1 Lezione del 03-12-24

1.1 Analisi locale

Vediamo come applicare i metodi visti finora per ricavare massimi, minimi e punti di sella di due problemi di ottimizzazione vincolata.

1. Sia la funzione:
$$f(x_1, x_2) = (x_1 - 1)^2 + x_2^2$$
sottoposta al vincolo:
$$g_1(x_1, x_2) = x_1 - x_2^2$$
Dai gradienti:
$$\nabla f(x_1, x_2) = (2x_1 - 2, 2x_2)$$
$$\nabla g_1(x_1, x_2) = (1, -2x_2)$$
si ricava il sistema LKT come:
$$\begin{cases} 2x_1 - 2 + \lambda_1 = 0 \\ 2x_2 - 2\lambda_1 x_2 = 0 \\ \lambda_1(x_1 - x_2^2) = 0 \end{cases}$$
Le ultime due equazioni del sistema determinano completamente i valori di λ_1. Abbiamo infatti tre casi:
   - $\lambda_1 = 1 \implies x_1 - x_2^2 = 0$;
   - $\lambda_1 = 0 \implies x_2 = 0$;
   - $\lambda_1 = 2 \implies x_1, x_2 = 0$.

   Non sono possibili altre combinazioni in quanto la seconda equazione vincola λ_1 a 1 quando $x_2 \neq 0$, l'ultima vincola $x_1 = x_2^2$ quando $\lambda_1 \neq 0$, e infine $\lambda_1 = 2$ è forzato quando $x_1 = x_2 = 0$ dalla prima equazione. Le coppie punti - moltiplicatori sono quindi:

x_1	x_2	λ_1
1	0	0
$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
$\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
0	0	2

   Notiamo subito che il primo punto è inammissibile in quanto $1 - 0 > 0$, e quindi non si rispetta g_1. Restano quindi 3 punti, che per enumerazione diretta danno:
$$f\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{3}{4}$$
$$f\left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{3}{4}$$
$$f(0, 0) = 1$$

da cui risulta subito che $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ e $\left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ sono punti di minimo globale.

Per valutare il punto in $(0,0)$ possiamo prendere due percorsi, ad esempio $\phi_1(t) = (t^2, t)$ e $\phi_2(t) = (t, 0)$. Si ha:

- Per il primo percorso, $\phi_1(t) = (t^2, t)$, cioè il bordo della parabola del vincolo g_1:

$$f(\phi_1(t)) = f(t^2, t) = (t^2 - 1)^2 + t^2 = t^4 - 2t^2 + 1 + t^2 = t^4 - t^2 + 1$$

  da cui derivando:

$$D\left[f(t^2, t)\right] = 4t^3 - 2t = t(4t^2 - 2)$$

  si ottengono i punti stazionari $t = 0$, $t = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$, di cui quello in $t = 0$ è **massimo** (fra l'altro si ricavano anche i minimi locali, che stanno comunque sul bordo).

- Per il secondo percorso, $\phi_2(t) = (t, 0)$ cioè l'asse delle x, dobbiamo imporre il vincolo g_1:

$$(x_1, x_2) \leftarrow (t, 0),\ x_1 - x_2^2 \leq 0 \implies t < 0$$

  Studiamo quindi:

$$f(\phi_2(t)) = (t-1)^2 = t^2 - 2t + 1$$

  cioè la parabola di vertice a coordinata $t_0 = 1$. Essendo $1 \geq 0$ e il segno del termine di secondo grado positivo, si ha che il punto in $(0,0)$ è **minimo**.

Visto che considerando due percorsi diversi per approcciare il punto $(0,0)$ abbiamo ottenuto un massimo e un minimo, il punto è una **sella**.

Un'interpretazione secondaria è che la funzione obiettivo è un paraboloide di vertice in $(1,0)$, definito sulla regione *"esterna"* della parabola $x^2 = x_1$. Sarà allora che gli insiemi di livello della f sono circonferenze concentriche di centro $(1,0)$, cioè nella forma generale:

$$(x-1)^2 + y^2 = r^2$$

A raggi r minori, valori minori della funzione. Siamo quindi interessati a trovare i valori più vicini al punto $(1,0)$ fra quelli definiti del dominio. Calcolando le norme dei punti dati dall'LKT si ha:

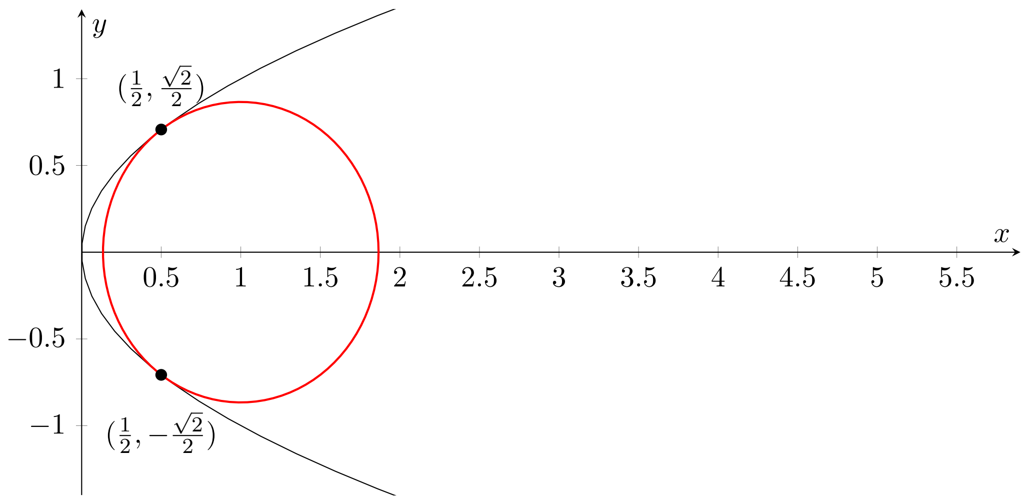
$$\left|(0,1) - \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{4}}$$

$$\left|(0,1) - \left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{4}}$$

$$|(0,1) - (0,0)| = 1$$

cioè i primi due punti sono i più vicini a $(1,0)$, e quindi necessariamente i minimi globali.

Si riporta un grafico con la circonferenza a raggio $\sqrt{\frac{3}{4}}$:



2. Sia la funzione:

$$f(x_1, x_2) = x_1 + x_2$$

sottoposta ai vincoli di diseguaglianza e uguaglianza:

$$\begin{cases} g_1(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - 2 \\ h_1(x_1, x_2) = x_2^2 - x_1 \end{cases}$$

Dai gradienti:

$$\nabla f(x_1, x_2) = (1, 1)$$
$$\nabla g_1(x_1, x_2) = (2x_1, 2x_2)$$
$$\nabla h_1(x_1, x_2) = (-1, 2x_2)$$

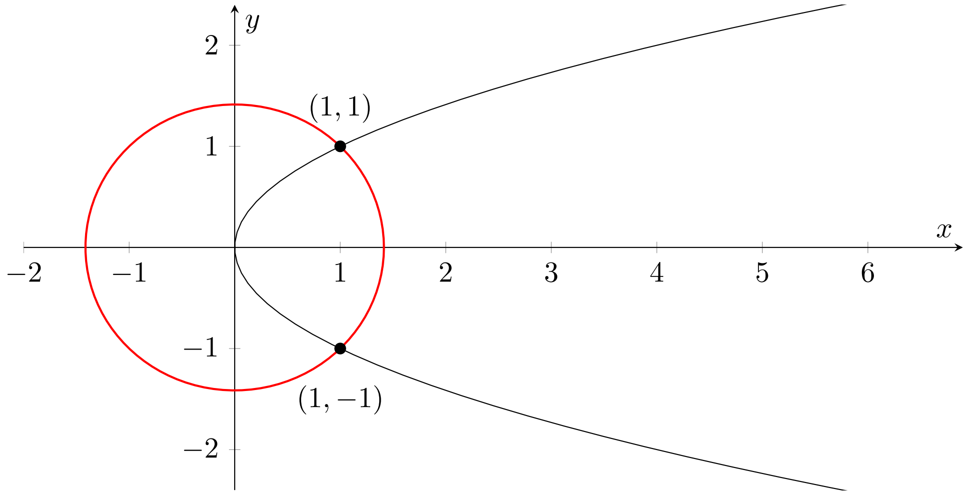
si ricava il sistema LKT come:

$$\begin{cases} 1 + 2\lambda_1 x_1 - \mu_1 = 0 \\ 1 + 2\lambda_1 x_2 - 2\mu_1 x_2 = 0 \\ \lambda_1(x_2^2 - x_1) = 0 \end{cases}$$

Il sistema si risolve, in maniera non banale, imponendo separatamente o entrambi i vincoli (λ_1 e $\mu_1 \neq 0$) o il solo vincolo di uguaglianza ($\lambda = 0$), ottendendo:

x_1	x_2	λ_1	μ_1
1	1	$\frac{1}{2}$	0
1	-1	$-\frac{1}{6}$	$\frac{2}{3}$
$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{2}$	0	1

Un'interpretazione geometrica più immediata si può avere valutando i vincoli: g_1 definisce i punt interni alla circonferenza centrata sull'origine di raggio $\sqrt{2}$, mentre h_1 definisce la parabola con asse sull'asse x dell'esempio precedente. Vogliamo prendere le intersezioni dei bordi dei domini (i primi due punti dei moltiplicatori, e il punto dove la parabola è perpendicolare al gradiente di f (l'ultimo punto). Si riporta un grafico:



Da qui in poi, per valutazione diretta, si ottiene:

$$f(1,1) = 2$$

$$f(1,-1) = 0$$

$$f\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4}$$

da cui massimo in $(1, 1)$ e minimo in $(\frac{1}{4}, \frac{-1}{2})$ (come poteva essere chiaro anche tracciando gli insiemi di livello di f). Il punto in $(1, -1)$ può essere valutato solo sulla parabola stessa, dove risulta sicuramente crescente (il minimo è toccato in un unico punto). Si ha quindi che è un massimo locale.

Un approccio alternativo al problema può essere poi quello di parametrizzare, ad esempio attraverso una funzione $\phi(t)$ che traccia la parabola sul piano x, y, su cui imponiamo il vincolo della g_1:

$$\phi(t) = (t^2, t) \implies f(\phi(t)) = t^2 + t$$

dove si nota che i limiti del dominio sono sempre i punti $(1, 1)$ e $(1, -1)$. Con $\phi(1) = (1, 1)$ e $\phi(-1) = (1, -2)$, avremo che il dominio di definizione di ϕ (e quindi di $f \circ \phi$) è $[-1, 1]$. Possiamo quindi studiare la funzione su tale dominio per ottenere gli stessi punti di massimo, globale e locale, e minimo globale.

1.2 Algoritmi di PNL

Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$: vogliamo definire algoritmi che ricavino, ad esempio, $\max\limits_{x \in \mathbb{R}^n} f(x)$. L'idea fondamentale è quella di creare una **relazione di ricorrenza**, cioè una successione di iterazioni che converga verso il punto di massimo.

1.2.1 Direzioni di crescita

Partiamo quindi da una certa x_k e convergiamo verso una x_{k+n} corrispondente al punto desiderato. La domanda è come calcolare x_{k+1}. Scegliamo quindi una direzione di spostamento d_k e modifichiamo x_k come:

$$x_{k+1} = x_k + t\, d_k$$

dove t è detto *step size* o **passo**, ed è un parametro ≥ 0 che determina la *velocità* di convergenza dell'algoritmo (vedremo però che t sempre più grandi non sono sempre ottimi, in quanto potrebbero essere meno precisi se non addirittura oltrepassare completamente il punto di massimo).

Sostituendo la successione in $f(x)$ si ottiene:

$$f(x_k + t\,d_k) = \phi(t)$$

che corrisponde, per $x \in \mathbb{R}^n$, ad un *taglio* della funzione su n variabili lungo una curva determinata dai d_k e campionata ad intervalli t.

Ci chiediamo quindi come scegliere i d_k cioè le **direzioni di crescita**: scorrendo lungo queste direzioni ci aspettiamo che, almeno localmente, la funzione salga. Notiamo che, ad esempio, nella PL questa era stata la colonna corrispondente a vincolo uscente della matrice $W = -A_B^{-1}$. Su funzioni nonlineari arbitrarie, questa sarà invece il **gradiente** ∇f della funzione calcolato in x_k. Finchè questo sarà $\neq 0$, la $\phi(t)$ sarà monotona crescente per t successivi, cioè per ogni x_k varrà $x_k \leq x_{k+1}$.

Notiamo che il gradiente $\nabla f \geq 0$ vale come direzione di crescita per la $\phi(t)$. Applicando la regola della derivazione a catena sulla variabile t abbiamo infatti:

$$\nabla \phi(t) = \nabla f(x_k + t\,d_k) = \nabla f(x_k + t\,d_k) \cdot \mathrm{D}\left[x_k + t\,d_k\right] = \nabla f(x_k + t\,d_k) \cdot d_k$$

Ricaviamo quindi che, se d_k è tale che $\nabla f(x_k) \cdot\ d_k > 0$, allora d_k è una direzione di crescita. Una direzione che sicuramente ha prodotto scalare positivo col gradiente sarà il gradiente stesso, da cui quanto sopra, con:

$$\nabla \phi(t) = \nabla f(x_k + t\,d_k) \cdot\ d_k = |\nabla f(x_k + t\,d_k)|^2$$

Notiamo che una direzione di sallita non resta tale per ogni valore di t, bensì rappresenta effettivamente un accrescimento della funzione solo per un certo intervallo, cioè:

$$\exists \bar{t},\ \forall t \in (0, \bar{t}] : f(x_k + t\,d_k) > f(x_k)$$

Possiamo riprendere il conto precedente per determinare se una direzione è di crescita. In particolare, se $\nabla f(x_k) \cdot d_k > 0$, allora d_k è di crescita. Notiamo ancora che $d_k = \nabla f(x_k)$ soddisfa questa disequazione, quindi è una direzione di crescita.