1 Lezione del 12-05-25

Vediamo alcuni esempi sui medi stazionari ad un punto.

1.0.1 Esempio: convergenza locale 1

Prendiamo la funzione:

$$f(x) = x\log(x) - 1$$

Innanzitutto dimostriamo che questa ha un'unica radice nell'intervallo $[0, +\infty)$, e poi studiamo la convergenza locale dei seguenti metodi:

1. L'espressione esplicita di x:
$$\phi_1(x) = \frac{1}{\log(x)}$$
2. L'espressione analoga, ma meno immediata (prendiamo la x da dentro il logaritmo):
$$\log(x) = \frac{1}{x} \implies \phi_2(x) = e^{\frac{1}{x}}$$
3. Ciò che troveremmo applicando la formula usuale:
$$\phi(x) = x - g(x)f(x) \implies \phi_3(x) = \frac{x+1}{\log(x)+1}$$
dove $g(x)$ è:
$$g(x) = \frac{x+1}{(x\log(x)-1)(\log(x)+1)}$$

Vediamo quindi di dimostrare l'unicità della soluzione. Abbiamo che la derivata prima $f'(x)$ è:

$$f'(x) = \log(x) + 1 \implies \begin{cases} f'(x) < 0, & x < \frac{1}{e} \\ f'(x) > 0, & x > \frac{1}{e} \end{cases}$$

e si ha un minimo in $\frac{1}{e}$. Vediamo quindi il limite in 0^+:

$$\lim_{x \to 0} x\ log(x) - 1 = -1$$

Cioè la funzione parte da -1 in $x = 0$, scende fino al minimo $\frac{1}{e}$ e poi sale, incontrando l'asse delle ascisse una volta sola, nel punto α a cui siamo interessati.

Vorremo avere un punto $> \alpha$ per circoscrivere la regione in cui questo si trova. Per semplificare i calcoli, proviamo $x = e$, da cui:

$$f(e) = e\log(e) - 1 = e - 1 > 0$$

da cui individuiamo la regione:

$$\alpha \in \left[\frac{1}{e}, e\right]$$

Verifichiamo quindi le convergenze dei vari metodi proposti.

1. Prendiamo la derivata:
$$\phi_1'(x) = \left(\frac{1}{\log(x)} \right)' = \frac{1}{x} \left(-\frac{1}{\log^2(x)} \right) = -\frac{1}{x \log^2(x)}$$
e valutiamone il modulo in α:
$$|\phi_1'(\alpha)| = \left| \frac{1}{\alpha \log^2(\alpha)} \right| = \left| \frac{1}{\log(\alpha)} \right| = |\alpha| \in \left[\frac{1}{e}, e \right]$$
sfruttando $\alpha \log(\alpha) = 1$.
Abbiamo quindi che α è potenzialmente grande fino a e, quindi non convergente. Per convincercene, prendiamo il punto 1:
$$f(1) = \log(1) - 1 = -1$$
da cui sicuramente, in quanto $f(\alpha)$ sarà $0 > -1$ e quindi $\alpha > 1$:
$$|\phi_1'(\alpha)| > 1$$
e il metodo non converge.

2. Prendiamo la derivata:
$$\phi_2'(x) = \left(e^{\frac{1}{x}} \right)' = -\frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}}$$
e valutiamone il modulo in α:
$$|\phi_2'(\alpha)| = \left| -\frac{\alpha}{\alpha^2} \right| = -\frac{1}{\alpha}$$
sfruttando $\alpha = e^{\frac{1}{\alpha}}$.
Da questo abbiamo che:
$$|\phi_2'(\alpha)| < 1$$
in quanto $\alpha \in [1, e]$, e quindi il metodo converge localmente, in modo lineare ($\phi_2'(\alpha) \neq 0$).

3. Prendiamo la derivata:
$$\phi_3'(x) = \left(\frac{x+1}{\log(x)+1} \right)' = \frac{(\log(x)+1) - (x+1)\frac{1}{x}}{(\log(x)+1)^2} = \frac{\log(x) - \frac{1}{x}}{(\log(x)+1)^2}$$
$$= \frac{x\log(x) - 1}{x(\log(x)+1)^2} = \frac{f(x)}{x(\log(x)+1)^2}$$
da cui si ha $f(x)$ al denominatore, e quindi sicuramente:
$$\phi_3'(\alpha) = 0$$
e si converge con ordine maggiore o uguale al lineare.
Vediamo la derivata seconda per confermare l'ordine di convergenza:
$$\phi_3''(x) = \frac{(\log(x)+1)^3 x - (x\log(x) - 1)\left[(\log(x)+1)^2 + \frac{2(\log(x)+1)}{x} \right]}{x^2(\log(x)+1)^4}$$
che sostituendo α diventa:
$$\phi_3''(\alpha) = \frac{\alpha(\log(\alpha)+1)^3}{\alpha^2(\log(\alpha+1)^4)} = \frac{1}{\alpha(\log(\alpha)+1)} \neq 0$$
cioè l'ordine di convergenza è 2.

1.0.2 Esempio: convergenza locale 2

Prendiamo adesso un esempio dove ci è data la funzione di punto fisso:

$$\phi(x) = 1 + a\log(x) + b\log^2(x), \quad a, b \in \mathbb{R}$$

con punto fisso $\alpha = 1$. Siamo interessati a valutarne l'ordine di convergenza al variare dei parametri a e b, e determinare quando la convergenza è lineare e monotona. Prendiamo quindi la derivata:

$$\phi'(x) = \frac{a}{x} + 2b\frac{\log(x)}{x} \implies \phi'(1) = a$$

e il metodo converge localmente per $a \in (-1, 1)$. In particolare, il metodo converge in modo monotono (localmente) quando $a \in (0, 1)$, e per $a = 0$ converge in modo superlineare.

Valutiamo quindi l'ordine di convergenza per $a = 0$:

$$\phi(x) = 1 + b\log^2(x)$$

da cui le derivate:

$$\phi'(x) = 2b\frac{\log(x)}{x} \implies \phi'(\alpha) = 0$$

$$\phi''(x) = \frac{2b}{x^2} - 2b\frac{\log(x)}{x^2} = 2b\frac{(1 - \log(x))}{x^2} \implies \phi''(1) = 2b$$

cioè per $b \neq 0$ la convergenza è quadratica, e per $b = 0$ la convergenza è in un passo ($x_1 = \alpha = 1$ per ogni x_0).

Nel caso $a = 0$ per studiare la convergenza monotona dobbiamo studiare il segno di $\phi'(x)$ vicino ad $\alpha = 1$.

- $b > 0$: vale $\phi'(x) > 0$ su $(1, 1+\rho)$ con ρ sufficientemente piccolo, quindi si ha convergenza monotona con $x_0 \in (1, 1 + \rho)$.
- $b < 0$: vale $\phi'(x) > 0$ su $(1-\rho, 1)$ con ρ sufficientemente piccolo, quindi si ha convergenza monotona con $x_0 \in (1 - \rho, 1)$.

1.1 Metodo di Newton

Vediamo un particolare metodo stazionario ad un punto, cioè il **metodo di Newton**:

$$\phi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

e quindi il passo iterativo è:

$$\begin{cases} x_0, & \text{dato} \\ x_{n+1} = \phi(x_n) = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \end{cases}$$

L'interpretazione geometrica del metodo di Newton è quella classica, cioè si prende la retta tangente che si stacca da x_i e si chiama x_{i+1} l'intersezione di questa con l'asse delle ascisse. Per questo viene detto anche *metodo delle tangenti*.

Il metodo di Newton è solitamente molto veloce, ma può presentare comporamenti non ottimali nel caso di funzioni particolarmente *"schiacciate"*, cioè con derivata $|f'(x)| << 1$ vicino ad α, fra cui ad esempio le polinomiali x^n con $n >> 1$.

Per valutare questi punti sfavorevoli diamo la definizione di **radice di ordine r**:

Definizione 1.1: Radice di ordine r

Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua e $\alpha : f(\alpha) = 0$. In questo caso α è detta radice (o zero) di ordine $r > 0$ se vale:

$$\lim_{x \to \alpha} \frac{f(x)}{(x-\alpha)^r} = c < +\infty \ (c \neq 0)$$

Quindi, se $f(x) \in C^r([a, b])$, allora α è radice di ordine r se:

$$f(\alpha) = f'(\alpha) = \dots = f^{(r-1)}(\alpha) = 0, \quad f^{(r)}(\alpha) \neq 0$$

In particolare, se $r = 1$, la radice si dice **semplice**.

Riguardo al teorema di Newton, vale quindi il teorema:

Teorema 1.1: Convergenza del metodo di Newton

Se α è radice semplice, e $f \in C^2([a, b])$, allora il metodo converge localmente con ordine $p \geq 2$.

In particolare varrà:

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{|x_{n+1} - \alpha|}{|x_n - \alpha|^2} = \frac{1}{2} \frac{f''(\alpha)}{f'(\alpha)}$$

per cui:

$$\begin{cases} f''(\alpha) = 0 \implies p > 2 \\ f''(\alpha) \neq 0 \implies p = 2 \end{cases}$$

Vediamo di dimostrare il teorema. Inizieremo prendendo la funzione di punto fisso:

$$\phi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} \implies \phi'(x) = 1 - \frac{(f'(x))^2 - f(x)f''(x)}{(f'(x))^2} = \frac{f(x)f''(x)}{(f'(x))^2}$$

che sostituendo α diventa:

$$\phi'(\alpha) = \frac{f(\alpha)f''(\alpha)}{(f'(\alpha))^2} = 0$$

per cui la convergenza è almeno quadratica.

Continuando si ha:

$$\phi''(x) = \frac{(f'(x)f''(x) + f(x)f''(x))(f'(x))^2 - f(x)f''(x)(2f'(x)f''(x))}{(f'(x))^4}$$

che sostituendo α diventa:

$$\phi''(\alpha) = \frac{f'(\alpha)f''(\alpha)\,(f'(\alpha))^2}{(f'(\alpha))^4} = \frac{f''(\alpha)}{f'(\alpha)}$$

da cui:

$$\begin{cases} f''(\alpha) \neq 0 \implies p = 2 \\ f''(\alpha) = 0 \implies p > 2 \end{cases}$$

In particolare, si può prendere:

$$\frac{|x_{n+1}-\alpha|}{|x_n-\alpha|^2} = \frac{|\phi(x_n)-\phi(\alpha)|}{|x_n-\alpha|} = \frac{|\phi'(\alpha)(x_n-\alpha)+\phi''(\varepsilon)(x_n-\alpha)^2|}{|x_n-\alpha|^2}$$

$$= \frac{1}{2}\phi''(\varepsilon) \xrightarrow{n\to+\infty} \frac{1}{2}\phi''(\alpha) = \frac{1}{2}\frac{f''(\alpha)}{f'(\alpha)}$$

con $n \to +\infty$, noto $\varepsilon \in [x_n, \alpha]$, per cui si ha l'ultima tesi del teorema. □

Osserviamo che nel metodo di Newton si può guardare direttamente a $f(x)$ e alle sue derivate in α per studiare la convergenza del metodo. Con i generici metodi di punto fisso dovevamo invece guardare alla funzione di punto fisso $\phi(x)$.

Vediamo quindi il caso delle radici multiple, cioé $f(x)$ in forma:

$$f(x) = g(x)(x-\alpha)^r, \quad g(\alpha) \neq 0$$

Si ha che $r \in \mathbb{N}$, $r > 1$ e:

$$f'(\alpha) = 0$$

e quindi il metodo di newton si ridefinisce come:

$$\phi(x) = \begin{cases} x - \frac{f(x)}{f'(x)}, & x \neq \alpha \\ \alpha, & x = \alpha \end{cases}$$

Ricordiamo che:

$$\phi'(x) = 1 - \frac{(f'(x))^2 - f(x)f''(x)}{(f'(x))^2} = \frac{f(x)f''(x)}{(f'(x))^2}$$

dove $f'(x)$ compare al denominatore, quindi non si puà valutare in α.

Prendiamo allora le derivate successive di $f(x)$:

$$f(x) = g(x)(x-\alpha)^r$$

$$f'(x) = g'(x)(x-\alpha)^r + rg(x)(x-\alpha)^{r-1}$$

$$f''(x) = g''(x)(x-\alpha)^r + rg'(x)(x-\alpha)^{r-1} + rg'(x)(x-\alpha)^{r-1} + r(r-1)g(x)(x-\alpha)^{r-1}$$

e sostituiamo in $\phi'(x)$:

$$\phi'(x) = 1 - \frac{(g'(x)(x-\alpha)+g(x))(rg(x)+g'(x)(x-\alpha)) - g(x)(x-\alpha)(rg'(x)+g''(x)(x-\alpha)+g'(x))}{(rg(x)+g'(x)(x-\alpha))^2}$$

da cui:

$$\phi'(\alpha) = 1 - \frac{rg(\alpha)^2}{r^2 g(\alpha)^2} = 1 - \frac{1}{r} \neq 0$$

quando $r > 1$, perciò:

$$|\phi'(\alpha)| = 1 - \frac{1}{r} < 1$$

e la convergenza è lineare, dove più è alto r più è lenta la convergenza.

Una proprietà è che se si conoosce r (l'ordine della radice) si può modificare Newton per ritrovare la convergenza quadratica. In particolare si può dimostrare che:

$$x_{n+1} = x_n - r \cdot \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = \phi(x_n)$$

è tale per cui $\phi'(\alpha) = 0$.