1 Lezione del 23-09-24

1.1 Introduzione

1.1.1 Programma del corso

Il corso di ricerca operativa si divide in 4 parti:

1. Modello di Programmazione Lineare;
2. Programmazione Lineare su reti, ergo programmazione lineare su grafi;
3. Programmazione Lineare intera, ergo programmazione lineare col vincolo $x \in \mathbb{Z}^n$;
4. Programmazione Non Lineare.

Le prime 3 parti hanno come prerequisiti l'algebra lineare: in particolare operazioni matriciali, prodotti scalari, sistemi lineari, teorema di Rouché-Capelli. La quarta parte richiede invece conoscenze di Analisi II.

1.1.2 Un problema di programmazione lineare

La ricerca operativa si occupa di risolvere problemi di ottimizzazione con variabili decisionali e risorse limitate. Poniamo un problema di esempio:

Problema 1.1: Produzione

Una ditta produce due prodotti: **laminato A** e **laminato B**. Ogni prodotto deve passare attraverso diversi reparti: il reparto **materie prime**, il reparto **taglio**, il reparto **finiture A** e il reparto **finiture B**. Il guadagno è rispettivamente di 8.4 e 11.2 (unità di misura irrilevante) per ogni tipo di laminato.
Ora, nel reparto materie prime, il laminato A occupa 30, ore, e lo B 20 ore. Nel reparto taglio il laminato A occupa 10 ore e lo B 20 ore. Il laminato A occupa poi 20 ore nel reparto finiture A, mentre il laminato B occupa 30 ore nel reparto finiture B. I reparti hanno a disposizione, rispettivamente, 120, 80, 62 e 105 ore. Possiamo porre queste informazioni in forma tabulare:

Reparto	Capienza	Laminato A	Laminato B
Materie prime	120	30	20
Taglio	80	10	20
Finiture A	62	20	/
Finiture B	105	/	30
Guadagno		8.4	11.2

Quello che ci interessa è chiaramente massimizzare il guadagno.

Decidiamo di modellizzare questa situazione con un modello matematico.

Il guadagno che abbiamo dai laminati rappresenta una **funzione obiettivo**, ovvero la funzione che vogliamo ottimizzare. Ottimizzare significa trovare il modo migliore di massimizzare o minimizzare i valori della funzione agendo sulle variabili decisionali. La funzione obiettivo va ottimizzata rispettando determinati **vincoli**, che modellizzano il fatto che le risorse sono limitate. Una **soluzione ammissibile** è una qualsiasi soluzione che rispetta i vincoli del problema. Chiamiamo quindi **regione ammissibile** l'insieme di tutte le soluzioni ammissibili. All'interno della regione ammissibile c'è la soluzione che cerchiamo, ovvero la **soluzione ottima**.

Decidiamo quindi le **variabili decisionali**, ed esplicitiamo la funzione obiettivo e i vincoli.

In questo caso le variabili decisionali saranno le quantità di laminato A e B da produrre, che individuano un punto in $\mathbb{R}^2$ denominato (x_A, x_B). Decidere di usare la soluzione $(1, 1)$ significa decidere di produrre 1 unità di laminato A e 1 unità di laminato B, per un guadagno complessivo di $8.4 + 11.2 = 19.6$.

La funzione obiettivo sarà quindi:

$$f(x_A, x_B) = 8.4x_A + 11.2x_B, \quad f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

lineare, e noi saremo interessati a:

$$\max(f(x_A, x_B))$$

rispettando i vincoli, ergo nella regione ammissibile. Per esprimere questi vincoli, cioè il tempo limitato all'interno di ogni reparto, introduciamo il sistema di disequazioni:

$$\begin{cases} 30x_A + 20x_B \leq 120 \\ 10x_A + 20x_B \leq 80 \\ 20x_A + 0x_B \leq 62 \\ 0x_A + 30x_B \leq 105 \\ -x_A \leq 0 \\ -x_B \leq 0 \end{cases}$$

dove notiamo le ultime due disequazioni indicano la positività di x_A e x_B, in forma $f(x_A, x_B) \leq b$. Questo sistema non indica altro che la regione ammissibile.

Possiamo riscrivere questo modello usando la notazione dell'algebra lineare. La funzione obiettiva e i vincoli diventano semplicemente:

$$\begin{cases} \max(c^\intercal \cdot x) \\ A \cdot x \leq b \end{cases}$$

dove c rappresenta il vettore dei costi, A rappresenta la matrice dei costi a b il vettore dei vincoli. c è trasposto per indicare prodotto fra vettori.

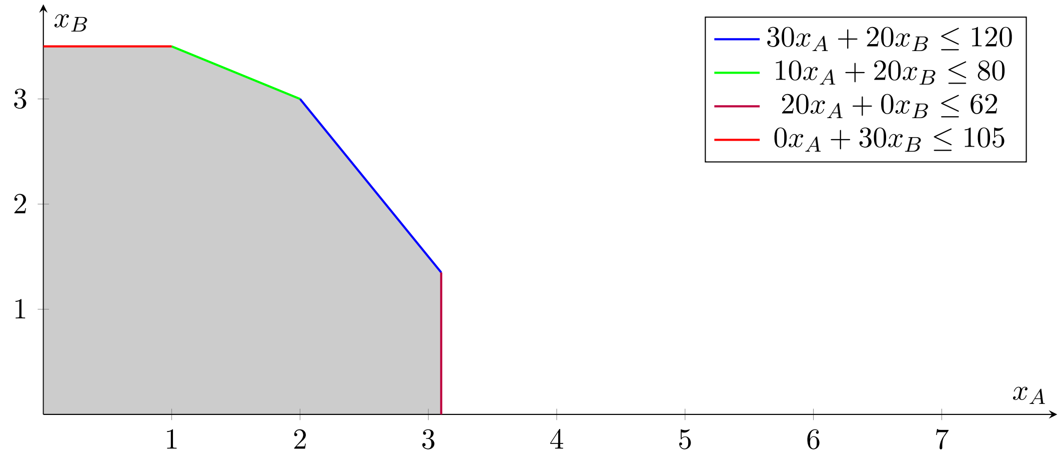
Possiamo scrivere A, b e c per esteso:

$$A : \begin{pmatrix} 30 & 20 \\ 10 & 20 \\ 20 & 0 \\ 0 & 30 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad b : \begin{pmatrix} 120 \\ 80 \\ 62 \\ 105 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad c : \begin{pmatrix} 8.4 \\ 11.2 \end{pmatrix}$$

Notiamo come A e b hanno dimensione verticale $4 + 2 = 6$, dai 4 vincoli superiori e i 2 vincoli inferiori.

A questo punto, possiamo disegnare la regione ammissibile come l'intersezione dei semipiani individuati da ogni singola disuguaglianza.

Si riporta un grafico:



In diversi colori sono riportati i margini delle disequazioni, mentre in grigio è evidenziata la regione ammissibile. Qualsiasi punto all'interno della regione ammissibile vale come soluzione, e almeno uno di essi è soluzione ottimale.

Il modello finora descritto prende il nome di modello di programmazione lineare, e permette di formulare problemi di programmazione lineare (LP).

Definizione 1.1: Problema di programmazione lineare (1)

Un problema di programmazione lineare (LP) riguarda l'ottimizzazione di una funzione lineare in più variabili soggetta a vincoli di tipo $=$, $\leq$ e $\geq$, ovvero in forma:

$$\begin{cases} \min / \max(c^{\intercal} \cdot x) \\ A_i x \leq b \\ B_j x \geq d \\ C_k x = e \end{cases}$$

"Programmazione" qui non ha alcun legame col concetto di programmazione informatica, ma si riferisce al fatto che il modello è effettivamente *programmabile*.

"Lineare" si riferisce alla linearità dei problemi che ci permette di risolvere (e quindi del modello).