Appunti Fisica I

Luca Seggiani

16 Maggio 2024

Divergenza e rotore del campo elettrico

Il concetto di flusso e circuitazione sono espressi matematicamente dal flusso e dal rotore del campo elettrico, come vedremo poi nelle prime due equazioni di Maxell in forma differenziale.

- **Divergenza**

  Nel corso di analisi II, si introduce la divergenza come "la tendenza di un punto di comportarsi come un pozzo o una sorgente". In elettrostatica, questo significa che la divergenza di un punto determina la sua capacità di comportarsi come una carica positiva o negativa (se così si può dire). Dal teorema di Gauss, abbiamo l'equazione di bilancio:

  $$\int_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = \Phi(\vec{E}) = \int_V \nabla \cdot \vec{E} \, dV$$

  che possiamo così interpretare: il flusso su una superficie S di un campo $\vec{E}$ equivale all'integrale sul volume interno alla superficie della divergenza del campo. Questo si applica direttamente al campo elettrico come:

  $$\int_V \nabla \cdot \vec{E} \, dV = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho dV$$

  dove $\nabla \cdot \vec{E} = \rho(x, y, z)$ è la densità di carica di un punto (x, y, z) arbitrario. Intuitivamente, se la divergenza è la capacità di un punto di comportarsi come carica positiva o negativa, cioè di generare un campo che attragga cariche del senso opposto e respinga cariche dello stesso segno, corrisponderà con la densità di carica (come risulta dalla prima equazione di Maxwell, cioè la legge di Gauss). Ricordando poi che il campo elettrico non è altro che il gradiente della funzione potenziale ($\vec{E} = -\nabla V$), possiamo dire:

  $$\nabla \cdot \vec{E} = \nabla \cdot (-\nabla P) = -\nabla^2 P = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

L'ultima equazione è detta **equazione di Poisson**, e usa l'**operatore laplaciano**. Possiamo esprimerla sulle tre coordinate come:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}V + \frac{\partial^2}{\partial y^2}V + \frac{\partial^2}{\partial z^2}V = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

- **Rotore**
  Il rotore del campo elettrico fornisce informazioni riguardo alla sua circuitazione. Sappiamo che un campo conservativo (ovvero un campo che è gradiente di una funzione potenziale) ha rotore nullo in ogni suo punto. Di contro, sappiamo che una campo irrotazionale (definito su un insieme semplicemente connesso), è necessariamente conservativo. Questo porta alla forma differenziale della seconda equazione di Maxwell:

  $$\vec{E} = -\nabla P \Rightarrow \nabla \times \vec{E} = 0$$

  Si noti che questo vale nell'elettrostatica. Nel caso il campo (e quindi la densità di carica) vari nel tempo, l'irrotazonalità del campo potrebbe non essere assicurata.