1 Lezione del 09-10-24

1.1 Poliedro vuoto

Fino ad ora abbiamo rimandato la trattazione dell'algoritmo per determinare se un poliedro è vuoto. Diamo adesso quest'algoritmo, notando inoltre che, nel caso il poliedro non fosse vuoto, dovrebbe fornirci un possibile vertice di partenza per l'algoritmo del simplesso.

Partiamo da un poliedro in forma duale standard:

$$\begin{cases} Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases}$$

dove m è il numero di variabili e n il numero di vincoli, e quindi $A : m \times n$.

Adottiamo questa forma in quanto siamo sicuri (a differenza della forma primale) che non presenti linealità. Costruiamo quindi quello che viene chiamato **duale ausiliario**, DA:

$$\begin{cases} Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases} \quad \rightarrow \begin{cases} \min \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i \\ Ax + I\varepsilon = b \\ x_i \varepsilon \geq 0 \end{cases}$$

dove ε rappresenta un vettore di variabili ausiliarie di dimensione n, cioè una per ogni equazione. Possiamo rappresentare il sistema ottenuto anche attraverso due matrici a blocchi:

$$(A|I) \begin{pmatrix} x \\ \hline \varepsilon \end{pmatrix}$$

Chiamiamo quindi $v(\text{DA})$ la soluzione del duale ausiliario, e formuliamo il teorema:

Teorema 1.1:

Se $v(\text{DA}) > 0$, allora $D = \emptyset$, altrimenti, se $v(\text{DA}) = 0$, $D \neq \emptyset$. Equivale a dire:

$$v(\text{DA}) = 0 \Leftrightarrow D \neq \emptyset$$

Dobbiamo però capire come risolvere il duale ausiliario, magari senza usare questo teorema, in quanto questo si andrebbe a creare una catena infinita di duali ausiliari da risolvere... Notiamo quindi che il duale ausiliario ha sempre una base plausibile, che è quella data dagli indici delle ultime n variabili, quelle introdotte come ε_i.

Non solo, abbiamo anche che:

Teorema 1.2:

La soluzione ottima di (DA), se $D \neq \emptyset$, ci fornisce un vertice di D stesso.

Notiamo che, visto che il primo teorema chiedeva $v(\text{DA}) = 0$ perché $D \neq \emptyset$, allora si ha che nella soluzione ottima di DA nulla (quella che dimostra la non vuotezza del poliedro), le variabili ε_i sono nulle.

Il procedimento sarà quindi:

1. Prendere il problema duale;
2. Ricavare il duale ausiliario inserendo nei vincoli il vettore di n variabili ausiliarie ε;

3. Risolvere il duale ausiliario attraverso il simplesso duale, prendendo come passo iniziale la base data dagli ultimi n indici, cioè che comprende le variabili ausiliarie appena introdotte;

4. Fare $\geq n$ passi al simplesso, aspettandoci che i primi n passi rimuovano tutte le variabili ausiliarie.

1.2 Ricavare le variazioni dai cambi di base

Abbiamo che svolgere un passo al simplesso (primale o duale) significa effettuare un cambio di base, con base entrante e base uscente. Possiamo calcolare valori definiti, che la soluzione di base sia ammissibile o meno, per la funzione obiettivo del primale e del duale per qualsiasi base.

Potremmo voler calcolare qual'è la variazione di valore di questa funzione dato un certo cambio di base. Ricordiamo quindi di aver introdotto la formula per spostarci lungo i vincoli di un certo λ sul primale:

$$cx(\lambda) = c\bar{x} - \lambda \bar{y}_h$$

e sul duale:

$$by(\lambda) = b\bar{y} + \lambda \left(b_h - A_k \bar{x}\right)$$

Queste due formule stabiliscono un legame fra il valore della funzione obiettivo e quello di determinate soluzioni $\bar{x}$ e $\bar{y}$ sottoposte a perturbazioni nella direzione dei vertici entranti (cioè allentando il vincolo h) di valore λ. Possiamo quindi usarle per calcolare quanto di chiedevamo all'inizio del paragrafo: la variazione del valore delle funzioni obiettivo del primale e del duale dopo il cambio di base, ricordando che il nostro λ sarà il rapporto r_i (in particolare lo avevamo chiamato ϑ) scelto per determinare il vincolo entrante (primale) o uscente (duale):

$$r_p = \frac{b_k - A_k \bar{x}}{A_k W^h}, \quad r_d = \frac{-\bar{y}_h}{A_k W^h}$$

1.3 Casi degeneri

Concludiamo infine la trattazione della PL notando il motivo dell'uso delle regole anticiclo di Bland nel calcolo degli indici uscenti ed entranti nell'algoritmo del simplesso. Prendiamo un problema di esempio:

$$\begin{cases} \max(x_1 + x_2) \\ x_1 \leq 1 \\ x_2 \leq 1 \\ x_1 + x_2 \leq 2 \\ x_i \geq 0 \end{cases}$$

Si ha che il vertice del poliedro $\bar{x} = (1, 1)$ è degenere: possiamo ottenerlo dalle basi $B = \{1, 2\}$, $B = \{1, 3\}$ e $B = \{2, 3\}$. In questo caso tutto funziona perché il vertice è anche ottimo, in caso contrario potremmo, se non si usassero le regole anticiclo di Bland, finire in un ciclo infinito.

Regole alternative a quella di Bland sono la scelta dell'indice sempre maggiore, o degli scarti o rapporti (apparentemente) ottimi, cioè più piccoli:

$$b_k - A_k \bar{x} = \min_{i \in N} \left(b_i - A_i \bar{x}\right)$$

Queste regole, sopratutto l'ultima, potrebbero sembrare equivalenti o migliori di quelle di Bland. Invece è importante ricordare che potrebbero causare cicli.