1 Lezione del 14-11-24

1.1 Simplesso per flussi capacitati

Vediamo quindi come applicare l'algoritmo del simplesso ai problemi di flusso minimo capacitato. Si ha che, dal teorema di Bellman, gli archi entranti saranno quelli che violano i vincoli:

$$\begin{cases} c_{ij}^\pi \geq 0, & \forall (i,j) \in L \\ c_{ij}^\pi \leq 0, & \forall (i,j) \in U \end{cases}$$

applicando la regola anticiclo di Bland per cui prendiamo il primo fra gli archi che viola i vincoli.

Distinguiamo qui due casi: quello dove l'arco uscente è in L, e quello dove l'arco uscente è in U:

- $\exists (i,j) \in L : c_{ij}^\pi > 0$: troviamo l'arco entrante $(p,q) \in L$. Vorremo eliminare il ciclo formato introducendo, in direzione concorde a (p,q), $\vartheta \geq 0$ unità di flusso, che come avevamo visto porta i costi degli archi sul ciclo a:

  $$x_\vartheta = \begin{cases} \overline{x}_{ij} + \vartheta, & \forall (i,j) \in \mathcal{C}^+ \\ \overline{x}_{ij} - \vartheta, & \forall (i,j) \in \mathcal{C}^- \\ \overline{x}_{ij}, & \forall (i,j) \notin C \end{cases}$$

  stabilite le partizioni concordi e discordi sul ciclo $\mathcal{C}^+$ e $\mathcal{C}^-$. Questo dà la solita regola sull'arco uscente:

  $$\vartheta^- \leq \min_{(i,j) \in \mathcal{C}^-} \{\overline{x}_{ij}\}$$

  A questo punto vogliamo verificare la validità del flusso trovato, stabilendo che:

  - x_ϑ rispetta Bellman, in quanto, per un nodo posto in qualsiasi posizione fra archi, concordi e discordi, del ciclo, modificando i flussi secondo la regola riportata sopra non modificheremo mai il bilancio complessivo (la dimostrazione si fa per enumerazione completa falla);
  - I vincoli $0 \leq x_\vartheta \leq u$ sono dimostrati se scegliamo:

    $$\vartheta^+ = \min_{(i,j) \in C^+} \{u_{ij} - \overline{x}_{ij}\}$$

    e prendiamo l'arco uscente, nel caso $\vartheta^+ < \vartheta^-$, come boh

    Questo significa che, anzichè avere la singola regola sull'arco uscente vista per il flusso semplice, nel flusso capacitato dovremo imporre:

    $$\vartheta = \min\{\vartheta^+, \vartheta^-\}, \quad \vartheta^- \leq \min_{(i,j) \in \mathcal{C}^-} \{\overline{x}_{ij}\}, \quad \vartheta^+ = \min_{(i,j) \in C^+} \{u_{ij} - \overline{x}_{ij}\}$$

    Nel caso $\vartheta = \vartheta^-$, prenderemo l'arco che ϑ^- svuota. In caso contrario, prenderemo l'arco che ϑ^+ svuota.

- $\exists (i,j) \in U : c_{ij}^\pi < 0$: