1 Lezione del 27-11-24

1.1 Domini di problemi di programmazione non lineare

Abbiamo studiato finora funzioni non lineari nell'ottica dell'ottimizzazione non vincolata. Vediamo adesso una delle forme dei domini su cui possiamo limitare tali funzioni nel caso dell'ottimizzazione vincolata:

$$D = \{x \in \mathbb{R}^{\ltimes} : \ g_1(x) \leq 0, \ g_2(x) \leq 0, \ ..., \ g_m(x) \leq 0, \ h_1(x) = 0, \ h_2(x) = 0, \ ..., \ h_p(x) = 0\}$$

dove

$$\begin{cases} g_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, & i = 1, ..., m \\ h_j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, & j = 1, ..., p \end{cases}$$

o in maniera più compatta:

$$D = \{x \in \mathbb{R}^n : \ g(x) \leq 0, \ h(x) = 0\}$$

dove

$$\begin{cases} g(x) = (g_1(x), \ g_2(x), \ ..., \ g_m(x)) \\ h(x) = (h_1(x), \ h_2(x), \ ..., \ h_p(x)) \end{cases}$$

Notiamo che i poliedri studiati finora non sono che un caso particolare di insiemi in questa forma. Possiamo quindi dire che da qui in poi formuleremo i problemi di NLP come:

$$\begin{cases} \max f(x) \\ g(x) \leq 0 \\ h(x) = 0 \end{cases}$$

dove $f(x)$ è una funzione in n variabili, $g(x)$ è un vettore di m funzioni, e $h(x)$ è un vettore di p funzioni. Vediamo alcune propietà che ci aspettiamo dal dominio:

- Assumeremo ognuna delle funzioni $g_i(x)$ e $h_j(x)$ come almeno $\in C^2$, in modo da poter calcolare gradiente ed Hessiana;

- Un vantaggio sarà dato dal fatto che l'insieme è **chiuso**: avevamo visto sulla PL come la soluzione stava *sempre* sulla frontiera. Qui, avremo che la soluzione sta *spesso* sulla frontiera, e dovremo quindi includerla in modo da non perdere soluzioni valide;

- L'insieme sarà idealmente **limitato**, così da permetterci di confermare attraverso il teorema di Weierstrass l'esistenza di minimi e massimi. Questo tra l'altro è necessario in quanto computazionalmente porremo come limite ai domini un iperrettangolo $-M \leq x_i \leq M$ con $M >> 0$. Essendo l'iperrettangolo limitato, e il dominio contenuto interamente al suo interno, risulterà chiaramente che anche il dominio stesso sarà (o dovrà essere) limitato;

- Vorremo poi che l'insieme sia **convesso**, visto che questo facilita la sua esplorazione (spostandoci verso vettori *interni* all'insieme da ogni suo punto saremo sicuri di uscire dall'insieme stesso una e una sola volta). Possiamo dare la seguente caratterizzazione:

  Teorema 1.1: caratterizzazione di insieme convesso

  Se le g_i sono convesse e le h_j sono lineari, allora D è convesso.

1.1.1 Domini regolari

Vediamo quindi una classificazione per domini **regolari**, definizione

1. Poliedri
2. g_i convesse, h_j lineari, $\exists \bar{x} : g_i(\bar{x}) < 0 \ \forall i$
3. $\begin{cases} \nabla g_i(\bar{x}), & i \in A(\bar{x}) \\ \nabla h_j(x) \end{cases}$ sono linearmente indipendenti
   dove $A(\bar{x})$ dà i **vincoli attivi** $A(\bar{x}) = \{i : g_i(\bar{x}) = 0\}$.
   A parole, il gradiente dei dei vincoli di diseguaglianza attivi è linearmente indipendente dal gradiente dei vincoli di uguaglianza.