Appunti Fisica I

Luca Seggiani

7 Marzo 2024

1 Moto circolare non uniforme

Data la velocità:

$$\vec{V} = \omega R \hat{\theta}$$

determiniamo l'accelerazione:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d(\vec{w} \times \vec{R})}{dt} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{R} + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{R}}{dt} = \vec{\alpha} \times \vec{R} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{R})$$

dove α è l'accelerazione angolare:

$$\vec{\alpha} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \Rightarrow \alpha = \dot{\omega} = \ddot{\theta}$$

$$\vec{\alpha} = (\alpha_r, \alpha_\theta, \alpha_z) = (0, 0, \ddot{\theta}) = \ddot{\theta}\hat{z}$$

$$\vec{a} = \vec{\alpha} \times \vec{R} - \omega^2 R \hat{R} = \alpha \hat{z} \times \vec{R} - \omega^2 R \hat{R} = \alpha R \hat{\theta} - \omega^2 R \hat{R}$$

da cui:

$$\vec{a} = (-\omega^2 R, \alpha R)$$

In sostanza, l'accelerazione angolare ha 2 componenti:

- Componente radiale centripeta:

$$\omega^2 R$$

- Componente tangenziale dipendente dall'accelerazione angolare

$$\alpha R$$

A questo punto potremo ritrovare la velocità angolare come:

$$\omega(t) = \omega_{t_0} + \int_{t_0}^{t} \alpha(t') dt'$$

2 Moto piano vario

Vediamo adesso il caso generale dove sia la velocità angolare che la distanza dalla'origine sono funzioni di t:

Velocità

Posto $|\vec{R}| = R(t)$ e $\vec{\omega} = \omega(t)$:

$$\vec{V} = \hat{\theta}V_\theta + \hat{R}V_R = \vec{\omega} \times \vec{\vec{R}} + \hat{R}\frac{d|\vec{R}|}{dt} = \dot{R}\hat{R} + \vec{\omega} \times \vec{R}$$

Ovvero la velocità ha componenti polari:

$$V_R = \dot{R}, \quad V_\theta = \omega R$$

Ciò si dimostra da:

$$\vec{V} = \frac{d\vec{R}}{dt} = \frac{d}{dt}(R\cos\theta, R\sin\theta, 0) = (-R\dot{\theta}\sin\theta, R\dot{\theta}\cos\theta, 0) + (\dot{R}\cos\theta, \dot{R}\sin\theta, 0)$$

$$= \dot{R}\hat{R} + \omega R\hat{\theta} = \dot{r}\hat{R} + R\omega\hat{z} \times \hat{R} = \dot{R}\hat{R} + R\vec{\omega} \times \hat{R}$$

possiamo inoltre dimostrare che, riguardo al solo versore $\hat{R}$:

$$\frac{d\vec{R}}{dt} = \frac{d(\vec{R})}{dt} = \hat{R}\frac{dR}{dt} + R\frac{d\hat{R}}{dt} = \hat{R}\dot{R} + R\frac{d\hat{R}}{dt}$$

da cui;

$$\frac{d\hat{R}}{dt} = \hat{\theta}\dot{\theta} = \vec{\omega} \times \hat{R}$$

Accelerazione

Poniamoci adesso il problema di descrivere l'accelerazione di un moto sul piano qualsiasi, descritto da coordinate polari:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d(\vec{\omega} \times \vec{R} + \dot{R}\hat{R})}{dt} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{R} + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{R}}{dt} + \ddot{R}\hat{R} + \dot{R}\frac{d\hat{R}}{dt}$$

$$= \vec{\alpha} \times \vec{R} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{R} + \dot{R}\hat{R}) + \ddot{R}\hat{R} + \dot{R}\vec{\omega} \times \hat{R}$$

usiamo la stessa formula per il prodotto vettoriale vista prima:

$$\vec{a} = \vec{\alpha} \times \vec{R} - \omega^2\vec{R} + \ddot{R}\hat{R} + 2\dot{R}\vec{\omega} \times \hat{R}$$

notando le solite relazioni coi prodotti vettoriali, ovvero:

$$\vec{\alpha} \times \vec{R} = \alpha R\hat{z} \times \hat{R} = \alpha R\hat{\theta}, \quad \vec{\omega} \times \hat{R} = \omega\hat{z} \times \hat{R} = \omega\hat{\theta}$$

potremo riscrivere come:

$$\vec{a} = (-\omega^2 R + \ddot{R})\hat{R} + (\alpha R + 2\dot{R}\omega)\hat{\theta}$$

ricordando che $\hat{R}$ è il versore in direzione radiale, e $\hat{\theta}$ quello in direzione tangenziale alla traiettoria del nostro punto materiale.