Appunti Fisica I

Luca Seggiani

27 Febbraio 2024

1 Sistemi di riferimento

Criterio generale per la scelta di un sistema di riferimento è la semplicità (ad esempio, è conveniente scegliere sistemi con basi fra loro ortogonali e levogiri). Vediamo alcuni esempi di sistemi di riferimento comuni su una retta, su curve parametriche, sul piano e nello spazio:

2 Sistemi di riferimento monodimensionali

Su una determinata retta r, è sufficiente scegliere un'origine O e una direzione di scorrimento della retta. Avremo quindi:

$$P(x)$$

sulla singola coordinata x per indicare qualsiasi punto su r. Il concetto si estende facilmente a curve parametriche di qualsiasi tipo, assumendo la nostra coordinata (adesso t) come fattore di scorrimento sulla curva (C):

$$C(t) = (C_x(t), C_y(t), C_z(t))$$

3 Sistemi di riferimento bidimensionali

Su un piano possiamo definire i due sistemi di riferimento comuni:

- Coordinate cartesiane: individuo univocamente ogni punto con una coppia ordinata (x, y) (ascissa e ordinata)
- Coordinate polari: allo stesso modo, individuo ogni punto con l'angolo θ all'origine e la distanza ρ dalla stessa.

Si può agilmente passare da coordinate cartesiane a polari e viceversa in questo modo:

- Polari $\rightarrow$ cartesiane: notato che ρ è l'ipotenusa di un triangolo rettangolo di angolo θ, ho;

  $$x = \rho \cos\theta \quad y = \rho \sin\theta$$

- Cartesiane $\rightarrow$ polari: ottengo ρ con pitagora:

  $$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$

  e θ applicando:

  $$\theta = \arctan \frac{y}{x}$$

  ricordando il quadrante di appartenenza di (x, y) (l'inversione di $\tan(x)$ comporta la restrizione del dominio a $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$)

4 Sistemi di riferimento tridimensionali

Come per i sistemi bidimensionali, in 3 dimensioni abbiamo:

- Coordinate cartesiane: individuo univocamente ogni punto con una tripla ordinata (x, y, z) (asse x, y, e z)

- Coordinate cilindriche: come per le coordinate polari, definisco un $r > 0$ distanza dall'origine, un'angolo θ sull'asse z, e un'elevazione z sempre sull'asse z, ottenendo la tripla (r, θ, z). Posso convertire agevolmente in coordinate cartesiane attraverso:

  $$x = r\cos\theta \quad y = r\sin(\theta) \quad z = z$$

  e viceversa:

  $$z = z \quad r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \theta = \arctan \frac{y}{x}$$

- Coordinate sferiche: questa volta scelgo due angoli, $\phi \in [0, 2\pi]$ sull'asse z e $\theta \in [0, \pi]$ sulla perpendicolare del segmento che forma angolo ϕ con l'asse x (che deciderà l'elevazione del punto), e sempre una distanza r dall'origine. Questa volta dovrò usare le formule di conversione:

  $$z = r\cos\theta \quad x = r\sin\theta\cos\phi \quad y = r\sin\theta\sin\phi$$

e viceversa:

$$\cos\theta = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \quad r = \sqrt{x^2+y^2+z^2} \quad \tan\phi = \frac{y}{x}$$

Si può notare che questo sistema è lo stesso delle coordinate geografiche, sebbene con intervalli di angoli differenti:

- la longitudine corrisponde a ϕ con $\phi \in [-180°, 180°]$, mentre la latitudine corrisponde a θ con $\theta \in [-90°, 90°]$

5 Sommatorie ed integrali di vettori

Notiamo brevemente la differenza fra le forme:

$$(1) \quad |\sum_{i=1}^{n} \vec{l_i}| \quad \text{e} \quad (2) \quad \sum_{i=1}^{n} |\vec{l_i}|$$

con $\vec{l_i}$ un'insieme di vettori in un determinato spazio. Se la forma (1) tiene conto solamente della somma finale dei vettori (prendi e.g. la posizione di un corpo traslato dai suddetti), la forma (2) restituisce invece la somma di ogni singolo vettore, qualsiasi la sua direzione. Allo stesso modo, su profili (prendo y_1) non discreti:

$$(3) \quad |\int_{y_1} d\vec{l}| \quad \text{e} \quad (4) \quad \int_{y_1} |d\vec{l}|$$

la forma (3) resituisce la sola somma integrale dei differenziali $d\vec{l}$, mentre la forma (4) considera lo spostamento (in qualsiasi direzione) totale di $\vec{l}$.

6 Prodotto scalare e prodotto vettoriale

Si riportano adesso le formule per il prodotto scalare e il prodotto vettoriale ottenute sfruttando i versori $\hat{i}$, $\hat{j}$ e $\hat{k}$. prenderemo in esame due vettori, $a = (a_x, a_y, a_z)$ e $b = (b_x, b_y, b_z)$.

Prodotto scalare

$$(\hat{i}A_x + \hat{j}A_y + \hat{k}A_z) \cdot (\hat{i}B_x + \hat{j}B_y + \hat{k}B_z) =$$
$$(\hat{i})^2 A_x B_x + \hat{i}\hat{j} A_x B_y + \hat{i}\hat{k} A_x B_z +$$
$$\hat{j}\hat{i} A_y B_x + (\hat{j})^2 A_y B_y + \hat{j}\hat{k} A_y B_z +$$

$$\hat{k}\hat{i}A_zB_x + \hat{k}\hat{j}A_zB_y + (\hat{k})^2A_zB_z$$

visto che il prodotto scalare di due vettori perpendicolari (quindi di due versori diversi fra di loro) vale 0, e che il prodotto scalare di un vettore per se stesso vale se stesso al quadrato (su vettori di modulo 1), possiamo riscrivere come:

$$A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z$$

che è la definizione di prodotto scalare.

Prodotto vettoriale

$$(\hat{i}A_x + \hat{j}A_y + \hat{k}A_z) \times (\hat{i}B_x + \hat{j}B_y + \hat{k}B_z) =$$
$$(\hat{i})^2A_xB_x + \hat{i}\hat{j}A_xB_y + \hat{i}\hat{k}A_xB_z +$$
$$\hat{j}\hat{i}A_yB_x + (\hat{j})^2A_yB_y + \hat{j}\hat{k}A_yB_z +$$
$$\hat{k}\hat{i}A_zB_x + \hat{k}\hat{j}A_zB_y + (\hat{k})^2A_zB_z$$

di nuovo, visto che il prodotto vettoriale fra due vettori paralleli vale 0, e il prodotto vettoriale fra due versori unitari vale quanto il loro perpendicolare secondo la regola della mano destra in un sistema di riferimento levogiro, possiamo riscrivere come:

$$\hat{i}(A_yB_z - A_zB_y) + \hat{j}(A_zB_x - A_xB_z) + \hat{k}(A_xB_y - AyB_x)$$

che è la definizione di prodotto vettoriale sui versori $\hat{i}$, $\hat{j}$ e $\hat{k}$. Si noti il fattore $\hat{j}$, che ha un segno negativo (distribuito sui fattori). Questo fatto viene dal sistema dalle proprietà del prodotto vettoriale su un sistema levogiro. Si ricorda inoltre una mnemonica per il prodotto vettoriale come determinante della matrice:

$$\begin{pmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{pmatrix}$$