

1 Lezione del 07-03-25

Proseguiamo i richiami di algebra lineare.

1.0.1 Considerazioni sull'efficienza della moltiplicazione matriciale

sul suo lab

1.0.2 Proprietà della moltiplicazione matriciale

Abbiamo che in genere il prodotto fra matrici non è **commutativo**, cioè:

$$AB \neq BA$$

di contro, vale l'**associativa**:

$$(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$$

e la **distributiva**, separatamente ai due lati:

$$(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$$

$$C \cdot (A + B) = C \cdot A + C \cdot B$$

Inoltre, notiamo che quello delle matrici non è un *dominio integrale*:

$$A \cdot B = 0 \not\Rightarrow A = 0 \vee B = 0$$

Vediamo ad esempio come sfruttare la proprietà associativa può permetterci di ottenere algoritmi più veloci. Supponiamo di voler calcolare:

$$(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$$

con $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$; $B \in \mathbb{C}^{n \times p}$, $C \in \mathbb{C}^{p \times q}$.

L'uguaglianza ci darà due metodi:

- $(A \cdot B) \cdot C$: calcolo me lo sono perso
- $A \cdot (B \cdot C)$:

In generale, quindi, se si hanno matrici con poche righe o poche colonne, è opportuno cercare di mantenere questa proprietà più a lungo possibile nei risultati intermedi.

Un'altra proprietà del prodotto di matrici è che si può vedere il risultato riga per riga o colonna per colonna nei seguenti modi:

$$A = \begin{pmatrix} A_1 \\ \dots \\ A_m \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} B_1 & \dots & B_p \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A \cdot B = \begin{pmatrix} A \cdot B_1 & \dots & A \cdot B_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 B \\ \dots \\ A_m B \end{pmatrix}$$

Questo ci dice che le colonne (delle righe) di $C = A \times B$ sono combinazioni lineari delle colonne (delle righe) di A (di B).

esercizio su distributiva stima costi asintotici

1.0.3 Determinante

Abbiamo visto la definizione di **determinante** per matrici quadrate:

Definizione 1.1: Determinante

Si definisce la funzione:

$$\det(A) : \mathbb{C}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{C}$$

con:

$$\det(A) = \begin{cases} a_{11}, & n = 1 \\ a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}, & n = 2 \\ \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} \det(A_{ij}), & n > 2 \quad (\text{sviluppo di Laplace}) \end{cases}$$

determinante.

Osserviamo che il calcolo del determinante attraverso lo sviluppo di Laplace ha complessità algoritmica $O(n!)$.

1.0.4 Proprietà del determinante

Sappiamo che A invertibile $\Leftrightarrow \det(A) \neq 0$ (cioè A **singolare**). Inoltre valgono:

$$\det(A^T) = \det(A)$$

$$\det(A^H) = \overline{\det(A)}$$

1.0.5 Rango

Vediamo poi come ci può servire il determinante delle **sottomatrici**:

Definizione 1.2: Sottomatrice

Una sottomatrice di A è una matrice ottenuta prendendo la restrizione di A a un sottoinsieme di righe e di colonne, cioè data $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, $I, J \subseteq \{1, \dots, n\}$ con $|I| = n_1$ e $|J| = n_2$, sarà allora:

$$A(I, J) \in \mathbb{C}^{n_1 \times n_2}$$

ottenuta incrociando le righe in I con le colonne in J .

Definiamo quindi i **minori**:

Definizione 1.3: Minore

Si dice minore di ordine k , con $k \in \{1, \dots, n\}$ il determinante di una sottomatrice quadrata $k \times k$.

E le sottomatrici **principali** e **principali di testa**:

Definizione 1.4: Sottomatrice principale

Una sottomatrice si dice principale se gli insiemi I, J usati per estrarla sono $I = J$.

Definizione 1.5: Sottomatrice principale di testa

Una sottomatrice quadrata di ordine k si dice sottomatrice principale di testa se $I = J = \{1, \dots, k\}$.

Allo stesso modo si possono definire **matrici di coda** (basterà prendere indici da k ad n).

Possiamo quindi definire il **rango** di matrice:

Definizione 1.6: Rango

Il rango $\text{rank}(A)$ di una matrice A è definito come il massimo numero di colonne (o di righe) linearmente indipendenti, ed è uguale all'ordine massimo dei minori $\neq 0$ in A .

1.0.6 Proprietà del rango

Caso particolare del rango sarà chiaramente quello dove prendiamo come sottomatrice la matrice stessa: $\det(A) \neq 0 \Leftrightarrow \text{rank}(A) = n$, e quindi gli insiemi delle colonne e delle righe di A sono tutte linearmente indipendenti.

Si ha poi che:

$$\text{rank}(A) = \dim(\text{Im}(A))$$

dove $\text{Im}(A)$ è la dimensione dell'**immagine** di A :

$$\text{Im}(A) = \{y \in \mathbb{C}^m : y = Ax, x \in \mathbb{C}^n\}$$

1.0.7 Teorema di Binet-Cauchy

Concludiamo dimostrando il teorema di Binet-Cauchy sul determinante rispetto al prodotto matriciale.

Teorema 1.1: di Binet-Cauchy

Prese due matrici, $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ e $B \in \mathbb{C}^{n \times n}$, e $C = A \cdot B$ di dimensioni uguali, sarà:

$$\det(C) = \det(A) \cdot \det(B)$$

Nel caso generale avremo $A \in \mathbb{C}^{n \times p}$ e $B \in \mathbb{C}^{p \times n}$, da cui:

$$\det(C) = \begin{cases} 0, & p > n \\ \sum_j A_{[j]} \cdot B_{[j]} & p \leq n \end{cases}$$

dove $A_{[j]}$ e $B_{[j]}$ sono i minori di ordine n relativi alla stessa scelta di indici in A e in B .

1.0.8 Matrice inversa

Diamo la definizione di **matrice inversa**:

Definizione 1.7: Matrice inversa

Data $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ tale che $\det(A) \neq 0$, si definisce $A^{-1} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ tale che:

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$$

Se guardo ad A come una funzione lineare $A : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$, sarà che:

$$A : x \rightarrow Ax, \quad A^{-1} : Ax \rightarrow x$$

questo da:

$$(A^{-1} \circ A) = A^{-1}y = A^{-1}Ax = Ix = x$$

porta questi titoletti come si deve

1.0.9 Proprietà della matrice inversa

Vediamo alcune proprietà di A^{-1} :

1. Ricordiamo di nuovo che A^{-1} esiste se e solo se $\det(A) \neq 0$, cioè equivalentemente se $\text{rank}(A) = n$, o A ha spazi riga e colonna linearmente indipendenti;
2. Vediamo poi il calcolo di $\det(A^{-1})$: da $\det(I) = 1$, e:

$$\det(A \cdot A^{-1}) = \det(A) \cdot \det(A^{-1}), \quad (\text{Binet})$$

$$\implies \det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$$

3. Vediamo poi che:

$$(A \cdot B)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

per matrici quadrate $A, B \in \mathbb{C}^{n \times n}$;

4. Riguardo alle trasposte e alle Hermitiane vale:

$$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T = A^{-T}$$

$$(A^H)^{-1} = (A^{-1})^H = A^{-H}$$

e:

$$(AB)^T = B^T A^T$$

$$(AB)^H = B^H A^H$$

1.0.10 Matrici particolari

Definiamo alcune matrici particolari:

Definizione 1.8: Matrici particolari

Data $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, si dice di A che è:

- **Hermitiana:** $A = A^H$;
- **Antiermitiana:** $A = -A^H$;
- **Unitaria** $A^H A = A A^H = I$, $A^{-1} = A^H$;
- **Normale** $A^H A = A A^H$;
- **Simmetrica** $A = A^T$;
- **Antisimmetrica** $A = -A^T$;
- **Ortagonale** $A^T A = A A^T = I$, $A^T = A^{-1}$

dove notiamo che **simmetrica** e **antisimmetrica** significano *hermitiana* e *antihermitiana* in \mathbb{R} , e **ortogonale** significa *unitaria* in \mathbb{R} .

Per di più vale:

$$\{\text{matrici simmetriche reali}\} \subseteq \{\text{matrici hermitiane}\} \subseteq \{\text{matrici normali}\}$$

e:

$$\{\text{matrici ortogonali}\} \subseteq \{\text{matrici unitarie}\}$$

dove notiamo che unitarie ed ortogonali hanno l'inversa "facile", nel senso che basta trasporre o trovare l'hermitiana.

1.0.11 Matrici di permutazione

Definiamo le **matrici di permutazione**:

Definizione 1.9: Matrice di permutazione

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ si dice matrice di permutazione se A si ottiene dalla matrice di identità permutandone righe e colonne.

1.0.12 Proprietà delle matrici di permutazione

Tutte le matrici di permutazione sono matrici ortogonali (questo si vede dalla loro unimodularità, o osservando che P^T si ottiene dalla permutazione inversa).

Inoltre, vediamo che il prodotto di A con una matrice di permutazione si limita a scambiare righe e colonne in accordo con la permutazione della matrice. In particolare, $A \cdot P$ dà la permutazione delle colonne, mentre $P \cdot A$ dà la permutazione delle righe.

1.0.13 Sistemi lineari

Abbiamo un sistema di m equazioni lineari in n incognite:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Ci è spesso utile riscrivere sistemi di questo tipo in forma matriciale:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{m \times n}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^m$$

Il problema principe sarà quello, date A e b , di trovare x .

1.0.14 Teorema di Rouché-Capelli

Richiamiamo il teorema:

Teorema 1.2: di Rouché-Capelli

$Ax = b$ ammette almeno una soluzione se $\text{rank}(A) = \text{rank}(A|b)$, con $(A|b) \in \mathbb{C}^{m \times (n+1)}$ la matrice ottenuta aumentando A con b .

Per quanto riguarda l'unicità, supposto $m \geq n$ (sistema *sovradeterminato*):

- Se $\text{rank}(A) = n$ allora la soluzione è unica;
- Se $\text{rank}(A) < n$ allora ci sono ∞ soluzioni, e l'insieme delle soluzioni forma uno spazio vettoriale affine di dimensione $n - \text{rank}(A)$;

Nel caso il vettore $b = 0$, il sistema si dice **omogeneo**, e la soluzione nulla esiste sempre.

Abbiamo poi che:

Definizione 1.10:

L'insieme delle soluzioni di $Ax = 0$ si chiama Kernel (nucleo) della matrice:

$$\ker(A) = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = 0\}$$

notiamo che il kernel è un sottospazio vettoriale di dimensione $n - \text{rank}(A)$.

Osserviamo infine che nel caso $m = n$, se $\det(A) \neq 0$, cioè $\text{rank}(A) = n$, da soluzione di $Ax = b$ è unica per ogni $b \in \mathbb{R}^n$ e si scrive:

$$x = A^{-1}b$$

Vedremo che in generale calcolare l'inversa non è conveniente rispetto ad altri metodi di approssimazione.

1.0.15 Regola di Cramer

Il vettore soluzione si può scrivere anche componente per componente come:

$$x_j = \frac{\det(A_j)}{\det(A)}$$

dove A_j è la matrice ottenuta da A sostituendo la colonna j con b .

Questa via costa come calcolare $O(n)$ determinanti di matrici $n \times n$, ed è quindi poco conveniente ($O(n^3)$).