sigma}{2\epsilon_0} = 0, \quad E_{int} = \frac{\sigma + \sigma}{2\epsilon_0} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

- **Distribuzione di carica cilindrica** Vediamo un'esempio di distribuzione di carica cilindrica che non è un filo monodimensionale, ma un vero e proprio cilindro con un dato volume  $V$ . Diciamo che  $R$  è il raggio del cilindro,  $h$  la sua altezza, e che il campo elettrico è ortogonale alla sua parete: questo significherà che il flusso lungo le basi è nullo. Diciamo allora di calcolare il campo a una distanza  $r > R$ . Possiamo dire che la carica è, stabilita una densità di carica  $\rho$ :

$$Q = \rho V = \rho \pi R^2 h$$

A questo punto potremo impostare il campo:

$$\Phi_L = \int \vec{E} \cdot dA = E(r) 2\pi r h$$

Su una superficie cilindrica di raggio  $r$ . Lo stesso valore per Gauss:

$$\Phi_L = \frac{\rho V}{\epsilon_0} = \frac{\rho \pi R^2 h}{\epsilon_0}$$

da cui diciamo:

$$E(r)2\pi rh = \frac{\rho\pi R^2 h}{\epsilon_0}, \Rightarrow E(r) = \frac{\rho R^2}{2r\epsilon_0}$$

Calcoliamo allora il campo su un punto interno  $r < R$ . Dovremo considerare la carica interna, e non totale:

$$Q_{int} = \rho V_{int} = \rho\pi r^2 h$$

E impostare la stessa uguaglianza di prima:

$$E(r)2\pi rh = \frac{\rho\pi r^2 h}{\epsilon_0}, \Rightarrow E(r) = \frac{\rho r}{2\epsilon_0}$$

Notiamo che i campi sulla frontiera del cilindro si equivalgono. Infatti:

$$r = R \Rightarrow \frac{\rho R^2}{2\pi\epsilon_0} = \frac{\rho R}{2\epsilon_0} = \frac{\rho r}{2\epsilon_0} \Big|_{r=R}$$

### Divergenza e rotore del campo elettrico

Il concetto di flusso e circuitazione sono espressi matematicamente dal flusso e dal rotore del campo elettrico, come vedremo poi nelle prime due equazioni di Maxell in forma differenziale.

- **Divergenza**

Nel corso di analisi II, si introduce la divergenza come "la tendenza di un punto di comportarsi come un pozzo o una sorgente". In elettrostatica, questo significa che la divergenza di un punto determina la sua capacità di comportarsi come una carica positiva o negativa (se così si può dire). Dal teorema di Gauss, abbiamo l'equazione di bilancio:

$$\int_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = \Phi(\vec{E}) = \int_V \nabla \cdot \vec{E} dV$$

che possiamo così interpretare: il flusso su una superficie  $S$  di un campo  $\vec{E}$  equivale all'integrale sul volume interno alla superficie della divergenza del campo. Questo si applica direttamente al campo elettrico come:

$$\int_V \nabla \cdot \vec{E} dV = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho dV$$

dove  $\nabla \cdot \vec{E} = \rho(x, y, z)$  è la densità di carica di un punto  $(x, y, z)$  arbitrario. Intuitivamente, se la divergenza è la capacità di un punto di comportarsi come carica positiva o negativa, cioè di generare un campo



che attragga cariche del senso opposto e respinga cariche dello stesso segno, corrisponderà con la densità di carica (come risulta dalla prima equazione di Maxwell, cioè la legge di Gauss). Ricordando poi che il campo elettrico non è altro che il gradiente della funzione potenziale ( $\vec{E} = -\nabla V$ ), possiamo dire:

$$\nabla \cdot \vec{E} = \nabla \cdot (-\nabla V) = -\nabla^2 V = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

L'ultima equazione è detta **equazione di Poisson**, e usa l'**operatore laplaciano**. Possiamo esprimerla sulle tre coordinate come:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} V + \frac{\partial^2}{\partial y^2} V + \frac{\partial^2}{\partial z^2} V = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

- **Rotore**

Il rotore del campo elettrico fornisce informazioni riguardo alla sua circuitazione. Sappiamo che un campo conservativo (ovvero un campo che è gradiente di una funzione potenziale) ha rotore nullo in ogni suo punto. Di contro, sappiamo che una campo irrotazionale (definito su un insieme semplicemente connesso), è necessariamente conservativo. Questo porta alla forma differenziale della seconda equazione di Maxwell:

$$\vec{E} = -\nabla V \Rightarrow \nabla \times \vec{E} = 0$$

Si noti che questo vale nell'elettrostatica. Nel caso il campo (e quindi la densità di carica) vari nel tempo, l'irrotazionalità del campo potrebbe non essere assicurata.

## 70 Isolanti e conduttori

La distinzione fra materiali conduttori e isolanti sta nel comportamento dei loro elettroni: negli isolanti, gli elettroni non sono liberi di muoversi, e le parti che vengono caricate (per induzione) restano tali soltanto localmente. Al contrario, nei conduttori gli elettroni sono liberi di muoversi: la carica su un conduttore si distribuisce sempre ed immediatamente (o quasi, in un tempo nell'ordine dei  $10^{-16}$ s) sulla sua superficie. Questo può ricondursi alla struttura dell'atomo: nel modello di Bohr, si associano livelli energetici ad elettroni a distanze diverse (e quantizzate) dal nucleo. Gli elettroni più vicini al nucleo hanno energia maggiore di quelli più esterni. Di contro, gli elettroni esterni sono quelli più semplici da ionizzare, cioè da sottrarre all'atomo. Gli elettroni sullo stato occupato più esterno prendono il nome di banda di valenza: ora, il fenomeno della conduzione è dato dalla banda immediatamente

superiore, ovvero la più piccola non occupata da elettroni, che viene detta banda di conduzione. E' su questa banda che gli elettroni possono scorrere liberamente portando allo spostamento della carica fra atomi circostanti. Il gap fra banda di valenza e banda di conduzione viene detto "banda proibita".

### **Equilibrio elettrostatico di conduttori**

Si possono enunciare (e dimostrare) 4 proprietà fondamentali dei conduttori in stato di equilibrio elettrostatico, ovvero dove le cariche non si muovono.

- Il campo elettrico all'interno di un conduttore è sempre nullo. Questo perché la carica si distribuisce sui bordi: possiamo dimostrare tale risultato attraverso il teorema di Gauss. Se prendiamo una qualsiasi superficie di Gauss completamente interna ad un corpo conduttore, il flusso attraverso essa sarà necessariamente nullo. Se tale non fosse il caso, il campo generato all'interno della superficie porterebbe le cariche a spostarsi verso l'esterno del corpo: esso non sarebbe più in equilibrio. In altre parole, l'unico punto dove la carica può disporsi senza muoversi ulteriormente è il bordo (la superficie) del corpo. Questo principio è alla base della gabbia di Faraday: il campo interno è nullo sia per corpi pieni che in presenza di cavità. Per questo motivo una gabbia metallica, come qualsiasi corpo conduttore provvisto di una cavità, isola completamente il suo interno da qualsiasi campo elettrico esterno.
- Se il conduttore è isolato, le cariche si possono trovare solo sulla sua superficie. Questo è un'altro modo di formulare quanto detto prima. Anche in questo caso possiamo applicare Gauss: visto che il campo interno ad un corpo conduttore è nullo, una qualsiasi superficie gaussiana (poniamo cilindrica) che comprende il corpo avrà necessariamente flusso nullo. L'unica possibile superficie gaussiana che registra un qualche flusso è quella disposta in modo da contenere soltanto il bordo del corpo: e anche in questo caso, avrà flusso solamente sulla faccia esterna parallela alla superficie stessa, in quanto la faccia interna avrà (come prima) flusso zero.
- Il campo è perpendicolare alla superficie in ogni punto immediatamente circostante al corpo. Anche questo è necessario per preservare l'equilibrio: poniamo che il campo immediatamente esterno abbia una componente aggiuntiva rispetto alla sola componente normale. In questo caso le cariche verranno spinte verso una direzione tangente alla superficie del corpo: l'equilibrio è stato violato.
- Il campo si accumula sulle zone a raggio di curvatura minore: le "punte" della superficie accumulano quantità maggiori di carica. Questo risul-

tato è spiegato dal potenziale elettrico: si ha che il campo elettrico è in ogni punto perpendicolare alle isolinee del potenziale elettrico. Immaginiamo allora due sfere, di raggio  $r_1$  e  $r_2$ , collegate fra di loro da un filo conduttore di volume trascurabile. Visto che le due sfere sono collegate, il loro potenziale è identico. Possiamo allora dire:

$$V = k \frac{q_1}{r_1} = k \frac{q_2}{r_2}$$

Impostiamo allora i campi:

$$E_1 = k \frac{q_1}{r_1^2} = \frac{V}{r_1} E_2 = k \frac{q_2}{r_2^2} = \frac{V}{r_2}, \quad \frac{E_1}{E_2} = \frac{r_2}{r_1}$$

Il rapporto fra i raggi corrisponde all'inverso del rapporto fra i campi: a raggi minori, campi maggiori e viceversa.

### **Campo elettrico immediatamente circostante ad un conduttore**

Calcoliamo adesso il campo elettrico immediatamente circostante ad un conduttore, che sappiamo essere concentrato dalla superficie. Basterà applicare gauss su una superficie che comprende solamente la superficie esterna, o meglio la carica accumulata sulla superficie esterna. Poniamo di prendere una superficie cilindrica: l'unico flusso effettivo sarà lungo la base del cilindro esterna alla superficie  $A$ . Allora:

$$\int dA \cdot E(\vec{r}) = EA = A \cdot \frac{q}{\epsilon_0} \Rightarrow E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

per una qualche distribuzione superficiale di carica  $\sigma$ .

### **Campo elettrico di una lastra conduttiva ed isolante**

Cerchiamo di chiarire le differenze fra isolanti e conduttori attraverso l'esempio del campo esterno ad una lastra. Facciamo sia l'esempio conduttivo che quello isolante:

#### **• Campo esterno ad una lastra conduttiva**

Nel caso della lastra conduttiva la carica si distribuisce sulle due superfici (trascuriamo gli effetti di bordo) con densità superficiale  $\sigma_1$ . Il campo esterno può allora essere calcolato attraverso Gauss, usando un cilindro che prende l'interezza della lastra. Consideriamo quindi il flusso sulle 2 basi:

$$2EdA = \frac{2\sigma dA}{\epsilon_0} \Rightarrow E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

Sia  $\sigma_c$  la densità superficiale "totale" della lastra, data da  $\sigma_c = 2\sigma$ . Si avrà che il campo esterno vale:

$$E = \frac{\sigma_c}{2\epsilon_0}$$

- **Campo esterno ad una lastra isolante**

Facciamo adesso lo stesso esemio, ma con una lastra isolante. La carica non sarà distribuita sulla superficie ma lungo l'intero corpo, e andremo a considerare la densità di carica  $\sigma_c$ . Il risultato è però analogo al caso precedente:

$$E = \frac{\sigma_c}{2\epsilon_0}$$

per una stessa superficie gaussiana. In sostanza, il campo elettrico generato dalle due lastre è identico finché è identica la loro densità di carica.

## 71 Potenziale elettrico

Introduciamo adesso una grandezza fondamentale: il potenziale elettrico.

### Circuitazione del campo elettrico

Si ha che il campo elettrico è un campo conservativo: l'integrale di linea  $\int_S$  su un qualche percorso  $S$  al suo interno non dipende in valore dal percorso adottato, ma solamente dal punto di partenza e dal punto di arrivo:

$$\vec{E} = \sum_i^n d\vec{E}_i \rightarrow \int_A^B \vec{E} ds$$

non dipende dalla traiettoria e:

$$\int_A^B \vec{E} ds = \int_A^B \vec{E} ds'$$

per qualsiasi coppia di percorsi  $S$  e  $S'$  diversi. Questo significa che su un percorso chiuso (ovvero un percorso che torna su stesso) l'integrale ha sempre valore nullo. Questo è particolarmente utile per determinare il lavoro necessario per spostare una carica su un campo elettrico.

### Circuitazione e lavoro

Consideriamo, per una certa carica  $q_0$  immersa in un campo elettrico in moto sul percorso  $S$ , l'integrale di linea:

$$\mathcal{L}_S = \int_S \vec{F} ds = q_0 \int_S \vec{E} ds$$

dove sappiamo  $q_0 \vec{E} = \vec{F}$  essere la forza esercitata dal campo sulla carica. Questo non sarà altro che il lavoro necessario a spostare  $q$  su  $S$ , opponendosi al campo elettrico.

### Energia potenziale

Introduciamo ancora un'altro concetto: su un percorso che parte da  $A$  e arriva a  $B$ , possiamo usare lo stesso integrale di prima per calcolare la variazione di energia potenziale:

$$\mathcal{L}_{AB} = -\Delta U = U_A - U_B = q_0 \int_A^B \vec{E} ds$$

Prendiamo il campo generato da una carica singola, attraverso la legge di Coulomb:

$$= q_0 q k \int_A^B \frac{1}{r^2} (dr \hat{r}) = -q q_0 k \frac{1}{r} \Big|_A^B = q q_0 k \left( \frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B} \right)$$

Da questo abbiamo che l'energia potenziale per una carica  $q_0$  è:

$$U(\vec{r}) = \frac{q q_0 k}{r}, \quad \lim_{r \rightarrow +\infty} U(\vec{r}) = 0$$

Dove  $r$  è la distanza di  $\vec{r}$  dalla carica. Questo ci permette finalmente di definire il potenziale elettrico:

### Potenziale elettrico

Possiamo svolgere sul potenziale elettrico un'operazione simile a quella fatta sulla forza generata dal campo: dividiamo quindi tutto per  $q_0$ , la nostra carica di prova:

$$\frac{U(\vec{r})}{q_0} = \frac{q k}{r} = V(\vec{r})$$

Questo ultimo valore è il potenziale elettrico. Nel S.I. la sua unità di misura è il Volt (V), che equivale a  $1 \frac{J}{C}$ . Notiamo la stretta correlazione fra potenziale elettrico e campo elettrico: il campo elettrico definisce una "direzione" di spostamento, o meglio di applicazione di forza per qualsiasi carica immerso in esso, ed il campo è definito sul potenziale in modo da spostare suddette cariche da zone ad alto potenziale verso zone a basso potenziale (almeno nel caso di cariche positive, per cariche negative accadrà il contrario). Come vedremo poi, questa relazione è meglio sintetizzata attraverso il calcolo differenziale: si può dire che il campo è il gradiente del potenziale. Questa relazione ha anche una constatazione in termini di unità di misura: se finora avevamo misurato il campo come  $\frac{N}{C}$ , notiamo adesso di poterlo anche definire in  $\frac{V}{m}$ :

$$[E] = k \frac{[q]}{[l^2]} = \frac{[V]}{[l]} = \frac{[F]}{[q]}$$

Che è banale da dimostrare in termini di coerenza dimensionale. Diciamo:

$$k = \frac{[F][l]^2}{q^2}, \quad [E] = \frac{[F][l]^2}{q^2} \frac{[q]}{[l^2]} = \frac{[F]}{[q]}$$

### Lavoro e potenziale elettrico

Avevamo stabilito che, riguardo alla relazione fra lavoro, energia potenziale, e potenziale elettrico per un percorso  $A \rightarrow B$ :

$$-\Delta U_{AB} = L_{AB} = -\Delta V q$$

e nello specifico, riguardo al potenziale di una singola carica puntiforme:

$$(q \cdot) V(\vec{r}) = (q \cdot) \frac{kq_0}{r} = -\Delta U_{AB} = L_{AB}$$

notando il limite:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} V(\vec{r}) = 0$$

In sostanza, abbiamo che il lavoro svolto *dal campo* generato da una carica positiva per spostare un'altra carica positiva (o dal campo generato da una carica negativa per spostare un'altra carica negativa) è positivo, e la variazione di energia negativa: ci sposteremo da una zona di maggiore potenziale ad una zona di minore potenziale, allontanandoci dalla carica. Di contro, se la carica immersa nel campo è negativa (o comunque discorde), tenderà a spostarsi da una zona di minore potenziale a una zona di maggiore potenziale, contro la direzione del campo. Notiamo che il lavoro è comunque positivo: la direzione della forza di Coulomb e dello spostamento della particella corrispondono.

### Lavoro svolto da forze esterne

Introduciamo un'agente esterno, che cerca di spingere la carica nella direzione opposta al campo: nel caso di una carica positiva, cercherà quindi di spostarla nella direzione opposta a quella del campo. Questo comporterà una differenza di potenziale positiva: la forza esterna dovrà *compiere* lavoro, e il campo elettrico invece dovrà fare lavoro negativo, per opporsi ad essa. Sia invece presa in considerazione una carica negativa, che cercheremo di spostare in direzione opposta al campo. In questo caso ci sposteremo da zone a differenza maggiore a zone a differenza minore: la differenza di potenziale è minore. Il lavoro da noi svolto dovrà comunque essere positivo, in quanto ci opporremo al campo, e il campo di contro dovrà svolgere lavoro negativo. Questo significa che il lavoro svolto dalla forza esterna si opporrà al campo, e sarà pari a:

$$L_{est} = -qq_0k \left( \frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B} \right) = qq_0k \left( \frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A} \right) = q(V_B - V_A) = q\Delta V$$

Questo può essere ottenuto anche dalla definizione di campo:

$$F = qE, \quad F_{est} = -F = -qE$$

ricordando che il potenziale su un certo percorso di lunghezza  $s$  è (per un campo costante):

$$E = -\frac{V}{s}$$

che spiega i segni opposti.

### **Nota sulle trasformazioni quasistatiche**

Facciamo un'ultima precisazione: tutto ciò che abbiamo appena detto è vero solo e soltanto se i processi descritti avvengono in regime quasistatico: ovvero, invece di fornire vere e proprie accelerazioni alle cariche in questione, le facciamo passare attraverso più stati continui di equilibrio, in modo che in ogni momento nessuna quantità di energia venga trasformata in energia cinetica. Questo significa che se una certa forza deve avere, per opporsi al campo, un valore maggiore di  $\epsilon$  alla forza espressa dal campo (in modo da vincerla), noi prendiamo il limite per  $\epsilon \rightarrow 0$ . Ciò significa che il tempo impiegato dalla carica a muoversi effettivamente lungo i percorsi di cui parliamo è  $t \rightarrow \infty$ , ovvero infinito. Questo non ci disturba, perché ne parleremo e basta, non aspetteremo che accada.

### **Superfici equipotenziali**

Si dicono superfici equipotenziali particolari regioni dello spazio dove il potenziale è costante. Le superfici equipotenziali possono rivelarsi strumenti utili per descrivere il potenziale elettrico. Vediamo la forma delle superfici equipotenziali di diverse distribuzioni di carica:

- **Superfici equipotenziali di una carica puntiforme**

Avremo che il potenziale nei pressi di una carica puntiforme  $q$  è dato da:

$$V = \frac{kq}{r}$$

E' chiara la simmetria radiale: le superfici equipotenziali avranno la forma di sfere centrate sulla carica. A sfere di raggio maggiore si associerà potenziale minore e viceversa, fino al limite ad infinito:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{kq}{r} = 0$$

- **Superfici equipotenziali dentro un condensatore**

Fra le lastre di un condensatore si ha che il campo è in ogni punto ortogonale alle lastre. Possiamo sfruttare il fatto che una superficie equipotenziale è in ogni punto ortogonale al campo: si avrà quindi che le superfici equipotenziali del condensatore saranno tutte piani (trascurando gli effetti di bordo) paralleli alle lastre. Il potenziale massimo

sarà sul piano immediatamente adiacente alla lastra caricata positivamente, il potenziale minimo su quello immediatamente adiacente alla lastra caricata negativamente.

- **Superfici equipotenziali di un dipolo**

Per un dipolo elettrico, potremo sfruttare la stessa proprietà che abbiamo appena visto: le superfici equipotenziali saranno curvilinee ed in ogni punto perpendicolari alle linee di campo che partono dalle cariche.

### **Elettronvolt**

Come unità di misura *dell'energia* (e non del potenziale elettrico!) introduciamo l'elettronvolt (eV). Si definisce 1 eV come l'energia di un sistema formato da un elettrone che si muove lungo una differenza di potenziale di 1 V, che equivale a  $1.602 \times 10^{-19}$  J.

### **Campo elettrico come gradiente del potenziale**

Esiste un'importante relazione matematica fra campo elettrico e potenziale. Stabilita una certa densità di carica  $\rho(\vec{r}')$ , possiamo calcolare il campo elettrico in un punto  $r$  come:

$$\vec{E}(\vec{r}) = k \int \frac{\rho(\vec{r}') dV' (\vec{r} - \vec{r}')}{(\vec{r} - \vec{r}')^3}$$

dove il cubo, come avevamo già visto, serve a normalizzare il versore  $(\vec{r} - \vec{r}') / |\vec{r} - \vec{r}'|$ . Notiamo inoltre il termine  $dV'$ , che si riferisce al volume, non al potenziale. Possiamo anche calcolare il potenziale elettrico (che è uno scalare) come:

$$V(\vec{r}) = k \int \frac{\rho(\vec{r}') dV'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

Notiamo allora la relazione:

$$-dV = \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

su uno spostamento infinitesimo  $d\vec{s}$ . Questa non è che la definizione stessa di potenziale. Sarà allora possibile dividere lo spostamento  $d\vec{s}$  sulle tre direzioni:

$$d\vec{s} = dx\hat{x} + dy\hat{y} + dz\hat{z}$$

e riscrivere il tutto come:

$$-dV(x, y, z) = \vec{E} \cdot d\vec{s} = E_x dx + E_y dy + E_z dz$$



Questo ci permette di effettuare le derivate parziali:

$$-\frac{\partial V}{\partial x} = E_x, \quad -\frac{\partial V}{\partial y} = E_y, \quad -\frac{\partial V}{\partial z} = E_z,$$

Questo non è altro che il gradiente di  $V$ . Ciò significa che possiamo scrivere la relazione fondamentale:

$$-\nabla V = \vec{E}$$

### Potenziale di sistemi di cariche

Vediamo come calcolare il potenziale elettrico e l'energia potenziale di sistemi di cariche puntiformi. Iniziamo col **potenziale elettrico**: avremo che per una singola carica puntiforme, il potenziale ad una distanza  $r$  è:

$$V = k \frac{q}{r}$$

come avevamo calcolato dalla definizione. Per potenziali dovuti a più cariche, vale il principio di sovrapposizione:

$$V_{tot} = k \sum_i^n \frac{q_i}{r_i}$$

Calcoliamo poi l'energia potenziale del sistema: questa è definita come l'energia necessaria a portare le cariche in una certa configurazione, partendo da distanza infinita. Questa definizione è valida in quanto ricordiamo che:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} V = 0$$

Ciò ci permette di dire che il lavoro (e quindi l'energia) necessario a spostare la carica è:

$$\mathcal{L}_\infty = U(\vec{r}) = U(\vec{r}) - U(\infty) = q(V(\vec{r}) - V(\infty)) = q(V(\vec{r}))$$

Potremo allora applicare la formula che lega il potenziale elettrico all'energia potenziale:

$$U = q_0 \Delta V \Rightarrow U = k \frac{qq_0}{r}$$

Per distribuzioni di più cariche vale lo stesso principio di sovrapposizione di prima:

$$U_{tot} = k \sum_i^n \frac{qq_i}{r}$$

Occorre notare che, come l'energia, il potenziale ha senso solo in quanto variazione di potenziale: il valore dello "0" del potenziale può essere scelto a piacere, in quanto ne considereremo soltanto le variazioni.

### Potenziale di alcune distribuzioni di carica

Usiamo adesso il calcolo integrale per ottenere il potenziale di alcune distribuzioni di carica.

- **Potenziale di un'anello uniformemente carico**

Consideriamo un disco di raggio  $R$ , e calcoliamone il potenziale ad una distanza  $x$  lungo il suo asse. Dovremo stabilire una densità lineare  $\lambda$  tale che:

$$dq = \lambda dl$$

Il potenziale infinitesimo sarà allora, dalla formula:

$$dV = k \frac{dq}{r} = k \frac{\lambda dl}{d}$$

dove la distanza  $d$  vale quanto l'ipotenusa:

$$d = \sqrt{R^2 + x^2} \Rightarrow k \frac{\lambda dl}{\sqrt{R^2 + x^2}}$$

Calcoliamo allora il potenziale elettrico totale prendendo l'integrale:

$$V = k \int \frac{\lambda dl}{\sqrt{R^2 + x^2}}$$

Visto che nessun termine all'interno dell'integrale dipende dall'angolo sull'anello, possiamo semplicemente stabilire la carica totale sull'anello  $Q$ :

$$Q = 2\pi R\lambda, \quad V = k \frac{Q}{\sqrt{R^2 + x^2}}$$

Possiamo adesso prendere l'opposto del gradiente di questo potenziale per verificare la formula prima dimostrata:

$$-\nabla V = \vec{E}, \quad -\frac{dV}{dx} = k \frac{Qx}{(R^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

che è coerente con quanto avevamo dimostrato attraverso il principio di sovrapposizione.

- **Potenziale di un disco uniformemente carico**

Consideriamo un'oggetto simile: un disco di raggio  $R$ , che possiamo modellizzare come una successione concentrica di anelli. Calcoliamone quindi il potenziale ad una distanza  $x$  lungo il suo asse. Dovremo stavolta stabilire una densità superficiale di carica  $\sigma$  tale che:

$$q = 2\pi r dr \sigma, \quad dV = \frac{dqk}{d} = k \frac{2\pi r dr \sigma}{\sqrt{r^2 + x^2}}$$

Basterà adesso prendere quest'ultimo potenziale infinitesimo nell'integrale da 0 a  $R$ :

$$\begin{aligned} V &= k \int_0^R k \frac{2\pi r dr \sigma}{\sqrt{r^2 + x^2}} = 2k\pi\sigma \int_0^R \frac{r}{\sqrt{x^2 + r^2}} dr = 2\pi k\sigma \left[ (r^2 + x^2)^{\frac{1}{2}} \right]_0^R \\ &= 2\pi k\sigma (\sqrt{R^2 + x^2} - x) = 2\pi k\sigma x \left( \sqrt{\frac{R^2}{x^2} + 1} - 1 \right) \end{aligned}$$

notando l'integrale:

$$\int \frac{r}{\sqrt{r^2 + x^2}} dr = (r^2 + x^2)^{\frac{1}{2}}$$

Possiamo prendere nuovamente l'opposto del gradiente per verificare la relazione fra potenziale e campo:

$$\begin{aligned} -\nabla V &= \vec{E} = -\frac{d}{dx} \left( 2\pi k\sigma \left( \sqrt{R^2 + x^2} \right) \right) \\ &= -\left( \frac{d}{dx} 2\pi k\sigma x \left( \sqrt{\frac{R^2}{x^2} + 1} - 1 \right) - \frac{d}{dx} 2\pi k\sigma x \right) = 2\pi k\sigma - 2\pi k\sigma \frac{x}{\sqrt{R^2 + x^2}} \\ &= 2\pi k\sigma \left( 1 - \frac{x}{\sqrt{R^2 + x^2}} \right) \end{aligned}$$

che è nuovamente coerente con quanto avevamo dimostrato attraverso il principio di sovrapposizione.

### Potenziale elettrico generato da una sfera uniformemente carica

Calcoliamo il potenziale elettrico generato da una sfera uniformemente carica di raggio  $R$ . Stabilito il raggio  $R$  della sfera, calcoliamo innanzitutto il campo ad una distanza  $r > R$  dalla sfera. Avevamo ottenuto che:

$$-\nabla V = E$$

Questo è equivalente a dire:

$$v = - \int E dr$$

sull'unità infinitesima di distanza  $dr$ . Potremo allora calcolare il campo della sfera, che sappiamo essere equivalente al campo generato da una carica puntiforme posta al centro della stessa:

$$E = \frac{Kq}{r^3} r = \frac{Kq}{r^2} \hat{r}$$

Impostiamo adesso l'integrale. Quello che vogliamo immaginare è di prendere una carica, portarla da un punto ad infinita distanza (sapendo che  $V(\infty) = 0$ ) fino ad  $r$ . La differenza potenziale tra il punto di partenza e il punto d'arrivo sarà il potenziale in quel punto:

$$V = -qk \int_{\infty}^r \frac{1}{r^2} dr = -kq(-r^{-1} + 0) = \frac{kq}{r}$$

→ **Calcolo alternativo:** possiamo altrimenti dire che il potenziale esterno attraverso l'"integrale indefinito":

$$V = -qk \int \frac{1}{r^2} dr = -kq(-r^{-1}) = \frac{kq}{r} + c$$

dove il  $c$  dipende dallo "0" scelto per il potenziale (che sappiamo avere significato solo in termini di variazione).

Possiamo calcolare il potenziale per una distanza  $r < R$ : calcoliamo innanzitutto il potenziale sulla superficie della sfera, imponendo  $r = R$ :

$$r = R \Rightarrow V = \frac{kq}{R}$$

A questo punto, il potenziale all'interno della sfera sarà dato dal potenziale da infinito fino alla superficie della sfera più il potenziale dalla superficie della sfera fino al punto interno  $r$ , ovvero dai due integrali:

$$V(r) = - \int_{\infty}^R \frac{kq}{r^2} dr - \int_R^r \frac{kq}{R^3} dr = kq \left( \frac{1}{r} \Big|_{\infty}^R - \frac{1}{R^3} \frac{r^2}{2} \Big|_R^r \right) = kq \left( \frac{1}{R} - \frac{1}{R^3} \left( \frac{r^2}{2} - \frac{R^2}{2} \right) \right)$$

$$kq \left( \frac{1}{R} - \frac{1}{2} \frac{r^2}{R^3} + \frac{1}{2R} \right) = kq \left( \frac{1}{R} + \frac{1}{2R} - \frac{1}{2} \frac{r^2}{R^3} \right) = \frac{3}{2} \frac{kq}{R} - \frac{kqr^2}{2R^3}$$

Questa funzione equivale al frammento di parabola che ha massimo in  $r = 0$  di  $\frac{3}{2} \frac{kq}{R}$ , e si congiunge con i rami del potenziale esterno nei punti  $r = \pm R$  (la cui unione a suddetta funzione è fra l'altro differenziabile pure in quei punti).

### Potenziale elettrico generato da una sfera conduttrice carica

Calcoliamo adesso il potenziale elettrico generato da una sfera carica, ma stavolta conduttrice. Il potenziale all'esterno della sfera ( $r > R$ ) potrà essere trovato in modo analogo a prima:

$$V = -qk \int_{\infty}^r \frac{1}{r^2} dr = -kq(-r^{-1} + 0) = \frac{kq}{r}$$

Per calcolare il potenziale all'interno della sfera, potremo a questo punto partire dal calcolare il potenziale sulla superficie della sfera ( $r = R$ ):

$$r = R \Rightarrow V = \frac{kq}{R}$$

Il potenziale su qualsiasi punto interno alla sfera non potrà essere che uguale al potenziale sulla sua superficie, in quanto il potenziale all'interno di un conduttore è costante (così come il campo elettrico è nullo). Avremo quindi che, per ogni  $r < R$ :

$$r < R \Rightarrow V = \frac{kq}{R}$$

## 72 Capacità

La capacità è una grandezza che misura la quantità di carica accumulata su una certa differenza di potenziale all'interno di un condensatore:

$$C = \frac{Q}{\Delta V}$$

La sua unità di misura è il Farad (F), equivalente a 1 Coulomb su 1 Volt:  $1F = \frac{1C}{1V}$ . Si noti che la capacità è una quantità (per definizione) sempre positiva. Si noti che la carica complessiva di un condensatore è nulla: per capacità di un condensatore si intende comunemente la carica accumulata su una sola armatura. Possiamo considerare, a scopo di esempio, il caso più semplice di un condensatore: una singola carica sferica, con densità superficiale di carica  $\sigma$ , che funge da prima armatura. La seconda armatura sarà assimilabile ad un guscio sferico di raggio infinito. Potremo allora dire:

$$C = \frac{Q}{\Delta V}, \quad Q = 4\pi R^2 \sigma, \quad \Delta V = k \frac{Q}{R} \Rightarrow C = \frac{R}{k} = 4\pi\epsilon_0 R$$

Notiamo come la capacità della sfera non dipende dalla sua carica, né dalla differenza di potenziale che essa genera: dipende solo dal suo raggio, che una quantità estensiva. Questo resterà vero anche per i condensatori tradizionali, a lastre parallele.

### Condensatore come elemento circuitale

Il condensatore (o capacitore) è un'importante elemento circuitale: un condensatore collegato ad un circuito che fornisce corrente continua accumulerà carica, che potrà poi essere rilasciata una volta scollegato il circuito di carica. Questa energia viene usata nei modi più disparati: per realizzare memorie, flash di fotocamere, defibrillatori, ecc...

### Calcolo delle capacità

Calcoliamo le capacità di diversi tipi di condensatore.

- **Capacità di un condensatore a lastre parallele**

Calcoliamo la capacità di un condensatore a lastre parallele. Si avrà che la carica su una singola armatura è data da:

$$Q = A\sigma$$

Possiamo poi calcolare il potenziale assumendo il campo fra le due lastre come uniforme:

$$\Delta V = Ed = \frac{\sigma}{\epsilon_0}d$$

usando il fatto che  $E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$  in un condensatore, come già calcolato più volte. Possiamo allora ottenere la capacità:

$$C = \frac{Q}{\Delta V} = \frac{A\sigma}{\frac{\sigma}{\epsilon_0}d} = \frac{\epsilon_0 A}{d}$$

**Nota sugli effetti di bordo**

Quanto calcolato è effettivamente vero solo nel caso ideale, di un condensatore a lastre parallele di area infinita. O meglio, lo sarebbe su una *sezione* di tale condensatore, cui capacità totale sarebbe sennò, anch'essa infinita. Questo è perché si vanno a trascurare i cosiddetti **effetti di bordo**: visto che il campo elettrico è conservativo, il campo ai bordi delle lastre del condensatore non potrà semplicemente svanire. Si avrà quindi una certa conformazione radiale delle linee di campo che introdurrà un'errore nei calcoli. Le specifiche di questo meccanismo verranno trattate più avanti.

- **Capacità di un condensatore sferico**

Calcoliamo la capacità di un condensatore sferico, formato da una carica sferica di raggio  $a$ , e da un guscio sferico esterno ad essa di raggio  $b$ , con  $a < b$ . Le due distribuzioni avranno densità di carica superficiale  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$ , rispettivamente. Potremo allora impostare le cariche sulle superfici del condensatore come uguali ed opposte:

$$4\pi a^2 \sigma_1 = q, \quad 4\pi b^2 \sigma_2 = -q$$

Da questo potremo calcolare la differenza di potenziale, utilizzando l'equazione trovata prima:

$$V(r) = \frac{qk}{r} + c, \quad 0 < \Delta V = V(a) - V(b) = kq \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right)$$

Potremo quindi calcolare la capacità:

$$C = \frac{q}{\Delta V} = \frac{q}{qk \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right)} = \frac{4\pi\epsilon_0 ab}{b-a} = \frac{ab}{k(b-a)}$$

Notiamo come da questo risultato possiamo trovare la capacità del condensatore a lastre parallele: impostiamo  $b$  come  $a + \epsilon$  su una piccola variazione di distanza  $\epsilon$ . Avremo allora, con del calcolo un po' discutibile:

$$c = \frac{4\pi\epsilon_0 a(b+\epsilon)}{b+\epsilon-a}, \quad \lim_{a,b \rightarrow \infty} \frac{4\pi\epsilon a^2}{\epsilon} = \frac{\epsilon_0 A}{d}$$

che è esattamente la capacità del condensatore piano, assunto  $A = 4\pi a^2$  e  $\epsilon = d$ .

### • Capacità di un condensatore cilindrico

Calcoliamo la capacità di un condensatore cilindrico, come quello che forma un cavo coassiale. Consideriamo quindi due cilindri infinitamente lunghi di raggio  $a$  e  $b$ , con  $a < b$ , quindi contenuti l'uno dentro l'altro. Possiamo impostare le cariche in modo analogo a prima, facendo una considerazione: sarà inutile calcolare la capacità lungo tutto il cavo (essa è semplicemente infinita). Svolgeremo allora il calcolo della capacità *per unità di lunghezza*:  $C_h = \frac{C}{h}$ .

$$2\pi ah\sigma_1 = q, \quad 2\pi bh\sigma_2 = -q$$

Calcoliamo allora la differenza di potenziale attraverso il teorema di Gauss. Troviamo quindi per primo il campo elettrico:

$$\Phi(E) = h2\pi rE(r) = \frac{q}{\epsilon_0} = \frac{2\pi ah\sigma_1}{\epsilon_0}, \quad E(r) = \frac{a\sigma}{\epsilon_0 r}$$

E integriamo su  $r$ , in modo da ottenere una funzione potenziale che rispetti  $-\frac{\Delta V}{\partial r} = E(r)$ :

$$V(r) = - \int E(r) dr = - \frac{a\sigma_1}{\epsilon_0} \ln(r)$$

Infine, calcoliamo esplicitamente la differenza di potenziale da  $a$  a  $b$ :

$$\Delta V = V_b - V_a = - \frac{a\sigma_1}{\epsilon_0} (\ln(b) - \ln(a)) = - \frac{a\sigma_1}{\epsilon_0} \left( \ln \frac{b}{a} \right)$$

Ottenuto il potenziale, possiamo calcolare la capacità come:

$$C = \frac{Q}{\Delta V} = \frac{2\pi ah\sigma_1}{\frac{a\sigma_1}{\epsilon_0} \ln \left( \frac{b}{a} \right)} = \frac{2\pi\epsilon_0}{\ln \left( \frac{b}{a} \right)} h = \frac{h}{2k \ln \left( \frac{b}{a} \right)}$$

Quindi, la capacità su unità di lunghezza che stavamo cercando è:

$$\frac{C}{h} = \frac{2\pi\epsilon_0}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)} = \frac{1}{2k \ln\left(\frac{b}{a}\right)}$$

### Energia immagazzinata da un condensatore

Mentre viene caricato, il condensatore accumula una certa quantità di energia: questa quantità di energia corrisponde al lavoro fatto da una certa forza elettromotrice (all'esempio quella di una batteria) per spostare le cariche da un armatura all'altra del condensatore. La resistenza che il condensatore oppone a questa forza cresce linearmente con la carica che esso accumula. Si ha che in un campo uniforme:

$$V(t) = E(t)d = \frac{\sigma(t)}{\epsilon_0}d$$

Il lavoro sarà allora:

$$\mathcal{L} = \int \frac{\sigma(t)}{\epsilon_0} d dq = \int \frac{q(t)d dq}{A\epsilon_0} = \frac{d}{A\epsilon_0} \int q dq = \frac{d}{A\epsilon_0} \frac{q^2}{2} = \frac{1}{2} \frac{q^2}{\frac{A\epsilon_0}{d}} = \frac{1}{2} \frac{q^2}{C}$$

Notando che  $\frac{A\epsilon_0}{d}$  non è altro che  $C$ . A questo punto applichiamo  $C = \frac{Q}{V}$ :

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \frac{q^2}{C} = \frac{1}{2} \frac{C^2 V^2}{C} = \frac{1}{2} C V^2 = U$$

che coincide con l'energia che un condensatore è in grado di immagazzinare. Esiste un'altra importante formulazione dello stesso risultato, tenendo conto che  $C = \frac{A\epsilon_0}{d}$  e  $V = Ed$  nel campo uniforme:

$$U = \frac{1}{2} \left( \frac{\epsilon_0 A}{d} \right) (Ed)^2 = \frac{1}{2} \epsilon_0 A E^2 d$$

Possiamo quindi dividere per  $Ad$ , che non è altro che la regione dello spazio occupato dal campo elettrico del condensatore, per ottenere la **densità di energia**:

$$\frac{U}{Ad} = u = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2$$

### Calcolo dell'energia all'interno di un condensatore sferico

Applichiamo le formule viste per il calcolo dell'energia all'interno di un condensatore. Possiamo seguire 3 strade:



•

$$U = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}$$

Attraverso il calcolo diretto, si ha:

$$C = \frac{1}{k \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right)}, \quad U = \frac{1}{2} \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) = \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right)$$

Oppure:

$$C = \frac{ab}{k(b-a)}, \quad U = \frac{1}{2} \frac{(b-a)}{ab} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right)$$

Notando:

$$\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{b-a}{ab}$$

•

$$U = \frac{1}{2} CV^2$$

Anche qui, possiamo applicare le formule:

$$C = \frac{1}{k \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right)}, \quad V = kq \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right)$$

$$U = \frac{1}{2} \frac{1}{k \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right)} k^2 q^2 \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right)^2 = \frac{kq^2}{2} \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) = \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right)$$

• Attraverso la **densità di carica**  $\frac{1}{2} E^2 \epsilon_0$  :

$$U = \int \frac{1}{2} E^2 \epsilon_0 dV = \frac{1}{2} \epsilon_0 \int_a^b E^2(r) 4\pi r^2 dr = 2\pi\epsilon_0 \int_a^b E^2(r) r^2 dr$$

Abbiamo allora  $E(r)$  (con Gauss, calcolo già svolto):

$$E(r) = \frac{kq}{r^2}$$

$$U = 2\pi\epsilon_0 \int_a^b k^2 \frac{q^2}{r^4} r^2 dr = 2\pi\epsilon_0 k^2 q^2 \int_a^b \frac{1}{r^2} dr = \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right)$$

### Condensatori in parallelo e in serie

Vediamo adesso come calcolare la capacità totale dei capacitori visti come *elementi circuitali*, disposti in serie e in parallelo:

- **Condensatori in parallelo**

Nel caso di due condensatori disposti in parallelo, si avrà che la differenza di potenziale sulle armature è uguale per entrambi. Potremo quindi impostare:

$$q_1 = C_1 V_1, \quad q_2 = C_2 V_2, \quad V_1 = V_2 \Rightarrow q_1 + q_2 = (C_1 + C_2)V$$

Da questo potremo ricavare la capacità totale:

$$C = C_1 + C_2 = \frac{q_1}{V} + \frac{q_2}{V}$$

La capacità totale è la somma delle capacità dei condensatori presi singolarmente. Questo ragionamento si estende a combinazioni teoricamente illimitate di condensatori, da cui:

$$C_{eq} = C_1 + C_2 + \dots$$

Questo risultato può essere visualizzato come segue: la capacità totale di un insieme di condensatori di area  $A$  collegati in parallelo equivale a quella di un unico grande condensatore di area  $A$ : la capacità è quindi somma algebrica delle capacità dei singoli condensatori:

$$C_{eq} = \frac{\epsilon_0(2A)}{d} = 2\frac{\epsilon_0 A}{d} = 2C$$

- **Condensatori in serie**

Nel caso di due condensatori disposti in serie, non potremo dire che il potenziale è lo stesso: si osserverà anzi una caduta di potenziale  $\Delta V$  su ognuno dei condensatori. A conservarsi sarà invece la carica, per il principio di conservazione della carica. Avremo quindi che:

$$\Delta V_{tot} = \Delta V_1 + \Delta V_2 = \frac{q}{C_1} + \frac{q}{C_2}$$

Da cui potremo ricavare la capacità:

$$\Delta V_{tot} = \frac{q}{C_{eq}} = \frac{q}{C_1} + \frac{q}{C_2} \Rightarrow \frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$$

Questo si estende a combinazioni illimitate di condensatori come:

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots, \quad C_{eq} = \left( \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right)^{-1}$$

Da questo si ha che la capacità totale dei condensatori messi in serie è sempre minore di quella che si otterrebbe mettendoli in parallelo, e anzi che è minore della capacità di uno qualsiasi dei condensatori che formano la serie.

## Dielettrici

La capacità di un condensatore può essere aumentata attraverso l'inserzione al suo interno di un **dielettrico**. Si dice dielettrico qualsiasi materiale manifesti capacità di polarizzazione elettrica. Il fenomeno della polarizzazione elettrica è tipico degli oggetti che, introdotti all'interno di un campo elettrico, si polarizzano formando un campo elettrico opposto. Esistono due metodi di polarizzazione:

- **Polarizzazione per deformazione**

La polarizzazione per deformazione si verifica quando gli orbitali degli atomi che compongono il materiale vengono deformati dal campo elettrico. Questo provoca uno spostamento delle cariche positive, che di conseguenza genera un campo opposto al campo che dà vita in primo luogo alla deformazione.

- **Polarizzazione per orientamento**

La polarizzazione per orientamento si verifica quando le molecole di un materiale formano un dipolo elettrico: immerse all'interno di un campo elettrico, la loro struttura le porta quindi ad orientarsi nella direzione del campo, generando quindi un campo opposto.

Diciamo di avere un condensatore con densità superficiale di carica  $\sigma_0$ , differenza di potenziale  $V_0$ , campo interno  $E_0$  e capacità  $C_0$ . Introduciamo un dielettrico all'interno del condensatore: si avrà che se inizialmente:

$$E_0 = \frac{\sigma_0}{\epsilon_0}, \quad V_0 = E_0 h$$

dopo l'introduzione dell'elemento dielettrico il campo e il potenziale cambieranno, di preciso come:

$$|E_k| < |E_0| : \quad E_k = \frac{E_0}{k}, \quad |V_k| < |V_0| : \quad V_k = \frac{V_0}{k}$$

dove  $k$ , un valore adimensionale  $> 0$ , prende il nome di **costante dielettrica** del materiale. Possiamo ricavare la differenza (della differenza) di potenziale:

$$E_0 - E_k = \frac{\sigma_0}{\epsilon_0} - \frac{\sigma_0}{\epsilon_0 k} = \frac{\sigma_0}{\epsilon_0} \left( \frac{k-1}{k} \right)$$

Dove il valore  $k-1 = \chi$ ,  $\chi > 0$ , prende il nome di **suscettività elettrica** del materiale dielettrico. Il valore di differenza fra i potenziali è il *campo di polarizzazione*  $E_p$  del dielettrico, ovvero il campo che il dielettrico oppone a quello del condensatore, generato dalla densità di carica del dielettrico  $\sigma_p$ :

$$\sigma_p = \frac{(k-1)\sigma_0}{k} = \frac{\chi\sigma_0}{k}, \quad E_p = \frac{(k-1)\sigma_0}{k\epsilon_0} = \frac{\chi\sigma_0}{k\epsilon_0}$$

Possiamo allora vedere che cosa accade alla capacità. Visto che  $C = \frac{Q}{V}$ :

$$C_k = \frac{q_0 k}{V_0} = C_0 k, \quad C_0 = \frac{\epsilon_0 A}{d} \Rightarrow C_k = k \frac{\epsilon_0 A}{d}$$

Notiamo una caratteristica importante: esistono due situazioni in cui possiamo inserire il nostro dielettrico. La prima è quella in cui carichiamo il dielettrico attraverso una certa forza elettromotrice (ad esempio quella di una batteria), che poi scollegiamo. In questo caso la carica sul condensatore resterà costante, e a cambiare sarà la differenza di potenziale. Avremo:

$$V_k = \frac{V_0}{k} \Rightarrow C = \frac{q_0}{\frac{V_0}{k}} = \frac{q_0 k}{V_0}$$

La seconda situazione sarà quella dove la forza elettromotrice continua ad agire (cioè non scollegiamo la batteria). In questo caso la carica verrà spostata in modo da mantenere costante la differenza di potenziale. Avremo:

$$Q_k = k Q_0 \Rightarrow C = \frac{q_0 k}{V_0}$$

Come vediamo, qualsiasi sia il caso il risultato non cambia. Facciamo qualche altra considerazione sulla costante dielettrica  $k$  (o sulla suscettibilità  $\chi$ ). Abbiamo che per valori  $k \rightarrow 1$  ( $\chi \rightarrow 0$ ) il materiale assomiglia sempre di più al vuoto. Per valori sempre più grandi  $k \rightarrow \infty$  ( $\chi \rightarrow \infty$ ) il materiale assomiglia sempre di più un conduttore: questo potrebbe sembrare poco intuitivo, ma è semplicemente conseguenza del fatto che in un conduttore le cariche sono libere di muoversi, e il campo interno viene effettivamente annullato. Possiamo poi introdurre un'altra grandezza, la **rigidità dielettrica**: un dielettrico si comporta come tale (e può quindi migliorare le caratteristiche di un condensatore) fino ad un certo punto: sottoposte ad un potenziale troppo elevato, le molecole che lo compongono vengono ionizzate, gli elettroni sono liberi di circolare e il materiale si comporta effettivamente come un conduttore. La rigidità dielettrica rappresenta il potenziale massimo a cui può essere sottoposto un dielettrico prima del punto di rottura. Si riporta una lista delle costanti dielettriche e le rigidità dielettriche di alcuni materiali comuni:

Materiale	Costante dielettrica $k \left(\frac{F}{m}\right)$	Rigidità dielettrica $\left(\frac{V}{m}\right)$
Vuoto	1	-
Aria	1.00059	$3 \times 10^6$
Bachelite	4.9	$24 \times 10^6$
Gomma	6.7	$12 \times 10^6$
Carta	3.7	$16 \times 10^6$
Vetro	4 - 7	$20 \times 10^6$

### Energia di un condensatore con dielettrico

Vediamo come varia l'energia all'interno di un condensatore a seguito dell'inserzione di un dielettrico. Conoscevamo già le formule:

$$U_0 = \frac{1}{2} C_0 V_0^2 = \frac{1}{2} \frac{q_0^2}{C_0}, \quad u = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2$$

Notiamo che in questo caso la situazione a potenziale costante è diversa da quella a carica costante: avremo un comportamento diverso in presenza o meno di una forza elettromotrice.

- **Carica costante** (batteria scollegata)

Nel caso si vada ad introdurre un dielettrico in un condensatore carico, la sua capacità aumenterà e l'energia immagazzinata al suo interno diminuirà. Abbiamo:

$$U_k = \frac{1}{2} \frac{q_0^2}{C_k}, \quad C_k = \frac{q_0 k}{V_0} \Rightarrow U_k = \frac{1}{2} q_0^2 \frac{V_0}{q_0 k} = \frac{1}{2} \frac{q_0 V_0}{k}$$

Che possiamo dividere e moltiplicare per  $V_0$ :

$$U_k = \frac{1}{2} \frac{q_0}{V_0} \frac{V_0^2}{k} = \frac{U_0}{k}$$

- **Potenziale costante** (batteria collegata)

Nel caso la batteria resti collegata al condensatore, la forza elettromotrice continuerà a caricarlo: l'energia immagazzinata finale sarà maggiore:

$$U_k = \frac{1}{2} \frac{q_k^2}{C_k}, \quad C_k = \frac{q_0 k}{V_0} \Rightarrow \frac{1}{2} q_0^2 k^2 \frac{V_0}{q_0 k} = \frac{1}{2} \frac{q_0 V_0}{k}$$

Che possiamo nuovamente dividere e moltiplicare per  $V_0$ :

$$U_k = \frac{1}{2} \frac{q_0}{V_0} V_0^2 k = U_0 k$$

### Dielettrici parzialmente inseriti

Poniamo adesso di avere un condensatore dove viene inserito un dielettrico che non copre completamente la distanza fra le due lastre: chiamiamo  $h$  questa distanza, e  $s$  lo spessore del dielettrico. Potremo applicare le formule:

$$V = Ed, \quad C = \frac{Q}{V}$$

Posta carica costante, la capacità sar infatti  $\frac{Q}{V}$  su qualsiasi differenza di potenziale si andrà a formare dentro il condensatore. Quest'ultimo parametro si otterrà da  $V = Ed$ :

$$V = \frac{E}{k}s + E_0(h - s) = E_0h \left( \frac{s}{kh} + \frac{h-s}{h} \right)$$

A questo punto la capacità è:

$$C_k = \frac{q_0}{E_0h \left( \frac{s}{kh} + \frac{h-s}{h} \right)}$$

Notiamo allora  $\frac{q_0}{E_0h}$  essere uguale a  $\frac{E_0}{V_0} = C_0$ , quindi:

$$C_k = \frac{C_0}{\left( \frac{s}{kh} + \frac{h-s}{h} \right)}$$

Questo ci porta a dire:

$$\frac{1}{Ck} = \frac{\left( \frac{s}{kh} + \frac{h-s}{h} \right)}{C_0} = \frac{1}{C_0} + \frac{s}{h} \left( \frac{1}{Ck} - \frac{1}{C_0} \right)$$

Da cui notiamo che la forma della capacità totale è la stessa di quella di una coppia di capacitori in serie: questo ha senso, in quanto il sistema formato dalle due sezioni con e senza dielettrico è effettivamente formato da due condensatori in serie. Si noti che la distanza del dielettrico dalle armature non conta, conta solamente il suo spessore.

### Forza di risucchio dielettrico

L'energia che abbiamo calcolato essere persa quando si inserisce il dielettrico può essere pensata come il lavoro che il capacitore esegue sul dielettrico stesso, "risucchiandolo" per portarlo nella sua posizione finale. Questa forza di risucchio è data dalla polarizzazione parziale del dielettrico che si ha nei pressi degli effetti di bordo del condensatore. Questo porta alla formazione di una carica positiva sul dielettrico dove il condensatore ha la lastra negativa, e viceversa, generando una forza di attrazione fra i due oggetti. Possiamo ricavare un potenziale di tale energia studiando la capacità totale. Definiamo un sistema di coordinate: il nostro moto avverrà sull'asse x. Chiamiamo allora  $h$  la distanza fra le lastre del condensatore,  $l$  la loro lunghezza,  $s$  lo spessore del dielettrico, e  $x$  la sua posizione sull'asse x. La capacità interna sarà allora la somma della capacità di due "sottocondensatori": uno in corrispondenza del dielettrico ( $C_1$ ), l'altro nella parte rimasta libera ( $C_2$ ): Avremo:

$$C = C_1 + C_2 = \frac{\epsilon_0 k s x}{h} + \frac{\epsilon_0 (l - x) s}{h}$$

da cui:

$$C = \frac{\epsilon_0 s}{d} (l - x(k - 1))$$

Un potenziale può a questo punto essere calcolato imponendo:

$$U = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} \Rightarrow \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C(x)}$$

Notiamo che la forza è attrattiva verso l'interno del condensatore: una volta uscito, il dielettrico si troverà attratto verso la direzione opposta. Avremo in sostanza un moto oscillatorio, non propriamente armonico (il potenziale non è quadratico) ma comunque caratterizzato da un'oscillazione periodica attorno a un punto di equilibrio.

## 73 Pressione elettrostatica

La pressione elettrostatica è la forza elettrica esercitata su un conduttore su unità di superficie, ovvero:

$$P = \frac{F_{el}}{A}$$

- **Pressione elettrostatica in un condensatore**

Calcoliamo la pressione elettrostatica su un'armatura di condensatore. Abbiamo che il campo elettrico all'interno di un condensatore, data una certa densità superficiale di carica  $\sigma$ , è:

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

A questo punto, dato che la carica sull'armatura è semplicemente  $q = \sigma A$ , si avrà che la pressione elettrostatica è:

$$P = \frac{F}{A} = \sigma A \frac{\sigma}{2\epsilon_0} = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0}$$

Notiamo che, dall'equazione della densità di energia in un condensatore si può ricavare:

$$\frac{U}{V} = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2, \quad E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \Rightarrow \frac{1}{2} \frac{\sigma^2}{\epsilon_0^2} \epsilon_0 = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} = P$$

ergo:

$$\frac{U}{V} = \frac{F}{S} = P$$

Che è un risultato interessante.

- **Pressione elettrostatica di due emisferi**

I risultati trovati prima possono applicarsi anche ad altre distribuzioni di carica. Vogliamo calcolare la pressione elettrostatica fra due emisferi di una sfera carica di raggio  $R$ . Si noti che, finchè i due emisferi sono *in contatto* fra di loro, la distribuzione della carica è sulla superficie della sfera (i lati interni degli emisferi non hanno carica!). Dimostriamo innanzitutto la validità delle formule. Iniziamo con la formula della forza in un campo  $F = qE$ . Vogliamo calcolare il campo  $E$  sull'immediata superficie della sfera. Potremmo applicare la formula  $\frac{\sigma}{\epsilon_0}$ , ma poniamo di volerla ricavare. Si ha:

$$E = k \frac{Q}{R^2}, \quad Q = 4\pi R^2 \sigma \Rightarrow E = k \frac{4\pi R^2 \sigma}{R^2} = \frac{4\pi R^2 \sigma}{4\pi \epsilon_0 R^2} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

Che è come dovrebbe essere. Calcoliamo allora la forza per unità di area, ponendo la carica su unità di area come  $q = \sigma dA$ :

$$F = qE = \sigma dA \frac{\sigma}{\epsilon_0} = \frac{\sigma^2}{\epsilon_0} dA$$

Prendiamo allora l'integrale sulla superficie *curva* della semisfera  $\int_A dA = 2\pi R^2$ :

$$F = \int_A \frac{\sigma^2}{\epsilon_0} dA = \frac{\sigma^2}{\epsilon_0} 2\pi R^2$$

Ricordiamo infine che  $P = \frac{F}{A}$ , ergo il risultato è:

$$P = \frac{F}{A} = \frac{\frac{\sigma^2}{\epsilon_0} 2\pi R^2}{4\pi R^2} = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0}$$

Che dimostra la formula essere valida per una sfera (lo sarà per qualsiasi distribuzione di carica dalla formula per il campo immediatamente esterno).

Possiamo ottenere la stessa formula dall'equivalenza:

$$\frac{F}{A} = \frac{U}{V}$$

prendendo come  $\frac{U}{V}$  la densità di energia  $\frac{U}{V} = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2$ :

$$P = \frac{F}{A} = \frac{U}{V} = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 = \frac{1}{2} \epsilon_0 \frac{\sigma^2}{\epsilon_0^2} = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0}$$

Che è analogo a prima. Possiamo usare al posto della densità di carica superficiale, la carica totale, ricavando  $\sigma$  e sostituendola nella formula:

$$Q = \sigma 4\pi R^2, \quad \sigma = \frac{Q}{4\pi R^2} \Rightarrow P = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} = \frac{\left(\frac{Q}{4\pi R^2}\right)^2}{2\epsilon_0} = \frac{Q^2}{32\pi^2 R^4 \epsilon_0}$$



oppure:

$$Q = [...] \Rightarrow P = \frac{1}{2}\epsilon_0 \left( \frac{Q}{4\pi R^2 \epsilon_0} \right)^2 = \frac{Q^2}{32\pi^2 R^4 \epsilon_0}$$

Infine, possiamo dire che la forza di pressione totale esercitata (quindi la forza necessaria a mantenere gli emisferi connessi fra di loro) è pari a:

$$P = \frac{F}{A}, \quad F = PA = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} 2\pi R^2 = \frac{\sigma^2 \pi R^2}{\epsilon_0} = \frac{Q^2}{16\pi \epsilon_0 R^2}$$

E la forza esercitata da un singolo emisfero:

$$F' = \frac{1}{2}F = \frac{\sigma^2 \pi R^2}{2\epsilon_0} = \frac{Q^2}{32\pi \epsilon_0 R^2}$$

(Quest'ultimo passaggio andrebbe in verità verificato ponendo che il campo elettrico su cui calcoliamo la pressione e quello di un singolo emisfero, ergo la forza totale è dimezzata... per chiarimenti ulteriori si rimanda al testo di provenienza dell'esercizio, *Griffith, Introduction to Electrodynamics*).

## 74 Corrente elettrica

Descriviamo ora il fenomeno che si presenta quando un conduttore non è in equilibrio ed è sottoposto ad un potenziale: la corrente elettrica. Immaginiamo, a scopo di esempio, due sfere collegate fra di loro, e a potenziale  $V_1$  e  $V_2$ , dove  $V_2 - V_1 = \Delta V < 0$ ,  $V_1 > V_2$ . Prima che le sfere si trovino in equilibrio elettrostatico, l'equalizzazione del potenziale porterà carica dalla sfera  $V_1$  alla sfera  $V_2$ . Questo genererà, di conseguenza, una corrente elettrica lungo il collegamento fra le sfere (che però a basse resistenze potremo osservare solo per alcuni istanti).

### Portatori di carica

Il concetto di corrente si basa su un modello: quello dei portatori di carica. I portatori di carica sono particelle che si muovono all'interno di un conduttore, trasportando carica. Nella maggior parte dei conduttori metallici, i portatori di carica rappresentano semplicemente gli elettroni liberi nel reticolo. Definiamo la  $n$  come il numero di elettroni per unità di volume, sulla base della densità di massa  $\rho$  e la massa molare  $A$ :

$$n = \frac{\rho \cdot 6.022 \times 10^{23}}{A}$$

### Velocità di deriva

I portatori di carica in un conduttore sono costantemente in moto: procedono

infatti di moto rettilineo uniforme, finché non urtano qualcosa (siano essi altri elettroni, asperità del metallo, non andremo nel dettaglio) e vengono deviati. La somma totale dei moduli di queste velocità è nulla finché non si osserva un campo elettrico:

$$\sum_i \frac{v_i(t)}{n} = \langle \vec{v} \rangle = 0$$

Nel momento in cui si induce una differenza di potenziale (e un conseguente campo elettrico), attraverso un generatore che sia in grado di esprimere una qualche forza elettromotrice, al moto casuale dei portatori di carica si aggiunge una velocità di deriva nella direzione del campo. Più propriamente, le cariche negative vengono spostate nella direzione opposta al campo, e le cariche positive nella direzione del campo, con un risultante spostamento di carica (corrente) complessiva nella direzione del campo. Potremo valutare questo spostamento su un filo conduttore di area prendendone una sezione di superficie  $A$ :

$$dI = n\vec{v}_d dA \cos \theta q_p = nq_p \vec{v}_d \times d\vec{A}$$

dove  $v_d$  è la velocità di deriva,  $q_p$  la carica elementare dei portatori di carica (qua la carica del protone),  $\theta$  l'angolo fra la superficie e la direzione dello spostamento di carica, e  $d\vec{A} = dA \times n$  normale della superficie. La corrente totale sarà a questo punto:

$$I = nq_p v_d A = \frac{dQ}{dt}$$

ovvero la carica totale che passa attraverso  $A$  in un unità di tempo. Possiamo poi introdurre la **densità di corrente**:

$$J = nq_p v_d$$

dove ci siamo liberati del termine  $A$ .

Definiamo le unità di misura: Ampere ( $1A = \frac{1C}{1S}$ ) per la corrente, e Ampere su metro quadro  $\frac{A}{m^2}$  per la densità di carica  $J$ .

Facciamo un calcolo quantitativo della velocità di deriva. Posta una corrente di 8 Ampere su un filo di raggio  $4 \text{ mm}^2$ , e nota la densità di portatori di carica del rame (secondo il modello di Drude-Lorentz,  $8,47 \times 10^{22} \text{ cm}^{-3}$ ), potremo impostare:

$$I = \Phi(J) = JA, \quad J = nq_p v_d, \quad i = nq_p v_d A \Rightarrow v_d = \frac{i}{q_p n A} = 0.29 \times 10^{-3} \frac{m}{s}$$

Notiamo che la velocità di deriva ha valori molto piccoli. La corrente ha comunque effetti considerevoli: questo è dato dal fatto che la densità  $n$  è molto grande, e di conseguenza lo è anche la carica complessiva che si sposta.

## 75 Legge di Ohm

Mettiamo adesso in relazione differenza di potenziale e corrente. Si ha di alcuni materiali, detti **materiali ohmici**, che la densità di corrente e il campo sono direttamente proporzionali con una certa costante di proporzionalità  $\sigma$  detta **conducibilità**:

$$J = \sigma E$$

Questo ci permette di dire, visto che il potenziale è  $\Delta V = Es$  e la densità  $J = \frac{I}{A}$ :

$$El = \frac{J}{\sigma} l = \Delta V = \left( \frac{l}{\sigma A} \right) I = RI$$

dove abbiamo definito la **resistenza**  $R$ :

$$R = \left( \frac{l}{\sigma A} \right) I = \frac{\Delta V}{I}$$

Possiamo infine definire la **resistività**  $\rho$ , che non è altro che l'inverso della conducibilità:

$$\rho = \frac{1}{\sigma}$$

Da cui possiamo definire la resistenza su un conduttore come:

$$R = \rho \frac{l}{A}$$

Notiamo come la resistenza è direttamente proporzionale alla lunghezza del conduttore, e inversamente proporzionale alla sua superficie: questo ha senso, soprattutto nel paragone con la fluidodinamica, in quanto su una superficie maggiore possono passare più portatori di carica, e su una lunghezza maggiore incontreranno più resistenza (cioè collisioni col reticolo metallico).

## 76 Resistenza

Cominciamo a parlare di resistenza, sia come componente circuitale che come resistenza interna a un generatore. Abbiamo, dalla legge di Ohm, che il campo elettrico è proporzionale alla densità di corrente  $J$  di una costante  $\sigma$ , conducibilità, o dell'inverso della costante  $\rho$ , resistività:

$$E = \sigma J = \frac{1}{\rho} J$$

Inoltre, abbiamo che la corrente  $I$  è data dal prodotto fra la densità  $J$  e la superficie  $A$  del conduttore:

$$I = J \cdot A, \quad E = \rho \frac{I}{A}$$

moltiplichiamo entrambi i lati per  $l$ , ricordando che  $El = \Delta V$ :

$$El = \rho \frac{l}{A} I = \Delta V, \quad V = IR \Rightarrow R = \rho \frac{l}{A}$$

Che è nuovamente la resistenza di un conduttore di lunghezza  $l$  e sezione  $A$ . Si riportano le resistività e i coefficienti termici (che ci torneranno utili fra poco) di alcuni materiali di uso comune.

Materiale	Resistività ( $\Omega \cdot \text{m}$ )	Coefficiente termico $\alpha$ ( $^{\circ}\text{C}^{-1}$ )
Argento	$1.59 \times 10^{-8}$	$3.8 \times 10^{-3}$
Rame	$1.7 \times 10^{-8}$	$3.9 \times 10^{-3}$
Oro	$2.44 \times 10^{-8}$	$3.4 \times 10^{-3}$
Ferro	$10 \times 10^{-8}$	$5 \times 10^{-3}$
Silicio*	$2.3 \times 10^3$	$-75 \times 10^{-3}$
Vetro	$10^{10} - 10^{14}$	-
Gomma	$10^{13}$	-

(\*) Notiamo una particolarità del silicio: la sua resistività è fortemente dipendente dalla presenza di eventuali impurità. L'introduzione di altri atomi (**drogaggio**) può variarla di diversi ordini di grandezza. Per questo motivo il silicio è il superconduttore più utilizzato: la sua resistenza può essere fortemente ridotta attraverso il drogaggio con atomi di antimonio, fosforo o arsenico.

### Modello Drude-Lorentz

Si presenta adesso un modello che mette il fenomeno della conduzione in relazione con il comportamento microscopico degli atomi che formano il reticolo metallico. Modellizziamo un metallo come un reticolo di ioni carichi positivamente che cedono ciascuno gli atomi nel loro strato di valenza: si forma un "mare" di elettroni liberi di circolare liberamente. Il rame, ad esempio, cede un elettrone per ogni atomo (ha configurazione elettronica  $[\text{Ar}]3d^{10}4s^1$ ), ovvero l'unico presente nel suo strato di valenza. Sappiamo poi che gli elettroni liberi urtano, nel loro moto, gli ioni del reticolo metallico, descrivendo quindi traiettorie lineari spezzate. Possiamo allora prendere uno di questi urti, e cercare una relazione fra la velocità  $\vec{v}_i$  subito dopo dell'urto  $\vec{v}_{i+1}$  un attimo prima dell'urto successivo. Visto che la forza a cui sono sottoposti gli elettroni immersi in un campo elettrico vale  $q\vec{E}$ , abbiamo:

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m} = \frac{q\vec{E}}{m_e}, \quad \vec{v}_{i+1} = \vec{v}_i + \frac{q\vec{E}}{m_e}\tau$$

dove il tempo  $\tau$  è il tempo medio che trascorre fra due urti distinti, ovvero il *cammino libero medio*  $l$  sulla velocità media  $\vec{v}_{med}$ :

$$\tau = \frac{l}{\vec{v}_{med}}$$

Notiamo inoltre che questo implica la relazione:

$$q\vec{E}\tau = V_d m_e \sim F \cdot t = m \cdot V$$

dove su entrambi i lati figura la definizione di impulso, ovvero l'impulso fornito all'elettrone quando urta il reticolo metallico (in termini molto approssimativi). Da questo possiamo ricavare la velocità di deriva  $\vec{v}_d$ , che è semplicemente:

$$\langle \vec{v}_{i+1} \rangle = \langle \vec{v}_i + \frac{q\vec{E}}{m_e} \tau \rangle = \vec{v}_d = \frac{q\vec{E}}{m_e} \tau$$

Abbiamo quindi un'espressione per la velocità di deriva  $v_d$ , che possiamo sostituire in quanto avevamo già trovato riguardo alla corrente:

$$J = nqv_d = nq \left( \frac{q\vec{E}}{m_e} \tau \right) = \frac{nq^2\tau}{m_e} \vec{E}, \quad I = JA = nqv_d = nq \left( \frac{q\vec{E}}{m_e} \tau \right) A = \frac{nq^2\tau A}{m_e} \vec{E}$$

e a conducibilità e resistività:

$$\sigma = \frac{nq^2\tau}{m_e}, \quad \rho = \frac{1}{\sigma} = \frac{m_e}{nq^2\tau}$$

Notiamo come  $\vec{E}$  non dipende dal campo  $\vec{E}$ : questa, avevamo detto, è la caratteristica fondamentale dei materiali ohmici (equivale alla dipendenza lineare fra campo e densità di corrente).

### Resistenza e temperatura

Il modello Drude-Lorentz è una semplificazione della realtà dei fatti: stiamo cercando di modellizzare in modo classico fenomeni squisitamente relativistici, e non potremo quindi ottenere previsioni accurate. Un esempio può essere la temperatura: le previsioni del modello Drude-Lorentz non permettono di stimare in modo accurato la correlazione fra resistività e temperatura. Si ha in generale che la resistività è direttamente proporzionale alla temperatura. Ponendo di misurare la resistività ad una certa temperatura  $T_0$  di riferimento:

$$\rho(T) = \rho(T_0)(1 + (T - T_0)\alpha) = \rho_0(1 + \Delta T\alpha)$$

dove abbiamo chiamato  $\rho_0$  la resistività del materiale a  $T_0$ . Abbiamo il coefficiente termico  $\alpha$ , espresso come la variazione di resistività su variazione di temperatura:

$$\alpha = \frac{\Delta\rho/\rho_0}{\Delta T}$$

Questo corrisponde a equazioni in forma identica per la resistenza totale, visto che resistività e resistenza sono direttamente proporzionali ( $\rho \propto R$ ):

$$R(T) = R(T_0)(1 + (T - T_0)\alpha) = R_0(1 + \Delta T\alpha)$$

### Potenza elettrica

Calcoliamo ora la derivata sul tempo dell'energia dissipata da una resistenza  $R$ . Notiamo che quest'ultima non è che l'energia fornita dal generatore alla resistenza. Possiamo ricavare dalla definizione di potenziale che l'energia dissipata (e quindi la potenza) è:

$$U = Q\Delta V, \quad P = \frac{dU}{dt} = \frac{dQ}{dt}\Delta V = I\Delta V$$

visto che  $I = \frac{dQ}{dt}$ . Possiamo combinare questo risultato con quanto ottenuto dalla legge di Ohm  $V = IR$  per ottenere:

$$P = I\Delta V = I^2 R = \frac{(\Delta V)^2}{R}$$

Questa potenza è collegata al cosiddetto **effetto Joule**: un resistore attraversato da una certa corrente dissipa parte della sua energia (che è la stessa energia usata per generare la differenza potenziale che ha poi creato la corrente), trasformandola in calore.

### Resistenza in parallelo e in serie

Vediamo adesso come calcolare la capacità delle resistenze viste come *elementi circuitali*, disposti in serie e in parallelo:

- **Resistenze in serie**

Nel caso di resistenze poste in serie, ci aspettiamo che la corrente sia costante fra qualsiasi coppia di esse. A variare sarà il potenziale, che subirà cadute lungo le resistenze stesse:

$$I_1 = I_2 = I, \quad V_2 - V_3 = \Delta V_1 = R_1 I, \quad V_3 - V_2 = \Delta V_2 = R_2 I$$

da cui:

$$IR = IR_1 + IR_2 \Rightarrow R = R_1 + R_2$$

La resistenza totale è la somma delle resistenze dei resistori presi singolarmente. Questo ragionamento si estende a numeri illimitati di resistenze messe in serie, come:

$$R_{eq} = R_1 + R_2 + \dots$$

- **Resistenze in parallelo**

Nel caso di resistenze poste in parallelo, la corrente non sarà più la stessa sui due resistori: avremo invece che:

$$I = I_1 + I_2$$

da questo potremo calcolare la differenza di potenziale:

$$\Delta V = V_B - V_A = R_1 I_1 = R_2 I_2$$

Ovvero, la differenza di potenziale su  $R_1$  e su  $R_2$  è equivalente. Avremo allora:

$$\frac{\Delta V}{R} = \frac{\Delta V}{R_1} + \frac{\Delta V}{R_2} \Rightarrow \frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

Qesto si è estende a combinazioni illimitate di resistori come:

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots, \quad R_{eq} = \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)^{-1}$$

### Resistenza interna

Parliamo brevemente del fenomeno della resistenza interna. Finora abbiamo parlato solamente di **resistenza esterna**, cioè della resistenza impressa da resistori (o anche dal filo conduttore stesso...) sulle cariche messe in moto dalla forza elettromotrice  $\mathcal{E}$  prodotta da un qualche generatore di potenziale. In verità, il generatore stesso presenta una resistenza, appunto resistenza interna. Potremo quindi modellizzare un generatore come un complesso più complesso, formato da un generatore e da una resistenza. Spesso, però, la resistenza interna viene omessa per semplicità. Svolgiamo i calcoli: se una batteria ha resistenza interna  $r$ , e deve muovere carica attraverso una **resistenza di carico** (esterna)  $R$ , la corrente finale sarà:

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R + r}$$

Diciamo di voler massimizzare la potenza del circuito  $P$ . Potremo usare la formula (nota che  $\mathcal{E} = V$ , non è altro che una differenza di potenziale):

$$P = RI^2 = R \left( \frac{\mathcal{E}}{R + r} \right)^2, \quad \frac{d}{dR} P = \left( \frac{V}{R + r} \right) \left( \frac{V}{R + r} - \frac{2VR}{(R + r)^2} \right)$$

da cui si ottiene:

$$\frac{d}{dR}P = 0 \Rightarrow r = R$$

ergo la potenza è massima quando la resistenza esterna corrisponde alla resistenza interna.

### Circuiti RC

Studiamo il comportamento di un circuito formato da un generatore di forza elettromotrice e due componenti circuitali: un condensatore e un resistore collegati in serie. L'andamento della corrente (come quello della carica nel condensatore) sarà un transiente che andrà stabilizzandosi fino ad una condizione di equilibrio col tempo. Ci aspettiamo che all'istante  $t = 0$  (quando abbiamo appena chiuso il circuito), la corrente sarà massima e la carica nel condensatore nulla. Al contrario, dopo un certo tempo, ci aspetteremo che la corrente tenda a 0 e la carica nel condensatore approssimi il suo livello massimo.

### Carica di un condensatore

Possiamo usare la seconda legge di Kirchhoff (che formalmente non abbiamo ancora visto), imponendo che la differenza di potenziale totale sulla maglia del circuito sia nulla: le differenze di potenziale saranno quella del generatore di fem e dei due componenti circuitali (ricordando le formule per condensatore e resistore:  $C = \frac{Q}{V}$ ,  $V = IR$ ), ovvero:

$$\mathcal{E} - \frac{q}{C} - iR = 0$$

Possiamo porre subito  $q = 0$  e  $i = 0$  per verificare quanto avevamo assunto all'inizio. Si avrà che, per  $q = 0$ :

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R}$$

è il valore massimo della corrente, e che per  $i = 0$ :

$$Q = C\mathcal{E}$$

è il valore massimo della carica nel condensatore. Per quantificare le casistiche intermedie, esprimiamo la corrente  $i$  attraverso la sua definizione,  $i = \frac{dq}{dt}$ :

$$\frac{dq}{dt} = \frac{\mathcal{E}}{R} - \frac{q}{RC}$$

Questa è un'equazione differenziale a variabili separabili: mette in relazione la *variazione* di carica con la carica stessa. Possiamo riscrivere come, e risolvere:

$$\frac{dq}{q - C\mathcal{E}} = -\frac{1}{RC}dt \rightarrow \int_0^q \frac{dq}{q - C\mathcal{E}} = -\frac{1}{RC} \int_0^t dt \rightarrow \ln \frac{q - C\mathcal{E}}{-C\mathcal{E}} = -\frac{t}{RC}$$



Possiamo riscrivere il risultato appena trovato come:

$$q(t) = C\mathcal{E} \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right) = C\mathcal{E} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

chiamando  $\tau = RC$  **costante temporale** del circuito RC. Calcoliamo allora, derivando questa equazione, l'espressione della corrente:

$$i(t) = \frac{\mathcal{E}}{R} e^{-\frac{t}{\tau}}$$

### Energia dispersa in carica

Calcoliamo l'energia che la resistenza trasforma in calore (diremo **energia interna del resistore**), nel tempo necessario a caricare completamente il condensatore. Chiaramente, il condensatore non sarà mai veramente carico del tutto: prenderemo l'integrale improprio per  $t \rightarrow \infty$ . Usiamo il fatto che l'integrale della potenza corrisponde all'energia, e che possiamo facilmente ricavare la potenza da:

$$P = i^2 R, \quad E_r = \int_0^\infty P dt = \int_0^\infty i^2 R dt$$

sostituiamo allora il valore trovato per  $i$ :

$$E_r = \int_0^\infty \left(\frac{\mathcal{E}}{R} e^{-\frac{t}{\tau}}\right)^2 R dt = \frac{1}{2} C \mathcal{E}^2$$

L'integrale si ottiene sostituendo  $\tau = RC$ , e corrisponde a quanto avremo trovato applicando l'energia del condensatore:  $E_c = \frac{1}{2} CV^2$ . Questo ci dice che l'energia dissipata dal resistore equivale all'energia immagazzinata nel condensatore: questo ha senso in quanto, considerando il circuito come un sistema chiuso, la variazione di energia deve corrispondere all'energia finale del sistema.

### Scarica di un condensatore

Abbiamo visto il caso di un condensatore in fase di carica. Calcoliamo adesso cosa succede in fase di scarica, partendo da una carica massima  $Q$ . Eliminiamo innanzitutto la forza elettromotrice dalla seconda legge di Kirchhoff:

$$-\frac{q}{C} - iR = 0$$

Effettuiamo quindi la stessa sostituzione di prima, e risolviamo in modo simile la differenziale:

$$\frac{dq}{q} = -\frac{1}{RC} dt \rightarrow \int_Q^q \frac{dq}{q} = -\frac{1}{RC} \int_0^t dt \rightarrow \ln \frac{q}{Q} = -\frac{t}{RC}$$

Possiamo nuovamente riscrivere questo come:

$$q(t) = Qe^{-\frac{t}{\tau}}$$

Infine, deriviamo per trovare la corrente:

$$i(t) = -\frac{Q}{RC}e^{-\frac{t}{\tau}}$$

**Energia dispersa in scarica** Calcoliamo quindi l'energia dispersa dalla resistenza nel corso della scarica. Come prima, considereremo il caso ideale in cui  $t \rightarrow \infty$ , ergo tutta la carica viene scaricata. Potremo nuovamente impostare la potenza (e quindi l'energia):

$$P = i^2 R, \quad E_r = \int_0^\infty P dt = \int_0^\infty i^2 R dt$$

sostituiamo allora il valore trovato per  $i$ :

$$E_r = \int_0^\infty \left( -\frac{Q}{RC}e^{-\frac{t}{\tau}} \right)^2 R dt = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}$$

La situazione è identica a quella della carica: l'energia dissipata dal resistore durante la scarica del condensatore è uguale all'energia iniziale del condensatore.

## 77 Analisi circuitale

Formalizziamo adesso alcuni dei metodi usati per l'analisi dei circuiti DC (in corrente continua).

### Leggi di Kirchhoff

Le leggi di Kirchhoff sono regole riguardanti la corrente e il potenziale sui circuiti, specialmente quelli che non possono essere ricondotti ad una singola maglia.

- **Prima legge di Kirchhoff** (corrente sui nodi)

In un circuito formato da più fili, ogni punto di incontro fra più fili è chiamato **nodo**. La prima legge di Kirchhoff ci assicura che la somma totale delle correnti sul nodo è nulla:

$$\sum_j i_j = 0$$

Abbiamo chiaramente bisogno di una convenzione per i segni: scelta una direzione di scorrimento della corrente, le correnti entranti avranno segno positivo e quelle uscenti senso negativo.

- **Seconda legge di Kirchhoff** (potenziale sulle maglie)  
Ogni circuito può essere ridotto ad una serie di percorsi chiusi detti **maglie**. Su una maglia, la somma di differenza di potenziale ai capi di tutti gli elementi è nulla:

$$\sum_j \Delta V_j = 0$$

Questo è dato dal fatto che, per una maglia formata da un certo numero di generatori di fem  $\mathcal{E}_j$ , e di componenti circuitali che usano la fem  $R_j$ , si avrà che tutta la forza elettromotrice viene usata dai componenti:

$$\sum_j R_j = \sum_j \mathcal{E}_j \Rightarrow \sum_j \Delta V_j = 0$$

Anche in questo caso occorrerà una convenzione di segno: si ha:

- **Resistori**: per i resistori, il potenziale è  $\Delta V = -IR$  nel caso si percorra il resistore nella direzione della corrente,  $\Delta V = IR$  nel caso si percorra nella direzione opposta.
- **Sorgenti**: per le sorgenti, il potenziale è  $\Delta V = \mathcal{E}$  nel caso si percorra la sorgente nella direzione della corrente,  $\Delta V = -\mathcal{E}$  nel caso si percorra nella direzione opposta.

### Circuito con resistenza

Usiamo le leggi appena definite per studiare il comportamento di un semplice circuito, formato da un generatore di forza elettromotrice e da una resistenza. Questa resistenza potrà essere interpretata come una resistenza interna al generatore o esterna, è irrilevante. Abbiamo, dalla seconda legge di Kirchhoff, che il potenziale sull'unica maglia del circuito, presa la direzione della corrente come quella dal polo negativo al positivo del genratore, è:

$$\mathcal{E} - IR = 0, \quad \mathcal{E} = IR$$

da cui si nota chiaramente che la fem  $\mathcal{E}$  non è altro che la differenza di potenziale a cui il generatore mantiene i due capi di filo a cui è collegato.

## 78 Introduzione alla magnetostatica

Studiando l'elettrostatica, abbiamo dato una definizione di **campo elettrico**. Vediamo adesso un campo collegato al campo elettrico, il **campo magnetico**. Il campo magnetico viene generato dai **magnet**i, che possono essere

magneti permanenti, oppure elettromagneti (che saranno visti nel dettaglio in seguito). E' fondamentale notare che non esiste un equivalente magnetico della carica elettrica: in altre parole, non esistono **monopoli** magnetici, e i magneti si presentano sempre come dipoli con un polo nord e un polo sud. N.B.: Il campo magnetico è un costrutto dell'elettrodinamica classica. In realtà, campo magnetico e campo elettrico sono manifestazioni dello stesso fenomeno attraverso punti di vista diversi. Il campo magnetico è un'effetto relativistico del campo elettrico, e viceversa.

### Forza di Lorentz

Il campo magnetico influenza le cariche elettriche, proprio come faceva il campo elettrico. La forza applicata dal campo magnetico  $\vec{B}$  ad una carica  $q$  in moto con velocità  $\vec{v}$  è:

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$$

Si osserva che la forza applicata dal campo elettrico dipende sia dalla carica che dalla sua velocità. Il campo magnetico  $\vec{B}$  si misura in Tesla ( $1\text{T} = 1\frac{\text{N}}{\text{A}\cdot\text{m}}$ ). Notiamo che, visto che il prodotto vettoriale restituisce un vettore perpendicolare alla velocità della particella (e al campo magnetico), la forza di Lorentz non varia il *modulo* della sua velocità. In altre parole, il lavoro della forza di Lorentz è nullo.

Possiamo conciliare la formula della forza di Lorentz col modello di Drude-Lorentz. Iniziamo con l'esprimere la forza applicata su una carica  $q$  da campo elettrico e campo magnetico (la cui formula sarebbe quella che prende effettivamente il nome di *forza di Lorentz*, bensì solitamente ci si riferisce con questo nome solamente alla parte magnetica):

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

Possiamo da questo ricavare l'accelerazione che una particella immersa in un certo campo elettromagnetico subisce:

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{a} = \frac{q}{m}(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

Possiamo quindi considerare (come avevamo già fatto nello studio della conducibilità attraverso Drude-Lorentz), due velocità medie  $\langle \vec{v}_i \rangle$  e  $\langle \vec{v}_{i+1} \rangle$ , corrispondenti rispettivamente all'attimo appena prima e appena dopo un'urto col reticolo metallico o con un'altra particella. Come sappiamo, quanto accade fra un'urto e un altro è effettivamente irrilevante in quanto le particelle continuano a muoversi di moto rettilineo uniforme, e la loro quantità di moto quindi non cambia. Si ha allora, stabilito un cammino libero medio  $\tau$ :

$$\langle \vec{v}_{i+1} \rangle = \langle \vec{v}_i + \frac{q\tau}{m}(\vec{E} + \vec{v}_i \times \vec{B}) \rangle = \frac{q\tau}{m}(\vec{E} + \vec{v}_i \times \vec{B})$$

come velocità media (potremo forse assimilarla alla velocità di deriva) di una particella. Dividiamo nelle due componenti:

$$\langle \vec{v} \rangle = \frac{q\tau}{m} \vec{E} + \frac{q\tau}{m} (\vec{v} \times \vec{B})$$

Prendiamo come approssimazione che l'effetto  $\frac{q\tau}{m} (\vec{v} \times \vec{B})$  del campo magnetico sia molto minore dell'effetto  $\frac{q\tau}{m} \vec{E}$  del campo elettrico. Potremo allora trovare un'approssimazione di  $\vec{v}$ :

$$\vec{v} \approx \frac{q\tau}{m} \vec{E}$$

Possiamo quindi risostituire nella formula per la forza di Lorentz:

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) = \vec{F} = q(\vec{E} + \frac{q\tau}{m} \vec{E} \times \vec{B})$$

Questo ci suggerisce che l'applicazione della forza di Lorentz al modello di Drude-Lorentz fornisce a livello microscopico risultati consistenti con quelli che osserviamo a livello macroscopico. Sempre attraverso Drude-Lorentz, abbiamo, riguardo ad una certa densità di corrente  $J = nqv_d$ , e *solo riguardo al campo magnetico*:

$$d\vec{F} = nAdl \cdot qv_d \times \vec{B} = J \cdot A \cdot dl \times \vec{B} = I \cdot dl \times \vec{B}$$

Su un certo spostamento di cui  $dl$  è elemento infinitesimo. Passando ad integrale, si ha:

$$\vec{F} = \int_{l_1}^{l_f} I \cdot dl \times \vec{B} = I \vec{l} \times \vec{B}$$

### Un caso di circuitazione del campo magnetico

Vediamo la circuitazione del campo magnetico su una spira percorsa da corrente. Prendiamo, a scopo di esempio, una spira semicircolare di raggio  $R$  (si considerino, se necessario, unità di misura S.I.). Il campo magnetico sarà in questo caso perpendicolare alla base della semicirconferenza. Possiamo dividere la forza totale applicata dal campo magnetico nella forza applicata sulla parte curva della spira (la semicirconferenza in sé per sé), e la forza applicata sul diametro di base:

$$\vec{F} = \vec{F}_s + \vec{F}_d$$

Avevamo che, dalla forza di Lorentz:

$$\vec{F} = I \int_A^B dl \times \vec{B}$$

Visto che nell'integrand compare il prodotto vettoriale con  $\vec{B}$ , l'unico spostamento che ci interessa è quello sull'asse perpendicolare a  $\vec{B}$ , ergo l'asse x. Abbiamo allora:

$$\vec{F}_s = I \int_A^B dl \times \vec{B} = 2IRB\hat{z}, \quad \vec{F}_b = I \int_A^B dl \times \vec{B} = -2IRB\hat{z}$$

da cui:

$$\vec{F} = 2IRB\hat{z} - 2IRB\hat{z} = 0$$

Come si poteva già verificare dal fatto che il percorso della spira è chiuso (ergo circuitazione nulla per il campo magnetico).

### Momento di una spira

Consideriamo il caso di una spira rettangolare, di lati  $a$  e  $b$ , immersa in un campo magnetico e percorsa da corrente. Sia l'asse verticale della spira perpendicolare al campo magnetico,  $a$  la lunghezza dei lati verticali,  $b$  la lunghezza dei lati orizzontali. La forza di Lorentz applicata sui lati orizzontali della spira sarà identica e diretta verso l'alto e verso il basso rispettivamente, quindi a risultante nulla. La forza di Lorentz applicata sui lati verticali dipenderà dalla corrente e dal campo magnetico, e tenderà a ruotare la spira, allineandone la normale col campo magnetico nel caso di corrente positiva (antioraria guardandola con campo uscente), l'inverso nel caso di corrente negativa. Quantitativamente, la forza applicata sarà, per un singolo lato di lunghezza  $a$ :

$$\vec{F} = aI \times \vec{B}, \quad F = aIB \sin \theta$$

Dove  $\theta$  è l'angolo formato dalla normale della spira con il campo magnetico. Da questo si ricava il momento della forza:

$$\vec{M} = aIB \cdot b \sin \theta \hat{z}$$

Sulla base di questo definiamo il **momento magnetico**:

$$\vec{m} = AI\hat{n}$$

Sulla normale  $\hat{n}$  della spira. Attraverso il momento magnetico, possiamo ricavare il **momento meccanico** (quello calcolato prima) come:

$$\vec{M} = \vec{m} \times \vec{B}$$

### Piccole oscillazioni di una spira

Possiamo esprimere il momento meccanico di una spira  $\hat{M}$  come la derivata del momento d'inerzia rispetto al tempo:

$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt} = I\vec{\alpha}$$

da cui, sostituendo:

$$I\ddot{\theta}\hat{z} = -mB \sin \theta \hat{z}$$

Osserviamo che questa è un'equazione differenziale che descrive un moto armonico. Trascurando i versori, abbiamo:

$$\ddot{\theta} + \frac{mB}{I}\theta = 0$$

da cui ricaviamo pulsazione e periodo:

$$\omega = \sqrt{\frac{mB}{I}}, \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mB}}$$

### Considerazioni energetiche sul momento di una spira

Calcoliamo l'energia potenziale della spira, posta nel campo con un certo angolo  $\theta$ . Notiamo innanzitutto che la spira percorsa da corrente forma effettivamente un **dipolo magnetico**: attraverso la regola della mano destra, possiamo individuare la direzione del campo: ruotando le dita nella direzione della corrente sarà la direzione indicata dal pollice. Possiamo allora dire che l'energia potenziale (o il lavoro fatto per raggiungere tale energia potenziale) per un moto rotazionale è, analogamente a quanto avevamo definito su moti traslazionali:

$$dL = \vec{F} \cdot d\vec{s} \sim dL = \vec{\tau} \cdot d\vec{\theta}$$

In questo il momento della forza  $\tau$  sarà il momento meccanico  $\vec{M} = AI\hat{n} \times \vec{B}$ :

$$dL = AI\hat{n} \times \vec{B} d\theta = AI \cdot B \sin \theta d\theta$$

Passando ad integrale si ha:

$$L = \int dL = \int AI \cdot B \sin \theta d\theta = -AIB \cos \theta$$

Questo è in accordo col fatto che  $\frac{d}{d\theta}L = \vec{\tau} = \vec{M}$ :

$$\frac{d}{d\theta}(-AIB \cos \theta) = AIB \sin \theta = \vec{M}$$

Notiamo che questo sistema è analogo a quello formato da un dipolo elettrico immerso in un campo elettrico. In questo, il momento magnetico  $\vec{m} = AI\hat{n}$  equivale al momento di dipolo  $\vec{p} = qd\hat{n}$ , e vale  $\tau = \vec{p} \times \vec{E}$ .

### Effetto Hall

Descriviamo adesso l'effetto Hall, fenomeno che può essere usato per verificare la natura effettiva dei portatori di carica di un materiale conduttore.

Poniamo di avere una sbarra di materiale conduttore di lunghezza arbitraria, con una differenza di potenziale fra le estremità tale da generare un campo elettrico (che assumeremo diretto verso destra), e quindi una corrente al suo interno. Immergiamo adesso la sbarra in un campo elettrico perpendicolare al campo elettrico (che assumiamo entrante). Abbiamo la densità di carica  $J = nq\vec{v}_d$ , dove figura la *velocità di deriva* dei portatori di carica, e la forza di Lorentz  $\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$ . I portatori di carica, passando attraverso il campo magnetico, spinti dal campo elettrico, subiranno una spinta verso l'alto o verso il basso a seconda del loro segno. Questo porterà alla registrazione di una differenza di carica (e quindi di potenziale) sull'estremità superiore e inferiore della sbarra. Per la precisione, abbiamo che se i portatori di carica sono negativi (come nel caso degli elettroni), la parte inferiore si carica positivamente e la parte superiore negativamente, mentre se sono positivi (ad esempio, lacune elettroniche) abbiamo l'effetto inverso.

### **Moto di particelle immerse in un campo magnetico**

Vediamo il comportamento di particelle cariche immerse in un campo magnetico, in due casi: quello dove la velocità iniziale è tutta perpendicolare al campo, e quello in cui la velocità iniziale possiede una componente parallela al campo.

#### **• Velocità iniziale perpendicolare al campo**

Nel caso in cui una particella si trovi all'interno di un campo magnetico con una velocità  $\vec{v}$  perpendicolare al campo, varrà la forza di Lorentz:  $\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$ , diretta in direzione sempre ortogonale alla velocità della particella. In questa configurazione di forze, la particella subisce un'accelerazione centripeta che la porta a descrivere una circonferenza, muovendosi di moto circolare uniforme. Possiamo ricavare, raggio, pulsazione e periodo di tale moto attraverso la formula per l'accelerazione centripeta in un moto circolare uniforme:

$$a = \frac{v^2}{r}, \quad ma = qvB \sin \theta$$

notiamo che  $\theta = \frac{\pi}{2}$  (forza sempre ortogonale alla velocità), quindi:

$$a = \frac{qvB}{m}, \quad \frac{v^2}{r} = \frac{qvB}{M}$$

da cui si ricava:

$$r = \frac{mv}{qB}, \quad \omega = \frac{v}{r} = \frac{qB}{m}, \quad v = \omega r = \frac{qBr}{m}, \quad T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi m}{qB}$$



- **Velocità iniziale con componente parallela al campo**

Nel caso la particella iniziale presenti una velocità con componente parallela al campo, avremo che tale componente non influenzerà il moto circolare. Più precisamente, potremo dire:

$$\vec{v} = \vec{v}_{\parallel} + \vec{v}_{\perp}$$

Varranno tutte le formule precedenti, rispetto alla sola  $\vec{v}_{\perp}$ :

$$r = \frac{mv_{\perp}}{qB}, \quad \omega = \frac{v_{\perp}}{r} = \frac{qB}{m}, \quad v_{\perp} = \omega r = \frac{qBr}{m}, \quad T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi m}{qB}$$

Mentre sull'asse parallelo si conserverà  $v_{\parallel}$ . Il moto risultante sarà quindi a traiettoria elicoidale, con pulsazione e periodo uguali a quelle del caso planare. Potremo calcolare il passo dell'elica descritta dalla particella come:

$$d = v_{\parallel} \cdot T = v_{\parallel} \cdot \frac{2\pi m}{qB}$$

## 79 Legge di Biot-Savart

Il campo magnetico non è generato esclusivamente da magneti permanenti: nel 1819 Oersted scoprì che anche un filo percorso da corrente genera un campo magnetico. Un formalismo per la definizione di questo campo è dato dalla cosiddetta prima legge di Laplace, detta anche **Legge di Biot-Savart**:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Id\vec{s} \times \vec{r}}{r^2}$$

Diamo un significato ai simboli della formula. Innanzitutto,  $\frac{\mu_0}{4\pi} = k_m$  detta **costante magnetica**, è il corrispettivo magnetico della costante elettrica  $k_e$ . Si noti che in questi appunti  $k_m$  viene indicata quasi sempre come  $\frac{\mu_0}{4\pi}$ , e la lettera  $k$  viene riservata alla costante elettrica. Nel caso sia necessario, si useranno esplicitamente  $k_m$  e  $k_e$ .  $\mu_0$  è la permittività magnetica del vuoto, corrispettivo magnetico della permittività elettrica del vuoto  $\epsilon_0$ , e assume il valore di  $4\pi \cdot 10^{-7} \frac{T \cdot m}{A}$ , com'è di facile verifica dalla legge di Biot-Savart. Vediamo quindi il vettore  $d\vec{s}$  e il versore  $\hat{r}$ . La legge di Biot-Savart si riferisce al campo magnetico infinitesimo  $d\vec{B}$  generato da un circuito filiforme (un filo) su un certo punto ad esso esterno  $\vec{P}$ . A questo punto, il vettore  $d\vec{s}$  è l'elemento infinitesimo del filo  $s$ , e il versore  $\hat{r}$  è il versore rivolto da  $d\vec{s}$  al punto  $\vec{P}$ . A questo punto abbiamo quindi che il campo magnetico generato da un filo sui punti circostanti ha la forma di circonferenze concentriche al filo, che ruotano in senso antiorario rispetto alla direzione di scorrimento della

corrente (come dalla legge della mano destra), e diminuisce come l'inverso del quadrato della distanza. Inoltre, possiamo calcolare il contributo sul campo di ogni elemento infinitesimale  $d\vec{s}$ , prendendo l'integrale:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{d\vec{s} \times \hat{r}}{r^2}$$

### Applicazioni di Biot-Savart

Vediamo adesso l'applicazione della legge di Biot-Savart (prima formula di Laplace) ad alcune distribuzioni circuitali:

- **Campo magnetico generato da un filo rettilineo**

Vediamo il caso più semplice: quello di un filo conduttore attraversato da una corrente  $I$ , che genera un campo magnetico in un certo punto  $\vec{P}$ . Tracciamo i segmenti che si staccano dal filo con angolo  $\theta$  (sempre orientato nella stessa direzione) dagli estremi di un segmento di lunghezza  $2s$  e centro coincidente con  $d\vec{s}$ , e raggiungono il punto  $\vec{P}$ . Questa situazione non è dissimile da quella che abbiamo studiato per cercare il campo elettirico generato da un filo uniformemente carico. Possiamo quindi applicare Biot-Savart per il calcolo dell'elemento infinitesimo di campo:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\vec{s} \times \vec{r}}{r^2}$$

Iniziamo col notare che il prodotto vettoriale fra  $d\vec{s}$  e  $\hat{r}$  è uguale a:

$$d\vec{s} \times \hat{r} = ds \sin \theta$$

essendo  $\pi - \theta$  uguale all'angolo compreso fra  $d\vec{s}$  e  $\hat{r}$ , e:

$$\sin \theta = \sin (\pi - \theta)$$

Adesso dobbiamo trovare il valore di  $d\vec{s}$  e  $r$ . Iniziamo con  $d\vec{s}$ . Notiamo che il rapporto fra  $R$  e l'elemento di lunghezza  $s$  è uguale alla tangente di  $\frac{\pi}{2} - \theta$ :

$$\frac{R}{s} = \tan \left( \frac{\pi}{2} - \theta \right) = \cot \theta$$

e quindi:

$$\frac{R}{s} = \cot \theta \Rightarrow \frac{s}{R} = \frac{1}{\cot \theta} = \tan \theta, \quad s = R \tan \theta$$

derivando da entrambe le parti, con un po' di calcolo discutibile, abbiamo:

$$\frac{ds}{d\theta} = \frac{d}{d\theta} R \tan \theta = \frac{R}{\sin^2 \theta} \Rightarrow ds = \frac{R d\theta}{\sin^2 \theta}$$

abbiamo un'espressione di  $ds$ . Troviamo quindi  $r$ , notando che:

$$r \sin \theta = R, \quad r = \frac{R}{\sin \theta}$$

Possiamo adesso sostituire nella legge di Biot-Savart:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{R d\theta}{\sin^2 \theta} \frac{\sin^2 \theta}{R^2} = \frac{\mu_0 I}{4\pi R} \sin \theta d\theta$$

Questo si presta all'integrazione del termine  $\sin \theta d\theta$ , per trovare il campo generato da un filo di lunghezza arbitraria. Per il filo la cui lunghezza è determinato da un certo angolo  $\theta'$  che si stacca dal filo conduttore, si ha:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi R} \int_{\theta'}^{\pi-\theta'} \sin \theta d\theta = \frac{\mu_0 I}{4\pi R} \left| -\cos \theta \right|_{\theta'}^{\pi-\theta'} = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} \cos \theta'$$

Per un filo di lunghezza arbitraria  $2s$  possiamo porre  $\tan \theta' = \frac{R}{s}$ . Il caso di interesse sarà però quello di un filo di lunghezza infinita. In questo caso l'angolo  $\theta'$  tenderà a 0, e si avrà:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} = k_m \frac{2I}{R}$$

Notiamo le similitudini col campo generato da un filo uniformemente carico:

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 R}$$

- **Campo magnetico generato da una spira**

Studiamo adesso il campo magnetico generato da una spira circolare di raggio  $R$ . Anche qui, il caso è analogo a quanto avevamo già visto riguardo al campo elettrico generato da una distribuzione simile. Poniamo  $\theta$  come l'angolo che collega un punto sulla circonferenza a  $\vec{P}$ , punto a distanza  $x$  dal centro della spira. Potremo nuovamente prendere in considerazione Biot-Savart:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\vec{s} \times \vec{r}}{r^2}$$

Vediamo quindi che l'elemento  $d\vec{s}$  e il versore  $\hat{r}$  sono sempre perpendicolari, ergo:

$$d\vec{s} \times \hat{r} = ds$$

Noto l'angolo  $\theta$ , l'elemento di campo si ridurrà a:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{ds}{r^2} \cos \theta$$

Basterà quindi trovare  $r$  e  $\cos \theta$ . Per quanto riguarda  $r$ , ricaviamo con Pitagora:

$$r^2 = R^2 + x^2$$

Mentre per  $\cos \theta$ , calcoliamo direttamente dal rapporto fra il raggio e la distanza  $r$  appena trovata:

$$\cos \theta = \frac{R}{\sqrt{R^2 + x^2}}$$

Sostituendo in Biot-Savart, abbiamo:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{ds}{R^2 + x^2} \frac{R}{\sqrt{R^2 + x^2}} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{R}{(R^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} ds$$

Passiamo alla versione integrale per trovare il campo totale, notando che  $ds$  è l'elemento di una circonferenza di raggio  $R$ .

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{R}{(R^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} \int ds = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{R}{(R^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} 2\pi R = \frac{\mu_0 I R^2}{2(R^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Da questo risultato possiamo ricavare il campo magnetico in un punto esattamente interno alla spira:

$$\vec{B}_0 = \frac{\mu_0 I}{2R}$$

e un'approssimazione per raggi molto piccoli (o distanze molto grandi  $x$ ):

$$x \gg R \Rightarrow B \approx \frac{\mu_0 I R^2}{2x^3}$$

per un momento magnetico (corrente per area,  $\mu = I(\pi R^2)$ )  $\mu$  avremo:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{\mu}{R^3}$$

che notiamo essere consistente con il campo generato da un dipolo:

$$\vec{E} = \frac{2kp}{R^3}$$

Questo è naturale, in quanto una spira in corrente è effettivamente un dipolo magnetico. Si potrebbe adesso porre la questione di come mai, visto che il campo generato da un magnete qualsiasi (ergo un dipolo) decade come  $\frac{1}{R^3}$ , nella legge di Biot-Savart figura il termine  $\frac{1}{R^2}$ . Si può dire che sebbene il contributo di ogni segmento infinitesimo della distribuzione filiforme decada come  $\frac{1}{R^3}$ , il loro contributo collettivo va come  $\frac{1}{R^2}$ .

### Campo generato da un solenoide

Prendiamo in considerazione un solenoide ottenuto avvolgendo un filo conduttore attorno a un'anima (in molti casi magnetica, ma che ora trascureremo). Possiamo analizzare il solenoide immaginandolo come una distribuzione continua di spire, di cui avevamo già calcolato il campo prodotto. Definiamo allora alcuni dati. Innanzitutto, si ha la densità di spire:

$$n = \frac{N}{l}$$

che rappresenta il rapporto fra il numero di spire  $N$  e la lunghezza del solenoide  $l$ . Come semplificazione, assumeremo una distribuzione continua di spire, senza quindi studiare gli effetti dati da una loro distribuzione discreta. Questa è un'approssimazione comunque abbastanza accurata in quanto solitamente i solenoidi sono ottenuti attraverso numerosi avvolgimenti del filo. Inoltre non terremo conto di eventuali effetti di bordo. Possiamo quindi chiamare  $R$  il raggio del solenoide,  $d$  la sua lunghezza, e  $I$  la corrente che lo attraversa. Prendiamo allora un punto  $P$  esattamente al centro del solenoide, cioè ad esso assiale e distante  $\frac{d}{2}$  dai capi. Sarà poi utile considerare uno spostamento infinitesimo  $ds$ , e lo spostamento dall'origine  $s$ . Conviene utilizzare un sistema di angoli, com'era stato fatto per altre distribuzioni di corrente. Prendiamo quindi due angoli,  $\theta_1$  e  $\theta_2$ , formati da vettori di lunghezza  $r$  e l'asse del solenoide, che sottendono una certa porzione di solenoide di lunghezza  $2s$ . A questo punto lo spostamento  $s$  è semplicemente la base di uno dei triangoli rettangoli formati dagli angoli  $\theta$ , la cui altezza sarà  $R$  e l'ipotenusa  $r$ . Potremo quindi prendere il campo generato da una spira e porlo come elemento infinitesimo del campo totale del solenoide:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 dI R^2}{2(R^2 + s^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Dovremo trovare una definizione in funzione di  $\theta$  di quest'espressione. Iniziamo con la corrente. Si ha, dalla densità di spire, che:

$$dI = \frac{N}{L} I ds = nI ds$$

Troviamo quindi una relazione fra  $R$  e  $r$ . Dalle proprietà dei triangoli rettangoli, potremo dire semplicemente:

$$R = r \sin \theta$$

e, riguardo a  $s$ :

$$s = r \cos \theta$$

Da cui possiamo ricavare  $ds$ :

$$\frac{ds}{d\theta} = \frac{d}{d\theta} r \cos \theta = \frac{d}{d\theta} \frac{R}{\sin \theta} \cos \theta = \frac{d}{d\theta} R \cot \theta = \frac{R d\theta}{\sin^2 \theta}$$

Notiamo che in questo calcolo abbiamo trascurato il segno (nell'ultima derivata). Questo è sbagliato ma non si ripercuote in errori definitivi in quanto la simmetria del sistema studiato non necessita di particolari considerazioni di segno. Possiamo quindi sostituire:

$$\begin{aligned} d\vec{B} &= \frac{\mu_0 d I R^2}{2(R^2 + s^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\mu_0 n I ds R^2}{2(R^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\mu_0 n I R^3 d\theta}{2 \sin^2 \theta (R^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{\mu_0 n I r^3 \sin^3 \theta d\theta}{2 \sin^2 \theta (r^2 \sin^2 \theta + r^2 \cos^2 \theta)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\mu_0 n I r^3 \sin^3 \theta d\theta}{2 \sin^2 \theta r^3} = \frac{\mu_0 n I}{2} \sin \theta d\theta \end{aligned}$$

Possiamo quindi calcolare il campo completo in un punto interno al solenoide attraverso l'integrale:

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{\mu_0 n I}{2} \sin \theta d\theta = \frac{\mu_0 n I}{2} (\cos \theta_1 - \cos \theta_2)$$

Abbiamo adesso che, osservando il triangolo rettangolo costruito, e assumendo un punto centrale al solenoide:

$$\cos \theta = \frac{\frac{d}{2}}{\sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2 + R^2}}$$

da cui:

$$B = \frac{\mu_0 n I}{2} \left( \frac{d}{\sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2 + R^2}} \right) = \mu_0 n I \left( \frac{d}{\sqrt{d^2 + 4R^2}} \right)$$

Che è la formula del campo al centro di un solenoide. Ora, molto spesso è conveniente considerare un solenoide dove la lunghezza è considerevolmente maggiore del raggio, ergo si può assumere  $\cos \theta_1 - \cos \theta_2 = 2$ , da cui:

$$B = \mu_0 n I$$

Che è la formula più comune per il campo di un solenoide.

### Forza magnetica fra conduttori paralleli

La forza magnetica fra due fili conduttori paralleli può essere calcolata attraverso l'espressione ricavata dalla legge di Biot-Savart sul campo magnetico  $\vec{B}$  generato da un filo conduttore di lunghezza infinita:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}$$

assieme a quanto avevamo dimostrato, attraverso l'applicazione del modello di Drude-Lorentz alla forza di Lorentz, riguardo la forza magnetica su fili conduttori:

$$\vec{F} = q(\vec{V} \times \vec{B}) = I\vec{l} \times \vec{B}$$

Chiamiamo le lunghezze dei due fili  $l$  (questo torna utile a definire una "*densità lineare di forza*") e le loro correnti  $I_1$  e  $I_2$ . Si avrà che il filo 1 esprime una forza sul filo 2 pari a quella che il filo 2 esprime sul filo 1. Prendendo uno solo di questi casi, ad esempio la forza esercitata dal filo 2, abbiamo che il filo 1 risente della forza di Lorentz del campo generato dal filo 2 nella sua posizione. Questa forza è identica per ogni elemento infinitesimo del filo (in quanto i fili sono paralleli, ergo la distanza  $R$  non cambia). Si ha quindi, dall'applicazione delle due formule riportate sopra:

$$F_1 = I_1 l \left( \frac{\mu_0 I_2}{2\pi R} \right) = l \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi R}$$

Visto che come abbiamo detto le forze esercitate dai due fili sono identiche, si può dire:

$$\frac{F}{l} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi R}$$

Notiamo che la forza è attrattiva nel caso in cui le correnti scorrano nella stessa direzione, repulsiva in caso contrario (questo si dimostra facilmente con la legge della mano destra, magari evitando di usare la mano sinistra nel ruolo del secondo filo, in quanto sinistra  $\neq$  destra).

## 80 Legge di Ampere

La legge di Ampere riguarda la circuitazione del campo magnetico su un percorso chiuso. Abbiamo dimostrato, con Biot-Savart, che il campo magnetico  $\vec{B}$  generato da un filo conduttore di lunghezza infinita è:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}$$

Questo significa che le linee di campo magnetico sono circonferenze concentriche al filo di raggio via via maggiore. La circuitazione di un percorso nel campo magnetico è quindi dipendente dalla sola componente tangenziale alla circonferenza. Possiamo quindi scrivere, presi due punti  $A$  e  $B$  intorno ad un filo conduttore in corrente:

$$\int_A^B \vec{B} \cdot d\vec{s} = \int_A^B \frac{\mu_0 I}{2\pi R} ds = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} R\theta = \frac{\mu_0 I\theta}{2\pi}$$

Possiamo poi dire che qualsiasi percorso chiuso che concatena la corrente del filo (cioè che la contiene nella sua superficie sottesa) riceve un contributo sulla sua circuitazione che è in ogni punto uguale al suo spostamento tangenziale al filo (la componente radiale ha circuitazione nulla):

$$\int_{A=B} \vec{B} \cdot d\vec{s} = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} (2\pi R) = \mu_0 I$$

Questo risultato prende il nome di **legge di Ampere**:

$$\int \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 I_{conc}$$

Ergo, la circuitazione su un qualsiasi percorso chiuso del campo magnetico equivale alla corrente concatenata totale per le permittività magnetica. Questo risultato può essere riformulato, più formalmente, attraverso il teorema di Stokes. Sappiamo da Stokes che la circuitazione su una curva è uguale al flusso del rotore sulla superficie sottesa. Questo significa che:

$$\int_r \vec{B} \cdot d\vec{s} = \int_s \nabla \times \vec{B} d\vec{A} = \mu_0 I = \mu_0 \int_s \vec{J} \cdot d\vec{A}, \quad \nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$$

Ovvero il rotore del campo magnetico è direttamente proporzionale alla densità di corrente. Questo risultato è una delle equazioni di Maxwell.

### Calcolo del campo magnetico generato da un filo con Ampere

Possiamo applicare la legge di Ampere nel calcolo del campo magnetico generato da un filo conduttore di raggio  $R$  e percorso da una corrente  $I$  ad una distanza  $r$ . Sfruttiamo la simmetria radiale del sistema e calcoliamo il campo sia per  $r > R$  che per  $r < R$ . Avremo che, per  $r > R$ , varrà la legge di Ampere su una curva contenente il filo, come:

$$\int \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 I = B \int ds$$

Visto che gli unici contributi dell'infinitesimo  $d\vec{s}$  di curva sono quelli tangenziali. Possiamo allora notare che  $\int ds = 2\pi r$  su una curva chiusa di raggio  $r$ , ergo:

$$B \int ds = B 2\pi r = \mu_0 I, \quad B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$



Che è identico a quanto trovato applicando Biot-Savart.

Per quanto riguarda distanze  $r < R$ , sarà prima necessario trovare un rapporto fra la carica concatenata dal percorso chiuso interno  $\frac{I'}{I}$ . Possiamo per questo applicare la definizione di corrente sulla base di densità di corrente:

$$I = J \cdot A$$

Notando che le aree della superficie del filo  $A$  e della superficie sottesa al percorso chiuso  $A'$  sono:

$$A = \pi R^2, \quad A' = \pi r^2$$

Ergo si ha:

$$\frac{I'}{I} = \frac{J\pi r^2}{J\pi R^2}, \quad I' = \frac{r^2}{R^2} I$$

Sostituendo nell'equazione di prima, e ricordando  $\int ds = 2\pi r$ , si ha:

$$B \int ds = B 2\pi r = \mu_0 \left( \frac{r^2}{R^2} I \right), \quad B = \frac{\mu_0 I r}{2\pi R^2}$$

### Campi solenoidali

Parliamo brevemente dal campo magnetico. Si ha che la divergenza del campo magnetico è uguale a zero (non esistono monopoli magnetici). Questo significa che per ogni superficie (non chiusa) nel campo magnetico, la circuitazione sul bordo dipende solamente dalle correnti concatenate. Campi di questo tipo si dicono campi solenoidali:

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

### Campo generato dal solenoide con Ampere

Si può usare la legge di ampere per calcolare il campo magnetico generato da un solenoide. Si ha che:

$$\vec{B} = \mu_0 I_{conc}$$

Prendiamo allora un solo lato del solenoide, dove tutte le correnti scorrono nello stesso verso. Definiamo una curva chiusa, detta  $\gamma$ , che contiene  $N$  di queste spire, di altezza  $h$  e lunghezza  $l$ . Avremo che la circuitazione lungo  $\gamma$ :

$$\int_{\gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \vec{B} \cdot l = \mu_0 n I, \quad B = \mu_0 n I$$

che è esattamente quanto avevamo trovato con Biot-Savart. Il campo dipende solamente da  $l$  (nemmeno da  $2l$ ) in quanto l'unica parte della linea  $\gamma$  immersa nel campo, tutto interno al solenoide, è quella di lunghezza  $l$ . Notiamo

infine che questo campo, idealmente, è tutto interno (il solenoide, tendendo in lunghezza ad infinito, "schermato" il campo magnetico interno), ergo si può dire che l'espressione appena trovata rappresenta, per un solenoide disposto sull'asse x:

$$\mu_0 n I \hat{x} = \vec{B}(y, z) \theta(R|\sqrt{y^2 + z^2}|)$$

Dove  $\theta$  è la funzione gradino di Heaviside (qui serve solo ad annullare il campo fuori dal solenoide).

### Campo generato da un solenoide toroidale

Poniamo il caso di un solenoide formato da una filo avvolto attorno a un'anima toroidale. Avremo che il campo magnetico è interno alle spire e circolare, ergo:

$$\vec{B} = B(r) \hat{\theta}$$

Considerando i versori  $\hat{\theta}$  e  $\hat{r}$  tangenziali e radiali alla circonferenza. Prendiamo, come prima, un percorso chiuso  $\gamma$ : ad esempio una linea chiusa contenuta all'interno delle spire. Avremo che la circuitazione lungo tale curva è:

$$\int_{\gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = 2\pi r B = \mu_0 I N, \quad B = \mu_0 I \frac{N}{2\pi R}$$

Possiamo seguire la forma del campo generato da un solenoide rettilineo definendo una certa "densità radiale di spire"  $n' = \frac{N}{2\pi r}$ :

$$\vec{B} = \mu_0 n' I$$

## 81 Legge di Faraday

Finora abbiamo visto come le correnti elettriche generano campi magnetici. Vedremo adesso che è vero, in qualche modo anche il contrario: una variazione del flusso magnetico genera corrente.

### Flusso magnetico

Avevamo visto la relazione fra il flusso del campo magnetico e la sua circuitazione stabilita dalla legge di Ampere, ovvero come la circuitazione del campo magnetico dipende dalle correnti concatenate al percorso chiuso scelto. Questo significa che il flusso del campo su una superficie chiusa è nullo ( $\int_{\Sigma} \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0$  su  $\Sigma$  chiusa). Questo però non significa che sia nullo il flusso su una qualsiasi superficie. In particolare, potremo dire riguardo a superfici piane di area  $A$  immerse in campi (almeno localmente) uniformi:

$$\int \vec{B} \cdot d\vec{A} = B A \cos \theta$$

dove  $\theta$  è l'angolo fra la normale della superficie  $A$  e la direzione del campo  $B$ . L'unità di misura del flusso nel sistema S.I. è il Weber (Wb), definito come  $1\text{Wb} = \text{T} \cdot \text{m}^2$ .

### Legge dell'induzione di Faraday

Su un qualsiasi circuito chiuso, si ha che viene indotta una forza elettromotrice all'opposto della variazione del flusso all'interno della superficie sottesa al circuito:

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_B}{dt}$$

Questa  $\mathcal{E}$ , a sua volta, genera una corrente all'interno del circuito. Il segno negativo è dato da una conseguenza della conservazione dell'energia: il verso della corrente corrisponde alla generazione di un campo magnetico che si oppone alla variazione di flusso che induce la corrente stessa. Questo risultato prende il nome di **legge di Lenz**. La legge di Faraday, riguardo alla generazione di una forza elettromotrice, può essere applicato anche a circuiti non chiusi, e anzi vale su qualsiasi regione dello spazio delimitata da una linea chiusa. Chiaramente, si sperimenta una corrente solo nel caso il circuito sia chiuso.

### Generatori e motori elettrici

Il principio dell'induzione elettrica può essere usato per costruire generatori e motori elettrici. Un semplice generatore può essere costruito da una spirale messa in rotazione all'interno di un campo magnetico costante (rotore e statore). La spirale rotante è collegata ad un circuito mediante delle spazzole, che vanno a chiudere un circuito entrando in contatto con un commutatore. La presenza del commutatore è resa necessaria se si vuole generare corrente continua. Nel caso si voglia generare corrente alternata, il commutatore sarà sostituito da due collettori rotanti in presa continua con le spazzole, e si parlerà quindi di alternatore. Vediamo una descrizione quantitativa più dettagliata della fisica dietro il funzionamento di generatori e alternatori:

- **Generatore di corrente continua**

Si ha che il flusso attraverso la spirale, dalla definizione di flusso su un campo magnetico uniforme, è:

$$\Phi_b = BA \cos \theta = BA \cos \omega t$$

Dove la posizione angolare  $\theta$  è dato dalla velocità angolare  $\omega$  con cui si muove il rotore. A questo punto potremo usare la legge di Faraday per calcolare la forza elettromotrice esercitata sulla spirale dalla variazione di flusso:

$$\mathcal{E} = \left| -N \frac{d}{dt} BA \cos \omega t \right| = NBA\omega |\sin \omega t|$$

dove si è introdotto un termine  $N$  per indicare eventuali avvolgimenti multipli della spira (nella realtà non si parlerà tanto di spire quanto di bobine), e il valore assoluto per rappresentare il verso della corrente forzato dal commutatore. La funzione di  $t$  della fem avrà la forma di una sinusoide rettificata. Dall'equazione possiamo quindi ricavare il valore massimo della fem:

$$\mathcal{E}_{max} = NBA\omega$$

e sapere che tale valore viene raggiunto per  $\omega t = \frac{\pi}{2} + k\pi$ , mentre per  $\omega t = k\pi$  la fem è nulla.

- **Generatore di corrente alternata** (alternatore)

Come prima, si ha flusso:

$$\Phi_b = BA \cos \theta = BA \cos \omega t$$

E forza elettromotrice:

$$\mathcal{E} = -N \frac{d}{dt} BA \cos \omega t = NBA\omega \sin \omega t$$

Da questa equazione possiamo, come prima, ricavare il valore massimo della fem:

$$\mathcal{E}_{max} = NBA\omega$$

e sapere che tale valore viene raggiunto per  $\omega t = \frac{\pi}{2} + k\pi$ , mentre per  $\omega t = k\pi$  la fem è nulla. Il tipo di corrente generata da un'alternatore si chiama **corrente alternata**. La corrente alternata è caratterizzata dal variare nel tempo della sua direzione, secondo una funzione sinusoidale. La frequenza avrà quindi il valore  $f = \frac{\omega}{2\pi}$ , dove  $\omega$  sarà la velocità angolare del generatore (o più in generale la pulsazione).

Un motore elettrico (o almeno un certo tipo di motore elettrico, detto *brushed* per distinguerlo dai modelli *brushless*, senza spazzole) è effettivamente un generatore al contrario: invece di applicare un momento che porti il rotore a ruotare con velocità angolare  $\omega$ , si dà corrente alla spira in modo che la forza di Lorentz la porti a ruotare. Si ha che, per la legge di Lenz, la rotazione della spira porta alla formazione di una forza sulla spira che si oppone alla variazione del flusso magnetico, e quindi della forza elettromotrice che aveva creato la corrente di partenza. Questa forza prende il nome di *forza controelettromotrice*, e influenza la corrente totale all'interno della spira:

$$\mathcal{E}_{opp.} = NBA\omega$$

Visto che la corrente all'interno di un circuito dipende dalla sua resistenza  $R$ , e che la resistenza totale all'interno di un motore *in rotazione* è aumentata

dalla presenza della forza contro elettromotrice, si deve allora fornire al motore una forza elettromotrice maggiore di quella che sarebbe bastata a creare la stessa corrente senza tale effetto. Si noti che, si dovesse fermare il motore, la corrente potrebbe crescere a livelli inaspettati senza più l'effetto della forza contro elettromotrice. Questo è il motivo per cui un motore elettrico bloccato tende a surriscaldarsi.

### **F.e.m. nei circuiti in moto**

Studiamo il caso di un circuito comune, dove lo spostamento di un segmento di circuito comporta la generazione di una forza elettromotrice. Supponiamo quindi di avere due rotaie collegate fra di loro su un estremo, e unite da una sbarra libera di scorrere sull'altro. Le rotaie distano fra di loro  $l$ , e la distanza fra un'estremo del circuito e la sbarra in movimento è  $a$ . Inoltre, circuito ha una resistenza complessiva  $R$ , ed è immerso in un campo magnetico  $B$  uscente ed uniforme. Un agente esercita una forza  $\vec{F}_{est}$  costante sulla sbarra, in modo da mantenerla ad una velocità trasversa costante  $\vec{v}_\perp$ , allontanandola dal circuito. Avremo, dalla forza di Lorentz, che inizialmente i portatori di carica all'interno della sbarretta verranno sottoposti ad una forza  $\vec{F}_B = q\vec{V} \times \vec{B}$ . Questa forza genererà sulla sbarra un campo elettromotore:

$$\vec{E}_{em} = \frac{\vec{F}}{q} = \frac{qv_\perp B}{q} = v_\perp B$$

La forza elettromotrice indotta complessiva equivarrà all'integrale di linea del campo elettromotore sulla zona interessata (cioè la spira):

$$\mathcal{E}_{ind} = \int \vec{E}_{em} dl = E_{em}l = Blv_\perp$$

Questa equivale alla differenza di potenziale fra gli estremi della sbarra, che possiamo ricavare dalla formula valida per campi uniformi:

$$\Delta V = El = E_{em}l = Blv_\perp$$

Nel circuito si forma quindi una corrente che vale, per la legge di Ohm:

$$I = \frac{\Delta V}{R} = \frac{\mathcal{E}_{ind}}{R} = \frac{Blv_\perp}{R}$$

Possiamo arrivare allo stesso risultato attraverso la legge di Faraday, trovando prima di tutto il flusso del capo sulla superficie interna al circuito:

$$\Phi_B = Bla$$

e imponendo quindi:

$$\mathcal{E}_{ind} = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -\frac{d}{dt}Bla = -Bl\frac{da}{dt} = -Blv_{\perp}$$

dove notiamo che la derivata di  $a$  rispetto al tempo non è altro che la velocità trasversa  $\vec{v}_{\perp}$ . Il risultato è lo stesso, e la stessa è anche la corrente:

$$I = \frac{|\mathcal{E}_{ind}|}{R} = \frac{Blv_{\perp}}{R}$$

### Considerazioni sulla potenza

Si possono fare considerazioni interessanti sulla potenza generata dall'agente (potenza meccanica) e fatta passare attraverso la resistenza  $R$  (potenza elettrica). Iniziamo col dire che, una volta stabilita una corrente che circola all'interno del circuito, la forza di Lorentz sulla sbarretta (ergo la forza che l'agente dovrà vincere per mantenere la sbarretta in moto con velocità  $\vec{v}_{\perp}$ ) sarà:

$$\vec{F}_B = I\vec{l} \times \vec{B}$$

Possiamo quindi calcolare la potenza generata dalla forza esterna  $\vec{F}_{est}$ , uguale e opposta alla forza magnetica  $\vec{F}_B$  ( $\vec{F}_{est} = \vec{F}_B$ ), considerando che dalla definizione:

$$[P] = \frac{[L]}{[t]} = \frac{[F][s]}{[t]} = [F]\frac{[s]}{[t]} = [F][v]$$

da cui si ha che la potenza meccanica è:

$$P_{mecc.} = I l B v_{\perp} = \frac{Blv_{\perp}}{R} l B v_{\perp} = \frac{B^2 l^2 v_{\perp}^2}{R}$$

Avevamo invece definito la potenza elettrica, attraverso la legge di Ohm, come:

$$P_{el.} = I^2 R = \left(\frac{Blv_{\perp}}{R}\right)^2 R = \frac{B^2 l^2 v_{\perp}^2}{R}$$

da cui:

$$P_{mecc.} = P_{el.}$$

Si ha un risultato importante: potenza meccanica e potenza elettrica corrispondono. L'energia che l'agente usa per spostare la sbarra è trasferita alla resistenza, che la trasforma a sua volta in calore.

### Potenza e momento di dipolo

Vediamo un'ulteriore intuizione sull'equivalenza fra energia meccanica ed energia elettrica. Si aveva, riguardo ad una spira immersa in un campo magnetico, che il momento meccanico su di essa generato valeva  $\vec{M} = \vec{m} \times \vec{B} =$

$IAB \sin \theta$ , e il potenziale  $U = -\vec{m} \cdot \vec{B} = -IAB \cos \theta$ , definito il momento magnetico  $\vec{m} = IA\hat{n}$ . A questo punto, la potenza non è altro che la derivata dell'energia (potenziale), considerando  $\frac{d\theta}{dt} = \omega$ :

$$P_{mecc.} = \frac{dL}{dt} = \frac{Md\theta}{dt} = iAB\omega \sin \theta$$

Si può allora calcolare la forza elettromotrice indotta sulla spira, attraverso la legge di Faraday, come:

$$\Phi(\vec{B}) = AB \cos \theta, \quad \mathcal{E} = -\frac{d\Phi(\vec{B})}{dt} = AB\omega \sin \theta$$

Possiamo quindi calcolare la potenza elettrica sulla spira come:

$$P_{el.} = \mathcal{E}i = iAB\omega \sin \theta$$

Abbiamo, di nuovo, che:

$$P_{mecc.} = P_{el.}$$

ergo la potenza applicata nella rotazione della spira è la stessa della sua corrente della spira.

### Induttanza

Prendiamo l'esempio di una spira  $\gamma$  chiusa percorsa da una corrente  $I$ . Abbiamo che il campo magnetico all'interno di un punto  $P$  all'interno della spira vale, per la legge di Biot-Savart:

$$\vec{B} = \int \frac{I}{4\pi\mu_0} \frac{d\vec{l} \times \hat{r}}{r^2}$$

e che il flusso attraverso la spira, definito un vettore area  $\vec{A}$  sulla superficie sottesa alla curva  $\Sigma$ , è:

$$\Phi\vec{B} = \int_{\Sigma} \vec{B} \cdot d\vec{A}$$

Noto questo campo magnetico, sarà ragionevole dire una sua variazione provocherà, per la legge di Faraday, la formazione di una forza elettromotrice sulla spira (detta forza elettromotrice autoindotta):

$$\mathcal{E}_{aut.} = -\frac{d\Phi(\vec{B})}{dt} = -\frac{d}{dt} \int_{\Sigma} \vec{B} \cdot d\vec{A} = -\frac{d}{dt} \int_{\Sigma} \int_{\gamma} \frac{I}{4\pi\mu_0} \frac{d\vec{l} \times \hat{r}}{r^2}$$

Notiamo di poter portare  $I$  fuori dall'integrale. A questo punto ciò che resta all'interno dell'integrale sarà una costante dipendente dalla conformazione

geometrica della spira, che chiameremo induttanza  $L$ . A questo punto, la forza elettromotrice autoindotta sarà:

$$\mathcal{E}_{aut.} = -\frac{dI}{dt}L$$

L'induttanza si misura in Henry (H), con:  $1H = \frac{V \cdot t}{A}$

### Energia in un'induttanza

Diciamo che un circuito chiuso ha sempre una certa induttanza. Si possono però costruire componenti circuitali appositamente progettati per ottenere grandi valori di induttanza: i cosiddetti **induttori** (o *induttanze*). Abbiamo che, per indurre una corrente in un'induttanza, bisogna vincere la resistenza data dall'autoinduzione di una forza elettromotrice opposta a quella che forniamo, ergo compiere un certo lavoro. Questo lavoro viene trasformato in energia, l'**energia magnetica** (per contraddistinguerla dall'**energia elettrica** immagazzinata in un condensatore) dell'induttanza. Valgono le seguenti formule, di cui si notano le similarità con le equivalenti del condensatore:

$$U_{ind.} = \frac{1}{2}LI^2 \leftrightarrow U_{cap.} = \frac{1}{2}CV^2$$

$$U_{ind.} = \int_V u_i dV, \quad u_i = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0} \leftrightarrow U_{cap.} = \int_V u_c dV, \quad u_c = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2$$

dove  $u_i$  è la densità di energia dell'induttanza, come avevamo già definito  $u_c$  sul condensatore. Dimostriamo le formule appena introdotte. Consideriamo innanzitutto un circuito formato da una resistenza, da un'induttanza e da un qualche generatore di forza elettromotrice, come ad esempio una batteria (questo è un circuito LC, che vedremo nel dettaglio fra poco). Si avrà, per la seconda legge di Kirchhoff, che il potenziale sulla maglia (ergo la fem erogata dalla batteria) sarà:

$$\mathcal{E} = iR + \frac{d}{dt}L$$

ovvero la somma della differenza di potenziale sulla resistenza e sull'induttanza (che notiamo essere concordi, entrambe si oppongono alla corrente). In tal caso, possiamo moltiplicare per  $i$ , ottenendo:

$$i\mathcal{E} = i^2R + Li\frac{di}{dt}$$

dove notiamo  $i\mathcal{E}$  essere la potenza con cui la batteria eroga energia e  $i^2R$  la potenza che viene fatta passare attraverso la resistenza. Deve allora essere vero che  $Li\frac{d}{dt}$  equivale alla potenza fatta passare attraverso all'induttanza.



Sappiamo quindi la derivata della potenza essere uguale all'energia immagazzinata in un certo istante nell'induttanza: potremo quindi scrivere un'espressione per l'energia magnetica (o potenziale magnetico, insomma ciò che avevamo prima chiamato  $U_{ind}$ ):

$$\frac{d}{dt}U_B = Li \frac{di}{dt}$$

Chiudendo gli occhi, possiamo moltiplicare da entrambi i lati per  $dt$ , e integrare sull'intervallo di tempo da carica 0 a  $i$ :

$$U_B = \int dU_B = \int_0^i Li \, di = L \int_0^i i \, di = \frac{1}{2}Li^2$$

Che è la formula cercata. Dimostriamo allora la seconda. Iniziamo con un solenoide (che è l'esempio più comune di induttanza). Assumendo il campo magnetico interno come uniforme, si ha che vale  $\vec{B} = -\mu_0 ni$  su una densità di spire  $n = \frac{N}{l}$ . Si possono allora applicare le definizioni direttamente, notando  $A$  area di una spira del solenoide (per il flusso del campo magnetico):

$$\mathcal{E} = -L \frac{di}{dt} = -\frac{d\Phi(\vec{B})}{dt}, \quad \Phi(\vec{B}) = \mu_0 n I N A \Rightarrow -L \frac{di}{dt} = -\frac{d}{dt} \mu_0 n I N A$$

$$\mu_0 n N A \frac{di}{dt} = L \frac{di}{dt}, \quad L = \mu_0 n N A$$

Allora possiamo applicare la formula appena trovata per l'energia in un'induttanza, con il valore  $L$  appena trovato e ricavando la corrente  $i$  come  $i = \frac{B}{\mu_0 n}$  da  $B = \mu_0 ni$

$$U = \frac{1}{2}Li^2 = \frac{1}{2}\mu_0 n N A \frac{B^2}{\mu_0^2 n^2} = \frac{1}{2}N A \frac{B^2}{\mu_0 n} = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0} \frac{N A}{\frac{N}{l}} = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0} A l$$

dove notiamo  $Al$  essere il volume all'interno dell'induttanza. Questo significa che sarà valido l'integrale sul volume:

$$U = \int_V \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0} dV$$

### Circuito RL

Iniziamo lo studio di alcuni circuiti contenenti induttori. Iniziamo con un circuito formato da una batteria con fem  $\mathcal{E}$ , un resistore  $R$ , e un induttore  $L$ . Dalla seconda legge di Kirchoff, si avrà che il potenziale sulla maglia rispetterà:

$$\mathcal{E} - iR - L \frac{di}{dt} = 0$$

Questo si ricondurrà ad'un equazione differenziale ordinaria di primo grado. Dividiamo per  $R$ :

$$\frac{\mathcal{E}}{R} - i - \frac{L}{R} \frac{di}{dt} = 0$$

Scegliamo la variabile  $i_{eq} = \frac{\mathcal{E}}{R} - i$ , notando che  $di_{eq} = -di$ , e riscriviamo quindi come:

$$i_{eq} + \frac{L}{R} \frac{di}{dt} = 0$$

L'equazione a questo punto è omogenea, quindi:

$$\lambda + \frac{L}{R}\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = -\frac{R}{L}, \quad i_{eq} = Ae^{-\frac{R}{L}t}, \quad i = \frac{\mathcal{E}}{R} - Ae^{-\frac{R}{L}t}$$

imponiamo le condizioni iniziali, ergo a  $t = 0$ ,  $i = 0$ :

$$i = 0, \quad t = 0 \Rightarrow A = \frac{\mathcal{E}}{R}, \quad i = \frac{\mathcal{E}}{R} \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right)$$

Introduciamo poi, come avevamo fatto per il condensatore, il **tempo caratteristico** (*costante temporale*) dell'induttore come  $\tau = \frac{L}{R}$ , per riscrivere quindi come:

$$i = \frac{\mathcal{E}}{R} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

Vediamo la situazione di scarica. Quando si scollega la batteria, la seconda legge di Kirchhoff diventa:

$$iR + L \frac{di}{dt} = 0$$

si può dire direttamente:

$$R + L\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = -\frac{R}{L}, \quad i = Ae^{-\frac{t}{\tau}}$$

Imponendo le condizioni iniziali, si avrà che a  $t = 0$ ,  $i$  avrà un valore iniziale  $I$  che potremo assumere come uguale a  $\frac{\mathcal{E}}{R}$  corrente raggiunta dopo la "carica" dell'induttore:

$$t = 0, \quad i = I = \frac{\mathcal{E}}{R} \rightarrow A = I = \frac{\mathcal{E}}{R}, \quad i = Ie^{-\frac{t}{\tau}} = \frac{\mathcal{E}}{R}e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Notiamo infine che la forma funzionale sia per quanto riguarda la carica che per quanto riguarda la scarica è identica a quella del condensatore, con tempi caratteristici di  $\tau_c = RC$  per il condensatore e  $\tau_i = \frac{L}{R}$  per l'induttanza.

### Circuito LC

Vediamo adesso un circuito formato da un condensatore e da un induttore collegati fra di loro in serie. Assumiamo il condensatore come carico dall'inizio (in

un caso più realistico si può assumere che il condensatore venga prima caricato da una batteria, secondo i modelli già studiati, e che poi venga collegato all'induttanza). Si avrà in questo caso, che l'energia elettrica del condensatore verrà trasferita, sotto forma di corrente, all'induttore, che la immagazzinerà sotto forma di energia magnetica. Una volta che il condensatore è completamente scarico, e l'induttanza completamente carica, il processo ricomincia in modo inverso (la corrente stessa inizia a scorrere in direzione opposta), e così via ciclicamente. Possiamo dare una descrizione quantitativa del processo. Iniziamo con l'usare la seconda di legge di Kirchhoff sulle cadute di potenziale lungo il circuito, usando la fem dell'induttanza e il voltaggio che avevamo già calcolato riguardo al condensatore:

$$L \frac{di}{dt} + \frac{q}{C} = 0$$

Notiamo che, visto che  $i = \frac{dq}{dt}$ , possiamo riscrivere come:

$$L \frac{d^2q}{dt^2} + \frac{q}{C} = \frac{d^2q}{dt^2} + \frac{q}{LC} = 0$$

Questa è un'equazione differenziale armonica, e ci fornisce un'espressione per la carica sul condensatore:

$$q = q_0 \sin(\omega t + \phi), \quad \omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Possiamo derivare quest'espressione per ottenere la corrente nel circuito, come:

$$i = \frac{d}{dt}q = \frac{d}{dt}q_0 \sin(\omega t + \phi) = q_0 \omega \cos(\omega t + \phi) = i_0 \cos(\omega t + \phi)$$

Dove  $i_0 = q_0 \omega$  è la corrente di picco circuito, data dalla carica iniziale nel condensatore. Si può arrivare ad un risultato simile sfruttando l'energia sul condensatore e sull'induttanza e la sua conservazione:

$$E_{tot} = \frac{1}{2}Li^2 + \frac{1}{2}\frac{q^2}{C} = const. \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2}Li^2 + \frac{1}{2}\frac{q^2}{C} \right) = Li \frac{di}{dt} + \frac{q}{C} \frac{dq}{dt} = 0$$

Notando la stessa equivalenza di prima fra  $i$  e  $\frac{dq}{dt}$ , si può dividere per  $i$ :

$$L \frac{di}{dt} + \frac{q}{C} = 0$$

Che è la stessa equazione differenziale di prima.