# 1 Lezione del 03-03-25

## 1.1 Riassunto sulla stima dell'errore

Riassumiamo quindi le regole viste per la stima dell'errore su funzioni razionali. Avevamo dato la definizione di errore **assoluto** $\sigma_f$ e errore **relativo** $\epsilon_f$, entrambi composti da due fattori denominati errore **algoritmico** e errore **inerente**, con pedici rispettivamente $a$ e $d$.

- Riguardo all'errore **inerente assoluto** avevamo preso su un dominio $D$ la stime:

$$|\sigma_d| \leq \sum_{j=1}^{m} A_j \cdot |\sigma_j|$$

con $|\sigma^j|$ **errore di arrotondamento** e $A_j$ **coefficiente di amplificazione**:

$$A_j = \max_{P \in D} \left( \frac{\partial f}{\partial x_j}(P) \right)$$

Per l'errore di arrotondamento avevamo visto potevamo prendere:

$$|\sigma_j| \leq U \cdot |x_j|$$

con $U$ precisione macchina.

- Riguardo all'**errore inerente relativo** avevamo invece preso:

$$|\epsilon_d| \leq \sum_{j=1}^{m} \overline{A}_j \cdot |\epsilon_j|$$

con $|\epsilon_j|$ **errore di arrotondamento relativo** e $\overline{\sigma_j}$ **coefficiente di amplificazione relativo**:

$$\overline{A_j} = \max_{P \in D} \left( \frac{x_j \cdot \frac{\partial f}{\partial x_j}(P)}{f(P)} \right)$$

Per l'errore di arrotondamento relativo potevamo quindi prendere:

$$|\epsilon_j| \leq U$$

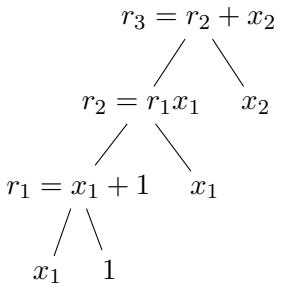
Vediamo come ultimo esempio il calcolo dell'errore relativo $|\epsilon_f|$ per la funzione:

$$f(x_1, x_2) = (x_1 + 1)x_1 + x_2$$

- Iniziamo con il calcolo dell'errore inerente, senza fare assunzioni su $\epsilon_{x_i}$:

$$|\epsilon_d| \leq \frac{x_1 \cdot \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2)}{f(x_1, x_2)} \epsilon_{x_1} + \frac{x_2 \cdot \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2)}{f(x_1, x_2)} \epsilon_{x_2} = \frac{x_1(2x_1 + 1)}{(x_1 + 1)x_1 + x_2} \epsilon_{x_1} + \frac{x_2}{(x_1 + 1)x_1 + x_2} \epsilon_{x_1}$$

- Calcoliamo poi l'errore algoritmico dell'algoritmo:




da cui:

$$|\epsilon_a| \leq \epsilon_3 + \frac{(x_1+1)x_1}{(x_1+1)x_1+x_2}\epsilon_{r_2} + \frac{x_2}{(x_1+1)x_1+x_2}\epsilon_{x_2} = \epsilon_3 + \frac{(x_1+1)x_1}{(x_1+1)x_1+x_2}(\epsilon_2+\epsilon_{r_1}+\epsilon_{x_1})$$

$$= \epsilon_3 + \frac{(x_1+1)x_1}{(x_1+1)x_1+x_2}(\epsilon_2+\epsilon_1+\frac{x_1}{x_1+1}\epsilon_{x_1}+\frac{1}{x_1+1}\cdot 0) = \epsilon_3 + \frac{(x_1+1)x_1}{(x_1+1)x_1+x_2}(\epsilon_2+\epsilon_1)$$

Abbiamo quindi l'errore complessivo:

$$|\epsilon_f| \leq |\epsilon_a| + |\epsilon_d| = \epsilon_3 + \frac{(x_1+1)x_1}{(x_1+1)x_1+x_2}(\epsilon_2+\epsilon_1) + \frac{x_1(2x_1+1)}{(x_1+1)x_1+x_2}\epsilon_{x_1} + \frac{x_2}{(x_1+1)x_1+x_2}\epsilon_{x_1}$$

## 1.2 Errori di funzioni non razionali

Abbiamo finora trascurato il caso di funzioni non razionali. Prendiamo ad esempio di voler calcolare l'errore su funzioni come $e^{\cos(x+y)}$. In questo caso sarà necessario usare un approssimazione razionale di $f$ che chiamiamo $\overline{f}$, che poi porteremo a $\overline{f}_a$ che usa operazioni macchina detta **algoritmo**. In questo caso l'errore sarà dato dall'*errore inerente*, dall'*errore algortimico* e dall'**errore analitico** $\sigma_{an}$ della funzione, cioè potremo dire:

$$\overline{f}_a(P_1) - f(P_0) = \overline{f}_a(P_1) - \overline{f}(P_1) + \overline{f}(P_1) - f(P_1) + f(P_1) - f(P_0) = \sigma_a + \sigma_{an} + \sigma_d$$

L'errore inerente sarà calcolato sulla $f$ originale, mentre l'errore analitico sarà calcolato con la nuova $\overline{f}$, e in particolare dipenderà dall'approssimazione razionale che usiamo.

Vediamo per adesso approssimazioni polinomiali attraverso la **formula di Taylor**. Nel caso scalare si ha:

**Teorema 1.1: Formula di Taylor**

Data $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f \in C^1$, allora dato $x_0 \in \mathbb{R}$ si ha:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{k} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \cdot (x-x_0)^n + \frac{f^{(k+1)}(\eta)}{(k+1)!}(x-x_0)^{k+1}$$

Dove:

$$\epsilon_l = \frac{f^{(k+1)}(\eta)}{(k+1)!}(x-x_0)^{k+1}$$

rappresenta l'**errore di Lagrange** al $k$-esimo grado, con $\eta \in [x_0, x]$ il punto di massimo della $k+1$-esima derivata di $f$.

In questo caso:

$$\overline{f}(x) = \sum_{n=0}^{k} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \cdot (x - x_0)^n$$

cioè la serie di Taylor troncata al $k$-esimo grado sarà una buona approssimazione per $f$, e l'errore analitico sarà dato da:

$$\sigma_{an} = R(x) = f(x) - T(x, k, x_0)$$

con $R(x)$ il resto fra lo sviluppo di Taylor troncato $T(x, k)$ e la funzione stessa $f(x)$. In questo caso fissato $k$ si potrà dare una stima di errore direttamente dall'errore di Lagrange, cioè:

$$R(x) = f(x) - T(x, k, x_0) = \frac{f^{(k+1)}(\eta)}{(k+1)!}(x - x_0)^{k+1}$$

e più in particolare, sfruttando il limite superiore dato da:

$$R(x) \leq \epsilon_l = \frac{\max_{[x_0,x]}\left(f^{(k+1)}\right)}{(k+1)!}(x - x_0)^{k+1} = \frac{M}{(k+1)!}(x - x_0)^{k+1}$$

### 1.2.1 Approssimazione dell'esponenziale

Prendiamo di volere calcolare l'errore dato dall'approssimazione dell'esponenziale al $k$-esimo grado su un intervallo comprensivo di $x_0 = 0$, che chiamiamo $D = [-l, u]$. Avremo quindi l'approssimazione:

$$e^x = T(x, k, 0) = \sum_{n=0}^{k} \frac{(x - x_0)^n}{n!}$$

e la funzione resto:

$$R(x) = e^x - T(x, k, 0) = \frac{f^{(k+1)}(\eta)}{(k+1)!}x^{k+1}$$

prendiamo quindi la stima superiore di $f^{(k+1)}(\eta)$ su $\eta \in D$ (il caso peggiore sarà quello in cui valutiamo $x$ sull'estremo superiore $u$):

$$f^{(k+1)}(\eta) \leq \max_{\eta \in [0,u]} f^{(k+1)}(\eta) = e^u$$

da cui:

$$R(x) \leq \frac{e^u x^{k+1}}{(k+1)!}$$

Stimiamo allora l'errore analitico relativo come:

$$|\epsilon_{an}| = \frac{R(x)}{f(x)} \leq \frac{\max_{[-l,u]}\left|\frac{e^u x^{k+1}}{(k+1)!}\right|}{\min_{[-l,u]} e^x} = \frac{e^{u-l}u^{k+1}}{(k+1)!}$$

### 1.2.2 Note sull'implementazione dell'esponenziale

Vediamo alcuni dettagli sull'implementazione pratica di un'approssimazione dell'esponenziale nel linguaggio MATLAB/Octave. Il primo modo che potrebbe venire in mente prevede di mantenere un numeratore e un denominatore:

```
function val = myexp1(x, n)
    num = 1;
    den = 1;

    val = 1;

    for i = 1:n
      num = num * x;
      den = den * i;

      val = val + num / den;
    end
end
```

Notiamo però che questo approccio presenta notevole instabilità numerica con grandi valori di $k$, ad esempio si veda:

```
>> myexp(20, 500)
ans =
   NaN
```

Questo deriva dal fatto che per grandi valori di $k$ si ottiene eventualmente `num = Inf` e `den = Inf`, da cui il `NaN`. Un'approccio migliore si ha quindi mantenendo direttamente il termine e accumulandolo:

```
function acc = myexp2(x, n)
    term = 1;
    acc = 1;

    for i = 1:n
        term = term * x / i;
        acc = acc + term;
    end
end
```

Notiamo però che in questo caso si hanno problemi di cancellazione per argomenti negativi, ad esempio si veda:

```
>> myexp(-30, 500)
ans =
  -3.0668e-05
```

In questo caso si ha più accuratezza imponendo argomenti positivi, ad esempio sfruttando:

$$e^{-x} = \frac{1}{e^x}$$

Si veda ad esempio:

```
>> 1/myexp(30, 500)
ans =
   9.3576e-14
```

Modifichiamo quindi la funzione per rilevare automaticamente esponenti negativi e adottare la forma corretta:

```
function acc = myexp3(x, n)
    neg = false;
    if x < 0
        neg = true;
        x = -x;
    end

    term = 1;
    acc = 1;

    for i = 1:n
        term = term * x / i;
        acc = acc + term;
    end

    if neg
        acc = 1 / acc;
    end
end
```

Provando questa funzione su un range di interi da $-30$ a $30$, con la serie di Taylor troncata a $500$, dà un errore massimo rispetto al valore reale di circa $10^{-16} \sim 10^{-17}$.

## 1.3 Richiami di algebra lineare

Nella maggior parte dei casi che ci interessano vorremo trattare non di scalari, ma di quantità vettoriali, ad esempio $x \in \mathbb{C}^n$, con $n > 1$.

### 1.3.1 Matrici complesse

Ci saranno utili le matrici perchè rappresentano direttamente tutte le **funzioni lineari**. Ad esempio, posta $f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$ tale che:

- $f(x + y) = f(x) + f(y)$ (addittività);
- $f(\lambda x) = \lambda f(x)$ (omogeneità)

detta *funzione lineare* allora $\exists! A \in \mathbb{C}^{m \times n}$ tale che $f(x) = Ax$, $\forall x \in \mathbb{C}^n$.

Nel corso useremo sia matrici in $\mathbb{R}$ che matrici in $\mathbb{C}$, dove l'appartenenza a ciascuno di questi campi dipende dalla appartenenza di essi delle **entrate** $A_{ij}$ della matrice. In ogni caso, una matrice reale non sarà che un caso particolare delle matrici complesse.

Si danno poi per scontate le definizioni di matrici:

- *Quadrate* ($n = m$):
- *Rettangolari* ($n \neq m$);
- *Diagonali* (elementi nulli fuori dalla diagonale);
- *Triangolari superiori/inferiori* (elementi nulli sotto/sopra la diagonale)

### 1.3.2 Indipendenza lineare

Diamo la definizione di indipendenza linare:

**Definizione 1.1:**

Un insieme di vettori $\{x_1, ..., x_s\}$ si dice linearemente indipendente se:

$$x_1 + ... + x_s = 0 \leftrightarrow x_1, ..., x_s = 0$$

Possiamo sfruttare l'indipendenza lineare per definire **basi**:

**Definizione 1.2: Base**

Se $s = n$ l'insieme $\{x_1, ..., x_s\}$ si dice **base** di $\mathbb{C}^n$.

Questo significa che $\forall y \in \mathbb{C}^m$, $\exists!\{c1, ..., c_s\}$ tali che $y = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$, cioè combinazioni lineari dei vettori di base individuano qualsiasi vettore nello spazio $\mathbb{C}^n$.

### 1.3.3 Prodotto scalare

Diamo la definizione di prodotto scalare, generalizzato al campo complesso dal **prodotto hermitiano** (entrambi *prodotti interni*):

**Definizione 1.3: Prodotto interno**

Definiamo il prodotto interno fra due vettori $x, y \in \mathbb{C}^n$ come:

$$< x, y >= \sum_{j=1}^{n} x_j \overline{y_j}$$

dove $\overline{y_j}$ rappresenta il **coniugato** di $y_j$, che chiaramente in $\mathbb{R}$ si riduce a $y_j$ stesso e quindi:

$$< x, y >= \sum_{j=1}^{n} x_j y_j, \quad x, y \in \mathbb{R}^n$$

## 1.4 Trasposta coniugata

Definiamo infine la **trasposta coniugata** di una certa matrice, generalizzata al campo complesso dalla **matrice hermitiana**:

**Definizione 1.4: Trasposta coniugata**

Data una matrice $A \in \mathbb{C}^{n \times m}$, la trasposta coniugata $A^T$ sarà:

$$(A^T)_{ij} = A_{ji}$$

e la matrice hermitiana $A^H$ sarà:

$$(A^H)_{ij} = \overline{A_{ji}}$$

### 1.4.1 Operazioni matriciali

Date due matrici $A$ e $B$ con lo stesso numero di righe e colonne si possono definire le operazioni:

- **Somma:** $A, B, C \in \mathbb{C}^{m \times n}$, $A + B = C$, $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$;
- **Prodotto:** $A \in \mathbb{C}^{m \times n}, B \in \mathbb{C}^{n \times p}, C \in \mathbb{C}^{m \times p}$, $A \cdot B = C$, $c_{ij} = \sum_{h=1}^{n} a_{ih} b_{hj}$ sia in reali che in complessi.

### 1.4.2 Considerazioni computazionali sulle operazioni vettoriali

Dal punto di vista computazionale, è immediato che il prodotto scalare ha complessità $O(n)$, la somma matriciale ha complessità $O(m \cdot n)$.

Per la moltiplicazione matriciale, poste:

$$A \in \mathbb{C}^{m \times n}, \quad B \in \mathbb{C}^{n \times p} \implies A \cdot B = C \in \mathbb{C}^{m \times p}$$

si ha che la complessità è $O(m \cdot n \cdot p)$.

L'ultimo risultato dipende dal fatto che la moltiplicazione richiede di effetuarre effettivamente $m \cdot p$ prodotti scalari, e $n$ è la lunghezza di uno di questi prodotti scalari, cio il numero di colonne di $A$ o di righe di $B$ (che sappiamo essere uguali perché la moltplicazione sia possibile in primo luogo).

Questo significa che per matrici quadrate si ha generalmente complessità $O(n^3)$ (anche se esistono algoritmi che si avvicinano al bound inferiore di $O(n^2)$).