Appunti Fisica I

Luca Seggiani

5 Marzo 2024

1 Moto di un punto materiale sul piano e nello spazio

Definiamo una traiettoria (o supporto di una curva) $r(t)$ sulle diverse componenti x, y e z:

$$\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)) = \vec{OP}(t), \quad O, P \in \vec{r}(t)$$

a questo punto posizione, velocità ed accelerazione di un punto materiale in moto su tale traiettoria saranno vettori tridimensionali nello spazio (o bidimensionali sul piano).

Vettore spostamento

Individuiamo due momenti nel tempo t_1 e t_2, e ricaviamo da $\vec{r}(t)$ due posizioni lungo la curva (r_1 e r_2). A questo punto lo spostamento di un punto materiale in moto sulla curva che si sposta dal primo al secondo punto sarà:

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}(t_2) - \vec{r}(t_1) = \vec{r_2} - \vec{r_1}$$

oppure, definito un certo intervallo di tempo $\Delta t = t_2 - t_1$:

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)$$

Velocità

Iniziamo col definire la velocità media, proprio come era stato fatto per il moto rettilineo uniforme:

$$\vec{V_m} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{\vec{r_2} - \vec{r_1}}{t_2 - t_1} = \frac{\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t}$$

e la velocità istantanea:

$$\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \vec{V_m} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t}$$

vediamo che sulle singole componenti, la velocità $\vec{V_m}$ sarà:

$$\vec{V} = (V_x, V_y, V_z) = (\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}) = (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$$

Si noti che geometricamente la velocità calcolata in un certo punto è la tangente a $\vec{r}(t)$ in quel punto.

Accelerazione
Definiamo, come prima, accelerazione media:

$$\vec{a_m} = \frac{\Delta\vec{V}}{\Delta\vec{t}} = \frac{\vec{V}(t_2) - \vec{V}(t_1)}{t_2 - t_1}$$

ed istantanea:

$$\vec{a}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{v}(t + \Delta t) - \vec{t}}{\Delta t} = \frac{d^2 r}{dt^2}$$

sulle singole componenti:

$$\vec{a}(t) = \frac{dv_x}{dt}\hat{i} + \frac{dv_y}{dy}\hat{j} + \frac{dv_z}{dt}\hat{k} = \frac{d^2x}{dt^2}\hat{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\hat{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\hat{k} = \ddot{x}\hat{i} + \ddot{y}\hat{j} + \ddot{z}\hat{k}$$

È fondamentale notare che, fosse $|v_1| = |v_2|$, non è per forza detto che $a = 0$! L'accelerazione infatti sarà influenzata sia dalla variazione longitudinale di velocità del mio punto materiale che dalla sua variazione in quanto a direzione. Poniamo i due versori $\hat{u}_T$ e $\hat{u}_N$, rispettivamente nella direzione tangente e radiale del mio punto materiale. Avremo allora:

$$\vec{v} = v\hat{u}_T, \quad \vec{a} = \frac{dv}{dt}\hat{u}_T + v\frac{d\hat{u}_T}{dt}$$

$\hat{u}_T$ dipende dal tempo, ma

$$\frac{d(\hat{u}_T \cdot \hat{u}_T)}{dt} = 0 = 2\hat{u}_T \cdot \frac{d(\hat{u}_T)}{dt} \Rightarrow \frac{d\hat{u}_T}{dt} \perp \hat{u}_T$$

ovvero a_n, accelerazione lungo la direzione radiale (o normale, ma comunque stabilita secondo un sistema di riferimento levogiro) della curva è perpendicolare all'accelerazione longitudinale (o tangente) a_t. Vediamo poi:

$$\vec{a} = a_t\hat{u}_T + a_n\hat{u}_N$$

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt}\hat{u}_T + v\frac{d\hat{u}_T}{dt}$$

da cui si nota che:

- a_t è legata alla variazione del modulo della velocità,
- a_n alla variazione della sua direzione.

Si dice che a_n è l'accelerazione centripeta diretta verso l'interno della traiettoria. Inoltre, approssimando un qualsiasi intorno della curva con un segmento di circonferenza, vediamo che l'accelerazione centripeta è diretta proprio verso il centro di tale circonferenza. Dal punto di vista delle forze, l'accelerazione centripeta è proprio ciò che serve a mantenere il corpo lungo la traiettoria descritta da $\vec{r}(t)$ (ed è l'unica forza / accelerazione in gioco! Non esiste alcuna forza centrifuga, è solamente apparente).
Riassumiamo le formule trovate finora:

$$\vec{a} = \vec{a_n} + \vec{a_t}$$

$$a_t = |\vec{a_t}| = \frac{d|\vec{v}}{dt}, \quad a_n = |\vec{a_n}| = \frac{v^2}{r}$$

e in totale:

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_n^2 + a_t^2}$$

Per concludere l'argomento, osserviamo come, invece di partire dalla definizione di spostamento derivando fino all'accelerazione, possiamo procedere per la strada inversa: partendo dall'accelerazione e integrando fino allo spostamento. Partiamo quindi da accelerazione a velocità:

$$\vec{a} = (a_x, a_y, a_z), \quad t > t_0$$

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = dv_x = a_x dt = v_x(t) - v_x(t_0) = \int_{v_{x0}}^{v_x} dv_x = \int_{t_0}^{t} a_x dt$$

E torniamo da velocità a spostamento:

$$v_x(t) = v_x(t_0) + \int_{t_0}^{t} a_x(t')dt'$$

potrò procedere analogamente sulle altre componenti, utilizzando oppurtunamente i versori $\hat{i}, \hat{j}$ e $\hat{k}$.

2 Moti piani su coordinate polari

Avendo visto la definizione di sistema di coordinate polari, con (R, θ) raggio e angolo rispetto all'asse delle ascisse, definiamo:

$$\vec{R} = (x, y, 0) = (R\cos\theta, R\sin\theta, 0)$$

$$\hat{\hat{R}} = (x/R, y/R, 0) = (\cos\theta, \sin\theta, 0)$$

$$\vec{\theta} = (-\sin\theta, \cos\theta, 0)$$

Generalmente, $\vec{R}$ individuerà un certo punto su una circonferenza di raggio R, e $\vec{\theta}$ sarà la direzione della sua velocità (tangenziale alla circonferenza).

Moto piano vario

Nel caso di moto piano vario, quindi non ben definito su una circonferenza o qualsasi altra funzione analitica, avremo banalmente:

$$\theta = \theta(t), \quad R = R(t)$$

Moto piano circolare uniforme non uniforme

Nel caso almeno il luogo su cui avviene il moto sia una circonferenza, potremo stabilire:

$$\theta = \theta(t), \quad R = a$$

Vediamo ora più nel dettaglio un moto circolare a velocità costante.

3 Moto piano circolare uniforme

Nel caso il moto avvenga su una circonferenza e a velocità costante, potremo definire completamente velocità e posizione:

$$\theta = \omega_0 t + \theta_0, \quad R = a$$

si noti che qua e nel caso precedente a è il raggio della nostra circonferenza.

Velocità angolare

Definiamo la "posizione angolare", cioè semplicemente l'angolo, come un vettore nella direzione $\vec{z}$ di modulo proporzionale all'angolo stesso:

$$\vec{\theta} = (0, 0, \theta) = \theta\hat{z}$$

a questo punto la velocità angolare (misurata in $\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}$, o visto che l'angolo è una grandezza adimensionale (rapporto di due lunghezze (parentesi innestate)), semplicemente s^{-1}) non sarà altro che:

$$\vec{\omega} = \frac{d\theta}{dt} = (0, 0, \dot{\theta}) = \hat{z}\dot{\theta}$$

Velocità tangenziale

Definiamo ora la velocità tangenziale, ovvero quella effettiva del punto materiale lungo la tangente alla circonferenza:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{R}}{dt} = \frac{d}{dt}(R\cos\theta, R\sin\theta, 0) = (-R\dot{\theta}\sin\theta, R\dot{\theta}\cos\theta, 0)$$

$$= R\dot{\theta}(-\sin\theta, \cos\theta, 0) = \dot{\theta}R\hat{\theta} = \omega R\hat{\theta}$$

dove $\dot{\theta}$ è il versore tangente alla traiettoria del punto materiale. Vediamo inoltre rispetto al valore assoluto:

$$|\vec{v}| = \omega R$$

e rispetto alla componente radiale:

$$v_r = \dot{R} = 0$$

ovvero il raggio non cambia (ed era infatti costante da ipotesi).
Riportiamo quindi il vettore finale, in coordinate polari:

$$\vec{v} = (v_r, v_\theta, v_z) = (0, \omega R, 0), \quad \vec{v} \perp \vec{R}$$

dove è inoltre riportato il fatto che la velocità è perpendicolare al vettore posizione sulla circonferenza $\vec{R}$ in qualsiasi punto.
Dimostriamo adesso un fatto importante riguardo alla velocità, conseguenza dell'asse scelto per $\vec{\omega}$, usando il prodotto vettoriale:

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{R}$$

$$= \dot{\theta}\hat{z} \times \vec{R} = \dot{\theta}\hat{z} \times (\hat{x}R\cos\theta + \hat{y}R\sin\theta)$$
$$= \dot{\theta}R(\hat{z} \times \hat{x}\cos\theta + \hat{z} \times \hat{y}\sin\theta) = \dot{\theta}R(\hat{y}\cos\theta - \hat{x}\sin\theta)$$
$$= \omega R\dot{\theta}$$

Accelerazione centripeta
Basandoci proprio su quest'ultima equivalenza, studiamo il valore dell'accelerazione centripeta che mantiene il nostro punto punto materiale sulla circonferenza:

$$\vec{a} = \frac{d(\vec{\omega} \times \vec{R})}{dt} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{R} + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{R}}{dt}$$
$$= \vec{\omega} \times \frac{d\vec{R}}{dt} = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{R})$$

Notiamo come il primo termine della somma ottenuta nella terza equazione si annulli in quanto la derivata della velocità angolare ω, costante, sarà nulla.
Risolviamo quindi l'ultimo termine usufruendo della relazione:

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B}(\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{C}(\vec{A} \cdot \vec{B})$$

ottenendo:

$$\vec{\omega}(\vec{\omega} \cdot \vec{R}) - \vec{R}(\vec{\omega} \cdot \vec{\omega}) = -\omega^2 R\hat{R}$$

$$-\omega = -\frac{v^2}{r^2}, \quad -\omega^2 R\hat{R} = \frac{-v^2 R}{R^2}\hat{R} = -\frac{V^2}{R}\hat{R}$$

notiamo che l'ultima e la terzultima formula, equalmente valide, hanno segno negativo: questo perchè, scelto un riferimento levogiro sulla circonferenza, il versore $\hat{R}$ viene ad orientarsi verso l'esterno della circonferenza, mentre per definizione la forza centripeta è diretta verso il centro della circonferenza.

Periodo e pulsazione

Infine, riprendiamo brevemente le nozioni di periodo e pulsazione applicate al moto circolare uniforme. Diciamo che la velocità angolare ω può essere chiamata anche pulsazione. A questo punto, trovato un periodo T, avremo:

$$VT = |\omega|RT = 2\pi R \Rightarrow T = \frac{2\pi}{|\omega|}$$

ricordando anche la frequenza v, definita come:

$$v = \frac{1}{|T|}$$