

# 1 Lezione del 28-04-25

## 1.1 Approssimazione di integrali

Vorremo quindi approssimare funzioni del tipo:

$$I(\rho \cdot f) = \int_a^b f(x) \cdot \rho(x) dx$$

dove  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continua  $\in C([a, b])$ , mentre  $\rho(x) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  sempre continua  $\in C([a, b])$  è una funzione particolare, spesso la funzione unitaria o comunque una funzione detta **funzione peso** tale che:

- $\rho(x)$  è positiva:

$$\rho(x) \geq 0$$

- $\rho(x)$  rispetta le condizioni:

$$m_k = \int_a^b x^k \rho(x) dx < +\infty, \quad \forall k = 0, 1, \dots$$

Veniamo alle motivazioni dell'approssimazione di integrali. Potremmo voler approssimare integrali del tipo:

$$\int_a^b f(x) dx \quad (\rho(x) = 1)$$

per una serie di motivi:

- Di molte funzioni non si può trovare un'espressione semplice della primitiva di  $f$  (funzioni ellittiche, funzioni su più variabili, ecc...);
- Anche se esiste la primitiva potrebbe essere particolarmente oneroso in termini di risorse computazionali calcolarla o valutarla in un punto per ottenere l'integrale;
- Come nel caso dell'approssimazione e dell'interpolazione, ci sono casi in cui della  $f$  si conoscono solo alcuni punti, cioè non se ne ha un'espressione esplicita che possiamo integrare. Vedremo che sarà questo il caso più comune.

Prendiamo quindi il caso dove conosciamo una serie di punti  $(x_i, f(x_i))$  di  $f(x)$ . L'idea per approssimare l'integrale sarà di considerare una formula del tipo:

$$\int_a^b f(x) \rho(x) dx \approx \sum_{i=0}^n f(x_i) \cdot a_i$$

con:

$$a \leq x_0 < x_1 < \dots < x_n \leq b$$

In questo caso chiamiamo gli  $x_i$  **nodi** e gli  $a_i$  **pesi**, e la formula **formula di quadratura**. Si ha quindi che una formula di quadratura è univocamente determinata una volta decisi nodi e pesi.

Definiamo quindi formalmente:

### Definizione 1.1: Formula di quadratura

Dati un intervallo  $[a, b]$  e  $\rho(x)$ , definiamo  $J_n(\circ)$  formula di quadratura su  $(n + 1)$  nodi  $x_0, \dots, x_n$  con pesi  $a_0, \dots, a_n$  la funzione:

- Di questa forma:

$$J_n : C([a, b]) \rightarrow \mathbb{R}$$

tale che:

$$f \rightarrow \sum_{i=0}^n f(x_i) \cdot a_i$$

- O equivalentemente:

$$J_n : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$$

tale che:

$$\begin{pmatrix} f_0 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix} \rightarrow \sum_{i=0}^n f_i \cdot a_i$$

Data la definizione di formula di quadratura, possiamo quindi definire l'errore:

### Definizione 1.2: Errore della formula di quadratura

L'errore della formula di quadratura  $J_n(\circ)$  si definisce come:

$$E_n(f) = \int_a^b f(x)\rho(x) dx - J_n(f) = \int_a^b f(x)\rho(x) dx - \sum_{i=0}^n f(x_i) \cdot a_i$$

anche questa tale che:

$$E_n : C([a, b]) \rightarrow \mathbb{R}$$

con:

$$f \rightarrow E_n(f)$$

Osserviamo che sia  $J_n$  che  $E_n$  sono funzioni lineari, in quanto date  $f_1, f_2 \in C([a, b])$  e  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ :

$$\begin{aligned} J_n(c_1 f_1 + c_2 f_2) &= \sum_{i=0}^n a_i (c_1 f_1 + c_2 f_2)(x_i) = \sum_{i=0}^n a_i (c_1 f_1(x_i) + c_2 f_2(x_i)) \\ &= \sum_{i=0}^n (a_i c_1 f_1(x_i) + a_i c_2 f_2(x_i)) = c_1 \sum_{i=0}^n a_i f_1(x_i) + c_2 \sum_{i=0}^n a_i f_2(x_i) = c_1 J_n(f_1) + c_2 J_n(f_2) \end{aligned}$$

e analogamente con  $E_n$ . □

Potremmo quindi chiederci quando una formula di quadratura è accurata. Potremmo definire un primo indicatore detto **grado di precisione**.

### Definizione 1.3: Grado di precisione

Data  $J_n$  formula di quadratura definiamo grado di precisione (a volte detto *grado di precisione algebrico*) il naturale  $m \in \mathbb{N}$  tale che:

$$E_n(1) = E_n(x) = \dots = E_n(x^m) = 0$$

presi i monomi  $x_0, \dots, x^m$ , cioè per cui:

$$E_n(x^{m+1}) \neq 0$$

Osserviamo che per la proprietà di linearità di  $E_n$  e  $J_n$  appena dimostrata, si ha che  $J_n$  ha grado di precisione  $m$  se e solo se  $J_n$  integra esattamente tutti i polinomi di grado  $\leq m$  (che altro non sono che combinazioni lineari dei monomi  $x_0, \dots, x^m$  appena considerati).

#### 1.1.1 Formula dei trapezi

Prendiamo ad esempio  $\rho = 1$ , l'intervallo  $[a, b] = [-1, 1]$  con  $n = 1$ , per cui consideriamo solo gli estremi  $x_0 = -1, x_1 = 1$ . In questo caso avremo la formula di quadratura:

$$J_1(f) = a_0 f(-1) + a_1 f(1) \approx \int_{-1}^1 f(x) dx$$

Potremmo chiederci qual'è la migliore scelta dei coefficienti di peso  $a_i$ . Questi saranno chiaramente quelli che massimizzano il grado di precisione  $m$  della formula di quadratura  $J_m$ . Vorremmo quindi imporre due condizioni:

$$\begin{cases} E_n(1) = 0 \\ E_n(x) = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \int_{-1}^1 1 dx - (a_0 + a_1) = 0 \\ \int_{-1}^1 x dx - (-a_0 + a_1) = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2 - a_0 - a_1 = 0 \\ 0 + a_0 - a_1 = 0 \end{cases}$$

i da cui risolvendo il sistema si ha:

$$a_0, a_1 = 1$$

Il risultato sarà quindi che la formula di quadratura è:

$$J_1(f) = f(-1) + f(1)$$

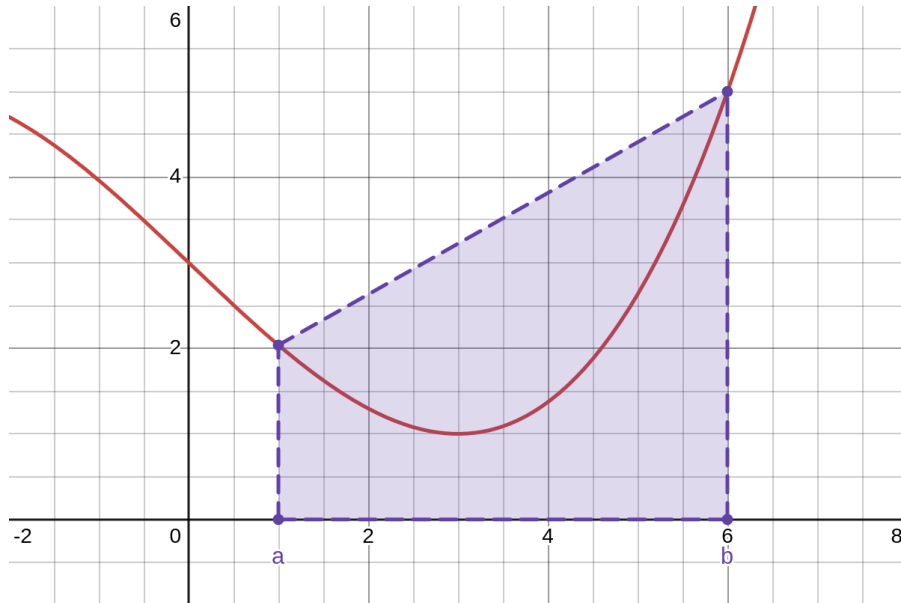
con grado di precisione almeno 1 ( $m \geq 1$ ).

Verifichiamo infatti cosa accade per gradi  $> m$ , ad esempio grado 2:

$$E_n(x^2) = \int_{-1}^1 x^2 dx - (1 + 1) = \frac{2}{3} - 2 \neq 0$$

per cui  $m$  è esattamente 1.

Graficamente, questo non significherà altro che approssimare l'integrale fra  $-1$  e  $1$  attraverso l'area sottesa alla retta passante per i punti  $(-1, f(-1))$ ,  $(1, f(1))$ , cosa che chiaramente risulta inadeguata quando  $f$  è di grado maggiore a 1 (come ad esempio una parabola). Vediamo infatti su un grafico che dato  $a$  e  $b$  consideriamo l'area evidenziata in viola:



Quest'area è effettivamente un trapezio, motivo per cui la formula  $J_1$  sul generico intervallo  $[a, b]$  viene detta **formula dei trapezi**:

$$(f(a) + f(b)) \frac{b - a}{2}$$

Possiamo dimostrare questa in 2 modi:

- Applicando direttamente l'area del trapezio, cioè:

$$(b + B) \frac{h}{2} = (f(a) + f(b)) \frac{b - a}{2}$$

□

- Alternativamente possiamo ricorrere all'imposizione di un sistema simile a quello visto prima all'intervallo generico  $[a, b]$ :

$$\begin{aligned} \begin{cases} E_n(1) = 0 \\ E_n(x) = 0 \end{cases} &\rightarrow \begin{cases} \int_a^b 1 \, dx - a_0 - a_1 = 0 \\ \int_a^b x \, dx - a \cdot a_0 - b \cdot a_1 = 0 \end{cases} \\ \rightarrow \begin{cases} b - a = a_0 + a_1 \\ \left. \frac{x^2}{2} \right|_a^b = a \cdot a_0 + b \cdot a_1 \end{cases} &\rightarrow \begin{cases} b - a = a_0 + a_1 \\ \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2} = a \cdot a_0 + b \cdot a_1 \end{cases} \end{aligned}$$

da cui si ottiene il sistema:

$$\begin{cases} a_0 + a_1 = b - a \\ a \cdot a_0 + b \cdot a_1 = \frac{b^2 - a^2}{2} \end{cases}$$

Prendiamo ad esempio  $a_0$  dalla prima equazione:

$$a_0 = b - a - a_1$$

che sostituendo nella seconda equazione dà:

$$a(b - a - a_1) + ba_1 = \frac{b^2 - a^2}{2} \Rightarrow ab - a^2 - aa_1 + ba_1 = \frac{b^2 - a^2}{2}$$

$$\implies (b-a)a_1 = \frac{b^2 - a^2}{2} - ab + a^2 = \frac{a^2 - 2ab + b^2}{2} = \frac{(b-a)^2}{2}$$

dove guardando gli estremi si ha:

$$a_1 = \frac{b-a}{2}$$

Dalla prima equazione, poi, è immediato che anche:

$$a_0 = \frac{b-a}{2}$$

da cui la formula dei trapezi. □

### 1.1.2 Formula di Simpson

Vediamo di raffinare la formula dei trapezi aggiungendo un nodo in più, ad esempio il punto intermedio fra gli estremi dell'intervallo  $[a, b]$ . Nel caso  $[-1, 1]$ , questo non sarà altro che 0, per cui  $x_0 = -1, x_1 = 0, x_2 = 1$ . Avremo che la formula di quadratura è:

$$J_2(f) = a_0 f(-1) + a_1 f(0) + a_2 f(1)$$

e scegliamo gli  $a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}$  per massimizzare il grado di precisione, con procedimento analogo a prima:

$$\begin{cases} E_n(1) = 0 \\ E_n(x) = 0 \\ E_n(x^2) = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2 = a_0 + a_1 + a_2 \\ 0 = -a_0 + a_2 \\ \frac{2}{3} = a_0 + a_2 \end{cases}$$

da cui:

$$a_0 = a_2 = \frac{1}{3}, \quad a_1 = \frac{4}{3}$$

Il risultato sarà quindi che la formula di quadratura è:

$$J_2(f) = \frac{1}{3} (f(-1) + 4f(0) + f(1))$$

detta anche **formula di Simpson** o di *Cavalieri-Simpson*.

Vediamo cosa succede per l'integrale del monomio di grado 3 attraverso la formula di Simpson:

$$E_2(x^3) = \int_{-1}^1 x^3 dx - \frac{1}{3} (-1 + 4 \cdot 0 + 1) = 0$$

cioè abbiamo grado non solo  $\geq 2$ , ma anche  $\geq 3$ , per cui consideriamo il grado 4:

$$E_2(x^4) = \int_{-1}^1 x^4 dx - \frac{1}{3} (1 + 4 \cdot 0 + 1) = \frac{2}{5} - \frac{2}{3} \neq 0$$

per cui abbiamo che il grado di precisione della formula di Simpson è esattamente  $m = 3$ .

Infine generalizziamo la formula di Simpson all'intervallo  $[a, b]$ :

$$\frac{b-a}{6} \left( f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right)$$

Questa si dimostra per calcolo diretto, imponendo le condizioni sul generico intervallo  $[a, b]$ :

$$\begin{cases} E_n(1) = 0 \\ E_n(x) = 0 \\ E_n(x^2) = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \int_a^b 1 dx - a_0 - a_1 - a_2 = 0 \\ \int_a^b x dx - a \cdot a_0 - \frac{a+b}{2}a_1 - b \cdot a_2 = 0 \\ \int_a^b x^2 dx - a^2 \cdot a_0 - \frac{(a+b)^2}{4}a_1 - b^2 \cdot a_2 = 0 \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} b - a = a_0 + a_1 + a_2 \\ \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2} = a \cdot a_0 + \frac{a+b}{2}a_1 + b \cdot a_2 \\ \frac{b^3}{3} - \frac{a^3}{3} = a^2 \cdot a_0 + \frac{(a+b)^2}{4}a_1 + b^2 \cdot a_2 \end{cases}$$

Abbiamo che dalla prima equazione si ricava:

$$a_0 = b - a - a_1 - a_2$$

mentre dalla seconda si ha, sostituendo:

$$\begin{aligned} \frac{b^2 - a^2}{2} &= a(b - a - a_1 - a_2) + \frac{a+b}{2}a_1 + ba_2 = \\ &= ab - a^2 - a \cdot a_1 - a \cdot a_2 + \frac{a+b}{2}a_1 + ba_2 \\ \Rightarrow \frac{b^2 - a^2}{2} - ab + a^2 &= -a \cdot a_1 - a \cdot a_2 + \frac{a+b}{2}a_1 + b \cdot a_2 \\ \Rightarrow \frac{b^2 - a^2 - 2ab + 2a^2}{2} &= a_1 \left( -a + \frac{a+b}{2} \right) + a_2(b-a) \Rightarrow \frac{(b-a)^2}{2} = a_1 \left( \frac{b-a}{2} \right) + a_2(b-a) \end{aligned}$$

da cui:

$$a_1 = b - a - 2a_2$$

Sostituendo questo nella formula trovata prima per  $a_0$  si trova quindi:

$$a_0 = b - a - b + a + 2a_2 - a_2 = a_2$$

cioè valgono le condizioni:

$$\begin{cases} a_0 = a_2 \\ a_1 = b - a - 2a_0 = b - a - 2a_2 \end{cases}$$

Usiamo queste per trovare  $a_0$  (o equivalentemente  $a_2$ ) dalla terza equazione. Avremo in questo caso:

$$\begin{aligned} \frac{b^3}{3} - \frac{a^3}{3} &= a^2 \cdot a_0 + \frac{(a+b)^2}{4}a_1 + b^2 \cdot a_0 = a^2 \cdot a_0 + \frac{(a+b)^2}{4}(b-a-2a_0) + b^2 \cdot a_0 \\ &= a^2 \cdot a_0 + b^2 \cdot a_0 + \frac{(a+b)^2}{4}(b-a) - \frac{(a+b)^2}{2}a_0 \end{aligned}$$

dove vorremo dividere i termini fra parte sinistra e destra come:

$$\frac{b^3 - a^3}{3} - \frac{(a+b)^2}{4}(b-a) = a^2 \cdot a_0 + b^2 \cdot a_0 - \frac{(a+b)^2}{2}a_0$$

Valutiamo queste separatamente.

• **Parte sinistra:**

$$\begin{aligned} \frac{b^3 - a^3}{3} - \frac{(a+b)^2}{4}(b-a) &= \frac{b^3 - a^3}{3} - \frac{a^2 + 2ab + b^2}{4}(b-a) \\ &= \frac{b^3 - a^3}{3} - \frac{a^2b - a^3 + 2ab^2 - 2a^2b + b^3 - ab^2}{4} = \frac{b^3 - a^3}{3} + \frac{-b^3 + a^3 + a^2b - ab^2}{4} \\ &= \frac{1}{12}b^3 - \frac{1}{12}a^3 + \frac{1}{4}a^2b - \frac{1}{4}ab^2 = \frac{1}{12}(b-a)^3 \end{aligned}$$

• **Parte destra:**

$$\begin{aligned} a^2 \cdot a_0 + b^2 \cdot a_0 - \frac{(a+b)^2}{2}a_0 &= a^2 \cdot a_0 + b^2 \cdot a_0 - \left(\frac{a^2}{2} + ab + \frac{b^2}{2}\right)a_0 \\ &= \frac{a^2}{2}a_0 + \frac{b^2}{2}a_0 - ab \cdot a_0 = \frac{(b-a)^2}{2}a_0 \end{aligned}$$

da cui avremo quindi complessivamente:

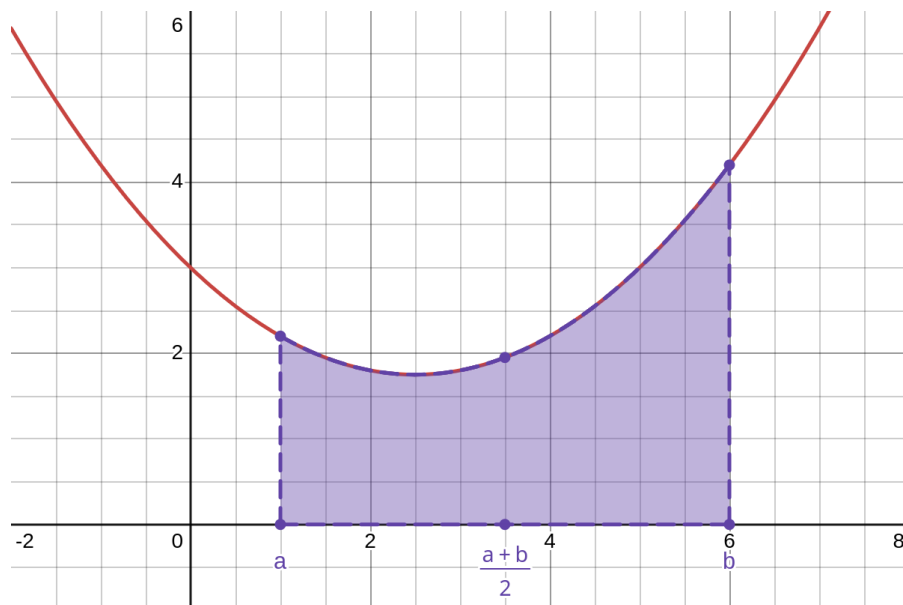
$$\frac{1}{12}(b-a)^3 = \frac{(b-a)^2}{2}a_0 \implies a_0 = \frac{b-a}{6}$$

da cui si ha immediatamente che:

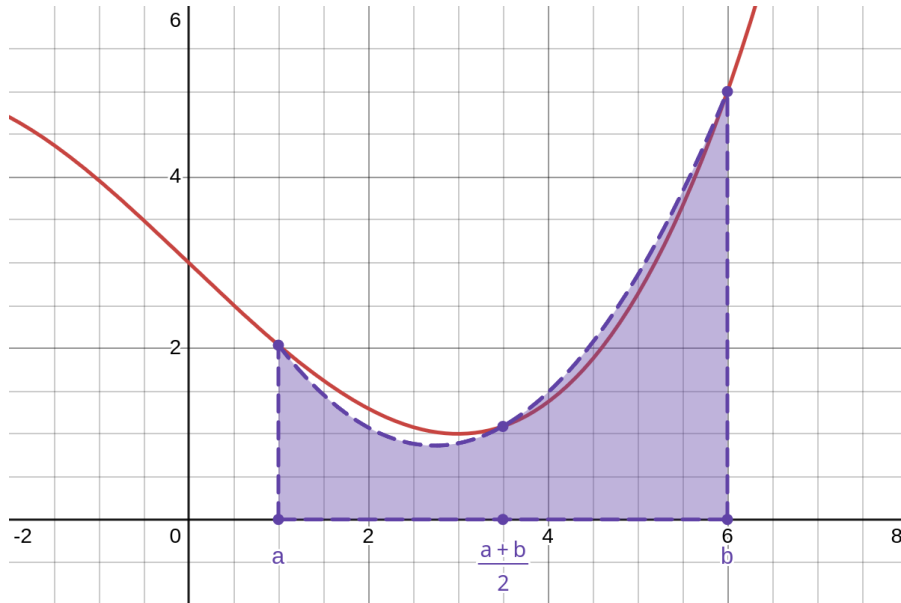
$$a_0 = a_2 = \frac{2}{3}(b-a)$$

che dà esattamente la formula di Simpson. □

Abbiamo quindi che anche Simpson si basa sul trovare implicitamente il polinomio interpolante e poi integrare quello, con la caratteristica aggiunta che anche al grado 3 l'integrale risulta esatto (anche se non lo è l'interpolante). In particolare, vediamo sul grafico che l'interpolante per una quadratica dà il risultato esatto:



e che per una cubica, anche se l'interpolante non coincide con la funzione, si ha comunque risultato esatto. Questo è dato dal fatto che si creano due regioni discordi che si compensano fra di loro:



### 1.1.3 Formula Gaussiana

Rivediamo quindi il problema di massimizzare il grado di precisione dati i nodi  $x_0, \dots, x_n$ . Questo significherà imporre:

$$\begin{cases} E_n(1) = 0 \\ E_n(x) = 0 \\ \vdots \\ E_n(x^{m+1}) = 0 \end{cases}$$

cioè  $m + 1$  equazioni per  $a_0, \dots, a_m$ , cioè  $m + 1$  incognite. Questo porta a:

$$\Rightarrow \begin{cases} m_0 = a_0 + a_1 + \dots + a_n \\ m_1 = a_0 x_0 + a_1 x_1 + \dots + a_n x_n \\ \vdots \\ m_n = a_0 x_0^n + a_1 x_1^n + \dots + a_n x_n^n \end{cases}$$

dove gli  $m_i$  sono i risultati degli integrali dei monomi  $x^i$  sull'intervallo  $[a, b]$  da cui:

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_0 & x_1 & \dots & x_n \\ x_0^2 & x_1^2 & \dots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_0^n & x_1^n & \dots & x_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_0 \\ \vdots \\ m_n \end{pmatrix} = V^T \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_0 \\ \vdots \\ m_n \end{pmatrix}$$

Questo non è altro che un sistema lineare  $(n + 1) \times (n + 1)$  con matrice di Vandermonde, da cui  $\det(V) \neq 0$  e quindi se  $x_i \neq x_j$  per ogni  $i \neq j$ , la soluzione del sistema è unica ed esiste un'unica formula di quadratura sui nodi  $x_0, \dots, x_n$  che ha grado di precisione  $m \geq n$ .

Potremmo considerare il problema diverso (e più difficile) di cercare sia i *nod*i che i *pesi* in modo da massimizzare il grado di precisione  $m$ . In questo caso la formula di



quadratura è sempre:

$$J_n(f) = \sum_{i=0}^n a_i f(x_i)$$

e le incognite sono  $2n + 2$ , cioè gli  $n + 1$  nodi  $x_0, \dots, x_n$  e gli  $n + 1$  pesi  $a_0, \dots, a_n$ .

Si impongono quindi  $2n + 2$  equazioni del tipo:

$$\begin{cases} E_n(1) = 0 \\ E_n(x) = 0 \\ \vdots \\ E_n(x^{2n+1}) = 0 \end{cases}$$

L'unica cosa che sarà data sarà l'intervallo  $[a, b]$  (non gli  $x_i$ ), per cui otterremo un sistema non lineare:

$$\begin{cases} a_0 + a_1 + \dots + a_n = m_0 \\ a_0 x_0 + a_1 x_1 + \dots + a_n x_n = m_1 \\ \vdots \\ a_0 x_0^{2n+1} + a_1 x_1^{2n+1} + \dots + a_n x_n^{2n+1} = m_{2n+1} \end{cases}$$

Fortunatamente esiste un teorema, che diamo senza dimostrazione:

#### Teorema 1.1: Unicità della formula Gaussiana

Il sistema:

$$\begin{cases} a_0 + a_1 + \dots + a_n = m_0 \\ a_0 x_0 + a_1 x_1 + \dots + a_n x_n = m_1 \\ \vdots \\ a_0 x_0^{2n+1} + a_1 x_1^{2n+1} + \dots + a_n x_n^{2n+1} = m_{2n+1} \end{cases}$$

ammette sempre, dato  $x_i \neq x_j$  per ogni  $i \neq j$ , un'unica soluzione per ogni scelta di  $[a, b]$ ,  $n$  e  $\rho(x)$ , con grado di precisione  $\geq 2n + 1$ .

Definiamo tale formula di quadratura come:

#### Definizione 1.4: Formula Gaussiana

L'unica formula di quadratura su  $[a, b]$  che verifica il sistema del teorema 16.1 (ovvero che massimizza il grado di precisione ottimizzando sia gli  $x_i$  che gli  $a_i$ ) si dice **formula Gaussiana** su  $[a, b]$  con  $n + 1$  nodi.

Prendiamo ad esempio il caso  $\rho = 1$ ,  $n = 1$ , e  $[a, b] = [-1, 1]$  (analogamente a prima ma con i nodi liberi).

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx a_0 f(x_0) + a_1 f(x_1)$$

con:

$$a \leq x_0 < x_1 \leq b$$

Imponiamo quindi:

$$\begin{cases} E_1(1) = 0 \\ E_1(x) = 0 \\ E_1(x^2) = 0 \\ E_1(x^3) = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a_0 + a_1 = 2 \\ a_0x_0 + a_1x_1 = 0 \\ a_0x_0^2 + a_1x_1^2 = \frac{2}{3} \\ a_0x_0^3 + a_1x_1^3 = 0 \end{cases}$$

per risolvere il sistema ricaviamo prima  $a_0$  e  $a_1$  in funzione di  $x_0$  e  $x_1$  dalle prime 2 equazioni:

- $a_0$  si ha direttamente dalla prima equazione:

$$a_0 = 2 - a_1$$

- $a_1$  si ha dalla seconda equazione,, sostituendo la formula per  $a_0$  appena trovata:

$$(2 - a_1)x_0 + a_1x_1 = 2x_0 - a_1x_0 + a_1x_1 = 0 \implies a_1(x_1 - x_0) = \frac{-2x_0}{x_1 - x_0}$$

da cui abbiamo che vale:

$$a_0 = \frac{2x_1}{x_1 - x_0}, \quad a_1 = -\frac{2x_0}{x_1 - x_0}$$

Prendiamo quindi il sistema ridotto alle ultime 2 equazioni:

$$\begin{cases} \frac{2x_1x_0^2}{x_1-x_0} - \frac{2x_0x_1^2}{x_1-x_0} = \frac{2}{3} \\ \frac{2x_1x_0^3}{x_1-x_0} - \frac{2x_0x_1^3}{x_1-x_0} = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2x_1x_0^2 - 2x_0x_1^2 = \frac{2}{3}(x_1 - x_0) \\ 2x_1x_0^3 - 2x_0x_1^3 = 0 \end{cases}$$

dall'ultima di queste si ricava:

$$2x_1x_0^3 - 2x_0x_1^3 = 0 \implies 2x_1x_0^3 = 2x_0x_1^3 \implies x_0^2 = x_1^2 \implies x_0 = \pm x_1$$

Ci interesserà prendere  $x_0 = -x_1$ , da cui dalla prima equazione:

$$2x_1^3 + 2x_1^4 = \frac{4}{3}x_1 \implies x_1^2 = \frac{1}{3}$$

cioè:

$$x_0, x_1 = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$$

sostituendo nelle formule per  $a_0$  e  $a_1$  trovate prima, si ha poi immediatamente:

$$a_0, a_1 = 1,$$

cioè la formula Gaussiana è:

$$J_1(f) = f\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) + f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$$

che vale fino al grado 3, in quanto al grado 4 si ha:

$$E_1(x^4) = \frac{2}{5} - \frac{2}{9} \neq 0$$

da cui il grado di precisione è esattamente 3. □

### 1.1.4 Errore nelle formule di quadratura

Riguardo all'errore già definito nella definizione 16.2, vale il seguente teorema:

#### Teorema 1.2: Teorema di Peano

Data una funzione  $f(x) \in \mathbb{C}^{n+1}([a, b])$ , cioè derivabile  $n + 1$  volte, con  $m$  grado di precisione della formula di quadratura  $J_n$ , allora l'errore  $E_n$  (vedi definizione 16.2) si può scrivere come:

$$E_n(f) = I(\rho, f) - J_n(f) = \frac{1}{m!} \int_a^b f^{(m+1)}(t) \cdot G(t) dt$$

dove la  $G(t)$  è:

$$G(t) = E_n(s_m(x - t)) = I(\rho \cdot s_m(x - t)) - J_n(s_m(x - t))$$

e la  $s_m(x)$  è:

$$s_m(x) = \begin{cases} x^m, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

cioè la  $s_m(x - t)$  non è altro che la  $s_m(x)$  spostata a destra di  $t$ .

Vale la definizione:

#### Definizione 1.5: Nucleo di Peano

La funzione  $G(t)$  del teorema 16.2 è detta **nucleo di Peano**.