1 Lezione del 13-11-24

1.1 Potenziali di base capacitati

Abbiamo visto come calcolare i flussi di base, data un'opportuna tripartizione, sulla base T, U, T', L' di un problema di flusso minimo capacitato. Vediamo adesso come calcolare i potenziali di base. Si imposta innanzitutto il duale, cioè il **problema dei potenziali**:

$$\begin{cases} \max b^T \pi + u^T \mu \\ E^T \pi + \mu \leq c \\ \mu \leq 0 \end{cases}$$

dove μ rappresenta gli **scarti** ai potenziali.

Notiamo che avremmo potuto usare la stessa matrice dei vincoli nel primale seguendo le stesse uguaglianze già viste sulle forme di matrici primali e duali:

$$\begin{cases} \min \begin{pmatrix} x & w \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} c \\ 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} x & w \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} E^T & I \\ 0 & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & u \end{pmatrix}^T \\ \begin{pmatrix} x & w \end{pmatrix} \geq 0 \end{cases}$$

Lo stesso problema potrebbe essere stato espresso nella forma a blocchi, come avevamo visto sul primale:

$$\begin{cases} \max \begin{pmatrix} b^T & u^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \pi \\ \mu \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} E^T & I \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \pi \\ \mu \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} c \\ 0 \end{pmatrix} \end{cases}$$

Vediamo quindi il calcolo vero e proprio. Si tratta il problema come qualsiasi altro problema in formato primale, cioè si rendono valide le equazioni date dalla base T, U, T', L'. Avremo quindi che $\mu_T = 0$ e $\mu_L = 0$. A questo punto troviamo i π dati da $E_T^T \mu = c_T$, su T, L e U. Infine, abbiamo i μ su U, dati da $\pi_T E_U + \mu_U^T = c^T$. Cioè, riassumendo, secondo la stessa notazione usata per i flussi di base (si noti che il flusso in T è soluzione di un unico sistema):

$$(\pi(T), \mu(T'.L', U')) = \left(c_T^T E_T^{-1}, 0, 0, c_U^T - \pi^T E_U \right)$$

Dai potenziali possiamo calcolare i costi ridotti, analogamente a come avevamo fatto sui flussi non capacitati:

$$c_{ij}^\pi = c_{ij} - \pi_i + \pi_j$$

e dimostrare una variante del teorema di Bellman:

Teorema 1.1: di Bellman capacitato

Supponiamo di avere una tripartizione T, L, U che generi un flusso di base ammissibile. Se la soluzione è anche ottima, vale riguardo ai costi ridotti:

$$\begin{cases} c_{ij}^\pi, \geq 0 & \forall (i,j) \in L \\ c_{ij}^\pi \leq 0, & \forall (i,j) \in U \end{cases}$$