1 Lezione del 10-10-24

1.1 Introduzione alla programmazione lineare intera

Iniziamo adesso a studiare un tipo di problemi che finora avevamo menzionato, ma mai risolto. Si pone il seguente:

Problema 1.1: Caricamento

Un ladro è riuscito a scassinare un'importante caveau, e ha di fronte a sé una serie di gemme preziose. Tenendo conto del peso e del tipo delle gemme, ricava una tabella col valore e il peso di ogni gemma:

Valore	2	4	7	9	13	16
Peso	6	8	9	11	15	18

Amesso che il suo zaino non possa portare più di 30 kg, quali gemme dovrà scegliere per avere il maggiore profitto possibile?

Questo problema riprende il celebre *knapsack problem*, che risulta essere NP-completo. Attraverso la **programmazione lineare intera**, possiamo ricavare soluzioni, almeno approssimate.

Si ha che qualsiasi possibilità delle 2^n configurazioni di gemme che il ladro può portare sono rappresentate da un vettore:

$$x = (x_0, ..., x_n), \quad x_i \in \{0, 1\}$$

e che i il valore e il peso delle stesse sono vettori:

$$v = (2, 4, 7, 9, 13, 16)$$

$$p = (6, 8, 9, 11, 15, 18)$$

Possiamo quindi formulare il sistema:

$$\begin{cases} \max\left(2x_1 + 4x_2 + 7x_3 + 9x_4 + 13x_5 + 16x_6\right) \\ 6x_1 + 8x_2 + 9x_3 + 11x_4 + 15x_5 + 18x_6 \leq 30 \\ x \in \{0, 1\}^n \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \max\left(v^T x\right) \\ p^T x \leq P \\ x \in \{0, 1\}^n \end{cases}$$

dove P è il vincolo di massimo dei pesi.

Questo problema ricalca la struttura di un problema LP, ma il vincolo finale, che limita i valori possibili delle componenti del vettore soluzione, lo rende IPL. Decidiamo di trasformare il problema in un LP corrispondente, che chiameremo **rilassamento continuo**, e risolvere quello. Possiamo fare ciò in due modi: il primo prevede di rimuovere semplicemente il vincolo, magari includendo la positività, o ancor meglio l'appartenenza $x \in [0, 1]$:

$$\begin{cases} \max\left(v^T x\right) \\ p^T x \leq P \\ 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Questo metodo è sicuramente funzionante, ma preferiamo calcolare il duale, a partire dal primale con imposta la positività:

$$\begin{cases} \max(2x_1 + 4x_2 + 7x_3 + 9x_4 + 13x_5 + 16x_6) \\ 6x_1 + 8x_2 + 9x_3 + 11x_4 + 15x_5 + 18x_6 \leq 30 \\ -x_1 \leq 0 \\ -x_2 \leq 0 \\ -x_3 \leq 0 \\ -x_4 \leq 0 \\ -x_5 \leq 0 \\ -x_6 \leq 0 \end{cases} \to \begin{cases} \min(30y_1) \\ 6y_1 - y_2 = 2 \\ 8y_1 - y_3 = 4 \\ 9y_1 - y_4 = 7 \\ 11y_1 - y_5 = 9 \\ 15y_1 - y_6 = 13 \\ 18y_1 - y_7 = 16 \\ y_i \geq 0 \end{cases}$$

da cui notiamo che le disequazioni in forma $a_i x + s_i = b_i$ si possono rendere come $a_i x \geq b_i$:

$$\begin{cases} \min(30y_1) \\ 6y_1 \geq 2 \\ 8y_1 \geq 4 \\ 9y_1 \geq 7 \\ 11y_1 \geq 9 \\ 15y_1 \geq 13 \\ 18y_1 \geq 16 \\ y_1 \geq 0 \end{cases} \equiv \begin{cases} \min(30y_1) \\ y_1 \geq \frac{1}{3} \\ y_1 \geq \frac{1}{2} \\ y_1 \geq \frac{7}{9} \\ y_1 \geq \frac{9}{11} \\ y_1 \geq \frac{13}{15} \\ y_1 \geq \frac{8}{9} \\ y_1 \geq 0 \end{cases}$$

Abbiamo che questo sistema è banale: il minimo di $30y_1$ sottoposto ai vincoli si avrà quando y_1 rispetta i vincoli, che sono tutti $\geq$, e rispettare qualsiasi vincolo significa rispettare il vincolo con b_i più grande, quindi in questo caso $\frac{8}{9}$ Si ha quindi che la soluzione ottima del duale è $\frac{8}{9}$, e possiamo trovare con la stessa facilità la soluzione del primale: abbiamo che la disequazione da cui si è ricavato la soluzione del duale ha indice $j = 6$. Si prende quindi la variabile con lo stesso indice nel primale, e si **satura**, cioè si porta al livello più alto possibile prima di violare il limite. Si nota che il valore ottimo trovato nel primale e nel duale (che è uguale dalla dualità forte) è $v = P\bar{y}_j = v_j \bar{x}_j$, con $\bar{x}$ e $\bar{y}$ le soluzioni ottime trovate rispettivamente al primale e al duale.

Nel nostro caso, $18x_6 \leq 30$, quindi $x_6 = \frac{30}{18}$, con valore $v = 16\frac{30}{18} = \frac{80}{3}$.

Questo approccio sarebbe quello che si applicherebbe intuitivamente senza sapere nulla di PL. Infatti i rapporti calcolati nel duale:

$$r_i = \frac{v_i}{p_i}$$

sono effettivamente i **rendimenti** di ogni elemento di peso e valore, cioè quanto valore portano in rapporto al loro peso. Chiaramente, vorremmo massimizzare gli elementi con rendimento maggiore, quindi saturiamo gli elementi con r_i massimo. Possiamo quindi definire il seguente algoritmo:

Algoritmo 1 caricamento per soluzioni ottime del rilassato continuo

Input: il rilassato continuo di un problema di caricamento
Output: la soluzione ottima $\bar{x}$
Considera i $r_i = \frac{v_i}{p_i}$ rendimenti di ogni elemento
Scegli l'indice j del rendimento massimo r_j
Satura la variabile j

Abbiamo che la soluzione trovata è un limite superiore per il problema di partenza, quello ILP: infatti, rilassando i vincoli, otteniamo una regione ammissibile più grande, e quindi aumentiamo il massimo. In verità anche l'arrotondamento in basso della soluzione v è un limite superiore: nel caso del problema abbiamo $\lfloor \frac{80}{3} \rfloor = 26$.

Un'idea banale per trovare il punto ottimo di questo problema ILP potrebbe essere quello di arrotondare il punto ottimo del rilassato continuo: nel nostro esempio, troviamo $\bar{x} = (0, 0, 0, 0, 0, 1)$, che dà massimo $v = 16$.

Notiamo un risultato fondamentale: se chiamiamo il valore arrotondato della soluzione del rilassato continuo v_s, e il valore ottenuto nell'approssimazione del *punto* di ottimo v_i, è vero che:

$$v_i \leq v_{ILP} \leq v_p$$

dove v_{ILP} è la soluzione del problema ILP che stiamo cercando. Per la precisione, possiamo definire l'errore:

$$\varepsilon = \frac{v_s - v_i}{v_i}$$

che sul problema in esame dà $\varepsilon \approx 60\%$, chiaramente poco utile. Sarà necessario adottare un qualche metodo per migliorare la stima data dall'arrotondamento del punto di ottimo del rilassato continuo.

Per adesso, generalizziamo quando trovato finora: bisogna distinguere fra v_i e v_s che si parli di problemi di minimizzazione o di massimizzazione. Si ha infatti che:

Teorema 1.1: Bound di problemi ILP

Per un dato problema ILP con soluzione v_{ILP}, si ha che:

$$v_i \leq v_{PLI} \leq v_s$$

- Se il problema è di **massimizzazione**, v_i è il valore calcolato soluzione ammissibile del rilassato continuo arrotondata **per difetto**, e v_s è la soluzione ottima del rilassato continuo arrotondata **per difetto**;
- Se il problema è di **minimizzazione**, v_i è la soluzione ottima del rilassato continuo arrotondata **per eccesso**, e v_i è il valore calcolato soluzione ammissibile del rilassato continuo arrotondata **per eccesso**;

1.1.1 Vincoli booleani

Possiamo chiamare il vincolo introdotto prima, $x \in \{0, 1\}^n$, **vincolo booleano** (in modo più o meno informale). Come abbiamo detto, questo vincolo può essere reso come $x_i \geq 0$, o ancor meglio $0 \geq x_i \geq 1$ quando si porta al rilassato continuo (abbiamo usato il primo insieme di vincoli per ricavare il duale del rilassato continuo).

Introduciamo quindi l'algoritmo, equivalente a quello presentato prima per :

Algoritmo 2 caricamento per soluzioni ottime del rilassato continuo con vincolo booleano

Input: il rilassato continuo di un problema con vincolo booleano
Output: la soluzione ottima $\bar{x}$
Considera i $r_i = \frac{v_i}{p_i}$ rendimenti di ogni elemento
Scegli l'indice j del rendimento massimo r_j
Satura la variabile j
Quando finisci lo spazio, satura con il bene rimanente (sic.)