# Appunti Fisica I

Luca Seggiani

13 Maggio 2024

## 1 Resistenza

Cominciamo a parlare di resistenza, sia come componente circuitale che come resistenza interna a un generatore. Abbiamo, dalla legge di Ohm, che il campo elettrico è proporzionale alla densità di corrente $J$ di una costante $\sigma$, conducibilità, o dell'inverso della costante $\rho$, resistività:

$$E = \sigma J = \frac{1}{\rho} J$$

Inoltre, abbiamo che la corrente $I$ è data dal prodotto fra la densità $J$ e la superficie $A$ del conduttore:

$$I = J \cdot A, \quad E = \rho \frac{I}{A}$$

moltiplichiamo entrambi i lati per $l$, ricordando che $El = \Delta V$:

$$El = \rho \frac{l}{A} I = \Delta V, \quad V = IR \Rightarrow R = \rho \frac{l}{A}$$

Che è nuovamente la resistenza di un conduttore di lunghezza $l$ e sezione $A$. Si riportano le resistività e i coefficienti termici (che ci torneranno utili fra poco) di alcuni materiali di uso comune.

| Materiale | Resitività ($\Omega \cdot$ m) | Coefficiente termico $\alpha$ ($°C^{-1}$) |
|---|---|---|
| Argento | $1.59 \times 10^{-8}$ | $3.8 \times 10^{-3}$ |
| Rame | $1.7 \times 10^{-8}$ | $3.9 \times 10^-3$ |
| Oro | $2.44 \times 10^{-8}$ | $3.4 \times 10^{-3}$ |
| Ferro | $10 \times 10^{-8}$ | $5 \times 10^{-3}$ |
| Silicio* | $2.3 \times 10^{3}$ | $-75 \times 10^{-3}$ |
| Vetro | $10^{10} - 10^{14}$ | - |
| Gomma | $10^{13}$ | - |

(*) Notiamo una particolarità del silicio: la sua resistività è fortemente dipendente dalla presenza di eventuali impurità. L'introduzione di altri atomi (**drogaggio**) può variarla di diversi ordini di grandezza. Per questo motivo il silicio è il superconduttore più utilizzato: la sua resistenza può essere fortemente ridotta attraverso il drogaggio con atomi di antimonio, fosforo o arsenico.

**Modello Drude-Lorentz**

Si presenta adesso un modello che mette il fenomeno della conduzione in relazione con il comportamento microscopico degli atomi che formano il reticolo metallico. Modellizziamo un metallo come un reticolo di ioni carichi positivamente che cedono ciascuno gli atomi nel loro strato di valenza: si forma un "mare" di elettroni liberi di circolare liberamente. Il rame, ad esempio, cede un elettrone per ogni atomo (ha configurazione elettronica $[\mathrm{Ar}]3d^{10}4s^1$), ovvero l'unico presente nel suo strato di valenza. Sappiamo poi che gli elettroni liberi urtano, nel loro moto, gli ioni del reticolo metallico, descrivendo quindi traiettorie lineari spezzate. Possiamo allora prendere uno di questi urti, e cercare una relazione fra la velocità $\vec{\mathrm{v}}_i$ subito dopo dell'urto $\vec{\mathrm{v}}_{i+1}$ un'attimo prima dell'urto successivo. Visto che la forza a cui sono sottoposti gli elettroni immersi in un campo elettrico vale $q\vec{E}$, abbiamo:

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m} = \frac{q\vec{E}}{m_e}, \quad \vec{\mathrm{v}}_{i+1} = \vec{\mathrm{v}}_i + \frac{q\vec{E}}{m_e}\tau$$

dove il tempo $\tau$ è il tempo medio che trascorre fra due urti distinti, ovvero il *cammino libero medio* $l$ sulla velocità media $\vec{\mathrm{v}}_{med}$:

$$\tau = \frac{l}{\vec{\mathrm{v}}_{med}}$$

Notiamo inoltre che questo implica la relazione:

$$q\vec{E}\tau = V_d m_e \sim F \cdot t = m \cdot V$$

dove su entrambi i lati figura la definizione di impulso, ovvero l'impulso fornito all'elettrone quando urta il reticolo metallico (in termini molto approssimativi). Da questo possiamo ricavare la velocità di deriva $\vec{v_d}$, che è semplicemente:

$$< \vec{\mathrm{v}}_{i+1} > = < \vec{\mathrm{v}}_i + \frac{q\vec{E}}{m_e}\tau > = \vec{v_d} = \frac{q\vec{E}}{m_e}\tau$$

Abbiamo quindi un'espressione per la velocità di deriva $v_d$, che possiamo sostituire in quanto avevamo già trovato riguardo alla corrente:

$$J = nqv_d = nq\left(\frac{q\vec{E}}{m_e}\tau\right) = \frac{nq^2\tau}{m_e}\vec{E}, \quad I = JA = nqv_d = nq\left(\frac{q\vec{E}}{m_e}\tau\right)A = \frac{nq^2\tau A}{m_e}\vec{E}$$

e a conducibilità e resistività:

$$\sigma = \frac{nq^2\tau}{m_e}, \quad \rho = \frac{1}{\sigma} = \frac{m_e}{nq^2\tau}$$

Notiamo come $\vec{E}$ non dipende dal campo $\vec{E}$: questa, avevamo detto, è la caratteristica fondamentale dei materiali ohmici (equivale alla dipendenza lineare fra campo e desità di corrente).

**Resistenza e temperatura**

Il modello Drude-Lorentz è una semplificazione della realtà dei fatti: stiamo cercando di modellizzare in modo classico fenomeni squisitamente relativistici, e non potremo quindi ottenere previsioni accurate. Un esempio può essere la temperatura: le previsioni del modello Drude-Lorentz non permettono di stimare in modo accurato la correlazione fra resistività e temperatura. Si ha in generale che la resistività e direttamente proporzionale alla temperatura. Ponendo di misurare la resistività ad una certa temperatura $T_0$ di riferimento:

$$\rho(T) = \rho(T_0)(1 + (T - T_0)\alpha) = \rho_0(1 + \Delta T\alpha)$$

dove abbiamo chiamato $\rho_0$ la resistività del materiale a $T_0$. Abbiamo il coefficiente termico $\alpha$, espresso come la variazione di resistività su variazione di temperatura:

$$\alpha = \frac{\Delta\rho/\rho_0}{\Delta T}$$

Questo corrisponde a equazioni in forma identica per la resistenza totale, visto che resistività e resistenza sono direttamente proporzionali ($\rho \propto R$):

$$R(T) = R(T_0)(1 + (T - T_0)\alpha) = R_0(1 + \Delta T\alpha)$$

**Potenza elettrica**

Calcoliamo ora la derivata sul tempo dell'energia dissipata da una resistenza $R$. Notiamo che quest'ultima non è che l'energia fornita dal generatore alla resistenza. Possiamo ricavare dalla definizione di potenziale che l'energia dissipata (e quindi la potenza) è:

$$U = Q\Delta V, \quad P = \frac{dU}{dt} = \frac{dQ}{dt}\Delta V = I\Delta V$$

visto che $I = \frac{dQ}{dt}$. Possiamo combinare questo risultato con quanto ottenuto dalla legge di Ohm $V = IR$ per ottenere:

$$P = I\Delta V = I^2R = \frac{(\Delta V)^2}{R}$$

Questa potenza è collegata al cosiddetto **effetto Joule**: un resistore attraversato da una certa corrente dissipa parte della sua energia (che è la stessa energia usata per generare la differenza potenziale che ha poi creato la corrente), trasformandola in calore.

**Resistenza in parallelo e in serie**

Vediamo adesso come calcolare la capacità delle resistenze viste come *elementi circuitali*, disposti in serie e in parallelo:

- **Resistenze in serie**
  Nel caso di resistenze poste in serie, ci aspettiamo che la corrente sia costante fra qualsiasi coppia di esse. A variare sarà il potenziale, che subirà cadute lungo le resistenze stesse:

  $$I_1 = I_2 = I, \quad V_2 - V_3 = \Delta V_1 = R_1 I, \quad V_3 - V_2 = \Delta V_2 = R_2 I$$

  da cui:

  $$IR = IR_1 + IR_2 \Rightarrow R = R_1 + R_2$$

  La resistenza totale è la somma delle resistenze dei resistori presi singolarmente. Questo ragionamento si estende a numeri illimitati di resistenze messe in serie, come:

  $$R_{eq} = R_1 + R_2 + ...$$

- **Resistenze in parallelo**
  Nel caso di resistenze poste in parallelo, la corrente non sarà più la stessa sui due resistori: avremo invece che:

  $$I = I_1 + I_2$$

  da questo potremo calcolare la differenza di potenziale:

  $$\Delta V = V_B - V_A = R_1 I_1 = R_2 I_2$$

  Ovvero, la differenza di potenziale su $R_1$ e su $R_2$ è equivalente. Avremo allora:

  $$\frac{\Delta V}{R} = \frac{\Delta V}{R_1} + \frac{\Delta V}{R_2} \Rightarrow \frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

  Qesto si è estende a combinazioni illimitate di resistori come:

  $$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + ..., \quad R_{eq} = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)^{-1}$$

**Resistenza interna**

Parliamo brevemente del fenomeno della resistenza interna. Finora abbiamo parlato solamente di **resistenza esterna**, cioè della resistenza impressa da resistori (o anche dal filo conduttore stesso...) sulle cariche messe in moto dalla forza elettromotrice $\mathcal{E}$ prodotta da un qualche generatore di potenziale. In verità, il generatore stesso presenta una resistenza, appunto resistenza interna. Potremo quindi modellizzare un generatore come un complesso più complesso, formato da un generatore e da una resistenza. Spesso, però, la resistenza interna viene omessa per semplicità. Svolgiamo i calcoli: se una batteria ha resistenza interna $r$, e deve muovere carica attraverso una **resistenza di carico** (esterna) $R$, la corrente finale sarà:

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R+r}$$

Diciamo di voler massimizzare la potenza del circuito $P$. Potremo usare la formula (nota che $\mathcal{E} = V$, non è altro che una differenza di potenziale):

$$P = RI^2 = R\left(\frac{\mathcal{E}}{R+r}\right)^2, \quad \frac{d}{dR}P = \left(\frac{V}{R+r}\right)\left(\frac{V}{R+r} - \frac{2VR}{(R+r)^2}\right)$$

da cui si ottiene:

$$\frac{d}{dR}P = 0 \Rightarrow r = R$$

ergo la potenza è massima quando la resistenza esterna corrisponde alla resistenza interna.

**Circuiti RC**

Studiamo il comportamento di un circuito formato da un generatore di forza elettromotrice e due componenti circuitali: un condensatore e un resistore collegati in serie. L'andamento della corrente (come quello della carica nel condensatore) sarà un transiente che andrà stabilizzandosi fino ad una condizione di equilibrio col tempo. Ci aspettiamo che all'istante $t = 0$ (quando abbiamo appena chiuso il circuito), la corrente sarà massima e la carica nel condensatore nulla. Al contrario, dopo un certo tempo, ci aspetteremo che la corrente tenda a 0 e la carica nel condensatore approssimi il suo livello massimo.

**Carica di un condensatore**

Possiamo usare la seconda legge di Kirchoff (che formalmente non abbiamo ancora visto), imponendo che la differenza di potenziale totale sulla maglia del circuito sia nulla: le differenze di potenziale saranno quella del generatore di fem e dei due componenti circuitali (ricordando le formule per condensatore e resistore: $C = \frac{Q}{V}$, $V = IR$), ovvero:

$$\mathcal{E} - \frac{q}{C} - iR = 0$$

Possiamo porre subito $q = 0$ e $i = 0$ per verificare quanto avevamo assunto all'inizio. Si avrà che, per $q = 0$:

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R}$$

è il valore massimo della corrente, e che per $i = 0$:

$$Q = C\mathcal{E}$$

è il valore massimo della carica nel condensatore. Per quantificare le casistiche intermedie, esprimiamo la corrente $i$ attraverso la sua definizione, $i = \frac{dq}{dt}$:

$$\frac{dq}{dt} = \frac{\mathcal{E}}{R} - \frac{q}{RC}$$

Questa è un'equazione differenziale a variabili separabili: mette in relazione la *variazione* di carica con la carica stessa. Possiamo riscrivere come, e risolvere:

$$\frac{dq}{q - C\mathcal{E}} = -\frac{1}{RC}dt \rightarrow \int_0^q \frac{dq}{q - C\mathcal{E}} = -\frac{1}{RC}\int_0^t dt \rightarrow \ln\frac{q - C\mathcal{E}}{-C\mathcal{E}} = -\frac{t}{RC}$$

Possiamo riscrivere il risultato appena trovato come:

$$q(t) = C\mathcal{E}\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right) = C\mathcal{E}\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

chiamando $\tau = RC$ **costante temporale** del circuito RC. Calcoliamo allora, derivando questa equazione, l'espressione della corrente:

$$i(t) = \frac{\mathcal{E}}{R}e^{-\frac{t}{\tau}}$$

**Energia dispersa in carica**

Calcoliamo l'energia che la resistenza trasforma in calore (diremo **energia interna del resistore**), nel tempo necessario a caricare completamente il capacitore. Chiaramente, il capacitore non sarà mai veramente carico del tutto: prenderemo l'integrale improprio per $t \to \infty$. Usiamo il fatto che l'integrale della potenza corrisponde all'energia, e che possiamo facilmente ricavare la potenza da:

$$P = i^2R, \quad E_r = \int_0^\infty P dt = \int_0^\infty i^2R\,dt$$

sostituiamo allora il valore trovato per $i$:

$$E_r = \int_0^{\infty} \left( \frac{\mathcal{E}}{R} e^{-\frac{t}{\tau}} \right)^2 R dt = \frac{1}{2} C \mathcal{E}^2$$

L'integrale si ottiene sostituendo $\tau = RC$, e corrisponde a quanto avremo trovato applicando l'energia del condensatore: $E_c = \frac{1}{2}CV^2$. Questo ci dice che l'energia dissipata dal resistore equivale all'energia immagazzinata nel condensatore: questo ha senso in quanto, considerando il circuito come un sistema chiuso, la variazione di energia deve corrispondere all'energia finale del sistema.

**Scarica di un condensatore**

Abbiamo visto il caso di un condensatore in fase di carica. Calcoliamo adesso cosa succede in fase di scarica, partendo da una carica massima $Q$. Eliminiamo innanzitutto la forza elettromotrice dalla seconda legge di Kirchoff:

$$-\frac{q}{C} - iR = 0$$

Effettuiamo quindi la stessa sostituzione di prima, e risolviamo in modo simile la differenziale:

$$\frac{dq}{q} = -\frac{1}{RC} dt \rightarrow \int_Q^q \frac{dq}{q} = -\frac{1}{RC} \int_0^t dt \rightarrow \ln \frac{q}{Q} = -\frac{t}{RC}$$

Possiamo nuovamente riscrivere questo come:

$$q(t) = Q e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Infine, deriviamo per trovare la corrente:

$$i(t) = -\frac{Q}{RC} e^{-\frac{t}{\tau}}$$

**Energia dispersa in scarica** Calcoliamo quindi l'energia dispersa dalla resistenza nel corso della scarica. Come prima, considereremo il caso ideale in cui $t \rightarrow \infty$, ergo tutta la carica viene scaricata. Potremo nuovamente impostare la potenza (e quindi l'energia):

$$P = i^2 R, \quad E_r = \int_0^{\infty} P dt = \int_0^{\infty} i^2 R \, dt$$

sostituiamo allora il valore trovato per $i$:

$$E_r = \int_0^{\infty} \left( -\frac{Q}{RC} e^{-\frac{t}{\tau}} \right)^2 R dt = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}$$

La situazione è identica a quella della carica: l'energia dissipata dal resistore durante la scarica del capacitore è uguale all'energia iniziale del capacitore.