1 Lezione del 24-03-25

1.1 Pivoting

L'algoritmo di eliminazione di Gauss che abbiamo definito alla scorsa lezione ha un punto di fallimento nel caso uno degli elementi $a_{ii}^{(i-1)}$ sia $= 0$, o comunque ≈ 0, in quanto vorremmo a quel punto calcolare un moltiplicatore $l_{ji} = \frac{a_{ji}}{a_{ii}}$ $\rightarrow$ non ben definito.

In tal caso si può modificare l'algoritmo sfruttando una matrice di permutazione che porti un elemento diverso da zero nella stessa posizione di a_{ii}. Vorremo quindi cercare un indice h tal per cui $a_{hi}^{(i-1)}$ sia di modulo massimo nella sua colonna al di sotto di i, cioè:

$$a_{hi}^{(i-1)} \geq \max_{j=i,\dots,n} |a_{ji}^{(i-1)}|$$

e scambiare la riga i con la riga h. Infatti, se $\det(A) \neq 0$, allora necessariamente esiste un $a_{ji}^{(i-1)} \neq 0$ (altrimenti si ha uno 0 obbligato sulla diagonale, che con la matrice triangolare a blocchi dà $\det(A^{(i-1)}) = 0$). $\square$

Un altra conseguenza di questo approccio è che tutti i moltiplicatori l_{ji} diventeranno ≤ 1. L'algoritmo di Gauss con questa modifica si chiama **eliminazione di Gauss con pivoting parziale** (parziale perché ne esistono versioni più sofisticate, che non vedremo).

Osserviamo che ogni scambio di righe equivale a moltiplicare a sinistra per una matrice di permutazione Π_i. Quindi il metodo di Gauss con pivoting può essere rappresentato come:

Algoritmo 1 Eliminazione di Gauss con pivoting parziale

Input: un sistema lineare qualsiasi $Ax = b$
Output: un sistema lineare triangolare superiore $Ux = c$
for $i = 1$ to n **do**
  Trova la matrice Π_i che porta l'elemento di modulo massimo in testa
  $A \leftarrow \Pi_i A$
  for $j = i$ to n **do**
    Calcola il **moltiplicatore** $l_{ji} = \frac{a_{ji}^{(i-1)}}{a_{ii}^{(i-1)}}$
    Aggiungi alla riga j la riga i moltiplicata per l_{ij}
  end for
end for

esempio numerico
modifica l'alg.

1.1.1 Fattorizzazione LU con pivoting

Vediamo come ricavare una fattorizzazione LU dal metodo di Gauss modificato con il pivoting. Si ha quindi che la matrice U si evolve come:

$$A \rightarrow \Pi_1 A \rightarrow H_1 \Pi_1 A \rightarrow \dots \rightarrow H_{n-1} \Pi_{n-1} \dots H_1 \Pi_1 A = U$$

mentre per la L dovremo notare che:

$$LU = \Pi A$$

dove la matrice Π rappresenta tutte le permutazioni fatte sulle righe di A.

Si ha quindi che:

- U è la matrice triangolare superiore trovata alla fine del metodo di Gauss con pivoting;
- L è la matrice dei moltiplicatori, a cui peroò si defono applicare gli scambi delle righe, come segue: se al passo i applico la matrice Π_i, devo applicare lo stesso cambio nelle prime $i-1$ colonne di L.

esempio numerico

1.1.2 Determinante con pivoting

Possiamo sfruttare la matrice Π per il calcolo del determinante. Si ha infatti dal teorema di Binet-Cauchy che:

$$\det(\Pi)\det(A) = \det(\Pi A) = \det(LU) = \det(L)\det(U)$$

e quindi:

$$\det(A) = \det(\Pi)^{-1}\det(L)\det(U)$$

dove $\det(L) = 1$ (triangolare inferiore con diagonale di 1). Si nota poi che $\det(\Pi)^{-1}$ è $(-1)^s$ è il numero di pivot che effettuiamo. A questo punto $\det(U)$ è semplicemente il prodotto degli elementi sulla diagonale (triangolare superiore), cioè:

$$\prod_{i=1}^{n} a_{ii}^{(i-1)} = \prod_{i=1}^{n} u_{ii}$$

e quindi:

$$\det(A) = (-1)^s \prod_{i=1}^{n} a_{ii}^{(i-1)} = (-1)^s \prod_{i=1}^{n} u_{ii}$$

Si può quindi usare il metodo di Gauss, ancora una volta, per il calcolo del determinante di una matrice, con costo pari al costo dell'eliminazione di Gauss ($O(\frac{2}{3}n^3)$), molto meglio dello sviluppo di Laplace! ($O(n!)$).

implementa

1.2 Condizionamento di un sistema lineare

Date $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ e $b \in \mathbb{C}^n$, supponiamo di voler trovare $Ax = b$ ma a causa di errori nei dati o errori di arrotondamento troviamo (con un qualunque metodo) un vettore perturbato $x + \delta x \in \mathbb{C}^n$ che risolve un sistema lineare di per sé perturbato:

$$(A + \delta A)(x + \delta x) = (b + \delta b)$$

con δA e δB perturbazioni "piccole" della matrice A e del vettore b, quindi $A + \delta A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ e $b + \delta b \in \mathbb{C}^n$

La domanda è, se δA e δb sono piccole, posso concludere che anche δx è relativamente piccolo? Si scopre che la risposta a questa domanda è generalmente no. Prendiamo ad esempio il sistema 2×2:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1.000001 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

da cui x esatto è $\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$. Perturbando b a $\begin{pmatrix} 0.999999 & 1 \end{pmatrix}$, si ha x perturbato a $\begin{pmatrix} -10^{-6} & -1 \end{pmatrix}$, che è chiaramente un cambiamento drastico. riguarda Viene da sé che agendo sulla matrice A potremo ottenere effetti anche più drammatici.

Riprendiamo quindi la definizione di errore relativo:

$$\epsilon = \frac{|\delta x|}{|x|}$$

assumendo $\delta A = 0$ con $\det(A) \neq 0$, come nell'esempio precedente, e quindi perturbazioni solo del termine noto, si ha:

$$A(x + \delta x) = (b + \delta b) \iff A\delta x = \delta b$$

visto che $Ax = b$. Passando alle norme, si ha che:

$$|\delta x| \leq |A^{-1}| \cdot |\delta b|$$

e inoltre:

$$|Ax| = |b| \implies |A||x| \geq |b| \implies |x| \geq \frac{|b|}{|A|}$$

quindi:

$$\frac{|\delta x|}{|x|} \leq \frac{|A^{-1}| \cdot |\delta b| \cdot |A|}{|b|} = \frac{\delta b}{|b|} \cdot |A| \cdot |A^{-1}|$$