Appunti Fisica 1

Luca Seggiani

19 Aprile 2024

Rotazione in distribuzione di massa asimmetrica
Vediamo nel dettaglio la situazione dove la distribuzione di massa è asimmetrica rispetto all'asse di rotazione (può comunque essere simmetrica, solo su un asse sghembo rispetto a quello di rotazione). Immaginiamo un manubrio formato da un'asta di massa trascurabile e lunghezza l e due punti materiali di massa M alle sue estremità. Il manubrio è piegato di un angolo θ rispetto alla verticale, e ruota invece proprio attorno alla verticale. Avremo che il suo momento angolare sarà la somma dei momenti delle due masse:

$$\vec{L} = \vec{L_1} + \vec{L_2}$$

L'angolo formato tra la velocità angolare e il momento angolare sarà allora $(\frac{\pi}{2} - \theta)$, da cui:

$$\vec{L} = \sum m_i \vec{R_i} \times \vec{v_i}, \quad v_i = \omega \frac{l}{2} \sin\theta \Rightarrow L_1 = L_2 = M \frac{l}{2} \omega \frac{l}{2} \sin\theta$$

Dividiamo allora questo momento sui due assi:

$$L_{1_z} = L_{2_z} = L_1 \cos \frac{\pi}{2} - \theta = L_1 \sin\theta = 2L_1 \sin\theta = \frac{M}{2} l^2 \omega \sin\theta^2 = I_z \omega$$

Che corrisponde al momento di inerzia rispetto all'asse di rotazione $\hat{\omega}$. Notiamo che qui il momento angolare vale $I_z = \frac{M}{2} l^2 \sin^2\theta$, e $l \sin\theta$ non è altro che la distanza d_i del punto materiale dall'asse di rotazione. Ergo vale la solita formula per il momento d'inerzia di una massa sospesa:

$$I_z = m d_i^2, \quad d_i = l \sin\theta \Rightarrow I_z = \frac{M}{2} l^2 \sin\theta^2$$

Il momento angolare è inoltre costante lungo l'asse z: il momento delle forze sarà tutto sull'asse x, visto che l'unica forza in gioco è la forza peso. Si avrà allora che:

$$\tau_z = 0, \quad \frac{dL}{dt} = \vec{\tau} \Rightarrow \frac{dL_z}{dt} = 0, \quad L_z = \text{const.}$$

La componente $L_\perp$ sarà invece in continua variazione, come avevamo già visto.

Seconda equazione cardinale per momento angolare parallelo all'asse
Abbiamo quindi che per distribuzioni di massa simmetrica ($\vec{L} \parallel \vec{\omega}$):

$$\vec{L} = I_z\omega$$

Possiamo derivare $\vec{L}$:

$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{dI_z\omega}{dt} = I_z\vec{\alpha}$$

Questo significa che il momento delle forze esterne agenti rispetto all'asse di rotazione permette di calcolare l'accelerazione angolare $\vec{\alpha}$.

1 Lavoro nel moto rotazionale

Prendiamo il caso di una carrucola spinta da una forza T posta ad una distanza R dal centro. Avremo che il lavoro su uno spostamento infinitesimo $d\mathcal{L}$ è:

$$d\mathcal{L} = \vec{T} \cdot \vec{dr} = T dr \cos 0, \quad dr = Rd\theta$$

$$d\mathcal{L} = TRd\theta = \tau_z d\theta$$

Quindi il momento torcento compie un lavoro pari al momento della forza per la variazione dell'angolo. In generale il lavoro per una rotazione finita dall'angolo θ_i all'angolo θ_f sarà:

$$\mathcal{L}_{\theta_i \to \theta_f} = \int_{\theta_i}^{\theta_f} \tau_z d\theta = \int_{\theta_i}^{\theta_f} I_z\dot{\omega} d\theta = \int_{\theta_i}^{\theta_f} I_z\dot{\omega}\omega dt = \int_{\theta_i}^{\theta_f} I_z\frac{d\omega}{dt}\omega dt = \int_{\theta_i}^{\theta_f} I_z\omega d\omega$$

Che da il risultato:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}I_z\omega_f^2 - \frac{1}{2}I_z\omega_i^2$$

Conservazione dell'energia rotazionale
Riprendiamo la nostra carrucola. Sia una massa m attaccata alla carrucola attraverso una fune. Calcoliamo allora la variazione di energia meccanica quando la massa scende di un tratto h, notando che $h = R\theta$:

$$\Delta E = L_{NC} = L_{\vec{T}} - L_{\vec{T}} + L_{R_v} = 0$$

Ergo se non ci sono forze non conservative l'energia meccanica si conserva:

$$E_i = E_f, \quad E_i = mgh_i, \quad E_f = \frac{1}{2}mv_m^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 + mgh_f$$

$$\Rightarrow mg(h_i - h_f) = \frac{1}{2}mv_m^2 + \frac{1}{2}I\omega^2$$