Appunti Fisica 1

Luca Seggiani

19 Aprile 2024

Rotazione in distribuzione di massa asimmetrica
Vediamo nel dettaglio la situazione dove la distribuzione di massa è asimmetrica rispetto all'asse di rotazione (può comunque essere simmetrica, solo su un asse sghembo rispetto a quello di rotazione). Immaginiamo un manubrio formato da un'asta di massa trascurabile e lunghezza l e due punti materiali di massa M alle sue estremità. Il manubrio è piegato di un angolo θ rispetto alla verticale, e ruota invece proprio attorno alla verticale. Avremo che il suo momento angolare sarà la somma dei momenti delle due masse:

$$\vec{L} = \vec{L_1} + \vec{L_2}$$

L'angolo formato tra la velocità angolare e il momento angolare sarà allora $(\frac{\pi}{2} - \theta)$, da cui:

$$\vec{L} = \sum m_i \vec{R_i} \times \vec{v_i}, \quad v_i = \omega \frac{l}{2} \sin\theta \Rightarrow L_1 = L_2 = M \frac{l}{2} \omega \frac{l}{2} \sin\theta$$

Dividiamo allora questo momento sui due assi:

$$L_{1_z} = L_{2_z} = L_1 \cos\frac{\pi}{2} - \theta = L_1 \sin\theta = 2L_1 \sin\theta = \frac{M}{2} l^2 \omega \sin\theta^2 = I_z \omega$$

Che corrisponde al momento di inerzia rispetto all'asse di rotazione $\hat{\omega}$. Notiamo che qui il momento angolare vale $I_z = \frac{M}{2} l^2 \sin^2\theta$, e $l \sin\theta$ non è altro che la distanza d_i del punto materiale dall'asse di rotazione. Ergo vale la solita formula per il momento d'inerzia di una massa sospesa:

$$I_z = m d_i^2, \quad d_i = l \sin\theta \Rightarrow I_z = \frac{M}{2} l^2 \sin\theta^2$$

Il momento angolare è inoltre costante lungo l'asse z: il momento delle forze sarà tutto sull'asse x, visto che l'unica forza in gioco è la forza peso. Si avrà allora che:

$$\tau_z = 0, \quad \frac{dL}{dt} = \vec{\tau} \Rightarrow \frac{dL_z}{dt} = 0, \quad L_z = \text{const.}$$

La componente $L_\perp$ sarà invece in continua variazione, come avevamo già visto.

Seconda equazione cardinale per momento angolare parallelo all'asse

Abbiamo quindi che per distribuzioni di massa simmetrica ($\vec{L} \parallel \vec{\omega}$):

$$\vec{L} = I_z \omega$$

Possiamo derivare $\vec{L}$:

$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{dI_z\omega}{dt} = I_z\vec{\alpha}$$

Questo significa che il momento delle forze esterne agenti rispetto all'asse di rotazione permette di calcolare l'accelerazione angolare $\vec{\alpha}$.

1 Lavoro nel moto rotazionale

Prendiamo il caso di una carrucola spinta da una forza T posta ad una distanza R dal centro. Avremo che il lavoro su uno spostamento infinitesimo $d\mathcal{L}$ è:

$$d\mathcal{L} = \vec{T} \cdot \vec{dr} = T dr \cos 0, \quad dr = R d\theta$$

$$d\mathcal{L} = TR d\theta = \tau_z d\theta$$

Quindi il momento torcento compie un lavoro pari al momento della forza per la variazione dell'angolo. In generale il lavoro per una rotazione finita dall'angolo θ_i all'angolo θ_f sarà:

$$\mathcal{L}_{\theta_i \to \theta_f} = \int_{\theta_i}^{\theta_f} \tau_z d\theta = \int_{\theta_i}^{\theta_f} I_z \dot{\omega} d\theta = \int_{\theta_i}^{\theta_f} I_z \dot{\omega}\omega dt = \int_{\theta_i}^{\theta_f} I_z \frac{d\omega}{dt}\omega dt = \int_{\theta_i}^{\theta_f} I_z \omega d\omega$$

Che da il risultato:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} I_z \omega_f^2 - \frac{1}{2} I_z \omega_i^2$$

Conservazione dell'energia rotazionale

Riprendiamo la nostra carrucola. Sia una massa m attaccata alla carrucola attraverso una fune. Calcoliamo allora la variazione di energia meccanica quando la massa scende di un tratto h, notando che $h = R\theta$:

$$\Delta E = L_{NC} = L_{\vec{T}} - L_{\vec{T}} + L_{R_v} = 0$$

Ergo se non ci sono forze non conservative l'energia meccanica si conserva:

$$E_i = E_f, \quad E_i = mgh_i, \quad E_f = \frac{1}{2}mv_m^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 + mgh_f$$

$$\Rightarrow mg(h_i - h_f) = \frac{1}{2}mv_m^2 + \frac{1}{2}I\omega^2$$

Esempio di applicazione della dinamica rotazionale

Vediamo un problema che sapevamo già risolvere attraverso la dinamica, e applichiamo quello che adesso conosciamo sulla dinamica rotazionale per trovare risultati più precisi.

Il problema presuppone una carrucola di raggio R con due masse, m_1 e m_2. Le masse collegate dalla carrucola agiranno su di essa con due tensioni, T_1 e T_2, dipendenti dalla forza peso. Possiamo immaginare queste due tensioni identiche (ovvero sia il filo che la carrucola trascurabili in massa) e impostare le equazioni dinamiche:

$$\begin{cases} m_1\vec{a_1} = \vec{T_1} - m_1 g \\ \\ m_2\vec{a_2} = \vec{T_2} - m_2 g \end{cases}, \quad \vec{T_1} = \vec{T_2}, \quad \vec{a_1} = -\vec{a_2} \Rightarrow m_1\vec{a} + m_1 g = m_2 g - m_2\vec{a}$$

Questo si ottiene dal fatto che l'accelerazione in alto di una massa comporta l'accelerazione in basso dell'altra, e viceversa, e dà il risultato:

$$\vec{a} = g\frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}$$

Questo risultato è corretto nel caso la carrucola, ricordiamo, abbia massa nulla: le equazioni della dinamica rotazionale ci forniscono un sistema più completo che può invece tenere conto della sua massa. Partiamo dall'equazione trovata prima:

$$I_z\vec{\alpha} = \vec{\tau_{tot}}$$

Dove $\vec{\alpha}$ è l'accelerazione angolare della carrucola, I_z il suo momento d'inerzia, e $\vec{\tau_{tot}}$ il momento risultante delle forze che agiscono su di essa. Possiamo calcolare separatamente questi termini. Iniziamo dal momento d'inzerzia, assumendo la carrucola come un disco di massa uniforme M:

$$I_z = \frac{MR^2}{2}$$

Vediamo poi il momento risultante delle forze τ_{tot}. Sarà necessario, per tener conto della massa della carucola, adoperare due diverse tensioni, una per ogni capo della corda, T_1 e T_2, da non assumere come uguali fra loro:

$$\tau_{tot} = \vec{R} \times (T_2 - T_1)$$

Infine $\vec{\alpha}$ accelerazione angolare è proporzionale di R all'accelerazione a, che definiamo come prima come l'accelerazione in direzione di una sola massa (la prima):

$$\vec{\alpha} = \frac{a}{R}$$

Possiamo sostituire quanto trovato nella formula iniziale per ottenere che:

$$I_z\vec{\alpha} = \vec{\tau_{tot}} = \frac{MR^2}{2}\frac{a}{R} = (T_2 - T_1)R \Rightarrow \frac{Ma}{2} = (T_2 - T_1)$$

Ricaviamo quindi la $(T_2 - T_1)$ dalle equazioni dinamiche ricavate precedentemente:

$$T_2 - T_1 = m_2g - m_2a - m_1a - m_1g$$

Da cui l'equazione finale:

$$\frac{Ma}{2} = m_2g - m_2a - m_1a - m_1g \Rightarrow a = g\frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2 + \frac{M}{2}}$$

Notiamo che l'unica differenza dall'approccio precedente è il termine $\frac{M}{2}$ al denominatore. Se assumiamo $M = 0$, le formule corrispondono (che è come dovrebbe essere!).

Applicazione della conservazione dell'energia rotazionale

Lo stesso risultato si può ottenere attraverso la conservazione dell'energia rotazionale. Nel sistema non agiscono forze non conservative, o almeno le tensioni della fune non svolgono lavoro e non lo fa nemmeno la reazione vincolare della carrucola. Avremo quindi che in qualsiasi momento, l'energia meccanica si conserva:

$$\frac{d}{dt}E = 0$$

Possiamo quindi impostare l'energia meccanica come:

$$E = m_1gh_1 + m_2gh_2 + \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 + \frac{1}{2}I_z\omega^2$$

Dove abbiamo le energie potenziali e cinetiche delle masse e l'energia rotazionale della carrucola. Problematici potrebbero essere i fattori h_1 e h_2. Imponiamo allora l'inestensibilità della fune: diciamo che la sua lunghezza complessiva l è sempre costante, ergo le altezze h_1 e h_2 delle masse dovranno essere una l'opposta dell'altra:

$$h_1 = -h_2$$

Otteniamo così un'equazione da derivare, applicando la relazione già usata prima riguardo alle accelerazioni, $a_1 = -a_2$.

$$E = m_1 g h - m g_1 h + \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 + \frac{1}{2} I_z + \frac{1}{2} I_z \omega^2$$

$$\frac{d}{dt} E = m_1 g v - m_2 g v + m_1 a v + m_2 a v + \frac{M v a}{2} = 0$$

Per quanto riguarda il fattore $\frac{Mva}{2}$, possiamo vedere come si svolgono i calcoli sostituendo I_z prima o dopo la derivazione:

$$\frac{1}{2} I_z \omega^2 = \frac{1}{2} \frac{MR^2}{2} \omega^2 = \frac{MR^2 \omega^2}{4} = \frac{Mv^2}{2}, \quad \text{da } \omega R = v, \quad \frac{d}{dt} \frac{Mv^2}{2} = \frac{Mva}{4}$$

oppure:

$$\frac{d}{dt} \frac{1}{2} I_z \omega^2 = I_z \omega \alpha = \frac{MR^2}{2} \omega \alpha = \frac{MR^2}{2} \frac{va}{R^2} = \frac{Mva}{4}$$

Come vediamo, dividendo per v (che sappiamo essere $\neq 0$ in caso di non equilibrio) si ha:

$$\frac{Ma}{2} = m_2 g - m_2 a - m_1 a - m_1 g \Rightarrow a = g \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2 + \frac{M}{2}}$$

Che è esattamente identico a quanto avevamo ottenuto con gli altri metodi. Tomato tomato.