Appunti Fisica I

Luca Seggiani

25 Marzo 2024

Lavoro svolto nel moto parabolico

Prendiamo l'esempio del moto parabolico. La forza peso compirà un lavoro in qualsiasi punto della parabola pari a:

$$L_p = -mg(y_f - y_i) = -mgy$$

$$\Delta K = \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_i^2 = \frac{1}{2}m(v_y^2 - v_0^2 \sin^2\theta)$$

Eguagliando:

$$\Delta K = -mgy = \frac{1}{2}m(v_y^2 - v_0^2 \sin^2\theta)$$

Possiamo applicare il teorema delle forze vive:

$$-2gy = v_y^2 - (v_0 \sin\theta)^2 \Rightarrow v_y^2 = (v_0 \sin\theta)^2 - 2gy$$

che con quanto trovato attraverso la cinematica:

$$2a_y(y(t) - y_0) = v_y(t)^2 - v_{0y}^2$$

Lavoro della forza elettrostatica o gravitazionale

Possiamo dire, per le forze che dipendono dall'inverso del quadrato della distanza:

$$\vec{F} = -\frac{K}{r^2}\hat{r}$$

attrattiva con $k > 0$, repulsiva con $k < 0$, che il lavoro svolto è:

$$L = \int_i^f \vec{F} \cdot d\vec{s} = -k \int_i^f \frac{\hat{r} \cdot d\vec{s}}{r^2} = -k \int_{r_i}^{r_f} \frac{dr}{r^2} = k(\frac{1}{r_f} - \frac{1}{r_i})$$

1 Potenza

La potenza è la velocità con cui viene sviluppata una forza:

$$P = \vec{F} \cdot \vec{v} = \frac{L}{t}$$

La potenza è una quantita scalare e si misura in $\frac{\text{J}}{\text{s}} = \text{W}$ (watt). Possiamo dimostrare la formula sopra riportata con:

$$P = \frac{dL}{dt} = \frac{d}{dt}\int \vec{F} \cdot d\vec{r} = \frac{d}{dt}(\vec{F} \cdot \vec{v})dt = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

2 Forze conservative

Una forza $\vec{F}$ è detta conservativa se il lavoro che svolge non dipende dal percorso scelto γ, ma solamente dagli estremi. In simboli:

$$L = \int_{\vec{r_0}(\gamma)}^{\vec{r_1}} \vec{F} \cdot d\vec{L} = \int_{\vec{r_0}}^{\vec{r_1}} \vec{F} \cdot d\vec{L}$$

non dipende dal γ, ma solamente da r_0 e r_1. Esempi di forze conservative sono la gravità, la forza elettrostatica e la forza elastica. Esempi di forze non conservaative sono invece l'attrito dinamico e l'attrito viscoso.

Si consideri una forza $\vec{F}$. Per ogni linea chiusa γ si ha:

$$\oint_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{l} = 0 \Rightarrow L = \int_{\vec{R_0}}^{\vec{R_1}} \vec{F} \cdot d\vec{l}$$

Ciò si dimostra prendendo sul percorso chiuso due linee arbitrarie γ_1 e γ_2, con gli estremi coincidenti:

$$\oint_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{l} = 0 = \int_{\vec{R_0}(\gamma_1)}^{\vec{R_1}} \vec{F} \cdot d\vec{L} + \int_{\vec{R_1}(\gamma_2)}^{\vec{R_0}} \vec{F} \cdot d\vec{L} = \int_{\vec{R_0}(\gamma_1)}^{\vec{R_1}} \vec{F} \cdot d\vec{L} - \int_{\vec{R_0}(\gamma_2)}^{\vec{R_1}} \vec{F} \cdot d\vec{L}$$

ovvero:

$$\int_{\vec{R_0}(\gamma_1)}^{\vec{R_1}} \vec{F} \cdot d\vec{L} = \int_{\vec{R_0}(\gamma_2)}^{\vec{R_1}} \vec{F} \cdot d\vec{L}$$

Quindi, se per una forza $\vec{F}$ su un percorso chiuso γ si ha:

$$\oint_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{L} = 0 \Rightarrow \int_{\vec{R_0}(\gamma_1)}^{\vec{R_1}} \vec{F} \cdot d\vec{L} = \int_{\vec{R_0}(\gamma_2)}^{\vec{R_1}} \vec{F} \cdot d\vec{L}$$

Ovvero la forza dipende solamente dalla posizione iniziale e finale per qualsiasi γ. In altre parole:

$$L = \int_{\vec{R_0}}^{\vec{R_1}} \vec{F} \cdot d\vec{L} = f(\vec{R_0}, \vec{R_1})$$

il lavoro è funzione di $\vec{R_0}$ e $\vec{R_1}$.

3 Campo di forza e linee di forza

Un campo di forze è un campo vettoriale, ovvero una funzione $\vec{F}(x, y, z)$ delle componenti x, y, z. Rappresenta l'insieme di valori che una grandezza fiisca (in questo caso una forza) assume in un certo punto dello spazio. Una **linea di forza** è una linea formata dall'inviluppo delle direzioni della forza nella regione del campo. La direzione della forza è in ogni punto tangente alla linea di forza. Notiamo che le linee di forza non possono intersecarsi. Inoltre, un campo di forza conservativo non può contenere linee chiuse. Una **superficie equipotenziale** è una superficie perpendicolare in ogni punto alla direzinoe delle linee di forza.

4 Energia potenziale

Se una forza è conservativa allora esiste una funzione della posizione del punto materiale tramite la quale si può esprimere il lavoro:

$$L_{A\to B_1} = L_{A\to B_2} = L_{A\to B} = f(A, B)$$

Chiamiamo allora variazione di energia potenziale l'integrale:

$$\Delta U = U(\vec{R}) - U(\vec{R_0}) = -L_{\vec{R_0}\to\vec{R}} = -\int_{\vec{R_0}}^{\vec{R}} \vec{F} \cdot d\vec{l}$$

al pari di qualche costante. L'energia potenziale è l'opposto del lavoro, ed entrambe si misurano in Joule. Sulle superfici equipotenziali l'energia potenziale è costante.

Energia potenziale gravitazionale nelle vicinanze della superficie terrestre
Abbiamo che, vicino alla crosta terrestre, l'energia potenziale è maggiore tanto quanto aumenta la nostra altitudine, ovvero:

$$U(Z) - U(Z_0) = L_{Z_0\to Z} = -\int_{Z_0}^{Z} M\vec{g} \cdot d\vec{l} = MgZ - MgZ_0 = Mgh$$

$$U(Z) = MgZ + \text{const.}$$

Prendiamo $U(Z_0) = MGZ_0$:

$$U(Z) = MgZ$$

Energia potenziale di una molla

Ricordiamo che per una molla:

$$L_{x_i,x_f} = \int_{x_i}^{x_f} \vec{F} \cdot d\vec{r} = -\int_{x_i}^{x_f} kx dx = -\frac{k}{2}(x_f^2 - x_i^2) = \frac{k}{2}(l_i - l_0)^2 - \frac{k}{2}(l_f - l_0)^2$$

Dove si nota che il lavoro dipende unicamente dalla lunghezza iniziale l_i e finale l_f della molla. Possiamo cambiare variabile indicando con x la lunghezza della molla:

$$U(x) - U(x_i) = -L = \frac{k}{2}(x - l_0)^2 - \frac{k}{2}(l_f - l_0)^2$$

Ponendo l'origine delle coordinate in l_0:

$$U(x) - U(x_i) = -L = \frac{k}{2}(x - l_0)^2$$

Conseguenze delle forze conservative

Dalla definizione di differenza di energia potenziale deriva:

$$U(\vec{R}) - U(\vec{R_0}) = -\int_{\vec{R_0}}^{\vec{R}} \vec{F} \cdot d\vec{l} \Rightarrow U(\vec{R}) = U(\vec{R_0}) - \int_{R_0}^{R} \vec{F} \cdot d\vec{l}$$

Che sulle componenti diventa:

$$U(x, y, z) = U(x_0, y_0, z_0) - \int_{(x_0,y_0,z_0)}^{(x,y,z)} (F_x dx + F_y dy + F_z dz)$$

da cui:

$$F_x = -\frac{\partial U(x, y, z)}{\partial x} \qquad F_y = -\frac{\partial U(x, y, z)}{\partial y} \qquad F_z = -\frac{\partial U(x, y, z)}{\partial z}$$

Che si riassume in:

$$F = -\vec{\nabla} U$$

Ovvero, in qualsiasi punto del campo dell'energia potenziale possiamo ricavare su un intorno il vettore forza come gradiente.

Modelli d'analisi basati sull'energia

L'energia e il lavoro forniscono un modello d'analisi fisico spesso più conveniente di quello della cinematica. Prendiamo in esempio il moto di un punto materiale sul piano inclinato: il corpo inizia il suo moto alla base del piano (inclinato di angolo θ) con una certa velocità v_0. Risale il piano per una certa distanza l, ostacolato dalla forza d'attrito (con coefficiente di attrito dinamico μ_d) e dalla forza gravitazionale g. Ci chiediamo quale sia la posizione massima raggiunta dal punto materiale, e quale sia, una volta iniziata la sua discesa da dato punto, la velocità con cui ripassa dalla posizione di partenza. Vediamo le forze agenti sul punto materiale: la forza peso mg, diretta verso $-\hat{j}$, che possiamo dividere nelle due componenti parellele e perpendicolari alla superficie del piano. Abbiamo poi la reazione vincolare del piano N, parallela alla componente perpendicolare della forza peso che andrà ad annullare (e quindi perpendicolare alla superficie del piano). Abbiamo infine la forza di attrito, proporzionale ad $|N|$, e diretta nella direzione opposta alla velocità $\vec{v_0}$ del corpo.

Spostamento massimo, approccio cinematico

Possiamo impostare:

$$F_p = -mg, \quad F_{p\perp} = -mg\cos\theta, \quad F_{o\|} = -mg\sin\theta$$

con $N = -F_{p\perp} = -mg\cos\theta$. A questo punto l'attrito sarà:

$$F_{att} = -\mu_d|N| = -\mu_d mg\cos\theta$$

Abbiamo già detto che la forza gravitazionale nella direzione perpendicolare al piano viene annullata dalla reazione N, e quindi l'unica componente che rimane a determinare l'accelerazione è:

$$F = ma = \mu_d N + mg\sin\theta \Rightarrow a = g(\sin\theta + \mu_d\cos\theta)$$

Siamo nel caso del moto rettilineo uniformemente accelerato (nella direzione parallela al piano), e possiamo quindi impostare le leggi orarie:

$$\begin{cases} s = v_0 t + \frac{1}{2}at^2 \\ \\ v = v_0 + at \end{cases}$$

Imponendo $v = 0$, come accadrà nel punto di altezza massima (e quindi di cambio direzione), avremo che:

$$v_0 = g(\sin\theta + \mu_d\cos\theta) \Rightarrow t = \frac{v_0}{g(\sin\theta + \mu_d\cos\theta)}$$

Da cui ricaviamo lo spostamento (chiamiamiolo $l = s$):

$$l = v_0 t + \frac{1}{2}at^2 = \frac{v_0^2}{2g(\sin\theta + \mu_d \cos\theta)}$$

Spostamento massimo, approccio energetico
Impostiamo la differenza dell'energia cinetica, applicando il teorema delle forze vive:

$$K_f - K_i = L_{att} + L_{mg}$$

Ricaviamo il lavoro svolto dalla forza di attrito:

$$L_{att} = \int_0^l \mu_d mg dx = -\mu_d mgl \cos\theta$$

e dalla forza peso:

$$L_{mg} = \int_0^l mg \sin\theta = mgl \sin\theta$$

Diciamo che la variazione di energia cinetica ΔK è uguale a a:

$$\Delta K = -\frac{1}{2}mv^2 = -\mu_d mgl \cos\theta - mgl \sin\theta$$

da cui si ottiene:

$$l = v_0 t + \frac{1}{2}at^2 = \frac{v_0^2}{2g(\sin\theta + \mu_d \cos\theta)}$$

Notiamo che attraverso entrambi gli approcci otteniamo risposte identiche, ma l'approccio energetico richiede meno calcoli (sopratutto vettoriali!). Concludiamo ricavando attraverso entrambi gli approcci la velocità di ritorno attraverso il punto di partenza.

Velocità di ritorno, approccio cinematico
In questo il corpo parte da distanza l dall'inizio del piano, con velocità iniziale nulla. Forza gravitazionale e forza di attrito saranno discordi:

$$F = ma = mg \sin\theta - \mu_d mg \cos\theta, \quad a = g(\sin\theta - \mu_d \cos\theta)$$

che sostituito nelle legge orarie:

$$\begin{cases} s = \frac{1}{2}at^2 \\ v = at \end{cases}$$

fornisce:

$$t = \sqrt{\frac{2l}{a}}, \quad v^2 = 2la = 2lg(\sin\theta - \mu_d \cos\theta)$$

Velocità di ritorno, approccio cinematico

Impostiamo in modo analogo a prima il lavoro svolti dalla forza di gravità e di attrito sul punto materiale, ponendoli adesso discordi:

$$L_{att} = -\mu_d mgl \cos\theta, \quad L_{mg} mg \sin\theta$$

che possiamo eguagliare alla variazione di energia cinetica:

$$\Delta K = \frac{1}{2}Mv^2 = -\mu_d mgl \cos\theta + mgl \sin\theta$$

Da cui si ricava subito v:

$$v^2 = 2lg(\sin\theta - \mu_d \cos\theta)$$

Ancora una volta, i risultati coincidono (che è come dovrebbe essere!), e l'approccio energetico risulta più agile nei calcoli.