1 Lezione del 14-11-24

1.1 Simplesso per flussi capacitati

Vediamo quindi come applicare l'algoritmo del simplesso ai problemi di flusso minimo capacitato. Si ha che, dal teorema di Bellman, gli archi entranti saranno quelli che violano i vincoli:

$$\begin{cases} c_{ij}^{\pi} \geq 0, & \forall (i,j) \in L \\ c_{ij}^{\pi} \leq 0, & \forall (i,j) \in U \end{cases}$$

Il fatto che un arco entrante può appartenere sia a L che a U significherà che dovremo fare delle considerazioni diverse in fase di elminazione dei cicli e in fase di inserzione dell'arco fra gli insiemi T, L, U

Troviamo quindi questo arco entrante $(p,q) \in L \cup U$, discriminando attraverso la regola anticiclo di Bland sull'ordine lessicografico degli archi. Vorremo eliminare il ciclo formato introducendovi $\vartheta \geq 0$ unità di flusso.

- Nel caso $(p,q) \in L$, introdurremo le unità ϑ nella direzione **concorde** al flusso per cercare di *riempire* l'arco.
- In caso contrario, con $(p,q) \in U$, introdurremo le unità ϑ nella direzione **discorde** al flusso, per cercare di *svuotare* l'arco (ricordiamo che gli archi in U sono quelli forzati pieni).

Scelta quindi una direzione per le unità ϑ, avremo che i flussi sul ciclo si evolvono come:

$$x_{\vartheta} = \begin{cases} \overline{x}_{ij} + \vartheta, & \forall (i,j) \in \mathcal{C}^+ \\ \overline{x}_{ij} - \vartheta, & \forall (i,j) \in \mathcal{C}^- \\ \overline{x}_{ij}, & \forall (i,j) \notin C \end{cases}$$

stabilite le partizioni concordi e discordi sul ciclo $\mathcal{C}^+$ e $\mathcal{C}^-$.

Notiamo che il flusso trovato aggiungendo o rimuovendo ϑ unità di flusso, che chiamiamo x_{ϑ}, rispetta Bellman, in quanto per un nodo posto in qualsiasi posizione fra archi concordi e discordi del ciclo, modificando i flussi secondo la regola riportata sopra non modificheremo mai il bilancio complessivo.

Questo si può dimostrare per enumerazione completa: preso un nodo n_c ad arbitrio su $\mathcal{C}$, si hanno i casi:

- n_c si trova fra due archi discordi: uno sarà discorde e l'altro concorde alla direzione di percorrenza, ergo avremo un unità di flusso in meno da un lato e una in più dall'altro.
- n_c si trova fra due archi concordi: questi cresceranno o diminuiranno di uno, ma in entrambi i casi l'unità in più (o in meno) di un arco dovrà essere fornita (ottenuta) dall'altro arco.

Ciò che cambierà invece saranno i costi, in quanto assunto che c_{pq}^{π} è uguale al costo del ciclo, si avrà che il percorso fatto sul ciclo senza (p,q) costerà la differenza di potenziale $c_{cic} = \pi_p - \pi_q$, e da $c_{pq} < c_{cic}$ sarà chiaramente più vantaggioso passare per (p,q).

Avremo quindi due condizioni di arresto per la variabile ϑ:

- Il primo caso è che un arco in $\mathcal{C}^-$ si annulli, cioè quello che avevamo visto sul flusso non capacitato, che si applica all'arco $(r,s) \in \mathcal{C}^-$ con $x_{rs} = \vartheta$
- Il secondo caso è che un arco in $\mathcal{C}^+$ arrivi a capienza totale, e si applica all'arco $(r,s) \in \mathcal{C}^-$ con $u_{rs} - x_{rs} = \vartheta$.

Notiamo che dai due casi non è possibile dare una definizione univoca di ϑ. Diciamo allora:

$$\vartheta^+ = \min\{u_{ij} - x_{ij},\, (i,j) \in \mathcal{C}^+\}$$
$$\vartheta^- = \min\{x_{\text{ij}},\, (i,j) \in \mathcal{C}^-\}$$

da cui:

$$\vartheta = \min\{\vartheta^+, \vartheta^-\}$$

cioè definiamo separatamente il ϑ^+ del primo arco saturo su $\mathcal{C}^+$, e il ϑ^- del primo arco vuoto su $\mathcal{C}^-$. Di conseguenza, ϑ sarà il minimo fra ϑ^+ e ϑ^-, cioè il primo che porta a una violazione dei vincoli.

Notiamo infine come ϑ può tendere a ∞: questo è il caso già visto dei cicli a costo negativo, e porta la soluzione del problema a $-\infty$.

Decideremo quindi di scegliere come arco uscente il primo arco (r,s), dalla regola anticiclo di Bland sull'ordine lessicografico degli archi, che ha $u_{rs} - x_{rs} = \vartheta$ per $(r,s) \in \mathcal{C}^+$ o $x_{rs} = \vartheta$ per $(r,s) \in \mathcal{C}^-$.

Resta quindi il problema di aggiornare le partizioni T, L, U sulla base degli archi (p,q) entrante e (r,s) uscente scelti. Dovremo effettivamente porci due domande:

- L'arco entrante (p,q) è vuoto ($\in L$) o saturo ($\in U$)?
- L'arco uscente (r,s) esce dopo essere svuotato ($\in \mathcal{C}^-$) o saturato ($\in \mathcal{C}^+$)?

Iniziamo a discriminare dalla prima domanda.

- $(p,q) \in L$:
  - $(r,s) \in \mathcal{C}^-$: l'arco entrante è vuoto e l'uscente esce svuotato. Vorremo spostare l'arco entrante in T e l'arco uscente in in L, cioè:
  $$T = T \setminus (r,s) \cup (p,q), \quad L = L \setminus (p,q) \cup (r,s)$$
  - $(r,s) \in \mathcal{C}^+$: l'arco entrante è vuoto e l'uscente esce saturato. Vorremo spostare l'arco entrante in T e l'arco uscente in in U, cioè:
  $$T = T \setminus (r,s) \cup (p,q), \quad L = L \setminus (p,q), \quad U = U \cup (r,s)$$
  Notiamo che in questa situazione può presentarsi il caso dove $(p,q) = (r,s)$, cioè l'arco (p,q) entra da vuoto e esce saturato, cioè semplicemente passa da L a U.
- $(p,q) \in U$:
  - $(r,s) \in \mathcal{C}^-$: l'arco entrante è pieno e l'uscente esce svuotato. Vorremo spostare l'arco entrante in T e l'arco uscente in in L, cioè:
  $$T = T \setminus (r,s) \cup (p,q), \quad L = L \cup (r,s), \quad U = U \setminus (p,q)$$
  Notiamo che in questa situazione può presentarsi il caso dove $(p,q) = (r,s)$, cioè l'arco (p,q) entra da pieno e esce svuotato, cioè semplicemente passa da U a l.

- $(r, s) \in \mathcal{C}^+$: l'arco entrante è pieno e l'uscente esce saturato. Vorremo spostare l'arco entrante in T e l'arco uscente in in U, cioè:

$$T = T \setminus (r, s) \cup (p, q), \quad U = U \setminus (p, q) \cup (r, s)$$

Possiamo quindi formulare l'algoritmo:

Algoritmo 1 del simplesso per flussi capacitati

Input: un problema di flusso di costo minimo capacitato
Output: la soluzione ottima
Trova una partizione degli archi (T, L, U) con T albero di copertura che genera un flusso ammissibile
ciclo:
Calcola il flusso di base capacitato:

$$\bar{x} = \left(E_T^{-1}(b - E_U u_U), 0, u_U, u_T - x_T, u_L, 0\right)$$

e il potenziale di base capacitato:

$$\bar{\pi} = \left(c_T^T E_T^{-1}, 0, 0, c_U^T - \pi^T E_U\right)$$

Calcola i costi ridotti $c_{ij}^{\bar{\pi}} = c_{ij} + \bar{\pi}_{ij} - \bar{\pi}_{ij}$ per ogni arco
if Bellman è soddisfatto, cioè:

$$c_{ij}^{\overline{\pi}} \geq 0 \ \ \forall (i,j) \in L$$

$$c_{ij}^{\overline{\pi}} \leq 0 \ \ \forall (i,j) \in U$$

then
Fermati, $\bar{x}$ è un flusso ottimo e $\bar{\pi}$ è un potenziale ottimo
else
Calcola l'arco entrante:

$$(p, q) = \min \left\{ \{(i,j) \in L : c_{ij}^{\bar{\pi}} < 0\} \cup \{(i,j) \in U : c_{ij}^{\bar{\pi}} > 0\} \right\}$$

stabilito l'ordinamento lessicografico degli archi
Chiama $\mathcal{C}$ il ciclo che l'arco (p, q) forma con gli archi in T
Fissa un orientamento concorde a (p, q) su $\mathcal{C}$ se $(p, q) \in L$, e discorde se $(p, q) \in U$ e partiziona $\mathcal{C}$ in $\mathcal{C}^+$ archi concordi e $\mathcal{C}^-$ archi discordi a tale orientamento
end if
Calcola:

$$\vartheta^+ = \min\{u_{ij} - \bar{x}_{ij} : (i,j) \in \mathcal{C}^+\}$$

$$\vartheta^- = \min\{\bar{x}_{ij} : (i,j) \in \mathcal{C}^-\}$$

$$\vartheta = \min\{\vartheta^+, \vartheta^-\}$$

if $\vartheta = \infty$ **then**
Fermati, il flusso di costo minimo ha valore $-\infty$
else
Trova l'arco uscente:

$$(r, s) = \min \left\{ \{(i,j) \in \mathcal{C}^+ : u_{ij} - \bar{x}_{ij} = \vartheta\} \cup \{(i,j) \in \mathcal{C}^- : \bar{x}_{ij} = \vartheta\} \right\}$$

stabilito un ordinamento lessicografico degli archi
end if

Aggiorna le partizioni come:
if $(p,q) \in L$ **then**
  if $(r,s) \in \mathcal{C}^-$ **then**
    $T = T \setminus (r,s) \cup (p,q),\ L = L \setminus (p,q) \cup (r,s)$
  else
    if $(p,q) = (r,s)$ **then**
      $L = L \setminus (p,q),\ U = U \cup (p,q)$
    else
      $T = T \setminus (r,s) \cup (p,q),\ L = L \setminus (p,q),\ U = U \cup (r,s)$
    end if
  end if
else
  if $(r,s) \in \mathcal{C}^-$ **then**
    if $(p,q) = (r,s)$ **then**
      $L = L \cup (p,q),\ U = U \setminus (p,q)$
    else
      $T = T \setminus (r,s) \cup (p,q),\ L = L \cup (r,s),\ U = U \setminus (p,q)$
    end if
  else
    $T = T \setminus (r,s) \cup (p,q),\ U = U \setminus (p,q) \cup (r,s)$
  end if
end if
Torna a ciclo