

1 Lezione del 11-04-25

Riprendiamo il discorso dell'interpolazione polinomiale nella prospettiva di arrivare all'interpolazione di Newton, a cui abbiamo accennato alla scorsa lezione.

Avevamo detto di avere $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_k, y_k)$, cioè $k+1$ punti **distinti**, cioè con $x_i \neq x_j, \forall i \neq j$, tali per cui volevamo interpolarli con un polinomio di grado k . Questo esisteva ed era unico appunto sotto l'ipotesi di punti distinti.

Avevamo visto le possibili basi per la realizzazione di tale polinomio, di *Vandermonde* e di *Lagrange*.

1.1 Differenze divise

Avevamo poi introdotto la base di **Newton**, che definiva il polinomio del tipo:

$$p_k(x) = \sum_{j=0}^k f[x_0, \dots, x_j] m_j(x)$$

con:

$$\begin{cases} m_0(x) = 1 \\ m_j(x) = (x - x_0) \dots (x - x_{j-1}), \quad \forall j \geq 1 \end{cases}$$

I coefficienti $f[x_0, \dots, x_j] \forall j$ si definiscono per *ricorsione*. Definiamo quindi la formula di ricorrenza:

Definizione 1.1: Differenza divisa

Data una funzione $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, e dati $x_0, \dots, x_{k-1} \in \mathbb{R}$, con $x_i \neq x_j \forall i \neq j$, vogliamo una funzione $f[x]$ che rispetti:

$$\begin{cases} f[x] = f(x) & k = 0 \\ f[x_0, x] = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} & k = 1 \\ f[x_0, \dots, x_{k-1}, x] = \frac{f[x_0, \dots, x_{k-2}] - f[x_0, \dots, x_{k-1}]}{x - x_{k-1}}, & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Le differenze divise ricordano la forma del *rapporto incrementale*, e anzi corrispondono esattamente a questo per $k = 1$, mentre per $k > 1$ si può pensare ad un'approssimazione "grezza" delle derivate di ordine k , cioè:

$$\begin{cases} k = 0 : & f[x] = f(x) \\ k = 1 : & f[x_0, x] = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \approx \frac{df}{dx}(x_0) \\ f[x_0, \dots, x_{k-1}, x] = \frac{f[x_0, \dots, x_{k-2}] - f[x_0, \dots, x_{k-1}]}{x - x_{k-1}} \approx \frac{d^{k-2}f}{dx^{k-2}}(x_0) \end{cases}$$

mettici caso grado 2 boh

1.1.1 Proprietà delle differenze divise

Possiamo trovare le seguenti proprietà delle differenze divise:

1. $\forall P$ permutazione $\{i_0, \dots, i_k\}$ di $\{0, \dots, k\}$ vale:

$$f[x_0, x_1, \dots, x_k] = f[x_{i_0}, x_{i_1}, \dots, x_{i_k}, x]$$

non so se ci vuole una x lì dentro cioè una permutazione dei $0, \dots, k$ non cambia la differenza divisa;

2. $f[x_0, \dots, x_{k-1}, x]$ è una funzione non definita in x_0, \dots, x_{k-1} . Tuttavia, se $f \in C^1(I)$ con I contenente x_0, \dots, x_k , allora è prolungabile per continuità su tale intervallo;
3. Se f è non solo C^1 , ma $f \in C^k(I)$, allora esiste ϵ tale che:

$$\epsilon \in \left[\min_{0 \leq i \leq k} x_i, \max_{0 \leq i \leq k} x_i \right]$$

tale che:

$$f[x_0, \dots, x_k] = \frac{f^k(\epsilon)}{k!}$$

non so se ci vuole un epsilon lì dentro Questa è una conseguenza del teorema di Lagrange.

1.1.2 Calcolo delle differenze divise

Esiste un metodo piuttosto schematico per il calcolo delle differenze divise. Dati $k + 1$ punti di interpolazione, si possono calcolare le differenze divise fino all'ordine k secondo questo schema (posto $k = 3$), detto **quadro delle differenze divise**:

| x | $f(x)$ | DD1 | DD2 | DD3 |
|-------|----------|---------------|--------------------|-------------------------|
| x_0 | $f(x_0)$ | // | // | // |
| x_1 | $f(x_1)$ | $f[x_0, x_1]$ | // | // |
| x_2 | $f(x_2)$ | $f[x_0, x_2]$ | $f[x_0, x_1, x_2]$ | // |
| x_3 | $f(x_3)$ | $f[x_0, x_3]$ | $f[x_0, x_2, x_3]$ | $f[x_0, x_1, x_2, x_3]$ |

Cioè a ogni passaggio completiamo una riga, da sinistra verso destra, con le differenze divise note a quel passaggio. Notiamo che in verità le differenze divise che compaiono sulla *diagonale* sono le sole che compaiono effettivamente nel polinomio di Newton.

Supponendo di scrivere gli elementi della tabella come le entrate di una matrice $A = a_{ij}$ triangolare inferiore, per calcolare una sua entrata a_{ij} la formula da applicare è la seguente:

$$a_{ij} = \frac{a_{i,j-1} - a_{j-1,j-1}}{x_i - x_{j-1}}$$

Poniamo infatti A :

$$A = \begin{pmatrix} f(x_0) & & & & 0 \\ f(x_1) & f[x_0, x_1] & & & \\ \vdots & f[x_0, x_2] & f[x_0, x_1, x_2] & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \\ f(x_k) & f[x_0, x_k] & f[x_0, x_1, x_k] & \dots & f[x_0, x_1, \dots, x_k] \end{pmatrix}$$

1.1.3 Esempio: quadro delle differenze divise

Vediamo un caso pratico di quadro risolto:

| x | $f(x)$ | DD1 | DD2 | DD3 |
|-----|--------|-----|-----|---------------|
| 0 | 3 | // | // | // |
| 1 | 8 | 5 | // | // |
| 2 | 15 | 6 | 1 | // |
| 3 | 17 | 11 | 2 | $\frac{1}{2}$ |

A questo punto il polinomio sarà:

$$p_3(x)$$

$$\begin{aligned} &= f[x_0] + f[x_0, x_1](x-x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x-x_0)(x-x_1) + f[x_0, x_1, x_2, x_3](x-x_0)(x-x_1)(x-x_2) \\ &= 3 + 5(x-0) + 1(x-0)(x-1) + \frac{1}{2}(x-0)(x-1)(x-2) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 5x + 3 \end{aligned}$$

Osserviamo che, nel caso in cui gli elementi di una colonna delle differenze divise sono tutti uguali, gli elementi delle colonne successive sono tutti nulli, e in particolare il grado del polinomio di interpolazione p_k sarà p_i con i l'ultima colonna non nulla (cioè l'ordine dell'ultima differenza divisa non nulla).

1.1.4 Esempio: colonne nulle nel quadro

Vediamo ad esempio:

| x | $f(x)$ | DD1 | DD2 | DD3 | DD4 |
|-----|--------|-----|-----|-----|-----|
| 0 | 5 | // | // | // | // |
| -1 | 3 | 2 | // | // | // |
| 2 | 3 | -1 | -1 | // | // |
| -2 | -9 | 7 | -5 | 1 | // |
| 3 | 11 | 2 | 0 | 1 | 0 |

Come vediamo, alla colonna DD3 le differenze divise sono 1 e 1, ergo la differenza divisa in DD4 è nulla. Questo significherà che il polinomio interpolante, sebbene sono stati presi $k+1 = 5$ punti, da cui ci aspetteremo un polinomio di grado $k = 4$, ha invece grado 3, cioè è:

$$p_2(x) = 5 + 2(x-0) - 1(x-0)(x+1) + 1(x-0)(x+1)(x-2) = x^3 - 2x^2 - x + 5$$

Osserviamo infine che data una tabella di valori $(x_0, y_0), \dots, (x_k, y_k)$ da interpolare, possiamo riordinarli come vogliamo nel quadro delle differenze divise. Questo può essere utile a semplificare i calcoli.

1.1.5 Esempio: riordinamento dei valori

Poniamo di avere i seguenti dati:

| x | $f(x)$ |
|----------|---------------|
| 0 | 2 |
| 1 | 1 |
| α | 4 |
| -1 | $3\alpha + 1$ |
| 3 | 11 |

con $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1, -1, 3\}$ e di chiederci quale deve essere il valore di α perché il polinomio interpolante abbia grado minimo.

Vediamo quindi di riordinare i dati in modo che i termini dipendenti da α vadano a finire in fondo alla tabella:

| x | $f(x)$ | DD1 | DD2 | DD3 | DD4 |
|----------|---------------|--------------------|-------------------------------------|-----|-----|
| 0 | 2 | // | // | // | // |
| 1 | 1 | -1 | // | // | // |
| 3 | 11 | 3 | 2 | ... | |
| -1 | $3\alpha + 1$ | $1 - 3\alpha$ | $\frac{3\alpha-2}{2}$ | ... | |
| α | 4 | $\frac{2}{\alpha}$ | $\frac{2+\alpha}{\alpha(\alpha-1)}$ | ... | |

Alla colonna DD1 non abbiamo speranza di soddisfare la condizione di colonna tutta uguale (ci sono -1 e 3), mentre alla colonna DD2 possiamo provare ad imporre:

$$\begin{cases} \frac{3\alpha-2}{2} = 2 \implies \alpha = 2 \\ \frac{2+\alpha}{\alpha(\alpha-1)} = 2 \implies \alpha = 2 \end{cases}$$

che quindi, per pura fortuna, corrisponde. Possiamo allora prendere $\alpha = 2$ e completare il quadro:

| x | $f(x)$ | DD1 | DD2 | DD3 | DD4 |
|----------|---------------|--------------------|-----|-----|-----|
| 0 | 2 | // | // | // | // |
| 1 | 1 | -1 | // | // | // |
| 3 | 11 | 3 | 2 | // | // |
| -1 | $3\alpha + 1$ | $1 - 3\alpha$ | 2 | 0 | // |
| α | 4 | $\frac{2}{\alpha}$ | 2 | 0 | 0 |

da cui il polinomio al solo grado 2:

$$p_2(x) = 2 - x + 2x(x - 1) = 2x^2 - 3x + 2$$

1.2 Errore nell'approssimazione polinomiale

Veniamo quindi alla valutazione dell'errore. Vale il seguente teorema:

Teorema 1.1: Errore nell'approssimazione polinomiale

Presi $k + 1$ punti x_0, \dots, x_k con $x_i \neq x_j \forall i \neq j$. Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tale che $f \in C^{k+1}(I)$ con $I \subseteq \mathbb{R}$ contenente x_0, \dots, x_k . Se $p_k(x)$ è il polinomio di interpolazione di grado al più k che interpola i punti $(x_0, f(x_0)), \dots, (x_k, f(x_k))$ allora riguardo all'errore vale:

$$f(x) - p_k(x) = \Pi(x) \frac{f^{(k+1)}(\xi)}{(k+1)!}$$

con:

$$\Pi(x) = \prod_{j=0}^k (x - x_j)$$

per un certo ξ tale che:

$$\xi \in \left[\min_{0 \leq i \leq k} x_i \cup x, \max_{0 \leq i \leq k} x_i \cup x \right]$$

Osserviamo quindi che conoscendo una stima di $|f^{(k+1)}|$ e di $|\Pi(x)|$ si può provare a stimare l'errore del polinomio di interpolazione quando si valuta $p_k(x)$ fuori dai nodi $\{x_j\}_{j=0}^k$.

1.3 Riassunto fra base di Newton e base di Lagrange

Facciamo quindi un riassunto confrontando la base di Newton e la base di Lagrange.

| | Newton | Lagrange |
|--------------|---|---|
| Base | $m_j(x) = (x - x_0) \dots (x - x_{j-1})$ | $e_j(x) = \prod_{i \neq j}^k \frac{x - x_i}{x_j - x_i}$ |
| Coef. | $f[x_0, \dots, x_j]$ Con la base di Newton, se si è calcolato $p_k(x)$ e si vuole $p_{k+1}(x)$, basta calcolare m_{k+1} e $f[x_0, \dots, x_k]$ da $f[x_0, \dots, x_{k-1}]$ Il grado del polinomio si nota facilmente | $f(x_j) = y_j$ Con la base di Lagrange, per fare la stessa cosa bisogna ricalcolare tutti gli $e_j(x)$ Per trovare il grado del polinomio bisogna espandere nella base dei monomi |

1.4 Interpolazione osculatoria di Hermite

Vediamo un altro metodo per interpolare polinomi. Supponiamo di conoscere non soltanto ai nodi il valore della funzione, ma anche il valore della sua derivata. In questo caso potremo costruire un polinomio in cui le valutazioni e quelle derivata equivalgono rispettivamente ai valori di f e f' . Questo potrebbe essere utile nel caso in cui conosciamo sia la posizione che la velocità di un corpo in certi istanti e vogliamo approssimarne la traiettoria.

Definiamo quindi:

Definizione 1.2: Polinomio interpolante di Hermite

Dati $x_0, \dots, x_k \in \mathbb{R}$ e $2k + 2$ valori $\{f(x_0), \dots, f(x_k)\}$ e $\{f'(x_0), \dots, f'(x_k)\}$ di una certa funzione $f \in C^1(I)$, si dice polinomio interpolante di Hermite per f cui nodi x_0, \dots, x_k il polinomio $H_{2k+1}(x)$ di grado al più $2k + 1$ tale che:

$$H_{2k+1}(x_j) = f(x_j), \quad H'_{2k+1}(x_j) = f'(x_j), \quad \forall j = 0, \dots, k$$

Varrà quindi il seguente teorema:

Teorema 1.2: Esistenza del polinomio interpolante di Hermite

Se $x_i \neq x_j \forall i \neq j$ allora esiste ed è unico il polinomio di Hermite H_{2k+1} per $f \in C^1(I)$.

c'è una dimostrazione DA SAPERE sulle dispense

Fondamentalmente l'argomentazione per la dimostrazione è simile a quella della matrice di Vandermonde.

Si potrebbe formulare un sistema lineare (fallo) come è stato fatto nel caso Vandermonde, ma questo non conviene in quanto si incontrano gli stessi problemi di malcondizionamento che avevamo incontrato anche in Vandermonde.

Tipicamente allora si procede in maniera analoga all'interpolazione di Lagrange, ma generalizzata per ottenere le condizioni sulle derivate. Più precisamente, cerchiamo un

polinomio della forma:

$$H_{2k+1}(x) = \sum_{j=0}^k h_{0j}(x)f(x_j) + \sum_{j=0}^k h_{1j}(x)f'(x_j)$$

Avremo che $f(x_j)$ e $f'(x_j)$ sono chiaramente i dati del problema, che faranno da coefficienti, mentre $h_{0j}(x)$ e $h_{1j}(x)$ saranno polinomi di grado $2k + 1$ tali che:

$$\begin{aligned} h_{0j}(x_i) &= \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}, \quad h'_{0j}(x_i) = 0 \quad \forall 0 \leq i \leq k \\ h_{1j}(x_i) &= 0, \quad h'_{1j}(x_i) = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \quad \forall 0 \leq i \leq k \end{aligned} \quad (1)$$

che possiamo interpretare come le condizioni imposte alle basi di Lagrange generalizzata al caso con la derivata prima.

Se valgono queste proprietà, infatti, si ha che:

$$H_{2k+1}(x_i) = \sum_{j=0}^k h_{0j}(x_i)f(x_j) + \sum_{j=0}^k h_{1j}(x_i)f'(x_j) = f(x_i) + 0$$

e rispetto alla derivata prima:

$$H'_{2k+1}(x_i) = \sum_{j=0}^k h'_{0j}(x_i)f(x_j) + \sum_{j=0}^k h'_{1j}(x_i)f'(x_j) = 0 + f'(x_i)$$

con in entrambi i casi, $\forall i = 0, \dots, k$.

Osserviamo che come nel caso dell'interpolazione standard, stiamo rinunciando a cercare una rappresentazione di H_{2k+1} nella base dei monomi $\{1, x, \dots, x^{2k+1}\}$ e cerchiamo invece un'espressione rispetto alla base:

$$B_{\text{Hermite}} = \{h_{01}(x), \dots, h_{0k}(x), h_{10}(x), \dots, h_{1k}(x)\}$$

in cui i coefficienti delle combinazioni lineari sono:

$$f(x_0), \dots, f(x_k), f'(x_0), \dots, f'(x_k)$$

Il problema si riconduce quindi a trovare $h_{0j}(x), h_{1j}(x) \forall j$ che soddisfino le proprietà (3).

L'idea parte dall'*ansatz* di cercare h_{0j} e h_{1j} della forma:

$$h_{0j} = (Ax + B)e_j^2(x), \quad h_{1j} = (Cx + D)e_j^2(x)$$

con $e_j(x)$ j -esimo polinomio in base di Lagrange, cioè:

$$e_j(x) = \prod_{i \neq j}^k \frac{x - x_i}{x_j - x_i}$$

Imponiamo quindi le proprietà (3) per ricavare A, B, C, D di ogni h_{0j} e h_{1j} , per ottenere: fai calcoli

$$\begin{cases} h_{0j}(x) = (1 - 2e'_j(x_j)(x - x_j)) e_j^2(x) \\ h_{1j}(x) = (x - x_j) e_j^2(x) \end{cases}$$

ossia:

$$H_{2k+1}(x) = \sum_{j=0}^k f(x_j) (1 - 2e'_j(x_j)(x - x_j)) e_j^2(x) + \sum_{j=0}^k f'(x_j)(x - x_j) e_j^2(x)$$

1.4.1 Esempio: trenitalia fallisce

Supponiamo di avere 2 binari e di volerli unire in maniera C^1 , ovvero vogliamo trovare un polinomio $H_3(x)$ tale che:

$$\begin{cases} H_3(0) = 0 \\ H_3(d) = L \end{cases}, \quad \begin{cases} H'_3(0) = 0 \\ H'_3(d) = s \end{cases}$$

Il polinomio dovrà essere di grado 3 (le due condizioni alle derivate contano nel calcolo del grado). Dobbiamo calcolare, prima di tutto, le basi di Lagrange:

$$e_0(x) = \frac{d-x}{d}, \quad e_1(x) = \frac{x}{d}$$

e sostituire quindi nelle formule per $h_{0j}(x)$ e $h_{1j}(x)$:

$$h_{00}(x) = \left(1 + 2\frac{x}{d}\right) \frac{(x-d)^2}{d^2}, \quad h_{01}(x) = \left(1 - 2\frac{x-d}{d}\right) \frac{x^2}{d^2}$$

$$h_{10}(x) = x \frac{(x-d)^2}{d^2}, \quad h_{11}(x) = (x-d) \frac{x^2}{d^2}$$

per cui otterremo:

$$H_3(x) = 0 \cdot h_{00}(x) + L \cdot h_{01}(x) + 0 \cdot h_{10}(x) + S \cdot h_{11}(x) = L \left(1 - 2\frac{x-d}{d}\right) \frac{x^2}{d^2} + S(x-d) \frac{x^2}{d^2}$$

1.4.2 Errore nell'approssimazione di Hermite

Valutiamo quindi l'errore:

Teorema 1.3: Errore nell'approssimazione di Hermite

Data $f \in C^{2k+2}(I)$ allora:

$$f(x) - H_{2k+1}(x) = \Pi^2(x) \frac{f^{(2k+2)}(\xi)}{(2k+2)!}$$