1 Lezione del 14-10-24

1.1 Algoritmi dei rendimenti

Riassumiamo i quattro algoritmi presentati finora per le valutazioni inferiori e superiori di problemi di PLI (con vincolo $x \in \mathbb{Z}^n$). Prendiamo in esempio lo "zaino": con $P = 7$. Il

v	10	17	22	21
p	4	5	6	2

vettore dei rendimenti sarà quindi:

$$r = \left(\frac{10}{4}, \frac{17}{5}, \frac{22}{6}, \frac{21}{2} \right) \approx (2.5, 3.4, 3.66, 10.5)$$

- **Problema booleano**

$$\begin{cases} \max(10x_1 + 17x_2 + 22x_3 3 + 21x_4) \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 + 2x_4 \leq 7 \\ x \in \{0, 1\}^n \end{cases}$$

  si hanno gli algoritmi di valutazione:

  - **Valutazione inferiore:** si prendono le variabili con rendimenti migliori, una volta sola, finché non si satura. Nel caso la variabile esca da P, si prende quella dopo, con il caso limite di non prendere nulla. Si ha quindi:

$$x = (0, 1, 0, 1), \quad V_I = 21 + 17 = 38$$

  - **Valutazione superiore:** si prende il rilassato continuo:

$$\begin{cases} \max(v^T x) \\ p^T x \leq \\ 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

    e si riempie con le variabili dai rendimenti migliori, saturando l'ultima:

$$x = \left(0, 0, \frac{5}{6}, 1\right), \quad V_\alpha = 21 + \frac{5}{6} 22 = 39.\overline{3}, \quad V_S = \lfloor V_\alpha \rfloor = \lfloor 39.\overline{3} \rfloor = 39$$

  Si ha quindi $V_I = 38$ e $V_S = 39$, con errore $\epsilon = \frac{39-38}{38} = \frac{1}{38} = 2.6\%$.

- **Problema intero**

$$\begin{cases} \max(10x_1 + 17x_2 + 22x_3 3 + 21x_4) \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 + 2x_4 \leq 7 \\ x \leq 0 \end{cases}$$

  si hanno gli algoritmi di valutazione:

  - **Valutazione inferiore:** si prendono le variabili con rendimenti migliori, con coefficienti maggiori possibili, finché non si satura. Nel caso la variabile esca da P, si prende quella dopo, con il caso limite di non prendere nulla. Si ha quindi:

$$x = (0, 0, 0, 3), \quad V_I = 3 \cdot 21 = 63$$

– **Valutazione superiore:** si prende il rilassato continuo:

$$\begin{cases} \max(v^T x) \\ p^T x \leq \\ 0 \leq 0 \end{cases}$$

e si riempie con le variabili dai rendimenti migliori, saturando dalla prima:

$$x = \left(0, 0, 0, \frac{7}{2}\right), \quad V_\alpha = \frac{7}{2} 22 = 73.5, \quad V_S = \lfloor V_\alpha \rfloor = \lfloor 73.5 \rfloor = 73.5$$

Si ha quindi $V_I = 63$ e $V_S = 73.5$, con errore $\epsilon = \frac{73.5-63}{63} = \frac{1}{6} = 16\%$. Notiamo come sul problema intero si accumuli molto più errore.