1 Lezione del 02-05-25

Avevamo dato la definizione del teorema di Peano (teorema 16.2), per l'errore della generica formula di quadratura J_n. Per ora quest'espressione ci risulta poco maneggevole in quanto richiede il calcolo dell'errore $G(t)$ sulla funzione $s_m(t)$, detto *nucleo di Peano* (definizione 16.5).

Riprendiamo quindi la definizione dell'errore dal teorema di Peano:

$$E_n(f) = \frac{1}{m!} \int_a^b f^{(m+1)}(t) \cdot G(t) \, dt$$

e accorgiamoci che se $G(t)$ non cambia segno in $[a, b]$ possiamo sfruttare il teorema della media integrale per dire che esiste un certo punto $\varepsilon \in [a, b]$ tale che:

$$E_n(f) = \frac{1}{m!} f^{(m+1)}(\varepsilon) \int_a^b G(t) \, dt$$

Cerchiamo adesso di trovare una forma più maneggevole per l'integrale del nucleo di Peano $G(t)$. Abbiamo che questa non dipende da f, e se valutiamo l'errore per $f(x) = x^{m+1}$ si ottiene:

$$E_n(x^{m+1}) = \frac{1}{m!} \int_a^b \frac{d^{m+1}}{dt^{m+1}} t^{m+1} G(t) \, dt = \frac{1}{m!}(m+1)! \int_a^b G(t) \, dt \implies \int_a^b G(t) \, dt = \frac{E_n(x^{m+1})}{m+1}$$

Prendiamo quindi questo come un **corollario** del teorema di Peano.

Osserviamo allora che se si vuole trovare una disuguaglianza del tipo:

$$|E_n(f)| \leq M$$

si può prendere:

$$M = \max_{x \in [a,b]} \left| f^{(m+1)}(x) \right| \cdot \frac{E_n(x^{m+1})}{m+1}$$

dove il primo termine può essere stimato con studi di funzione o maggiorazioni esplicite, mentre il secondo termine si può calcolare esplicitamente (lo facevamo per valutare manualmente il grado di una formula di integrazione).

1.0.1 Esempio: errore di Peano nella formula dei trapezi

Vediamo quindi cosa si ottiene quando $n = m = 1$, cioè nel caso della formula dei trapezi. In questo caso il nucleo è calcolato su $s_1(t)$:

$$s_1(x - t) = \begin{cases} 0, & x < t \\ x - t, & x \geq t \end{cases}$$

e quindi sarà:

$$G(t) = E_n(s_m(x - t)) = \int_a^b s_1(x - t) \, dx - J_1(s_1(x - t))$$

Prendiamo l'intervallo $[a, b] = [-1, 1]$ e svolgiamo i conti. Si ha:

$$G(t) = \int_{-1}^1 s_1(x - t) \, dx - s_1(-1 - t) - s_1(1 - t) = \int_{-1}^1 (x - t) \, dx - 0 - 1 - t$$

dal fatto che $-1-t$ è sempre negativo e $1-t$ è sempre positivo. Proseguendo si ha:

$$= \frac{(x-t)^2}{2}\Big|_t^1 - 1 + t = \frac{(1-t)^2}{2} - 1 + t = \frac{1+t^2-2t-2+2t}{2} = \frac{t^2-1}{2} \leq 0, \quad \forall t \in [-1,1]$$

cioè il segno di $G(t)$ non cambia.

Questo si generalizza facilmente ad intervalli $[a,b]$ generici, in quanto con passaggi simili:

$$G(t) = \int_a^b s_1(x-t)\,dx - J_1(s_1(x-t)) = \int_t^b (x-t)\,dx - \frac{b-a}{2}s_m(a-t) - \frac{b-a}{2}s_m(b-t)$$

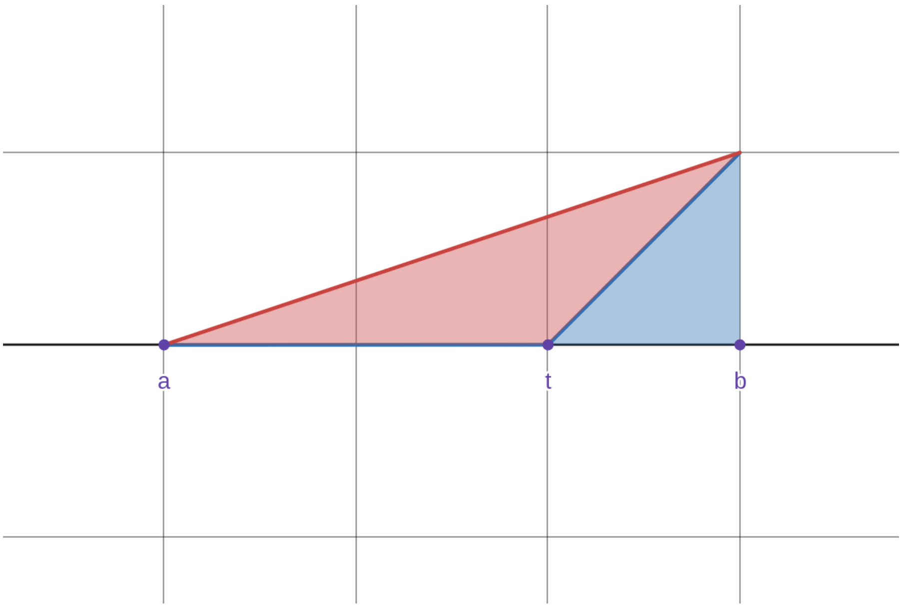
da cui si ha quindi, per la definizione di $s_1(x-t)$ appena data:

$$G(t) = \int_t^b (x-t)\,dx - \frac{b-a}{2}s_m(a-t) - \frac{b-a}{2}s_m(b-t) = \int_t^b (x-t)\,dx - \frac{b-a}{2}(b-t)$$

$$= \frac{(x-t)^2}{2}\Big|_t^b - \frac{b^2-bt-ab+at}{2} = \frac{(b-t)^2}{2} - \frac{b^2-bt-ab+at}{2}$$

$$= \frac{b^2-2bt+t^2-b^2+bt+ab-at}{2} = \frac{t^2-bt-at}{2} = \frac{(t-a)(t-b)}{2} \leq 0, \quad \forall t \in [a,b]$$

Questo in realtà era chiaro osservando che il nucleo di Peano in questo caso valuta la differenza fra l'area in azzuro e la somma dell'area in azzurro e e dell'area in rosso nel seguente grafico:



che sarà chiaramente sempre ≤ 0.

Per la formula dei trapezi vale quindi, in generale:

$$E_1(f) = \frac{1}{m!}f^{(m+1)}(\varepsilon)\int_a^b G(t)\,dt = \frac{1}{m!}f^{(m+1)}(\varepsilon)\frac{E_n(x^{m+1})}{m+1} = \frac{f''(\varepsilon)}{2}E_1(x^2)$$

Preso $m=1$. Vediamo quindi che per $f = x^2$:

$$E_1(x^2) = \int_a^b x^2\,dx - \frac{b-a}{2}(a^2+b^2) = \frac{x^3}{3}\Big|_a^b - \frac{ba^2+b^3-a^3-ab^2}{2}$$

$$= \frac{b^3 - a^3}{3} - \frac{ba^2 + b^3 - a^3 - ab^2}{2} = \frac{2b^3 - 2a^3 - 3ba^2 - 3b^3 + 3a^2 + 3ab^2}{6} = -\frac{(b-a)^3}{6}$$

da cui:

$$E_1(f) = -\frac{(b-a)^3}{12} \cdot f''(\varepsilon), \quad \varepsilon \in [a,b]$$

1.0.2 Esempio: errore di Peano nella formula di Simpson

Si dimostra che anche la formula di Simpson è tale per cui $G(t)$ non cambia segno, quindi vale:

$$E_2(f) = \frac{f^{(4)}(\varepsilon)}{4!} \cdot E_2(x^4)$$

Vediamo quindi che per l'intervallo $[-1,1]$ vale:

$$E_2(x^4) = \frac{2}{5} - \frac{2}{3} = -\frac{4}{15}$$

per cui:

$$E_2(f) = \frac{f^{(4)}(\varepsilon)}{24} \cdot \left(-\frac{4}{15}\right) = -\frac{1}{90} \cdot f^{(4)}(\varepsilon), \quad \epsilon \in [-1,1]$$

Lo stesso ragionamento si può chiaramente fare per $[a,b]$ generico, cioè:

$$E_2(x^4) = \int_a^b x^4 dx - \frac{b-a}{6}\left(a^4 + 4\frac{(a+b)^4}{16} + b^4\right) = \frac{b^5 - a^5}{5} - \frac{b-a}{24}\left(5a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + 5b^4\right)$$

$$= \frac{24b^5 - 24a^5 - 5\left(5a^4b + 4a^3b^2 + 6a^2b^3 + 4ab^4 + 5b^5 - 5a^5 - 4a^4b - 6a^3b^2 - 4a^2b^3 - 5ab^4\right)}{120}$$

$$= \frac{24b^5 - 24a^5 - 25a^4b - 20a^3b^2 - 30a^2b^3 - 20ab^4 - 25b^5 + 25a^5 + 20a^4b + 30a^3b^2 + 20a^2b^3 + 25ab^4}{120}$$

$$= -\frac{(b-a)^5}{120}$$

da cui:

$$E_2(f) = \frac{f^{(4)}(\varepsilon)}{24} \cdot \left(-\frac{(b-a)^5}{120}\right) = -\frac{(b-a)^5}{2880} \cdot f^{(4)}(\varepsilon), \quad \epsilon \in [a,b]$$

1.1 Formule di quadratura interpolatorie

Vediamo l'approccio all'approssimazione integrale che prevede scegliere $n+1$ nodi $x_0, ..., x_n$. In questo caso si utilizza come approssimazione di $\int_a^b f(x)\rho(x)\,dx$ la quantità:

$$\int_a^b f(x)\rho(x)\,dx \approx \int_a^b P_n(x)\rho(x)\,dx$$

con $P_n(x)$ polinomio di grado al più n tale che:

$$P_n(x_i) = f(x_i), \quad \forall i = 0, ..., n$$

cioè $P_n(x)$ polinomio interpolante.

Se f è sufficientemente regolare sappiamo che:

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x), \quad R_n(x) = \frac{\Pi(x)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\varepsilon), \quad \varepsilon \in [a,b]$$

dal teorema 14.1.

Prendiamo quindi:

$$\int_a^b f(x)\rho(x)\,dx = \int_a^b P_n(x)\rho(x)\,dx + \int_a^b R_n(x)\rho(x)\,dx = \int_a^b \sum_{i=0}^n f(x_i)l_i(x) + \int_a^b R_n(x)\rho(x)\,dx$$

dove gli $l_i(x)$ sono i polinomi della base di Lagrange:

$$l_i(x) = \prod_{j \neq i} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

da cui si può portare fuori la sommatoria:

$$\int_a^b f(x)\rho(x)\,dx = \sum_{i=0}^n f(x_i) \int_a^b l_i(x)\rho(x)\,dx + E_n(f)$$

che ha esattamente la forma di una formula di quadratura, dove gli $f(x_i)$ sono i nodi della formula $J_n(f)$ e gli:

$$\int_a^b l_i(x)\rho(x)\,dx$$

a moltiplicare sono i pesi, cioè quelli che avevamo finora chiamato a_i. L'errore $E_n(f)$ chiaramente si trascura.

Osserviamo che per costruzione le formule interpolatorie hanno grado di precisione almeno n (chiaramente dal fatto che il polinomio interpolante di grado n di un polinomio di grado n è esattamente sé stesso).

Viceversa, dati $n+1$ nodi c'è una sola formula di quadratura che ha grado di precisione $\geq n$ su qui nodi, e deve essere la formula di quadratura interpolatoria.

1.1.1 Esempio: formule di Newton-Cotes

L'esempio più classico delle formule di quadratura interpolatorie sono le formule di **Newton-Cotes**, che si basano sull'ipotesi di prendere nodi equispaziati su a, b. Un prima scelta è riguardo all'inclusione o meno degli estremi:

- Quando gli estremi (a, b) sono inclusi si parla di formule di Newton-Cotes *chiuse*;
- Quando gli estremi (a, b) sono esclusi si parla di formule di Newton-Cotes *aperte*.

Consideriamo per adesso le formule **chiuse**, per cui:

$$x_0 = a, \quad x_1 = h, \quad ..., \quad x_i = a + ih, \quad ..., \quad x_n = b$$

con:

$$h = \frac{b-a}{n}$$

detto **passo** della formula.

I pesi a_i saranno quindi:

$$a_i = \int_a^b l_i(x)\,dx$$

Le formule di Newton-Cotes equivalgono, per il grado 1 alle formule dei trapezi e per il grado 2 alle formule di Simosib.

Una proprietà importante delle formule di Newton-Cotes è che per ogni scelta di n vale che $G(t)$ nucleo di Peano non cambia segno su $[a, b]$, ergo si può usare la formula semplificata per l'errore di Peano:

$$E_n(f) = \frac{f^{(m+1)}(\varepsilon)}{(m+1)!} \cdot E_n(x^{m+1})$$

Sul grado n vale un fenomeno analogo al fenomeno di Runge (sezione 14.3.2). Per $n > 7$ (cioè se si hanno più di 8 nodi) le formule di Newton-Cotes iniziano ad avere pesi di segno alternato (mentre per $n \leq 7$ sono sempre positivi), cioè si inizia ad avere cancellazione numerica e valutare le formule diventa instabile numericamente.

Per esprimere l'errore delle formule di Newton-Cotes abbiamo quindi bisogno di trovarne l'errore $E_n(x^{m+1})$. In questo caso si assume un'espressione del tipo:

$$E_n(f) = \begin{cases} c_n \cdot h^{n+2} \cdot f^{(n+1)}(\varepsilon), & n \text{ dispari} \\ c_n \cdot h^{n+3} \cdot f^{(n+2)}(\varepsilon), & n \text{ pari} \end{cases}$$

Vediamo ad esempio:

- **Formula dei trapezi:** in questo caso si ha $n = 1$, $h = b - a$, da cui l'errore è esprimibile come:
$$-\frac{(b-a)^3}{12} \cdot f''(\varepsilon) = -\frac{h^3}{12} \cdot f''(\varepsilon)$$
- **Formula di Simpson** in questo caso si ha $n = 2$, $h = \frac{b-a}{2}$, da cui l'errore è esprimibile come:
$$-\frac{(b-a)^5}{2880} \cdot f^{(4)}(\varepsilon) = -\frac{h^5}{90} \cdot f^{(4)}(\varepsilon)$$

Un'altra osservazione da fare è che il grado di precisione e l'ordine della potenza di h è lo stesso per una formula con grado n pari e quella con grado dispari $n+1$. In genere, a parte il caso dei trapezi, si considerano più spesso le formule di Newton-Cotes con n pari.

1.1.2 Esempio: formule Gaussiane

Riprendiamo quindi anche le formule Gaussiane espresse come formule di quadratura interpolatorie.

Innanzitutto si può dire che anche per queste il nucleo di Peano $G(t)$ non cambia segno su $[a, b]$, cioè si può usare la formula di errore data dal corollario.

Un'altra proprietà è che i pesi delle formule Gaussiane sono sempre positivi, ergo non ci sono problemi di instabilità numerica per n grande.

Veniamo quindi a come ricavarle. Fissato l'intervallo $[a, b]$ e la funzione peso $\rho(x)$ si ha che le formule Gaussiane sono completamente determinate. I nodi delle formule gaussiane si possono scrivere come zeri di particolari polinomi, detti *polinomi ortogonali*. Più precisamente sono gli zeri della successione di polinomi $\{q_n\}$, con $\deg(q_n) = n$, determinati da:

$$< q_n, p >= 0, \quad \forall p : \deg(p) < n$$

sfruttando la definizione di prodotto scalare $< \cdot, \cdot >$ sullo spazio polinomiale $\mathbb{R}[x]$ data nei corsi di algebra lineare:

$$< a, b >= \int_a^b a(x)b(x)\, dx$$

da cui:

$$< q_n, p >= \int_a^b q_n(x)p(x)\rho(x)\, dx$$

- Nel caso specifico che stavamo calcolando, con $[a, b]$ e $\rho(x) = 1$ si trova l'insieme dei **polinomi di Legendre**.
- Usando $[a, b]$ e la funzione peso:

  $$\rho(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

  si ottiene invece il cosiddetto **polinomio di Chebyshev di prima specie**, le cui radici sono i nodi di Chebyshev (che avevamo già incontrato nella sezione 14.3.3).

Esistono metodi ad-hoc per trovare gli zeri dei polinomi ortogonali su $[-1, 1]$. Una volta trovati questi si possono ottenere quelli su $[a, b]$ con il cambio di variabili:

$$[-1, 1] \to [a, b], \quad x \to \frac{b-a}{2}x + \frac{b+a}{2}$$

cioè una semplice operazione di scalatura lineare.