

1 Lezione del 21-03-25

1.1 Valutazione della riducibilità

Riprendiamo il discorso delle matrici riducibili, soffermandoci sul come capire quando una matrice è riducibile, e come ricavare, in caso affermativo, la matrice di permutazione Π corrispondente.

Vale il seguente risultato (abbastanza banale guardando a quanto detto riguardo alle matrici irriducibili):

Teorema 1.1: Caratterizzazione di matrice riducibile

Una matrice A è riducibile quando non è irriducibile, cioè quando il suo grafo associato $G(A)$ non è fortemente connesso.

La dimostrazione avviene osservando innanzitutto questo **lemma**: se esiste una certa permutazione π degli elementi in riga, si può ricavare una matrice di permutazione Π e definire la matrice:

$$A' = \Pi A \Pi^T$$

Avremo allora che il grafo associato ad A' sarà lo stesso associato a $\Pi A \Pi^T$, solamente cambiando i nomi dei vertici, cioè:

$$G(A) \text{ fortemente connesso} \Leftrightarrow G(A') \text{ fortemente connesso}$$

La **dimostrazione** vera e propria dovrà quindi affermare che se una matrice è riducibile, allora il suo grafo non è fortemente connesso, cioè:

$$A \text{ riducibile} \Leftrightarrow G(A) \text{ non fortemente connesso}$$

\Rightarrow) Abbiamo che se A è riducibile allora $\exists \Pi$:

$$B = \Pi A \Pi^T = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix}$$

con $A_{11} \in \mathbb{C}^{k \times k}$ e $A_{22} \in \mathbb{C}^{(n-k) \times (n-k)}$. Che $G(B)$ non è fortemente connesso è chiaro dal blocco di 0 in basso a sinistra: significherà che non ci sono archi che collegano il blocco A_{22} al blocco A_{11} , cioè non esistono archi che vanno da $\{k+1, \dots, n\}$ a $\{1, \dots, k\}$.

\Leftarrow) Se $G(A)$ non è fortemente connesso allora $\exists(j, h)$ per cui da j non si raggiunge h . Dividiamo allora $\{1, \dots, n\}$ in due sottoinsiemi:

$$\begin{cases} \mathcal{P} = \{\text{vertici raggiungibili da } j\} \\ \mathcal{Q} = \{\text{vertici non raggiungibili da } j\} \end{cases}$$

con $\mathcal{P} \cup \mathcal{Q} = \{1, \dots, n\}$ e $\mathcal{P} \cap \mathcal{Q} = \emptyset$. Non ci sarà quindi nessun arco che collega un elemento di \mathcal{P} a un elemento di \mathcal{Q} . Se si considera una permutazione Π che manda in testa tutti gli elementi di \mathcal{P} , si ritrova esattamente la forma della definizione 7.7, cioè quella di una matrice riducibile, notando $k = |\mathcal{P}|$ e $n - k = |\mathcal{Q}|$.

□

esempio matrice vista lezione, e esempio risoluzione

Ricordiamo di poter iterare ricorsivamente il processo di riduzione, cioè di poter trovare per ogni blocco A_{ii} con $i \in \{1, 2\}$ un Π_i tale che:

$$\Pi_i A_{ii} \Pi_i^T = \begin{pmatrix} A_{11}^{(i)} & A_{12}^{(i)} \\ 0 & A_{22}^{(i)} \end{pmatrix}$$

così che valga:

$$\begin{pmatrix} \Pi_1 & 0 \\ 0 & \Pi_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Pi_1^T & 0 \\ 0 & \Pi_2^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Pi_1 A_{11} \Pi_1^T & \Pi_1 A_{12} \Pi_2^T \\ 0 & \Pi_2 A_{22} \Pi_2^T \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11}^{(1)} & A_{12}^{(1)} \\ 0 & A_{22}^{(1)} \end{pmatrix} & * \\ 0 & \begin{pmatrix} A_{11}^{(2)} & A_{12}^{(2)} \\ 0 & A_{22}^{(2)} \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

e via dicendo, dove in (*) comparrà qualcosa che al momento non ci interessa.

1.1.1 Problemi agli autovalori per riduzione

Notiamo che questo procedimento semplifica anche la risoluzione dei **problemi agli autovalori**: infatti iterando abbastanza, il problema si ridurrà a trovare i singoli autovalori di matrici sulla diagonale sempre più piccole, e quindi dal polinomio caratteristico di più facile risoluzione.

1.2 Sistemi lineari

Veniamo quindi alla trattazione dei sistemi lineari, che avevamo definito come forme $Ax = b$ con $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, $b \in \mathbb{C}^n$.

Studieremo 2 tipi di metodi risolutivi:

- **Metodi diretti**: esatti ma dispendiosi, se eseguiti in aritmetica esatta (cioè senza arrotondamenti) potrebbero in un numero n finito di passaggi alla soluzione esatta. Esempi di metodi diretti sono il **metodo di Cramer** (visto in 4.7.2) e l'**eliminazione di Gauss** (che vedremo fra poco);
- **Metodi iterativi**: meno accurati ma più efficienti computazionalmente, portano ad una successione $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ di approssimazioni tali che $\lim_{k \rightarrow +\infty} x_k = x$ soluzione esatta. Notiamo però che, in generale, è impossibile trovare il valore esatto di x in un numero esatto di iterazioni. Per contropartita, risultano spesso molto più efficienti dei metodi diretti (esistono esempi di sistemi addirittura non risolvibili, nella pratica, con metodi diretti).

1.2.1 Sistemi triangolari

Diamo la definizione parallela a quella di matrice triangolare:

Definizione 1.1: Sistema triangolare

Si dice sistema triangolare un sistema della forma $Ux = c$ con U matrice triangolare.

Per un **sistema triangolare superiore**, si avrà la forma:

$$\begin{cases} u_{11}x_1 + u_{12}x_2 + \dots + u_{1n}x_n = c_1 \\ u_{22}x_2 + \dots + u_{2n}x_n = c_2 \\ \dots \\ u_{n-1,n-1}x_{n-1} + u_{n-1,n}x_n = c_{n-1} \\ u_{nn}x_n = c_n \end{cases}$$

Il **metodo risolutivo** sarà allora la *sostituzione all'indietro*, definita ricorsivamente come:

$$\begin{cases} x_n = \frac{c_n}{u_{nn}} \\ x_i = \frac{c_i - \sum_{j=i+1}^n u_{ij}x_j}{u_{ij}} \end{cases}$$

Riguardo alla complessità, si potrà dire che al passo i si eseguono $n - i + n - i + 2 = 2(n - 1) + 2$ passaggi, cioè 2 per la divisione per u_{jj} e la somma fra c_i e il termine accumulato a destra, $n - i$ per i prodotti nella sommatoria e di nuovo $n - i$ per la sommatoria stessa. Sarà allora che:

$$\sum_{i=1}^n (2(n - i) + 2) \sim O(n^2)$$

cioè si ha complessità quadratica.

Osserviamo poi che per **sistemi triangolari inferiori** la situazione è uguale, cioè si risolve la prima equazione, si sostituisce il risultato nella seconda, e via dicendo. Il metodo ottenuto, speculare al quello di sostituzione all'indietro, viene detto *sostituzione in avanti*, di costo identico ($O(n^2)$).

1.2.2 Metodo di eliminazione di Gauss

L'idea del metodo di eliminazione di Gauss è quella di partire da un sistema $Ax = b$, trasformarlo in un sistema equivalente $Ux = c$ (quindi triangolare superiore), ed applicare la sostituzione all'indietro.

Per arrivare alla forma $Ux = c$ si sostituiscono le equazioni del sistema con loro combinazioni lineari scelte in modo da annullare gli elementi inferiori alla diagonale.

L'idea è quella di eliminare, per ogni elemento i -esimo sulla diagonale a partire da quello in alto a destra, gli $n - i$ elementi che stanno al di sotto, cioè:

Algoritmo 1 Eliminazione di Gauss

Input: un sistema lineare qualsiasi $Ax = b$

Output: un sistema lineare triangolare superiore $Ux = c$

for $i = 1$ to n **do**

for $j = i$ to n **do**

 Calcola il **moltiplicatore** $l_{ji} = \frac{a_{ji}^{i-1}}{a_{ii}^{i-1}}$

 Aggiungi alla riga j la riga i moltiplicata per l_{ij}

end for

end for

implementalo

Dal punto di vista della complessità, la riduzione in forma triangolare costa $O(\frac{2}{3}n^3)$, e chiaramente domina sul termine $O(n^2)$ della risoluzione di $Ux = c$ con la sostituzione all'indietro.

Facciamo una nota sulla fattibilità della riduzione di Gauss, definendo:

Definizione 1.2: Moltiplicatori di Gauss

I termini $l_{ji} = \frac{a_{ji}^{i-1}}{a_{ii}^{i-1}}$ vengono detti moltiplicatori.

Chiaramente, per poter eseguire l'eliminazione di Gauss serve che $a_{jjj-1} \neq 0 \forall j = 1, \dots, n-1$. Inoltre, i casi $a_{jj}^{j-1} \approx 0$ possono causare problemi di instabilità numerica. Vedremo in seguito metodi per ovviare a questo problema.

1.2.3 Fattorizzazione LU

Il primo passo dell'algoritmo di Gauss si può vedere come equivalente a moltiplicare l'equazione $Ax = b$ a sinistra per una particolare matrice H_1 triangolare inferiore:

$$H_1 = \begin{pmatrix} 1 & \dots & \dots & 0 \\ -l_{21} & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -l_{n1} & \dots & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

con la diagonale a 1 e i moltiplicatori sulla prima colonna, così che AH_1 risulti esattamente quello che volevamo per Gauss, cioè la combinazione lineare di ogni riga j con l'prima riga moltiplicata per il moltiplicatore l_{j1} (con $j > 2$).

Possiamo generalizzare questo processo a una serie di matrici H_i , per ogni elemento sulla diagonale, con la diagonale a 1 e i moltiplicatori corrispondenti a i sulla i -esima colonna:

$$H_i = \begin{pmatrix} 1 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & -l_{ji} & \dots & \dots \\ 0 & -l_{ni} & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Così, ancora una volta, AH_i risulterà quello che volevamo per Gauss, cioè la combinazione lineare di ogni riga j con l' i -esima riga moltiplicata per il moltiplicatore l_{ji} .

Varrà allora che il metodo di Gauss sarà equivalente a considerare:

$$H_{n-1}H_{n-2} \dots H_1 Ax = H_{n-1}H_{n-2} \dots H_1 b$$

e potremo quindi dire:

$$H_{n-1}H_{n-2} \dots H_1 = U, \quad L = H_1^{-1} \dots H_{n-1}^{-1}$$

da cui:

$$A = LU$$

Semplifichiamo i calcoli notando alcune proprietà delle matrici H_j :

1. Hanno l'inversa facile, in quanto basta invertire i segni:

$$H_i^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & l_{ji} & \dots & \dots \\ 0 & l_{ni} & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

2. Sono facili da moltiplicare, in quanto si può dire:

$$H_{i_1} \cdot H_{i_2} = \begin{pmatrix} 1 & \dots & \dots & 0 \\ -l_{2i_1} & 1 & \dots & 0 \\ \dots & -l_{ji_2} & \dots & \dots \\ -l_{ni_i} & -l_{ni_2} & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

e:

$$H_{i_1}^{-1} \cdot H_{i_2}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \dots & \dots & 0 \\ l_{2i_1} & 1 & \dots & 0 \\ \dots & l_{ji_2} & \dots & \dots \\ l_{ni_i} & l_{ni_2} & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

cioè semplicemente si somma sotto la diagonale.

Questo significa che una volta svolta la prima parte dell'eliminazione di Gauss si è già calcolata la fattorizzazione LU come la matrice dei moltiplicatori:

$$H_{i_1}^{-1} \cdot H_{i_2}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \dots & \dots & 0 \\ l_{21} & 1 & \dots & 0 \\ \dots & l_{3,2} & \dots & \dots \\ l_{n1} & l_{n2} & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Si osserva quindi che se già si conoscono L ed U (magari di una matrice che dovremo usare spesso) risolvere $Ax = b$ costa $O(n^2)$, in quanto basta dire:

$$Ax = b \Rightarrow LUx = b \Rightarrow x = U^{-1}L^{-1}b$$

dove basta risolvere a cascata:

$$\begin{cases} Ly = b \\ Ux = y \end{cases}$$

Questi sono due sistemi triangolari, da cui l'andamento complessivo $O(n^2)$.

Notiamo che questo vale se L ed U sono note, quindi tolto il prezzo dato dal doverle calcolare (come avevamo notato, conviene per matrici che magari dobbiamo usare spesso).

1.2.4 Varianti del metodo di Gauss

Se si vuole risolvere $AX = B$ con X e B matrici di vettori colonna di s colonne:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_s \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 & \dots & b_s \end{pmatrix}$$

cioè se si vogliono risolvere s sistemi lineari con la stessa matrice A :

$$Ax_1 = b_1, \quad \dots, \quad Ax_s = b_s$$

si può modificare l'algoritmo di Gauss, effettuando le mosse di Gauss sulla matrice aumentata $(A|B)$. Alla fine troveremo una matrice $(U|B^{(n-1)})$ che risolverà i sistemi triangolari superiori:

$$Ux_1 = b_1^{(n-1)}, \quad \dots, \quad Ux_s = b_s^{(n-1)}$$

Un caso particolare è il calcolo dell'inversa di I con l'algoritmo di **Gauss-Jordan**. Infatti, scegliendo:

$$AX = I$$

con $n = s$, le colonne in X diventeranno l'inversa di A (basti vedere che $AA^{-1} = I$ per definizione).