

1 Lezione del 24-02-25

1.1 Introduzione al corso

Il corso di **calcolo numerico**, o come viene definito oggi *analisi numerica*, tratta lo studio degli algoritmi per problemi in campi continui (incognite in \mathbb{R} , siano queste numeri o funzioni, ecc...) o su grandi moli di dati.

Il programma del corso è così suddiviso:

1. Analisi dell'errore per funzioni scalari;
2. Richiami di algebra lineare (calcolo vettoriale e matriciale, ecc...);
3. Risoluzione di sistemi lineari, cioè forme $Ax = b$;
4. Interpolazione e approssimazione di funzioni nel senso dei minimi quadrati;
5. Metodi per l'integrazione, cioè per forme $\int_a^b f(x) dx$;
6. Equazioni non lineari, cioè ricerca dei punti $g(x) = 0$ per $g(x)$ non lineari;
7. Problemi agli autovalori, cioè date matrici $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$, trovare (λ, x) tali che $Ax = \lambda x$.

1.1.1 Matematica del continuo

Abbiamo detto che i valori trattati sono continui, che intendiamo per appartenenti ad \mathbb{R} . Un problema apparente dei numeri reali è che richiedono teoricamente un numero infinito di cifre per la loro rappresentazione. Si rende quindi necessaria un'approssimazione in modo da ovviare ai problemi:

- Rappresentare oggetti matematici con un numero infinito di parametri;
- Risolvere problemi che non hanno formule chiuse per la soluzione, ma richiedono approcci iterativi (discesa a gradiente, ecc...) e quindi che richiedono un'approssimazione data dall'impossibilità di effettuare infiniti passi.

1.1.2 Errori

Avremo quindi bisogno di valutare degli **errori**, che saranno gli *errori di approssimazione* come riportata sopra, uniti agli *errori nei dati* già presenti nella nostra mole di dati.

Una domanda che potremo porci è come questi errori influiscono sul risultato che ci interessa. Una prima distinzione può essere fra algoritmi **instabili** e **stabili**, cioè che *amplificano* l'errore o lo mantengono costante. Una seconda distinzione può essere sul **condizionamento** del problema, cioè la tendenza del problema a reagire in maniera drastica a piccole variazioni delle condizioni iniziali.

1.1.3 Efficienza

Un'altra considerazione importante è quella dell'**efficienza** degli algoritmi, cioè il tempo che questi richiedono per convergere ad una soluzione valida (non ottima, in quanto abbiamo visto dobbiamo troncare il numero di passi nel caso di approcci iterativi, che altrimenti potrebbe tendere ad infinito). Questo viene stimato attraverso il *costo computazionale*, tenendo conto di una certa *accuratezza* che vogliamo stabilire.

1.2 Rappresentazione dei reali

Introduciamo la classe dei **numeri reali in virgola mobile**, atta a rappresentare numeri $x \in \mathbb{R}$ usando parametri che stanno in \mathbb{N} , o al limite in \mathbb{Z} , in quanto abbiamo visto possiamo gestire numeri di questo tipo in modo esatto nei calcolatori.

Teorema 1.1: Rappresentazione dei reali in virgola mobile

Fissata una base $\beta > 1$, con $\beta \in \mathbb{N}$, si può sempre trovare un esponente $e \in \mathbb{Z}$ e una successione di cifre $\{\alpha_j\}_{j=1,2,\dots}$ tali per cui:

$$x = \text{sgn}(x) \cdot \beta^e \cdot \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j \beta^{-j}$$

Osserviamo che scelte tipiche per β sono 10 (decimale), 2 (binario) e 16 (esadecimale).

Un problema di questa rappresentazione è che non è propriamente **unica**: ad esempio, potremo scrivere un'approssimazione di π come 3.14, o come $0.314 \cdot 10$, equivalentemente. Inoltre, possono esistere casi di numeri periodici, come $2.\bar{9}$, che sono effettivamente uguali ad altri (in questo caso 3).

Sfruttiamo allora il seguente teorema, dato senza dimostrazione:

Teorema 1.2: Teorema di rappresentazione

Dati $\beta \in \mathbb{N}$, $\beta > 1$ base e $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$, allora esiste ed è unica la rappresentazione $x = \text{sgn}(x) \cdot \beta^e \cdot \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j \beta^{-j}$ (dal Teorema 1.1) tale che:

- $\alpha_1 \neq 0$;
- $\exists k \in \mathbb{N} : \alpha_j = \beta - 1 \ \forall j > k$.

Introducendo queste due limitazioni possiamo quindi ovviare al problema dell'unicità.

Diamo quindi alcune definizioni, riguardo alla rappresentazione appena vista:

Definizione 1.1: Rappresentazione in virgola mobile normalizzata

L'unica rappresentazione che verifica il Teorema 1.2 si dice **rappresentazione in virgola mobile normalizzata**.

e riguardo alla successione $\{\alpha_j\}$:

Definizione 1.2: Mantissa

Prende il nome di **mantissa** la serie $\sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j \beta^{-j}$.

Notiamo che vale:

$$\frac{1}{\beta} \leq \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j \beta^{-j} < 1$$

In quanto:

- Per il limite inferiore:

$$\sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j \beta^{-j} \geq \beta^{-1} = \frac{1}{\beta}$$

- Per il limite superiore:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j \beta^{-j} &< (\beta - 1) \sum_{j=1}^{\infty} \beta^{-j} = (\beta - 1) \left(\frac{1}{1 - \beta^{-1}} - 1 \right) \\ &= (\beta - 1) \frac{\beta^{-1}}{1 - \beta^{-1}} = (\beta - 1) \frac{1}{\beta - 1} = 1 \end{aligned}$$

□

Vediamo che la mantissa non è effettivamente rappresentabile nella sua interezza in un calcolatore, in quanto richiederebbe un numero infinito di cifre. Si tronca quindi la mantissa, e si considera un range limitato per l'esponente. Si definisce quindi un sottinsieme:

Definizione 1.3: Numeri di macchina

Dati: $\beta \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{N}$, $L, U \in \mathbb{Z}$ tali che $L \leq U$, si definisce $F(\beta, m, L, U)$ come:

$$F = \{x \in \mathbb{R} : x = \text{sgn}(x) \cdot \beta^e \cdot \sum_{j=1}^m \alpha_j \beta^{-j}, L \leq e \leq U, \alpha_j = \{0, \dots, \beta-1\}, \alpha_1 \neq 0\} \cup \{0\}$$

detto **numero di macchina**.

L'inclusione dello zero è necessario in quanto questo non è compreso nel primo insieme dato.

Notiamo che l'insieme dei numeri di macchina non è equispaziato (ci sono più numeri vicino allo zero). Presi intervalli $[\beta^{e-1}, \beta^e)$, questi risulterebbero equispaziati se venissero considerati su una scala logaritmica base β . All'interno di questi intervalli, invece, si hanno effettivamente numeri equispaziati, con periodo $\beta^e \cdot \beta^{-m} = \beta^{e-m}$.

1.2.1 Limiti inferiori e superiori

Potremmo chiederci quali sono i numeri **minimi** e **massimi** rappresentabili.

Osservando la definizione di F si ha che il numero più piccolo possibile è quello che si ha prendendo $\beta = L$, e $\alpha_j = 0$ per ogni $j > 1$, e $\alpha_1 = 1$, quindi:

$$\beta^L \cdot 1 \cdot \beta^{-1} = \beta^{L-1}$$

Il numero più grande si ha invece prendendo $\beta = U$ e $\alpha_j = \beta - 1$, e quindi:

$$\begin{aligned}\beta^U(\beta - 1) \sum_{j=1}^m \beta^{-j} &= \beta^U \left(\frac{1 - \beta^{-m-1}}{1 - \beta^{-1}} - 1 \right) (\beta - 1) \\ &= \beta^U \left(\frac{1 - \beta^{-m}}{\beta - 1} \right) (\beta - 1) = \beta^U (1 - \beta^{-m})\end{aligned}$$

Potremmo poi chiederci quanti numeri macchina esistono fissati β, m, L e U . Si hanno intanto due scelte di segno, $(U - L + 1)$ scelte di esponenti e $(\beta^m - \beta^{m-1})$ scelte di mantisse (tutti i numeri rappresentabili su m cifre base β meno quelli con prima cifra nulla) più lo zero, da cui:

$$2 \cdot (U - L + 1) \cdot (\beta^m - \beta^{m-1}) + 1$$

Le rappresentazioni più comuni dei numeri macchina sono definite dallo standard IEEE 754, che definisce:

Precisione	β	m	L	U	Dimensione
Singola	2	24	-126	127	4 byte (32 bit)
Doppia	2	53	-1022	1023	8 byte (64 bit)
Quadrupla	2	113	-16382	16383	16 byte (128 bit)

Casi particolari potrebbero richiedere precisioni più grandi o più lasche. Ultimamente, in particolare, si sono diffuse rappresentazioni a precisione più bassa (su 16 o addirittura 8 bit), in particolare nel campo delle reti neurali.

Il pacchetto MATLAB utilizza di default la precisione **doppia** come definita dallo standard IEEE 754.

1.3 Arrotondamento

Abbiamo visto come ci stiamo spostando dalla matematica esatta a una serie di approssimazioni. In generale, vorremo partire da un certo numero reale $x \in \mathbb{R}$, ma non appartenente all'insieme dei numeri macchina ($x \notin F(\beta, m, L, U)$). L'obiettivo è quello di riportare x ad una sua *approssimazione* appartenente ad $F(\beta, m, L, U)$.

Esistono 3 possibili situazioni:

- $|x| > \beta^U (1 - \beta^{-m})$, cioè x maggiore del massimo rappresentabile (**overflow**);
- $|x| < \beta^{L-1}$, cioè x minore del minimo rappresentabile (**underflow**);
- $\beta^{L-1} \leq x \leq \beta^U (1 - \beta^{-m})$. Se nei casi precedenti si poteva scegliere, rispettivamente, un M molto grande, o ∞ , e 0, qui si può effettivamente procedere con l'arrotondamento.

Definizione 1.4: Arrotondamento

Un arrotondamento è una funzione $RD : \mathbb{R} \rightarrow F(\beta, m, L, U)$, con $RD(x)$ uno dei numeri di macchina in $F(\beta, m, L, U)$ "vicini" ad x .

Preso un certo reale x , avremo un numero di macchina a sinistra è uno a destra, cioè il primo più piccolo e il primo più grande. Possiamo allora definire i seguenti arrotondamenti:

- **Troncamento** (*round down*):

$$Tr(x) = \lfloor x \rfloor$$

- **Round-up:**

$$Ru(x) = \lceil x \rceil$$

- **Round-to-nearest:**

$$Rn(x) = \begin{cases} \lceil x \rceil, & \alpha_{m+1} \geq \frac{\beta}{2} \\ \lfloor x \rfloor, & \alpha_{m+1} < \frac{\beta}{2} \end{cases}$$

con α_{m+1} la prima cifra che viene scartata dall'arrotondamento.

Notiamo poi che preso il troncamento:

$$Tr(x) = \text{sgn}(x)\beta^e \sum_{j=1}^m \alpha_j \beta^{-j}$$

il round up corrispondente sarà:

$$Ru(x) = \text{sgn}(x)\beta^e \left(\sum_{j=1}^m \alpha_j \beta^{-j} + \beta^{-m} \right)$$

1.3.1 Errore di arrotondamento

Valgono le disuguaglianze:

- $|Tr(x) - x| \leq \beta^{e-m}$
- $|Rn(x) - x| \leq \frac{\beta^{e-m}}{2}$, che è il minimo errore possibile cioè:

$$|Rn(x) - x| = \min_{RD(x)} (RD(x) - x)$$

Per questo motivo da qui in poi assumeremo quindi di prendere sempre $Rn(x)$.

Definizione 1.5: Errori di arrotondamento

Definiamo:

- **Errore assoluto di arrotondamento:** $x - Rn(x) = \sigma_x$
- **Errore relativo di arrotondamento:** $\frac{x - Rn(x)}{x} = \epsilon_x$

La definizione di errore relativo è utile per avere un errore pressochè costante su tutta la retta dei reali. Si ha quindi che:

- Riguardo all'errore assoluto:

$$|\sigma_x| \leq \frac{\beta^{e-m}}{2}$$

- Riguardo all'errore relativo:

$$|\epsilon_x| \leq \frac{\beta^{e-m}}{2\beta^{e-1}} = \frac{1}{2}\beta^{1-m}$$

visto che $|x| > \beta^{e-1}$. Notiamo che questo errore non dipende dall'esponente e , che è quello che desideravamo.

Abbiamo quindi che l'insieme dei numeri in virgola mobile garantiscono un errore relativo limitato in modo uniforme, se non si incombe in overflow o underflow.

Definizione 1.6: Precisione

La quantità $U = \beta^{1-m}$ viene detta **precisione di macchina** di una certa rappresentazione a virgola mobile.

Ad esempio, nella precisioni doppia e singola, $U \approx 10^{-16}$ e $U \approx 10^{-8}$, che significa rispettivamente prime 15 o prime 7 cifre esatte.

1.3.2 Dettagli di implementazione

Prendiamo ad esempio la doppia precisione. Avremo:

- 1 bit di segno;
- 52 bit di mantissa (con 1 bit implicito impostato ad 1, per $\alpha_1 = 1$);
- 11 bit di esponente in rappresentazione con offset.

Riguardo agli altri formati si ha:

Precisione	Segno	Esponente	Mantissa	U
Singola	1	8	23	$\approx 10^{-8}$
Doppia	1	11	52	$\approx 10^{-16}$
Quadrupla	1	15	112	$\approx 10^{-34}$

1.4 Numeri sottonormalizzati

Vediamo una tecnica per la rappresentazione di numeri più piccoli di β^{L-1} , implementata nella maggior parte dei pacchetti software moderni (e nelle implementazioni degli standard a virgola mobile disponibili nei processori moderni). Si ha che se $x \in [0, \beta^{L-1}]$, allora si assume come prima cifra della mantissa 0, con esponente fisso ad L . Questo ci permette di rappresentare più numeri vicino allo zero.

Si avranno quindi numeri equispaziati fra 0 e β^{L-1} con distanza β^{L-m} . Inoltre, sui numeri sottonormalizzati si avrà un errore relativo non limitato da $\frac{1}{2}\beta^{1-m}$, ma che invece aumenta avvicinandosi a 0.

I numeri sottonormalizzati sono indicati da un **valore speciale dell'esponente**, cosa che accade anche per:

- I valori $+\infty$ e $-\infty$;
- I valori NaN (Not a Number) con relativi codici di errore in mantissa.

La presenza di questi valori rende necessaria l'approssimazione delle precisioni per i numeri in virgola mobile.

2 Lezione del 28-02-25

2.1 Operazioni sui numeri macchina

Abbiamo introdotto l'insieme dei numeri macchina. Vediamo adesso come eseguire **operazioni** fra elementi di questi insiemi.

Notiamo che, di base, dati $x, y \in F(\beta, m, L, U)$, non necessariamente $x \circ y \in F(\beta, m, L, U)$ per le comuni operazioni aritmetiche $+, -, \times, \div$.

Quello che faremo è quindi approssimare tali operazioni, cioè dire:

- $x \oplus y = Rn(x + y)$
- $x \ominus y = Rn(x - y)$
- $x \otimes y = Rn(x \times y)$
- $x \oslash y = Rn(x \div y)$

Effetto di questa approssimazione è negare proprietà note dei reali, come ad esempio l'associativa:

$$(x \oplus y) \oplus z \neq x \oplus (y \oplus z)$$

$$(x \oplus y) \otimes z \neq x \oplus (y \otimes z)$$

Cioè, la valutazione di una formula con ordini diversi ma equivalenti in aritmetica esatta può portare a risultati differenti nell'insieme dei numeri di macchina.

2.1.1 Errore nel calcolo di funzione

Sia $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$, e si voglia calcolare $f(P_0)$, con $P_0 = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_m^{(0)}) \in \mathbb{R}^m$. Le operazioni aritmetiche $+, -, \times, \div$ possono essere viste come funzioni di questo tipo. Ci interroghiamo quindi sulla fonte dell'errore nella loro valutazione:

1. Nel caso contenga funzioni irrazionali o trascendenti, f verrà approssimata con una funzione \bar{f} che coinvolge solo operazioni aritmetiche di base $+, -, \times, \div$;
2. \bar{f} viene tradotta in un *algoritmo* \bar{f}_a , ovvero in una formula che coinvolge $\oplus, \ominus, \otimes, \oslash \leftarrow +, -, \times, \div$. La formula ottenuta finora viene detta **algoritmo**;
3. Potrebbe essere che $P_0 \notin F(\beta, m, L, U)$, e quindi viene approssimato a $P_1 = Rn(P_0)$.

Quindi, vogliamo $f(P_0)$ ma possiamo solo approssimarla come $\bar{f}_a(P_1)$.

Ad esempio, poniamo di voler calcolare e^π . I passaggi nell'ordine appena visto saranno:

1. Approssimiamo l'esponenziale al secondo grado dello sviluppo di Taylor:

$$e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2} = \bar{f}(x)$$

2. Si riporta la $\bar{f}(x)$ a $\bar{f}_a(x)$:

$$1 \oplus (x \oplus ((x \otimes x) \oslash 2))$$

Indicheremo algoritmi di questo tipo anche attraverso **risultati intermedi**:

- $r_1 = x \cdot x$
- $r_2 = \frac{r_1}{2}$
- $r_3 = x + r_2$
- $r_4 = 1 + r_3$

con il risultato finale inteso come l'ultimo risultato intermedio. Un modo di visualizzare i risultati intermedi di un algoritmo può essere un albero:

$$\begin{array}{c}
 r_4 = 1 + r_3 \\
 | \\
 r_3 = x + r_2 \\
 | \\
 r_2 = \frac{r_1}{2} \\
 | \\
 r_1 = x \cdot x \\
 \swarrow \quad \searrow \\
 x \quad x
 \end{array}$$

dove la *radice* rappresenta il **risultato** e le *foglie* rappresentano le variabili della funzione.

3. Si approssima π al numero macchina più vicino:

$$Rn(\pi) = 3.1415 = P_1$$

Avremo quindi la formula finale:

$$1 \oplus (P_1 \oplus ((P_1 \otimes P_1) \odot 2))$$

Diamo quindi la definizione di **errore assoluto**:

Definizione 2.1: Errore assoluto

Data $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$, un punto $P_0 \in \mathbb{R}^m$ ed un algoritmo \bar{f}_a , l'errore assoluto è dato da:

$$\sigma_f = \bar{f}_a(P_1) - f(P_0), \quad P_1 = Rn(P_0)$$

e di errore relativo:

Definizione 2.2: Errore relativo

Date le ipotesi della definizione 2.1, l'errore relativo è dato da:

$$\epsilon_f = \frac{\bar{f}_a(P_1) - f(P_0)}{f(P_0)} = \frac{\sigma_f}{f(P_0)}$$

2.1.2 Errore di funzioni razionali

Assumiamo per adesso f **funzione razionale**, ovvero f si può definire con un numero di operazioni in $+$, $-$, \times , \div . Assumere funzioni razionali ci permette di prendere $f = \bar{f}$ e $f_a = \bar{f}_a$ (non ci sono irrazionali da riportare ai razionali). Potremo allora dire:

$$\sigma_f = f_a(P_1) - f(P_0) = f_a(P_1) - f(P_1) + f(P_1) - f(P_0)$$

che possiamo dividere in:

$$\sigma_f = \sigma_a + \sigma_d, \quad \sigma_a = f_a(P_1) - f(P_1), \quad \sigma_d = f(P_1) - f(P_0)$$

che chiamiamo rispettivamente **errore assoluto algoritmico** e **errore assoluto inerente**.

Allo stesso modo possiamo definire l'**errore relativo**:

$$\begin{aligned} \epsilon_f &= \frac{\sigma_f}{f(P_0)} = \frac{f_a(P_1) - f(P_0)}{f(P_0)} = \frac{f_a(P_1) - f(P_1)}{f(P_0)} + \frac{f(P_1) - f(P_0)}{f(P_0)} \\ &= \frac{f_a(P_1) - f(P_1)}{f(P_1)} \cdot \frac{f(P_1)}{f(P_0)} + \frac{f(P_1) - f(P_0)}{f(P_0)} \end{aligned}$$

che si divide nuovamente in :

$$\epsilon_f = \epsilon_a + \epsilon_d, \quad \epsilon_a = \frac{f_a(P_1) - f(P_1)}{f(P_1)}, \quad \epsilon_d = \frac{f(P_1) - f(P_0)}{f(P_0)}$$

che chiamiamo rispettivamente **errore relativo algoritmico** e **errore relativo inerente**.

Questo viene da:

$$\epsilon_f = [\dots] = \frac{f_a(P_1) - f(P_1)}{f(P_1)} \cdot \frac{f(P_1)}{f(P_0)} + \frac{f(P_1) - f(P_0)}{f(P_0)}$$

si nota che $\frac{f(P_1)}{f(P_0)} = 1 + \frac{f(P_1) - f(P_0)}{f(P_0)}$, e quindi:

$$= \epsilon_a \cdot \left(1 + \frac{f(P_1) - f(P_0)}{f(P_0)}\right) + \epsilon_d = \epsilon_a(1 + \epsilon_d) + \epsilon_d = \epsilon_a + \epsilon_d + \epsilon_a\epsilon_d \approx \epsilon_a + \epsilon_d$$

assumendo $\epsilon_a\epsilon_d \approx 0$.

Ci interessa dare stime superiori per i valori assoluti di errori assoluti e relativi, come avevamo fatto per gli errori delle funzioni di arrotondamento da reali a numeri macchina. In generale, quindi, per limitare $|\sigma_f|$ cercheremo disuguaglianze $|\sigma_a| < \tau_1$, $|\sigma_d| < \tau_2$, da cui:

$$|\sigma_f| < \tau_1 + \tau_2$$

2.1.3 Stima dell'errore inerente

Avevamo quindi definito l'**errore assoluto inerente**:

$$\sigma_d = f(P_1) - f(P_0)$$

Sotto l'ipotesi $f \in C^1(D)$ per $D \subset \mathbb{R}^m$ che contiene P_0 , si può usare lo sviluppo di Taylor di f in P_0 , troncato al primo ordine:

$$f(P_1) - f(P_0) = f(P_0) + \nabla f(\bar{P})^T (P_1 - P_0) - f(P_0) = \nabla f(\bar{P})^T (P_1 - P_0)$$

$$= \sum_{j=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_j}(\bar{P}) \cdot (x_j^{(1)} - x_j^{(0)}) \approx \sum_{j=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_j} P_0 \cdot (x_j^{(1)} - x_j^{(0)})$$

dove \bar{P} è un punto che sta sul segmento $\overline{P_1 P_0}$. Da questo potremo dire:

$$\sigma_d = \sum_{j=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_j} P_0 \cdot \sigma_j$$

dove $\sigma_j = (x_j^{(1)} - x_j^{(0)})$ è l'**errore di arrotondamento** nella componente j di P_0 , e $\frac{\partial f}{\partial x_j} P_0$ viene detto **coefficiente di amplificazione**.

Per l'**errore relativo inerente**, che avevamo definito come:

$$\epsilon_d = \frac{f(P_1) - f(P_0)}{f(P_0)}$$

potremo fare considerazioni simili:

$$\epsilon_d = \frac{\sum_{j=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_j}(P_0) \cdot \sigma_j}{f(P_0)} = \sum_{j=1}^m \frac{x_j^{(1)} - x_j^{(0)}}{x_j^{(0)}} \cdot \frac{\partial f}{\partial x_j}(P_0) \cdot \frac{x_j^{(0)}}{f(P_0)}$$

dove $\epsilon_j = \frac{x_j^{(1)} - x_j^{(0)}}{x_j^{(0)}}$ sarà l'**errore di arrotondamento relativo** nella componente j di P_0 e

$P_j = \frac{\partial f}{\partial x_j}(P_0) \cdot \frac{x_j^{(0)}}{f(P_0)}$ viene detto **coefficiente di amplificazione dell'errore relativo**.

La formula finale sarà quindi:

$$\epsilon_d = \sum_{j=1}^m \epsilon_j P_j$$

I problemi in cui si devono calcolare f i cui coefficienti di amplificazione degli errori relativi sono grandi in modulo (o ce n'è almeno uno sufficientemente grande) si dicono **malcondizionati**. Viceversa, se $|P_j|$ è vicino a 1 per ogni j il problema si dice **ben condizionato**, cioè che ϵ_d è di un ordine di grandezza comparabile a $\max(\epsilon_i)$

Notiamo inoltre che il condizionamento di un problema dipende solamente dalla sua struttura matematica.

2.1.4 Errori inerenti delle operazioni aritmetiche

Vediamo gli errori inerenti associati alle 4 operazioni aritmetiche $+$, $-$, \times , \div :

Operazione	σ_d	ϵ_d
$x \oplus y$	$\sigma_x + \sigma_y$	$\frac{x}{x+y} \epsilon_x + \frac{y}{x+y} \epsilon_y$
$x \ominus y$	$\sigma_x - \sigma_y$	$\frac{x}{x-y} \epsilon_x - \frac{y}{x-y} \epsilon_y$
$x \otimes y$	$y \sigma_x + x \sigma_y$	$\epsilon_x + \epsilon_y$
$x \oslash y$	$\frac{1}{y} \sigma_x - \frac{x}{y^2} \sigma_y$	$\epsilon_x - \epsilon_y$

Notiamo come somme e sottrazioni non amplificano gli errori totali, mentre prodotti e divisioni non amplificano gli errori relativi (riguardo agli errori inerenti). Questo significa che somme e sottrazioni possono avere errori relativi grandi quando $|x + y| \ll \min\{|x|, |y|\}$. Questo effetto viene detto **cancellazione numerica**.

2.1.5 Stima dell'errore algoritmico

Avevamo definito un algoritmo $f_a(x)$ di cui vogliamo stimare l'errore algoritmico assoluto $\sigma_a = f_a(P_1) - f(P_1)$. Assumiamo $P_1 = Rn(P_0) \in F(\beta, m, L, U)$, cioè gli operandi come privi di errori iniziali di arrotondamento.

L'idea è di seguire l'errore generato dall'algoritmo sul grafo (o albero) che lo rappresenta sfruttando le relazioni per l'errore inerente nelle 4 operazioni aritmetiche. Prendiamo ad esempio la funzione:

$$f(x, y, z, w) = x \cdot \left(\frac{y}{z} - w \right)$$

Avremo i risultati intermedi:

- $r_1 = \frac{y}{z}$
- $r_2 = r_1 - w$
- $r_3 = r_2 \cdot x$

Di cui riportiamo il grafo:



dove ϵ_3 , ϵ_2 e ϵ_1 saranno termini associati ad ogni risultato intermedio che rappresenteranno gli errori di troncamento dei risultati intermedi stessi, e ϵ_{r3} , ϵ_{r2} e ϵ_{r1} rappresenteranno gli errori inerenti delle singole operazioni per il calcolo dei risultati intermedi.

Partiamo dalla radice per valutare gli errori:

$$\begin{aligned}
 \epsilon_d &= \epsilon_{r3} = \epsilon_3 + \epsilon_x + \epsilon_{r2} = \epsilon_3 + \epsilon_{r2} \\
 &= \epsilon_3 + \epsilon_2 + \frac{-zw}{y - zw} \cdot \epsilon_w + \frac{y}{y - zw} \cdot \epsilon_{r1} = \epsilon_3 + \epsilon_2 + \frac{y}{y - zw} \cdot \epsilon_{r1} \\
 &= \epsilon_3 + \epsilon_2 + \frac{y}{y - zw} (\epsilon_1 + \epsilon_y - \epsilon_z) = \epsilon_3 + \epsilon_2 + \frac{y}{y - zw} \cdot \epsilon_1 = \epsilon_a
 \end{aligned}$$

Dove abbiamo ignorato i termini di errore relativo ϵ_i legati ad ogni variabile (come avevamo detto sopra, gli operandi sono considerati come privi di errore di arrotondamento). Per la stima di ϵ_3 , ϵ_2 e ϵ_1 , vale $\epsilon_i \leq U$ precisione macchina. Nel caso di errori assoluti vale $|\sigma_i| \leq U \cdot \max(x_i)$ considerata ogni variabile x_i .

Chiaramente, diversi algoritmi equivalenti in aritmetica esatta potranno avere errori algoritmici diversi fatte tutte le approssimazioni.

Prendiamo ad esempio la funzione $f(x, y) = x^2 - y^2$. Potremmo adottare due algoritmi:

1. Si prendono i risultati intermedi:

$$r_1 = x \cdot x$$

$$r_2 = y \cdot y$$

$$r_3 = x - y$$

Da cui il grafo:



Questo approccio potrebbe risultare il più intuitivo: dalla stima dell'errore si ha:

$$\begin{aligned} \epsilon_{r_3} &= \epsilon_1 + \frac{x^2}{x^2 - y^2} \epsilon_{r_1} - \frac{y^2}{x^2 - y^2} \epsilon_{r_2} = \epsilon_1 + \frac{x^2}{x^2 - y^2} (\epsilon_1 + \epsilon_x + \epsilon_x) - \frac{y^2}{x^2 - y^2} (\epsilon_2 + \epsilon_y + \epsilon_y) \\ &= \epsilon_1 + \frac{x^2}{x^2 - y^2} \epsilon_1 - \frac{y^2}{x^2 - y^2} \epsilon_2 \end{aligned}$$

2. Un altro approccio è quello di prendere i risultati intermedi:

$$r_1 = x + y$$

$$r_2 = x - y$$

$$r_3 = r_1 \cdot r_2$$

Da cui il grafo:



Vediamo la stima dell'errore:

$$\begin{aligned} \epsilon_{r_3} &= \epsilon_3 + \epsilon_{r_1} + \epsilon_{r_2} = \epsilon_3 + \epsilon_1 + \frac{x}{x + y} \epsilon_x + \frac{y}{x + y} \epsilon_y + \epsilon_2 + \frac{x}{x - y} \epsilon_x - \frac{y}{x - y} \epsilon_y \\ &= \epsilon_3 + \epsilon_1 + \epsilon_2 \end{aligned}$$

Notiamo che la stima dell'errore del secondo approccio è più conveniente, in quanto più strettamente limitata al di sotto di un valore fisso: $\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 = 3U$, contro il $\left(1 + \frac{|x^2 + y^2|}{|x^2 - y^2|}\right) U$ del primo approccio.

Abbiamo visto quindi tenciche per la stima di ϵ_a e ϵ_d (σ_a e σ_d), che ci permettono di calcolare $|\epsilon_f| \leq |\epsilon_a| + |\epsilon_d|$ ($|\sigma_f| \leq |\sigma_a| + |\sigma_d|$).

2.1.6 Problema diretto

Un problema classico sarà quello di, data f , un algoritmo risolutivo f_a e una stima degli errori d_{x_i} , di stimare σ_f per $P_0 \in D \subset \mathbb{R}^m$.

Ad esempio, prendiamo la funzione:

$$f : D \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x_1, x_2) = \frac{x_1}{x_2}, \quad D = [1, 3] \times [4, 5]$$

Diamo una stima dell'errore di arrotondamento delle variabili:

$$|\sigma_{x_i}| \leq \frac{1}{2} \cdot 10^{-2}$$

- Iniziamo con la stima dell'errore inerente. Si ha, dall'errore assoluto inerente della divisione:

$$\sigma_d = \frac{1}{x_2} \sigma_{x_1} - \frac{x_1}{x_2^2} \sigma_{x_2}$$

Quello che ci interessa è dare stime superiori, quindi prendiamo i due valori:

$$\left| \frac{1}{x_2} \right| \approx \frac{1}{4}, \quad \left| \frac{x_1}{x_2^2} \right| \approx \frac{7}{16}$$

Dai valori massimi che si possono ottenere sul dominio D , da cui:

$$|\sigma_d| \leq \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot 10^{-2} + \frac{7}{16} \cdot \frac{1}{2} \cdot 10^{-2} = \left(\frac{1}{8} + \frac{7}{32} \right) \cdot 10^{-2} = \frac{7}{32} \cdot 10^{-2}$$

- Vediamo quindi la stima dell'errore algoritmico. L'albero dell'algoritmo sarà banalmente:

$$\begin{array}{c} r_1 = \frac{x_1}{x_2} \\ \swarrow \searrow \\ x_1 \quad x_2 \end{array}$$

da cui posto $\sigma_{x_i} = 0$ resterà solo l'errore di arrotondamento assoluto σ_1 :

$$|\sigma_a| = \sigma_1 = U \cdot \max \left(\frac{x_1}{x_2} \right) = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot 10^{-2} = \frac{3}{8} \cdot 10^{-2}$$

Otteniamo quindi l'errore totale come la somma dell'errore algoritmico e dell'errore inerente, cioè:

$$|\sigma_f| = |\sigma_a| + |\sigma_d| = \left(\frac{7}{32} + \frac{3}{8} \right) \cdot 10^{-2} = \frac{19}{32} \cdot 10^{-2}$$

2.1.7 Problema inverso

Il problema inverso potrebbe essere quello di, dato $\tau > 0$, f e un punto $P_0 \in \mathbb{R}^n$, determinare un algoritmo ed un valore di precisione macchina U tali per cui $|s_f| < \tau$.

Prendiamo ad esempio il problema considerato prima, ma sul dominio:

$$D = [1, 2] \times [-2, -1]$$

e cerchiamo una precisione macchina U tale per cui l'errore assoluto σ_f è limitato a $\tau = 10^{-2}$, cioè:

$$|\sigma_f| \leq 10^{-2}$$

- Iniziamo di nuovo con la stima dell'errore inerente. Dagli stessi errori inerenti considerati prima si hanno le stime:

$$\left| \frac{1}{x_2} \right| \approx 1, \quad \left| \frac{x_1}{x_2^2} \right| \approx 2$$

Dai valori massimi che si possono ottenere sul dominio D , da cui:

$$|\sigma_d| \leq U + 2U = 3U$$

- Vediamo quindi la stima dell'errore algoritmico, che prendendo il valore massimo della funzione in maniera analoga a prima sarà:

$$|\sigma_a| = \sigma_1 = U \cdot \max \left(\frac{x_1}{x_2} \right) = 2U$$

L'errore totale sarà quindi: $|\sigma_f| = |\sigma_a| + |\sigma_d| = 3U + 2U = 5U$

Imponiamo quindi la disuguaglianza iniziale, cioè:

$$|\sigma_f| = 5U \leq 10^{-2} \implies U \leq \frac{1}{5} \cdot 10^{-2}$$

3 Lezione del 03-03-25

3.1 Riassunto sulla stima dell'errore

Riassumiamo quindi le regole viste per la stima dell'errore su funzioni razionali. Avevamo dato la definizione di errore **assoluto** σ_f e errore **relativo** ϵ_f , entrambi composti da due fattori denominati errore **algoritmico** e errore **inerente**, con pedici rispettivamente a e d .

- Riguardo all'errore **inerente assoluto** avevamo preso su un dominio D la stime:

$$|\sigma_d| \leq \sum_{j=1}^m A_j \cdot |\sigma_j|$$

con $|\sigma_j|$ **errore di arrotondamento** e A_j **coefficiente di amplificazione**:

$$A_j = \max_{P \in D} \left(\frac{\partial f}{\partial x_j}(P) \right)$$

Per l'errore di arrotondamento avevamo visto potevamo prendere:

$$|\sigma_j| \leq U \cdot |x_j|$$

con U precisione macchina.

- Riguardo all'**errore inerente relativo** avevamo invece preso:

$$|\epsilon_d| \leq \sum_{j=1}^m \bar{A}_j \cdot |\epsilon_j|$$

con $|\epsilon_j|$ **errore di arrotondamento relativo** e $\overline{\sigma_j}$ **coefficiente di amplificazione relativo**:

$$\overline{A_j} = \max_{P \in D} \left(\frac{x_j \cdot \frac{\partial f}{\partial x_j}(P)}{f(P)} \right)$$

Per l'errore di arrotondamento relativo potevamo quindi prendere:

$$|\epsilon_j| \leq U$$

Vediamo come ultimo esempio il calcolo dell'errore relativo $|\epsilon_f|$ per la funzione:

$$f(x_1, x_2) = (x_1 + 1)x_1 + x_2$$

- Iniziamo con il calcolo dell'errore inerente, senza fare assunzioni su ϵ_{x_i} :

$$|\epsilon_d| \leq \frac{x_1 \cdot \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2)}{f(x_1, x_2)} \epsilon_{x_1} + \frac{x_2 \cdot \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2)}{f(x_1, x_2)} \epsilon_{x_2} = \frac{x_1(2x_1 + 1)}{(x_1 + 1)x_1 + x_2} \epsilon_{x_1} + \frac{x_2}{(x_1 + 1)x_1 + x_2} \epsilon_{x_2}$$

- Calcoliamo poi l'errore algoritmico dell'algoritmo:

$$\begin{array}{c} r_3 = r_2 + x_2 \\ \swarrow \quad \searrow \\ r_2 = r_1 x_1 \quad x_2 \\ \swarrow \quad \searrow \\ r_1 = x_1 + 1 \quad x_1 \\ \swarrow \quad \searrow \\ x_1 \quad 1 \end{array}$$

da cui:

$$\begin{aligned} |\epsilon_a| &\leq \epsilon_3 + \frac{(x_1 + 1)x_1}{(x_1 + 1)x_1 + x_2} \epsilon_{r_2} + \frac{x_2}{(x_1 + 1)x_1 + x_2} \epsilon_{x_2} = \epsilon_3 + \frac{(x_1 + 1)x_1}{(x_1 + 1)x_1 + x_2} (\epsilon_2 + \epsilon_{r_1} + \epsilon_{x_1}) \\ &= \epsilon_3 + \frac{(x_1 + 1)x_1}{(x_1 + 1)x_1 + x_2} (\epsilon_2 + \epsilon_1 + \frac{x_1}{x_1 + 1} \epsilon_{x_1} + \frac{1}{x_1 + 1} \cdot 0) = \epsilon_3 + \frac{(x_1 + 1)x_1}{(x_1 + 1)x_1 + x_2} (\epsilon_2 + \epsilon_1) \end{aligned}$$

Abbiamo quindi l'errore complessivo:

$$|\epsilon_f| \leq |\epsilon_a| + |\epsilon_d| = \epsilon_3 + \frac{(x_1 + 1)x_1}{(x_1 + 1)x_1 + x_2} (\epsilon_2 + \epsilon_1) + \frac{x_1(2x_1 + 1)}{(x_1 + 1)x_1 + x_2} \epsilon_{x_1} + \frac{x_2}{(x_1 + 1)x_1 + x_2} \epsilon_{x_2}$$

3.2 Errori di funzioni non razionali

Abbiamo finora trascurato il caso di funzioni non razionali. Prendiamo ad esempio di voler calcolare l'errore su funzioni come $e^{\cos(x+y)}$. In questo caso sarà necessario usare un'approssimazione razionale di f che chiamiamo \bar{f} , che poi porteremo a \bar{f}_a che usa operazioni macchina detta **algoritmo**. In questo caso l'errore sarà dato dall'*errore inerente*, dall'*errore algoritmico* e dall'**errore analitico** σ_{an} della funzione, cioè potremo dire:

$$\bar{f}_a(P_1) - f(P_0) = \bar{f}_a(P_1) - \bar{f}(P_1) + \bar{f}(P_1) - f(P_1) + f(P_1) - f(P_0) = \sigma_a + \sigma_{an} + \sigma_d$$

L'errore inerente sarà calcolato sulla f originale, mentre l'errore analitico sarà calcolato con la nuova \bar{f} , e in particolare dipenderà dall'approssimazione razionale che usiamo.

Vediamo per adesso approssimazioni polinomiali attraverso la **formula di Taylor**. Nel caso scalare si ha:

Teorema 3.1: Formula di Taylor

Data $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f \in C^1$, allora dato $x_0 \in \mathbb{R}$ si ha:

$$f(x) = \sum_{n=0}^k \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \cdot (x - x_0)^n + \frac{f^{(k+1)}(\eta)}{(k+1)!} (x - x_0)^{k+1}$$

Dove:

$$\epsilon_l = \frac{f^{(k+1)}(\eta)}{(k+1)!} (x - x_0)^{k+1}$$

rappresenta l'**errore di Lagrange** al k -esimo grado, con $\eta \in [x_0, x]$ il punto di massimo della $k+1$ -esima derivata di f .

In questo caso:

$$\bar{f}(x) = \sum_{n=0}^k \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \cdot (x - x_0)^n$$

cioè la serie di Taylor troncata al k -esimo grado sarà una buona approssimazione per f , e l'errore analitico sarà dato da:

$$\sigma_{an} = R(x) = f(x) - T(x, k, x_0)$$

con $R(x)$ il resto fra lo sviluppo di Taylor troncato $T(x, k)$ e la funzione stessa $f(x)$. In questo caso fissato k si potrà dare una stima di errore direttamente dall'errore di Lagrange, cioè:

$$R(x) = f(x) - T(x, k, x_0) = \frac{f^{(k+1)}(\eta)}{(k+1)!} (x - x_0)^{k+1}$$

e più in particolare, sfruttando il limite superiore dato da:

$$R(x) \leq \epsilon_l = \frac{\max_{[x_0, x]} (f^{(k+1)})}{(k+1)!} (x - x_0)^{k+1} = \frac{M}{(k+1)!} (x - x_0)^{k+1}$$

3.2.1 Approssimazione dell'esponenziale

Prendiamo di volere calcolare l'errore dato dall'approssimazione dell'esponenziale al k -esimo grado su un intervallo comprensivo di $x_0 = 0$, che chiamiamo $D = [-l, u]$. Avremo quindi l'approssimazione:

$$e^x = T(x, k, 0) = \sum_{n=0}^k \frac{(x - x_0)^n}{n!}$$

e la funzione resto:

$$R(x) = e^x - T(x, k, 0) = \frac{f^{(k+1)}(\eta)}{(k+1)!} x^{k+1}$$

prendiamo quindi la stima superiore di $f^{(k+1)}(\eta)$ su $\eta \in D$ (il caso peggiore sarà quello in cui valutiamo x sull'estremo superiore u):

$$f^{(k+1)}(\eta) \leq \max_{\eta \in [0, u]} f^{(k+1)}(\eta) = e^u$$

da cui:

$$R(x) \leq \frac{e^u x^{k+1}}{(k+1)!}$$

Stimiamo allora l'errore analitico relativo come:

$$|\epsilon_{an}| = \frac{R(x)}{f(x)} \leq \frac{\max_{[-l, u]} \left| \frac{e^u x^{k+1}}{(k+1)!} \right|}{\min_{[-l, u]} e^x} = \frac{e^{u-l} u^{k+1}}{(k+1)!}$$

3.2.2 Note sull'implementazione dell'esponenziale

Vediamo alcuni dettagli sull'implementazione pratica di un'approssimazione dell'esponenziale nel linguaggio MATLAB/Octave. Il primo modo che potrebbe venire in mente prevede di mantenere un numeratore e un denominatore:

```

1 function val = myexp1(x, n)
2     num = 1;
3     den = 1;
4
5     val = 1;
6
7     for i = 1:n
8         num = num * x;
9         den = den * i;
10
11         val = val + num / den;
12     end
13 end

```

Notiamo però che questo approccio presenta notevole instabilità numerica con grandi valori di k , ad esempio si veda:

```

1 >> myexp(20, 500)
2 ans =
3     NaN

```

Questo deriva dal fatto che per grandi valori di k si ottiene eventualmente $\text{num} = \text{Inf}$ e $\text{den} = \text{Inf}$, da cui il **NaN**. Un'approccio migliore si ha quindi mantenendo direttamente il termine e accumulandolo:

```

1 function acc = myexp2(x, n)
2     term = 1;
3     acc = 1;
4
5     for i = 1:n
6         term = term * x / i;
7         acc = acc + term;
8     end
9 end

```

Notiamo però che in questo caso si hanno problemi di cancellazione per argomenti negativi, ad esempio si veda:

```

1 >> myexp(-30, 500)
2 ans =
3 -3.0668e-05

```

In questo caso si ha più accuratezza imponendo argomenti positivi, ad esempio sfruttando:

$$e^{-x} = \frac{1}{e^x}$$

Si veda ad esempio:

```

1 >> 1/myexp(30, 500)
2 ans =
3 9.3576e-14

```

Modifichiamo quindi la funzione per rilevare automaticamente esponenti negativi e adottare la forma corretta:

```

1 function acc = myexp3(x, n)
2     neg = false;
3     if x < 0
4         neg = true;
5         x = -x;
6     end
7
8     term = 1;
9     acc = 1;
10
11    for i = 1:n
12        term = term * x / i;
13        acc = acc + term;
14    end
15
16    if neg
17        acc = 1 / acc;
18    end
19 end

```

Provando questa funzione su un range di interi da -30 a 30 , con la serie di Taylor troncata a 500 , dà un errore massimo rispetto al valore reale di circa $10^{-16} \sim 10^{-17}$.

Veniamo quindi a fare alcuni richiami di algebra lineare. Nella maggior parte dei casi che ci interessano vorremo trattare non di scalari, ma di quantità vettoriali, ad esempio $x \in \mathbb{C}^n$, con $n > 1$.

3.3 Matrici complesse

Ci saranno utili le matrici perchè rappresentano direttamente tutte le **funzioni lineari**. Ad esempio, posta $f: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^m$ tale che:

- $f(x + y) = f(x) + f(y)$ (addittività);
- $f(\lambda x) = \lambda f(x)$ (omogeneità)

detta *funzione lineare* allora $\exists! A \in \mathbb{C}^{m \times n}$ tale che $f(x) = Ax, \forall x \in \mathbb{C}^n$.

Nel corso useremo sia matrici in \mathbb{R} che matrici in \mathbb{C} , dove l'appartenenza a ciascuno di questi campi dipende dalla appartenenza di essi delle **entrate** A_{ij} della matrice. In ogni caso, una matrice reale non sarà che un caso particolare delle matrici complesse.

Si danno poi per scontate le definizioni di matrici:

- *Quadrate* ($n = m$);
- *Rettangolari* ($n \neq m$);
- *Diagonali* (elementi nulli fuori dalla diagonale);
- *Triangolari superiori/inferiori* (elementi nulli sotto/sopra la diagonale)

3.3.1 Trasposta coniugata

Definiamo infine la **trasposta coniugata** di una certa matrice, generalizzata al campo complesso dalla **matrice hermitiana**:

Definizione 3.1: Trasposta coniugata

Data una matrice $A \in \mathbb{C}^{n \times m}$, la trasposta coniugata A^T sarà:

$$(A^T)_{ij} = A_{ji}$$

e la matrice hermitiana A^H sarà:

$$(A^H)_{ij} = \overline{A_{ji}}$$

3.4 Algebra vettoriale

Diamo alcune nozioni riguardo alle operazioni fra vettori.

3.4.1 Prodotto scalare

Diamo la definizione di prodotto scalare, generalizzato al campo complesso dal **prodotto hermitiano** (entrambi *prodotti interni*):

Definizione 3.2: Prodotto interno

Definiamo il prodotto interno fra due vettori $x, y \in \mathbb{C}^n$ come:

$$\langle x, y \rangle = \sum_{j=1}^n x_j \overline{y_j}$$

dove $\overline{y_j}$ rappresenta il **coniugato** di y_j , che chiaramente in \mathbb{R} si riduce a y_j stesso e quindi:

$$\langle x, y \rangle = \sum_{j=1}^n x_j y_j, \quad x, y \in \mathbb{R}^n$$

3.4.2 Indipendenza lineare

Diamo la definizione di indipendenza lineare:

Definizione 3.3:

Un insieme di vettori $\{x_1, \dots, x_s\}$ si dice linearmente indipendente se:

$$x_1 + \dots + x_s = 0 \Leftrightarrow x_1, \dots, x_s = 0$$

Possiamo sfruttare l'indipendenza lineare per definire **basi**:

Definizione 3.4: Base

Se $s = n$ l'insieme $\{x_1, \dots, x_s\}$ si dice **base** di \mathbb{C}^n .

Questo significa che $\forall y \in \mathbb{C}^n, \exists! \{c_1, \dots, c_s\}$ tali che $y = \sum_{j=1}^n c_j x_j$, cioè combinazioni lineari dei vettori di base individuano qualsiasi vettore nello spazio \mathbb{C}^n .

3.5 Operazioni fra matrici

Date due matrici A e B con lo stesso numero di righe e colonne si possono definire le operazioni:

- **Somma:** $A, B, C \in \mathbb{C}^{m \times n}, A + B = C, c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$;
- **Prodotto:** $A \in \mathbb{C}^{m \times n}, B \in \mathbb{C}^{n \times p}, C \in \mathbb{C}^{m \times p}, A \cdot B = C, c_{ij} = \sum_{h=1}^n a_{ih} b_{hj}$ sia in reali che in complessi.

3.5.1 Considerazioni computazionali sulle operazioni matriciali

Dal punto di vista computazionale, è immediato che il prodotto scalare ha complessità $O(n)$, la somma matriciale ha complessità $O(m \cdot n)$.

Per la moltiplicazione matriciale, poste:

$$A \in \mathbb{C}^{m \times n}, \quad B \in \mathbb{C}^{n \times p} \implies A \cdot B = C \in \mathbb{C}^{m \times p}$$

si ha che la complessità è $O(m \cdot n \cdot p)$.

L'ultimo risultato dipende dal fatto che la moltiplicazione richiede di effettuare effettivamente $m \cdot p$ prodotti scalari, e n è la lunghezza di uno di questi prodotti scalari, cioè il numero di colonne di A o di righe di B (che sappiamo essere uguali perché la moltiplicazione sia possibile in primo luogo).

Questo significa che per matrici quadrate si ha generalmente complessità $O(n^3)$ (anche se esistono algoritmi che si avvicinano al bound inferiore di $O(n^2)$).

4 Lezione del 07-03-25

Proseguiamo i richiami di algebra lineare.

4.0.1 Approfondimento sulle prestazioni delle operazioni matriciali

Usiamo MATLAB per studiare il tempo di computazione richiesto per effettuare alcune delle operazioni che abbiamo visto.

- Potremmo iniziare con il **prodotto scalare**. Avevamo detto che la complessità era $O(n)$. Scriviamo allora uno script per valutare, in scala logaritmica, il prodotto scalare fra vettori di dimensioni crescenti:

```
1 function n = time_scalar(num, base, mul)
2     if nargin < 3
3         mul = 100;
4     end
5     if nargin < 2
6         base = 2;
```

```

7   end
8
9   n = zeros(num, 1);
10  for i = 1:num
11      n(i) = base^(i - 1) * mul;
12  end
13
14  times = zeros(num, 1);
15
16  for i = 1:num
17      A = randn(1, n(i));
18      B = randn(n(i), 1);
19      tic;
20      C = A * B;
21      times(i) = toc;
22  end
23
24  loglog(n, times);
25  xlabel('Size');
26  ylabel('Computation Time (s)');
27  end

```

Un esempio di esecuzione potrebbe allora essere:

```

1 >> n = time_scalar(20);
2 >> hold on;
3 >> loglog(n, n * 10^-9);
4 >> hold off;

```

dove si è cercato di fare il *fitting* della curva ottenuta con la funzione $y = x$ (dove la variabile è chiaramente n , e si è aggiunta una costante moltiplicativa k per avvicinarci di più al grafico originale). Il grafico ottenuto è quindi:



Vediamo dal grafico che le prestazioni sono effettivamente vicine a quelle previste dalla complessità computazionale, se non per errori dati all'overhead di inizializzazione del timer `tic` e `toc` di MATLAB (lato sinistro del grafico) e della velocità generale molto elevata delle operazioni, che rende più visibile il rumore dato dallo scheduling della CPU e altri fattori di basso livello.

- Vediamo allora l'andamento del **prodotto fra matrici**. Lo script MATLAB è praticamente identico al precedente:

```
1 function n = time_matrix(num, base, mul)
2     if nargin < 3
3         mul = 100;
4     end
5     if nargin < 2
6         base = 2;
7     end
8
9     n = zeros(num, 1);
10    for i = 1:num
11        n(i) = base^(i - 1) * mul;
12    end
13
14    times = zeros(num, 1);
15
16    for i = 1:num
17        A = randn(n(i));
18        B = randn(n(i));
19        tic;
20        C = A * B;
21        times(i) = toc;
22    end
23
24    loglog(n, times);
25    xlabel('Size');
26    ylabel('Computation Time (s)');
27 end
```

che eseguito come:

```
1 >> n = time_matrix(7);
2 >> hold on;
3 >> loglog(n, n.^3 * 10^-11);
4 >> hold off;
```

ci restituisce il grafico:



che notiamo essere già più vicino del prodotto scalare (a causa del tempo di esecuzione maggiore richiesto, che "maschera" bene gli effetti a basso livello della CPU).

4.1 Proprietà del prodotto matriciale

Abbiamo che in genere il prodotto fra matrici non è **commutativo**, cioè:

$$AB \neq BA$$

di contro, vale l'**associativa**:

$$(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$$

e la **distributiva**, separatamente ai due lati:

$$(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$$

$$C \cdot (A + B) = C \cdot A + C \cdot B$$

Inoltre, notiamo che quello delle matrici non è un *dominio integrale*:

$$A \cdot B = 0 \not\Rightarrow A = 0 \vee B = 0$$

Vediamo ad esempio come sfruttare la proprietà associativa può permetterci di ottenere algoritmi più veloci. Supponiamo di voler calcolare:

$$(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$$

con $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$; $B \in \mathbb{C}^{n \times p}$, $C \in \mathbb{C}^{p \times q}$.

L'uguaglianza ci darà due metodi:

- $(A \cdot B) \cdot C$:
 - $A \cdot B = P \in \mathbb{C}^{m \times p}, \quad O(m \cdot n \cdot p)$
 - $P \cdot C = R \in \mathbb{C}^{m \times q}, \quad O(m \cdot p \cdot q)$ $\implies O(mnp + mpq) = O(mp(n + q))$
- $A \cdot (B \cdot C)$:
 - $B \cdot C = P \in \mathbb{C}^{n \times q}, \quad O(n \cdot p \cdot q)$
 - $A \cdot P = R \in \mathbb{C}^{m \times q}, \quad O(m \cdot n \cdot q)$ $\implies O(npq + mnq) = O(nq(p + m))$

che sono quindi uguali per $m = n = p$, ma (anche radicalmente diversi) diversi al variare di questi parametri.

In generale, quindi, se si hanno matrici con poche righe o poche colonne, è opportuno cercare di mantenere questa proprietà più a lungo possibile nei risultati intermedi.

Possiamo fare considerazioni simili a quelle fatte sull'associativa con la distributiva. Ad esempio, posta l'uguaglianza:

$$(A + B) \cdot C = AC + BC$$

con $A, B \in \mathbb{C}^{m \times n}$ e $C \in \mathbb{C}^{n \times p}$, abbiamo due metodi:

- $(A + B) \cdot C$:
 - $A + B = P \in \mathbb{C}^{m \times n}, \quad O(m \cdot n)$
 - $P \cdot C = R \in \mathbb{C}^{m \times p}, \quad O(m \cdot n \cdot p)$ $\implies O(mn + mnp) = O(mn(1 + p))$
- $AC + BC$:
 - $A \cdot C = P_1 \in \mathbb{C}^{m \times p}, \quad O(m \cdot n \cdot p)$
 - $B \cdot C = P_2 \in \mathbb{C}^{m \times p}, \quad O(m \cdot n \cdot p)$ $\implies O(mnp + mnp + mp) = O(mp(1 + 2n))$

che sono sì asintoticamente uguali per $m = n = p$ ($O(n^3)$), ma non esattamente uguali in quanto da un lato si ha $O(n^2 + n^3)$ e dall'altro $O(n^2 + 2n^3)$. Questo risulta chiaramente dal fatto che col secondo metodo decidiamo di effettuare il prodotto matriciale (che è l'operazione più costosa) non una ma 2 volte.

Un'altra proprietà del prodotto di matrici è che si può vedere il risultato riga per riga o colonna per colonna nei seguenti modi:

$$A = \begin{pmatrix} A_1 \\ \dots \\ A_m \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} B_1 & \dots & B_p \end{pmatrix}$$

$$\implies A \cdot B = \begin{pmatrix} A \cdot B_1 & \dots & A \cdot B_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 B \\ \dots \\ A_m B \end{pmatrix}$$

Questo ci dice che le colonne (le righe) di $C = A \times B$ sono combinazioni lineari delle colonne (delle righe) di A .

4.2 Determinante

Abbiamo visto la definizione di **determinante** per matrici quadrate:

Definizione 4.1: Determinante

Si definisce la funzione:

$$\det(A) : \mathbb{C}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{C}$$

con:

$$\det(A) = \begin{cases} a_{11}, & n = 1 \\ a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}, & n = 2 \\ \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} \det(A_{ij}), & n > 2 \quad (\text{sviluppo di Laplace}) \end{cases}$$

determinante.

Osserviamo che il calcolo del determinante attraverso lo sviluppo di Laplace ha complessità algoritmica $O(n!)$.

4.2.1 Proprietà del determinante

Sappiamo che A invertibile $\Leftrightarrow \det(A) \neq 0$ (cioè A **singolare**). Inoltre valgono:

$$\det(A^T) = \det(A)$$

$$\det(A^H) = \overline{\det(A)}$$

4.3 Rango

Vediamo poi come ci può servire il determinante delle **sottomatrici**:

Definizione 4.2: Sottomatrice

Una sottomatrice di A è una matrice ottenuta prendendo la restrizione di A a un sottoinsieme di righe e di colonne, cioè data $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, $I, J \subseteq \{1, \dots, n\}$ con $|I| = n_1$ e $|J| = n_2$, sarà allora:

$$A(I, J) \in \mathbb{C}^{n_1 \times n_2}$$

ottenuta incrociando le righe in I con le colonne in J .

Definiamo quindi i **minori**:

Definizione 4.3: Minore

Si dice minore di ordine k , con $k \in \{1, \dots, n\}$ il determinante di una sottomatrice quadrata $k \times k$.

E le sottomatrici **principali** e **principali di testa**:

Definizione 4.4: Sottomatrice principale

Una sottomatrice si dice principale se gli insiemi I, J usati per estrarla sono $I = J$.

Definizione 4.5: Sottomatrice principale di testa

Una sottomatrice quadrata di ordine k si dice sottomatrice principale di testa se $I = J = \{1, \dots, k\}$.

Allo stesso modo si possono definire **matrici di coda** (basterà prendere indici da k ad n).

Possiamo quindi definire il **rango** di matrice:

Definizione 4.6: Rango

Il rango $\text{rank}(A)$ di una matrice A è definito come il massimo numero di colonne (o di righe) linearmente indipendenti, ed è uguale all'ordine massimo dei minori $\neq 0$ in A .

4.3.1 Proprietà del rango

Caso particolare del rango sarà chiaramente quello dove prendiamo come sottomatrice la matrice stessa: $\det(A) \neq 0 \Leftrightarrow \text{rank}(A) = n$, e quindi gli insiemi delle colonne e delle righe di A sono tutte linearmente indipendenti.

Si ha poi che:

$$\text{rank}(A) = \dim(\text{Im}(A))$$

dove $\text{Im}(A)$ è la dimensione dell'**immagine** di A :

$$\text{Im}(A) = \{y \in \mathbb{C}^m : y = Ax, x \in \mathbb{C}^n\}$$

4.3.2 Teorema di Binet-Cauchy

Concludiamo enunciando il teorema di Binet-Cauchy sul determinante rispetto al prodotto matriciale.

Teorema 4.1: di Binet-Cauchy

Prese due matrici, $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ e $B \in \mathbb{C}^{n \times n}$, e $C = A \cdot B$ di dimensioni uguali, sarà:

$$\det(C) = \det(A) \cdot \det(B)$$

Nel caso generale avremo $A \in \mathbb{C}^{n \times p}$ e $B \in \mathbb{C}^{p \times n}$, da cui:

$$\det(C) = \begin{cases} 0, & p > n \\ \sum_j A_{[j]} \cdot B_{[j]} & p \leq n \end{cases}$$

dove $A_{[j]}$ e $B_{[j]}$ sono i minori di ordine n relativi alla stessa scelta di indici in A e in B .

La dimostrazione di questo teorema si basa sullo sviluppo dei cofattori della matrice $A \cdot B$, dove si possono riarrangiare i termini per ottenere gli sviluppi dei cofattori delle matrici A e B .

4.4 Matrice inversa

Diamo la definizione di **matrice inversa**:

Definizione 4.7: Matrice inversa

Data $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ tale che $\det(A) \neq 0$, si definisce $A^{-1} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ tale che:

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$$

Se si guarda ad A come una funzione lineare $A : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$, sarà che:

$$A : x \rightarrow Ax, \quad A^{-1} : Ax \rightarrow x$$

questo da:

$$(A^{-1} \circ A)(x) = A^{-1}(Ax) = A^{-1}Ax = Ix = x$$

□

4.4.1 Proprietà della matrice inversa

Vediamo alcune proprietà di A^{-1} :

1. Ricordiamo di nuovo che A^{-1} esiste se e solo se $\det(A) \neq 0$, cioè equivalentemente se $\text{rank}(A) = n$, o A ha spazi riga e colonna linearmente indipendenti;
2. Vediamo poi il calcolo di $\det(A^{-1})$: da $\det(I) = 1$, e:

$$\det(A \cdot A^{-1}) = \det(A) \cdot \det(A^{-1}), \quad (\text{Binet})$$

$$\implies \det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$$

3. Vediamo poi che:

$$(A \cdot B)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

per matrici quadrate $A, B \in \mathbb{C}^{n \times n}$;

4. Riguardo alle trasposte e alle Hermitiane vale:

$$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T = A^{-T}$$

$$(A^H)^{-1} = (A^{-1})^H = A^{-H}$$

e:

$$(AB)^T = B^T A^T$$

$$(AB)^H = B^H A^H$$

4.5 Matrici particolari

Definiamo alcune matrici particolari:

Definizione 4.8: Matrici particolari

Data $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, si dice di A che è:

- **Hermitiana:** $A = A^H$;
- **Antiermitiana:** $A = -A^H$;
- **Unitaria** $A^H A = A A^H = I$, $A^{-1} = A^H$;
- **Normale** $A^H A = A A^H$;
- **Simmetrica** $A = A^T$;
- **Antisimmetrica** $A = -A^T$;
- **Ortagonale** $A^T A = A A^T = I$, $A^T = A^{-1}$

dove notiamo che **simmetrica** e **antisimmetrica** significano *hermitiana* e *antihermitiana* in \mathbb{R} , e **ortogonale** significa *unitaria* in \mathbb{R} .

Per di più vale:

$$\{\text{matrici simmetriche reali}\} \subseteq \{\text{matrici hermitiane}\} \subseteq \{\text{matrici normali}\}$$

e:

$$\{\text{matrici ortogonali}\} \subseteq \{\text{matrici unitarie}\}$$

dove notiamo che unitarie ed ortogonali hanno l'inversa "facile", nel senso che basta trasporre o trovare l'hermitiana.

4.6 Matrici di permutazione

Definiamo le **matrici di permutazione**:

Definizione 4.9: Matrice di permutazione

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ si dice matrice di permutazione se A si ottiene dalla matrice di identità permutandone righe e colonne.

4.6.1 Proprietà delle matrici di permutazione

Tutte le matrici di permutazione sono matrici ortogonali (questo si vede dalla loro unimodularità, o osservando che P^T si ottiene dalla permutazione inversa).

Inoltre, vediamo che il prodotto di A con una matrice di permutazione si limita a scambiare righe e colonne in accordo con la permutazione della matrice. In particolare, $A \cdot P$ dà la permutazione delle colonne, mentre $P \cdot A$ dà la permutazione delle righe.

4.7 Sistemi lineari

Abbiamo un sistema di m equazioni lineari in n incognite:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots a_{1n}x_n = b_1 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + \dots a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Ci è spesso utile riscrivere sistemi di questo tipo in forma matriciale:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{m \times n}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^m$$

Il problema principe sarà quello, date A e b , di trovare x .

4.7.1 Teorema di Rouché-Capelli

Richiamiamo il teorema:

Teorema 4.2: di Rouché-Capelli

$Ax = b$ ammette almeno una soluzione se $\text{rank}(A) = \text{rank}(A|b)$, con $(A|b) \in \mathbb{C}^{m \times (n+1)}$ la matrice ottenuta aumentando A con b .

Per quanto riguarda l'unicità, supposto $m \geq n$ (sistema *sovradeterminato*):

- Se $\text{rank}(A) = n$ allora la soluzione è unica;
- Se $\text{rank}(A) < n$ allora ci sono ∞ soluzioni, e l'insieme delle soluzioni forma uno spazio vettoriale affine di dimensione $n - \text{rank}(A)$;

Nel caso il vettore $b = 0$, il sistema si dice **omogeneo**, e la soluzione nulla esiste sempre.

Abbiamo poi che:

Definizione 4.10:

L'insieme delle soluzioni di $Ax = 0$ si chiama Kernel (nucleo) della matrice:

$$\ker(A) = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = 0\}$$

notiamo che il kernel è un sottospazio vettoriale di dimensione $n - \text{rank}(A)$.

Osserviamo infine che nel caso $m = n$, se $\det(A) \neq 0$, cioè $\text{rank}(A) = n$, la soluzione di $Ax = b$ è unica per ogni $b \in \mathbb{R}^m$ e si scrive:

$$x = A^{-1}b$$

Vedremo che in generale calcolare l'inversa non è conveniente rispetto ad altri metodi di approssimazione.

4.7.2 Regola di Cramer

Il vettore soluzione si può scrivere anche componente per componente come:

$$x_j = \frac{\det(A_j)}{\det(A)}$$

dove A_j è la matrice ottenuta da A sostituendo la colonna j con b .

Questa via costa come calcolare $O(n)$ determinanti di matrici $n \times n$, ed è quindi poco conveniente ($O(n^3)$).

5 Lezione del 10-03-25

5.1 Autovalori e autovettori

Continuiamo a parlare di matrici quadrate, e introduciamo gli **autovalori** e **autovettori**:

Definizione 5.1: Autovalori e autovettori destri

Data $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, $\lambda \in \mathbb{C}$ si dice autovalore se esiste un vettore v in \mathbb{C}^n , con $v \neq 0$, tale che:

$$Av = \lambda v$$

L'equazione $Av = \lambda v$ non rappresenta un sistema lineare, in quanto sia v che λ sono variabili (e fra l'altro moltiplicate fra loro).

In particolare, v si dice **autovettore destro** per A rispetto a λ . Similmente, si può definire w **autovettore sinistro**:

Definizione 5.2: Autovalori e autovettori sinistri

Data $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, $\lambda \in \mathbb{C}$ si dice autovalore se esiste un vettore w in \mathbb{C}^n , con $w \neq 0$, tale che:

$$w^H A = w^H \lambda$$

Solitamente ci basta trovare gli autovettori destri in quanto:

$$(w^H A)^H = A^H w$$

$$(\lambda w^H)^H = \bar{\lambda} w$$

cioè w è un autovettore destro per λ se e solo se w è autovettore destro per A^H rispetto all'autovalore $\bar{\lambda}$. In questo caso, se la matrice è *simmetrica* o *hermitiana*, gli autovalori destri e sinistri coincidono.

5.1.1 Caratterizzazione degli autovalori

Potremmo interrogarci sull'esistenza di questi oggetti. Poniamo allora:

$$Av = \lambda v \implies Av - \lambda v = 0 \implies (A - \lambda I)v = 0$$

Chiaramente il sistema è risolto per $v = 0$, ma abbiamo escluso a priori tale possibilità. Abbiamo allora un sistema $A - \lambda I$, che ha almeno una soluzione per Rouché-Capelli, che è 0 se $\det(A - \lambda I) \neq 0$, e un valore $\neq 0$ altrimenti. Vogliamo quindi impostare:

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = 0$$

detta **equazione caratteristica** (del *polinomio caratteristico* posto nullo). Gli autovalori non saranno altro che le soluzioni dell'equazione caratteristica.

L'esistenza di tali soluzioni è data dal fatto che $\deg(p(\lambda)) = n$, e quindi dal teorema fondamentale dell'algebra esistono c_0, c_1, \dots, c_n tali che:

$$p(\lambda) = c_0 + c_1\lambda + \dots + c_n\lambda^n = c_n(\lambda - \lambda_1)\dots(\lambda - \lambda_n) \sim (-1)^n(\lambda - \lambda_1)\dots(\lambda - \lambda_n)$$

e dal punto di vista dei minori:

$$\begin{aligned} &= (-1)^n\lambda^n + (-1)^{n-1}\sigma_1\lambda^{n-1} + \dots + (-1)^1\sigma_{n-1}\lambda + (-1)^0\sigma_n \\ &= (-1)^n\lambda^n + (-1)^{n-1}\sigma_1\lambda^{n-1} + \dots - \sigma_{n-1}\lambda + \sigma_n \end{aligned}$$

dove σ_j è la somma dei determinanti delle sottomatrici di A di ordine j . □

Alcuni di questi σ_j sono semplici da calcolare:

$$\sigma_1 = \sum_{i=1}^n a_{ii} = \text{tr}(A) \quad (\text{traccia})$$

$$\sigma_n = \prod_{j=1}^n \lambda_j = \det(A)$$

vediamo quest'ultima relazione: si ha che il determinante di una matrice è uguale al prodotto dei suoi autovalori, ergo:

$$\det(A) = 0 \Leftrightarrow \exists \lambda_j = 0$$

Riepilogando una matrice $\in \mathbb{C}^{n \times n}$ ha sempre esattamente n autovalori, contati con la loro molteplicità. In particolare:

Definizione 5.3: Molteplicità algebrica

Un autovalore $\bar{\lambda}$ ha molteplicità algebrica k ($\alpha(\bar{\lambda}) = k$) se k è la sua molteplicità μ come radice del polinomio caratteristico.

Chiaramente:

$$\sum_{\bar{\lambda}} \alpha(\bar{\lambda}) = n$$

5.1.2 Caratterizzazione degli autovettori

Potremmo chiederci quanti sono gli autovettori. Abbiamo allora che:

$$Av = \lambda v$$

e preso $\theta \in \mathbb{C}$ allora:

$$A(\theta v) = \theta Av = \theta \lambda v = \lambda(\theta v)$$

cioè anche θv è autovalore per $\lambda^* = \theta \lambda$. Questo ci dice che gli autovettori non sono mai unici. Inoltre, possiamo dire che dati $Av_1 = \lambda v_1$ e $Av_2 = \lambda v_2$:

$$A(v_1 + v_2) = Av_1 + Av_2 = \lambda v_1 + \lambda v_2 = \lambda(v_1 + v_2)$$

cioè sono soddisfatte le proprietà di omogeneità e additività, e quindi l'insieme degli autovettori relativi a un certo autovalore λ forma uno spazio vettoriale (detto **autospazio** rispetto a λ).

Questo ci permette di definire un'altra molteplicità:

Definizione 5.4: Molteplicità geometrica

Dato $\lambda \in \mathbb{C}$ autovalore di $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ si dice molteplicità geometrica k ($\gamma(\lambda) = k$) la dimensione dell'autospazio associato a λ , ovvero:

$$\gamma(\lambda) = \dim(\ker(A - \lambda I))$$

Per Rouché-Capelli, si ha che:

$$\gamma(\lambda) = n - \text{rank}(A - \lambda I)$$

Valgono poi le relazioni fra molteplicità algebrica e molteplicità geometrica:

$$1 \leq \gamma(\lambda) \leq \alpha(\lambda) \leq n$$

Inoltre se si hanno $\lambda_i \neq \lambda_j$ autovalori distinti ($\forall i \neq j, i, j \in \{1, \dots, n\}$), allora necessariamente:

$$\gamma(\lambda_i) = \alpha(\lambda_i) = 1, \quad \forall i = 1, \dots, n$$

cioè se tutti gli autovalori di A sono distinti, le loro molteplicità, sia α che γ , devono essere uguali a 1.

5.1.3 Matrici simili

Possiamo quindi definire la **similarità** fra matrici:

Definizione 5.5: Matrici simili

Date $A, B \in \mathbb{C}^{n \times n}$, si dicono simili ($B \sim A$) se esiste $S \in \mathbb{C}^{n \times n}$ invertibile tale che:

$$B = S^{-1}AS$$

in questo caso vale anche l'inverso:

$$A = SBS^{-1}$$

Le matrici fra di loro simili hanno diverse proprietà in comune. Ad esempio, $A \sim B$ hanno gli stessi autovalori con le stesse molteplicità α e γ . Inoltre se v è autovettore per A associato a λ , allora $S^{-1}v$ è autovettore per B associato sempre a λ . Questo si dimostra da:

$$\det(B - \lambda I) = 0 = \det(S^{-1}AS - \lambda I) = \det(S^{-1}AS - \lambda S^{-1}S) = \det(S^{-1}(A - \lambda I)S)$$

e da Binet-Cauchy:

$$\det(S^{-1}(A - \lambda I)S) = \det(S^{-1}) \det(A - \lambda I) \det(S) = \det(A - \lambda I)$$

in quanto S^{-1} e S sono costanti moltiplicative, e quindi gli autovalori λ di A e B coincidono. Inoltre:

$$B - \lambda I = 0 \Rightarrow S^{-1}AS - \lambda I = 0 \Rightarrow S^{-1}(A - \lambda I)S = 0 \Rightarrow A - \lambda I = 0$$

cioè si ha lo stesso spazio delle soluzioni.

Presa (λ, v) *autocoppia* (coppia autovalore-autovettore) per A abbiamo allora:

$$B(S^{-1}v) = S^{-1}AS(S^{-1}v) = S^{-1}Av = S^{-1}\lambda v = \lambda(S^{-1}v)$$

e quindi $S^{-1}v$ è autovettore per B associato a λ . \square

5.1.4 Matrici diagonalizzabili

Definiamo le matrici diagonalizzabili come matrici simili ad una matrice diagonale, cioè:

Definizione 5.6: Matrice diagonalizzabile

Data $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, A si dice diagonalizzabile se $\exists S$ invertibile tale che:

$$S^{-1}AS = A_D$$

con $A_D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ diagonale.

Osserviamo che se A è diagonalizzabile, la matrice diagonale (sopra, A_D) contiene sulla diagonale gli autovalori di A .

Vediamo poi che:

$$S^{-1}AS = A_D \implies AS = SA_D$$

risultato piuttosto triste, e posto $S = \begin{pmatrix} s_1 & \dots & s_n \end{pmatrix}$:

$$AS = \begin{pmatrix} As_1 & \dots & As_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 s_1 & \dots & \lambda_n s_n \end{pmatrix}$$

da dove notiamo che da $As_i = \lambda_i s_i$, la matrice S ha per colonne gli autovettori di A (comodo per il calcolo della matrice S quando A è definita in base canonica).

Non tutte le matrici quadrate sono diagonalizzabili. La diagonalizzabilità dipende infatti dalla possibilità di scegliere n autovettori di A linearmente indipendenti, cioè di trovare una base di \mathbb{C}^n di autovalori di A .

Da questo deriva:

Teorema 5.1: Diagonalizzabilità di matrici

$A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ è diagonalizzabile se e solo se:

$$\alpha(\lambda) = \gamma(\lambda), \quad \forall \lambda$$

dove i λ sono gli autovalori di A .

Questo semplicemente significa che una matrice è diagonalizzabile se le molteplicità algebriche e geometriche di tutti gli autovalori coincidono.

Si ha quindi che, per A diagonalizzabile, con $x \in \mathbb{C}^n$ si ha che $\exists c_1, \dots, c_n \in \mathbb{C}$ tali che:

$$x = \sum_{i=1}^n c_i v_i$$

sugli autovettori v_j .

L'utilità sta nel fatto che possiamo scegliere il caso particolare dove la base di autovettori è unitaria/ortogonale (unitaria in \mathbb{C} e ortogonale in \mathbb{R}). Da questo deriva:

Teorema 5.2: Teorema spettrale

Se la matrice A è unitaria, cioè $A = A^H$, allora:

1. A è sempre diagonalizzabile;
2. Gli autovalori di A sono reali;
3. Si può scegliere una base di autovettori unitaria/ortogonale, cioè tale che:

$$\langle v_i, v_j \rangle = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases}$$

o in modo equivalente si può trovare $V \in \mathbb{C}^{n \times n}$ tale che:

$$V^H A V = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$$

e

$$V^H V = V V^H = I$$

Da questo teorema vengono le definizioni:

Definizione 5.7: Matrice definita positiva/negativa

Una matrice hermitiana viene detta definita positiva (definita negativa) quando gli autovalori λ_i sono tutti > 0 (< 0).

5.1.5 Proprietà di autovalori e autovettori

Vediamo come si comportano autovalori e autovettori sottoposti a diverse operazioni fra matrici.

1. **Somma per identità:** data (λ, v) autocoppia per $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, $\delta \in \mathbb{C}$, allora $A + \delta I$ ha come autocoppia $\lambda + \delta, v$. Questo semplicemente da:

$$(A + \delta I)v = Av + \delta v = \lambda v + \delta v = (\lambda + \delta)v$$

2. **Somma di potenze:** supponiamo $q(x) = \sum_{i=0}^d q_i x^i$. Si può allora definire:

$$q(A) = \sum_{i=0}^d q_i A^i$$

Allora con (λ, v) autocoppia di A , si avrà che $(q(\lambda), v)$ è autocoppia per $q(A)$.

Notiamo che la proprietà (1) è il caso $q(x) = x + \delta$.

3. **Inversa:** data (λ, v) autocoppia per A , si avrà che (λ^{-1}, v) è autocoppia per A^{-1} . Questo da:

$$Av = \lambda v \implies A^{-1}Av = \lambda A^{-1}v \implies v = \lambda A^{-1}v$$

da cui:

$$\frac{1}{\lambda}v = A^{-1}v$$

□

4. **Autovalori complessi coniugati:** se $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, allora $\lambda \in \mathbb{C}$ è autovalore di A se e solo se anche $\bar{\lambda}$ coniugato è autovalore di A . Equivalentemente, gli autovalori complessi arrivano sempre in coppie coniugate. Questo da:

$$p(\lambda) = 0 = (-1)^n \lambda^n + (-1)^{n-1} \sigma_1 \lambda^{n-1} + \dots - \sigma_{n-1} \lambda + \sigma_n$$

con $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, dovrà essere che:

$$p(\lambda) = 0 = p(\bar{\lambda})$$

□

Definiamo infine il **raggio spettrale**, cioè il *massimo modulo* degli autovalori.

Definizione 5.8: Raggio spettrale

La quantità $\rho(A) = \max_{j=\{1,\dots,n\}} |\lambda_j|$ è detta raggio spettrale di A .

Questa definizione è utile sempre al calcolo di esponenti di matrici. Ad esempio, vale il teorema:

Teorema 5.3: Limiti e raggio spettrale

Per un matrice A con raggio spettrale $\rho(A)$, vale:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} A^x = 0 \Leftrightarrow \rho(A) < 1$$

6 Lezione del 14-03-25

6.1 Norme

Concludiamo il ripasso di algebra lineare parlando del concetto di **norma**.

6.1.1 Norme vettoriali

In molti casi è utile definire (quantificare) la "grandezza" di un vettore, prendendo il vettore 0 come nullo e ogni vettore come più grande di esso. Formalmente, quello che si fa è definire funzioni con proprietà specifiche dette **norme**.

Definizione 6.1: Norma

Una funzione $|\cdot| : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{R}^+$ è detta norma se verifica le 3 proprietà:

1. $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
2. $|\alpha x| = |\alpha| \cdot |x|, \quad \forall \alpha \in \mathbb{C}, \forall x \in \mathbb{C}^n$
3. $|x + y| \leq |x| + |y|, \quad \forall x, y \in \mathbb{C}^n$ (disuguaglianza del triangolo)

Possiamo dare alcuni esempi di norme:

- $|x|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$ (norma di Manhattan)

- $|x|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2}$ (norma Euclidea)
- $|x|_p = (\sum_{i=1}^n |x_i|^p)^{\frac{1}{p}}$ (p -norma)
- $|x|_\infty = \max_{i=1, \dots, n} |x_i|$ (norma a infinito)

Notiamo che l'insieme dei vettori di norma 1 cambia geometria al variare della norma che scegliamo. Ad esempio, in \mathbb{R}^2 , l'insieme dei vettori di norma 1 dà un quadrato ruotato di 45 gradi, dei vettori di norma 2 una circonferenza, e via via al crescere di p si approssima un quadrato unitario centrato sull'origine (che la norma a infinito effettivamente raggiunge).

Le norme sono equivalenti in quanto esiste il teorema:

Teorema 6.1: Norme equivalenti

Date due norme $|\cdot|_a$ e $|\cdot|_b$, si ha che $\exists \alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$ tali che:

$$\alpha|x|_a \leq |x|_b \leq \beta|x|_a, \quad \forall x \in \mathbb{C}^n$$

Questa proprietà è sempre valida su spazi vettoriali finiti (non vale necessariamente lo stesso su spazi infiniti). Se vale il teorema 6.1, quindi, allora vale anche che:

$$\beta^{-1}|x|_b \leq |x|_a \leq \alpha^{-1}|x|_b, \quad \forall x \in \mathbb{C}^n$$

Per le norme più comuni ($|\cdot|_1, |\cdot|_2, |\cdot|_\infty$) valgono le disuguaglianze:

- $|x|_2 \leq |x|_1 \leq \sqrt{n}|x|_2$

Dimostriamo entrambe le disuguaglianze.

– $|x|_2 \leq |x|_1$

Questo si ha da:

$$\sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2} \leq \sum_{i=1}^n |x_i|$$

prendendo i quadrati:

$$\sum_{i=1}^n |x_i|^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n |x_i| \right)^2 = \sum_{i=1}^n |x_i|^2 + 2 \sum_{i < j} |x_i| |x_j|$$

che è chiaramente vero con $2 \sum_{i < j} |x_i| |x_j| > 0$.

– $|x|_1 \leq \sqrt{n}|x|_2$

Questo si nota prendendo:

$$\sum_{i=1}^n |x_i| = (||x||, 1) = |x_1| \cdot 1 + \dots + |x_n| \cdot 1$$

dove $||x||$ rappresenta il modulo componente a componente di x . Varrà allora dalla disuguaglianza di Cauchy-Schwarz:

$$(|x|, 1) \leq ||x|| \cdot |1| = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^n |1|^2} = \sqrt{n} \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2}$$

che è la tesi. □

- $|x|_\infty \leq |x|_1 \leq n|x|_\infty$

Questo risulta chiaro da:

$$\max_{i=1,\dots,n} |x_i| \leq \sum_{i=1}^n |x_i| \leq n \max_{i=1,\dots,n} |x_i|$$

□

- $|x|_\infty \leq |x|_2 \leq \sqrt{n}|x|_\infty$

Anche questo risulta chiaro da:

$$\max_{i=1,\dots,n} |x_i| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2} \leq \sqrt{n} \max_{i=1,\dots,n} |x_i|$$

prendendo i quadrati:

$$\left(\max_{i=1,\dots,n} |x_i| \right)^2 \leq \sum_{i=1}^n |x_i|^2 \leq n \left(\max_{i=1,\dots,n} |x_i| \right)^2$$

□

6.1.2 Norme matriciali

Si possono definire norme anche per matrici.

Definizione 6.2: Norma matriciale

Una funzione $|\cdot| : \mathbb{C}^{m \times n} \rightarrow \mathbb{R}^+$ è detta norma matriciale se verifica le 3 proprietà:

1. $|A| = 0 \Leftrightarrow A = 0$
2. $|\alpha A| = |\alpha| \cdot |A|, \quad \forall \alpha \in \mathbb{C}, \forall A \in \mathbb{C}^{m \times n}$
3. $|A + B| \leq |A| + |B|, \quad \forall A, B \in \mathbb{C}^{m \times n}$
4. Se $m = n$ chiediamo inoltre, visto che è ben definito il prodotto matriciale:
 $|A \cdot B| \leq |A| \cdot |B|, \quad \forall A, B \in \mathbb{C}^{m \times n}$
da qui in poi assumiamo solo questo caso.

Esiste un modo per trovare norme matriciali a partire da norme vettoriali.

Definizione 6.3: Norma indotta

Una norma matriciale $|\cdot|_m$ si dice indotta se esiste una norma vettoriale $|\cdot|_v$ tale che:

$$|A|_m = \sup_{|x|_v \neq 0} \frac{|Ax|_v}{|x|_v} = \sup_{|x|_v = 1} |Ax|_v$$

Intuitivamente, diciamo che una matrice è tanto più "grande" tanto più *allarga* i vettori a distanza unitaria.

Le norme matriciali indotte dalle norme vettoriali più comuni ($|\cdot|_1, |\cdot|_2, |\cdot|_\infty$) sono le seguenti:

- $|A|_1 = \max_{j=1,\dots,n} \sum_{i=1}^n |a_{ij}|$, cioè il massimo della somme delle colonne di A ;
- $|A|_\infty = \max_{i=1,\dots,n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$, cioè il massimo delle somme delle righe di A ;
- $|A|_2 = \sqrt{\rho(A^H A)}$, cioè la radice dell'autovalore di modulo massimo di $A^H A$. Notiamo che questo metodo è sensibilmente più difficile di calcolare la somma delle entrate delle matrice in riga o in colonna.

Prendiamo $A^H A$ anzichè A in quanto:

$$|A|_2 = \sup_{|x|_2=1} |Ax|_2$$

e:

$$|Ax|_2 = \langle Ax, Ax \rangle = \langle x, A^H A x \rangle$$

il resto della dimostrazione non viene dato in quanto si basa su un risultato che esula dal corso (*quoziente di Rayleigh*), ma resta il fatto che ci serve una forma del tipo $A^H A$ anziché la sola matrice A .

Un esempio di norma matriciale non indotta è la norma di Frobenius:

$$|A|_F = \sqrt{\sum_{ij} |\alpha_{ij}|^2}$$

che possiamo assumere come una grande norma $|\cdot|_2$ su tutta la matrice.

Un modo per verificare che questa norma non è effettivamente indotta è osservare che:

$$|I|_F = \sqrt{n}$$

mentre per ogni norma indotta vale che:

$$|I|_i = \sup_{|x| \neq 0} \frac{|Ix|}{|x|} = \sup_{|x| \neq 0} \frac{|x|}{|x|} = 1 \neq \sqrt{n} \quad \forall n > 1$$

□

Notiamo che questa verifica vale in una sola direzione: se la norma dell'identità valesse effettivamente 1, potremmo dire che questa proprietà non è violata, ma non che di conseguenza la norma è indotta, cioè:

$$|I|_m \neq 1 \implies |\cdot|_m \text{ non è indotta}$$

$$|I|_m = 1 \not\Rightarrow |\cdot|_m \text{ è indotta (può non esserlo)}$$

Diamo quindi la definizione di compatibilità:

Definizione 6.4: Compatibilità

Una norma matriciale $|\cdot|_m$ si dice compatibile con una norma vettoriale $|\cdot|_v$ se vale:

$$|Ax|_v \leq |A|_m \cdot |x|_v, \quad \forall A \in \mathbb{C}^{n \times n}, \quad \forall x \in \mathbb{C}^n$$

Osserviamo che le norme matriciali indotte sono ovviamente compatibili con le norme vettoriali che le inducono. Infatti posto $x \neq 0$:

$$\frac{|Ax|_v}{|x|_v} \leq |A|_m \implies |Ax|_v \leq |A|_m \cdot |x|_v$$

□

6.1.3 Norme e autovalori

Le diseguaglianze precedenti e le proprietà delle norme ci dicono che gli autovalori non possono essere ovunque sul piano complesso, ma in modulo devono essere più piccoli di $|A|_m$ se $|\cdot|_m$ è compatibile (a maggior ragione indotta) con una norma vettoriale. Infatti, con (x, λ) autocoppia per A , cioè:

$$Ax = \lambda x, \quad \lambda \in \mathbb{C}, \quad x \neq 0$$

si ha:

$$|\lambda x| = |\lambda| \cdot |x| = |Ax|_v \leq |A|_m \cdot |x|_v \implies |\lambda| \leq |A|_m$$

□

Questo significa che se si prende il "disco" centrato sull'origine con raggio uguale alla norma della matrice A , allora tutti gli autovalori di A devono trovarsi all'interno di tale disco, cioè:

$$\lambda \text{ autovalore} \Leftrightarrow \lambda \in \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq |A|_m\}$$

In realtà l'assunzione $|\cdot|_m$ compatibile può essere rimossa, ovvero vale il seguente teorema:

Teorema 6.2: di Hirsch

Data $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ allora $\forall |\cdot|$ norma matriciale vale:

$$\rho(A) = \max\{|\lambda| \text{ autovalore}\} \leq |A|$$

Questo si dimostra prendendo (λ, x) autocoppia per A e considerando la matrice:

$$B = \begin{pmatrix} x & | & 0 \end{pmatrix}$$

per cui vale:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} Ax & A0 & \dots & A0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} = \lambda B$$

allora vale:

$$|\lambda| |B| = |\lambda B| = |A \cdot B| \leq |A| \cdot |B|$$

dividendo per B ($B \neq 0$ da $x \neq 0$ autovettore):

$$\frac{|\lambda| |B|}{|B|} \leq \frac{|A| \cdot |B|}{|B|} \implies |\lambda| \leq |A|$$

e quindi $\rho(A) \leq |A|$. □

Questa misura potrebbe non essere molto utile in quanto la norma $|A|$ potrebbe essere arbitrariamente più grande del raggio spettrale $\rho(A)$

6.1.4 Teoremi di Gershgorin

Esistono alcuni teoremi più forti riguardo alle norme degli autovalori, che prendono il nome di **teoremi di Gershgorin**.

Iniziamo dalla definizione di *cerchio* di Gershgorin:

Definizione 6.5: Cerchio di Gershgorin

Data $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ definiamo gli insiemi:

$$\mathcal{F}_i(A) = \{z \in \mathbb{C} : |z - a_{ii}| \leq \rho_i\}, \quad \rho_i = \sum_{j \neq i}^n |a_{ij}| \geq 0$$

cerchi di Gershgorin di A associati alla riga i .

Questi sono effettivamente i cerchi di raggio uguale alla somma degli elementi fuori dalla diagonale, con centro sull'asse dei reali il valore presente sulla diagonale, per ogni riga.

Possiamo quindi enunciare i teoremi di Gershgorin:

Teorema 6.3: Primo teorema di Gershgorin

Se $\lambda \in \mathbb{C}$ è autovalore vale che:

$$\lambda \in \bigcup_{i=1}^n \mathcal{F}_i(A)$$

cioè gli autovalori stanno nell'unione dei cerchi di Gershgorin. Per dimostrare questo risultato si prende l'autocoppia di A (λ, x) e si indica con k l'indice della componente di massimo modulo in x . Quindi $x \neq 0$ perchè x autovettore, e k è scelto tale che $|x_k| > |x_j|$, $\forall j = 1, \dots, n$. Sappiamo quindi che vale $Ax = \lambda x$ dalla definizione di autovalore, e consideriamo la riga k nell'uguaglianza:

$$a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \dots + a_{kn}x_n = \lambda x_k \Leftrightarrow \sum_{j=1}^n a_{kj}x_j = \lambda x_k \Leftrightarrow \sum_{j \neq k}^n a_{kj}x_j = \lambda x_k - a_{kk}x_k = (\lambda - a_{kk})x_k$$

$$\Rightarrow |\lambda - a_{kk}| \cdot |x_k| = \left| \sum_{j \neq k}^n a_{kj}x_j \right| \leq \sum_{j \neq k}^n |a_{kj}| \cdot |x_j|$$

Dato $|x_k| > 0$, si divide da entrambi i lati per $|x_k|$:

$$\Rightarrow |\lambda - a_{kk}| \leq \sum_{j \neq k}^n |a_{kj}| \frac{|x_j|}{|x_k|} \leq \sum_{j \neq k}^n |a_{kj}| = \rho_k$$

Quindi:

$$|\lambda - a_{kk}| \leq \rho_k \Rightarrow \lambda \in \mathcal{F}_k(A)$$

e, dato che l'argomento utilizzato vale per un qualsiasi autovalore, abbiamo la tesi del teorema:

$$\lambda \in \bigcup_{i=1}^n \mathcal{F}_i(A)$$

□

Osserviamo che in realtà avremmo dimostrato che $\lambda \in \mathcal{F}_k(A)$ con k indice dell'elemento di massimo modulo nell'autovettore. Tuttavia, nella situazione usuale in cui non conosciamo né λ né x , sapere k non è plausibile.

Definizione 6.6: Matrice a predominanza diagonale forte

Una matrice A si dice a predominanza diagonale forte se vale:

$$|a_{ii}| > \sum_{j \neq i}^n |a_{ij}| = \rho_i, \quad \forall i = 1, \dots, n$$

Un **corollario** del teorema 6.3 è che se A è a predominanza diagonale forte, allora A è non singolare ($\det(A) \neq 0$).

Questo si dimostra dal fatto che tutti i cerchi di Gershgorin di A non comprendono l'origine, e quindi:

$$0 \notin \bigcup_{i=1}^n \mathcal{F}_i(A)$$

e 0 non può essere autovalore di A .

Teorema 6.4: Secondo teorema di Gershgorin

Se M_1 è unione di s cerchi di Gershgorin ed M_2 è unione di $n - s$ cerchi di Gershgorin e vale $M_1 \cap M_2 = \emptyset$, allora M_1 contiene esattamente s autovalori e M_2 ne contiene esattamente altri $n - s$.

Osserviamo che il primo teorema di Gershgorin (6.3) non ci dice che necessariamente c'è un autovalore per ogni cerchio $\mathcal{F}_i(A)$, cioè può succedere che $\mathcal{F}_i(A)$ non ne contiene nemmeno uno. Il secondo teorema di Gershgorin (6.4) invece ci dice che se abbiamo un cerchio isolato, allora questo contiene esattamente un autovalore.

Un **corollario** del secondo teorema di Gershgorin è che se A ha n cerchi disgiunti, allora A ha n autovalori distinti ed è diagonalizzabile.

6.1.5 Matrici reali e Gershgorin

Ci sono delle note da fare sulle **matrici reali**. Osserviamo infatti che se $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, se λ è autovalore di A allora lo è anche $\bar{\lambda}$. Quindi, se un cerchio di Gershgorin contiene un autovalore complesso, dovrà necessariamente contenere anche il suo coniugio. Ora, visto che un cerchio isolato contiene necessariamente un solo autovalore, sarà che un cerchio isolato in una matrice a entrate reali contiene necessariamente un autovalore reale, e quindi la matrice ha necessariamente un autovalore reale.

6.1.6 Matrici trasposte e Gershgorin

Dato che A e A^T hanno gli stessi autovalori (dallo stesso polinomio caratteristico), si può prendere come regione dove stanno gli autovalori l'intersezione:

$$\left[\bigcup_{i=1}^n \mathcal{F}_i(A) \right] \cap \left[\bigcup_{i=1}^n \mathcal{F}_i(A^T) \right]$$

dove notiamo bene che:

$$\left[\bigcup_{i=1}^n \mathcal{F}_i(A) \right] \cap \left[\bigcup_{i=1}^n \mathcal{F}_i(A^T) \right] \neq \bigcup_{i=1}^n (\mathcal{F}_i(A) \cap \mathcal{F}_i(A^T))$$

infatti solitamente il termine a sinistra è ben più grande. Osserviamo poi che:

$$\mathcal{F}_I(A^T) = \{z \in \mathbb{C} : |z - a_{ii}| \leq \rho_i\}, \quad \rho_i = \sum_{i \neq j}^n |a_{ij}| \geq 0$$

cioè semplicemente si prendono le colonne anziché le righe.

6.1.7 Note sul calcolo dei dischi di Gershgorin

Vediamo come si può usare MATLAB per il calcolo e la visualizzazione dei dischi di Gershgorin di una matrice.

Potremmo pensare di scrivere una funzione per il calcolo e la rappresentazione grafica dei cerchi di Gershgorin di una matrice arbitraria (sia reale che complessa), ad esempio come:

```

1 function draw_gersh(A, draw_eigen)
2     % draws a circle
3     function circle(center, radius, col)
4         t = linspace(0, 2*pi);
5         patch(radius * cos(t) + real(center), ...
6               radius * sin(t) + imag(center), col);
7     end
8
9     if nargin < 2
10         draw_eigen = true;
11     end
12
13     n = size(A, 1);
14
15     % graph setup
16     close all;
17     hold on;
18     axis('equal');
19
20     for k = 1:n
21         center = A(k, k);
22         radius = sum(abs(A(k, [1:k-1, k+1:end])));
23         circle(center, radius, 'blue');
24     end
25
26     alpha(.1)
27
28     if draw_eigen
29         eigenvals = eig(A);
30         plot(real(eigenvals), imag(eigenvals), 'red.');

```

A questo punto potremo tracciare i cerchi di Gershgorin come:

```

1 >> A = [5, 1, 1; 1, -5, 1; 1, 0.5, 1];
2 >> draw_gersh(A)

```

da cui si ottiene il grafico:



Notiamo come, nel caso specifico, a 3 cerchi di Gershgorin distinti corrispondono 3 autovalori distinti, e quindi la matrice A è diagonalizzabile.

7 Lezione del 17-03-25

Avevamo visto i primi 2 teoremi di Gershgorin, cioè:

- **Primo teorema di Gershgorin:** ogni autovalore λ è contenuto in:

$$\lambda \in \bigcup_{i=1}^n \mathcal{F}_i(A)$$

definiti i *cerchi di Gershgorin*:

$$\mathcal{F}_i(A) = \left\{ z \in \mathbb{C}, \quad |z - a_{ii}| < \sum_{j \neq i} a_{ij} \right\}$$

- **Secondo teorema di Gershgorin:** un M_1 è unione di s cerchi e M_2 unione dei restanti $n - s$, allora: $M_1 \cap M_2 = \emptyset \implies M_1$ contiene s autovalori e M_2 i restanti $n - s$.

Vediamo quindi il terzo teorema di Gershgorin. Per fare ciò, introduciamo il concetto di **matrice irriducibile**, e ancor prima di **grafo** associato alla matrice.

7.1 Matrici irriducibili

Diamo la definizione:

Definizione 7.1: Grafo associato ad una matrice

Data una matrice $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ si dice grafo associato ad A , indicato con $G(A) = (V, E)$, il grafo che ha come vertici l'insieme $V = \{1, \dots, n\}$ e come archi l'insieme E così definito:

$$(i, j) \in E \Leftrightarrow a_{ij} \neq 0$$

Solitamente si ignora la diagonale (notiamo che in caso di entrate $\neq 0$ risultano semplicemente in anelli aperti e chiusi sullo stesso nodo).

A noi interesseranno grafi **fortemente connessi**:

Definizione 7.2: Grafo fortemente connesso

Un grafo si dice fortemente connesso se per ogni scelta di vertici $i, j \in 1, \dots, n$ esiste un cammino *orientato* sul grafo che parte da i e arriva a j .

A questo punto possiamo definire le matrici **irriducibili**:

Definizione 7.3: Matrice irriducibile

Una matrice $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ si dice irriducibile se il grafo $G(A)$ è fortemente connesso.

Possiamo quindi enunciare il terzo teorema di Gershgorin:

Teorema 7.1: Terzo teorema di Gershgorin

Data una matrice $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ irriducibile si ha che, se λ è un autovalore tale che:

$$\lambda \in \partial \left(\bigcup_{i=1}^n \mathcal{F}_i(A) \right)$$

dove con ∂ si indica il bordo, cioè esiste un indice, $\exists k \in \{1, \dots, n\}$ tale che: $|\lambda - a_{kk}| = \sum_{j \neq k} a_{kj}$, allora dovrà essere che:

$$\lambda \in \bigcap_{i=1}^n \partial (\mathcal{F}_i(A))$$

cioè per *tutti* gli indici, $\forall k \in \{1, \dots, n\}$ vale che: $|\lambda - a_{kk}| = \sum_{j \neq k} a_{kj}$.

Questo significa che, nel caso di matrici irriducibili, un autovalore che sta sul bordo di un disco di Gershgorin dovrà necessariamente stare sul bordo di *tutti* i dischi di Gershgorin.

Avevamo visto la definizione di matrici a predominanza diagonale forte. Esistono anche matrici a predominanza diagonale *debole* (o semplicemente *diagonali deboli*):

Definizione 7.4: Matrice a predominanza diagonale debole

Una matrice A si dice a predominanza diagonale debole se vale:

$$|a_{ii}| \geq \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$$

ed $\exists k \in \{1, \dots, n\}$ tale per cui:

$$|a_{kk}| > \sum_{j \neq k} |a_{kj}|$$

Un **corollario** è che se A è a predominanza diagonale debole ed è irriducibile, allora A non è singolare.

Questo si dimostra direttamente dal fatto che il valore 0 appartiene ai cerchi per cui vale $|a_{ii}| \geq \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$, ma esiste almeno un cerchio per cui vale $|a_{kk}| > \sum_{j \neq k} |a_{kj}|$, cioè non contiene lo 0, e quindi per il terzo teorema di Gershgorin 0 non può essere autovalore (matrice non singolare). \square

7.2 Matrici a blocchi

Talvolta è conveniente definire una matrice in termini di *sottomatrici*, o **blocchi**, al posto delle entrate scalari che la compongono, cioè si può scrivere:

$$A \in \mathbb{C}^{m \times n}, \quad A = \begin{pmatrix} A_{11} & \dots & A_{1r} \\ \dots & & \dots \\ A_{s1} & \dots & A_{sr} \end{pmatrix}$$

Si può sempre scrivere una matrice a blocchi, purché le sottomatrici abbiano dimensioni compatibili (sia le somme delle dimensioni devono corrispondere alle dimensioni effettive della matrice, sia le dimensioni delle matrici adiacenti devono corrispondere), cioè si deve avere:

$$A_{ij} \in \mathbb{C}^{m_i \times n_j}, \quad \sum_{i=1}^s m_i = m, \quad \sum_{j=1}^r n_j = n$$

Notiamo che per noi sarà il importante il caso di matrici quadrate poste come sottomatrici quadrate, cioè $m = n$, $s = r$ e $m_i = n_i \forall i = 1, \dots, r \cdot s$.

Vediamo quindi la definizione di matrici **triangolari a blocchi**:

Definizione 7.5: Matrice triangolare a blocchi

Nelle condizioni di cui sopra (in particolare, matrici quadrate) una matrice si dice triangolare a blocchi se sono $\neq 0$ tutti i blocchi lungo la diagonale, e sopra o sotto la diagonale (dove rispettivamente si parla di matrice triangolare superiore o inferiore), cioè:

$$A \in \mathbb{C}^{m \times n}, \quad A = \begin{pmatrix} A_{11} & \dots & A_{1r} \\ 0 & \dots & \dots \\ 0 & 0 & A_{sr} \end{pmatrix} \text{ (superiore) o } A = \begin{pmatrix} A_{11} & 0 & 0 \\ \dots & \dots & 0 \\ A_{s1} & \dots & A_{sr} \end{pmatrix} \text{ (inferiore)}$$

Vediamo anche le matrici **diagonali a blocchi**:

Definizione 7.6: Matrice diagonale a blocchi

Nelle condizioni della definizione 7.5, una matrice si dice diagonale a blocchi se sono $\neq 0$ i soli blocchi lungo la diagonale, cioè:

$$A \in \mathbb{C}^{m \times n}, \quad A = \begin{pmatrix} A_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & A_{sr} \end{pmatrix} \text{ (diagonale)}$$

7.2.1 Proprietà delle matrici a blocchi

Vediamo alcune proprietà delle matrici a blocchi:

1. Se A è triangolare a blocchi, allora l'insieme degli autovalori di A corrisponde all'unione degli insiemi di autovalori associati ai blocchi sulla diagonale A_{jj} ;
2. Dalla scorsa proprietà valgono, a cascata, tutte le proprietà che avevamo visto su autovalori e determinanti. Ad esempio il determinante sarà:

$$\det(A) = \prod_{j=1}^s \det(A_{jj})$$

ricordando che:

$$\det(A_{jj}) = \prod_{i=1}^{\frac{n}{s}} \lambda_i$$

con i λ_i autovalori di A_{jj} ;

3. Se A è diagonale, a blocchi, vale:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} A_{11}^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & A_{sr}^{-1} \end{pmatrix}$$

4. Se si hanno 2 matrici a blocchi con lo stesso partizionamento, allora calcolare $A + B$ e $A \cdot B$ si può fare trattando i sottoblocchi come entrate scalari, cioè date:

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}$$

con A_{11} corrispondente in dimensioni a B_{11} e via dicendo, si ha che:

$$A + B = \begin{pmatrix} A_{11} + B_{11} & A_{12} + B_{12} \\ A_{21} + B_{21} & A_{22} + B_{22} \end{pmatrix}$$

riguardo alla somma, e considerazioni simili (che non riportiamo) riguardo al prodotto.

7.3 Matrici riducibili

Vediamo ora una definizione che è effettivamente *duale* a quella di matrice irriducibile: quella di **matrice riducibile**:

Definizione 7.7: Matrice riducibile

Una matrice $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, $n \geq 2$, si dice riducibile se $\exists \Pi$ matrice di permutazione tale che:

$$\Pi A \Pi^T = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix}$$

a blocchi, con $A_{11} \in \mathbb{C}^{k \times k}$, $A_{22} \in \mathbb{C}^{(n-k) \times (n-k)}$, $k \in \{1, \dots, n\}$.

Osserviamo che ci possono essere più di una matrice di permutazione Π che portano A in una forma triangolare a blocchi, con diversi valori di k .

Osserviamo poi che la forma triangolare superiore non è imperativa, cioè se $\exists \Pi_1$ tale che:

$$\Pi_1 A \Pi_1^T = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix}$$

triangolare superiore, allora vale anche che $\exists \Pi_2$ tale che:

$$\Pi_2 A \Pi_2^T = \begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$$

triangolare inferiore. Vediamo anzi che in verità queste due forme sono equivalenti.

7.3.1 Sistemi lineari con matrici riducibili

Supponiamo di voler risolvere $Ax = b$ con $A \in \mathbb{C}^n \times n$, con A riducibile, e conoscendo T . In questo caso conviene procedere sfruttando:

$$Ax = b \Leftrightarrow \Pi Ax = \Pi b \Leftrightarrow \Pi A \Pi^T \Pi x = \Pi b \Leftrightarrow By = c$$

dove si è detto $B = \Pi A \Pi^T$, $c = \Pi b$, e $y = \Pi x$. $By = c$ sarà in forma:

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

con $c_1, y_1 \in \mathbb{C}^k$ e $c_2, y_2 \in \mathbb{C}^{n-k}$.

Una volta risolto $By = C$, si ritrova x mediante la relazione:

$$\Pi x = y \rightarrow x = \Pi^T y$$

Vediamo come risolvere effettivamente questo sistema. Scrivendo il sistema 2×2 a blocchi per esteso si ottiene:

$$\begin{cases} A_{11}y_1 + A_{12}y_2 = C_1 \\ A_{22}y_2 = c_2 \end{cases}$$

L'ultima equazione rappresenta un sistema $(n-k) \times (n-k)$, che risolviamo per trovare y_2 (notiamo non c'è dipendenza da y_1 , dalla definizione come triangolare superiore a blocchi della matrice B). A questo punto si ottiene un altro sistema lineare:

$$A_{11}y_1 = c_1 - A_{12}y_2$$

con y_2 stavolta noto.

Il *guadagno* di questo metodo è che risolvere un sistema $n \times n$ costa generalmente $O(n^3)$. Effettuare il *preprocessing* reso disponibile dalla riducibilità della matrice ci permette di rendere la complessità uguale a:

$$O(k^3 + (n - k)^3 + k(n - k)) = O(k^3 + (n - k)^3)$$

dove $k(n - k)$ alla prima equazione rappresenta il costo della moltiplicazione matrice-vettore $A_{11}y_2$ nella seconda equazione di risoluzione del sistema a blocchi.

Se si hanno molti 0 da sfruttare, e quindi si può scegliere $k = \frac{n}{2}$, si ottiene un costo:

$$O\left(\left(\frac{n}{2}\right)^3 + \left(n - \frac{n}{2}\right)^3\right) = O\left(2\left(\frac{n}{2}\right)^3\right) = O\left(\frac{n^3}{4}\right)$$

cioè si guadagna di un fattore di 4 in termini di tempo di esecuzione.

Osserviamo inoltre che se i blocchi A_{11} , A_{22} sono a loro volta matrici riducibili, il processo si può applicare **ricorsivamente** sulle matrici della diagonale, in modo da ridurre ulteriormente la complessità del sistema (a patto di dover effettuare più passi di preprocessing).

8 Lezione del 21-03-25

8.1 Valutazione della riducibilità

Riprendiamo il discorso delle matrici riducibili, soffermandoci sul come capire quando una matrice è riducibile, e come ricavare, in caso affermativo, la matrice di permutazione Π corrispondente.

Vale il seguente risultato (abbastanza banale guardando a quanto detto riguardo alle matrici irriducibili):

Teorema 8.1: Caratterizzazione di matrice riducibile

Una matrice A è riducibile quando non è irriducibile, cioè quando il suo grafo associato $G(A)$ non è fortemente connesso.

La dimostrazione avviene osservando innanzitutto questo **lemma**: se esiste una certa permutazione π degli elementi in riga, si può ricavare una matrice di permutazione Π e definire la matrice:

$$A' = \Pi A \Pi^T$$

Avremo allora che il grafo associato ad A' sarà lo stesso associato a $\Pi A \Pi^T$, solamente cambiando i nomi dei vertici, cioè:

$$G(A) \text{ fortemente connesso} \Leftrightarrow G(A') \text{ fortemente connesso}$$

La **dimostrazione** vera e propria dovrà quindi affermare che se una matrice è riducibile, allora il suo grafo non è fortemente connesso, cioè:

$$A \text{ riducibile} \Leftrightarrow G(A) \text{ non fortemente connesso}$$

\Rightarrow) Abbiamo che se A è riducibile allora $\exists \Pi$:

$$B = \Pi A \Pi^T = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix}$$

con $A_{11} \in \mathbb{C}^{k \times k}$ e $A_{22} \in \mathbb{C}^{(n-k) \times (n-k)}$. Che $G(B)$ non è fortemente connesso è chiaro dal blocco di 0 in basso a sinistra: significherà che non ci sono archi che collegano il blocco A_{22} al blocco A_{11} , cioè non esistono archi che vanno da $\{k+1, \dots, n\}$ a $\{1, \dots, k\}$.

\Leftarrow) Se $G(A)$ non è fortemente connesso allora $\exists(j, h)$ per cui da j non si raggiunge h . Dividiamo allora $\{1, \dots, n\}$ in due sottoinsiemi:

$$\begin{cases} \mathcal{P} = \{\text{vertici raggiungibili da } j\} \\ \mathcal{Q} = \{\text{vertici non raggiungibili da } j\} \end{cases}$$

con $\mathcal{P} \cup \mathcal{Q} = \{1, \dots, n\}$ e $\mathcal{P} \cap \mathcal{Q} = \emptyset$. Non ci sarà quindi nessun arco che collega un elemento di \mathcal{P} a un elemento di \mathcal{Q} . Se si considera una permutazione Π che manda in testa tutti gli elementi di \mathcal{Q} , si ritrova esattamente la forma della definizione 7.7, cioè quella di una matrice riducibile, notando $k = |\mathcal{Q}|$ e $n - k = |\mathcal{P}|$.

□

Prendiamo ad esempio la matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Disegniamo il grafo $G(A)$ associato alla matrice A . In MATLAB, questo si potrà fare come:

```
1 >> A = [ 1 0 1 0 0 0; ... 1 0 0 0 0 1 ]
2 >> A(eye(size(A)) == 1) = 0 % rimuovi gli elementi sulla diagonale
3 >> G = digraph(A)
4 >> p = plot(G)
5 >> layout(p, "circle") % usa il layout circolare
```

che dalla A dell'esempio dà:



Vediamo quindi che le adiacenze fra nodi (pensando alla matrice, le dipendenze riga-colonna) sono:

Nodo	Raggiungibile	Non raggiungibile
1	1 3	2 4 5 6
2	1 2 3 6	4 5
3	3	1 2 4 5 6
4	1 3 4 5 6	2
5	1 3 4 5 6	2
6	1 3 6	2 4 5

Notiamo che il nodo 6 ci fornisce la partizione migliore: 3×3 e 3×3 . Decidiamo quindi di prendere:

$$\mathcal{P} = \{1, 3, 6\}, \quad \mathcal{Q} = \{2, 4, 5\}$$

per cui la permutazione che manda \mathcal{Q} in testa è:

$$\Pi = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} 2 \rightarrow 1 \\ 4 \rightarrow 2 \\ 5 \rightarrow 3 \\ 1 \rightarrow 4 \\ 3 \rightarrow 5 \\ 6 \rightarrow 6 \end{matrix}$$

Applicando $\Pi A \Pi^T$ si ottiene quindi:

$$\Pi A \Pi^T = \begin{pmatrix} A_{11} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} & A_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ 0 & A_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

che è una forma più agile per la risoluzione della matrice originale A .

Nella sottodirectory `/code/matlab` si rende disponibile uno script `block_decomp.m` per la decomposizione in matrici a blocchi come nell'esempio. Un'esecuzione tipica dello script potrebbe avere l'aspetto:

```

1 p = block_decomp(A) % ottieni una permutazione
2   Node      Reachable      Not reachable
3   ----      -
4
5   1      {[      1 3]}      {[  2 4 5 6]}
6   2      {[  1 2 3 6]}      {[      4 5]}
7   3      {[      3]}      {[1  2 4 5 6]}
8   4      {[1  3 4 5 6]}      {[      2]}
9   5      {[1  3 4 5 6]}      {[      2]}
10  6      {[      1 3 6]}      {[  2 4 5]}
11
12   Choose an index: 6 % chiesto dallo script
13 >> A(p, p) % permuta A

```

da cui si ottiene la stessa matrice a blocchi riportata sopra.

8.1.1 Riduzione iterata

Ricordiamo di poter iterare ricorsivamente il processo di riduzione, cioè di poter trovare per ogni blocco A_{ii} con $i \in \{1, 2\}$ un Π_i tale che:

$$\Pi_i A_{ii} \Pi_i^T = \begin{pmatrix} A_{11}^{(i)} & A_{12}^{(i)} \\ 0 & A_{22}^{(i)} \end{pmatrix}$$

così che valga:

$$\begin{pmatrix} \Pi_1 & 0 \\ 0 & \Pi_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Pi_1^T & 0 \\ 0 & \Pi_2^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Pi_1 A_{11} \Pi_1^T & \Pi_1 A_{12} \Pi_2^T \\ 0 & \Pi_2 A_{22} \Pi_2^T \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11}^{(1)} & A_{12}^{(1)} \\ 0 & A_{22}^{(1)} \end{pmatrix} & * \\ 0 & \begin{pmatrix} A_{11}^{(2)} & A_{12}^{(2)} \\ 0 & A_{22}^{(2)} \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

e via dicendo, dove in (*) comparrà qualcosa che al momento non ci interessa.

8.1.2 Problemi agli autovalori per riduzione

Notiamo che questo procedimento semplifica anche la risoluzione dei **problemi agli autovalori**: infatti iterando abbastanza, il problema si ridurrà a trovare i singoli autovalori di matrici sulla diagonale sempre più piccole, e quindi dal polinomio caratteristico di più facile risoluzione.

8.2 Sistemi lineari

Veniamo quindi alla trattazione dei sistemi lineari, che avevamo definito come forme $Ax = b$ con $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, $b \in \mathbb{C}^n$.

Studieremo 2 tipi di metodi risolutivi:

- **Metodi diretti**: esatti ma dispendiosi, se eseguiti in aritmetica esatta (cioè senza arrotondamenti) potrebbero in un numero n finito di passaggi alla soluzione esatta. Esempi di metodi diretti sono il **metodo di Cramer** (visto in 4.7.2) e l'**eliminazione di Gauss** (che vedremo fra poco);
- **Metodi iterativi**: meno accurati ma più efficienti computazionalmente, portano ad una successione $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ di approssimazioni tali che $\lim_{k \rightarrow +\infty} x_k = x$ soluzione esatta. Notiamo però che, in generale, è impossibile trovare il valore esatto di x in un numero esatto di iterazioni. Per contropartita, risultano spesso molto più efficienti dei metodi diretti (esistono esempi di sistemi addirittura non risolvibili, nella pratica, con metodi diretti).

8.3 Metodi diretti per i sistemi lineari

Iniziamo a trattare i metodi diretti per la risoluzione dei sistemi lineari.

8.3.1 Sistemi triangolari

Diamo la definizione parallela a quella di matrice triangolare:

Definizione 8.1: Sistema triangolare

Si dice sistema triangolare un sistema della forma $Ux = c$ con U matrice triangolare.

Per un **sistema triangolare superiore**, si avrà la forma:

$$\begin{cases} u_{11}x_1 + u_{12}x_2 + \dots + u_{1,n-1}x_{n-1} + u_{1n}x_n = c_1 \\ u_{22}x_2 + \dots + u_{2,n-1}x_{n-1} + u_{2n}x_n = c_2 \\ \vdots \\ u_{n-1,n-1}x_{n-1} + u_{n-1,n}x_n = c_{n-1} \\ u_{nn}x_n = c_n \end{cases}$$

Il **metodo risolutivo** sarà allora la *sostituzione all'indietro*, definita ricorsivamente come:

$$\begin{cases} x_n = \frac{c_n}{u_{nn}} \\ x_i = \frac{c_i - \sum_{j=i+1}^n u_{ij}x_j}{u_{ii}} \end{cases}$$

che equivale all'algoritmo, in MATLAB:

```
1 function x = bck_subst(U, b)
2     n = height(U);
3     x = zeros(n, 1);
4
5     for i = n:-1:1
6         p = b(i);
7         for j = (i + 1):n
8             p = p - U(i, j) * x(j);
9         end
10        x(i) = p / U(i, i);
11    end
12 end
```

Riguardo alla complessità, si potrà dire che al passo i si eseguono $n - i + n - i + 2 = 2(n - 1) + 2$ passaggi, cioè 2 per la divisione per u_{jj} e la somma fra c_i e il termine accumulato a destra, $n - i$ per i prodotti nella sommatoria e di nuovo $n - i$ per la sommatoria stessa. Sarà allora che:

$$\sum_{i=1}^n (2(n - i) + 2) \sim O(n^2)$$

cioè si ha complessità quadratica.

Osserviamo poi che per **sistemi triangolari inferiori** la situazione è uguale, cioè si risolve la prima equazione, si sostituisce il risultato nella seconda, e via dicendo:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{c_1}{u_{11}} \\ x_i = \frac{c_i - \sum_{j=1}^{i-1} u_{ij}x_j}{u_{ii}} \end{cases}$$

che equivale all'algoritmo, in MATLAB:

```

1 function x = fwd_subst(L, b)
2     n = height(L);
3     x = zeros(n, 1);
4
5     for i = 1:n
6         p = b(i);
7         for j = 1:(i - 1)
8             p = p - L(i, j) * x(j);
9         end
10        x(i) = p / L(i, i);
11    end
12 end

```

Il metodo ottenuto, speculare al quello di sostituzione all'indietro, viene detto *sostituzione in avanti*, di costo identico ($O(n^2)$).

8.3.2 Metodo di eliminazione di Gauss

L'idea del metodo di eliminazione di Gauss è quella di partire da un sistema $Ax = b$, trasformarlo in un sistema equivalente $Ux = c$ (quindi triangolare superiore), ed applicare la sostituzione all'indietro.

Per arrivare alla forma $Ux = c$ si sostituiscono le equazioni del sistema con loro combinazioni lineari scelte in modo da annullare gli elementi inferiori alla diagonale.

L'idea è quella di eliminare, per ogni elemento i -esimo sulla diagonale a partire da quello in alto a destra, gli $n - i$ elementi che stanno al di sotto, cioè:

Algoritmo 1 Eliminazione di Gauss

Input: un sistema lineare qualsiasi $Ax = b$

Output: un sistema lineare triangolare superiore $Ux = c$

for $i = 1$ to n **do**

for $j = i$ to n **do**

 Calcola il **moltiplicatore** $l_{ji} = \frac{a_{ji}^{(i-1)}}{a_{ii}^{(i-1)}}$

 Aggiungi alla riga j la riga i moltiplicata per l_{ij}

end for

end for

8.3.3 Implementazione MATLAB del metodo di eliminazione Gauss

Una semplice implementazione in MATLAB del suddetto algoritmo può essere la seguente:

```

1 function [A, b] = gauss_decomp(A, b)
2     n = height(A);
3
4     for i = 1:n % i itera sulle diagonali
5         den = A(i, i);
6
7         for j = (i + 1):n % j itera sulle righe
8             mul = A(j, i) / den; % moltiplicatore
9
10            A(j, :) = A(j, :) - A(i, :) * mul;
11            b(j) = b(j) - b(i) * mul;
12        end
13    end

```

14 **end**

da cui si potrà ottenere una riduzione di Gauss semplicemente come:

```
1 >> [U, c] = gauss_decomp(A, b)
```

Dal punto di vista della complessità, la riduzione in forma triangolare costa $O(\frac{2}{3}n^3)$, e chiaramente domina sul termine $O(n^2)$ della risoluzione di $Ux = c$ con la sostituzione all'indietro.

Facciamo una nota sulla fattibilità della riduzione di Gauss, definendo:

Definizione 8.2: Moltiplicatori di Gauss

I termini $l_{ji} = \frac{a_{ji}^{(i-1)}}{a_{ii}^{(i-1)}}$ vengono detti moltiplicatori.

Chiaramente, per poter eseguire l'eliminazione di Gauss serve che $a_{jjj-1} \neq 0 \forall j = 1, \dots, n-1$. Inoltre, i casi $a_{jj}^{j-1} \approx 0$ possono causare problemi di instabilità numerica. Vedremo in seguito metodi per ovviare a questo problema.

8.3.4 Fattorizzazione LU

Il primo passo dell'algoritmo di Gauss si può vedere come equivalente a moltiplicare l'equazione $Ax = b$ a sinistra per una particolare matrice H_1 triangolare inferiore:

$$H_1 = \begin{pmatrix} 1 & \dots & \dots & 0 \\ -l_{21} & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -l_{n1} & \dots & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

con la diagonale a 1 e i moltiplicatori sulla prima colonna, così che AH_1 risulti esattamente quello che volevamo per Gauss, cioè la combinazione lineare di ogni riga j con l'prima riga moltiplicata per il moltiplicatore l_{j1} (con $j > 2$).

Possiamo generalizzare questo processo a una serie di matrici H_i , per ogni elemento sulla diagonale, con la diagonale a 1 e i moltiplicatori corrispondenti a i sulla i -esima colonna:

$$H_i = \begin{pmatrix} 1 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & -l_{ji} & \dots & \dots \\ 0 & -l_{ni} & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Così, ancora una volta, AH_i risulterà quello che volevamo per Gauss, cioè la combinazione lineare di ogni riga j con l' i -esima riga moltiplicata per il moltiplicatore l_{ji} .

Varrà allora che il metodo di Gauss sarà equivalente a considerare:

$$H_{n-1}H_{n-2} \dots H_1Ax = H_{n-1}H_{n-2} \dots H_1b$$

e potremo quindi dire:

$$H_{n-1}H_{n-2} \dots H_1A = U, \quad L = H_1^{-1} \dots H_{n-1}^{-1}$$

da cui:

$$A = LU$$

Semplifichiamo i calcoli notando alcune proprietà delle matrici H_j :

1. Hanno l'inversa facile, in quanto basta invertire i segni:

$$H_i^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & l_{ji} & \dots & \dots \\ 0 & l_{ni} & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

2. Sono facili da moltiplicare, in quanto si può dire:

$$H_{i_1} \cdot H_{i_2} = \begin{pmatrix} 1 & \dots & \dots & 0 \\ -l_{2i_1} & 1 & \dots & 0 \\ \dots & -l_{ji_2} & \dots & \dots \\ -l_{ni_1} & -l_{ni_2} & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

e:

$$H_{i_1}^{-1} \cdot H_{i_2}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \dots & \dots & 0 \\ l_{2i_1} & 1 & \dots & 0 \\ \dots & l_{ji_2} & \dots & \dots \\ l_{ni_1} & l_{ni_2} & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

cioè semplicemente si somma sotto la diagonale.

Questo significa che una volta svolta la prima parte dell'eliminazione di Gauss si è già calcolata la fattorizzazione LU come la matrice dei moltiplicatori:

$$H_{i_1}^{-1} \cdot H_{i_2}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \dots & \dots & 0 \\ l_{21} & 1 & \dots & 0 \\ \dots & l_{3,2} & \dots & \dots \\ l_{n1} & l_{n2} & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

8.3.5 Implementazione MATLAB della riduzione LU

Modifichiamo il codice MATLAB della scorsa sezione per calcolare, oltre all'eliminazione di Gauss (cioè la matrice U), la matrice dei moltiplicatori L :

```

1 function [A, b, L] = gauss_decomp(A, b)
2     n = height(A);
3
4     L = eye(n); % prepara L
5
6     for i = 1:n % i itera sulle diagonali
7         den = A(i, i);
8
9         for j = (i + 1):n % j itera sulle righe
10            mul = A(j, i) / den; % moltiplicatore
11            L(j, i) = mul;
12
13            A(j, :) = A(j, :) - A(i, :) * mul;
14            b(j) = b(j) - b(i) * mul;
15        end
16    end
17 end

```

A questo punto per calcolare la fattorizzazione LU di una matrice basterà eseguire:

```

1 >> [U, ~, L] = gauss_decomp(A, b)
2 >> L * U % idealmente dara' A

```

Si osserva quindi che se già si conoscono L ed U (magari di una matrice che dovremo usare spesso) risolvere $Ax = b$ costa $O(n^2)$, in quanto basta dire:

$$Ax = b \Rightarrow LUx = b \implies x = U^{-1}L^{-1}b$$

dove basta risolvere a cascata:

$$\begin{cases} Ly = b \\ Ux = y \end{cases}$$

Questi sono due sistemi triangolari, uno **inferiore** (risolvibile per *sostituzione in avanti*), l'altro **superiore** (risolvibile per *sostituzione all'indietro*), da cui l'andamento complessivo $O(n^2)$.

In MATLAB, la soluzione si può quindi avere usando le funzioni definite finora:

```
1 >> [U, ~, L] = gauss_decomp(A, b)
2 >> y = fwd_subst(L, b)
3 >> x = bck_subst(U, y) % x e' la soluzione del sistema
```

Notiamo che questo vale se L ed U sono note (o come nell'esempio vengono calcolate), quindi tolto il prezzo dato dal doverle calcolare (come avevamo notato, conviene per matrici che magari dobbiamo usare spesso).

8.3.6 Metodo di Gauss per variabili matriciali

Se si vuole risolvere $AX = B$ con X e B matrici di vettori colonna di s colonne:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_s \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 & \dots & b_s \end{pmatrix}$$

cioè se si vogliono risolvere s sistemi lineari con la stessa matrice A :

$$Ax_1 = b_1, \quad \dots, \quad Ax_s = b_s$$

si può modificare l'algoritmo di Gauss, effettuando le mosse di Gauss sulla matrice aumentata $(A|B)$. Alla fine troveremo una matrice $(U|B^{(n-1)})$, dove gli apici $(n-1)$ rappresentano che è la B che si ottiene all' $n-1$ -esimo passaggio, che risolverà i sistemi triangolari superiori:

$$Ux_1 = b_1^{(n-1)}, \quad \dots, \quad Ux_s = b_s^{(n-1)}$$

Vediamo un esempio numerico. Partiamo dalle matrici A e B :

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ -3 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Avremo che le due colonne di B rappresentano due vettori "termini noti" diversi, e che quindi la soluzione X di $AX = B$ rappresenterà in verità due vettori soluzione:

$$X = \begin{pmatrix} x_1^{(1)} & x_1^{(2)} \\ x_2^{(1)} & x_2^{(2)} \\ x_3^{(1)} & x_3^{(2)} \end{pmatrix}$$

Costruiamo quindi la matrice AB ed applichiamo il metodo di riduzione di Gauss:

$$AB = \left(\begin{array}{ccc|cc} -2 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ -1 & 3 & 1 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{Gauss}} \left(\begin{array}{ccc|cc} -2 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & \frac{5}{2} & \frac{1}{2} & -2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{11}{5} & \frac{11}{5} & 1 \end{array} \right) = UB^{(n-1)}$$

Avremo quindi due sistemi dati dalla forma $UX = B^{(n-1)}$:

$$x^{(1)} : \begin{cases} -2x_1^{(1)} + x_2^{(1)} + x_3^{(1)} = -2 \\ \frac{5}{2}x_2^{(1)} + \frac{1}{2}x_3^{(1)} = -2 \\ \frac{11}{5}x_3^{(1)} = \frac{11}{5} \end{cases} \quad x^{(2)} : \begin{cases} -2x_1^{(2)} + x_2^{(2)} + x_3^{(2)} = 0 \\ \frac{5}{2}x_2^{(2)} + \frac{1}{2}x_3^{(2)} = 0 \\ \frac{11}{5}x_3^{(2)} = 1 \end{cases}$$

da cui le soluzioni:

$$x^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad x^{(2)} = \begin{pmatrix} \frac{2}{11} \\ -\frac{1}{11} \\ \frac{5}{11} \end{pmatrix}$$

e quindi la matrice incognita X :

$$X = \begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{11} \\ -1 & -\frac{1}{11} \\ 1 & \frac{5}{11} \end{pmatrix}$$

8.3.7 Implementazione MATLAB del metodo di Gauss

Implementiamo un risolutore per sistemi lineari, per comprendere a pieno questo risultato. Vogliamo calcolare X come la soluzione del sistema $AX = B$, e capiamo quindi che quello che cerchiamo sono i vettori colonna x_1, \dots, x_n tali per cui:

$$Ax_1 = B_1, \quad \dots, \quad Ax_n = b_n$$

con b_i l' i -esimo vettore colonna di B . Sfruttiamo allora l'eliminazione di Gauss per ricavare due matrici, U e $B^{(n-1)}$, tali che $Ux = B^{(n-1)}$, con il vantaggio che U è triangolare superiore e quindi risolvibile per sostituzione all'indietro. Possiamo fare questo in MATLAB come:

```
1 AI = [A, B]
2 UB1 = gauss_decomp(AB) % modificando gauss_decomp per un solo argomento
3 U = UB1(1:n, 1:n)
4 B1 = UB1(1:n, (n + 1):(n + s))
```

A questo punto potremo trovare le colonne x_i come:

```
1 >> x1 = bck_subst(U, B1(1:n, 1))
2 >> x2 = bck_subst(U, B1(1:n, 2))
3 ...
```

e infine concatenare le colonne come:

```
1 >> X = [x1, ..., xn]
```

che realizzato in un unico script risulta:

```
1 function X = gauss_solve(A, B)
2     n = height(A);
3     s = width(B);
4
5     AB = [A, B];
6
7     UB1 = gauss_decomp(AB);
8     U = UB1(:, 1:n);
9     B1 = UB1(:, (n + 1):(n + s));
10
11     X = zeros(n, s);
12
```

```

13     for i = 1:s
14         X(:, i) = bck_subst(U, B1(:, i));
15     end
16 end

```

8.3.8 Metodo di Gauss per il calcolo dell'inversa

Un caso particolare è il **calcolo dell'inversa** con l'algoritmo di **Gauss-Jordan**. Infatti, scegliendo:

$$AX = I$$

con $n = s$, le colonne in X diventeranno l'inversa di A (basti vedere che $AA^{-1} = I$ per definizione).

Facciamo un esempio numerico. Prendiamo la stessa matrice di prima:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

e calcoliamone l'inversa come soluzione a $AX = I$. Impostiamo quindi la matrice AI e riduciamola:

$$AI = \left(\begin{array}{ccc|ccc} -2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{Gauss}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{5}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{11}{5} & \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} & 1 \end{array} \right) = UB^{(n-1)}$$

da cui i 3 sistemi lineari:

$$\begin{aligned}
 x^{(1)} : \begin{cases} -2x_1^{(1)} + x_2^{(1)} + x_3^{(1)} = 1 \\ \frac{5}{2}x_2^{(1)} + \frac{1}{2}x_3^{(1)} = -\frac{1}{2} \\ \frac{11}{5}x_3^{(1)} = \frac{4}{5} \end{cases} & \quad x^{(2)} : \begin{cases} -2x_1^{(2)} + x_2^{(2)} + x_3^{(2)} = 0 \\ \frac{5}{2}x_2^{(2)} + \frac{1}{2}x_3^{(2)} = 1 \\ \frac{11}{5}x_3^{(2)} = -\frac{3}{5} \end{cases} \\
 x^{(3)} : \begin{cases} -2x_1^{(3)} + x_2^{(3)} + x_3^{(3)} = 0 \\ \frac{5}{2}x_2^{(3)} + \frac{1}{2}x_3^{(3)} = 0 \\ \frac{11}{5}x_3^{(3)} = 1 \end{cases}
 \end{aligned}$$

che hanno come soluzione:

$$X = \begin{pmatrix} x^{(1)} & x^{(2)} & x^{(3)} \end{pmatrix} = A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{5}{11} & \frac{1}{11} & \frac{2}{11} \\ -\frac{3}{11} & \frac{5}{11} & -\frac{1}{11} \\ \frac{4}{11} & -\frac{3}{11} & \frac{5}{11} \end{pmatrix}$$

8.3.9 Implementazione MATLAB del metodo di Gauss per il calcolo dell'inversa

Facciamo un ultimo esempio MATLAB di questo procedimento. Vogliamo calcolare A^{-1} come la soluzione del sistema $AX = I$, e capiamo quindi che quello che cerchiamo sono i vettori colonna i_1, \dots, i_n tali per cui:

$$Ai_1 = I_1, \quad \dots, \quad Ai_n = I_n$$

con I_i il vettore di zeri con un 1 all' i -esima riga. Anche allora vogliamo sfruttare l'eliminazione di Gauss per ricavare due matrici, U e $B^{(n-1)}$, tali che $Ux = B^{(n-1)}$, con il vantaggio che U è triangolare superiore e quindi risolvibile per sostituzione all'indietro.

Questo è esattamente quello che ci permette di fare la funzione `gauss_solve()` definita prima, fissando il secondo argomento all'identità I (in matlab `eye(n)`):

```

1 function A_inv = gauss_inv(A)
2     n = height(A);
3     A_inv = gauss_solve(A, eye(n));
4 end

```

9 Lezione del 24-03-25

9.1 Pivoting

L'algoritmo di eliminazione di Gauss che abbiamo definito alla scorsa lezione ha un punto di fallimento nel caso uno degli elementi $a_{ii}^{(i-1)}$ sia $= 0$, o comunque ≈ 0 , in quanto vorremmo a quel punto calcolare un moltiplicatore $l_{ji} = \frac{a_{ji}}{a_{ii}} \rightarrow$ non ben definito.

In tal caso si può modificare l'algoritmo sfruttando una matrice di permutazione che porti un elemento diverso da zero nella stessa posizione di a_{ii} . Vorremo quindi cercare un indice h tal per cui $a_{hi}^{(i-1)}$ sia di modulo massimo nella sua colonna al di sotto di i , cioè:

$$a_{hi}^{(i-1)} \geq \max_{j=i, \dots, n} |a_{ji}^{(i-1)}|$$

e scambiare la riga i con la riga h . Infatti, se $\det(A) \neq 0$, allora necessariamente esiste un $a_{ji}^{(i-1)} \neq 0$ (altrimenti si ha uno 0 obbligato sulla diagonale, che con la matrice triangolare a blocchi dà $\det(A^{(i-1)}) = 0$). \square

Un'altra conseguenza di questo approccio è che tutti i moltiplicatori l_{ji} diventeranno ≤ 1 . L'algoritmo di Gauss con questa modifica si chiama **eliminazione di Gauss con pivoting parziale** (*parziale* perché ne esistono versioni più sofisticate, che non vedremo).

Osserviamo che ogni scambio di righe equivale a moltiplicare a sinistra per una matrice di permutazione Π_i . Quindi il metodo di Gauss con pivoting può essere rappresentato come:

Algoritmo 2 Eliminazione di Gauss con pivoting parziale

Input: un sistema lineare qualsiasi $Ax = b$

Output: un sistema lineare triangolare superiore $Ux = c$

for $i = 1$ to n **do**

 Trova la matrice Π_i che porta l'elemento di modulo massimo in testa

$A \leftarrow \Pi_i A$

for $j = i$ to n **do**

 Calcola il **moltiplicatore** $l_{ji} = \frac{a_{ji}^{(i-1)}}{a_{ii}^{(i-1)}}$

 Aggiungi alla riga j la riga i moltiplicata per l_{ij}

end for

end for

Vediamo un esempio pratico dell'algoritmo prima di procedere all'implementazione MATLAB. Prendiamo la matrice A e il vettore b :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Nel ridurre la matrice aumentata Ab :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 6 & 2 \\ 7 & 8 & 0 & 3 \end{array} \right)$$

ci accorgiamo che alla prima colonna l'entrata di modulo massimo è 7, di indice 3. Si permutano quindi la prima e la terza riga:

$$\xrightarrow{\Pi_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 7 & 8 & 0 & 3 \\ 4 & 5 & 6 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{H_1 \Pi_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 7 & 8 & 0 & 3 \\ 0 & \frac{3}{7} & 6 & \frac{2}{7} \\ 0 & \frac{6}{7} & 3 & \frac{4}{7} \end{array} \right)$$

nuovamente, l'entrata di modulo massimo è all'indice 3. Si permutano quindi la seconda e la terza riga:

$$\xrightarrow{\Pi_2 H_1 \Pi_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 7 & 8 & 0 & 3 \\ 0 & \frac{6}{7} & 3 & \frac{4}{7} \\ 0 & \frac{3}{7} & 6 & \frac{2}{7} \end{array} \right) \xrightarrow{H_2 \Pi_2 H_1 \Pi_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 7 & 8 & 0 & 3 \\ 0 & \frac{6}{7} & 3 & \frac{4}{7} \\ 0 & 0 & \frac{9}{2} & 0 \end{array} \right)$$

9.1.1 Implementazione MATLAB del metodo di eliminazione di Gauss con pivoting

Modifichiamo quindi la funzione `gauss_decomp()` per introdurre il meccanismo di pivoting appena visto:

```

1 function [A, b] = gauss_decomp(A, b)
2     n = height(A);
3
4     if nargin < 2
5         b = zeros(n, 1);
6     end
7
8     for i = 1:n % i iterata sulle diagonali
9         % qui fai il pivot
10        max_abs = max(abs(A(i:n, i)));
11        h = find(abs(A(i:n, i)) == max_abs, 1);
12        h = h + i - 1; % max abs si conta da i in poi
13
14        A([i, h], :) = A([h, i], :); % permuta A
15        b([i, h]) = b([h, i]); % permuta b
16
17        den = A(i, i);
18
19        for j = (i + 1):n % j iterata sulle righe
20            mul = A(j, i) / den; % moltiplicatore
21            L(j, i) = mul;
22
23            A(j, :) = A(j, :) - A(i, :) * mul;
24            b(j) = b(j) - b(i) * mul;
25        end
26    end
27 end

```

9.1.2 Fattorizzazione LU con pivoting

Vediamo come ricavare una fattorizzazione LU dal metodo di Gauss modificato con il pivoting. Si ha quindi che la matrice U si evolve come:

$$A \rightarrow \Pi_1 A \rightarrow H_1 \Pi_1 A \rightarrow \dots \rightarrow H_{n-1} \Pi_{n-1} \dots H_1 \Pi_1 A = U$$

mentre per la L dovremo notare che:

$$LU = \Pi A$$

dove la matrice Π rappresenta tutte le permutazioni fatte sulle righe di A .

Si ha quindi che:

- U è la matrice triangolare superiore trovata alla fine del metodo di Gauss con pivoting;
- L è la matrice dei moltiplicatori, a cui però si devono applicare gli scambi delle righe, come segue: se al passo i applico la matrice Π_i , devo applicare lo stesso cambio nelle prime $i - 1$ colonne di L , sotto la diagonale.

Vediamo un esempio numerico spieghi il processo di formazione della matrice L e della matrice di permutazione Π . Presa la stessa matrice dell'esempio precedente:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{pmatrix}$$

abbiamo che le permutazioni sono, in sequenza:

$$\Pi_1 : \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \Pi_2 : \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

o, in forma matriciale:

$$\Pi_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Pi_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Calcoliamo quindi L . Π_1 è irrilevante al calcolo di L , quindi la ignoriamo. Vediamo che i primi due moltiplicatori sono $l_{21} = \frac{4}{7}$ e $l_{31} = \frac{1}{7}$, da cui si imposta $L^{(1)}$:

$$L^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{4}{7} & 1 & 0 \\ \frac{1}{7} & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Notiamo quindi che dalla Π_2 dobbiamo scambiare gli elementi sotto la diagonale della prima colonna, quindi:

$$L^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{7} & 1 & 0 \\ \frac{4}{7} & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Infine, l'ultimo moltiplicatore $l_{32} = \frac{1}{2}$ non ha ambiguità:

$$L^{(2)} = L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{7} & 1 & 0 \\ \frac{4}{7} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

Il calcolo di Π deriva invece direttamente studiando la permutazione complessiva data dalle Π_1, \dots, Π_{n-1} , in questo caso:

$$\Pi : \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\Pi_1} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\Pi_2} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

da cui:

$$\Pi = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Con brevi calcoli si verifica che:

$$LU = \Pi A$$

9.1.3 Implementazione MATLAB completa del metodo di eliminazione di Gauss con pivoting

Vediamo quindi l'implementazione completa, che calcola anche la matrice L e la matrice Π . Notiamo inoltre l'argomento condizionale b , che viene ignorato se non fornito (abbiamo constatato che spesso è così).

```

1 function [A, b, L, P] = gauss_decomp(A, b)
2     n = height(A);
3
4     if nargin < 2
5         b = zeros(n, 1);
6     end
7
8     L = eye(n); % prepara L
9     P = eye(n); % prepara P
10
11     for i = 1:n % i iterata sulle diagonali
12         % qui fai il pivot
13         max_abs = max(abs(A(i:n, i)));
14         h = find(abs(A(i:n, i)) == max_abs, 1);
15         h = h + i - 1; % max abs si conta da i in poi
16
17         A([i, h], :) = A([h, i], :); % permuta A
18         b([i, h]) = b([h, i]); % permuta b
19         if i > 1
20             L([i, h], 1:(i - 1)) = L([h, i], 1:(i - 1)); % permuta L
21         end
22         P([i, h], :) = P([h, i], :); % permuta P
23
24         den = A(i, i);
25
26         for j = (i + 1):n % j iterata sulle righe
27             mul = A(j, i) / den; % moltiplicatore
28             L(j, i) = mul;
29
30             A(j, :) = A(j, :) - A(i, :) * mul;
31             b(j) = b(j) - b(i) * mul;
32         end
33     end
34 end

```

9.1.4 Determinante con pivoting

Possiamo sfruttare la matrice Π per il calcolo del determinante. Si ha infatti dal teorema di Binet-Cauchy (4.1) che:

$$\det(\Pi) \det(A) = \det(\Pi A) = \det(LU) = \det(L) \det(U)$$

e quindi:

$$\det(A) = \det(\Pi)^{-1} \det(L) \det(U)$$

dove $\det(L) = 1$ (triangolare inferiore con diagonale di 1). Si nota poi che $\det(\Pi)^{-1}$ è $(-1)^s$ è il numero di pivot che effettuiamo. A questo punto $\det(U)$ è semplicemente il prodotto degli elementi sulla diagonale (triangolare superiore), cioè:

$$\prod_{i=1}^n a_{ii}^{(i-1)} = \prod_{i=1}^n u_{ii}$$

e quindi:

$$\det(A) = (-1)^s \prod_{i=1}^n a_{ii}^{(i-1)} = (-1)^s \prod_{i=1}^n u_{ii}$$

Si può quindi usare il metodo di Gauss, ancora una volta, per il calcolo del determinante di una matrice, con costo pari al costo dell'eliminazione di Gauss ($O(\frac{2}{3}n^3)$), molto meglio dello sviluppo di Laplace! ($O(n!)$).

9.1.5 Implementazione MATLAB del metodo di Gauss per il determinante

In MATLAB si può calcolare il prodotto delle diagonali come `prod(diag(A))` e il segno di una permutazione come `det(P)` (anche se sicuramente esistono approcci più efficienti). Si può quindi realizzare uno script simile al seguente per il calcolo del determinante sfruttando `gauss_decomp()` con permutazioni:

```
1 function d = gauss_det(A)
2     function s = perm_sign(P)
3         s = det(P); % ci sono modi piu' efficienti, vale l'esempio
4     end
5
6     [U, ~, ~, P] = gauss_decomp(A);
7     d = prod(diag(U)) * perm_sign(P);
8 end
```

9.2 Condizionamento di un sistema lineare

Date $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ e $b \in \mathbb{C}^n$, supponiamo di voler trovare $Ax = b$ ma a causa di errori nei dati o errori di arrotondamento troviamo (con un qualunque metodo) un vettore perturbato $x + \delta x \in \mathbb{C}^n$ che risolve un sistema lineare di per sé perturbato:

$$(A + \delta A)(x + \delta x) = (b + \delta b)$$

con δA e δb perturbazioni "piccole" della matrice A e del vettore b , quindi $A + \delta A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ e $b + \delta b \in \mathbb{C}^n$

La domanda è, se δA e δb sono piccole, posso concludere che anche δx è relativamente piccolo? Si scopre che la risposta a questa domanda è generalmente no. Prendiamo ad esempio il sistema 2×2 :

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1.000001 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

da cui x esatto è $\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$. Perturbando b a $\begin{pmatrix} 0.999999 & 1 \end{pmatrix}$, si ha x perturbato a $\begin{pmatrix} -10^{-6} & -1 \end{pmatrix}$, che è chiaramente un cambiamento drastico. Viene da sé che agendo sulla matrice A potremo ottenere effetti anche più drammatici.

9.2.1 Condizionamento in δb

Riprendiamo quindi la definizione di errore relativo:

$$\epsilon = \frac{|\delta x|}{|x|}$$

Prima di valutare questo errore, diamo la definizione di **numero di condizionamento**:

Definizione 9.1: Numero di condizionamento

Chiamiamo numero di condizionamento di una matrice A , data una certa norma $|\cdot|$, il valore:

$$\mu(A) = |A| \cdot |A^{-1}|$$

Si potrà allora dare, rispetto alla sola deviazione in b (δb), il seguente risultato:

Teorema 9.1: Condizionamento in δb

Se $\delta A = 0$, si ha:

$$\frac{|\delta x|}{|x|} \leq \mu(A) \cdot \frac{|\delta b|}{|b|}$$

Assumendo $\delta A = 0$ con $\det(A) \neq 0$, come nell'esempio precedente, e quindi perturbazioni solo del termine noto, si ha:

$$A(x + \delta x) = (b + \delta b) \Leftrightarrow A\delta x = \delta b$$

visto che $Ax = b$. Passando alle norme, si ha che:

$$|\delta x| \leq |A^{-1}| \cdot |\delta b|$$

e inoltre:

$$|Ax| = |b| \implies |A||x| \geq |b| \implies |x| \geq \frac{|b|}{|A|}$$

quindi:

$$\frac{|\delta x|}{|x|} \leq \frac{|A^{-1}| \cdot |\delta b| \cdot |A|}{|b|} = \frac{|\delta b|}{|b|} \cdot |A| \cdot |A^{-1}|$$

dove ci interessa il valore $|A| \cdot |A^{-1}|$, cioè il numero di condizionamento $\mu(A)$, l'unico che non dipende dall'errore assoluto δb . \square

Abbiamo quindi che se $\mu(A) \gg 1$, allora l'errore relativo può essere molto più grande dell'errore relativo dei dati e il problema si dice *mal condizionato*.

10 Lezione del 28-03-25

Riprendiamo il discorso sull'errore inerente dei sistemi lineari.

10.0.1 Condizionamento in δA

Avevamo preso delle perturbazioni sulle matrici A e b (dovute a vari effetti reali, quali errori di arrotondamento, di misura, ecc...) nella forma:

$$(A + \delta A)(x + \delta x) = (b + \delta b)$$

e volevamo capire quanto può essere grande l'errore relativo $\frac{|\delta x|}{|x|}$, da:

$$\frac{\text{sol. perturbata} - \text{sol. reale}}{\text{sol. reale}} = \frac{|x + \delta x - x|}{|x|} = \frac{|\delta x|}{|x|}$$

Nel caso di $\delta A = 0$, abbiamo visto di poter maggiorare tale quantità come:

$$\frac{|\delta x|}{|x|} \leq \mu(A) \cdot \frac{|\delta b|}{|b|}$$

con $\mu(A) = |A| \cdot |A^{-1}|$ numero di condizionamento (definizione 9.1).

Riguardo a $\mu(A)$, si ha che è ≥ 1 , cioè chiaramente non si può ridurre l'errore oltre la perfezione, e se $\mu(A) \approx 10^k$, k è il numero di cifre significative che si *perdono* nel risultato $x + \delta x$.

Possiamo quindi reintrodurre il termine δA ed enunciare il seguente teorema:

Teorema 10.1: Condizionamento in δA

Se $|\delta A| \cdot |A^{-1}| < 1$ allora si ha:

$$\frac{|\delta x|}{|x|} \leq \frac{\mu(A)}{1 - \mu(A) \cdot \frac{|\delta A|}{|A|}} \cdot \left(\frac{|\delta A|}{|A|} + \frac{|\delta b|}{|b|} \right)$$

dove osserviamo che se $\delta A = 0$ si ottiene la stessa disuguaglianza che abbiamo dimostrato col teorema 9.1.

La dimostrazione del teorema non è immediata. Ci arriviamo in 3 iterazioni successive, restringendo man mano le approssimazioni fatte.

1. Una prima stima si potrebbe avere calcolando direttamente:

$$(A + \delta A)(x + \delta x) = (b + \delta b) \implies Ax + A\delta x + \delta Ax + \delta A\delta x = b + \delta b$$

$Ax = b$ dalle ipotesi, mentre il termine $\delta A\delta b$, il prodotto di due errori, è trascurabile, quindi:

$$A\delta x + \delta Ax \approx \delta b \implies \delta x \approx A^{-1}(\delta b - \delta Ax)$$

Passando alle norme si ha:

$$|\delta x| \leq |A^{-1}| (|\delta b| + |\delta A||x|) \quad (1)$$

da cui dividendo per $|x| \geq \frac{|A|}{|b|}$ e moltiplicando e dividendo il termine a destra per $|A|$, si ha:

$$\frac{|\delta x|}{|x|} \leq |A^{-1}| \left(\frac{|\delta b|}{|b|} |A| + |\delta A| \frac{|A|}{|A|} \right) = |A^{-1}| |A| \left(\frac{|\delta b|}{|b|} + \frac{|\delta A|}{|A|} \right) = \mu(A) \left(\frac{|\delta b|}{|b|} + \frac{|\delta A|}{|A|} \right)$$

Da cui otteniamo essenzialmente la forma del teorema.

2. Per capire il denominatore del numero di condizionamento, che migliora il maggiorante nei casi dove A è quasi singolare, adottiamo un procedimento diverso che evidenzia l'errore fatto sull'inversa $(A + \delta A)^{-1}$ (nel calcolo precedente, starebbe nel termine $\delta A \delta x$ che abbiamo trascurato). Avremo quindi:

$$(A + \delta A)(x + \delta x) = (b + \delta b) \implies (x + \delta x) = (A + \delta A)^{-1}(b + \delta b)$$

$(A + \delta A)^{-1}$ risulta di difficile approssimazione. Riscriviamolo come:

$$(A + \delta A)^{-1} = (I + A^{-1}\delta A)^{-1}A^{-1}$$

e consideriamo la serie di Von Neumann:

$$(I - M)^{-1} = I + M + M^2 + \dots$$

troncando al primo termine, si ha che possiamo riscrivere la prima inversa come:

$$(I + A^{-1}\delta A)^{-1} \approx I - A^{-1}\delta A$$

e quindi:

$$(A + \delta A)^{-1} \approx (I - A^{-1}\delta A)A^{-1} = A^{-1} - A^{-1}\delta AA^{-1} \quad (2)$$

Possiamo convincerci che l'approssimazione è valida sostituendo nella formula per $x + \delta x$ e trovando:

$$x + \delta x = (A^{-1} - A^{-1}\delta AA^{-1})(b + \delta b) = A^{-1}b + A^{-1}\delta b - A^{-1}\delta AA^{-1}b - A^{-1}\delta AA^{-1}\delta b$$

$x = A^{-1}b$ dalle ipotesi, mentre il termine $A^{-1}\delta AA^{-1}\delta b$ contiene il prodotto di due errori, ed è trascurabile, quindi:

$$\delta x \approx A^{-1}\delta b - A^{-1}\delta AA^{-1}b = A^{-1}\delta b - A^{-1}\delta Ax = A^{-1}(\delta b - \delta Ax)$$

che è esattamente la forma della (1) che avevamo al primo metodo.

3. Riprendiamo la forma in (2) dell'inversa:

$$(A + \delta A)^{-1} \approx (I - A^{-1}\delta A)A^{-1}$$

per introdurre il denominatore che vediamo nell'enunciato del teorema. Passando alle norme, si avrà:

$$|I - A^{-1}\delta A||A^{-1}| = \frac{|A^{-1}|}{1 + |A^{-1}\delta A|}$$

Prendendo questa come la norma dell'inversa per il passaggio alle norme della (1), si ha:

$$\frac{|\delta x|}{|x|} \leq \frac{|A^{-1}|}{1 + |A^{-1}\delta A|} \left(\frac{|\delta b|}{|b|}|A| + |\delta A| \frac{|A|}{|A|} \right) \leq \frac{|A^{-1}||A|}{1 + |A^{-1}||\delta A|} \left(\frac{|\delta b|}{|b|} + \frac{|\delta A|}{|A|} \right)$$

dove $|A^{-1}||\delta A|$ al denominatore si può scrivere come $\mu(A) \frac{|\delta A|}{|A|}$, in quanto:

$$|A^{-1}||\delta A| = \mu(A) \cdot \frac{|\delta A|}{|A|} = |A||A^{-1}| \cdot \frac{|\delta A|}{|A|}$$

da cui la forma del teorema. □

10.0.2 Stima di μ

In genere è abbastanza costoso calcolare il numero di condizionamento, in quanto bisogna calcolare un'inversa e quindi la sua norma. Quello che si può fare è cercarne una stima.

Ad esempio, se A è hermitiana ($A = A^H$) e si considera la norma euclidea $|\cdot|_2$, si ha che:

$$|A|_2 \cdot |A^{-1}|_2 = \rho(A) \cdot \rho(A^{-1}) = \frac{\lambda_{\max}(A)}{\lambda_{\min}(A)}$$

cioè prendiamo il rapporto fra l'autovalore più grande e l'autovalore più piccolo di A , per cui si possono usare i metodi per gli autovalori (che vedremo verso la fine del corso).

10.0.3 Stime a posteriori

Supponiamo di aver calcolato $\tilde{x} \in \mathbb{C}^n$ con un qualunque metodo di approssimazione di x , prese A e b per buone. Per valutare se \tilde{x} è una buona approssimazione basta guardare al **vettore residuo**, cioè:

$$r = b - A\tilde{x}$$

Potremmo chiederci se, con $|r|$ piccolo, si hanno anche $|x - \tilde{x}|$ piccoli. Sottraiamo allora $Ax = b$ da r :

$$A(x - \tilde{x}) = r \implies x - \tilde{x} = A^{-1}r$$

e quindi vale la disuguaglianza:

$$|x - \tilde{x}| \leq |A^{-1}||r|$$

Usando:

$$|x| \geq \frac{|b|}{|A|}$$

si otterrà allora che:

$$\frac{|x - \tilde{x}|}{|x|} \leq \frac{|A||A^{-1}||r|}{|b|} = \mu(A) \cdot \frac{|r|}{|b|}$$

Allora, in problemi ben condizionati, avremo che $\frac{|x - \tilde{x}|}{|x|}$ errore relativo e $|r|$ sono comparabili, mentre in problemi con condizionamento $\mu(A) \gg 1$ si potrebbe avere:

$$\frac{\frac{|x - \tilde{x}|}{|x|}}{|r|} \approx \mu(A)$$

10.0.4 Tecniche per l'approssimazione delle inverse

Come nota conclusiva della sezione sull'errore nei sistemi lineari, notiamo che ogni volta che c'è bisogno di risolvere una forma del tipo:

$$Ax = b \implies x = A^{-1}b$$

il metodo naive sarebbe quello di calcolare A^{-1} e moltiplicare per b . Vediamo se si può fare di meglio.

Preso $n = 1$, la forma sarà quella di una semplice equazione lineare:

$$ax = b. \implies x = \frac{b}{a}$$

cioè basta fare una sola divisione, mentre l'approccio naive risulterebbe nel:

1. Calcolare il reciproco a^{-1} ;
2. Moltiplicare il reciproco per $b \implies x = a^{-1} \cdot b$.

che chiaramente risulta in più passaggi, e quindi più approssimazioni intermedie e in definitiva maggiore errore.

Nel caso matriciale il metodo di divisione equivale a fare una divisione matrice-vettore (che in MATLAB si effettua come `A \ b`), di complessità $O(\frac{2}{3}n^3)$. Di contro, il metodo naive (che in MATLAB si effettua come `inv(A) * b`) avrà complessità intorno ad $O(\frac{8}{3}n^3)$, in quanto calcola la fattorizzazione LU e risolve $2n$ sistemi triangolari.

Inoltre, l'approccio naive è anche meno accurato, in quanto se il numero di condizionamento $\mu(A)$ è alto, l'errore di approssimazione nei passaggi intermedi potrebbe accumularsi molto di più che rispetto all'approccio della semplice divisione matrice-vettore (tanto che la stessa documentazione di MATLAB suggerisce di evitarlo).

10.1 Metodi iterativi per i sistemi lineari

Veniamo quindi a trattare i metodi iterativi per la risoluzione dei sistemi lineari.

L'idea è quella di approssimare la soluzione di un sistema lineare $Ax = b$ generando una successione di vettori $\{x^{(k)}\}_{k \in \mathbb{N}}$ tali che:

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} x^{(k)} = x$$

La motivazione è chiaramente quella di eludere l'alta complessità di $\sim O(n^3)$ che ha la risoluzione con metodi diretti. Altra motivazione potrebbe essere quella di non conoscere direttamente A , ma solo l'applicazione:

$$v \rightarrow A \cdot v$$

(si pensi, anche se rappresenta un caso *non* lineare, ai metodi di discesa a gradiente che ottimizzano funzioni non immediatamente calcolabili o anche solo esprimibili).

Abbiamo quindi che un buon metodo iterativo dovrà:

1. Costare meno di $O(n^3)$ ad ogni passaggio (altrimenti sarebbe inutile rispetto ai metodi diretti), e quindi richiedere solo prodotti di matrici con vettori, o risoluzione di sistemi lineari favorevoli (triangolari, diagonali, ecc...);
2. Data una certa **accuratezza** posta come obiettivo, impiegare un numero ragionevole di iterazioni per raggiungerla.

10.1.1 Metodi di punto fisso

L'idea è quella di partire da $Ax - b = 0$ e di riscrivere come un'equazione equivalente in forma:

$$x = Hx + c, \quad H \in \mathbb{C}^{n \times m}, \quad c \in \mathbb{C}^n$$

Facciamo alcuni esempi:

1. Si sceglie una matrice $G \in \mathbb{C}^{n \times n}$ invertibile e si considera:

$$x = x \cdot G(Ax - b) = (I - GA)x + Gb$$

cioè:

$$H = I - GA, \quad c = Gb$$

2. Si scompone A come:

$$A = A_1 + A_2$$

per cui:

$$Ax = b \Leftrightarrow (A_1 + A_2)x = b \Leftrightarrow A_1x = -A_2x + b \Leftrightarrow x = -A_1^{-1}A_2x + A_1^{-1}b$$

cioè ancora:

$$H = -A_1^{-1}A_2, \quad c = A_1^{-1}b$$

Una volta trovata un'equazione di punto fisso $x = Hx + c$, quindi, si considera il seguente metodo iterativo:

$$\begin{cases} x^{(0)} \text{ dato} \\ x^{(k+1)} = Hx^{(k)} + c, \quad k = 1, 2, 3, \dots \end{cases}$$

partendo da $x^{(0)}$ come dato a priori (sarà la soluzione che vorremo raffinare).

Vediamo che infatti:

Definizione 10.1: Matrice di iterazione

La matrice H di un'equazione di punto fisso $x = Hx + c$ viene detta matrice di iterazione.

Per avere una verifica della validità dei metodi di punto fisso, enunciamo il seguente teorema:

Teorema 10.2: Validità dei metodi di punto fisso

Il metodo di punto fisso dato da:

$$\begin{cases} x^{(0)} \text{ dato} \\ x^{(n+1)} = Hx^{(k)} + c, \quad k = 1, 2, 3, \dots \end{cases}$$

converge $\forall x^{(0)} \in \mathbb{C}^n$ se e solo se $\rho(H) < 1$.

Questo si dimostra prendendo l'equazione di punto fisso $x = Hx + c$, soddisfatta da x soluzione esatta, per cui:

$$x^{(k+1)} - x = Hx^{(k)} + c - (Hx + c) = H(x^{(k)} - x)$$

Possiamo chiamare $e^{(k)} = x^{(k)} - x$, cioè l'errore al passo k , e quindi l'errore al passo $k + 1$ sarà:

$$e^{(k+1)} = He^{(k)} = H^k e^{(0)}$$

Basterà allora prendere il limite:

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} e^{(k+1)} = \lim_{k \rightarrow +\infty} H^k e^{(0)}$$

Perché questo tenda a 0, basterà imporre $\rho(H) < 1$, in quanto in tal caso:

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} H^k e^{(0)} = 0$$

qualsiasi sia l'errore iniziale $e^{(0)}$ (e quindi la scelta di soluzione iniziale $x^{(0)}$). \square

In particolare, possiamo ricordare che se $|H| < 1 \implies \rho(H) < 1$, quindi può risultare verificare questa condizione, che è sì più stretta ma anche più facile da verificare. Ricordiamo che non vale assolutamente il contrario, cioè $|H| > 1 \not\implies \rho(H) > 1$.

Di contro, vale anche la condizione $|\det(H)| \geq 1 \implies \rho(H) > 1$, che come prima non si inverte in $|\det(H)| < 1 \not\implies \rho(H) < 1$.

10.1.2 Velocità di convergenza

Guardando alla dimostrazione del teorema 10.2, possiamo osservare che il raggio spettrale $\rho(H)$ ci dà un'informazione anche riguardo alla **velocità di convergenza** del metodo di punto fisso.

Infatti, si avrà che vale:

$$\frac{|e^{(k)}|}{|e^{(0)}|} \leq |H^k|$$

Dall'algebra lineare, si ha che quando k è abbastanza grande, $H^k \approx \rho(H)^k$, almeno per norme indotte, in quanto:

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \sqrt[k]{|H^k|} = \rho(H)$$

Questo ci dice che se si hanno 2 metodi di punto fisso con matrici di iterazione H_1 e H_2 tali che:

$$\rho(H_1) < \rho(H_2) < 1$$

allora il primo metodo converge più velocemente del secondo, è dall'ulteriore ipotesi < 1 , entrambi convergono.

Inoltre, si può stimare il numero di iterazioni k necessarie a raggiungere un certo valore dell'errore:

$$\frac{|e^{(k)}|}{|e^{(0)}|} = \frac{|x^{(k)} - x|}{|e^{(0)}|} \leq \delta$$

infatti, in tal caso basterà imporre:

$$\rho(H)^k \leq \delta \implies k \geq \frac{\log(\delta)}{\log(\rho(H))}$$

10.1.3 Criteri di stop

Molto spesso non è pratico decidere un errore e fare le k iterazioni che dovrebbero portare a tale errore (in quanto non è scontato conoscere $\rho(H)$), ma bensì si preferisce definire un **criterio di stop** per la terminazione dell'algoritmo raggiunte determinate condizioni.

Queste condizioni possono essere:

1. Si può restringere il residuo:

$$\frac{|r^{(k)}|}{|b|} < \delta$$

2. Si può restringere direttamente la variazione di errore:

$$|x^{(k+1)} - x^{(k)}| < \delta$$

10.2 Metodi di Jacobi e Gauss-Seidel

Vediamo i metodi più famosi di questo tipo, detti metodi di **Jacobi** e **Gauss-Seidel**.

L'idea è di scomporre la matrice A come:

$$A = D - E - F = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & d_{n-1} & 0 \\ 0 & \dots & 0 & d_n \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ -e_{21} & 0 & \dots & 0 \\ -e_{n-1,1} & \dots & 0 & 0 \\ -e_{n1} & \dots & -e_{n,n-1} & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -f_{12} & \dots & -f_{1n} \\ 0 & 0 & \dots & -f_{2n} \\ 0 & \dots & 0 & -f_{n-1,n} \\ 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

con D diagonale, E l'opposta della triangolare inferiore a diagonale nulla e F l'opposta della triangolare superiore a diagonale nulla. Varrà quindi:

$$Ax = b \Leftrightarrow (D - E - F)x = b$$

10.2.1 Metodo di Jacobi

Il metodo di Jacobi consiste nel riscrivere quanto trovato come:

$$Dx = (E + F)x + b \implies x = D^{-1}(E + F)x + D^{-1}b$$

cioè trovare un'equazione di punto fisso con:

$$H = D^{-1}(E + F), \quad c = D^{-1}b$$

e quindi applicare l'algoritmo:

$$\begin{cases} x^{(0)} \text{ dato} \\ x^{(k+1)} = D^{-1}(E + F)x^{(k)} + D^{-1}b = D^{-1}((E + F)x^{(k)} + b) \end{cases}$$

Osserviamo che ad ogni iterazione si calcola un prodotto matrice-vettore e si risolve un sistema diagonale ($O(n)$), in quanto la D si inverte facilmente (è diagonale):

$$H_J = D^{-1}(E + F) = \begin{pmatrix} \frac{1}{d_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{d_2} & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \frac{1}{d_{n-1}} & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \frac{1}{d_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -f_{12} & \dots & -f_{1n} \\ -e_{21} & 0 & \dots & -f_{2n} \\ -e_{n-1,1} & \dots & 0 & -f_{n-1,n} \\ -e_{n1} & \dots & -e_{n,n-1} & 0 \end{pmatrix}$$

per cui:

$$(H_J)_{ij} = \begin{cases} -\frac{a_{ij}}{a_{ii}}, & i \neq j \\ 0 & i = j \end{cases}$$

Le matrici che descriveranno il passo di Jacobi saranno allora:

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j \neq i}^n a_{ij} x_j^{(k)} \right)$$

osservando che per calcolare $x_i^{(k+1)}$ serviranno *tutte* le componenti di $x^{(k)}$, cioè in codice bisogna mantenere due vettori, in quanto non si può sovrascrivere $x^{(k)}$ prima di aver finito di calcolare $x^{(k+1)}$.

10.2.2 Implementazione MATLAB del metodo di Jacobi

In MATLAB, una possibile implementazione che sfrutta le funzionalità di calcolo matriciale può essere la seguente:

```

1 function x_old = jacobi(A, b, k, x_old)
2     n = height(A);
3
4     if nargin < 4
5         % stima iniziale
6         x_old = zeros(n, 1);
7     end
8
9     % imposta le matrici D E F
10    D = diag(A);
11    EF = -A + diag(D); % D e' un vettore
12
13    % imposta c
14    c = b ./ D;
15
16    for j = 1:k
17        x_new = (EF * x_old) ./ D + c;
18        x_old = x_new;
19
20        % stampa informazioni
21        fprintf("it = %d, res = %.3f\n", j, norm(b - A * x_old));
22        disp(x_old);
23    end
24 end

```

10.2.3 Implementazione C++ del metodo di Jacobi

Possiamo sfruttare la forma scalare del metodo di Jacobi per realizzarne un'implementazione direttamente in C++. Definiamo inizialmente alcune funzioni helper in un header, `mat.h`, che useremo anche nell'esempio successivo a questo:

```

1 #ifndef MAT_H
2 #define MAT_H
3
4 #include <iostream>
5
6 inline double** get_matrix(unsigned n) {
7     double** A = new double*[n];
8
9     for(int r = 0; r < n; r++) {
10        A[r] = new double[n];
11
12        for(int c = 0; c < n; c++) {
13            double e;
14            std::cout << "Inserisci l'entrata " << r + 1 << ", " << c + 1 << "
15            di A" << std::endl;
16            std::cin >> e;
17
18            A[r][c] = e;
19        }
20    }
21
22    return A;
23 }

```



```

24 inline double* get_vector(unsigned n) {
25     double* b = new double[n];
26
27     for(int r = 0; r < n; r++) {
28         double e;
29         std::cout << "Inserisci l'entrata " << r + 1 << " di b" << std::endl;
30         std::cin >> e;
31
32         b[r] = e;
33     }
34
35     return b;
36 }
37
38 inline void print_matrix(double** A, unsigned n) {
39     for(int r = 0; r < n; r++) {
40         for(int c = 0; c < n; c++) {
41             std::cout << A[r][c] << "\t";
42         }
43         std::cout << std::endl;
44     }
45 }
46
47 inline void print_vector(double* b, unsigned n) {
48     for(int r = 0; r < n; r++) {
49         std::cout << b[r] << std::endl;
50     }
51 }
52
53 inline void init_env(unsigned &n, unsigned &k, double** &A, double* &b) {
54     // prendi dati
55     std::cout << "Inserisci la dimensione n" << std::endl;
56     std::cin >> n;
57     std::cout << std::endl;
58
59     std::cout << "Inserisci il numero di iterazioni k" << std::endl;
60     std::cin >> k;
61     std::cout << std::endl;
62
63     std::cout << "Inserzione della matrice A" << std::endl;
64     A = get_matrix(n);
65     std::cout << std::endl;
66
67     std::cout << "Inserzione del vettore b" << std::endl;
68     b = get_vector(n);
69     std::cout << std::endl;
70
71     // conferma dati
72     std::cout << "La matrice A e':" << std::endl;
73     print_matrix(A, n);
74     std::cout << std::endl;
75
76     std::cout << "Il vettore b e':" << std::endl;
77     print_vector(b, n);
78     std::cout << std::endl;
79 }
80
81 inline void clean_env(unsigned n, double** A, double* b) {
82     // ripulisci
83     for(int r = 0; r < n; r++) {

```

```

84     delete[] A[r];
85 }
86 delete[] A;
87
88 delete[] b;
89 }
90
91 inline void vec_copy(unsigned n, double* v1, double* v2) {
92     for(int r = 0; r < n; r++) {
93         v2[r] = v1[r];
94     }
95 }
96
97 #endif

```

E definiamo quindi l'algoritmo come segue:

```

1 double* jacobi(unsigned n, unsigned k, double** A, double* b) {
2     // inizializza vettori
3     double* v1, *v2;
4     v1 = new double[n];
5     v2 = new double[n];
6
7     for(int r = 0; r < n; r++) {
8         v1[r] = 0;
9     }
10
11     for(int i = 0; i < k; i++) {
12         std::cout << "Iterazione " << i + 1 << std::endl;
13
14         std::cout << "Il vettore vecchio e':" << std::endl;
15         print_vector(v1, n);
16
17         for(int r = 0; r < n; r++) {
18             v2[r] = b[r];
19
20             for(int c = 0; c < n; c++) {
21                 if(r == c) continue;
22
23                 v2[r] -= A[r][c] * v1[c];
24             }
25
26             v2[r] /= A[r][r];
27         }
28
29         vec_copy(n, v2, v1);
30
31         std::cout << "Il vettore nuovo e':" << std::endl;
32         print_vector(v1, n);
33         std::cout << std::endl;
34     }
35
36     // ripulisci
37     delete v2;
38
39     return v1;
40 }

```

A questo punto un programma dovrà semplicemente usare le funzioni per il caricamento dell'ambiente di `mat.h` e chiamare la funzione `jacobi()`:

```

1 int main() {

```

```

2 // inizializza ambiente
3 unsigned n, k; double** A; double* b;
4 init_env(n, k, A, b);
5
6 double* x = jacobi(n, k, A, b);
7
8 std::cout << "Il risultato finale e':" << std::endl;
9 print_vector(x, n);
10 std::cout << std::endl;
11
12 delete[] x;
13
14 // ripulisci
15 clean_env(n, A, b);
16 return 0;
17 }

```

10.2.4 Metodo di Gauss-Seidel

Il metodo di Gauss-Seidel consiste nel riscrivere quanto trovato come:

$$(D - E)x = Fx + b \implies x = (D - E)^{-1}Fx + (D - E)^{-1}b$$

cioè trovare un'equazione di punto fisso con:

$$H = (D - E)^{-1}F, \quad c = (D - E)^{-1}b$$

e quindi applicare l'algoritmo:

$$\begin{cases} x^{(0)} \text{ dato} \\ x^{(k+1)} = (D - E)^{-1}Fx^{(k)} + (D - E)^{-1}b \end{cases}$$

Avremo che la matrice di iterazione è:

$$H_{GS} = (D - E)^{-1}F$$

di cui osserviamo che la prima colonna è il vettore di zeri in quanto F ha anch'essa la prima colonna al vettore di zeri.

In ogni caso, notiamo che non è necessario esplicitare H_{GS} , ma ad ogni iterazione basta calcolare il prodotto matrice-vettore:

$$x^{(k)} \rightarrow Fx^{(k)}$$

e risolvere col metodo di sostituzione all'indietro il sistema lineare:

$$(D - E)y = Fx^{(k)}$$

Stesso discorso per c , che si trova sempre risolvendo una sola volta, col metodo di sostituzione all'indietro, il sistema lineare:

$$(D - E)c = b$$

10.2.5 Implementazione MATLAB del metodo di Gauss-Seidel

In MATLAB, una possibile implementazione che sfrutta le funzionalità di calcolo matriciale (in particolare la funzione per la sostituzione all'indietro `bck_subst()` che abbiamo già implementato) può essere la seguente:

```

1 function x_old = seidel(A, b, k, x)
2     n = height(A);
3
4     if nargin < 4
5         % stima iniziale
6         x_old = zeros(n, 1);
7     end
8
9     % imposta le matrici D E F
10    DE = triu(A);
11    F = -A + DE;
12
13    % imposta c
14    c = bck_subst(DE, b);
15
16    for j = 1:k
17        x_old = bck_subst(DE, F * x_old) + c;
18        x_new = x_old;
19
20        % stampa informazioni
21        fprintf("it = %d, res = %.3f\n", j, norm(b - A * x_old));
22        disp(x_old);
23    end
24 end

```

10.2.6 Ottimizzazione del metodo di Gauss-Seidel

L'implementazione vista adesso del metodo di Gauss-Seidel non è la più efficiente. Vediamo infatti che, preso:

$$x^{(k+1)} = (D - E)^{-1} F x^{(k)} + (D - E)^{-1} b$$

e moltiplicando per $D^{-1}(D - E)$ si ha:

$$x^{(k+1)} = D^{-1} E x^{(k+1)} + D^{-1} F x^{(k)} + D^{-1} b$$

EsPLICITARE una dipendenza di $x^{(k+1)}$ da sé stessa potrebbe sembrare poco intuitivo, ma è invece conveniente in quanto ogni elemento di $x^{(k+1)}$ dipenderà dai soli elementi precedenti, cioè si avrà:

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij} x_j^{(k)} \right), \quad i = 1, \dots, n$$

In questo modo si hanno due vantaggi:

1. Non occorre risolvere sistemi triangolari;
2. Per calcolare $x_i^{(k+1)}$ non si ha bisogno di x_h^k per $h < i$, e quindi si possono sovrascrivere le entrate di $x^{(k)}$, e mantenere un unico vettore.

10.2.7 Implementazione C++ del metodo di Gauss-Seidel

Vediamo come si può usare quest'ultima versione (scalare) del metodo di Gauss-Seidel per realizzarne un'implementazione C++, sfruttando la stessa libreria `mat.h` dell'esempio 10.2.3:

```

1 double* jacobi(unsigned n, unsigned k, double** A, double* b) {
2     // inizializza vettori
3     double* v1;
4     v1 = new double[n];
5
6     for(int r = 0; r < n; r++) {
7         v1[r] = 0;
8     }
9
10    for(int i = 0; i < k; i++) {
11        std::cout << "Iterazione " << i + 1 << std::endl;
12
13        std::cout << "Il vettore vecchio e':" << std::endl;
14        print_vector(v1, n);
15
16        for(int r = 0; r < n; r++) {
17            v1[r] = b[r];
18
19            for(int c = 0; c < n; c++) {
20                if(r == c) continue;
21
22                v1[r] -= A[r][c] * v1[c];
23            }
24
25            v1[r] /= A[r][r];
26        }
27
28        std::cout << "Il vettore nuovo e':" << std::endl;
29        print_vector(v1, n);
30        std::cout << std::endl;
31    }
32
33    return v1;
34 }

```

Come vediamo, la proprietà dimostrata comporta modifiche minime al codice (la semplice rimozione del vettore `v2`, con prodotti scalari che vengono fatti tutti su `v1`).

La realizzazione di un programma che esegue questo algoritmo è ancora analoga all'esempio 10.2.3 (implementazioni complete si trovano in `../matlab/code`).

10.2.8 Jacobi/Gauss-Seidel e matrici di permutazione

Un'ultima osservazione è che sia Jacobi che Gauss-Seidel hanno come condizione che $a_{ii} \neq 0, \forall i$, in quanto altrimenti D diagonale non sarebbe invertibile. Se questa condizione non è soddisfatta, si possono fare delle trasformazioni "indolori" sul sistema per ritrovare la diagonale non nulla (applicare matrici di permutazione e applicare il metodo sul sistema permutato, per trovare poi una soluzione che al limite andrà *de*-permutata).

Ad esempio, si può pensare di applicare Jacobi a:

$$\Pi Ax = \Pi b$$

per trovare una qualche permutazione Πx di x .

11 Lezione del 31-03-25

Riprendiamo la trattazione dei metodi iterativi per i sistemi lineari.

11.0.1 Valutazione della convergenza

Avevamo visto che affinché un metodo di punto fisso sia convergente è necessario che la sua matrice di iterazione H in:

$$x = Hx + c$$

sia convergente, cioè abbia norma spettrale $\rho(H) < 1$.

Vediamo un esempio di valutazione di tale matrice sia per il metodo di Jacobi e di Gauss-Siedel applicato ad una certa matrice A , svolgendo esplicitamente tutti i calcoli:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{3} & \frac{4}{9} \\ \frac{2}{3} & 1 & \frac{2}{3} \\ \frac{4}{9} & \frac{2}{3} & 1 \end{pmatrix}$$

- **Jacobi:** avremo la matrice di convergenza:

$$x = \underbrace{D^{-1}(E + F)}_{H_J} x + D^{-1}b$$

da cui:

$$H_J = D^{-1}(E + F) = I \cdot \begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{3} & \frac{4}{9} \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ \frac{4}{9} & \frac{2}{3} & 0 \end{pmatrix}$$

Calcoliamo quindi gli autovalori attraverso il polinomio caratteristico:

$$p(\lambda) = \det(\lambda I - D^{-1}(E + F)) = \det \begin{pmatrix} \lambda & \frac{2}{3} & \frac{4}{9} \\ \frac{2}{3} & \lambda & \frac{2}{3} \\ \frac{4}{9} & \frac{2}{3} & \lambda \end{pmatrix} = \lambda^3 + \frac{16}{81} \cdot 2 - \frac{16}{81} \lambda - 2 \cdot \frac{4}{9} \lambda$$

per la regola di Sarrus, quindi:

$$p(\lambda) = \lambda^3 - \frac{88}{81} \lambda + \frac{32}{81}$$

Accorgiamoci che $\lambda_1 = \frac{4}{9}$ è radice del polinomio, e quindi dividiamo:

$$\frac{\lambda^3 - \frac{88}{81} \lambda + \frac{32}{81}}{\lambda - \frac{4}{9}} = \lambda^2 + \frac{4}{9} \lambda - \frac{8}{9}$$

per cui:

$$p(\lambda) = \left(\lambda - \frac{4}{9} \right) \left(\lambda^2 + \frac{4}{9} \lambda - \frac{8}{9} \right)$$

Risolviamo quindi la quadratica:

$$\lambda_{2,3} = \frac{-\frac{4}{9} \pm \sqrt{\frac{16}{81} + \frac{32}{9}}}{2} = -\frac{2}{9} (1 \mp \sqrt{19})$$

Delle 3 radici trovate si ha che $\lambda_3 = -\frac{2}{9} (1 + \sqrt{19}) \approx -1.19087$ è in modulo ≥ 0 , ergo la condizione di convergenza non è rispettata, e il metodo di Jacobi potrebbe non convergere.

- **Gauss-Seidel:** avremo la matrice di convergenza:

$$x = \underbrace{(D - E)^{-1}F}_{H_{GS}} x + (D - E)^{-1}b$$

da cui:

$$H_{GS} = (D - E)^{-1}F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & 1 & 0 \\ \frac{4}{9} & \frac{2}{3} & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & -\frac{2}{3} & -\frac{4}{9} \\ 0 & 0 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

che sfruttando quanto avevamo detto sui prodotti per inverse:

$$= \begin{pmatrix} (D - E)^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} & (D - E)^{-1} \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} & (D - E)^{-1} \begin{pmatrix} -\frac{4}{9} \\ -\frac{2}{3} \\ 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

cioè dobbiamo risolvere 3 sistemi lineari (di cui uno banale) usando il metodo di sostituzione all'indietro. Avremo quindi:

- Il sistema:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & 1 & 0 \\ \frac{4}{9} & \frac{2}{3} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

che dà:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ \frac{4}{9} \\ 0 \end{pmatrix}$$

- Il sistema:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & 1 & 0 \\ \frac{4}{9} & \frac{2}{3} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{4}{9} \\ -\frac{2}{3} \\ 0 \end{pmatrix}$$

che dà:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{4}{9} \\ -\frac{10}{27} \\ \frac{4}{9} \end{pmatrix}$$

da cui:

$$H_{GS} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & -\frac{4}{9} & -\frac{4}{9} \\ 0 & \frac{4}{9} & -\frac{10}{27} \\ 0 & 0 & \frac{4}{9} \end{pmatrix}$$

da cui $\lambda_1 = -\frac{2}{3}$ e $\lambda_2 = \frac{4}{9}$ con molteplicità $\mu_2 = 2$, quindi tutti gli autovalori a modulo < 1 e la condizione è rispettata.

11.0.2 Criteri di convergenza di matrici di iterazione

Cerchiamo un modo più generale per fare ciò che abbiamo fatto nell'ultimo esempio. Vediamo che vale il seguente teorema:

Teorema 11.1: Criteri di convergenza di matrici di iterazione

Se $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ rispetta una delle seguenti condizioni:

1. A ha predominanza diagonale forte;
2. A è irriducibile e a predominanza diagonale debole;

allora sia il metodo di Jacobi che il metodo di Gauss-Seidel danno iterazioni convergenti applicati ad un sistema $Ax = b$.

1. La dimostrazione del teorema comincia dall'imporre che $a_{ii} \neq 0, \forall i = 1, \dots, n$. Avevamo visto che questa condizione può essere forzata scambiando A con una qualche permutazione ΠA .

Abbiamo allora che la condizione è ovvia nel caso di predominanza diagonale forte (1), mentre nel caso di matrice irriducibile a predominanza diagonale debole (2), se esistesse un $a_{ii} = 0$ per qualche i allora applicando la predominanza diagonale debole si avrebbe $a_{ij} = 0$ ($0 \geq \sum_{i \neq j}^n a_{ij}$), che sarebbe assurdo (la matrice non può essere singolare). Notiamo che in questo caso nemmeno una matrice di permutazione Π potrebbe portarci a diagonale non negativa.

2. Dimostriamo la convergenza per i due metodi:

- **Jacobi:** si ha che:

$$H_J = D^{-1}(E + F) = \begin{pmatrix} 0 & \dots & -\frac{a_{1j}}{a_{11}} \\ \dots & 0 & \dots \\ -\frac{a_{ij}}{a_{ii}} & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

e allora la norma a infinito di H_J sarà:

$$|H_J|_\infty = \max_{i=1, \dots, n} \sum_{i \neq j}^n \left| \frac{a_{ij}}{a_{ii}} \right|$$

Se A è a predominanza diagonale forte (1), allora $|a_{ii}| > \sum_{j \neq i}^n |a_{ij}|$, e quindi $|H_J|_\infty < 1$ e $\rho(H_J) < 1$.

Se A è invece irriducibile a predominanza diagonale debole (2), sarà che nuovamente $|H_J|_\infty \leq 1$, quindi gli autovalori di A sono $|\lambda| \leq 1$, ma non esiste $|\lambda| = 1$ in quanto starebbe sul bordo di un cerchio di Gershgorin, quindi di tutti, ma esiste almeno un cerchio $\mathcal{F}_i(A)$ con raggio $r < 1$.

- **Gauss-Seidel:** supponiamo che esista λ^* autovalore di H_{GS} :

$$H_{GS} = (D - E)^{-1}F$$

tale che $|\lambda^*| \geq 1$. Allora dovrà valere:

$$0 = \det(\lambda^* I - H_{GS}) = \det(\lambda^* I - (D - E)^{-1}F) = \det((D - E)^{-1}(\lambda^*(D - E) - F))$$

che per Binet-Cauchy dà:

$$0 = \det((D - E)^{-1}) \cdot \det(\lambda^*(D - E) - F)$$

Il primo termine è chiaramente $\neq 0$, e quindi si considera:

$$0 = \det(\lambda^*(D - E) - F) = (\lambda^*)^n \det(D - E - (\lambda^*)^{-1}F)$$

cioè:

$$0 = \det(D - E - (\lambda^*)^{-1}F)$$

La matrice che troviamo è quella dove gli elementi sopra la diagonale hanno modulo \leq ai corrispondenti nella matrice A . Se A è dominante diagonale forte o dominante diagonale debole, quindi, conserva tale proprietà, e conserva anche l'irriducibilità. Quindi, necessariamente, è non singolare (altrimenti anche A sarebbe singolare), e l'ipotesi $|\lambda^*| \geq 1$ è assurda, cioè $|\lambda^*| < 1$.

□

11.1 Sistemi rettangolari

Vediamo quindi come risolvere sistemi **rettangolari**, cioè del tipo $Ax = b$ con $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$ rettangolare. In questo caso si avranno m equazioni in n incognite, quindi con $x \in \mathbb{C}^n$ e $b \in \mathbb{C}^m$. Supponiamo poi che A sia di rango massimo, ovvero $\text{rank}(A) = \min(m, n)$.

Scopriamo che anche in questo scenario si può applicare l'eliminazione di Gauss, e nel caso $m < n$, si può immaginare di rendere il sistema quadrato aggiungendo $n - m$ equazioni fittizie della forma $0 = 0$, lasciando $n - m$ parametri liberi:

$$\begin{pmatrix} 1 & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 1 & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 1 & \dots \\ 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \\ x_{m+1} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Diciamo che questo tipo di sistemi si dicono **sottodeterminati**.

Caso più interessante sarà quello dei sistemi **sovradeterminati**, cioè dove $n < m$ e si hanno più equazioni che incognite. In questo caso l'applicazione dell'eliminazione di Gauss porta ad n equazioni determinate, e $m - n$ equazioni della forma $0 = ?$ dove ? sono i termini noti che si formano nelle ultime $m - n$ righe:

$$\begin{pmatrix} 1 & \dots & \dots \\ 0 & 1 & \dots \\ 0 & \dots & 1 \\ 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \\ b_{n+1} = ?_1 \\ \vdots \\ b_m = ?_{m-n+1} \end{pmatrix}$$

Se esiste almeno un termine noto $? \neq 0$, allora il sistema è impossibile (ed è questo il caso tipico). Questa affermazione è essenzialmente il teorema di Rouchè-Capelli, dove si impone:

$$\text{rank}(A|b) = \text{rank}(A)$$

Il problema che ci poniamo in questi casi è quello di minimizzare il residuo, cioè posto:

$$x - Ab = r(x)$$

cercare di risolvere il problema di ottimizzazione:

$$r^* = \min_{x \in \mathbb{C}^n} |b - Ax|_2 = \min_{x \in \mathbb{C}^n} |r(x)|_2$$

Questo tipo di problema viene detto **problema dei minimi quadrati**. Osserviamo che il problema è equivalente a risolvere:

$$(r^*)^2 = \min_{x \in \mathbb{C}^n} |b - Ax|_2^2 = \min_{x \in \mathbb{C}^n} |r(x)|_2^2$$

Cioè ci possiamo liberare della radice della norma quadratica.

Potremo innanzitutto chiederci come trovare il punto x^* che dà r^* , o in principio se questo problema ammette soluzione. Facciamo allora un esempio del caso $x \in \mathbb{R}^n$. Considereremo la funzione:

$$\psi(x) = |b - Ax|_2^2 = (b - Ax)^T(b - Ax) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

questa funzione è convessa, e quindi il punto x^* è quello che soddisfa $\nabla\psi(x) = 0$ (gradiente nullo). Vediamo allora le derivate parziali, osservando che:

$$|b - Ax|_2^2 = |r(x)|_2^2 = \sum_{i=1}^m r_i(x)^2$$

e:

$$r_i(x)^2 = \left(b_i - \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \right)^2$$

Calcoliamo quindi la derivata parziale vera e propria rispetto alla s -esima componente:

$$\frac{\partial}{\partial x_s} (r_i(x)^2) = 2 \left(b_i - \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \right) (-a_{is})$$

da cui:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_s} (\psi(x)) &= \sum_{i=1}^m \frac{\partial}{\partial x_s} (r_i(x)^2) = 2 \sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^n a_{is}a_{ij}x_j - a_{is}b_i \right) \\ &= 2 \left(\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{is}a_{ij}x_j - \sum_{i=1}^m a_{is}b_i \right) = 2 \left(\sum_{i=1}^m a_{is} \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j - \sum_{i=1}^m a_{is}b_i \right) \\ &= 2 \left((A^T Ax)_s - (A^T b)_s \right) = 2 (A^T Ax - A^T b)_s \end{aligned}$$

dove l' s al pedice indica che si prende la s -esima riga.

Si ha quindi che:

$$\nabla\psi(x) = 0 \Leftrightarrow A^T Ax - A^T b = 0 \Leftrightarrow A^T Ax = A^T b$$

e quindi il sistema da risolvere per i punti di minimo di $\psi(x)$, cioè le soluzioni del problema dei minimi quadrati, è:

$$A^T Ax = A^T b$$

detto **sistema delle equazioni normali**.

12 Lezione del 04-04-25

Riprendiamo il discorso dei problemi ai minimi quadrati.

12.1 Esistenza delle soluzioni al sistema delle equazioni normali

Avevamo detto che di sistemi $Ax = b$ con $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$, $m > n$, cioè *sovradeterminati*, che se la soluzione di $Ax = b$ non esiste, ergo $\text{rank}(A|b) > \text{rank}(A)$, potrebbe essere interessante cercare di risolvere il problema di ottimizzazione:

$$\min_{x \in \mathbb{C}^n} |Ax - b|_2 = \min_{x \in \mathbb{C}^n} |b - Ax|_2$$

dove il punto p_1 di minimo è lo stesso di quello del problema:

$$\min_{x \in \mathbb{C}^n} |Ax - b|_2^2$$

Avevamo quindi definito la funzione ϕ , assunta per semplicità $\psi : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, +\infty)$:

$$\psi(x) = |b - Ax|_2^2 = |r(x)|_2^2 = \sum_{i=1}^n r_i(x)^2$$

A questo punto il minimo sarà semplicemente nel punto:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \psi}{\partial x_1}(x) \\ \vdots \\ \frac{\partial \psi}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

da cui avevamo visto ricaviamo il sistema **lineare** (in quanto ψ è quadratica e quindi deriva ad una lineare):

$$A^T Ax = A^T b$$

Non lo abbiamo dimostrato formalmente, ma possiamo dire che lo stesso vale nel campo complesso, cioè con $x \in \mathbb{C}^n$:

$$A^H Ax = A^H b$$

prese le hermitiane invece delle trasposte.

Vediamo quindi che vale il seguente teorema:

Teorema 12.1: Esistenza delle soluzioni dei problemi ai minimi quadrati

Il sistema $A^T Ax = A^T b$ ammette soluzione $\forall A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ e $\forall b \in \mathbb{C}^m$ (1). Inoltre, la soluzione è unica se e solo se $\text{rank}(A) = n$, ($m > n$) (2).

Dimostriamo le due tesi in ordine.

1. La prima tesi si dimostra verificando che $A^T b \in I_m(A^T A)$ con I_m *immagine* o **spazio delle colonne** di $A^T A$, cioè verificando che è rispettata la condizione:

$$\text{rank}(A^T A | A^T b) = \text{rank}(A^T A)$$

di Rouché-Capelli, per cui esiste una soluzione. Abbiamo quindi:

$$I_m(A^T A) = \{y \in \mathbb{C}^n : y = A^T Az, \quad z \in \mathbb{C}^n\}$$

Il caso buono è $A^T b \in I_m(A)$, cioè:

$$I_m(A) = \{y \in \mathbb{C}^n : y = Az, \quad z \in \mathbb{C}^n\}$$

così che:

$$A^T b = A^T A z \in I_m(A)$$

Questo però non è sempre vero. Possiamo allora dire che uno spazio vettoriale è sempre dato dalla somma dello spazio delle colonne di una trasformazione A e il corrispondente spazio perpendicolare:

$$\mathbb{C}^m = I_m(A) \oplus I_m(A)^\perp$$

con lo spazio perpendicolare allo spazio delle colonne definito come:

$$I_m(A)^\perp = \{y : y^H z = 0, \quad \forall z \in I_m(A)\}$$

Potremo allora riscrivere b come la somma delle componenti *parallela* e *perpendicolare*:

$$b \in \mathbb{C}^m \implies b = b_1 + b_2, \quad \begin{cases} b_1 \in I_m(A) \\ b_2 \in I_m(A)^\perp \end{cases}$$

Prendiamo allora $A^T b$ come:

$$A^T b = A^T b_1 + A^T b_2$$

Si ha che $A^T b_1 \in I_m(A^T A)$ da quanto avevamo detto prima, mentre riguardo ad $A^T b_2$ si può dire:

$$A^T b_2 = \begin{pmatrix} a_1^T b_2 \\ \vdots \\ a_m^T b_2 \end{pmatrix} = 0$$

perchè $b_2 \in I_m(A)^\perp$ e le colonne di A stanno in $I_m(A)$, quindi la condizione di Rouché-Capelli è soddisfatta e la soluzione esiste. \square

2. Per l'unicità, vogliamo verificare che $\det(A^T A) \neq 0$ soddisfatta la proprietà $\text{rank}(A) = n$. Abbiamo allora che dal teorema di Binet-Cauchy *generalizzato*:

$$\det(A^T A) = \sum_{[j]} \det(A_{[j]}^T) \cdot \det(A_{[j]}) = \sum_{[j]} |\det(A_{[j]})|^2$$

dove la sommatoria varia su tutte le possibili scelte di n indici in $\{1, \dots, m\}$. Vogliamo allora mostrare che $\det(A^T A) \geq 0$, cioè che \exists almeno una sottomatrice $A_{[j]}$ tale che $\det(A_{[j]}) \neq 0$. Questa esisterà sempre se $\text{rank}(A) = n$, e quindi anche l'ultima tesi del teorema è soddisfatta. \square

Vediamo due esempi pratici per osservare il teorema in azione.

1. Prendiamo il sistema:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 1 \\ -x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 + 2x_2 = 1 \end{cases}$$

con $m = 3$ equazioni in $n = 2$ incognite. Avremo che le matrici A e b , e l'incognita x , saranno:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

per il sistema $Ax = b$. Vediamo che il rango di A è 2, quindi dal teorema appena dimostrato la soluzione sarà unica. Calcoliamo allora le matrici $A^T A$ e $A^T b$ per il sistema $A^T A x = A^T b$:

$$A^T A = \begin{pmatrix} 6 & -1 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}, \quad A^T b = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Avremo quindi il sistema:

$$\begin{cases} 6x_1 - x_2 = 3 \\ -x_1 + 6x_2 = 1 \end{cases}$$

da cui:

$$x^* = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{19}{35} \\ \frac{9}{35} \end{pmatrix}$$

Che è la soluzione ottima. Possiamo quindi calcolare la norma di residuo:

$$r = b - Ax^* = b - A \cdot \begin{pmatrix} \frac{19}{35} \\ \frac{9}{35} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{6}{35} \\ \frac{10}{35} \\ -\frac{2}{35} \end{pmatrix}$$

da cui otteniamo uno scarto di ≈ 0.3381 dal valore ideale.

2. Un problema simmetrico al precedente potrebbe essere quello di trovare per quali parametri una matrice parametrizzata rispetta il teorema, cioè ammette una soluzione unica. Prendiamo ad esempio il sistema:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & \alpha \\ \beta & 0 & 0 \end{pmatrix}}_A \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}}_b = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}}_b$$

con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Iniziamo imponendo l'antitesi del teorema cioè:

$$\text{rank}(A) < n \Leftrightarrow \exists A_{[j]} \in \mathbb{R}^{3 \times 3} \text{ non invertibile}$$

con $A_{[j]}$ le sottomatrici quadrate 3×3 prese dal teorema di Binet-Cauchy. Consideriamo allora tutte le possibili $A_{[j]}$ coi loro determinanti:

$$\begin{array}{cccc} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & 1 \\ \beta & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \alpha \\ \beta & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & \alpha \\ \beta & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \alpha(\alpha - 1) & \beta(1 - \alpha) & \alpha\beta & \alpha^2\beta \end{array}$$

da cui avere tutti determinanti nulli significa soddisfare il sistema (non lineare):

$$\begin{cases} \alpha(\alpha - 1) = 0 \\ \beta(1 - \alpha) = 0 \\ \alpha\beta = 0 \\ \alpha^2\beta = 0 \end{cases}$$

con soluzioni $(\alpha, \beta) = (0, 0)$ o $(\alpha, \beta) = (1, 0)$. Si ha quindi che per queste due combinazioni di valori di α e β il sistema di partenza non ammette soluzione ottima unica.

12.1.1 Considerazioni di complessità del sistema delle equazioni normali

Valutiamo la complessità del sistema visto finora. Dobbiamo:

1. Calcolare $A^H A$, che ha complessità $O(mn^2)$ (da una $(n \times m)(m \times n)$);
2. Calcolare $A^H b$, che ha complessità $O(mn)$ (da una $(n \times m)(m \times 1)$);
3. Risolvere il sistema $A^H A x = A^H b$, che ha complessità $O(mn^2 + n^3) \sim O(n^3)$.

Vediamo che il problema non è tanto la complessità, ma il fatto che $A^T A$ ha spesso un numero di condizionamento piuttosto alto, ad esempio nel caso $m = n$ si ha:

$$\mu(A^T A) = \mu(A)^2$$

Se $\mu(A^T A) (< 10^k \text{ con } k \text{ moderato})$, questo è fastidioso in quanto abbatte sostanzialmente la precisione. Conviene quindi applicare un metodo alternativo.

12.2 Metodo QR per problemi ai minimi quadrati

Vediamo quindi un metodo basato sulla fattorizzazione QR.

12.2.1 Fattorizzazione QR

La **fattorizzazione QR** è un tipo di fattorizzazione matriciale, come lo era la *fattorizzazione LU* che abbiamo già visto (8.3.4).

Diamone quindi la definizione:

Definizione 12.1: Fattorizzazione LU

Data $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$, con $m \geq n$, una fattorizzazione QR di A è una coppia di matrici (Q, R) tali che: $A = QR$, con $Q \in \mathbb{C}^{m \times m}$ unitaria ($Q^H Q = Q Q^H = I$), e $R \in \mathbb{C}^{m \times m}$ della forma triangolare superiore rettangolare (con un certo numero di righe a zero sotto il triangolo), cioè esprimibile come:

$$R = \begin{pmatrix} R_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

con $R_1 \in \mathbb{C}^{n \times n}$ triangolare superiore.

Varrà allora il teorema:

Teorema 12.2: Esistenza della fattorizzazione QR

Per ogni matrice \exists sempre una fattorizzazione QR, ma non è mai unica.

Questo viene dal fatto che data $A = QR$, si potrebbe prendere $D \in \mathbb{R}^{m \times m}$ diagonale con $|d_j| = 1$ per $j = 1, \dots, m$, e dire:

$$A = Q_2 R_2, \quad \begin{cases} Q_2 = QD \\ R_2 = D^{-1}R \end{cases}$$

in quanto:

$$A = QR = \underbrace{QD}_{Q_2} \cdot \underbrace{D^{-1}R}_{R_2}$$

Una proprietà di rilievo è che la norma 2 e la norma di Frobenius sono invarianti per moltiplicazioni con matrici unitarie, ovvero:

$$|A| = |QA| = |AQ| = |Q_1 A Q_2|$$

con norma $|\cdot|_2$ o di Frobenius.

Dimostriamo per le due norme:

- **Norma 2:** questo si ha prendendo la definizione di norma 2:

$$|A|_2 = \sqrt{\rho(A^H A)}$$

Allora la norma di AQ , ad esempio, sarà:

$$|AQ|_2 = \sqrt{\rho((AQ)^H AQ)} = \sqrt{\rho(Q^H A^H AQ)}$$

$Q^H A^H AQ$ è simile a $A^H A$ in quanto dalla definizione di unarietà di Q , si può intendere $Q^H = Q^{-1}$ e quindi prendere la forma come un'applicazione di matrice di trasformazione, da cui la tesi per la norma 2. \square

- **Norma di Frobenius:** questo si ha prendendo la definizione di norma di Frobenius:

$$|A|_F = \sqrt{\text{trace}(A^H A)}$$

Allora la norma di AQ , ad esempio, sarà:

$$|AQ|_F = \sqrt{\text{trace}(Q^H A^H AQ)}$$

da cui come sopra. \square

Nei problemi ai minimi quadrati, la fattorizzazione QR è utile in quanto se $A = QR$:

$$\min_{x \in \mathbb{C}^n} |b - Ax|_2 = \min_{x \in \mathbb{C}^n} |b - QRx|_2 = \min_{x \in \mathbb{C}^n} |Q^H b - Rx|_2$$

moltiplicando per Q^H all'ultimo passaggio (che preserva la norma, come abbiamo appena dimostrato).

Chiamato $Q^H b = c$, osserviamo quindi di poter prendere:

$$\psi(x) = |cx - Rx|_2^2$$

che preso:

$$R = \begin{pmatrix} R_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

diventa:

$$\psi(x) = \left\| \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} R_1 \\ 0 \end{pmatrix} x \right\|_2^2 = \left\| \begin{pmatrix} c_1 - R_1 x \\ c_2 \end{pmatrix} \right\|_2^2 = |c_1 - R_1 x|_2^2 + |c_2|_2^2$$

l'unico termine su cui abbiamo controllo è il primo, e possiamo quindi trascurare $|c_2|_2^2$. Prendiamo allora:

$$\psi'(x) = |c_1 - R_1 x|_2^2$$

che rappresenta un sistema lineare $n \times n$, dove bastera scegliere x tale che:

$$R_1 x = c$$

così da trovare 0 e ottenere il valore di ψ' (e quindi di ψ) minore possibile. Il vantaggio aggiunto è che R_1 è triangolare superiore, e quindi si può calcolare:

$$x = R_1^{-1} c$$

per sostituzione all'indietro.

Riassumendo, quindi, abbiamo ottenuto il metodo:

1. Si calcola la fattorizzazione $A = QR$;
2. Si calcola $Q^H b = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$, che ha costo $O(nm)$ (non è $O(m^2 n)$, per via della struttura di Q);
3. Si risolve $R_1 x = c_1$, che è un sistema lineare triangolare superiore $n \times n$, quindi ha costo $O(n^2)$ per sostituzione all'indietro.

L'unica incognita è allora il costo della fattorizzazione, che anticipiamo è $O(mn^2)$.

12.2.2 Matrici di Householder

Una proprietà rilevante è che dato un vettore $v \in \mathbb{C}^m$ esiste sempre una matrice unitaria H_v tale che:

$$H_v \cdot v = c \cdot e_1, \quad c \in \mathbb{C}$$

per e_1 primo elemento della base canonica. Dato che la moltiplicazione per matrici unitarie non cambia la norma si ha:

$$|c| = |v|_2$$

Per creare tale matrice, scegliamo \tilde{v} :

$$\tilde{v} = v \pm |v|_2 \cdot e_1 = \begin{pmatrix} v_1 \pm |v|_2 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_m \end{pmatrix}$$

H_v dovrà quindi essere scelta come:

$$H_v = I - 2 \frac{\tilde{v}\tilde{v}^H}{|\tilde{v}|_2^2}$$

dove il termine $\frac{\tilde{v}\tilde{v}^H}{|\tilde{v}|_2^2}$ rappresenta una proiezione sulla retta tracciata dal vettore \tilde{v} , e quindi H_v uguale alla *matrice di riflessione* sull'iperpiano ortogonale a \tilde{v} . Visto che abbiamo scelto \tilde{v} perchè fosse effettivamente "equidistante" sia da v che da e_1 , otteniamo una matrice che porta v esattamente sulla base e_1 .

Le matrici costruite in questo modo vengono anche dette **Matrici di Householder** associate al vettore v .

Possiamo scrivere una funzione MATLAB, che ci tornerà utile a breve, per il calcolo della matrice di Householder relativa a un certo vettore:

```
1 function H = householder(v)
2     H = eye(length(v));
3     vt = v;
4
5     if vt(1) < 0
6         vt(1) = vt(1) - norm(v); % si sottrae
7     else
8         vt(1) = vt(1) + norm(v);
9     end
10
11     H = H - 2 * vt * vt' / norm(vt)^2;
12 end
```

Vediamo inoltre come si è scelto il segno della norma aggiunta a vt (\tilde{v}) in modo da ridurre gli errori di cancellazione.

12.2.3 Calcolo della fattorizzazione QR

Analogamente al metodo di Gauss, per la fattorizzazione QR si moltiplica a sinistra per matrici unitarie che "sistemano" gli elementi sotto la diagonale.

Sfruttando la proprietà delle matrici di Householder, agiamo come segue:

$H_1 = H_{a_1}$ = matrice di Householder associata ad a_1 , prima colonna di A

diciamo:

$$H_1 \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ? & \dots \\ 0 & \dots \\ \vdots & \dots \\ 0 & \dots \end{pmatrix}$$

a questo punto basterà prendere H_2 per "sistemare" gli elementi della sottomatrice di coda successiva:

$$H_2 = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & \tilde{H}_2 & \\ 0 & & & \end{array} \right)$$

e così via, introducendo di volta in volta più elementi della diagonale in testa. Si potrà quindi definire la matrice R come:

$$R = \underbrace{H_1^H H_2^H \dots H_n^H}_Q A$$

dove il prodotto delle unitarie rappresenterà la matrice Q .

12.2.4 Ottimizzazioni della fattorizzazione QR

Osserviamo che per avere costo $O(mn^2)$ (ed anche costo $O(mn)$ per $Q^H b$) si sfrutta il fatto che H_j è del tipo *identità + rango 1*, cioè:

$$H_j = I - bb^T$$

dove gli a e b vengono presi qui a scopo di esempio, risulterebbero dalla forma della matrice di Householder che abbiamo visto alla 12.2.2. La parte importante è che il prodotto per una matrice generica B assume la forma:

$$H_j \cdot B = B - b \cdot b^T \cdot B$$

dove l'ultimo termine è il prodotto di una colonna per il prodotto di una riga per B . Quindi, nel caso B sia un vettore b , si hanno solo prodotti scalari di costo m , ergo:

$$H_j b \rightarrow O(m)$$

Se prendiamo il prodotto per tutte le matrici H_j , cioè per Q , abbiamo che questa cosa si ripete n volte e quindi il costo è $O(mn)$.

$$\implies H_n \cdot H_{n-1} \cdot \dots \cdot H_1 b \rightarrow O(mn)$$

il costo $O(mn^2)$ a questo punto è immediato dal fatto che abbiamo semplicemente una dimensione n in più dalla matrice A .

12.2.5 Osservazioni ulteriori sulla fattorizzazione QR

Osserviamo poi che nel caso $m = n$ si può sfruttare la fattorizzazione QR per risolvere sistemi lineari, con costo $O(\frac{4}{3}n^3)$ per la fattorizzazione, il doppio rispetto a Gauss, ma solitamente più stabile.

Osserviamo infine che se $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ si può restare nei reali ed avere $Q \in \mathbb{R}^{m \times m}$, $Q^T Q = I$, ecc...

12.2.6 Implementazione MATLAB della decomposizione QR

Riportiamo l'implementazione MATLAB di questo algoritmo:

```

1 function [Q, A] = qr_decomp(A)
2     n = width(A);
3     m = height(A);
4     Q = eye(m); % accumulatore
5
6     for i = 1:n
7         Hi = householder(A(i:end, i));
8         Hi = blkdiag(eye(i-1), Hi);
9         A = Hi * A;
10        Q = Q * Hi;
11    end
12 end

```

Dove la funzione `blkdiag` ci permette di realizzare la forma a blocchi diagonale, con l'identità in testa, che la H_j assume ad ogni passaggio dell'algoritmo.

12.2.7 Implementazione MATLAB ottimizzata della decomposizione QR

Osserviamo quindi la versione della fattorizzazione QR, implementata in MATLAB, che effettua le ottimizzazioni riportate nella sezione 12.2.4:

```

1 function [Q, A] = opt_qr_decomp(A)
2     function [a, b] = householder_vec(v)
3         vt = v;
4
5         if vt(1) < 0
6             vt(1) = vt(1) - norm(v); % si sottrae
7         else
8             vt(1) = vt(1) + norm(v);
9         end
10
11        a = vt;
12        b = 2 * vt / norm(vt)^2;
13    end
14
15    % applicazione a sinistra
16    function A = rank_one_l(A, a, b, i)
17        A(i:end, :) = A(i:end, :) ...
18            - a * b' * A(i:end, :);
19    end
20
21    % applicazione a destra
22    function A = rank_one_r(A, a, b, i)
23        A(:, i:end) = A(:, i:end) ...
24            - (A(:, i:end) * a) * b';
25    end
26
27    n = width(A);
28    m = height(A);
29
30    Q = eye(m);
31
32    for i = 1:n
33        [a, b] = householder_vec(A(i:end, i));
34        A = rank_one_l(A, a, b, i);
35        Q = rank_one_r(Q, a, b, i);
36    end
37 end

```

dove la matrice di Householder viene mantenuta in due vettori, e si sono definite le funzioni `rank_one_l()` e `rank_one_r()` per l'aggiornamento di rango uno, rispettivamente a sinistra e a destra (che nient'altro sarebbe se non la moltiplicazione per la matrice di Householder).

12.2.8 Implementazione C++ della decomposizione QR

L'ultima versione ottimizzata della decomposizione QR si presta particolarmente bene all'implementazione in linguaggi di livello più basso.

Potremmo infatti avere la funzione, del tutto analoga alla scorsa implementazione MATLAB (se non per il fatto che si assume la matrice A sia quadrata):

```

1 void qr_decomp(double** A, double** Q, unsigned n) {
2     // inizializza vettori a, b
3     double* a, *b;
4     a = new double[n];
5     b = new double[n];

```

```

6
7  for(unsigned i = 0; i < n; i++) {
8      std::cout << "Passaggio " << i << std::endl;
9
10     householder_vec(A, i, n, a, b);
11
12     std::cout << "I vettori di Householder sono:" << std::endl;
13     std::cout << "a:" << std::endl;
14     print_vector(a, n - i);
15     std::cout << "b:" << std::endl;
16     print_vector(b, n - i);
17
18     rank_one_l(A, i, n, a, b);
19     rank_one_r(Q, i, n, a, b);
20
21     std::cout << std::endl;
22 }
23
24 // ripulisci
25 delete[] a;
26 delete[] b;
27 }

```

dove la `householder_vec()` è anch'essa simile alla versione MATLAB:

```

1 void householder_vec(double** A, unsigned i, unsigned n, double* a, double
   * b) {
2     double sqr_norm = 0;
3
4     // prendi la i-esima colonna di A
5     for(unsigned j = i; j < n; j++) {
6         a[j - i] = A[j][i];
7         sqr_norm += a[j - i] * a[j - i];
8     }
9
10    double norm = std::sqrt(sqr_norm);
11    sqr_norm -= a[0] * a[0];
12
13    if(a[0] < 0) {
14        a[0] -= norm;
15    } else {
16        a[0] += norm;
17    }
18
19    sqr_norm += a[0] * a[0];
20
21    for(unsigned j = 0; j < n - i; j++) {
22        b[j] = 2 * a[j] / sqr_norm;
23    }
24 }

```

se non per una probabile ottimizzazione che si potrebbe fare riguardo alle radici, che però ignoriamo.

A questo punto si implementano le `rank_one_l()` e `rank_one_r()` srotolando le moltiplicazioni, ed evidenziando quindi il costo delle applicazioni delle matrici di rango uno, che è effettivamente $O(mn^2)$:

```

1 // applicazione a sinistra
2 void rank_one_l(double** A, unsigned i, unsigned n, double* a, double* b)
3 {
4     // A(i:end, :) = A(i:end, :) - a * b' * A(i:end, :);

```

```

4  for(unsigned c = 0; c < n; c++) {
5      double sum = 0;
6
7      for(unsigned r = i; r < n; r++) {
8          sum += b[r - i] * A[r][c];
9      }
10
11     for(unsigned r = i; r < n; r++) {
12         A[r][c] -= a[r - i] * sum;
13     }
14 }
15 }
16
17 // applicazione a destra
18 void rank_one_r(double** A, unsigned i, unsigned n, double* a, double* b)
19 {
20     // A(i:end, :) = A(i:end, :) - (A(i:end, :) * a) * b';
21     for(unsigned r = 0; r < n; r++) {
22         double sum = 0;
23
24         for(unsigned c = i; c < n; c++) {
25             sum += A[r][c] * a[c - i];
26         }
27
28         for(unsigned c = i; c < n; c++) {
29             A[r][c] -= sum * b[c - i];
30         }
31     }

```

L'algoritmo è dunque completo, e realizza usando solo semplici cicli di complessità al massimo quadratica/cubica la decomposizione QR. Ricordiamo che il codice visto finora è disponibile nella directory `/code` degli appunti del corso, e in particolare queste implementazioni di livello più basso in C++ sono disponibili in `/code/cpp`.

12.2.9 Implementazione MATLAB di un risolutore ai minimi quadrati

Abbiamo quindi tutti gli elementi necessari per realizzare un semplice risolutore che implementi ciò che MATLAB fa già naturalmente quando gli si pone l'istruzione `A \ b` con il numero di righe di A maggiore del numero di colonne, cioè risolvere un sistema sovradeterminato usando i minimi quadrati.

Prendiamo quindi la serie di passaggi descritta in 12.2.1 ed implementiamo un algoritmo che li effettui:

```

1  function x = least_squares(A, b)
2      [Q, R] = qr_decomp(A);
3      c = Q' * b;
4
5      % trova righe a zero
6      tol = 1e-12;
7      R_diag = abs(diag(R));
8      r = find(R_diag > tol, 1, 'last');
9
10     R_trunc = R(1:r, 1:r);
11     c_trunc = c(1:r);
12
13     % risolvi il sistema superiore
14     x1 = bck_subst(R_trunc, c_trunc);
15

```

```

16 % reinserisci gli zeri
17 x = [x1; zeros(size(R,2) - r, 1)];
18 end

```

dove notiamo che dobbiamo troncare sia la matrice R che il vettore c ai soli elementi non nulli (cosa fatta controllando gli elementi non nulli della diagonale), in quanto la `bck_subst()` non si comporta bene altrimenti.

Potremo quindi usare l'algoritmo per risolvere problemi ai minimi quadrati come segue:

```

1 % dati A, b noti
2 x = least_squares(A, b);
3 % x minimizza lo scarto quadratico

```

13 Lezione del 07-04-25

13.1 Interpolazione di funzioni

Poniamo di avere una qualche funzione $f(x) : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ (in realtà spesso prenderemo senza ledere alla generalità della trattazione $f(x) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$) che non conosciamo esplicitamente ma di cui possiamo solo calcolare il valore y_0, \dots, y_k in determinati punti x_0, \dots, x_k non necessariamente equispaziati fra di loro. Chiamiamo questi punti **nodi**. Il problema sarà allora trovare un'approssimazione di $f(x)$ **interpolando** i punti dati.

- Un approccio valido quando si hanno pochi punti (k) è considerare un polinomio di grado k che passi per tutti questi, sperando che si raggiunga un'approssimazione sufficientemente precisa nei punti esterni ai nodi. Questo è l'approccio che vedremo della sezione 13.1.1 in poi;
- Un altro approccio, quando si hanno molti punti, è trovare una funzione particolarmente semplice (solitamente una retta) che minimizzi la distanza da questi. E' questo ad esempio il caso della *regressione lineare*. Questo è l'approccio dell'*approssimazione ai minimi quadrati* che vedremo in 15.2.

13.1.1 Interpolazione polinomiale

Vogliamo quindi trovare un polinomio $p(x)$ tale che:

$$p(x_i) = y_i, \quad \forall i \in \{0, \dots, k\}$$

Quello che facciamo è porre il polinomio come:

$$p(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_kx^k$$

e impostare il sistema:

$$\begin{cases} a_0 + a_1x_0 + \dots + a_kx_0^k = y_0 \\ \vdots \\ a_0 + a_1x_k + \dots + a_kx_k^k = y_k \end{cases}$$

che è lineare e ha come incognita il vettore dei coefficienti del polinomio cercato.

Notiamo di aver scelto come base la base canonica dei polinomi:

$$B_{\text{canonica}} = \{1, x, x^2, \dots, x^k\}$$

Avremmo potuto scegliere qualsiasi altra base dello spazio dei polinomi $\mathbb{R}[x]$, e vedremo infatti anche questo caso.

Riscrivendo quindi il sistema di cui sopra in forma matriciale si ha:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & x_0 & \dots & x_0^k \\ \vdots & & & \vdots \\ 1 & x_k & \dots & x_k^k \end{pmatrix}}_V \underbrace{\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_k \end{pmatrix}}_a = \underbrace{\begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_k \end{pmatrix}}_y$$

dove la matrice V viene detta **matrice di Vandermonde**.

Potrebbe interessarci capire quando questo sistema ammette soluzione. Ad esempio, è impossibile che esista $i \neq j$ tali che $x_i = x_j$, in quanto questo renderebbe il sistema singolare (due righe uguali $\implies \det(V) = 0$). Questo caso non è desiderabile in quanto potrebbero esserci più soluzioni (se anche $y_i = y_j$) o nessuna (se $y_i \neq y_j$).

Possiamo allora enunciare il teorema:

Teorema 13.1: Determinante della matrice di Vandermonde

Il determinante della matrice di Vandermonde è:

$$\det(V) = \prod_{0 \leq i < j \leq k} (x_j - x_i)$$

Possiamo dare una dimostrazione immediata di questo risultato ricordando che si può aggiungere un multiplo scalare di una colonna ad un'altra colonna senza cambiare il determinante. Prendiamo allora la matrice nella forma più completa:

$$V = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^k \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^k \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^k \\ \vdots & & & & \vdots \\ 1 & x_k & x_k^2 & \dots & x_k^k \end{pmatrix}$$

Sottraiamo quindi ad ogni colonna dopo la prima il prodotto della colonna precedente per x_0 , cancellando effettivamente la prima riga:

$$\begin{aligned} &\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & x_1 - x_0 & x_1^2 - x_1 x_0 & \dots & x_1^k - x_1^{k-1} x_0 \\ 1 & x_2 - x_0 & x_2^2 - x_2 x_0 & \dots & x_2^k - x_2^{k-1} x_0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 1 & x_k - x_0 & x_k^2 - x_k x_0 & \dots & x_k^k - x_k^{k-1} x_0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & x_1 - x_0 & x_1(x_1 - x_0) & \dots & x_1^{k-1}(x_1 - x_0) \\ 1 & x_2 - x_0 & x_2(x_2 - x_0) & \dots & x_2^{k-1}(x_2 - x_0) \\ \vdots & & & & \vdots \\ 1 & x_k - x_0 & x_k(x_k - x_0) & \dots & x_k^{k-1}(x_k - x_0) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Continuiamo questo procedimento sottraendo stavolta dalla colonna 2 in poi, e moltiplicando per x_1 :

$$\begin{aligned} &\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & x_1 - x_0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & x_2 - x_0 & x_2(x_2 - x_0) - x_1(x_2 - x_0) & \dots & x_2^{k-1}(x_2 - x_0) - x_1(x_2 - x_0) \\ \vdots & & & & \vdots \\ 1 & x_k - x_0 & x_k(x_k - x_0) - x_1(x_k - x_0) & \dots & x_k^{k-1}(x_k - x_0) - x_1(x_k - x_0) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & x_1 - x_0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & x_2 - x_0 & (x_2 - x_1)(x_2 - x_0) & \dots & (x_2^{k-1} - x_1)(x_2 - x_0) \\ \vdots & & & & \vdots \\ 1 & x_k - x_0 & (x_k - x_1)(x_k - x_0) & \dots & (x_k^{k-1} - x_1)(x_k - x_0) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Dovrebbe quindi risultare chiaro che ripetendo questa operazione k volte si ottiene una matrice triangolare inferiore, di cui ricordiamo il determinante si calcola moltiplicando gli elementi sulla diagonale, cioè si ottiene:

$$\det(V) = 1 \cdot (x_1 - x_0) \cdot (x_2 - x_1)(x_2 - x_0) \cdot \dots = \prod_{0 \leq i < j \leq k} (x_j - x_i)$$

che è (gesticolando un pò) la tesi. \square

Da questo deriva il **corollario** immediato che se $x_i \neq x_j \forall i \neq j$, allora $\det(V) \neq 0$, cioè V non è singolare.

Per trovare $p(x)$ basterà quindi risolvere il sistema:

$$Va = y$$

e poniamo:

$$p(x) = \sum_{i=0}^k a_i x^i$$

da cui come avevamo detto si ottiene un polinomio con $\deg(p(x)) \leq k$ (\leq perchè si potrebbe avere il coefficiente $a_k = 0$, e così via, cioè il grad è al più k).

Risolvere il sistema costa quindi, come avevamo visto, un qualcosa che è $\sim O(n^3)$, con particolare interesse al numero di condizionamento:

$$\mu(V) = |V| \cdot |V^{-1}|$$

che solitamente per la matrice di Vandermonde è particolarmente grande.

Ricordiamo che questo è un problema non da poco. Infatti, avevamo che il numero di condizionamento dava un limite alla variazione del resto del sistema in funzione della perturbazione delle soluzioni, cioè presa una \tilde{x} perturbata da una x soluzione di $Ax = b$ si aveva:

$$|x - \tilde{x}| \leq \mu(A) \cdot |A\tilde{x} - b|$$

Ad esempio, preso il sistema:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \epsilon \end{pmatrix}}_A \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_x = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ \epsilon \end{pmatrix}}_b$$

potremmo pensare di considerare la soluzione perturbata:

$$\tilde{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 + \delta \end{pmatrix}$$

Avremo quindi l'errore sulla soluzione:

$$|x - \tilde{x}|_2 = |\delta|$$

e l'errore sul resto:

$$|A\tilde{x} - b|_2 = \left| \begin{pmatrix} 0 \\ \delta\epsilon \end{pmatrix} \right|_2 = |\delta| \cdot \epsilon$$

che chiaramente cresce al crescere di ϵ .

Questo ci è problematico in quanto l'errore sulla soluzione può essere considerato come l'errore sui coefficienti del polinomio, e l'errore sul resto può essere considerato come l'errore di approssimazione della funzione, cioè:

$$|A\tilde{x} - b| = |p(x_i) - y_i|$$

Vediamo che in verità la situazione è sotto controllo se:

$$\mu(A) \leq \frac{1}{u}$$

per u precisione macchina, in quanto l'errore dato dal cattivo condizionamento diventa comparabile con la precisione macchina, comunque piuttosto piccola. Un altro caso di interesse è quello in cui i punti x_i sono equispaziati sulla circonferenza unitaria sul piano di Argand-Gauss. Vediamo che anche qui l'errore è mantenuto sotto controllo, e questo sarà infatti il caso che considereremo per la *trasformata (discreta) veloce di Fourier*.

Un'idea potrebbe essere quindi quella di cambiare la base dei monomi in:

$$B' = \{\phi_0(x), \phi_1(x), \dots, \phi_k(x)\}$$

e porre quindi:

$$p(x) = a_0\phi_0(x) + a_1\phi_1(x) + \dots + a_k\phi_k(x)$$

Il sistema alla sostituzione dei nodi continuerà ad essere lineare, in quanto:

$$p(x_i) = a_0\phi_0(x_i) + a_1\phi_1(x_i) + \dots + a_k\phi_k(x_i), \quad \forall i \in \{0, \dots, k\}$$

Potremo quindi impostare un altro sistema lineare:

$$\begin{pmatrix} \phi_0(x_0) & \phi_1(x_0) & \dots & \phi_k(x_0) \\ \vdots & & & \vdots \\ \phi_0(x_k) & \phi_1(x_k) & \dots & \phi_k(x_k) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_k \end{pmatrix}$$

Abbiamo quindi definito la matrice di Vandermonde "generalizzata" a:

Definizione 13.1: Matrice di Vandermonde

La matrice di Vandermonde su una certa base polinomiale $\{\phi_0(x), \dots, \phi_k(x)\}$ è definita come:

$$V_{ij} = \phi_j(x_i), \quad \forall i, j \in \{0, 1, \dots, k\}$$

Finora avevamo preso il caso della base canonica, cioè $\{1, x, \dots, x^k\}$, ma nessuno ci nega di prendere altre basi. Basi che ci saranno di particolare interesse, vedremo, sono la base di **Lagrange** e la base di **Newton**.

13.1.2 Base di Lagrange

Presi sempre i nostri nodi di interpolazione, decidiamo di scegliere la base guardando proprio tali nodi (anziché prenderla a priori, come avevamo fatto per Vandermonde).

Chiamiamo i polinomi di base $l_0(x), \dots, l_k(x)$, con:

$$l_i(x) = (x - x_0) \dots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \dots (x - x_k) = \prod_{j \neq i}^n (x - x_j)$$

cioè il prodotto dei fattori che si annullano in x_j per tutti gli $j \neq i$. Spesso poi decidiamo di normalizzare i polinomi di base, indicandoli come:

$$l_i(x) = \frac{(x - x_0) \dots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \dots (x - x_k)}{(x_i - x_0) \dots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \dots (x_i - x_k)} = \prod_{j \neq i}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

Otterremo quindi la base, diversa da quella canonica:

$$B_{\text{Lagrange}} = \{l_0(x), l_1(x), \dots, l_k(x)\}$$

Proviamo quindi ad imporre le condizione, con:

$$p(x) = a_0 l_0(x) + a_1 l_1(x) + \dots + a_k l_k(x)$$

valutando il polinomio in un punto x_i :

$$p(x_i) = y_i = a_0 l_0(x_i) + \dots + a_{i-1} l_{i-1}(x_i) + a_i l_i(x_i) + a_{i+1} l_{i+1}(x_i) + \dots + a_k l_k(x_i)$$

dove vediamo che, normalizzando, si conserva solo il termine in a_i , da cui immediatamente:

$$a_i = y_i$$

e:

$$p(x) = y_0 l_0(x) + y_1 l_1(x) + \dots + y_k l_k(x)$$

Possiamo quindi costruire il polinomio interpolante senza fare nessun conto, semplicemente prendendo la combinazione lineare a coefficienti y_i della base di lagrange l_i costruita sui nodi.

Vediamo quindi la forma della matrice di Vandermonde:

$$V_l = \begin{pmatrix} l_0(x_0) & l_1(x_0) & \dots & l_k(x_0) \\ \vdots & & & \vdots \\ l_0(x_k) & l_1(x_k) & \dots & l_k(x_k) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

da cui abbiamo la conferma: si ricava direttamente l'identità e quindi $Va = y$ diventa $Ia = y \implies a = y$.

13.1.3 Esempio: interpolazione di Lagrange

A scopo di esempio, vediamo l'interpolazione di Lagrange della funzione:

$$f(x) = \cos\left(\frac{x}{3}\right) \sin(2x)$$

con nodi equispaziati presi da -6 a 6 , con intervallo 1 .

Calcolando la funzione attraverso un software al computer, si otterrà la tabella di nodi:

x_j	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
y_j	-0.22	-0.05	-0.23	0.15	0.59	-0.86	0	0.86	-0.59	-0.15	0.23	0.05	0.22

Da cui il polinomio:

$$p_k(x) = -0.22l_0(x) - 0.05l_1(x) - 0.23l_2(x) + 0.15l_3(x) + 0.59l_4(x) - 0.86l_5(x) + 0.86l_6(x) \\ - 0.59l_7(x) - 0.15l_8(x) + 0.23l_9(x) + 0.05l_{10}(x) + 0.22l_{11}(x)$$

Vediamo quindi un grafico che mostra tale polinomio, sovrapposto alla funzione originale e ai nodi campionati:



Come vediamo, almeno nei punti intermedi l'interpolazione è piuttosto vicina, mentre ai punti estremi si notano degli artefatti non indifferenti (principalmente dati dal comportamento oscillatorio della $f(x)$).

13.1.4 Base di Newton

Vediamo quindi la base di Newton, che costruiamo come:

$$\begin{cases} n_0(x) = 1 \\ n_1(x) = x - x_0 \\ n_2(x) = (x - x_0)(x - x_1) \\ \vdots \\ n_k(x) = (x - x_0) \dots (x - x_{k+1}) \end{cases}$$

cioè ogni n_i dipende solo dai $\{x_0, \dots, x_{i-1}\}$ precedenti. Questo rende più facile l'aggiornamento se si aggiunge un nuovo nodo in x_{k+1} , per cui basterà dire:

$$n_{k+1}(x) = (x - x_0) \dots (x - x_k) = n_k(x)(x - x_k)$$

Otterremo quindi la base:

$$B_{\text{Newton}} = \{n_0(x) = 1, n_1(x), \dots, n_k(x)\}$$

e la matrice di Vandermonde:

$$V_n = \begin{pmatrix} n_0(x_0) & n_1(x_0) & \dots & n_k(x_0) \\ \vdots & & & \vdots \\ n_0(x_k) & n_1(x_k) & \dots & n_k(x_k) \end{pmatrix}$$

con:

$$p(x) = a_0 n_0(x) + a_1 n_1(x) + \dots + a_k n_k(x)$$

e nel nodo:

$$p(x_i) = y_i \Leftrightarrow Va = y$$

dallo svolgimento della matrice di Vandermonde si ha che la prima colonna è tutta di 1, e il resto della matrice è triangolare inferiore:

$$V_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & ? & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & ? & \dots & ? \end{pmatrix}$$

e quindi ogni a_i dipende solo dagli $\{y_0, \dots, y_i\}$.

Vedremo la struttura specifica degli a_i che formano il polinomio interpolante alla prossima lezione.

14 Lezione del 11-04-25

Riprendiamo il discorso dell'interpolazione polinomiale nella prospettiva di arrivare all'interpolazione di Newton, a cui abbiamo accennato alla scorsa lezione.

Avevamo detto di avere $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_k, y_k)$, cioè $k+1$ punti **distinti**, cioè con $x_i \neq x_j, \forall i \neq j$, tali per cui volevamo interpolarli con un polinomio di grado k . Questo esisteva ed era unico appunto sotto l'ipotesi di punti distinti.

Avevamo quindi visto le possibili base per la realizzazione di tale polinomio, di *Vandermonde* e di *Lagrange*.

14.1 Differenze divise

Avevamo poi introdotto la base di **Newton**, che definiva il polinomio del tipo:

$$p_k(x) = \sum_{j=0}^k a_j n_j(x) = \sum_{j=0}^k f[x_0, \dots, x_j] n_j(x)$$

con:

$$\begin{cases} n_0(x) = 1 \\ n_1(x) = x - x_0 \\ n_2(x) = (x - x_0)(x - x_1) \\ \vdots \\ n_k(x) = (x - x_0)\dots(x - x_{k+1}) \end{cases}$$

Per la precisione, eravamo rimasti in attesa di definire i coefficienti a_j del polinomio interpolante.

Cerchiamo di trovarli sfruttando la matrice di Vandermonde generalizzata (definizione 13.1):

$$V = \begin{pmatrix} n_0(x_0) & n_1(x_0) & n_2(x_0) & \dots & n_k(x_0) \\ n_0(x_1) & n_1(x_1) & n_2(x_1) & \dots & n_k(x_1) \\ n_0(x_2) & n_1(x_2) & n_2(x_2) & \dots & n_k(x_2) \\ \vdots & & & & \vdots \\ n_0(x_k) & n_1(x_k) & n_2(x_k) & \dots & n_k(x_k) \end{pmatrix}$$

Applicando la definizione di base di Newton, si ottiene una forma del tipo:

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & & & \dots & 0 \\ 1 & x_1 - x_0 & 0 & & \dots & 0 \\ 1 & x_2 - x_0 & (x_2 - x_0)(x_2 - x_1) & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ 1 & x_k - x_0 & (x_k - x_0)(x_k - x_1) & \dots & (x_k - x_0)(x_k - x_1)\dots(x_k - x_{k-1}) \end{pmatrix}$$

cioè triangolare inferiore, e quindi risolvibile per sostituzione in avanti, imponendo:

$$Va = y \Leftrightarrow V \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_k \end{pmatrix}$$

Svolgendo un paio di passaggi nella sostituzione in avanti, si ha:

$$\begin{cases} a_0 = y_0 \\ y_0 + a_1(x_1 - x_0) = y_1 \implies a_1 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} \\ y_0 + (x_2 - x_0)\frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} + (x_2 - x_0)(x_2 - x_1)a_2 = y_2 \implies a_2 = \frac{\frac{y_2 - y_0}{x_2 - x_0} - \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}}{x_2 - x_1} \end{cases}$$

Cioè si nota una forma comune per i coefficienti a_j

Questi coefficienti, che indichiamo con $a_j = f[x_0, \dots, x_j] \forall j$ si definiscono quindi per *ricorsione*, e prendono il nome **differenze divise**. Definiamo quindi la formula di ricorrenza:

Definizione 14.1: Differenza divisa

Data una funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, e dati $x_0, \dots, x_{k-1} \in \mathbb{R}$, con $x_i \neq x_j \forall i \neq j$, vogliamo una funzione $f[x]$ che rispetti:

$$\begin{cases} f[x] = f(x), & k = 0 \\ f[x_0, x] = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, & k = 1 \\ f[x_0, x_1, x] = \frac{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}}{x - x_1}, & k = 2 \\ f[x_0, \dots, x_{k-1}, x] = \frac{f[x_0, \dots, x] - f[x_0, \dots, x_{k-1}]}{x - x_{k-1}}, & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Chiamiamo questa funzione differenza divisa e la indichiamo come $f[x_0, \dots, x]$.

Le differenze divise ricordano la forma del *rapporto incrementale*, e anzi corrispondono esattamente a questo per $k = 1$, mentre per $k > 1$ si può pensare ad un'approssimazione "grezza", o meglio *finita*, delle derivate di ordine k , cioè:

$$\begin{cases} k = 0 : & f[x] = f(x) \\ k = 1 : & f[x_0, x] = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \approx \frac{df}{dx}(x_0) \\ k = ? : & f[x_0, \dots, x_{k-1}, x] = \frac{f[x_0, \dots, x] - f[x_0, \dots, x_{k-1}]}{x - x_{k-1}} \approx \frac{d^{k-2}f}{dx^{k-2}}(x_0) \end{cases}$$

14.1.1 Proprietà delle differenze divise

Possiamo trovare le seguenti proprietà delle differenze divise:

1. $\forall P$ permutazione $\{i_0, \dots, i_k\}$ di $\{0, \dots, k\}$ vale:

$$f[x_0, x_1, \dots, x_k] = f[x_{i_0}, x_{i_1}, \dots, x_{i_k}]$$

cioè una permutazione dei $0, \dots, k$ non cambia la differenza divisa;

2. $f[x_0, \dots, x_{k-1}, x]$ è una funzione non definita in x_0, \dots, x_{k-1} . Tuttavia, se $f \in C^1(I)$ con I contenente x_0, \dots, x_k , allora è prolungabile per continuità su tale intervallo;
3. Se f è non solo C^1 , ma $f \in C^k(I)$, allora esiste ϵ tale che:

$$\epsilon \in \left[\min_{0 \leq i \leq k} x_i, \max_{0 \leq i \leq k} x_i \right]$$

tale che:

$$f[x_0, \dots, x_k] = \frac{f^{(k)}(\epsilon)}{k!}$$

Questa è una conseguenza del teorema di Lagrange.

14.1.2 Calcolo delle differenze divise

Esiste un metodo piuttosto schematico per il calcolo delle differenze divise. Dati $k + 1$ punti di interpolazione, si possono calcolare le differenze divise fino all'ordine k secondo questo schema (posto $k = 3$), detto **quadro delle differenze divise**:

x	$f(x)$	DD1	DD2	DD3
x_0	$f(x_0)$	//	//	//
x_1	$f(x_1)$	$f[x_0, x_1]$	//	//
x_2	$f(x_2)$	$f[x_0, x_2]$	$f[x_0, x_1, x_2]$	//
x_3	$f(x_3)$	$f[x_0, x_3]$	$f[x_0, x_2, x_3]$	$f[x_0, x_1, x_2, x_3]$

Cioè a ogni passaggio completiamo una riga, da sinistra verso destra, con le differenze divise note a quel passaggio. Notiamo che in verità le differenze divise che si trovano sulla diagonale sono le sole che compaiono effettivamente nel polinomio di Newton.

Supponendo di scrivere gli elementi della tabella come le entrate di una matrice $A = a_{ij}$ triangolare inferiore, per calcolare una sua entrata a_{ij} la formula da applicare è la seguente:

$$a_{ij} = \frac{a_{i,j-1} - a_{j-1,j-1}}{x_i - x_{j-1}}$$

Poniamo infatti A :

$$A = \begin{pmatrix} f(x_0) & & & & 0 \\ f(x_1) & f[x_0, x_1] & & & \\ \vdots & f[x_0, x_2] & f[x_0, x_1, x_2] & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \\ f(x_k) & f[x_0, x_k] & f[x_0, x_1, x_k] & \dots & f[x_0, x_1, \dots, x_k] \end{pmatrix}$$

14.1.3 Esempio: quadro delle differenze divise

Vediamo un caso pratico di quadro risolto:

x	$f(x)$	DD1	DD2	DD3
0	3	//	//	//
1	8	5	//	//
2	15	6	1	//
3	17	11	2	$\frac{1}{2}$

A questo punto il polinomio sarà:

$$\begin{aligned} p_3(x) &= f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) + f[x_0, x_1, x_2, x_3](x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) \\ &= 3 + 5(x - 0) + 1(x - 0)(x - 1) + \frac{1}{2}(x - 0)(x - 1)(x - 2) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 5x + 3 \end{aligned}$$

Osserviamo che, nel caso in cui gli elementi di una colonna delle differenze divise siano tutti uguali, gli elementi delle colonne successive sono tutti nulli, e in particolare il grado del polinomio di interpolazione p_k sarà p_i con i l'ultima colonna non nulla (cioè l'ordine dell'ultima differenza divisa non nulla).

14.1.4 Esempio: colonne nulle nel quadro

Vediamo ad esempio il quadro delle differenze divise dove troviamo la situazione:

x	$f(x)$	DD1	DD2	DD3	DD4
0	5	//	//	//	//
-1	3	2	//	//	//
2	3	-1	-1	//	//
-2	-9	7	-5	1	//
3	11	2	0	1	0

Come vediamo, alla colonna DD3 le differenze divise sono 1 e 1, ergo la differenza divisa in DD4 è nulla. Questo significherà che il polinomio interpolante, sebbene sono stati presi $k + 1 = 5$ punti, da cui ci aspetteremo un polinomio di grado $k = 4$, ha invece grado 3, cioè è:

$$p_2(x) = 5 + 2(x - 0) - 1(x - 0)(x + 1) + 1(x - 0)(x + 1)(x - 2) = x^3 - 2x^2 - x + 5$$

Osserviamo infine che data una tabella di valori $(x_0, y_0), \dots, (x_k, y_k)$ da interpolare, possiamo riordinarli come vogliamo nel quadro delle differenze divise. Questo può essere utile a semplificare i calcoli.

14.1.5 Esempio: riordinamento dei valori

Poniamo di avere i seguenti dati:

x	$f(x)$
0	2
1	1
α	4
-1	$3\alpha + 1$
3	11

con $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1, -1, 3\}$ e di chiederci quale deve essere il valore di α perché il polinomio interpolante abbia grado minimo.

Vediamo quindi di riordinare i dati in modo che i termini dipendenti da α vadano a finire in fondo alla tabella:

x	$f(x)$	DD1	DD2	DD3	DD4
0	2	//	//	//	//
1	1	-1	//	//	//
3	11	3	2
-1	$3\alpha + 1$	$1 - 3\alpha$	$\frac{3\alpha - 2}{2}$
α	4	$\frac{2}{\alpha}$	$\frac{2 + \alpha}{\alpha(\alpha - 1)}$

Alla colonna DD1 non abbiamo speranza di soddisfare la condizione di colonna tutta uguale (ci sono -1 e 3), mentre alla colonna DD2 possiamo provare ad imporre:

$$\begin{cases} \frac{3\alpha - 2}{2} = 2 \implies \alpha = 2 \\ \frac{2 + \alpha}{\alpha(\alpha - 1)} = 2 \implies \alpha = 2 \end{cases}$$

che quindi, per pura fortuna, corrisponde. Possiamo allora prendere $\alpha = 2$ e completare il quadro:

x	$f(x)$	DD1	DD2	DD3	DD4
0	2	//	//	//	//
1	1	-1	//	//	//
3	11	3	2	//	//
-1	$3\alpha + 1$	$1 - 3\alpha$	2	0	//
α	4	$\frac{2}{\alpha}$	2	0	0

da cui il polinomio al solo grado 2:

$$p_2(x) = 2 - x + 2x(x - 1) = 2x^2 - 3x + 2$$

14.1.6 Esempio: interpolazione di Newton

A scopo di esempio, vediamo l'interpolazione di Newton della funzione:

$$f(x) = \frac{x^3}{30} - \cos\left(\frac{3}{2}x\right)$$

Approssimata secondo la tabella di nodi:

x_j	-5	-4	-1.9	0	2.3	3.5	5
y_j	-4.51	-3.09	0.73	-1	1.36	0.92	3.82

Il polinomio si trova quindi prendendo le basi di Newton $n_j(x)$ e calcolando le differenze divise, come abbiamo visto finora:

x	$f(x)$	DD1	DD2	DD3	DD4	DD5	DD6
-5	-4.51	//	//	//	//	//	//
-4	-3.09	1.42	//	//	//	//	//
-1.9	0.73	1.69	0.13	//	//	//	//
0	-1	0.7	-0.18	-0.16	//	//	//
2.3	1.36	0.8	-0.1	-0.05	0.05	//	//
3.5	0.92	0.64	-0.1	-0.04	0.03	-0.01	
5	3.82	0.83	-0.06	-0.03	0.03	~ 0	~ 0

Da cui il polinomio:

$$p_k(x) = -4.51n_0(x) + 1.42n_1(x) + 0.13n_2(x) - 0.16n_3(x) + 0.05n_4(x) - 0.01n_5(x)$$

Vediamo quindi un grafico che mostra tale polinomio, sovrapposto alla funzione originale e ai nodi campionati:



Il grafico è stato realizzato con Desmos (<https://www.desmos.com/calculator/tavjyzgpd0>), assieme allo scorso esempio sull'interpolazione di Lagrange (<https://www.desmos.com/calculator/w2tx5n7jtp>, esempio 13.1.3). Il calcolo al computer ci permette chiaramente di ottenere risultati più precisi, ad esempio in questo caso a valutare il coefficiente della base di sesto grado (che svanisce approssimando alle prime 2 cifre decimali).

14.2 Errore nell'approssimazione polinomiale

Veniamo quindi alla valutazione dell'errore. Vale il seguente teorema:

Teorema 14.1: Errore dell'approssimazione polinomiale

Presi $k + 1$ punti x_0, \dots, x_k con $x_i \neq x_j \forall i \neq j$. Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tale che $f \in C^{k+1}(I)$ con $I \subseteq \mathbb{R}$ contenente x_0, \dots, x_k . Se $p_k(x)$ è il polinomio di interpolazione di grado al più k che interpola i punti $(x_0, f(x_0), \dots, (x_k, f(x_k)))$ allora riguardo all'errore vale:

$$f(x) - p_k(x) = \Pi(x) \frac{f^{(k+1)}(\xi)}{(k+1)!}$$

con:

$$\Pi(x) = \prod_{j=0}^k (x - x_j)$$

per un certo ξ tale che:

$$\xi \in \left[\min_{0 \leq i \leq k} x_i \cup x, \max_{0 \leq i \leq k} x_i \cup x \right]$$

Osserviamo quindi che conoscendo una stima di $|f^{k+1}|$ e di $|\Pi(x)|$ si può provare a stimare l'errore del polinomio di interpolazione quando si valuta $p_k(x)$ fuori dai nodi $\{x_j\}_{j=0}^k$.

14.3 Considerazioni ulteriori sull'approssimazione polinomiale

Vediamo quindi alcune nozioni che riguardano sia l'approssimazione di Newton che quella di Lagrange, che abbiamo visto rispettivamente in 13.1.4 e 14.1, e 13.1.2 (e che riguardano in verità anche il metodo di approssimazione di Vandermonde visto in 13.1.1).

14.3.1 Riassunto fra base di Newton e base di Lagrange

Facciamo quindi un riassunto confrontando la base di Newton e la base di Lagrange.

	Newton	Lagrange
Base	$n_j(x) = (x - x_0) \dots (x - x_{j-1})$	$l_j(x) = \prod_{i \neq j}^k \frac{x - x_i}{x_j - x_i}$
Coef.	$f[x_0, \dots, x_j]$	$f(x_j) = y_j$
	Con la base di Newton, se si è calcolato $p_k(x)$ e si vuole $p_{k+1}(x)$, basta calcolare m_{k+1} e $f[x_0, \dots, x_k]$ da $f[x_0, \dots, x_{k-1}]$	Con la base di Lagrange, per fare la stessa cosa bisogna ricalcolare tutti gli $e_j(x)$
	Il grado del polinomio si nota facilmente	Per trovare il grado del polinomio bisogna espandere nella base dei monomi

Viene da sé che i metodi di Vandermonde, Lagrange e Newton restituiscono tutti lo stesso polinomio (se non in forma algebricamente diversa), in quanto il polinomio interpolante di grado minimo è l'unico che passa per i punti (x_j, y_j) forniti.

14.3.2 Fenomeno di Runge

Vediamo un fenomeno che accumuna tutti i tipi di approssimazione polinomiale: presa una certa approssimazione di grado k di una funzione $f(x)$, quindi un polinomio $p(x)$ passante per $k + 1$ punti campionati da $f(x)$, si potrebbe pensare che aumentando il valore di k si otterrebbero approssimazioni via via più accurate. Questo è giusto per quanto riguarda i punti interni, ma riguardo agli estremi dell'intervallo di approssimazione notiamo che la funzione di errore $r(x) = p(x) - f(x)$ ha un errore costante se non addirittura crescente al crescere di k .

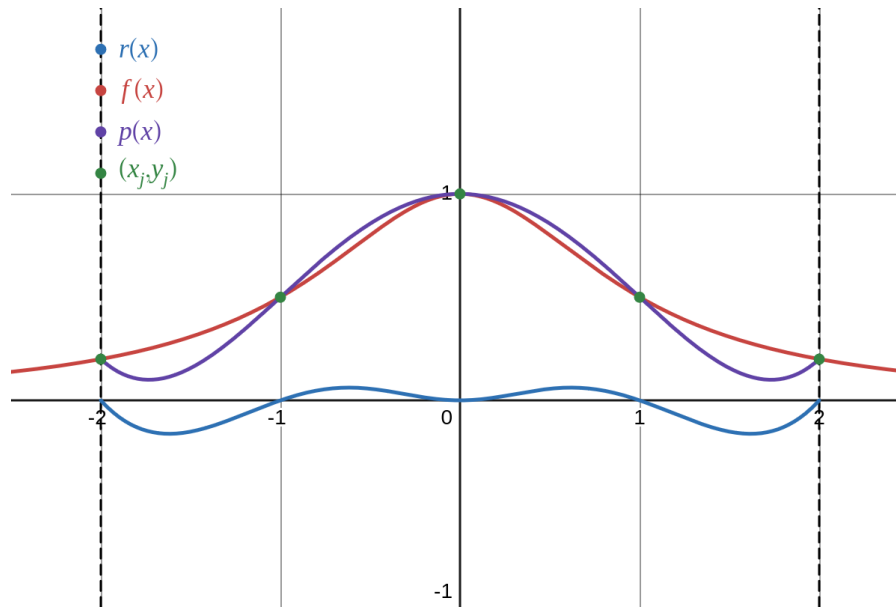
Prendiamo ad esempio la funzione:

$$f(x) = \frac{1}{1 + x^2} \quad (\text{versiera di Agnesi})$$

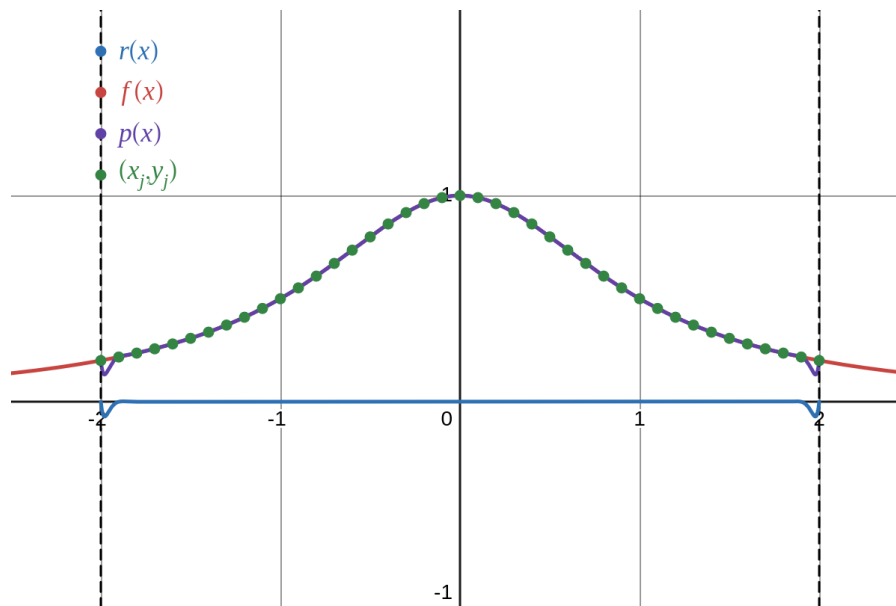
interpolata fra -2 e 2 ad intervalli regolari, quindi preso k interpolata sui nodi:

$$x_k = -2 + \frac{4}{k}i, \quad i = 0, 1, \dots, k$$

Con $k = 4$, si ottiene il seguente polinomio interpolante:



Aumentando il grado a $k = 40$, quindi moltiplicando per 10, si ottiene invece il polinomio interpolante:



che è sì più accurato nei punti interni, ma ha comunque un certo errore in corrispondenza degli estremi $x = -2$ e $x = 2$.

Si può dimostrare che questo fenomeno permane al crescere di k , ergo aumentare il grado non corrisponde sempre a migliorare l'accuratezza dell'approssimazione.

14.3.3 Nodi di Chebyshev

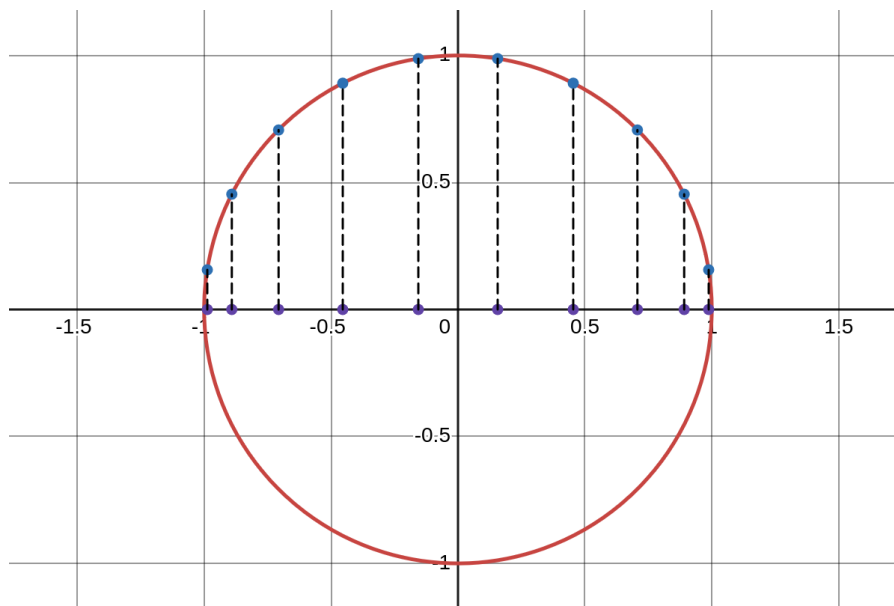
Un modo per migliorare l'accuratezza delle approssimazioni polinomiali, e soprattutto per evitare il fenomeno di Runge in prossimità degli estremi, può essere quello di cambiare i nodi presi, usando i cosiddetti **nodi di Chebyshev**.

Definizione 14.2: Nodi di Chebyshev

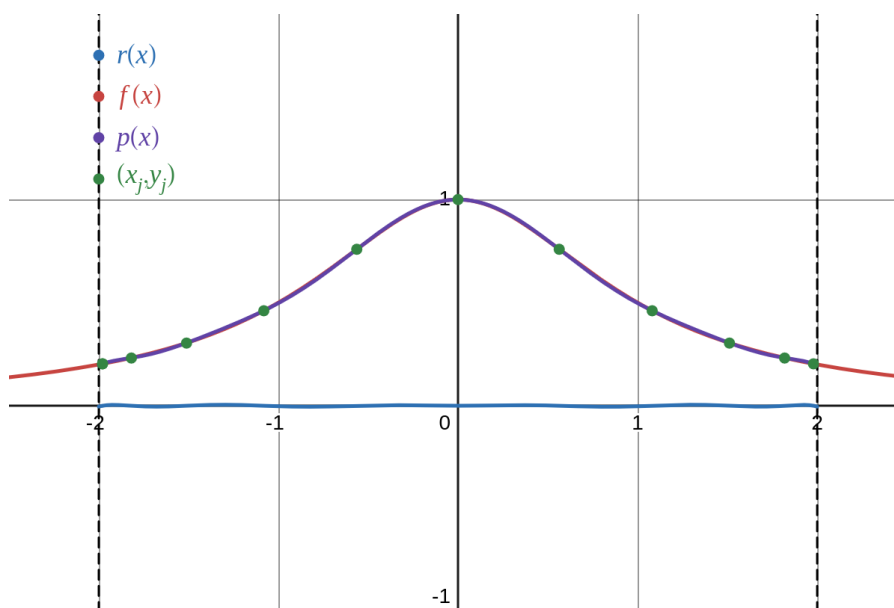
Si chiamano nodi di Chebyshev unitari gli n punti x_k :

$$x_k = \cos \left(\frac{\left(K + \frac{1}{2}\right) \pi}{n_p} \right), \quad k = 0, \dots, n-1$$

I nodi di Chebyshev corrispondono alle proiezioni sull'asse x di punti equispaziati sulla parte superiore di una circonferenza unitaria, cioè sul grafico:



Utilizzando i nodi di Chebyshev nel calcolo del polinomio interpolante, si usano risultati molto più accurati. Ad esempio, per l'approssimazione della stessa curva del paragrafo scorso, si ottiene che già con $k = 10$ il grafico ha la aspetto:



da dove notiamo quindi che l'errore, soprattutto vicino agli estremi, è significativamente ridotto.

14.4 Interpolazione osculatoria di Hermite

Vediamo un altro metodo per interpolare polinomi. Supponiamo di conoscere non soltanto ai nodi il valore della funzione, ma anche il valore della sua derivata. In questo caso potremo costruire un polinomio in cui le valutazioni e quelle derivata equivalgono rispettivamente ai valori di f e f' . Questo potrebbe essere utile nel caso in cui conosciamo sia la posizione che la velocità di un corpo in certi istanti e vogliamo approssimarne la traiettoria.

Definiamo quindi:

Definizione 14.3: Polinomio interpolante di Hermite

Dati $x_0, \dots, x_k \in I \subseteq \mathbb{R}$ e $2k + 2$ valori $\{f(x_0), \dots, f(x_k)\}$ e $\{f'(x_0), \dots, f'(x_k)\}$ di una certa funzione $f \in C^1(I)$, si dice polinomio interpolante di Hermite, per f coi nodi x_0, \dots, x_k , il polinomio $H_{2k+1}(x)$ di grado al più $2k + 1$ tale che:

$$H_{2k+1}(x_j) = f(x_j), \quad H'_{2k+1}(x_j) = f'(x_j), \quad \forall j = 0, \dots, k$$

Varrà quindi il seguente teorema:

Teorema 14.2: Esistenza del polinomio interpolante di Hermite

Se $x_i \neq x_j \forall i \neq j$ allora esiste ed è unico il polinomio di Hermite H_{2k+1} per $f \in C^1(I)$.

La dimostrazione di unicità si ha ipotizzando, per assurdo, che esista un secondo polinomio di hermite S_{2k+1} . A questo punto si potrà definire la funzione di errore:

$$R(x) = H_{2k+1}(x) - S_{2k+1}(x)$$

Questa dovrà annullarsi fino al primo grado in x_0, \dots, x_k , per cui dovrà essere divisibile per:

$$Q(x) = (x - x_0)^2 \dots (x - x_k)^2$$

Questo però significherebbe che $R(x)$, e quindi H_{2k+1} e S_{2k+1} , dovrebbero essere almeno di grado $2k + 2$ (il grado di $Q(x)$), che viola le ipotesi. \square

Vediamo allora come trovare il polinomio H_{2k+1} vero e proprio. Si potrebbe formulare un sistema lineare come è stato fatto nel caso della base canonica, che dava la matrice standard di Vandermonde.

In questo caso partiremo dall'ipotizzare riguardo a H_{2k+1} :

$$\deg(H_{2k+1}) = 2k + 1, \quad H_{2k+1} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{2k+1}x^{2k+1} = \sum_{i=0}^{2k+1} a_i x^i$$

e quindi imporre le condizioni:

$$\begin{cases} a_0 + a_1x_0 + a_2x_0^2 + \dots + a_{2k+1}x_0^{2k+1} = f(x_0) \\ \vdots \\ a_0 + a_1x_k + a_2x_k^2 + \dots + a_{2k+1}x_k^{2k+1} = f(x_k) \\ a_1 + 2a_2x_0 + \dots + (2k+1)a_{2k+1}x_0^{2k} = f'(x_0) \\ \vdots \\ a_1 + 2a_2x_k + \dots + (2k+1)a_{2k+1}x_k^{2k} = f'(x_k) \end{cases}$$

da cui, volendo esprimere il sistema come $Va = y$, si ottiene la "matrice di Vandermonde":

$$V = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^{2k+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_k & x_k^2 & \dots & x_k^{2k+1} \\ 0 & 1 & 2x_0 & \dots & (2k+1)x_0^{2k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & 2x_k & \dots & (2k+1)x_k^{2k} \end{pmatrix}$$

Spesso, però, questo procedimento non conviene in quanto si incontrano gli stessi problemi di malcondizionamento che avevamo incontrato anche nella matrice standard di Vandermonde.

Tipicamente allora si procede in maniera analoga all'interpolazione di Lagrange, ma generalizzata per ottenere le condizioni sulle derivate. Più precisamente, cerchiamo un polinomio della forma:

$$H_{2k+1}(x) = \sum_{j=0}^k h_{0j}(x)f(x_j) + \sum_{j=0}^k h_{1j}(x)f'(x_j)$$

Avremo che $f(x_j)$ e $f'(x_j)$ sono chiaramente i dati del problema, che faranno da coefficienti, mentre $h_{0j}(x)$ e $h_{1j}(x)$ saranno polinomi di grado $2k+1$ tali che:

$$\begin{aligned} h_{0j}(x_i) &= \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}, \quad h'_{0j}(x_i) = 0 \quad \forall 0 \leq i \leq k \\ h_{1j}(x_i) &= 0, \quad h'_{1j}(x_i) = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \quad \forall 0 \leq i \leq k \end{aligned} \quad (3)$$

che possiamo interpretare come le condizioni imposte alle basi di Lagrange generalizzata al caso con la derivata prima.

Se valgono queste proprietà, infatti, si ha che:

$$H_{2k+1}(x_i) = \sum_{j=0}^k h_{0j}(x_i)f(x_j) + \sum_{j=0}^k h_{1j}(x_i)f'(x_j) = f(x_i) + 0$$

e rispetto alla derivata prima:

$$H'_{2k+1}(x_i) = \sum_{j=0}^k h'_{0j}(x_i)f(x_j) + \sum_{j=0}^k h'_{1j}(x_i)f'(x_j) = 0 + f'(x_i)$$

con in entrambi i casi, $\forall i = 0, \dots, k$.

Osserviamo che come nel caso dell'interpolazione standard, stiamo rinunciando a cercare una rappresentazione di H_{2k+1} nella base dei monomi $\{1, x, \dots, x^{2k+1}\}$ e cerchiamo invece un'espressione rispetto alla base:

$$B_{\text{Hermite}} = \{h_{01}(x), \dots, h_{0k}(x), h_{10}(x), \dots, h_{1k}(x)\}$$

in cui i coefficienti delle combinazioni lineari sono:

$$f(x_0), \dots, f(x_k), f'(x_0), \dots, f'(x_k)$$

Il problema si riconduce quindi a trovare $h_{0j}(x), h_{1j}(x) \forall j$ che soddisfino le proprietà (3).

L'idea parte dall'*ansatz* di cercare h_{0j} e h_{1j} della forma:

$$h_{0j} = (Ax + B)e_j^2(x), \quad h_{1j} = (Cx + D)e_j^2(x)$$

con $e_j(x)$ j -esimo polinomio in base di Lagrange, cioè:

$$e_j(x) = \prod_{i \neq j}^k \frac{x - x_i}{x_j - x_i}$$

Imponiamo quindi le proprietà (3) per ricavare A, B, C, D di ogni h_{0j} e h_{1j} .

- $h_{0j}(x)$: avremo che la proprietà di grado zero è sempre rispettata finché:

$$Ax_j + B = 1$$

in quanto $e_j^2(x_j)$ vale 1 o 0 esattamente come richiesto. Riguardo al primo grado, avremo invece:

$$h'_{0j}(x_j) = Ae_j^2(x_j) + 2(Ax_j + B)e_j(x_j)e'_j(x_j) = 0$$

dove si possono eliminare i termini $Ax_j + B$ e $e_j(x_j)$, e quindi:

$$A + 2e'_j(x_j) = 0 \implies A = -2e'_j(x_j)$$

sostituendo in $Ax_j + B$ si trova allora:

$$B = 1 + 2e'_j(x_j)x_j$$

da cui la funzione finale:

$$h_{0j} = (1 - 2e'_j(x_j)(x - x_j)) e_j^2(x)$$

- $h_{1j}(x)$: avremo che la proprietà di grado zero è sempre rispettata finché:

$$Cx_j + D = 0$$

in quanto $e_j^2(x_j)$ vale 1 soltanto in x_j , e lì vogliamo annullarlo. Riguardo al primo grado, avremo invece:

$$h'_{1j}(x) = Ce_j^2(x) + 2(Cx + D)e_j(x)e'_j(x) = 1$$

dove si possono fare le stesse semplificazioni di sopra, e quindi:

$$h'_{1j} = C e_j^2(x) \implies C = 1$$

sostituendo in $Cx_j + D$ si trova allora:

$$D = -x_j$$

da cui la funzione finale:

$$h_{1j}(x) = (x - x_j)e_j^2(x)$$

Abbiamo quindi ottenuto le due funzioni h_{0j} e h_{1j} :

$$\begin{cases} h_{0j}(x) = \left(1 - 2e'_j(x_j)(x - x_j)\right) e_j^2(x) \\ h_{1j}(x) = (x - x_j)e_j^2(x) \end{cases}$$

ossia il polinomio interpolante di Hermite avrà la forma:

$$H_{2k+1}(x) = \sum_{j=0}^k f(x_j) \left(1 - 2e'_j(x_j)(x - x_j)\right) e_j^2(x) + \sum_{j=0}^k f'(x_j)(x - x_j)e_j^2(x)$$

14.4.1 Esempio: raccordo di binari

Supponiamo di avere 2 binari e di volerli unire in maniera C^1 , ovvero di voler trovare un polinomio $H_3(x)$ tale che:

$$\begin{cases} H_3(0) = 0 \\ H_3(d) = L \end{cases}, \quad \begin{cases} H'_3(0) = 0 \\ H'_3(d) = S \end{cases}$$

Il polinomio dovrà essere di grado 3 (le due condizioni alle derivate contano nel calcolo del grado). Dobbiamo calcolare, prima di tutto, le basi di Lagrange:

$$e_0(x) = \frac{x-d}{d}, \quad e_1(x) = \frac{x}{d}$$

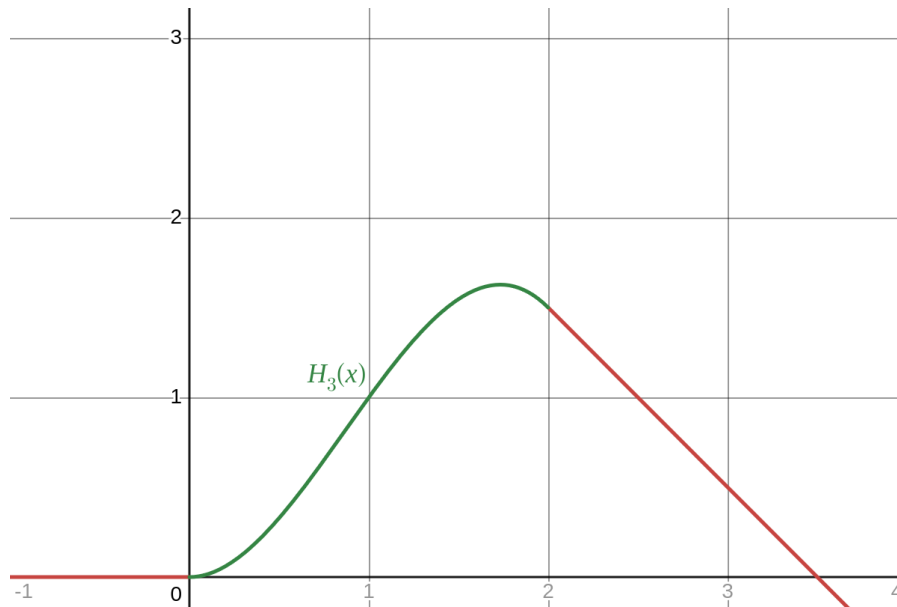
e sostituire quindi nelle formule per $h_{0j}(x)$ e $h_{1j}(x)$:

$$\begin{aligned} h_{00}(x) &= \left(1 + 2\frac{x}{d}\right) \frac{(x-d)^2}{d^2}, & h_{01}(x) &= \left(1 - 2\frac{x-d}{d}\right) \frac{x^2}{d^2} \\ h_{10}(x) &= x \frac{(x-d)^2}{d^2}, & h_{11}(x) &= (x-d) \frac{x^2}{d^2} \end{aligned}$$

per cui otterremo:

$$H_3(x) = 0 \cdot h_{00}(x) + L \cdot h_{01}(x) + 0 \cdot h_{10}(x) + S \cdot h_{11}(x) = L \left(1 - 2\frac{x-d}{d}\right) \frac{x^2}{d^2} + S(x-d) \frac{x^2}{d^2}$$

Vediamo un esempio grafico:



14.4.2 Errore nell'approssimazione di Hermite

Valutiamo quindi l'errore:

Teorema 14.3: Errore dell'approssimazione di Hermite

Data $f \in C^{2k+2}(I)$ allora:

$$f(x) - H_{2k+1}(x) = \Pi^2(x) \frac{f^{(2k+2)}(\xi)}{(2k+2)!}$$

con le stesse definizioni del 14.1.

15 Lezione del 14-04-25

Abbiamo finora presupposto di avere una serie di punti (x_j, y_j) , con $j = 0, \dots, k$, tratti da una funzione $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, cioè definita su un certo intervallo $[a, b]$, con $x_j \in [a, b]$ e $y_j = f(x_j) \in \mathbb{R}$. Da questi punti volevamo ricavare un polinomio $p(x)$ di grado al più k tale che questo interpolasse i punti, cioè verificasse:

$$p(x_j) = y_j$$

Da questa configurazione avevamo visto più metodi per il calcolo effettivo di $p(x)$, e avevamo ipotizzato che il modo migliore per aumentarne l'accuratezza, cioè ridurre il massimo della funzione:

$$r(x) = f(x) - p(x), \quad x \in [a, b]$$

fosse aumentare k .

Questo però aveva diversi aspetti negativi:

- Avere k maggiore significa aumentare i punti campionati, cosa che potrebbe non essere sempre fattibile;
- Non è detto che k maggiore aumenti l'accuratezza: avevamo visto infatti il *fenomeno di Runge* agli estremi, per cui il limiter dell'errore all'aumentare di k non era zero, cioè:

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} |r(x)| \neq 0$$

Avevamo visto un modo per migliorare questa situazione, che era usare nodi non equispaziati ma equispaziati su una circonferenza e proiettati sull'asse reale: questi erano i *nodi di Chebyshev*.

Abbiamo in generale, però, che aumentare il grado k non è la situazione ottimale, e si preferirebbe continuare con funzioni polinomiali di grado basso. Introduciamo per questo esatto motivo l'**interpolazione polinomiale a tratti**.

15.1 Interpolazione polinomiale a tratti

Decidiamo quindi di spezzare il dominio $[a, b]$ in sottointervalli di tipo $[x_{i-1}, x_i]$ e di usare in ogni sottointervallo polinomi di grado basso. In ogni sottointervallo consideriamo quindi polinomi $p_i(x)$ di grado al più $s < k$ tali che $p_i(x)$ interpola f in x_{i-1} e x_i , cioè:

$$p_i(x) : [x_{i-1}, x_i] \rightarrow \mathbb{R}, \quad p_i(x_{i-1}) = y_{i-1}, \quad p_i(x_i) = y_i$$

Vediamo quindi alcuni casi particolari di questo tipo di interpolazione al variare di s , presa la tabella di punti:

	x_j	y_j
P_0	-13	5
P_1	-4	-3
P_2	1	2
P_3	13	-1

15.1.1 $s = 1$: interpolazione lineare a tratti

Nel caso più semplice l'interpolazione lineare a tratti si riduce al definire una serie di rette che collegano ogni coppia di punti x_{i-1}, x_i , in forma:

$$l_i(x) = m_i(x) + q_i, \quad i = 1, \dots, k$$

In particolare, per i 4 punti che abbiamo preso vorremo definire:

$$l(x) = \begin{cases} l_1(x) = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} (x - x_0) + y_0, & x_0 \leq x < x_1 \\ l_2(x) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (x - x_1) + y_1, & x_1 \leq x < x_2 \\ l_3(x) = \frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2} (x - x_2) + y_2, & x_2 \leq x \leq x_3 \end{cases}$$

direttamente prendendo i fasci di rette in ogni punto x_0, x_1, x_2 (tutti tranne l'ultimo) e imponendo i coefficienti angolari.

Sul grafico, questo tipo di interpolazione (assieme alla derivata prima) avrà l'aspetto:



da dove si nota chiaramente che con questo approccio la continuità non è assicurata nemmeno al primo grado.

15.1.2 $s = 2$: spline quadratiche

Una soluzione più "liscia" si può avere sfruttando le cosiddette **spline quadratiche**:

Definizione 15.1: Spline quadratica

Dati $k + 1$ punti (x_j, y_j) in un intervallo $[a, b]$ con $j = 0, \dots, k$ si definisce spline quadratica ($s = 2$) relativa ai $k + 1$ punti la funzione definita a tratti $S_2(x)$ che rispetta le condizioni:

1. $S_2(x)$ è un polinomio di grado 2 se ristretto ad un intervallo $[x_{i-1}, x_i]$;
2. $S_2(x_i) = y_i$ per ogni punto $i = 0, \dots, k$;
3. $S_2(x) \in C^1([a, b])$.

In questi termini, l'interpolazione lineare a tratti vista finora rappresenta una sorta di interpolazione per "spline lineari", mentre nella prossima sezione vedremo le *spline cubiche*. Vediamo quindi che le condizioni imposte equivalgono a dire:

$$\begin{cases} p_i(x_i) = y_i, & i = 1, \dots, k \\ p_i(x_{i-1}) = y_{i-1}, & i = 1, \dots, k \\ p'_i(x_i) = p'_{i+1}(x_i), & i = 1, \dots, k-1 \end{cases}$$

cioè abbiamo complessivamente $3k - 1$ condizioni. Di contro, guardando alla prima condizione si ha che ogni tratto dell'interpolazione avrà forma:

$$q_i(x) = a_i x^2 + b_i x + c_i, \quad i = 1, \dots, k$$

cioè $3k$ parametri complessivi.

Visto che $3k$ parametri per $3k - 1$ condizioni sono troppi, dobbiamo introdurre un'altra condizione: diciamo che la derivata in x_0 deve essere uguale ad un valore fisso d_0 .

A questo punto basterà trovare a_i , b_i e c_i in funzione di x_{i-1} , x_i e la derivata in x_{i-1} (che chiamiamo d_{i-1}), che saranno:

$$\begin{cases} a_i = \frac{y_i - y_{i-1}}{(x_{i-1} - x_i)^2} + \frac{d_{i-1}}{x_{i-1} - x_i} \\ b_i = d_{i-1} - 2a_i x_{i-1} \\ c_i = y_i - a_i x_i^2 - b_i x_i \end{cases}$$

Calcolando tali valori per ognuno dei k tratti dell'interpolazione si trovano i parametri di ogni quadratica interpolante.

Facendo ciò sull'esempio di prima, preso $d_0 = -2$ e tracciando il grafico, si ha (assieme alla derivata prima e seconda):



da dove notiamo quindi di aver guadagnato la continuità al primo grado, ma ancora non al secondo. In verità le spline quadratiche non sono molto utili per via delle limitazioni che ci impongono, e vengono usate di rado in contesti reali. Passiamo quindi a polinomi di grado più alto, molto più di largo uso, cioè $s = 3$.

15.1.3 $s = 3$: spline cubica

Una soluzione ancora più "liscia" si può quindi avere sfruttando le cosiddette **spline cubiche**. Queste sono il tipo più comune di spline, e vengono usate in svariati contesti, fra cui ad esempio per tracciare linee "smussate" in computer grafica.

Definiamo quindi:

Definizione 15.2: Spline cubica

Dati $k + 1$ punti (x_j, y_j) in un intervallo $[a, b]$ con $j = 0, \dots, k$ si definisce spline cubica ($s = 3$) relativa ai $k + 1$ punti la funzione definita a tratti $S_3(x)$ che rispetta le condizioni:

1. $S_3(x)$ è un polinomio di grado 3 se ristretto ad un intervallo $[x_{i-1}, x_i]$;
2. $S_3(x_i) = y_i$ per ogni punto $i = 0, \dots, k$;
3. $S_3(x) \in C^2([a, b])$.

Vediamo quindi che le condizioni imposte equivalgono a dire:

$$\begin{cases} p_i(x_i) = y_i, & i = 1, \dots, k \\ p_i(x_{i-1}) = y_{i-1}, & i = 1, \dots, k \\ p'_i(x_i) + p'_{i+1}(x_i), & i = 1, \dots, k-1 \\ p''_i(x_i) + p''_{i+1}(x_i), & i = 1, \dots, k-1 \end{cases}$$

con una riga in più di condizioni rispetto al caso quadratico dato dal salto da continuità C^1 a C^2 , cioè abbiamo complessivamente $4k - 2$ condizioni. Di contro, guardando alla prima condizione si ha che ogni tratto dell'interpolazione avrà forma:

$$c_i(x) = a_i x^3 + b_i x^2 + c_i x + d_i, \quad i = 1, \dots, k$$

cioè $4k$ parametri complessivi.

Come nel caso quadratico, visto che $4k$ parametri per $4k - 2$ condizioni sono troppi, dovremo introdurre 2 nuove condizioni, che modificheranno il tipo di problema che andremo a risolvere:

- **Spline naturale:** si considera questo tipo di spline quando non si ha alcun tipo di informazione oltre i punti da interpolare. In questo caso si assume quindi:

$$p''_1(x_0) = p''_k(x_k) = 0$$

cioè derivata seconda nulla agli estremi di interpolazione $x_0 = a$ e $x_k = b$ di $[a, b]$;

- **Spline periodica:** quando si ritiene che la funzione da approssimare sia periodica, si possono adottare le condizioni:

$$p''_1(x_0) = p''_k(x_k), \quad p'_1(x_0) = p'_k(x_k)$$

- **Spline vincolata:** infine, se si conoscono le derivate prime negli estremi di interpolazione $x_0 = a$ e $x_k = b$ si possono imporre le condizioni:

$$p'_1(x_0) = f'(x_0), \quad p'_k(x_k) = f'(x_k)$$

Un altro tipo di spline vincolata potrebbe essere quello da usare nel caso in cui si conoscono derivata prima e seconda nel primo estremo di interpolazione $x_0 = a$. In questo caso si impongono le condizioni:

$$p'_1(x_0) = f'(x_0) \quad p''_1(x_0) = f''(x_0)$$

Questo equivale al caso che abbiamo considerato per la spline quadratica (chiamando $f'(x_0) = d_0$ e $f''(x_0) = s_0$), salvo aver dovuto introdurre un ulteriore grado di derivazione.

In ogni caso, per punti equispaziati i può dimostrare il seguente teorema:

Teorema 15.1: Esistenza di spline cubiche

Presi x_0, \dots, x_k nodi equispaziati su un intervallo $[a, b]$, cioè:

$$x_i = a + ih, \quad h = \frac{b-a}{k}, \quad i = 0, \dots, k$$

e le valutazioni y_0, \dots, y_k di una certa funzione $f(x)$ nei nodi x_i , esiste unica la spline naturale $S_3(x)$ passante per i punti (x_i, y_i) , $i = 0, \dots, k$.

Vediamo quindi due procedimenti di calcolo per due dei casi appena definiti, cioè il primo (spline naturale) e l'ultimo (spline vincolata in x_0). Le formule per il calcolo degli altri due casi saranno in qualche modo ricavate in modo equivalente a quelle del primo caso.

- Un primo approccio può essere quello di risolvere ognuno dei k sottoproblemi di interpolazione fra x_{i-1} e x_i applicando l'interpolazione di Hermite, e portandosi dietro le derivate prime m_i (che ancora non conosciamo), interpretate come $f'(x_i)$. Si determinano quindi gli m_i imponendo le condizioni sulla derivata seconda agli estremi (abbiamo detto la *condizione naturale*).

Presi quindi punti equispaziati come sopra, cioè:

$$x_i = a + ih, \quad h = \frac{b-a}{k}, \quad i = 0, \dots, k$$

questo procedimento porta alla formazione di spline del tipo:

$$p_i(x) = \left[f(x_{i-1}) + \left(m_{i-1} + \frac{2f(x_{i-1})}{h} \right) (x - x_{i-1}) \right] \left(\frac{x - x_{i-1}}{h} \right)^2 + \left[f(x_i) + \left(m_i - \frac{2f(x_i)}{h} \right) (x - x_i) \right] \left(\frac{x - x_i}{h} \right)^2$$

direttamente dall'interpolazione di Hermite, con gli m_i soluzioni del seguente sistema lineare:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 4 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 1 & 4 & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_0 \\ m_1 \\ m_2 \\ \vdots \\ m_k \end{pmatrix} = \frac{3}{h} \begin{pmatrix} f(x_1) - f(x_0) \\ f(x_2) - f(x_0) \\ f(x_3) - f(x_1) \\ \vdots \\ f(x_{k-1}) - f(x_{k-2}) \\ f(x_k) - f(x_{k-1}) \end{pmatrix}$$

da dove si nota la matrice A a "striscia", data dall'interdipendenza fra i tratti della spline.

Per la dimostrazione seguiremo i passaggi in quest'ordine:

1. Prima troviamo una forma per il polinomio interpolante di Hermite $p_i(x)$ nei nodi x_{i-1} e x_i , noti i valori y_{i-1} , y_i e le derivate prime m_{i-1} , m_i ;
2. Poi calcoliamo la forma delle derivate seconde del polinomio interpolante agli estremi, in modo da preparare il prossimo passaggio;

3. Imponiamo le condizioni della spline cubica naturale, cioè derivate seconde agli estremi nulle e continuità C^2 nei punti intermedi.

Procediamo quindi con la dimostrazione.

1. Vorremo interpolare ogni tratto x_{i-1}, x_i con un polinomio $p_i(x)$ di terzo grado che rispetti:

$$\begin{cases} p_i(x_{i-1}) = f(x_{i-1}) \\ p_i(x_i) = f(x_i) \\ p_i'(x_{i-1}) = m_{i-1} \\ p_i'(x_i) = m_i \end{cases}$$

dove i $k + 1$ valori m_0, m_1, \dots, m_k sono le derivate prime che ancora non conosciamo. Avremo quindi da Hermite che vorremmo prendere le basi di Lagrange, che posto $x_i - x_{i-1} = h$ (come si ha da nodi equispaziati) sono:

$$e_{i-1}(x) = \frac{x - x_i}{x_{i-1} - x_i} = -\frac{x - x_i}{h}, \quad e_i(x) = \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} = \frac{x - x_{i-1}}{h}$$

di cui calcoliamo subito le derivate, in quanto ci serviranno in seguito:

$$e'_{i-1}(x) = -\frac{1}{h}, \quad e'_i(x) = \frac{1}{h}, \quad e''_{i-1}(x) = e''_i(x) = 0$$

Avremo quindi le basi di Hermite:

$$h_{0,i-1}(x) = (1 - 2e'_{i-1}(x_{i-1})(x - x_{i-1}))e_{i-1}^2(x) = \left(1 + 2\frac{x - x_{i-1}}{h}\right)\left(\frac{x - x_i}{h}\right)^2$$

$$h_{0,i}(x) = (1 - 2e'_i(x_i)(x - x_i))e_i^2(x) = \left(1 - 2\frac{x - x_i}{h}\right)\left(\frac{x - x_{i-1}}{h}\right)^2$$

$$h_{1,i-1}(x) = (x - x_{i-1})e_{i-1}^2(x) = (x - x_{i-1})\left(\frac{x - x_i}{h}\right)^2$$

$$h_{1,i}(x) = (x - x_i)e_i^2(x) = (x - x_i)\left(\frac{x - x_{i-1}}{h}\right)^2$$

da cui il polinomio interpolante finale, raccogliendo le basi quadrate comuni e qualche altro termine, è:

$$\begin{aligned} p_i(x) &= h_{0,i-1}(x)y_{i-1} + h_{0,i}(x)y_i + h_{1,i-1}(x)m_{i-1} + h_{1,i}(x)m_i \\ &= \left(1 + 2\frac{x - x_{i-1}}{h}\right)\left(\frac{x - x_i}{h}\right)^2 y_{i-1} + \left(1 - 2\frac{x - x_i}{h}\right)\left(\frac{x - x_{i-1}}{h}\right)^2 y_i \\ &\quad + (x - x_{i-1})\left(\frac{x - x_i}{h}\right)^2 m_{i-1} + (x - x_i)\left(\frac{x - x_{i-1}}{h}\right)^2 m_i \\ &= \left(y_{i-1} + \left(m_{i-1} + \frac{2y_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}\right)(x - x_{i-1})\right)\left(\frac{x - x_i}{x_i - x_{i-1}}\right)^2 \\ &\quad + \left(y_i + \left(m_i - \frac{2y_i}{x_i - x_{i-1}}\right)(x - x_i)\right)\left(\frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}\right)^2 \end{aligned}$$

che posto $y_i = f(x_i)$ è esattamente quanto dato prima:

$$p_i(x) = \left[f(x_{i-1}) + \left(m_{i-1} + \frac{2f(x_{i-1})}{h} \right) (x - x_{i-1}) \right] \left(\frac{x - x_i}{h} \right)^2 \\ + \left[f(x_i) + \left(m_i - \frac{2f(x_i)}{h} \right) (x - x_i) \right] \left(\frac{x - x_{i-1}}{h} \right)^2$$

2. A questo punto resta da ricavare il sistema lineare, che è ciò che ci darà i valori degli m_i . Per fare ciò calcoliamo la derivata seconda del polinomio interpolante, partendo dal calcolare le derivate secondo delle singole basi di Hermite:

$$h''_{0,i-1}(x) = \frac{2}{h^3} (h + 6x - 2x_{i-1} - 4x_i)$$

$$h''_{0,i}(x) = \frac{2}{h^3} (h - 6x + 2x_i + 4x_{i-1})$$

$$h''_{1,i-1}(x) = \frac{1}{h^2} (6x - 2x_{i-1} - 4x_i)$$

$$h''_{1,i}(x) = \frac{1}{h^2} (6x - 2x_i - 4x_{i-1})$$

da cui:

$$p''_i(x) = \frac{2}{h^3} (h + 6x - 2x_{i-1} - 4x_i) y_{i-1} + \frac{2}{h^3} (h - 6x + 2x_i + 4x_{i-1}) y_i \\ + \frac{1}{h^2} (6x - 2x_{i-1} - 4x_i) m_{i-1} + \frac{1}{h^2} (6x - 2x_i - 4x_{i-1}) m_i$$

Ottenuta la derivata seconda del polinomio interpolante, calcoliamola nei punti x_{i-1} e x_i . Per x_{i-1} , ad esempio, si avrà:

$$p''_i(x_{i-1}) = \frac{2}{h^3} (h + 6x_{i-1} - 2x_{i-1} - 4x_i) y_{i-1} + \frac{2}{h^3} (h - 6x_{i-1} + 2x_i + 4x_{i-1}) y_i \\ + \frac{1}{h^2} (6x_{i-1} - 2x_{i-1} - 4x_i) m_{i-1} + \frac{1}{h^2} (6x_{i-1} - 2x_i - 4x_{i-1}) m_i \\ = \frac{2}{h^3} (h + 4x_{i-1} - 4x_i) y_{i-1} + \frac{2}{h^3} (h - 2x_{i-1} + 2x_i) y_i \\ + \frac{1}{h^2} (4x_{i-1} - 4x_i) m_{i-1} + \frac{1}{h^2} (2x_{i-1} - 2x_i) m_i \\ = \frac{2}{h^3} (h - 4h) y_{i-1} + \frac{2}{h^3} (h + 2h) y_i + \frac{1}{h^2} (-4h) m_{i-1} + \frac{1}{h^2} (-2h) m_i \\ = -\frac{6}{h^2} y_{i-1} + \frac{6}{h^2} y_i - \frac{4}{h} m_{i-1} - \frac{2}{h} m_i = \frac{6(y_i - y_{i-1})}{h^2} - \frac{4m_{i-1} + 2m_i}{h}$$

e con passaggi simili si calcola in x_i , per cui:

$$p''_i(x_{i-1}) = \frac{6(y_i - y_{i-1})}{h^2} - \frac{4m_{i-1} + 2m_i}{h}$$

$$p''_i(x_i) = \frac{2m_{i-1} + 4m_i}{h} - \frac{6(y_i - y_{i-1})}{h^2}$$

3. Avremo a questo punto da applicare le condizioni della spline cubica naturale, cioè derivata seconda nulla agli estremi:

$$\begin{cases} p_1''(x_0) = 0 \implies 2m_0 + m_1 = \frac{3}{h} (f(x_1) - f(x_0)) \\ p_k''(x_k) = 0 \implies 2m_k + m_{k-1} = \frac{3}{h} (f(x_k) - f(x_{k-1})) \end{cases}$$

e derivate seconde continue nei punti intermedi:

$$p_i''(x_i) = p_{i+1}''(x_i) \implies m_{i-1} + 4m_i + m_{i+1} = \frac{3}{h} f(x_{i+1}) - f(x_{i-1})$$

da cui il sistema lineare che corredeva la forma del polinomio di Hermite, e quindi la tesi. \square

- Se si vuole imporre il vincolo "a sinistra" della derivata prima e seconda, si può procedere in maniera analoga a quanto fatto nel caso quadratico, cioè prendere i tratti polinomiali:

$$c_i(x) = a_i x^3 + b_i x^2 + c_i x + d_i, \quad i = 1, \dots, k$$

e trovare gli a_i , b_i , c_i e d_i in funzione di x_{i-1} , x_i e le due derivate consecutive in x_{i-1} (che chiamiamo d_{i-1} e s_{i-1} , rispettivamente primo e secondo grado).

Visto che trovare direttamente i quattro problemi può essere difficile, decidiamo invece di trovare le 4 basi ortogonali b_1 , b_2 , b_3 e b_4 (di cui le prime 3 equivalenti a quelle di Hermite, e l'ultima corrispondente alla condizione derivata seconda in x_{i-1}), che rispettano quindi le condizioni:

$$\begin{aligned} b_1 : \begin{cases} b_1(x_{i-1}) = 1 \\ b_1(x_i) = 0 \\ b_1'(x_{i-1}) = 0 \\ b_1''(x_{i-1}) = 0 \end{cases}, \quad b_2 : \begin{cases} b_2(x_{i-1}) = 0 \\ b_2(x_i) = 1 \\ b_2'(x_{i-1}) = 0 \\ b_2''(x_{i-1}) = 0 \end{cases} \\ b_3 : \begin{cases} b_3(x_{i-1}) = 0 \\ b_3(x_i) = 0 \\ b_3'(x_{i-1}) = 1 \\ b_3''(x_{i-1}) = 0 \end{cases}, \quad b_4 : \begin{cases} b_4(x_{i-1}) = 0 \\ b_4(x_i) = 0 \\ b_4'(x_{i-1}) = 0 \\ b_4''(x_{i-1}) = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Queste si potranno ricavare, direttamente dall'imposizione delle condizioni, come:

1. $b_1(x, x_{i-1}, x_i) = a_{b1}(x_{i-1}, x_i)x^3 + b_{b1}(x_{i-1}, x_i)x^2 + c_{b1}(x_{i-1}, x_i)x + d_{b1}(x_{i-1}, x_i)$, con:
 - $a_{b1}(x_{i-1}, x_i) = \frac{1}{(x_{i-1} - x_i)^3}$;
 - $b_{b1}(x_{i-1}, x_i) = -3a_{b1}(x_{i-1}, x_i)x_{i-1}$;
 - $c_{b1}(x_{i-1}, x_i) = 3a_{b1}(x_{i-1}, x_i)x_{i-1}^2$;
 - $d_{b1}(x_{i-1}, x_i) = 1 - a_{b1}(x_{i-1}, x_i)x_{i-1}^3$.
2. Questa è banalmente $b_2(x, x_{i-1}, x_i) = 1 - b_1(x, x_{i-1}, x_i)$;
3. $b_3(x, x_{i-1}, x_i) = a_{b3}(x_{i-1}, x_i)x^3 + b_{b3}(x_{i-1}, x_i)x^2 + c_{b3}(x_{i-1}, x_i)x + d_{b3}(x_{i-1}, x_i)$, con:

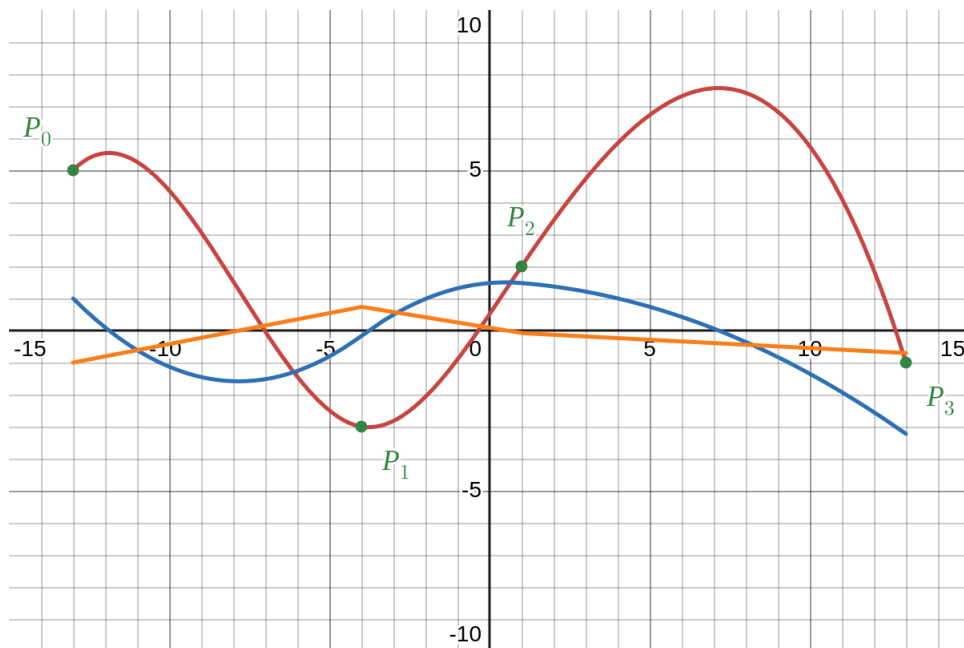
- $a_{b3}(x_{i-1}, x_i) = \frac{x_{i-1}-x_i}{(x_i-x_{i-1})^3};$
 - $b_{b3}(x_{i-1}, x_i) = -3a_{b3}(x_{i-1}, x_i) x_{i-1};$
 - $c_{b3}(x_{i-1}, x_i) = 1 + 3a_{b3}(x_{i-1}, x_i) x_{i-1}^2;$
 - $d_{b3}(x_{i-1}, x_i) = -a_{b3}(x_{i-1}, x_i) x_{i-1}^3 - x_{i-1}.$
4. $b(x, x_{i-1}, x_i) = a_{b4}(x_{i-1}, x_i) x^3 + b_{b4}(x_{i-1}, x_i) x^2 + c_{b4}(x_{i-1}, x_i) x + d_{b4}(x_{i-1}, x_i),$
con:
- $a_{b4}(x_{i-1}, x_i) = \frac{(x_i-x_{i-1})^2}{2(x_{i-1}-x_i)^3};$
 - $b_{b4}(x_{i-1}, x_i) = \frac{1}{2} - 3a_{b4}(x_{i-1}, x_i) x_{i-1};$
 - $c_{b4}(x_{i-1}, x_i) = 3a_{b4}(x_{i-1}, x_i) x_{i-1}^2 - x_{i-1};$
 - $d_{b4}(x_{i-1}, x_i) = \frac{1}{2} x_{i-1}^2 - a_{b4}(x_{i-1}, x_i) x_{i-1}^3.$

A questo punto basterà definire ogni tratto polinomiale c_i come:

$$c_i(x) = b(x, x_{i-1}, x_i) y_{i-1} + b(x, x_{i-1}, x_i) y_i + b(x, x_{i-1}, x_i) d_{i-1} + b(x, x_{i-1}, x_i) s_{i-1}$$

dove gli d_{i-1} e s_{i-1} sono rispettivamente la derivata prima e seconda in ogni punto, data per il punto x_0 e ricavata dal tratto precedente per ogni tratto successivo.

Un'interpolazione di questo tipo per l'esempio considerato nelle scorse sezioni ha l'aspetto, prese $d_0 = 1$ e $s_0 = -1$ e tracciate derivata prima e seconda:



da dove notiamo che la derivata fino al secondo grado resta continua, da cui la condizione 3 è rispettata.

Vediamo che in verità si può risolvere in qualche modo anche lo scorso tipo di problema con questo metodo, semplicemente imponendo $s_0 = 0$ e cercando d_0 perché risulti $s_k = 0$.

Nell'esempio, questo si ottiene per $d_0 \approx -1.574$, con relativo grafico:



Esempi di questi tipi di interpolazione si possono trovare sempre su Desmos, al link <https://www.desmos.com/calculator/gm1idqaiiy> (da qui sono state generate le figure).

15.2 Approssimazione ai minimi quadrati

Un altro approccio per l'approssimazione di insiemi di punti, specialmente nel caso questi siano imponenti in dimensioni, può essere dato dall'**approssimazione ai minimi quadrati**.

Un caso banale di questo tipo di approssimazione può essere quello della *regressione lineare*: dato un insieme di $k + 1$ punti (x_j, y_j) , si cerca la retta che minimizza la distanza quadratica da ogni punto. In questo caso la retta prende il nome di **funzione modello**.

Generalizziamo quindi questo approssimazione in 2 direzioni:

- Ammettiamo che si abbiano più punti che funzioni modello (che possiamo intendere come le basi polinomiali usate finora);
- Ammettiamo l'utilizzo di funzioni modello non polinomiali.

Formalmente, quindi, dati $k + 1$ punti $(x_0, y_0), \dots, (x_k, y_k)$ punti con $y_j = f(x_j)$ e $m + 1$ funzioni modello $G_0(x), \dots, G_m(x)$ con $m \leq k$ cercheremo l'approssimante $\Phi(x) \approx f(x)$ della forma:

$$\Phi(x) = \sum_{i=0}^m G_i(x) \cdot c_i, \quad c_i \in \mathbb{R}$$

con c_i da trovare, cioè la combinazione lineare ottima (definiremo cosa significa ottima fra poco) delle funzioni modello.

- Ad esempio, la regressione lineare quella data dalle funzioni modello:

$$G_0(x) = 1, \quad G_1(x) = x$$

approssimante $k + 1 = \#$ punti nel grafico;

- Potremmo avere altri tipi di funzioni modello. Ad esempio potremmo avere:

$$G_0(x) = e^{2x}, \quad G_1(x) = \sin\left(\frac{x}{2}\right), \quad G_2(x) = \frac{1}{3x^2 + 4}$$

In questo caso l'approssimante avrebbe una forma del tipo:

$$\Phi(x) = c_0 e^{2x} + c_1 \sin\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{c_2}{3x^2 + 4}$$

A questo punto il problema è capire cosa significa dire che $\Phi(x)$ passa "vicino" ai punti (x_j, y_j) , cioè qual'è la funzione da ottimizzare per trovare i c_i ottimi in modo che risulti $\Phi(x) \approx f(x)$. Dobbiamo quindi definire una qualche funzione di errore $\psi(c_0, \dots, c_m) : \mathbb{R}^{m+1} \rightarrow \mathbb{R}^+$.

Vediamo come definire tale funzione.

- Un primo approccio potrebbe essere il semplice *scarto*:

$$\psi(c_0, \dots, c_m) = \sum_{i=0}^k (\Phi(x_i) - y_i)$$

Questa ha il problema di poter dare cancellazione, cioè errori di punti diversi potrebbero annullarsi, per dare valori di ψ bassi quando in realtà la funzione è molto lontana da $f(x)$;

- Un approccio migliore è quindi quello di prendere lo *scarto assoluto*:

$$\psi(c_0, \dots, c_m) = \sum_{i=0}^k |\Phi(x_i) - y_i|$$

In questo caso non soffriremo di cancellazione, ma avremo il problema che ψ non è differenziabile (si avranno punti angolosi dati dal valore assoluto);

- L'approccio migliore risulta quindi:

$$\psi(c_0, \dots, c_m) = \sum_{i=0}^k (\Phi(x_i) - y_i)^2$$

cioè lo *scarto quadratico*, che risolve sia i problemi della cancellazione che della continuità C^1 .

Il metodo dei minimi quadrati consisterà quindi nello scegliere:

$$c = \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m+1}$$

tale che:

$$c = \min_{c \in \mathbb{R}^{m+1}} \psi(c)$$

cioè c è punto di minimo di $\psi(c)$.

Dovremo quindi minimizzare:

$$\psi(c) = \sum_{i=0}^k (\Phi(x_i) - y_i)^2 = \sum_{i=0}^k \left(\sum_{j=0}^m c_j \cdot G_j(x_i) - y_i \right)^2$$

cioè in forma matriciale, posti:

$$A = \begin{pmatrix} G_0(x_0) & G_1(x_0) & \dots & G_m(x_0) \\ \vdots & & & \vdots \\ G_0(x_k) & G_1(x_k) & \dots & G_m(x_k) \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} c_0 \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} y_0 \\ \vdots \\ y_k \end{pmatrix}$$

con $A \in \mathbb{R}^{(k+1) \times (m+1)}$, $c \in \mathbb{R}^{m+1}$, $b \in \mathbb{R}^{k+1}$, equivale a:

$$\psi(c) = \sum_{i=0}^k ((Ac)_i - b_i)^2 = \|Ac - b\|_2^2$$

Stiamo quindi minimizzando la norma quadratica del residuo di $Ac = b$, che dalle dimensioni della matrice A e i vettori c e b è un sistema sovradeterminato (più equazioni che incognite):

$$c^* = \min_{c \in \mathbb{R}^{m+1}} \|Ac - b\|_2$$

Possiamo quindi risolvere interpretando il sistema come uno di quelli visti in 11.1, quindi sfruttando le **equazioni normali** o la **decomposizione QR**.

15.2.1 Implementazione MATLAB di un approssimatore ai quadrati minimi

Vediamo quindi come implementare questo approccio in MATLAB.

Abbiamo già a disposizione una funzione, `least_squares()`, definita in 12.2.9 per la risoluzione di sistemi sovradeterminati usando la decomposizione QR. Ci mancherà quindi da scrivere una funzione che calcola il valore della matrice A , valutando le funzioni in base G_i , e che campiona una certa funzione $f(x)$ in determinati punti x_i per generare un vettore di y_i , magari usando la `linspace()`, così da avere un insieme di nodi equispaziati del tipo:

$$x_i = l + ih, \quad i = 0, \dots, k-1$$

$$h = \frac{u-l}{k-1}$$

Per il problema di come rappresentare le G_i usiamo dei *function handle*, dichiarati come segue:

```
1 % un function handle alla funzione f(x) = x^2
2 f = @(x) x.^2
3 % si usa come: f(2) -> 4
```

Una base potrà quindi essere costruita racchiudendo più handle di questo tipo in un *array di celle*.

Prendiamo per adesso la base:

$$G_0(x) = e^x, \quad G_1(x) = \frac{1}{x}, \quad G_2(x) = \sin(x)$$

Avremo allora una funzione del tipo:

```

1 function c = approx_trasc(f, l, u, n)
2     % le funzioni in base
3     funcs = {
4         @(x) exp(x);
5         @(x) 1/x;
6         @(x) sin(x)
7     };
8
9     % costruisce la matrice G
10    function G = build_G(X)
11        m = height(funcs);
12
13        G = zeros(n, m);
14
15        for i = 1:n
16            for j = 1:m
17                G(i, j) = funcs{j}(X(:, i));
18            end
19        end
20    end
21
22    % campiona f
23    X = linspace(l, u, n);
24    Y = f(X);
25
26    % costruisci G
27    G = build_G(X);
28
29    % usa il risolutore ai quadrati minimi
30    c = least_squares(G, Y');
31 end

```

Attraverso questa funzione potremo calcolare i coefficienti c che minimizzano lo scarto quadratico sugli n punti fra l e u .

Prendiamo l'esempio della funzione:

$$f(x) = (2x - 3)(x - 3)(x - 4)(x - 5)$$

Definiremo questa, in MATLAB, come segue:

```

1 f = @(x) (2.*x - 3).*(x - 3).*(x - 4).*(x - 5);

```

Potremo allora trovare i coefficienti c di un approssimazione in forma:

$$a(x) = c_0 \cdot e^x + c_1 \cdot \frac{1}{x} + c_2 \cdot \sin(x)$$

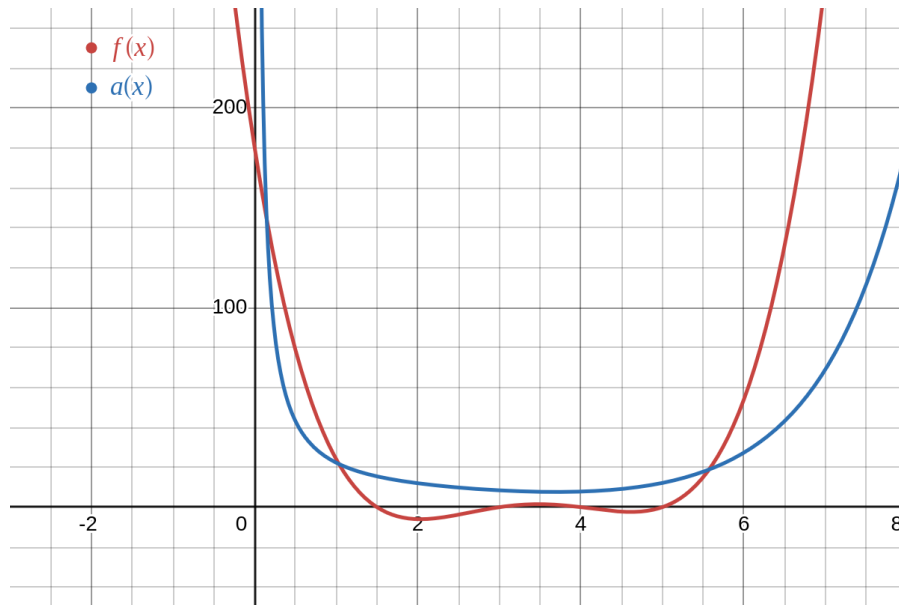
usando la funzione MATLAB appena implementata:

```

1 >> approx_trasc(f, 0.1, 6, 100)
2
3 ans =
4     0.0596
5    21.2591
6     1.8092

```

cioè $c_0 = 0.0596$, $c_1 = 21.2591$, $c_2 = 1.8092$, che sul grafico dà:



Per un errore medio di:

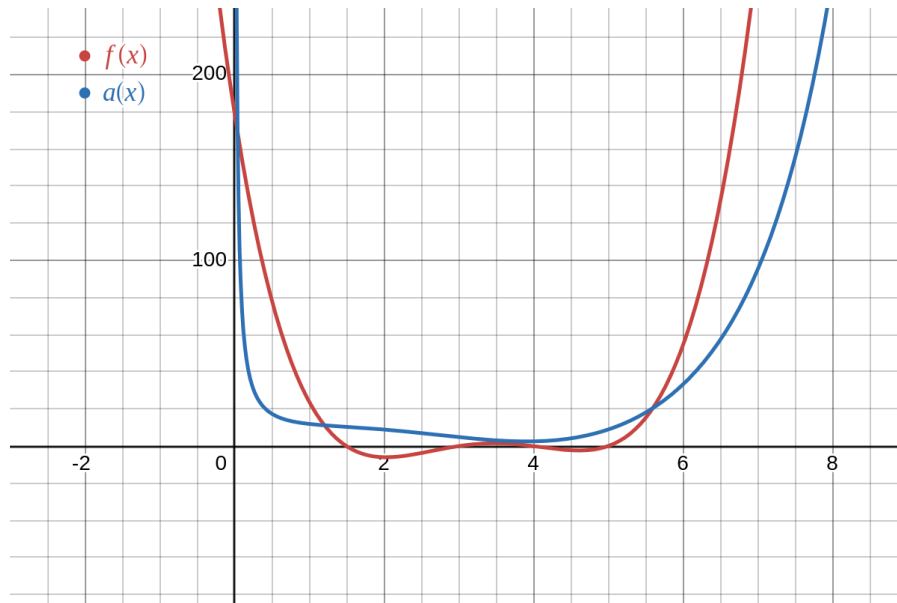
$$\varepsilon = \sqrt{\sum_{i=1}^{100} (f(x_i) - a(x_i))^2} \approx 163.141$$

Notiamo quindi che la funzione non passa necessariamente per nessuno dei punti campionati, ma riduce l'errore medio lungo tutta la regione campionata.

Potremmo renderci conto che la maggior parte dell'errore è data dal fatto che cerchiamo di approssimare la funzione nella regione $0.1 \sim 0.7$, che ci porta ad avere un errore più grande nella zona vicino all'asse x . Se fossimo interessati ad ottenere un'approssimazione più accurata in questa regione, potremmo richiamare la funzione aumentando il bound l :

```
1 >> approx_trasc(f, 0.7, 6, 100)
2
3 ans =
4     0.0825
5     7.4361
6     5.0514
```


cioè $c_0 = 0.0825$, $c_1 = 7.4361$, $c_2 = 5.0514$, che sul grafico dà:



Per un errore medio di:

$$\varepsilon \approx 106.392$$

sul nuovo intervallo, che è già più accurato.

16 Lezione del 28-04-25

16.1 Approssimazione di integrali

Vorremo quindi approssimare funzioni del tipo:

$$I(\rho \cdot f) = \int_a^b f(x) \cdot \rho(x) dx$$

dove $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua $\in C([a, b])$, mentre $\rho(x) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sempre continua $\in C([a, b])$ è una funzione particolare, spesso la funzione unitaria o comunque una funzione detta **funzione peso** tale che:

- $\rho(x)$ è positiva:

$$\rho(x) \geq 0$$

- $\rho(x)$ rispetta le condizioni:

$$m_k = \int_a^b x^k \rho(x) dx < +\infty, \quad \forall k = 0, 1, \dots$$

Veniamo alle motivazioni dell'approssimazione di integrali. Potremmo voler approssimare integrali del tipo:

$$\int_a^b f(x) dx \quad (\rho(x) = 1)$$

per una serie di motivi:

- Di molte funzioni non si può trovare un'espressione semplice della primitiva di f (funzioni ellittiche, funzioni su più variabili, ecc...);

- Anche se esiste la primitiva potrebbe essere particolarmente oneroso in termini di risorse computazionali calcolarla o valutarla in un punto per ottenere l'integrale;
- Come nel caso dell'approssimazione e dell'interpolazione, ci sono casi in cui della f si conoscono solo alcuni punti, cioè non se ne ha un'espressione esplicita che possiamo integrare. Vedremo che sarà questo il caso più comune.

Prendiamo quindi il caso dove conosciamo una serie di punti $(x_i, f(x_i))$ di $f(x)$. L'idea per approssimare l'integrale sarà di considerare una formula del tipo:

$$\int_a^b f(x)\rho(x) dx \approx \sum_{i=0}^n f(x_i) \cdot a_i$$

con:

$$a \leq x_0 < x_1 < \dots < x_n \leq b$$

In questo caso chiamiamo gli x_i **nodi** e gli a_i **pesi**, e la formula **formula di quadratura**. Si ha quindi che una formula di quadratura è univocamente determinata una volta decisi nodi e pesi.

Definiamo quindi formalmente:

Definizione 16.1: Formula di quadratura

Dati un intervallo $[a, b]$ e $\rho(x)$, definiamo $J_n(\circ)$ formula di quadratura su $(n + 1)$ nodi x_0, \dots, x_n con pesi a_0, \dots, a_n la funzione:

- Di questa forma:

$$J_n : C([a, b]) \rightarrow \mathbb{R}$$

tale che:

$$f \rightarrow \sum_{i=0}^n f(x_i) \cdot a_i$$

- O equivalentemente:

$$J_n : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$$

tale che:

$$\begin{pmatrix} f_0 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix} \rightarrow \sum_{i=0}^n f_i \cdot a_i$$

Data la definizione di formula di quadratura, possiamo quindi definire l'errore:

Definizione 16.2: Errore della formula di quadratura

L'errore della formula di quadratura $J_n(\circ)$ si definisce come:

$$E_n(f) = \int_a^b f(x)\rho(x) dx - J_n(f) = \int_a^b f(x)\rho(x) dx - \sum_{i=0}^n f(x_i) \cdot a_i$$

anche questa tale che:

$$E_n : C([a, b]) \rightarrow \mathbb{R}$$

con:

$$f \rightarrow E_n(f)$$

Osserviamo che sia J_n che E_n sono funzioni lineari, in quanto date $f_1, f_2 \in C([a, b])$ e $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} J_n(c_1 f_1 + c_2 f_2) &= \sum_{i=0}^n a_i (c_1 f_1 + c_2 f_2)(x_i) = \sum_{i=0}^n a_i (c_1 f_1(x_i) + c_2 f_2(x_i)) \\ &= \sum_{i=0}^n (a_i c_1 f_1(x_i) + a_i c_2 f_2(x_i)) = c_1 \sum_{i=0}^n a_i f_1(x_i) + c_2 \sum_{i=0}^n a_i f_2(x_i) = c_1 J_n(f_1) + c_2 J_n(f_2) \end{aligned}$$

e analogamente con E_n . \square

Potremmo quindi chiederci quando una formula di quadratura è accurata. Potremmo definire un primo indicatore detto **grado di precisione**.

Definizione 16.3: Grado di precisione

Data J_n formula di quadratura definiamo grado di precisione (a volte detto *grado di precisione algebrico*) il naturale $m \in \mathbb{N}$ tale che:

$$E_n(1) = E_n(x) = \dots = E_n(x^m) = 0$$

presi i monomi x_0, \dots, x^m , cioè per cui:

$$E_n(x^{m+1}) \neq 0$$

Osserviamo che per la proprietà di linearità di E_n e J_n appena dimostrata, si ha che J_n ha grado di precisione m se e solo se J_n integra esattamente tutti i polinomi di grado $\leq m$ (che altro non sono che combinazioni lineari dei monomi x_0, \dots, x^m appena considerati).

16.1.1 Formula dei trapezi

Prendiamo ad esempio $\rho = 1$, l'intervallo $[a, b] = [-1, 1]$ con $n = 1$, per cui consideriamo solo gli estremi $x_0 = -1, x_1 = 1$. In questo caso avremo la formula di quadratura:

$$J_1(f) = a_0 f(-1) + a_1 f(1) \approx \int_{-1}^1 f(x) dx$$

Potremmo chiederci qual'è la migliore scelta dei coefficienti di peso a_i . Questi saranno chiaramente quelli che massimizzano il grado di precisione m della formula di quadratura J_m . Vorremmo quindi imporre due condizioni:

$$\begin{cases} E_n(1) = 0 \\ E_n(x) = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \int_{-1}^1 1 dx - (a_0 + a_1) = 0 \\ \int_{-1}^1 x dx - (-a_0 + a_1) = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2 - a_0 - a_1 = 0 \\ 0 + a_0 - a_1 = 0 \end{cases}$$

i da cui risolvendo il sistema si ha:

$$a_0, a_1 = 1$$

Il risultato sarà quindi che la formula di quadratura è:

$$J_1(f) = f(-1) + f(1)$$

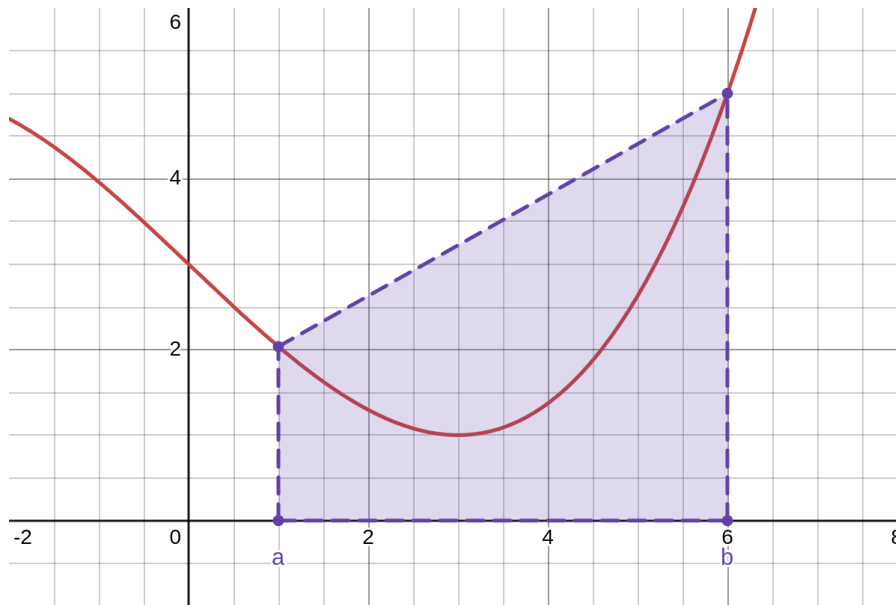
con grado di precisione almeno 1 ($m \geq 1$).

Verifichiamo infatti cosa accade per gradi $> m$, ad esempio grado 2:

$$E_n(x^2) = \int_{-1}^1 x^2 dx - (1 + 1) = \frac{2}{3} - 2 \neq 0$$

per cui m è esattamente 1.

Graficamente, questo non significherà altro che approssimare l'integrale fra -1 e 1 attraverso l'area sottesa alla retta passante per i punti $(-1, f(-1))$, $(1, f(1))$, cosa che chiaramente risulta inadeguata quando f è di grado maggiore a 1 (come ad esempio una parabola). Vediamo infatti su un grafico che dato a e b consideriamo l'area evidenziata in viola:



Quest'area è effettivamente un trapezio, motivo per cui la formula J_1 sul generico intervallo $[a, b]$ viene detta **formula dei trapezi**:

$$(f(a) + f(b)) \frac{b - a}{2}$$

Possiamo dimostrare questa in 2 modi:

- Applicando direttamente l'area del trapezio, cioè:

$$(b + B) \frac{h}{2} = (f(a) + f(b)) \frac{b - a}{2}$$

□

- Alternativamente possiamo ricorrere all'imposizione di un sistema simile a quello visto prima all'intervallo generico $[a, b]$:

$$\begin{aligned} \begin{cases} E_n(1) = 0 \\ E_n(x) = 0 \end{cases} &\rightarrow \begin{cases} \int_a^b 1 dx - a_0 - a_1 = 0 \\ \int_a^b x dx - a \cdot a_0 - b \cdot a_1 = 0 \end{cases} \\ &\rightarrow \begin{cases} b - a = a_0 + a_1 \\ \left. \frac{x^2}{2} \right|_a^b = a \cdot a_0 + b \cdot a_1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} b - a = a_0 + a_1 \\ \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2} = a \cdot a_0 + b \cdot a_1 \end{cases} \end{aligned}$$

da cui si ottiene il sistema:

$$\begin{cases} a_0 + a_1 = b - a \\ a \cdot a_0 + b \cdot a_1 = \frac{b^2 - a^2}{2} \end{cases}$$

Prendiamo ad esempio a_0 dalla prima equazione:

$$a_0 = b - a - a_1$$

che sostituendo nella seconda equazione dà:

$$\begin{aligned} a(b - a - a_1) + ba_1 &= \frac{b^2 - a^2}{2} \Rightarrow ab - a^2 - aa_1 + ba_1 = \frac{b^2 - a^2}{2} \\ \Rightarrow (b - a)a_1 &= \frac{b^2 - a^2}{2} - ab + a^2 = \frac{a^2 - 2ab + b^2}{2} = \frac{(b - a)^2}{2} \end{aligned}$$

dove guardando gli estremi si ha:

$$a_1 = \frac{b - a}{2}$$

Dalla prima equazione, poi, è immediato che anche:

$$a_0 = \frac{b - a}{2}$$

da cui la formula dei trapezi. □

16.1.2 Formula di Simpson

Vediamo di raffinare la formula dei trapezi aggiungendo un nodo in più, ad esempio il punto intermedio fra gli estremi dell'intervallo $[a, b]$. Nel caso $[-1, 1]$, questo non sarà altro che 0, per cui $x_0 = -1$, $x_1 = 0$, $x_2 = 1$. Avremo che la formula di quadratura è:

$$J_2(f) = a_0 f(-1) + a_1 f(0) + a_2 f(1)$$

e scegliamo gli $a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ per massimizzare il grado di precisione, con procedimento analogo a prima:

$$\begin{cases} E_n(1) = 0 \\ E_n(x) = 0 \\ E_n(x^2) = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2 = a_0 + a_1 + a_2 \\ 0 = -a_0 + a_2 \\ \frac{2}{3} = a_0 + a_2 \end{cases}$$

da cui:

$$a_0 = a_2 = \frac{1}{3}, \quad a_1 = \frac{4}{3}$$

Il risultato sarà quindi che la formula di quadratura è:

$$J_2(f) = \frac{1}{3} (f(-1) + 4f(0) + f(1))$$

detta anche **formula di Simpson** o di *Cavalieri-Simpson*.

Vediamo cosa succede per l'integrale del monomio di grado 3 attraverso la formula di Simpson:

$$E_2(x^3) = \int_{-1}^1 x^3 dx - \frac{1}{3} (-1 + 4 \cdot 0 + 1) = 0$$

cioè abbiamo grado non solo ≥ 2 , ma anche ≥ 3 , per cui consideriamo il grado 4:

$$E_2(x^4) = \int_{-1}^1 x^4 dx - \frac{1}{3}(1 + 4 \cdot 0 + 1) = \frac{2}{5} - \frac{2}{3} \neq 0$$

per cui abbiamo che il grado di precisione della formula di Simpson è esattamente $m = 3$.

Infine generalizziamo la formula di Simpson all'intervallo $[a, b]$:

$$\frac{b-a}{6} \left(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right)$$

Questa si dimostra per calcolo diretto, imponendo le condizioni sul generico intervallo $[a, b]$:

$$\begin{cases} E_n(1) = 0 \\ E_n(x) = 0 \\ E_n(x^2) = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \int_a^b 1 dx - a_0 - a_1 - a_2 = 0 \\ \int_a^b x dx - a \cdot a_0 - \frac{a+b}{2}a_1 - b \cdot a_2 = 0 \\ \int_a^b x^2 dx - a^2 \cdot a_0 - \frac{(a+b)^2}{4}a_1 - b^2 \cdot a_2 = 0 \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} b-a = a_0 + a_1 + a_2 \\ \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2} = a \cdot a_0 + \frac{a+b}{2}a_1 + b \cdot a_2 \\ \frac{b^3}{3} - \frac{a^3}{3} = a^2 \cdot a_0 + \frac{(a+b)^2}{4}a_1 + b^2 \cdot a_2 \end{cases}$$

Abbiamo che dalla prima equazione si ricava:

$$a_0 = b - a - a_1 - a_2$$

mentre dalla seconda si ha, sostituendo:

$$\begin{aligned} \frac{b^2 - a^2}{2} &= a(b - a - a_1 - a_2) + \frac{a+b}{2}a_1 + ba_2 = \\ &= ab - a^2 - a \cdot a_1 - a \cdot a_2 + \frac{a+b}{2}a_1 + ba_2 \\ \Rightarrow \frac{b^2 - a^2}{2} - ab + a^2 &= -a \cdot a_1 - a \cdot a_2 + \frac{a+b}{2}a_1 + b \cdot a_2 \\ \Rightarrow \frac{b^2 - a^2 - 2ab + 2a^2}{2} &= a_1 \left(-a + \frac{a+b}{2} \right) + a_2(b-a) \Rightarrow \frac{(b-a)^2}{2} = a_1 \left(\frac{b-a}{2} \right) + a_2(b-a) \end{aligned}$$

da cui:

$$a_1 = b - a - 2a_2$$

Sostituendo questo nella formula trovata prima per a_0 si trova quindi:

$$a_0 = b - a - b + a + 2a_2 - a_2 = a_2$$

cioè valgono le condizioni:

$$\begin{cases} a_0 = a_2 \\ a_1 = b - a - 2a_0 = b - a - 2a_2 \end{cases}$$

Usiamo queste per trovare a_0 (o equivalentemente a_2) dalla terza equazione. Avremo in questo caso:

$$\frac{b^3}{3} - \frac{a^3}{3} = a^2 \cdot a_0 + \frac{(a+b)^2}{4}a_1 + b^2 \cdot a_0 = a^2 \cdot a_0 + \frac{(a+b)^2}{4}(b-a-2a_0) + b^2 \cdot a_0$$

$$= a^2 \cdot a_0 + b^2 \cdot a_0 + \frac{(a+b)^2}{4}(b-a) - \frac{(a+b)^2}{2}a_0$$

dove vorremo dividere i termini fra parte sinistra e destra come:

$$\frac{b^3 - a^3}{3} - \frac{(a+b)^2}{4}(b-a) = a^2 \cdot a_0 + b^2 \cdot a_0 - \frac{(a+b)^2}{2}a_0$$

Valutiamo queste separatamente.

• **Parte sinistra:**

$$\begin{aligned} \frac{b^3 - a^3}{3} - \frac{(a+b)^2}{4}(b-a) &= \frac{b^3 - a^3}{3} - \frac{a^2 + 2ab + b^2}{4}(b-a) \\ &= \frac{b^3 - a^3}{3} - \frac{a^2b - a^3 + 2ab^2 - 2a^2b + b^3 - ab^2}{4} = \frac{b^3 - a^3}{3} + \frac{-b^3 + a^3 + a^2b - ab^2}{4} \\ &= \frac{1}{12}b^3 - \frac{1}{12}a^3 + \frac{1}{4}a^2b - \frac{1}{4}ab^2 = \frac{1}{12}(b-a)^3 \end{aligned}$$

• **Parte destra:**

$$\begin{aligned} a^2 \cdot a_0 + b^2 \cdot a_0 - \frac{(a+b)^2}{2}a_0 &= a^2 \cdot a_0 + b^2 \cdot a_0 - \left(\frac{a^2}{2} + ab + \frac{b^2}{2} \right) a_0 \\ &= \frac{a^2}{2}a_0 + \frac{b^2}{2}a_0 - ab \cdot a_0 = \frac{(b-a)^2}{2}a_0 \end{aligned}$$

da cui avremo quindi complessivamente:

$$\frac{1}{12}(b-a)^3 = \frac{(b-a)^2}{2}a_0 \implies a_0 = \frac{b-a}{6}$$

da cui si ha immediatamente che:

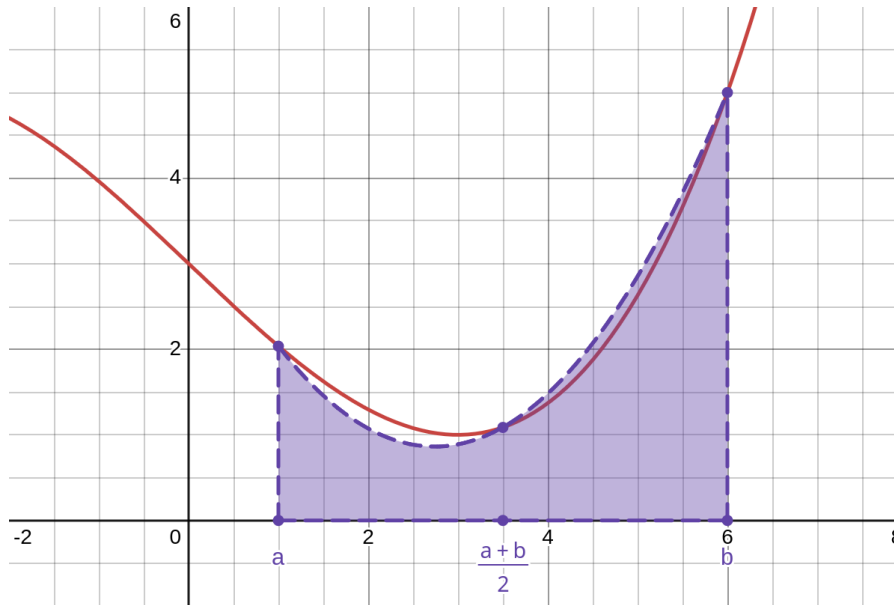
$$a_0 = a_2 = \frac{2}{3}(b-a)$$

che dà esattamente la formula di Simpson. □

Abbiamo quindi che anche Simpson si basa sul trovare implicitamente il polinomio interpolante e poi integrare quello, con la caratteristica aggiunta che anche al grado 3 l'integrale risulta esatto (anche se non lo è l'interpolante). In particolare, vediamo sul grafico che l'interpolante per una quadratica dà il risultato esatto:



e che per una cubica, anche se l'interpolante non coincide con la funzione, si ha comunque risultato esatto. Questo è dato dal fatto che si creano due regioni discordi che si compensano fra di loro:



16.1.3 Formula Gaussiana

Rivediamo quindi il problema di massimizzare il grado di precisione dati i nodi x_0, \dots, x_n . Questo significherà imporre:

$$\begin{cases} E_n(1) = 0 \\ E_n(x) = 0 \\ \vdots \\ E_n(x^{m+1}) = 0 \end{cases}$$

cioè $m + 1$ equazioni per a_0, \dots, a_m , cioè $m + 1$ incognite. Questo porta a:

$$\Rightarrow \begin{cases} m_0 = a_0 + a_1 + \dots + a_n \\ m_1 = a_0 x_0 + a_1 x_1 + \dots + a_n x_n \\ \vdots \\ m_n = a_0 x_0^n + a_1 x_1^n + \dots + a_n x_n^n \end{cases}$$

dove gli m_i sono i risultati degli integrali dei monomi x^i sull'intervallo $[a, b]$ da cui:

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_0 & x_1 & \dots & x_n \\ x_0^2 & x_1^2 & \dots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_0^n & x_1^n & \dots & x_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_0 \\ \vdots \\ m_n \end{pmatrix} = V^T \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_0 \\ \vdots \\ m_n \end{pmatrix}$$

Questo non è altro che un sistema lineare $(n + 1) \times (n + 1)$ con matrice di Vandermonde, da cui $\det(V) \neq 0$ e quindi se $x_i \neq x_j$ per ogni $i \neq j$, la soluzione del sistema è unica ed esiste un'unica formula di quadratura sui nodi x_0, \dots, x_n che ha grado di precisione $m \geq n$.

Potremmo considerare il problema diverso (e più difficile) di cercare sia i *nod*i che i *pesi* in modo da massimizzare il grado di precisione m . In questo caso la formula di quadratura è sempre:

$$J_n(f) = \sum_{i=0}^n a_i f(x_i)$$

e le incognite sono $2n + 2$, cioè gli $n + 1$ nodi x_0, \dots, x_n e gli $n + 1$ pesi a_0, \dots, a_n .

Si impongono quindi $2n + 2$ equazioni del tipo:

$$\begin{cases} E_n(1) = 0 \\ E_n(x) = 0 \\ \vdots \\ E_n(x^{2n+1}) = 0 \end{cases}$$

L'unica cosa che sarà data sarà l'intervallo $[a, b]$ (non gli x_i), per cui otterremo un sistema non lineare:

$$\begin{cases} a_0 + a_1 + \dots + a_n = m_0 \\ a_0 x_0 + a_1 x_1 + \dots + a_n x_n = m_1 \\ \vdots \\ a_0 x_0^{2n+1} + a_1 x_1^{2n+1} + \dots + a_n x_n^{2n+1} = m_{2n+1} \end{cases}$$

Fortunatamente esiste un teorema, che diamo senza dimostrazione:

Teorema 16.1: Unicità della formula Gaussiana

Il sistema:

$$\begin{cases} a_0 + a_1 + \dots + a_n = m_0 \\ a_0 x_0 + a_1 x_1 + \dots + a_n x_n = m_1 \\ \vdots \\ a_0 x_0^{2n+1} + a_1 x_1^{2n+1} + \dots + a_n x_n^{2n+1} = m_{2n+1} \end{cases}$$

ammette sempre, dato $x_i \neq x_j$ per ogni $i \neq j$, un'unica soluzione per ogni scelta di $[a, b]$, n e $\rho(x)$, con grado di precisione $\geq 2n + 1$.

Definiamo tale formula di quadratura come:

Definizione 16.4: Formula Gaussiana

L'unica formula di quadratura su $[a, b]$ che verifica il sistema del teorema 16.1 (ovvero che massimizza il grado di precisione ottimizzando sia gli x_i che gli a_i) si dice **formula Gaussiana** su $[a, b]$ con $n + 1$ nodi.

Prendiamo ad esempio il caso $\rho = 1$, $n = 1$, e $[a, b] = [-1, 1]$ (analogamente a prima ma con i nodi liberi).

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx a_0 f(x_0) + a_1 f(x_1)$$

con:

$$a \leq x_0 < x_1 \leq b$$

Imponiamo quindi:

$$\begin{cases} E_1(1) = 0 \\ E_1(x) = 0 \\ E_1(x^2) = 0 \\ E_1(x^3) = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a_0 + a_1 = 2 \\ a_0x_0 + a_1x_1 = 0 \\ a_0x_0^2 + a_1x_1^2 = \frac{2}{3} \\ a_0x_0^3 + a_1x_1^3 = 0 \end{cases}$$

per risolvere il sistema ricaviamo prima a_0 e a_1 in funzione di x_0 e x_1 dalle prime 2 equazioni:

- a_0 si ha direttamente dalla prima equazione:

$$a_0 = 2 - a_1$$

- a_1 si ha dalla seconda equazione,, sostituendo la formula per a_0 appena trovata:

$$(2 - a_1)x_0 + a_1x_1 = 2x_0 - a_1x_0 + a_1x_1 = 0 \implies a_1(x_1 - x_0) = \frac{-2x_0}{x_1 - x_0}$$

da cui abbiamo che vale:

$$a_0 = \frac{2x_1}{x_1 - x_0}, \quad a_1 = -\frac{2x_0}{x_1 - x_0}$$

Prendiamo quindi il sistema ridotto alle ultime 2 equazioni:

$$\begin{cases} \frac{2x_1x_0^2}{x_1-x_0} - \frac{2x_0x_1^2}{x_1-x_0} = \frac{2}{3} \\ \frac{2x_1x_0^3}{x_1-x_0} - \frac{2x_0x_1^3}{x_1-x_0} = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2x_1x_0^2 - 2x_0x_1^2 = \frac{2}{3}(x_1 - x_0) \\ 2x_1x_0^3 - 2x_0x_1^3 = 0 \end{cases}$$

dall'ultima di queste si ricava:

$$2x_1x_0^3 - 2x_0x_1^3 = 0 \implies 2x_1x_0^3 = 2x_0x_1^3 \implies x_0^2 = x_1^2 \implies x_0 = \pm x_1$$

Ci interesserà prendere $x_0 = -x_1$, da cui dalla prima equazione:

$$2x_1^3 + 2x_1^4 = \frac{4}{3}x_1 \implies x_1^2 = \frac{1}{3}$$

cioè:

$$x_0, x_1 = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$$

sostituendo nelle formule per a_0 e a_1 trovate prima, si ha poi immediatamente:

$$a_0, a_1 = 1,$$

cioè la formula Gaussiana è:

$$J_1(f) = f\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) + f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$$

che vale fino al grado 3, in quanto al grado 4 si ha:

$$E_1(x^4) = \frac{2}{5} - \frac{2}{9} \neq 0$$

da cui il grado di precisione è esattamente 3. □

16.1.4 Errore nelle formule di quadratura

Riguardo all'errore già definito nella definizione 16.2, vale il seguente teorema:

Teorema 16.2: Teorema di Peano

Data una funzione $f(x) \in \mathbb{C}^{n+1}([a, b])$, cioè derivabile $n + 1$ volte, con m grado di precisione della formula di quadratura J_n , allora l'errore E_n (vedi definizione 16.2) si può scrivere come:

$$E_n(f) = I(\rho, f) - J_n(f) = \frac{1}{m!} \int_a^b f^{(m+1)}(t) \cdot G(t) dt$$

dove la $G(t)$ è:

$$G(t) = E_n(s_m(x - t)) = I(\rho \cdot s_m(x - t)) - J_n(s_m(x - t))$$

e la $s_m(x)$ è:

$$s_m(x) = \begin{cases} x^m, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

cioè la $s_m(x - t)$ non è altro che la $s_m(x)$ spostata a destra di t .

Vale la definizione:

Definizione 16.5: Nucleo di Peano

La funzione $G(t)$ del teorema 16.2 è detta **nucleo di Peano**.

17 Lezione del 02-05-25

Avevamo dato la definizione del teorema di Peano (teorema 16.2), per l'errore della generica formula di quadratura J_n . Per ora quest'espressione ci risulta poco maneggevole in quanto richiede il calcolo dell'errore $G(t)$ sulla funzione $s_m(t)$, detto *nucleo di Peano* (definizione 16.5).

Riprendiamo quindi la definizione dell'errore dal teorema di Peano:

$$E_n(f) = \frac{1}{m!} \int_a^b f^{(m+1)}(t) \cdot G(t) dt$$

e accorgiamoci che se $G(t)$ non cambia segno in $[a, b]$ possiamo sfruttare il teorema della media integrale per dire che esiste un certo punto $\varepsilon \in [a, b]$ tale che:

$$E_n(f) = \frac{1}{m!} f^{(m+1)}(\varepsilon) \int_a^b G(t) dt$$

Cerchiamo adesso di trovare una forma più maneggevole per l'integrale del nucleo di Peano $G(t)$. Abbiamo che questa non dipende da f , e se valutiamo l'errore per $f(x) = x^{m+1}$ si ottiene:

$$E_n(x^{m+1}) = \frac{1}{m!} \int_a^b \frac{d^{m+1}}{dt^{m+1}} t^{m+1} G(t) dt = \frac{1}{m!} (m+1)! \int_a^b G(t) dt \implies \int_a^b G(t) dt = \frac{E_n(x^{m+1})}{m+1}$$

Prendiamo quindi questo come un **corollario** del teorema di Peano.

Osserviamo allora che se si vuole trovare una disuguaglianza del tipo:

$$|E_n(f)| \leq M$$

si può prendere:

$$M = \max_{x \in [a, b]} |f^{(m+1)}(x)| \cdot \frac{E_n(x^{m+1})}{m+1}$$

dove il primo termine può essere stimato con studi di funzione o maggiorazioni esplicite, mentre il secondo termine si può calcolare esplicitamente (lo facevamo per valutare manualmente il grado di una formula di integrazione).

17.0.1 Esempio: errore di Peano nella formula dei trapezi

Vediamo quindi cosa si ottiene quando $n = m = 1$, cioè nel caso della formula dei trapezi. In questo caso il nucleo è calcolato su $s_1(t)$:

$$s_1(x-t) = \begin{cases} 0, & x < t \\ x-t, & x \geq t \end{cases}$$

e quindi sarà:

$$G(t) = E_n(s_m(x-t)) = \int_a^b s_1(x-t) dx - J_1(s_1(x-t))$$

Prendiamo l'intervallo $[a, b] = [-1, 1]$ e svolgiamo i conti. Si ha:

$$G(t) = \int_{-1}^1 s_1(x-t) dx - s_1(-1-t) - s_1(1-t) = \int_{-1}^1 (x-t) dx - 0 - 1-t$$

dal fatto che $-1-t$ è sempre negativo e $1-t$ è sempre positivo. Proseguendo si ha:

$$= \frac{(x-t)^2}{2} \Big|_{-1}^1 - 1-t = \frac{(1-t)^2}{2} - 1-t = \frac{1+t^2-2t-2+2t}{2} = \frac{t^2-1}{2} \leq 0, \quad \forall t \in [-1, 1]$$

cioè il segno di $G(t)$ non cambia.

Questo si generalizza facilmente ad intervalli $[a, b]$ generici, in quanto con passaggi simili:

$$G(t) = \int_a^b s_1(x-t) dx - J_1(s_1(x-t)) = \int_t^b (x-t) dx - \frac{b-a}{2} s_m(a-t) - \frac{b-a}{2} s_m(b-t)$$

da cui si ha quindi, per la definizione di $s_1(x-t)$ appena data:

$$\begin{aligned} G(t) &= \int_t^b (x-t) dx - \frac{b-a}{2} s_m(a-t) - \frac{b-a}{2} s_m(b-t) = \int_t^b (x-t) dx - \frac{b-a}{2} (b-t) \\ &= \frac{(x-t)^2}{2} \Big|_t^b - \frac{b^2-bt-ab+at}{2} = \frac{(b-t)^2}{2} - \frac{b^2-bt-ab+at}{2} \\ &= \frac{b^2-2bt+t^2-b^2+bt+ab-at}{2} = \frac{t^2-bt-at}{2} = \frac{(t-a)(t-b)}{2} \leq 0, \quad \forall t \in [a, b] \end{aligned}$$

Questo in realtà era chiaro osservando che il nucleo di Peano in questo caso valuta la differenza fra l'area in azzurro e la somma dell'area in azzurro e e dell'area in rosso nel seguente grafico:



che sarà chiaramente sempre ≤ 0 .

Per la formula dei trapezi vale quindi, in generale:

$$E_1(f) = \frac{1}{m!} f^{(m+1)}(\varepsilon) \int_a^b G(t) dt = \frac{1}{m!} f^{(m+1)}(\varepsilon) \frac{E_n(x^{m+1})}{m+1} = \frac{f''(\varepsilon)}{2} E_1(x^2)$$

Preso $m = 1$. Vediamo quindi che per $f = x^2$:

$$\begin{aligned} E_1(x^2) &= \int_a^b x^2 dx - \frac{b-a}{2}(a^2 + b^2) = \frac{x^3}{3} \Big|_a^b - \frac{ba^2 + b^3 - a^3 - ab^2}{2} \\ &= \frac{b^3 - a^3}{3} - \frac{ba^2 + b^3 - a^3 - ab^2}{2} = \frac{2b^3 - 2a^3 - 3ba^2 - 3b^3 + 3a^2 + 3ab^2}{6} = -\frac{(b-a)^3}{6} \end{aligned}$$

da cui:

$$E_1(f) = -\frac{(b-a)^3}{12} \cdot f''(\varepsilon), \quad \varepsilon \in [a, b]$$

17.0.2 Esempio: errore di Peano nella formula di Simpson

Si dimostra che anche la formula di Simpson è tale per cui $G(t)$ non cambia segno, quindi vale:

$$E_2(f) = \frac{f^{(4)}(\varepsilon)}{4!} \cdot E_2(x^4)$$

Vediamo quindi che per l'intervallo $[-1, 1]$ vale:

$$E_2(x^4) = \frac{2}{5} - \frac{2}{3} = -\frac{4}{15}$$

per cui:

$$E_2(f) = \frac{f^{(4)}(\varepsilon)}{24} \cdot \left(-\frac{4}{15}\right) = -\frac{1}{90} \cdot f^{(4)}(\varepsilon), \quad \varepsilon \in [-1, 1]$$

Lo stesso ragionamento si può chiaramente fare per $[a, b]$ generico, cioè:

$$\begin{aligned}
 E_2(x^4) &= \int_a^b x^4 dx - \frac{b-a}{6} \left(a^4 + 4 \frac{(a+b)^4}{16} + b^4 \right) = \frac{b^5 - a^5}{5} - \frac{b-a}{24} (5a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + 5b^4) \\
 &= \frac{24b^5 - 24a^5 - 5(5a^4b + 4a^3b^2 + 6a^2b^3 + 4ab^4 + 5b^5 - 5a^5 - 4a^4b - 6a^3b^2 - 4a^2b^3 - 5ab^4)}{120} \\
 &= \frac{24b^5 - 24a^5 - 25a^4b - 20a^3b^2 - 30a^2b^3 - 20ab^4 - 25b^5 + 25a^5 + 20a^4b + 30a^3b^2 + 20a^2b^3 + 25ab^4}{120} \\
 &= -\frac{(b-a)^5}{120}
 \end{aligned}$$

da cui:

$$E_2(f) = \frac{f^{(4)}(\varepsilon)}{24} \cdot \left(-\frac{(b-a)^5}{120} \right) = -\frac{(b-a)^5}{2880} \cdot f^{(4)}(\varepsilon), \quad \varepsilon \in [a, b]$$

17.1 Formule di quadratura interpolatorie

Vediamo l'approccio all'approssimazione integrale che prevede scegliere $n+1$ nodi x_0, \dots, x_n . In questo caso si utilizza come approssimazione di $\int_a^b f(x)\rho(x) dx$ la quantità:

$$\int_a^b f(x)\rho(x) dx \approx \int_a^b P_n(x)\rho(x) dx$$

con $P_n(x)$ polinomio di grado al più n tale che:

$$P_n(x_i) = f(x_i), \quad \forall i = 0, \dots, n$$

cioè $P_n(x)$ polinomio interpolante.

Se f è sufficientemente regolare sappiamo che:

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x), \quad R_n(x) = \frac{\Pi(x)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\varepsilon), \quad \varepsilon \in [a, b]$$

dal teorema 14.1.

Prendiamo quindi:

$$\int_a^b f(x)\rho(x) dx = \int_a^b P_n(x)\rho(x) dx + \int_a^b R_n(x)\rho(x) dx = \int_a^b \sum_{i=0}^n f(x_i)l_i(x) + \int_a^b R_n(x)\rho(x) dx$$

dove gli $l_i(x)$ sono i polinomi della base di Lagrange:

$$l_i(x) = \prod_{j \neq i} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

da cui si può portare fuori la sommatoria:

$$\int_a^b f(x)\rho(x) dx = \sum_{i=0}^n f(x_i) \int_a^b l_i(x)\rho(x) dx + E_n(f)$$

che ha esattamente la forma di una formula di quadratura, dove gli $f(x_i)$ sono i nodi della formula $J_n(f)$ e gli:

$$\int_a^b l_i(x)\rho(x) dx$$

a moltiplicare sono i pesi, cioè quelli che avevamo finora chiamato a_i . L'errore $E_n(f)$ chiaramente si trascura.

Osserviamo che per costruzione le formule interpolatorie hanno grado di precisione almeno n (chiaramente dal fatto che il polinomio interpolante di grado n di un polinomio di grado n è esattamente sé stesso).

Viceversa, dati $n + 1$ nodi c'è una sola formula di quadratura che ha grado di precisione $\geq n$ su quei nodi, e deve essere la formula di quadratura interpolatoria.

17.1.1 Esempio: formule di Newton-Cotes

L'esempio più classico delle formule di quadratura interpolatorie sono le formule di **Newton-Cotes**, che si basano sull'ipotesi di prendere nodi equispaziati su a, b . Una prima scelta è riguardo all'inclusione o meno degli estremi:

- Quando gli estremi (a, b) sono inclusi si parla di formule di Newton-Cotes *chiuse*;
- Quando gli estremi (a, b) sono esclusi si parla di formule di Newton-Cotes *aperte*.

Consideriamo per adesso le formule **chiuse**, per cui:

$$x_0 = a, \quad x_1 = h, \quad \dots, \quad x_i = a + ih, \quad \dots, \quad x_n = b$$

con:

$$h = \frac{b - a}{n}$$

detto **passo** della formula.

I pesi a_i saranno quindi:

$$a_i = \int_a^b l_i(x) dx$$

Le formule di Newton-Cotes equivalgono, per il grado 1 alle formule dei trapezi e per il grado 2 alle formule di Simosib.

Una proprietà importante delle formule di Newton-Cotes è che per ogni scelta di n vale che $G(t)$ nucleo di Peano non cambia segno su $[a, b]$, ergo si può usare la formula semplificata per l'errore di Peano:

$$E_n(f) = \frac{f^{(m+1)}(\varepsilon)}{(m+1)!} \cdot E_n(x^{m+1})$$

Sul grado n vale un fenomeno analogo al fenomeno di Runge (sezione 14.3.2). Per $n > 7$ (cioè se si hanno più di 8 nodi) le formule di Newton-Cotes iniziano ad avere pesi di segno alternato (mentre per $n \leq 7$ sono sempre positivi), cioè si inizia ad avere cancellazione numerica e valutare le formule diventa instabile numericamente.

Per esprimere l'errore delle formule di Newton-Cotes abbiamo quindi bisogno di trovarne l'errore $E_n(x^{m+1})$, cioè l'errore per il monomio di grado $m + 1$ con m grado di precisione. In questo caso si assume un'espressione del tipo:

$$E_n(f) = \begin{cases} c_n \cdot h^{n+2} \cdot f^{(n+1)}(\varepsilon), & n \text{ dispari} \\ c_n \cdot h^{n+3} \cdot f^{(n+2)}(\varepsilon), & n \text{ pari} \end{cases}$$

Vediamo ad esempio:

- **Formula dei trapezi:** in questo caso si ha $n = 1$, $h = b - a$, da cui l'errore è esprimibile come:

$$E_1(f) = -\frac{(b-a)^3}{12} \cdot f''(\varepsilon) = -\frac{h^3}{12} \cdot f''(\varepsilon)$$

- **Formula di Simpson** in questo caso si ha $n = 2$, $h = \frac{b-a}{2}$, da cui l'errore è esprimibile come:

$$E_2(f) = -\frac{(b-a)^5}{2880} \cdot f^{(4)}(\varepsilon) = -\frac{h^5}{90} \cdot f^{(4)}(\varepsilon)$$

Un'altra osservazione da fare è che il grado di precisione e l'ordine della potenza di h è lo stesso per una formula con grado n pari e quella con grado dispari $n+1$. In genere, a parte il caso dei trapezi, si considerano più spesso le formule di Newton-Cotes con n pari.

Vediamo nel dettaglio l'andamento del grado degli errori per qualche grado dopo lo 0. Innanzitutto, bisogna fare una precisazione per cosa significa prendere la formula di Newton-Cotes di grado 0. Avevamo che per formula *chiusa* si intende quella che prende $n+1$ punti estremi inclusi, mentre la formula *aperta* è quella che prende $n+1$ punti esclusi gli estremi. Tali punti si ottengono ad esempio come:

- **Formula chiusa:**

$$x_i = a + ih, \quad h = \frac{b-a}{n}, \quad i = 0, 1, \dots, n$$

- **Formula aperta:**

$$x_i = a + (i+1)h, \quad h = \frac{b-a}{n+2}, \quad i = 0, 1, \dots, n$$

Da questo risulta chiaro che sarà impossibile prendere una formula chiusa che include entrambi gli estremi quando si hanno a disposizione $n+1 = 1$ punti per il grado $n = 0$. Divideremo quindi fra:

- **Somma di Riemann sinistra:**

$$J_0^l(f) = (b-a) \cdot f(a)$$

- **Somma di Riemann destra:**

$$J_0^r(f) = (b-a) \cdot f(b)$$

Per queste il grado è $m = 0$ e l'errore per $f = x$ risulta proporzionale al grado 2, e non al 3 come ci si aspetterebbe (per il punto in meno di cui non possiamo sfruttare la simmetria). Ad esempio rispetto alla somma di Riemann sinistra si ha:

$$E_0^l(x) = \int_a^b x \, dx - (b-a) \cdot a = \frac{b^2 - a^2}{2} - ab + a^2 = \frac{b^2 - a^2 - 2ab + 2a^2}{2} = \frac{(b-a)^2}{2}$$

Potremo quindi considerare la formula aperta, che equivarrà alla cosiddetta **formula del punto medio**:

$$J_0^m(f) = (b-a) \cdot f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

Vediamo la particolarità che questa ha effettivamente grado $m = 1$, in quanto:

$$E_0^m(x) = \int_a^b x dx - (b-a) \cdot \frac{a+b}{2} = \frac{b^2 - a^2}{2} - \frac{b^2 - a^2}{2} = 0$$

Valutiamo quindi l'errore in x^2 come:

$$\begin{aligned} E_0^m(x^2) &= \frac{b^3 - a^3}{3} - (b-a) \left(\frac{a+b}{2} \right)^2 = \frac{b^3 - a^3}{3} - (b-a) \frac{a^2 + 2ab + b^2}{4} \\ &= \frac{b^3 - a^3}{3} - \frac{a^2b + 2ab^2b^3 - a^3 - 2a^2b - ab^2}{4} = \frac{b^3 - a^3}{3} + \frac{a^2b - ab^2 - b^3 + a^3}{4} \\ &= \frac{b^3 - 4a^3 + 3a^2b - 4ab^2 - 3b^3 + 3a^3}{12} = \frac{b^3 - 3ab^2 + 3a^2b - a^3}{12} = \frac{(b-a)^3}{12} \end{aligned}$$

cioè otteniamo un errore proporzionale a h^3 (lo stesso grado del metodo dei trapezi), e almeno per x^2 opposto a quello dato dal metodo dei trapezi.

Possiamo quindi compilare una tabella che associa i gradi di approssimazione ai gradi dell'errore per le formule di Newton-Cotes chiuse e aperte:

Grado	Formula		Errore	
	Aperta	Chiusa	Aperta	Chiusa
0	$2hf_0$	$2hf_0$	3	2
1	$\frac{3}{2}h(f_0 + f_1)$	$\frac{1}{2}h(f_0 + f_1)$	3	3
2	$\frac{4}{3}h(2f_0 - f_1 + 2f_2)$	$\frac{1}{3}h(f_0 + 4f_1 + f_2)$	5	5
3	$\frac{1}{12}h(11f_0 + f_1 + f_2 + 11f_3)$	$\frac{3}{8}h(f_0 + 3f_1 + 3f_2 + f_3)$	5	5

17.1.2 Esempio: formule Gaussianhe

Riprendiamo quindi anche le formule Gaussianhe espresse come formule di quadratura interpolatorie.

Innanzitutto si può dire che anche per queste il nucleo di Peano $G(t)$ non cambia segno su $[a, b]$, cioè si può usare la formula di errore data dal corollario.

Un'altra proprietà è che i pesi delle formule Gaussianhe sono sempre positivi, ergo non ci sono problemi di instabilità numerica per n grande.

Veniamo quindi a come ricavarle. Fissato l'intervallo $[a, b]$ e la funzione peso $\rho(x)$ si ha che le formule Gaussianhe sono completamente determinate. I nodi delle formule gaussiane si possono scrivere come zeri di particolari polinomi, detti *polinomi ortogonali*. Più precisamente sono gli zeri della successione di polinomi $\{q_n\}$, con $\deg(q_n) = n$, determinati da:

$$\langle q_n, p \rangle = 0, \quad \forall p : \deg(p) < n$$

sfruttando la definizione di prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle$ sullo spazio polinomiale $\mathbb{R}[x]$ data nei corsi di algebra lineare:

$$\langle a, b \rangle = \int_a^b a(x)b(x) dx$$

da cui:

$$\langle q_n, p \rangle = \int_a^b q_n(x)p(x)\rho(x) dx$$

- Nel caso specifico che stavamo calcolando, con $[a, b]$ e $\rho(x) = 1$ si trova l'insieme dei **polinomi di Legendre**.
- Usando $[a, b]$ e la funzione peso:

$$\rho(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

si ottiene invece il cosiddetto **polinomio di Chebyshev di prima specie**, le cui radici sono i nodi di Chebyshev (che avevamo già incontrato nella sezione 14.3.3).

Esistono metodi ad-hoc per trovare gli zeri dei polinomi ortogonali su $[-1, 1]$. Una volta trovati questi si possono ottenere quelli su $[a, b]$ con il cambio di variabili:

$$[-1, 1] \rightarrow [a, b], \quad x \rightarrow \frac{b-a}{2}x + \frac{b+a}{2}$$

cioè una semplice operazione di scalatura lineare.

18 Lezione del 05-05-25

Continuiamo la trattazione dell'approssimazione di integrali attraverso le formule di quadratura interpolatorie. Un problema che avevamo fino adesso è che se h è grande, allora $E_n(f)$ è grande per qualche termine proporzionale a h^d , dove d è il grado dell'errore.

Un'idea potrebbe essere di aumentare n , quindi aumentare i punti campionati per ridurre il passo h , ma come abbiamo visto questo è instabile (risente di fenomeni simili al fenomeno di Runge).

18.0.1 Formule di Newton-Cotes generalizzate

Decidiamo quindi di spezzare l'integrale su sottointervalli, e in ciascuno di essi applicare una formula di quadratura. Questo metodo ci porterà alle formule di Newton-Cotes **generalizzate**, anche dette *composite*.

Quindi, posto ad esempio un certo intervallo $[a, b]$ contenente i punti ordinati c, d, e , dividiamo l'integrale:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^d f(x) dx + \int_d^e f(x) dx + \int_e^b f(x) dx$$

e si applica la formula di quadratura ad ogni sottointervallo, sommando.

Più formalmente, avremo che si divide $[a, b]$ in L sottointervalli equispaziati, con:

$$x_0 = a, \quad x_1 = x_0 + \frac{b-a}{L}, \quad \dots, \quad x_L = b$$

e si divide l'integrale come:

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{i=1}^L \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx$$

In ogni intervallo $[x_{i-1}, x_i]$ si applica quindi una formula di Newton Cotes con $n+1$ nodi.

Avremo quindi bisogno, in ogni sottointervallo, di:

$$n + 1 - 2 = n - 1$$

nodi aggiuntivi oltre agli estremi dell'intervallo per poter applicare la formula di quadratura $J_n(f)$. Il numero di nodi totali dovrà quindi essere:

$$L + 1 + (n - 1) \cdot L = nL + 1$$

Osserviamo che il numero di nodi corrisponde al numero di valutazioni di f , e quindi in genere è un'indicazione del costo computazionale di una formula.

18.0.2 Esempio: formula dei trapezi generalizzata

Prendiamo la forma che otteniamo per $n = 1$:

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &\approx \sum_{i=1}^L \frac{b-a}{2L} (f(x_{i-1}) + f(x_i)) = \frac{b-a}{2L} \sum_{i=1}^L (f(x_{i-1}) + f(x_i)) \\ &= \frac{b-a}{2L} \left(f(x_0) + 2 \sum_{i=1}^{L-1} f(x_i) + f(x_L) \right) = J_1^{(G)}(f) \end{aligned}$$

18.0.3 Esempio: formula di Cavalieri-Simpson

Vediamo quindi la generalizzazione della formula di Cavalieri, cioè ciò che otteniamo per $n = 2$:

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &\approx \sum_{i=1}^L \frac{b-a}{6L} \left(f(x_{i-1}) + 4f\left(\frac{x_{i-1} + x_i}{2}\right) + f(x_i) \right) \\ &= \frac{b-a}{6L} \left(f(x_0) + 2 \sum_{i=1}^L f(x_i) + 4 \sum_{i=1}^{L-1} f\left(\frac{x_{i-1} + x_i}{2}\right) + f(x_L) \right) = J_2^{(G)}(f) \end{aligned}$$

18.0.4 Errore nelle formule generalizzate

In ogni intervallo della forma $[x_{i-1}, x_i]$ conosciamo l'errore, che è quello della formula di Newton-Cotes che stiamo utilizzando:

$$e \cdot h^d \cdot f^{(d-1)}(\varepsilon), \quad f \in C^{(d-1)}([a, b])$$

L'errore sulla formula totale $J_n^{(G)}(f)$ sarà quindi:

$$E_n^{(G)}(f) = I(f) - J_n^{(G)}(f) = \sum_{i=1}^L c \cdot h^d \cdot f^{(d-1)}(\varepsilon_i), \quad \varepsilon_i \in [x_{i-1}, x_i]$$

Vediamo quindi che l'unico termine dipendente dall'intervallo è $f^{(d-1)}(\varepsilon)$, per cui possiamo dire:

$$= \sum_{i=1}^L c \cdot h^d \cdot L \frac{f^{(d-1)}(\varepsilon_i)}{L} = ch^d L \cdot f^{(d-1)}(\varepsilon), \quad \varepsilon \in [a, b]$$

sfruttando il teorema della media integrale.

Abbiamo quindi gli errori:

- **Formula dei trapezi:**

$$E_1^{(G)}(f) = -\frac{(b-a)^3}{12L^2} \cdot f''(\varepsilon)$$

- **Formula di Cavalieri-Simpson:**

$$E_2^{(G)}(f) = -\frac{(b-a)^5}{2880L^4} \cdot f^{(4)}(\varepsilon), \quad \varepsilon \in [a, b]$$

e il caso generale:

$$E_n^{(G)}(f) = \begin{cases} c_n \cdot \frac{(b-a)^{n+2}}{L^{n+1}} \cdot f^{(n+1)}(\varepsilon), & n \text{ dispari} \\ c_n \cdot \frac{(b-a)^{n+3}}{L^{n+2}} \cdot f^{(n+2)}(\varepsilon), & n \text{ pari} \end{cases}$$

18.1 Formule di quadratura sulle derivate

Potremmo considerare formule di quadratura che coinvolgono le derivate di f . Si possono quindi generalizzare i concetti di grado di precisione, scelta dei nodi e pesi ottimali anche per formule di quadratura del tipo:

$$\int_a^b f(x) \rho(x) dx = \sum_{i=0}^{n_1} f(x_i) + \sum_{i=0}^{n_2} f'(y_i) + \sum_{i=0}^{n_3} f''(z_i)$$

chiaramente restringendo l'applicazione delle formule a funzioni sufficientemente derivabili.

Vediamo ad esempio come trovare i pesi ottimi per l'approssimazione con:

$$\int_0^1 f(x) dx = I(f) \approx a_1 f(0) + a_2 f'\left(\frac{1}{3}\right) + a_3 f'\left(\frac{2}{3}\right) + a_4 f(1)$$

sull'intervallo $[a, b] = [0, 1]$.

Imponendo errore nullo ai primi 4 gradi si otterrà:

$$\begin{cases} E_1(1) = 0 \\ E_1(x) = 0 \\ E_1(x^2) = 0 \\ E_1(x^3) = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} \int_0^1 1 dx = 1 = a_1 + a_4 \\ \int_0^1 x dx = \frac{1}{2} = a_2 + a_3 + a_4 \\ \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3} = \frac{2}{3}a_2 + \frac{4}{3}a_3 + a_4 \\ \int_0^1 x^3 dx = \frac{1}{4} = \frac{1}{3}a_2 + \frac{4}{3}a_3 + a_4 \end{cases}$$

Ricaviamo allora dalle prime 3:

$$\begin{cases} a_4 = 1 - a_1 \\ a_2 = \frac{1}{2} - a_3 - a_4 \\ a_3 = \frac{3}{4} \left(\frac{1}{3} - \frac{2}{3}a_2 - a_4 \right) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2}a_2 - \frac{3}{4}a_4 \end{cases}$$

da cui sostituendo ulteriormente:

$$\begin{cases} a_4 = 1 - a_1 \\ a_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}a_4 - a_4 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}a_4 \\ a_3 = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - a_3 - a_4 \right) - \frac{3}{4}a_4 = \frac{1}{2}a_3 - \frac{1}{4}a_4 \end{cases}$$

sostituendo tutto nella quarta si ha:

$$\frac{1}{4} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}a_4 \right) + \frac{4}{3} \cdot -\frac{1}{2}a_4 + a_4 = \frac{1}{6} + \frac{1}{6}a_4 \implies a_4 \frac{1}{2}$$

da cui immediatamente:

$$a_1 = \frac{1}{2}, \quad a_2 = \frac{1}{4}, \quad a_3 = -\frac{1}{4}, \quad a_4 = \frac{1}{2},$$

da cui:

$$J_3(f) = \frac{f(0)}{2} + \frac{f'\left(\frac{1}{3}\right)}{4} - \frac{f''\left(\frac{2}{3}\right)}{4} + \frac{f(1)}{2}$$

Per determinare il grado di precisione vediamo l'errore per x^4 :

$$E_3(x^4) = \int_0^1 x^4 dx - \left(\frac{1}{2} \cdot 0 + \frac{1}{4} \cdot 4 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 - \frac{1}{4} \cdot 4 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^3 + \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{5} - \left(\frac{1}{27} - \frac{8}{27} + \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{5} - \frac{13}{54} \neq 0$$

da cui il grado di precisione è esattamente 3.