1 Lezione del 31-03-25

Riprendiamo la trattazione dei metodi iterativi per i sistemi lineari.

1.0.1 Valutazione della convergenza

Avevamo visto che affinché un metodo di punto fisso sia convergente è necessario che la sua matrice di iterazione H in:

$$x = Hx + c$$

sia convergente, cioè abbia norma spettrale $\rho(H) < 1$.

Vediamo un esempio di valutazione di tale matrice sia per il metodo di Jacobi e di Gauss-Siedel applicato ad una certa matrice A, svolgendo esplicitamente tutti i calcoli:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{3} & \frac{4}{9} \\ \frac{2}{3} & 1 & \frac{2}{3} \\ \frac{4}{9} & \frac{2}{3} & 1 \end{pmatrix}$$

- **Jacobi:** avremo la matrice di convergenza:

  $$x = \underbrace{D^{-1}(E+F)}_{H_J} x + D^{-1}b$$

  da cui:

  $$H_J = D^{-1}(E+F) = I \cdot \begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{3} & \frac{4}{9} \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ \frac{4}{9} & \frac{2}{3} & 0 \end{pmatrix}$$

  Calcoliamo quindi gli autovalori attraverso il polinomio caratteristico:

  $$p(\lambda) = \det\left(\lambda I - D^{-1}(E+F)\right) = \det \begin{pmatrix} \lambda & \frac{2}{3} & \frac{4}{9} \\ \frac{2}{3} & \lambda & \frac{2}{3} \\ \frac{4}{9} & \frac{2}{3} & \lambda \end{pmatrix} = \lambda^3 + \frac{16}{81} \cdot 2 - \frac{16}{81}\lambda - 2 \cdot \frac{4}{9}\lambda$$

  per la regola di Sarrus, quindi:

  $$p(\lambda) = \lambda^3 - \frac{88}{81}\lambda + \frac{32}{81}$$

  Accorgiamoci che $\lambda_1 = \frac{4}{9}$ è radice del polinomio, e quindi dividiamo:

  $$\frac{\lambda^3 - \frac{88}{81}\lambda + \frac{32}{81}}{\lambda - \frac{4}{9}} = \lambda^2 + \frac{4}{9}\lambda - \frac{8}{9}$$

  per cui:

  $$p(\lambda) = \left(\lambda - \frac{4}{9}\right)\left(\lambda^2 + \frac{4}{9}\lambda - \frac{8}{9}\right)$$

  Risolviamo quindi la quadratica:

  $$\lambda_{2,3} = \frac{-\frac{4}{9} \pm \sqrt{\frac{16}{81} + \frac{32}{9}}}{2} = -\frac{2}{9}\left(1 \mp \sqrt{19}\right)$$

  Delle 3 radici trovate si ha che $\lambda_3 = -\frac{2}{9}\left(1 + \sqrt{19}\right) \approx -1.19087$ è in modulo ≥ 0, ergo la condizione di convergenza non è rispettata, e il metodo di Jacobi potrebbe non convergere.

- **Gauss-Seidel:** avremo la matrice di convergenza:

$$x = \underbrace{(D-E)^{-1}F}_{H_{GS}}\, x + (D-E)^{-1}b$$

da cui:

$$H_{GS} = (D-E)^{-1}F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & 1 & 0 \\ \frac{4}{9} & \frac{2}{3} & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & -\frac{2}{3} & -\frac{4}{9} \\ 0 & 0 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

che sfruttando quanto avevamo detto sui prodotti per inverse:

$$= \begin{pmatrix} (D-E)^{-1}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} & (D-E)^{-1}\begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} & (D-E)^{-1}\begin{pmatrix} -\frac{4}{9} \\ -\frac{2}{3} \\ 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

cioè dobbiamo risolvere 3 sistemi lineari (di cui uno banale) usando il metodo di sostituzione all'indietro. Avremo quindi:

  - Il sistema:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & 1 & 0 \\ \frac{4}{9} & \frac{2}{3} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

    che dà:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ \frac{4}{9} \\ 0 \end{pmatrix}$$

  - Il sistema:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & 1 & 0 \\ \frac{4}{9} & \frac{2}{3} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{4}{9} \\ -\frac{2}{3} \\ 0 \end{pmatrix}$$

    che dà:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{4}{9} \\ -\frac{10}{27} \\ \frac{4}{9} \end{pmatrix}$$

da cui:

$$H_{GS} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & -\frac{4}{9} & -\frac{4}{9} \\ 0 & \frac{4}{9} & -\frac{10}{27} \\ 0 & 0 & \frac{4}{9} \end{pmatrix}$$

da cui $\lambda_1 = -\frac{2}{3}$ e $\lambda_2 = \frac{4}{9}$ con molteplicità $\mu_2 = 2$, quindi tutti gli autovalori a modulo < 1 e la condizione è rispettata.

1.0.2 Criteri di convergenza di matrici di iterazione

Cerchiamo un modo più generale per fare ciò che abbiamo fatto nell'ultimo esempio. Vediamo che vale il seguente teorema:

Teorema 1.1: Criteri di convergenza di matrici di iterazione

Se $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ rispetta una delle seguenti condizioni:

1. A è ha predominanza diagonale forte;
2. A è irriducibile e a predominanza diagonale debole;

allora sia il metodo di Jacobi che il metodo di Gauss-Seidel danno iterazioni convergenti applicati ad un sistema $Ax = b$.

1. La dimostrazione del teorema comincia dall'imporre che $a_{ii} \neq 0$, $\forall i = 1, ..., n$. Avevamo visto che questa condizione può essere forzata scambiando A con una qualche permutazione ΠA.

   Abbiamo allora che la condizione è ovvia nel caso di predominanza diagonale forte (1), mentre nel caso di matrice irriducibile a predominanza diagonale debole (2), se esistesse un $a_{ii} = 0$ per qualche i allora applicando la predominanza diagonale debole si avrebbe $a_{ij} = 0$ $(0 \geq \sum_{i \neq j}^{n} a_{ij})$, che sarebbe assurdo (la matrice non può essere singolare). Notiamo che in questo caso nemmeno una matrice di permutazione Π potrebbe portarci a diagonale non negativa.

2. Dimostriamo la convergenza per i due metodi:

   - **Jacobi:** si ha che:

   $$H_J = D^{-1}(E + F) = \begin{pmatrix} 0 & ... & -\frac{a_{ij}}{a_{ii}} \\ ... & 0 & ... \\ -\frac{a_{ij}}{a_{ii}} & ... & 0 \end{pmatrix}$$

   e allora la norma a infinito di H_J sarà:

   $$|H_J|_\infty = \max_{i=1,...,n} \sum_{i \neq j}^{n} \left| \frac{a_{ij}}{a_{ii}} \right|$$

   Se A è a predominanza diagonale forte (1), allora $|a_{ii}| > \sum_{j \neq i}^{n} |a_{ij}|$, e quindi $|H_J|_\infty < 1$ e $\rho(H_j) < 1$.
   Se A è invece irriducibile a predominanza diagonale debole (2), sarà che nuovamente $|H_J|_\infty \leq 1$, quindi gli autovalori di A sono $|\lambda| \leq 1$, ma non esiste $|\lambda| = 1$ in quanto starebbe sul bordo di un cerchio di Gershgorin, quindi di tutti, ma esiste almeno un cerchio $\mathcal{F}_i(A)$ con raggio $r < 1$.

   - **Gauss-Seidel:** supponiamo che esista λ^* autovalore di H_{GS}:

   $$H_{GS} = (D - E)^{-1} F$$

   tale che $|\lambda^*| \geq 1$. Allora dovrà valere:

   $$0 = \det(\lambda^* I - H_{GS}) = \det\left(\lambda^* I - (D - E)^{-1} F\right) = \det\left((D - E)^{-1} (\lambda(D - E) - F)\right)$$

   che per Binet-Cauchy dà:

   $$0 = \det\left((D - E)^{-1}\right) \cdot \det\left(\lambda^*(D - E) - F\right)$$

Il primo termine è chiaramente $\neq 0$, e quindi si considera:

$$0 = \det\left(\lambda^*(D-E) - F\right) = (\lambda^*)^n \det\left(D - E - (\lambda^*)^{-1}F\right)$$

cioè:

$$0 = \det\left(D - E - (\lambda^*)^{-1}F\right)$$

La matrice che troviamo è quella dove gli elementi sopra la diagonale hanno modulo $\leq$ ai corrispondenti nella matrice A. Se A è dominante diagonale forte o dominante diagonale debole, quindi, conserva tale proprietà, e conserva anche l'irriducibilità. Quindi, necessariamente, è non singolare (altrimenti anche A sarebbe singolare), e l'ipotesi $|\lambda^*| \geq 1$ è assurda, cioè $|\lambda^*| < 1$.

□

1.1 Sistemi rettangolari

Vediamo quindi come risolvere sistemi **rettangolari**, cioè del tipo $Ax = b$ con $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$ rettangolare. In questo caso si avranno m equazioni in n incognite, quindi con $x \in \mathbb{C}^n$ e $b \in \mathbb{C}^m$. Supponiamo poi che A sia di rango massimo, ovvero $\operatorname{rank}(A) = \min(m, n)$.

Scopriamo che anche in questo scenario si può applicare l'eliminazione di Gauss, e nel caso $m < n$, si può immaginare di rendere il sistema quadrato aggiungendo $n - m$ equazioni fittizie della forma $0 = 0$, lasciando $n - m$ parametri liberi:

$$\begin{pmatrix} 1 & ... & ... & ... \\ 0 & 1 & ... & ... \\ 0 & ... & 1 & ... \\ 0 & ... & ... & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & ... & ... & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \\ x_{m+1} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Diciamo che questo tipo di sistemi si dicono **sottodeterminati**.

Caso più interessante sarà quello dei sistemi **sovradeterminati**, cioè dove $n < m$ e si hanno più equazioni che incognite. In questo caso l'applicazione dell'eliminazione di Gauss porta ad n equazioni determinate, e $m - n$ equazioni della forma $0 = ?$ dove $?$ sono i termini noti che si formano nelle ultime $m - n$ righe:

$$\begin{pmatrix} 1 & ... & ... \\ 0 & 1 & ... \\ 0 & ... & 1 \\ 0 & ... & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & ... & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \\ b_{n+1} = ?_1 \\ \vdots \\ b_m = ?_{m-n+1} \end{pmatrix}$$

Se esiste almeno un termine noto $? \neq 0$, allora il sistema è impossibile (ed è questo il caso tipico). Questa affermazione è essenzialmente il teorema di Rouchè-Capelli, dove si impone:

$$\operatorname{rank}(A|b) = \operatorname{rank}(A)$$

Il problema che ci poniamo in questi casi è quello di minimizzare il residuo, cioè posto:

$$x - Ab = r(x)$$

cercare di risolvere il problema di ottimizzazione:

$$r^* = \min_{x \in \mathbb{C}^n} |b - Ax|_2 = \min_{x \in \mathbb{C}^n} |r(x)|_2$$

Questo tipo di problema viene detto **problema dei minimi quadrati**. Osserviamo che il problema è equivalente a risolvere:

$$(r^*)^2 = \min_{x \in \mathbb{C}^n} |b - Ax|_2^2 = \min_{x \in \mathbb{C}^n} |r(x)|_2^2$$

Cioè ci possiamo liberare della radice della norma quadratica.

Potremo innanzitutto chiederci come trovare il punto x^* che dà r^*, o in principio se questo problema ammette soluzione. Facciamo allora un esempio del caso $x \in \mathbb{R}^n$ Considereremo la funzione:

$$\psi(x) = |b - Ax|_2^2 = (b - Ax)^T (b - Ax) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

questa funzione è convessa, e quindi il punto x^* è quello che soddisfa $\nabla \psi(x) = 0$ (gradiente nullo). Vediamo allora le derivate parziali, osservando che:

$$|b - Ax|_2^2 = |r(x)|_2^2 = \sum_{i=1}^{m} r_i(x)^2$$

e:

$$r_i(x)^2 = \left(b_i - \sum_{j}^{n} a_{ij} x_j \right)^2$$

Calcoliamo quindi la derivata parziale vera e propria rispetto alla s-esima componente:

$$\frac{\partial}{\partial x_s} \left(r_i(x)^2 \right) = 2 \left(b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \right) (-a_{is})$$

da cui:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_s} (\psi(x)) &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_s} \left(r_i(x)^2 \right) = 2 \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{is} a_{ij} x_j - a_{is} b_i \right) \\ = 2 \left(\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{is} a_{ij} x_j - \sum_{i=1}^{n} a_{is} b_i \right) &= 2 \left(\sum_{i=1}^{m} a_{is} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j - \sum_{i=1}^{m} a_{is} b_i \right) \\ &= 2 \left(\left(A^T A x \right)_s - \left(A^T b \right)_s \right) = 2 \left(A^T A x - A^T b \right)_s \end{aligned}$$

dove l's al pedice indica che si prende la s-esima riga.

Si ha quindi che:

$$\nabla \psi(x) = 0 \Leftrightarrow A^T A x - A^T b = 0 \Leftrightarrow A^T A x = A^T b$$

e quindi il sistema da risolvere per i punti di minimo di $\psi(x)$, cioè le soluzioni del problema dei minimi quadrati, è:

$$A^T A x = A^T b$$

detto **sistema delle equazioni normali**.