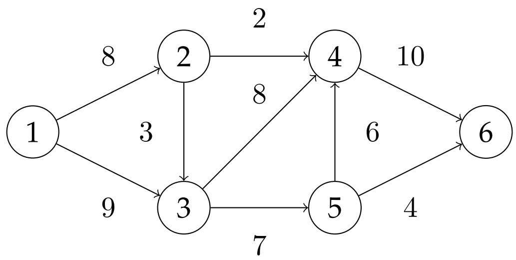
1 Lezione del 18-11-24

1.1 Problema di flusso massimo

Poniamo di avere un grafo su cui riportiamo solamente le capacità superiori u_{ij} sui singoli archi:



Prendiamo due nodi s e t, e cerchiamo di **massimizzare** il flusso da s a t. L'idea fondamentale che il flusso che parte da s dovrà essere uguale al flusso che arriva in t. Potremo partire da un flusso ammissibile qualsiasi, cioè che si limita a rispettare le capacità:

$$x = (2, 4, 0, 2, 0, 4, 2, 0, 4)$$

Notando che le capacità sugli *ultimi* archi influenzano quelle sugli archi precedenti (ad esempio, $(3, 5)$ è limitato a 4 da $(5, 6)$ con $u_{56} = 4$). Poniamo allora, più intelligentemente, un problema di PL:

$$\begin{cases} \max v \\ Ex = b \\ 0 \leq x \leq u \end{cases}$$

dove E è la matrice di incidenza della rete, e i bilanci b_i stessi dipendono dalla variabile v:

$$b_i = \begin{cases} -v, & i = s \\ 0, & i \neq s \land i \neq t \\ v, & i = t \end{cases}$$

Potremmo avere dubbi sul fatto che la variabile v compare nei bilanci b. Scriviamo per esteso le uguaglianze dei vincoli:

$$\begin{cases} -x_{12} - x_{13} = -v \\ x_{12} - x_{23} - x_{24} = 0 \\ x_{13} + x_{23} - x_{34} - x_{35} = 0 \\ x_{24} + x_{34} + x_{54} - x_{46} = 0 \\ x_{35} - x_{54} - x_{56} = 0 \\ x_{46} + x_{56} = v \end{cases}$$

Notiamo che questo problema è effettivamente un problema di flusso minimo (massimo) su $n+1$ variabili per n nodi, dove la n-esima variabile è proprio il flusso v. Inoltre, con capacità massime intere, anche v sarà necessariamente intero (dato da somma di interi) e quindi la matrice **unimodulare**, con la conseguenza già vista che PL = ILP.

Inoltre, possiam portare i termini v di b a sinistra delle rispettive equazioni, ottenendo effettivamente la matrice:

$$\begin{pmatrix} & 1 \\ E & 0 \\ & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix} = 0$$

cioè dove si è introdotto la un **arco fittizio**, quello che parte da t e arriva in s. Capovolgendo la funzione obiettivo (e riportando in vista i termini di costo nullo su ogni arco x_{ij}), otteniamo quindi:

$$\begin{cases} \min 0 \cdot x - v \\ \begin{pmatrix} & 1 \\ E & 0 \\ & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix} = 0 \\ 0 \leq x \leq u \end{cases}$$

dove per l'ultimo arco fittizio la capacità massima u è un M molto grande (o ∞).

Questo è un problema di flusso di costo minimo capacitato che include l'arco fittizio come unico arco a costo diverso da 0 (per giunta negativo), cioè che è "costretto" a imporre flusso massimo da t ad s, e visto che tutti i nodi sono a bilancio 0, a riportarlo in direzione opposta da s a t lungo i nodi della rete vera e propria.

A questo punto possiamo proporre la soluzione ammissibile:

$$(x, v) = (2, 9, 0, 2, 5, 4, 7, 0, 4, 11)$$

da cui si ricavano le partizioni, controllando quali archi si svuotano e quali saturano:

$$T = \{(1,2), (3,4), (3,5), (4,6), (6,1)\}, \quad L = \{(2,3), (5,4)\}, \quad U = \{(1,3), (2,4), (5,6)\}$$

Possiamo quindi ricavare il potenziale dell'albero di copertura, notando che dividerà necessariamente i nodi in partizione di potenziale 0 e potenziale 1:

$$\pi = (0, 0, 1, 1, 1)$$

e calcolare i costi ridotti, che troviamo negativi su $(2,3) \in L$, quindi arco entrante:

$$c_{23}^{\pi} = 0 + 0 - 1 = -1$$

che è quanto ci aspettavamo, in quanto chiaramente $v = 14$ (dagli archi entranti nel nodo 6).

Procediamo quindi con l'eliminazione del ciclo, distinguendo innanzitutto le pratizioni $\mathcal{C}^+$ e $\mathcal{C}^-$:

$$\mathcal{C}^+ = \{(1,2), (2,3), (3,4), (4,6), (6,1)\}, \quad \mathcal{C}^- = \emptyset$$

Su $\mathcal{C}^-$ mettiamo $\vartheta^- = \infty$ (essenzialmente vogliamo considerare solo ϑ^+). Calcoliamo allora ϑ^+ dagli $u_{ij} - x_{ij}$, tenendo conto che la capacità u di $(6,1)$ (arco fittizio) è ∞:

$$\vartheta^+ = \max\{6, 3, 3, 3, \infty\}$$

da cui prendiamo $\vartheta^+ = 3$ e l'arco uscente $(2,3)$ per l'ordinamento lessicografico. Notiamo di essere nel caso particolare dove l'arco *entra* ed *esce* (in questo caso si sposta da L a U).

Aggiungendo quindi il ϑ agli archi in $\mathcal{C}^+$ otteniamo il flusso:

$$(x, v) = (5, 9, 3, 2, 8, 4, 10, 0, 4, 14)$$

da cui $v = 14$, come ci aspettavamo.