1 Lezione del 17-10-24

1.1 Piani di taglio

Abbiamo visto finora il problema:

$$\begin{cases} \max c^T x \\ Ax \leq bx \in \mathbb{Z}_+^n \end{cases}$$

Dove si può definire il poliedro P del rilassato continuo:

$$P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\} \rightarrow s_{PL}, \ x_{RC}$$

L'insieme dei punti S (o Ω):

$$S = \{x \in \mathbb{Z}^n : Ax \leq b\} \rightarrow v_{PLI}, \ \bar{x}$$

E un problema di PL associato, "ristretto" sull'insieme S, di cui però non sapevamo ricavare le disequazioni:

$$\text{conv} S \rightarrow v_{\text{conv} S}, \ ?$$

Vale, fra queste soluzioni, la catena di diseguaglianze:

$$v_{PLI} = v_{\text{conv} S} \leq v_{PL}$$

Definiamo quindi quanto segue:

Definizione 1.1: Piano di taglio

Su un problema di PLI con soluzione x_{RC} al rilassato continuo, una diseguaglianza in forma:

$$\gamma x \leq \gamma_0, \quad \forall x \in S \quad : \quad \gamma x_{RC} > \gamma_0$$

si dice **piano di taglio** di Gomory.

Supponiamo di avere il problema:

$$\begin{cases} \max c^T x \\ Ax \leq b \qquad \rightarrow V_{P_n} \\ \gamma x \leq \gamma_0 \end{cases}$$

Si ricava un poliedro P_n, che contiene l'ottimo v_{PLI}, ma che è più piccolo del rilassato continuo:

$$v_{PLI} \leq v_{P_n} \leq v_{PL}$$

Si ha che, se il problema di v_{P_n} è a componenti intere, allora coinciderà con $v_{\text{conv} S}$, quindi qualsiasi problema trovato iterativamente coi piani di taglio è una riduzione della regione ammissibile.

1.1.1 Costruzione dei piani di taglio

Abbiamo quindi la soluzione $\bar{x}_{RC}$ del rilassato continuo:

$$\begin{cases} Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases} \rightarrow \bar{x}_{RC}$$

Si ha che $\bar{x}_{RC}$ è vertice, quindi è soluzione di una certa base B, con:

$$\left(A_B \mid A_N\right) \left(x \in R^n\right) = b \in R^n$$

Definiamo allora la matrice $\tilde{A}$:

$$\tilde{A} = A_B^{-1} A_N$$

Notiamo poi che esiste un indice $r \in B$, tale che x_{RC} a r ha una componente non intera. Possiamo a questo punto enunciare il teorema:

Teorema 1.1: Teorema di Gomory

Si ha che:

$$\sum_{j \in N} \{\tilde{a}_{rj}\} x_j \geq \{(x_{RC})_r\}$$

è un piano di taglio.