1 Lezione del 05-05-25

Continuiamo la trattazione dell'approssimazione di integrali attraverso le formule di quadratura interpolatorie. Un problema che avevamo fino adesso è che se h è grande, allora $E_n(f)$ è grande per qualche termine proporzionale a h^d, dove d è il grado dell'errore.

Un'idea potrebbe essere di aumentare n, quindi aumentare i punti campionati per ridurre il passo h, ma come abbiamo visto questo è instabile (risente di fenomeni simili al fenomeno di Runge).

1.0.1 Formule di Newton-Cotes generalizzate

Decidiamo quindi di spezzare l'integrale su sottointervalli, e in ciascuno di essi applicare una formula di quadratura. Questo metodo ci porterà alle formule di Newton-Cotes **generalizzate**, anche dette *composite*.

Quindi, posto ad esempio un certo intervallo $[a, b]$ contenente i punti ordinati c, d, e, dividiamo l'integrale:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^d f(x)\,dx + \int_d^e f(x)\,dx + \int_e^b f(x)\,dx$$

e si applica la formula di quadratura ad ogni sottointervallo, sommando.

Più formalmente, avremo che si divide $[a, b]$ in L sottointervalli equispaziati, con:

$$x_0 = a, \quad x_1 = x_0 + \frac{b-a}{L}, \quad ..., \quad x_L = b$$

e si divide l'integrale come:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=1}^{L} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx$$

In ogni intervallo $[x_{i-1}, x_i]$ si applica quindi una formula di Newton Cotes con $n+1$ nodi.

Avremo quindi bisogno, in ogni sottointervallo, di:

$$n + 1 - 2 = n - 1$$

nodi aggiuntivi oltre agli estremi dell'intervallo per poter applicare la formula di quadratura $J_n(f)$. Il numero di nodi totali dovrà quindi essere:

$$L + 1 + (n-1) \cdot L = nL + 1$$

Osserviamo che il numero di nodi corrisponde al numero di valutazioni di f, e quindi in genere è un'indicazione del costo computazionale di una formula.

1.0.2 Esempio: formula dei trapezi generalizzata

Prendiamo la forma che otteniamo per $n = 1$:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{i=1}^{L} \frac{b-a}{2L} \left(f(x_{i-1}) + f(x_i)\right) = \frac{b-a}{2L} \sum_{i=1}^{L} \left(f(x_{i-1}) + f(x_i)\right)$$

$$= \frac{b-a}{2L} \left(f(x_0) + 2 \sum_{i=1}^{L-1} f(x_i) + f(x_L) \right) = J_1^{(G)}(f)$$

1.0.3 Esempio: formula di Cavalieri-Simspon

Vediamo quindi la generalizzazione della formula di Cavalieri, cioè ciò che otteniamo per $n = 2$:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{i=1}^{L} \frac{b-a}{6L}\left(f(x_{i-1}) + 4f\left(\frac{x_{i-1}+x_i}{2}\right) + f(x_i)\right)$$

$$= \frac{b-a}{6L}\left(f(x_0) + 2\sum_{i=1}^{L} f(x_i) + 4\sum_{i=1}^{L-1} f\left(\frac{x_{i-1}+x_i}{2}\right) + f(x_L)\right) = J_2^{(G)}(f)$$

1.0.4 Errore nelle formule generalizzate

In ogni intervallo della forma $[x_{i-1}, x_i]$ conosciamo l'errore, che è quello della formula di Newton-Cotes che stiamo utilizzando:

$$e \cdot h^d \cdot f^{(d-1)}(\varepsilon), \quad f \in C^{(d-1)}([a,b])$$

L'errore sulla formula totale $J_n^{(G)}(f)$ sarà quindi:

$$E_n^{(G)}(f) = I(f) - J_n^{(G)}(f) = \sum_{i=1}^{L} c \cdot h^d \cdot f^{(d-1)}(\varepsilon_i), \quad \varepsilon_i \in [x_{i-1}, x_i]$$

Vediamo quindi che l'unico termine dipendente dall'intervallo è $f^{(d-1)}(\varepsilon)$, per cui possiamo dire:

$$= \sum_{i=1}^{L} c \cdot h^d \cdot L \frac{f^{(d-1)}(\varepsilon_i)}{L} = ch^d L \cdot f^{(d-1)}(\varepsilon), \quad \varepsilon \in [a,b]$$

sfruttando il teorema della media integrale.

Abbiamo quindi gli errori:

- **Formula dei trapezi:**

$$E_1^{(G)}(f) = -\frac{(b-a)^3}{12L^2} \cdot f''(\varepsilon)$$

- **Formula di Cavalieri-Simpson:**

$$E_2^{(G)}(f) = -\frac{(b-a)^5}{2880L^4} \cdot f^{(4)}(\varepsilon), \quad \varepsilon \in [a,b]$$

e il caso generale:

$$E_n^{(G)}(f) = \begin{cases} c_n \cdot \frac{(b-a)^{n+2}}{L^{n+1}} \cdot f^{(n+1)}(\varepsilon), & n \text{ dispari} \\ c_n \cdot \frac{(b-a)^{n+3}}{L^{n+2}} \cdot f^{(n+2)}(\varepsilon), & n \text{ pari} \end{cases}$$

1.1 Formule di quadratura sulle derivate

Potremmo considerare formule di quadratura che coinvolgono le derivate di f. Si possono quindi generalizzare i concetti di grado di precisione, scelta dei nodi e pesi ottimali anche per formule di quadratura del tipo:

$$\int_a^b f(x)\rho(x)\,dx = \sum_{i=0}^{n_1} f(x_i) + \sum_{i=0}^{n_2} f'(y_i) + \sum_{i=0}^{n_3} f''(z_i)$$

chiaramente restringendo l'applicazione delle formule a funzioni sufficientemente derivabili.

Vediamo ad esempio come trovare i pesi ottimi per l'approssimazione con:

$$\int_0^1 f(x)\,dx = I(f) \approx a_1 f(0) + a_2 f'\left(\frac{1}{3}\right) + a_3 f'\left(\frac{2}{3}\right) + f(4)$$

sull'intervallo $[a, b] = [0, 1]$.

Imponendo errore nullo ai primi 4 gradi si otterrà:

$$\begin{cases} E_1(1) = 0 \\ E_1(x) = 0 \\ E_1(x^2) = 0 \\ E_1(x^3) = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} \int_0^1 1\,dx = 1 = a_1 + a_4 \\ \int_0^1 x\,dx = \frac{1}{2} = a_2 + a_3 + a_4 \\ \int_0^1 x^2\,dx = \frac{1}{3} = \frac{2}{3}a_2 + \frac{4}{3}a_3 + a_4 \\ \int_0^1 x^3\,dx = \frac{1}{4} = \frac{1}{3}a_2 + \frac{4}{3}a_3 + a_4 \end{cases}$$

Ricaviamo allora dalle prime 3:

$$\begin{cases} a_4 = 1 - a_1 \\ a_2 = \frac{1}{2} - a_3 - a_4 \\ a_3 = \frac{3}{4}\left(\frac{1}{3} - \frac{2}{3}a_2 - a_4\right) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2}a_2 - \frac{3}{4}a_4 \end{cases}$$

da cui sostituendo ulteriormente:

$$\begin{cases} a_4 = 1 - a_1 \\ a_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}a_4 - a_4 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}a_4 \\ a_3 = \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - a_3 - a_4\right) - \frac{3}{4}a_4 = \frac{1}{2}a_3 - \frac{1}{4}a_4 \end{cases}$$

sostituendo tutto nella quarta si ha:

$$\frac{1}{4} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}a_4\right) + \frac{4}{3} \cdot -\frac{1}{2}a_4 + a_4 = \frac{1}{6} + \frac{1}{6}a_4 \implies a_4 \frac{1}{2}$$

da cui immediatamente:

$$a_1 = \frac{1}{2}, \quad a_2 = \frac{1}{4}, \quad a_3 = -\frac{1}{4}, \quad a_4 = \frac{1}{2},$$

da cui:

$$J_3(f) = \frac{f(0)}{2} + \frac{f'\left(\frac{1}{3}\right)}{4} - \frac{f''\left(\frac{2}{3}\right)}{4} + \frac{f(1)}{2}$$

Per determinare il grado di precisione vediamo l'errore per x^4:

$$E_3(x^4) = \int_0^1 x^4\,dx - \left(\frac{1}{2} \cdot 0 + \frac{1}{4} \cdot 4 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 - \frac{1}{4} \cdot 4 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^3 + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{5} - \left(\frac{1}{27} - \frac{8}{27} + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{5} - \frac{13}{54} \neq 0$$

da cui il grado di precisione è esattamente 3.