

# 1 Lezione del 21-10-24

## 1.1 Applicazione dell'algoritmo di riduzione del gap

Applichiamo il metodo dei piani di taglio di Gomory ad alcuni problemi di ILP.

### 1.1.1 Zaino intero

Prendiamo il problema:

$$\begin{cases} \max 30x_1 + 36x_2 + 27x_3 + 20x_4 + 24x_5 + 22x_6 \\ 13x_1 + 16x_2 + 14x_3 + 15x_4 + 17x_5 + 14x_6 \leq 57 \\ x \in \mathbb{Z}_+ \end{cases}$$

con il vettore dei rendimenti:

$$r = (2.3, 2.25, 1.93, 1.33, 1.41, 1.57)$$

Saturiamo per ottenere una soluzione  $x_{RC}$ , e quindi una valutazione superiore:

$$x_{RC} = \left( \frac{57}{13}, 0, 0, 0, 0, 0 \right), \quad v_S = 131$$

e saturiamo l'intero per avere una valutazione inferiore:

$$x_I = (4, 0, 0, 0, 0, 0), \quad v_I = 120$$

Adesso applichiamo Gomory:

1. Si porta il rilassato continuo in formato duale standard:

$$\begin{cases} \max 30x_1 + 36x_2 + 27x_3 + 20x_4 + 24x_5 + 22x_6 \\ 13x_1 + 16x_2 + 14x_3 + 15x_4 + 17x_5 + 14x_6 + x_7 = 57 \\ x_i \geq 0 \end{cases}$$

2. Si individua la base ottima:

$$x_{RC} = \left( \frac{57}{13}, 0, 0, 0, 0, 0 \right) \Rightarrow B = \{1\}$$

3. Si ricavano  $A_B$ ,  $A_N$ ,  $x_B$ ,  $x_N$  e  $r$ :

$$A_B = (13), \quad A_N = (16 \ 14 \ 15 \ 17 \ 14 \ 1), \quad x_B = \left( \frac{57}{13} \right), \quad x_N = (0, 0, 0, 0, 0)$$

e chiaramente  $r = 1$ ;

4. Si ricava  $\tilde{A}$ :

$$\tilde{A} = A_B^{-1} A_N = \left( \frac{16}{13}, \frac{14}{13}, \frac{15}{13}, \frac{17}{13}, \frac{14}{13}, \frac{1}{13} \right)$$

5. Si trova il nuovo vincolo:

$$\left\{\frac{16}{13}\right\}x_2 + \left\{\frac{14}{13}\right\}x_3 + \left\{\frac{15}{13}\right\}x_4 + \left\{\frac{17}{13}\right\}x_5 + \left\{\frac{14}{13}\right\}x_6 + \left\{\frac{1}{13}\right\}x_7 \geq \left\{\frac{57}{13}\right\}$$

$$\frac{3}{13}x_2 + \frac{1}{13}x_3 + \frac{2}{13}x_4 + \frac{4}{13}x_5 + \frac{1}{13}x_6 + \frac{1}{13}x_7 \geq \frac{5}{13}$$

Che espresso sostituendo  $x_7 = 57 - 13x_1 - 16x_2 - 14x_3 - 15x_4 - 17x_5 - 14x_6$  e unito a quanto già trovato dà il problema:

$$\begin{cases} \max 30x_1 + 36x_2 + 27x_3 + 20x_4 + 24x_5 + 22x_6 \\ 13x_1 + 16x_2 + 14x_3 + 15x_4 + 17x_5 + 14x_6 \leq 57 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \leq 4 \\ x \in \mathbb{Z}_+ \end{cases}$$

da cui  $x_{RC} = \left(\frac{7}{3}, \frac{5}{3}, 0, 0, 0, 0\right)$ , che è già più vicino all'ottimo  $\bar{x} = (3, 1, 0, 0, 0, 0)$ .

### 1.1.2 Zaino booleano

Prendiamo a questo punto:

$$\begin{cases} \max 30x_1 + 36x_2 + 27x_3 + 20x_4 + 24x_5 + 22x_6 \\ 13x_1 + 16x_2 + 14x_3 + 15x_4 + 17x_5 + 15x_6 \leq 57 \\ x \in \mathbb{Z}_+ \\ 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Attraverso la saturazione, troviamo:

$$x_{RC} = \left(1, 1, 1, 0, 0, \frac{14}{15}, 0\right), \quad v_S = 115.4$$

di valutazione superiore, e

$$x_I = (1, 1, 1, 0, 0, 0), \quad v_I = 93$$

di valutazione inferiore.

Riappliciamo Gomory.

1. L'ottimo è noto:

$$x_{RC} = \left(1, 1, 1, 0, 0, \frac{14}{15}, 0\right)$$

2. Convertiamo in formato duale standard, ricordando i vincoli  $0 \leq x_i \leq 1$ :

$$\begin{cases} \max 30x_1 + 36x_2 + 27x_3 + 20x_4 + 24x_5 + 22x_6 \\ 13x_1 + 16x_2 + 14x_3 + 15x_4 + 17x_5 + 15x_6 + x_7 = 57 \\ x_1 + x_8 = 1 \\ x_2 + x_9 = 1 \\ x_3 + x_{10} = 1 \\ x_4 + x_{11} = 1 \\ x_5 + x_{12} = 1 \\ x_6 + x_{13} = 1 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

Dobbiamo ricalcolare l'ottimo:

$$x'_{RC} = \left(1, 1, 1, 0, 0, \frac{14}{15}, 0, 0, 0, 0, 1, 1, \frac{1}{15}\right)$$

3. Si individua la base ottima:

$$x'_{RC} = \left(1, 1, 1, 0, 0, \frac{14}{15}, 0, 0, 0, 0, 1, 1, \frac{1}{15}\right) \Rightarrow B = \{1, 2, 3, 6, 11, 12, 13\}$$

4. Si ricavano  $A_B, A_N, x_B, x_N$  e  $r$ : Conviene prima scrivere  $A$ :

$$A = \begin{pmatrix} 13 & 16 & 14 & 15 & 17 & 15 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e quindi:

$$A_B = \begin{pmatrix} 13 & 16 & 14 & 15 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_N = \begin{pmatrix} 15 & 17 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$x_B = \left(1, 1, 1, \frac{14}{15}, 1, 1, \frac{1}{15}\right), \quad x_N = (0, 0, 0, 0, 0, 0)$$

e  $r = 4, 7$ ;

5. Si ricava  $\tilde{A}$ :

$$\tilde{A} = A_B^{-1} A_N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & \frac{17}{15} & \frac{1}{15} & -\frac{13}{15} & -\frac{16}{15} & -\frac{14}{15} \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -\frac{17}{15} & -\frac{1}{15} & \frac{13}{15} & \frac{16}{15} & \frac{14}{15} \end{pmatrix}$$

6. Si trovano due nuovi vincoli, notando che  $N = \{4, 5, 7, 8, 9, 10\}$ :

$$r = 4 \Rightarrow x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \leq 4$$

$$r = 7 \Rightarrow 13x_1 + 15x_2 + 14x_3 + 14x_4 + 15x_5 + 14x_6 \leq 55$$

### 1.1.3 Produzione

Supponiamo di avere il problema di minimizzazione:

$$\begin{cases} \max 5x_1 + 14x_2 \\ 16x_1 + 13x_2 \geq 62 \\ 6x_1 + 15x_2 \geq 52 \\ x \in \mathbb{Z}_+^2 \end{cases}$$

Possiamo fare le valutazioni:

$$x_{RC} = \left( \frac{26}{3}, 0 \right), \quad v_I = 43$$

$$x_S = (9, 0), \quad v_S = 45$$

dove notiamo che l'arrotondamento della soluzione del rilassato è stavolta **per eccesso**, e rappresenta la **valutazione superiore**, in quanto il problema è **minimizzante**.

Applichiamo quindi Gomory:

1. Convertiamo in formato duale standard:

$$\begin{cases} \max 5x_1 + 14x_2 \\ 16x_1 + 13x_2 - x_3 = 62 \\ 6x_1 + 15x_2 - x_4 = 52 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

Dobbiamo ricalcolare l'ottimo per rendere conto alla variabile  $x_3$  introdotta:

$$x'_R C = \left( \frac{26}{3}, 0, \frac{220}{3}, 0 \right)$$

2. Si individua la base ottima dall'ottimo ricalcolato:

$$x'_R C = \left( \frac{26}{3}, 0, \frac{220}{3}, 0 \right) \Rightarrow B = \{1, 3\}$$

3. Si ricavano  $A_B, A_N, x_B, x_N$  e  $r$ :

$$A_B = \begin{pmatrix} 16 & -1 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_N = \begin{pmatrix} 13 & 0 \\ 15 & -1 \end{pmatrix}, \quad x_B = \left( \frac{26}{3}, \frac{230}{3} \right), \quad x_N = (0, 0)$$

e  $r = 1, 3$ .

4. Si ricava  $\tilde{A}$ :

$$\tilde{A} = A_B^{-1} A_N = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} & -\frac{1}{6} \\ 27 & -\frac{8}{3} \end{pmatrix}$$

5. Si ricavano i due nuovi vincoli:

$$r = 1 \Rightarrow 5x_1 + 14x_2 \geq 44$$

$$r = 2 \Rightarrow$$