1 Lezione del 10-03-25

1.1 Autovalori e autovettori

Continuiamo a parlare di matrici quadrate, e introduciamo gli **autovalori** e **autovettori**:

Definizione 1.1: Autovalori e autovettori destri

Data $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, $\lambda \in \mathbb{C}$ si dice autovalore se esiste un vettore v in $\mathbb{C}^n$, con $v \neq 0$, tale che:

$$Av = \lambda v$$

L'equazione $Av = \lambda v$ non rappresenta un sistema lineare, in quanto sia v che λ sono variabili (e fra l'altro moltiplicate fra loro).

In particolare, v si dice **autovettore destro** per A rispetto a λ. Similmente, si può definire w **autovettore sinistro**:

Definizione 1.2: Autovalori e autovettori sinistri

Data $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, $\lambda \in \mathbb{C}$ si dice autovalore se esiste un vettore w in $\mathbb{C}^n$, con $w \neq 0$, tale che:

$$w^H A = w^H \lambda$$

Solitamente ci basta trovare gli autovettori destri in quanto:

$$(w^H A)^H = A^H w$$

$$(\lambda w^H)^H = \overline{\lambda} w$$

cioè w è un autovettore destro per λ se e solo se w è autovettore destro per A^H rispetto all'autovalore $\overline{\lambda}$. In questo caso, se la matrice è *simmetrica* o *hermitiana*, gli autovalori destri e sinistri coincidono.

1.1.1 Caratterizzazione degli autovalori

Potremmo interrogarci sull'esistenza di questi oggetti. Poniamo allora:

$$Av = \lambda v \implies Av - \lambda v = 0 \implies (A - \lambda I)v = 0$$

Chiaramente il sistema è risolto per $v = 0$, ma abbiamo escluso a priori tale possibilità. Abbiamo allora un sistema $A - \lambda I$, che ha almeno una soluzione per Rouché-Capelli, che è 0 se $\det(A - \lambda I) \neq 0$, e un valore $\neq 0$ altrimenti. Vogliamo quindi impostare:

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = 0$$

detta **equazione caratteristica** (del *polinomio caratteristico* posto nullo). Gli autovalori non saranno altro che le soluzioni dell'equazione caratteristica.

L'esistenza di tali soluzioni è data dal fatto che $\deg(p(\lambda)) = n$, e quindi dal teorema fondamentale dell'algebra esistono $c_0, c_1, ..., c_n$ tali che:

$$p(\lambda) = c_0 + c_1\lambda + ... + c_n\lambda^n = c_n(\lambda - \lambda_1)...(\lambda - \lambda_n) = (-1)^n(\lambda - \lambda_1)...(\lambda - \lambda_n)$$

e dal punto di vista dei minori:

$$= (-1)^n\lambda^n + (-1)^{n-1}\sigma_1\lambda^{n-1} + ... + (-1)^1\sigma_{n-1}\lambda + (-1)^0\sigma_n$$

$$= (-1)^n \lambda^n + (-1)^{n-1} \sigma_1 \lambda^{n-1} + ... - \sigma_{n-1} \lambda + \sigma_n$$

dove σ_j è la somma dei determinanti delle sottomatrici di A di ordine j. Alcuni di questi σ_j sono semplici da calcolare:

$$\sigma_1 = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} = \mathrm{tr}(A) \quad \text{(traccia)}$$

$$\sigma_n = \prod_{j=1}^{m} \lambda_j = \det(A)$$

vediamo quest'ultima relazione: si ha che il determinante di una matrice è uguale al prodotto dei suoi autovalori, ergo:

$$\det(A) = 0 \Leftrightarrow \exists \lambda_j = 0$$

Riepilogando una matrice $\in \mathbb{C}^{n \times n}$ ha sempre esattamante n autovalori, contati con la loro molteplicità. In particolare:

Definizione 1.3: Molteplicità algebrica

Un autovalore $\overline{\lambda}$ ha molteplicità algebrica k ($\alpha(\overline{\lambda})) = k$) se k è la sua molteplicità μ come radice del polinomio caratteristico.

Chiaramente:

$$\sum_{\overline{\lambda}} \alpha(\overline{\lambda}) = n$$

1.1.2 Caratterizzazione degli autovettori

Potremmo chiederci quanti sono gli autovettori. Abbiamo allora che:

$$Av = \lambda v$$

e preso $\theta \in \mathbb{C}$ allora:

$$A(\theta v) = \theta A v = \theta \lambda v = \lambda(\theta v)$$

cioè anche θv è autovalettore per $\lambda^* = \theta\lambda$. Questo ci dice che gli autovettori non sono mai unici. Inoltre, possiamo dire che dati $Av_1 = \lambda v_1$ e $Av_2 = \lambda v_2$:

$$A(v1 + v_2) = Av_1 + Av_2 = \lambda v_1 + \lambda v_2 = \lambda(v_1 + v_2)$$

cioè sono soddisfatte le proprietà di omogeneità e additività, e quindi l'insieme degli autovettori relativi a un certo autovalore λ forma uno spazio vettoriale (detto **autospazio** rispetto a λ).

Questo ci permette di definire un'altra molteplicità:

Definizione 1.4: Molteplicità geometrica

Dato $\lambda \in \mathbb{C}$ autovalore di $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ si dice molteplicità geometrica k ($\gamma(\lambda) = k$) la dimensione dell'autospazio associato a λ, ovvero:

$$\gamma(\lambda) = \dim\left(\ker(A - \lambda I)\right)$$

Per Rouché-Capelli, si ha che:

$$\gamma(\lambda) = n - \text{rank}(A - \lambda I)$$

Valgono poi le relazioni fra molteplicità algebrica e molteplicità geometrica:

$$1 \leq \gamma(\lambda) \leq \alpha(\lambda) \leq n$$

Inoltre se si hanno $\lambda_i \neq \lambda_j$ autovalori distinti ($\forall i \neq j,\ i, j \in \{1, ..., n\}$), allora necessariamente:

$$\gamma(\lambda_i) = \alpha(\lambda_i) = 1, \quad \forall i = 1, ..., n$$

cioè se tutti gli autovalori di A sono distinti, le loro molteplicità, sia α che γ, devono essere uguali a 1.

1.1.3 Matrici simili

Possiamo quindi definire la **similarità** fra matrici:

Definizione 1.5: Matrici simili

Date $A, B \in \mathbb{C}^{n \times n}$, si dicono simili ($B \sim A$) se esiste $S \in \mathbb{C}^{n \times n}$ invertibile tale che:

$$B = S^{-1}AS$$

in questo caso vale anche l'inverso:

$$A = SBS^{-1}$$

Le matrici fra di loro simili hanno diverse proprietà in comune. Ad esempio, $A \sim B$ hanno gli stessi autovalori con le stesse molteplicità α e γ. Inoltre se v è autovettore per A associato a λ, allora $S^{-1}v$ è autovettore per B associato sempre a λ. Questo si dimostra da:

$$\det(B - \lambda I) = 0 = \det(S^{-1}AS - \lambda I) = \det(S^{-1}AS - \lambda S^{-1}S) = \det(S^{-1}(A - \lambda I)S)$$

e da Binet-Cauchy:

$$\det(S^{-1}(A - \lambda I)S) = \det(S^{-1})\det(A - \lambda I)\det(S) = \det(A - \lambda I)$$

in quanto S^{-1} e S sono costanti moltiplicative, e quindi gli autovalori λ di A e B coincidono. Inoltre:

$$B - \lambda I = 0 \Rightarrow S^{-1}AS - \lambda I = 0 \Rightarrow S^{-1}(A - \lambda I)S = 0 \Rightarrow A - \lambda I = 0$$

cioè si ha lo stesso spazio delle soluzioni.

Presa (λ, v) *autocoppia* (coppia autovalore-autovettore) per A abbiamo allora:

$$B(S^{-1}v) = S^{-1}AS(S^{-1}v) = S^{-1}Av = S^{-1}\lambda v = \lambda(S^{-1}v)$$

e quindi $S^{-1}v$ è autovettore per B associato a λ. $\square$

1.1.4 Matrici diagonalizzabili

Definiamo le matrici diagonalizzabili come matrici simili ad una matrice diagonale, cioè:

Definizione 1.6: Matrice diagonalizzabile

Data $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, A si dice diagonalizzabile se $\exists S$ invertibile tale che:

$$S^{-1}AS = A_D$$

con $A_D = \text{diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n)$ diagonale.

Osserviamo che se A è diagonalizzabile, la matrice diagonale (sopra, A_D) contiene sulla diagonale gli autovalori di A.

Vediamo poi che:

$$S^{-1}AS = A_D \implies AS = SA_D$$

risultato piuttosto triste, e posto $S = \begin{pmatrix} s_1 & ... & s_n \end{pmatrix}$:

$$AS = \begin{pmatrix} As_1 & ... & As_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 s_1 & ... & \lambda_n s_n \end{pmatrix}$$

da dove notiamo che da $As_i = \lambda_i s_i$, la matrice S ha per colonne gli autovettori di A (comodo per il calcolo della matrice S quando A è definita in base canonica).

Non tutte le matrici quadrate sono diagonalizzabili. La diagonalizzabilità dipende infatti dalla possibilità di scegliere n autovettori di A linearmente indpendenti, cioè di trovare una base di $\mathbb{C}^n$ di autovalori di A.

Da questo deriva:

Teorema 1.1: Diagonalizzabilità di matrici

$A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ è diagonalizzabile se e solo se:

$$\alpha(\lambda) = \gamma(\lambda), \quad \forall \lambda$$

dove i λ sono gli autovalori di A.

Questo semplicemente significa che una matrice è diagonalizzabile se le molteplicità algebriche e geometriche di tutti gli autovalori coincidono.

Si ha quindi che, per A diagonalizzabile, con $x \in \mathbb{C}^n$ si ha che $\exists c_1, ..., c_n \in \mathbb{C}$ tali che:

$$x = \sum_{i=1}^{n} c_i v_j$$

sugli autovettori v_j.

L'utilità sta nel fatto che possiamo scegliere il caso particolare dove la base di autovettori è unitaria/ortogonale (unitaria in $\mathbb{C}$ e ortogonale in $\mathbb{R}$). Da questo deriva:

Teorema 1.2: Teorema spettrale

Se la matrice A è unitaria, cioe $A = A^H$, allora:

1. A è sempre diagonalizzabile;
2. Gli autovalori di A sono reali;
3. Si può scegliere una base di autovettori unitaria/ortogonale, cioè tale che:

$$< v_i, v_j >= \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases}$$

   o in modo equivalente si può trovare $V \in \mathbb{C}^{n \times n}$ tale che:

$$V^H A V = \text{diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n)$$

   e

$$V^H V = V V^H = I$$

Da questo teorema vengono le definizioni:

Definizione 1.7: Matrice definita positiva/negativa

Una matrice hermitiana viene detta definita positiva (definita negativa) quado gli autovalori λ_i sono tutti > 0 (< 0).

1.1.5 Proprietà di autovalori e autovettori

Vediamo come si comportano autovalori e autovettori sottoposti a diverse operazioni fra matrici.

1. **Somma per identità:** data (λ, v) autocoppia per $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, $\delta \in \mathbb{C}$, allora $A + \delta I$ ha come autocoppia $\lambda + \delta, v$. Questo semplicemente da:

$$(A + \delta I)v = Av + \delta v = \lambda v + \delta v = (\lambda + \delta)v$$

2. **Somma di potenze:** supponiamo $q(x) = \sum_{i=0}^{d} q_i x^i$. Si può allora definire:

$$q(A) = \sum_{i=0}^{d} q_i A^i$$

   Allora con (λ, v) autocoppia di A, si avrà che $(q(\lambda), v)$ è autocoppia per $q(A)$.

   Notiamo che la proprietà (1) è il caso $q(x) = x + \delta$.

3. **Inversa:** data (λ, v) autocoppia per A, si avrà che (λ^{-1}, v) è autocoppia per A^{-1}. Questo da:

$$Av = \lambda v \implies A^{-1}Av = \lambda A^{-1} v \implies v = \lambda A^{-1} v$$

   da cui:

$$\frac{1}{\lambda} v = A^{-1} v$$

□

4. **Autovalori complessi coniugati:** se $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, allora $\lambda \in \mathbb{C}$ è autovalore di A se e solo se anche $\overline{\lambda}$ coniugato è autovalore di A. Equivalentemente, gli autovalori complessi arrivano sempre in coppie coniugate. Questo da:

$$p(\lambda) = 0 = (-1)^n \lambda^n + (-1)^{n-1} \sigma_1 \lambda^{n-1} + ... - \sigma_{n-1} \lambda + \sigma_n$$

con $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, dovra essere che:

$$p(\lambda) = 0 = p(\lambda_n)$$

□

Definiamo infine il **raggio spettrale**, cioè il *massimo modulo* degli autovalori.

Definizione 1.8: Raggio spettrale

La quantità $\rho(A) = \max_{j=\{1,...,n\}} |\lambda_j|$ è detta raggio spettrale di A.

Vale il teorema:

Teorema 1.3: Limiti e raggio spettrale

$$\lim_{x \to +\infty} A^x = 0 \Leftrightarrow \rho(A) < 1$$