1 Lezione del 28-11-24

1.1 Teorema di Lagrange-Kuhn-Tucker

Abbiamo assunto come ipotesi per i domini di f che prenderemo in considerazione, cioè:

$$\Omega = \begin{cases} g(x) \leq 0 \\ h(x) = 0 \end{cases}$$

che $f, g, h \in C^1$, e Ω regolare secondo una qualsiasi delle forme viste in precedenza (ci basta la *condizione di Slater*).

Vediamo allora il teorema, detto *di Lagrange-Kuhn-Tucker*, o di *Lagrange-Karush-Kuhn-Tucker*, o più semplicemente **LKT** o **LKKT**:

Teorema 1.1: Teorema di Lagrange-Kuhn-Tucker

Sia $\bar{x} \in D$ minimo locale. Allora $\exists \bar{\lambda} \in \mathbb{R}^m$, $\bar{\lambda} \geq 0$, $\exists \bar{\mu} \in \mathbb{R}^p$ tali che:

$$\begin{cases} \nabla f(\bar{x}) + \sum_{i=1}^{m} \bar{\lambda}_i \nabla g_i(\bar{x}) + \sum_{i=1}^{m} \bar{\mu}_i \nabla h_j(\bar{x}) = 0 \\ \bar{\lambda}_i g_i(\bar{x}) = 0, \quad \forall i = 1, ..., m \\ h_j(\bar{x}) = 0, \quad \forall j = 1, ..., p \end{cases}$$

Il sistema ha $n + m + p$ equazioni su $n + m + p$ variabili e viene detto **sistema LKT**. Notiamo che nel caso di minimo, vorremo che i moltiplicatori $\bar{\lambda}$ siano ≤ 0 anziché ≥ 0.

La funzione:

$$\mathcal{L}(x, \lambda, \mu) = f(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(x) + \sum_{j=1}^{p} \mu_j h_j(x)$$

viene detta **Lagrangiana** $\mathcal{L}(x, \lambda, \mu)$. Allora la prima equazione dell'LKT non sarà altro che:

$$\nabla f(\bar{x}) + \sum_{i=1}^{m} \bar{\lambda}_i \nabla g_i(\bar{x}) + \sum_{i=1}^{m} \bar{\mu}_i \nabla h_j(\bar{x}) = \nabla_x \mathcal{L}(\bar{x}, \bar{\lambda}, \bar{\mu}) = 0$$

In generale, essere soluzione del sistema LKT è per un punto condizione **necessaria** ad essere massimo (minimo). Questo significa che tutti i massimi (minimi) della funzione f sottoposta ai vincoli Ω sono soluzioni dell'LKT.