

1 Lezione del 24-09-24

1.1 Introduzione

Il corso di reti logiche tratta di:

1. **Linguaggio assembler:** come scrivere programmi semplici, come avviene la compilazione in linguaggio macchina;
2. **Reti logiche:** reti combinatorie, reti combinatorie per l'aritmetica, reti sequenziali asincrone e sincronizzate;
3. **Microprogrammazione:** reti sequenziali sincronizzate, come realizzare una rete logica da specifiche. "Micro" qui sta per *hardware*;
4. **Il calcolatore:** processore, interfacce comuni e convertitori.

1.1.1 Introduzione alle reti logiche

Si parla di reti *logiche* in quanto si guarda all'hardware da una prospettiva funzionale, indipendente dalla sua tecnologia. Ad esempio, una porta NOR sarà implementata con determinati circuiti, ma tutto ciò che interessa a questo corso è come si comporta logicamente: $y = 1 \Leftrightarrow A = B = 0$.

1.2 Programmazione assembly

Il nome corretto del linguaggio sarebbe Assembly, ma noi lo chiameremo Assembler per ragioni storiche. L'assembler è il linguaggio con cui si scrivono le istruzioni eseguite dal processore. Il processore implementa effettivamente un ciclo fetch-execute dove preleva la prossima istruzione macchina (in assembler) dalla memoria e la esegue.

1.2.1 Linguaggio macchina

Il linguaggio macchina (LM) è dato dal contenuto effettivo della memoria che contiene le istruzioni, ergo una sequenza di zero e uno. Il linguaggio assembler adotta una sintassi simbolica per il linguaggio macchina: ad esempio, `MOV %AX, %BX`.

Il processo di trasformazione dall'assembler all'LM si chiama **assemblaggio**, mentre il processo di trasformazione da un linguaggio ad alto livello all'assembler si chiama **compilazione**.

1.2.2 Generalità sull'assembler

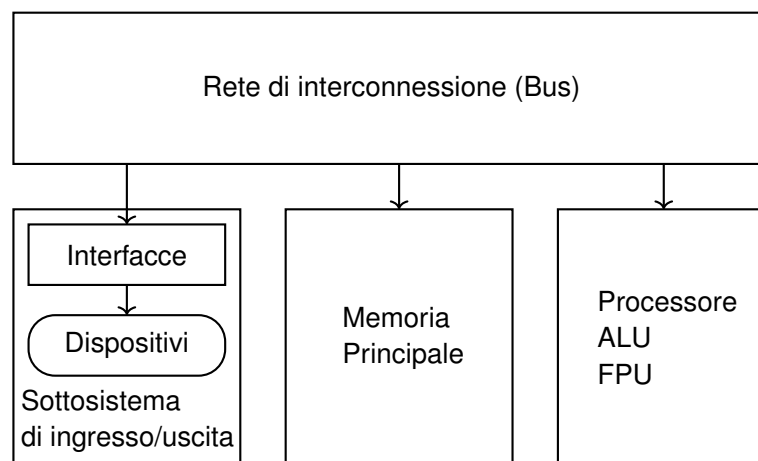
Si dice che assembler è un linguaggio a basso livello. Mancano i costrutti a cui siamo abituati da i linguaggi di alto livello:

1. Non esistono costrutti di flow control (for, if-else, ecc...), tutto si fa con istruzioni di salto.
2. Non esistono tipi variabile: gli operandi sono stringhe di bit che si riferiscono a locazioni in memoria.

Inoltre, l'assembler è strettamente legato all'hardware, ed è specifico per ogni processore. Noi vedremo l'assembler dei processori della famiglia Intel x86, che non è uguale all'assembler dei processori Arm Cortex, ecc... Questo rende il codice in assembler mai portatile. Fatta questa precisazione, possiamo dire che i principi generali restano comunque validi fra famiglie di processori diverse.

Esiste ancora oggi una nicchia di utilizzo del linguaggio assembler: quello dello sviluppo di sistemi embedded. Inoltre, il linguaggio ha un importante significato didattico e culturale.

1.3 Schema a blocchi del calcolatore



Un calcolatore è formato, in linea generale, da una rete di interconnessione (bus) che collega fra di loro:

- Interfacce che comunicano con dispositivi;
- La memoria principale che contiene dati e programmi;
- Il processore, che esegue il ciclo fetch-execute. Possiamo aggiungere che ogni processore, oggi, contiene almeno due blocchi:
 - L'ALU, Arithmetic Logic Unit, che si occupa di calcoli aritmetici su numeri interi (interpretando le stringhe di bit come numeri naturali o interi in complemento a 2) e operazioni logiche;
 - L'FPU, Floating Point Unit, che si occupa dei numeri a virgola mobile.

1.4 Riassunto di rappresentazione dell'informazione

Da qui in poi x è il numero rappresentato e X la sequenza di bit rappresentante.

1.4.1 Numeri naturali

Intervallo di rappresentabilità

n bit rappresentano 2^n naturali sull'intervallo $[0, 2^n - 1]$.

Trasformazione diretta

Per portare un'intero in rappresentazione binaria nel suo corrispondente in base 10, si

sa che presi n bit $b_{n-1}, b_{n-2}, \dots, b_1, b_0$ della rappresentazione X , essi rappresentano il naturale x :

$$x = b_{n-1} \cdot 2^{n-1} + b_{n-2} \cdot 2^{n-2} + \dots + b_1 \cdot 2 + b_0 = \sum_{i=0}^{n-1} b_i \cdot 2^i$$

Il bit più a sinistra è il Most Significant Bit (MSB), cioè b_{n-1} , quello più a destra il Least Significant Bit (LSD), cioè b_0 .

Trasformazione inversa

Per portare un'intero in base 10 nella sua rappresentazione binaria, si usa l'algoritmo DIV-MOD:

Algoritmo 1 DIV-MOD

Input: x in base 10

Output: X rappresentazione in base 2

Inizializza $q \leftarrow x$, $r \leftarrow 0$, e $i \leftarrow 0$

Crea un'array vuota R per i resti

while $q \neq 0$ **do**

$r \leftarrow q \bmod 2$

Metti r in $R[i]$

$q \leftarrow q/2$

$i \leftarrow i + 1$

end while

Gli $R[n-1], R[n-2], \dots, R[0]$ rimasti (quindi letti al contrario) sono le cifre di X .

1.4.2 Numeri interi in complemento a due

Intervallo di rappresentabilità

n bit rappresentano 2^n interi sull'intervallo $[-2^{n-1}, 2^{n-1} - 1]$.

Trasformazione diretta

Per portare un intero x in base 10 nella sua rappresentazione in complemento a due X su n bit, si decide alternativamente rispetto al segno di x di rappresentare il naturale N in X :

$$N = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ 2^n + x & x < 0 \end{cases}, \quad X = N_2$$

dove si nota che nella seconda espressione $2^n + x$ equivale a $2^n - |x|$, dalla negatività di x .

Alternativamente, sui soli numeri negativi:

- Si converte x in rappresentazione binaria.
- Si trova il complemento, ovvero la rappresentazione che inverte tutti i bit (che equivale alla rappresentazione in complemento a 2 dell'opposto -1).
- A questo punto si aggiunge 1, ignorando qualsiasi overflow.

La rappresentazione X trovata è il complemento a 2 di x . Simbolicamente:

$$X = \begin{cases} x_2 & x \geq 0 \\ (\bar{x} + 1)_2 & x < 0 \end{cases}$$

Trasformazione inversa

Per portare la rappresentazione in complemento a due X su n bit di un intero x all'intero stesso, ci si comporta come per le rappresentazioni di naturali, ma prendendo il bit più significativo dagli n bit $b_{n-1}, b_{n-2}, \dots, b_1, b_0$ della rappresentazione X con valenza negativa:

$$x = -b_{n-1} \cdot 2^{n-1} + b_{n-2} \cdot 2^{n-2} + \dots + b_1 \cdot 2 + b_0 = -b_{n-1} \cdot 2^{n-1} + \sum_{i=0}^{n-2} b_i \cdot 2^i$$

Alternativamente, si nota che il bit più significativo della rappresentazione sarà impostato a 0 per numeri positivi e 1 per numeri negativi. Ciò significa che avremo:

$$x = \begin{cases} X_{10} & X_{n-1} = 0 \\ -(\bar{X} + 1)_{10} & X_{n-1} = 1 \end{cases}$$

dove la barra rappresenta l'operazione complemento.

1.4.3 Rappresentazioni di interi e naturali, diagramma a farfalla

La rappresentazione in complemento 2 su n bit è effettivamente una funzione dal dominio $[-2^{n-1}, 2^{n-1} - 1]$ degli interi al codominio $[0, 2^n - 1]$ dei naturali. Tale funzione prende il nome di *diagramma a farfalla*:



da cui notiamo la relazione fra un'intero e il naturale che lo rappresenta in complemento a 2.

1.4.4 Valori notevoli del complemento a 2

Vale la pena notare alcuni valori notevoli del complemento a 2 su n bit.

- Innanzitutto, 0 rimane 0, ergo una fila di n zeri.
- Uno zero seguito da $n - 1$ uni è il numero più positivo possibile, ergo $2^{n-1} - 1$.
- Aggiungendo uno, si arriva ad un uno seguito da $n - 1$ zeri, che è il numero negativo possibile, ergo -2^{n-1} . Notare che questo combacia col prendere il numero più positivo $2^{n-1} - 1$, e ricavare uno meno del suo opposto -2^{n-1} , che abbiamo appurato essere ciò che accade quando si complementa (e infatti i due numeri sono l'uno il complemento dell'altro).
- Infine, una sequenza di n uno rappresenta il più piccolo numero negativo, ergo -1 .

Si nota che, al pari dei naturali, la rappresentazione dei numeri interi in complemento a 2 è effettivamente ciclica.

1.4.5 Notazione esadecimale

Scrivere lunghe stringhe binarie diventa velocemente complicato. Per questo si adotta una notazione esadecimale per stringhe di 4 bit ($[0, 15]$):

Decimale	Binario	Esadecimale
0	0000	0x0
1	0001	0x1
2	0010	0x2
3	0011	0x3
4	0100	0x4
5	0101	0x5
6	0110	0x6
7	0111	0x7
8	1000	0x8
9	1001	0x9
10	1010	0xA
11	1011	0xB
12	1100	0xC
13	1101	0xD
14	1110	0xE
15	1111	0xF

A questo punto, possiamo denotare qualsiasi stringa binaria come una lista di numeri esadecimali prefissi da 0x (che serve ad indicare la rappresentazione esadecimale stessa), ad esempio 0xC1 (11000001).

1.4.6 Nota sulle potenze di 2

Conviene ricordare le prime potenze di 2:

Esponente	Valore
0	1
1	2
2	4
3	8
4	16
5	32
6	64
7	128
8	256
9	512
10	$1024 \approx 1000$
11	2048
12	4096
13	8192

e inoltre ricordare che, visto $2^{10} = 1024 \approx 1000$, le unità di misura usuali diventano:

Unità	Potenza
2^{10}	1 KB
2^{20}	1 MB
2^{30}	1 GB

e così via.

1.5 Struttura del calcolatore

1.5.1 Spazio di memoria

La memoria del calcolatore, vista dal programmatore assembler, è uno spazio lineare di 2^{32} (su calcolatori a 32 bit) locazioni (celle) di memoria, dalla capacità di un byte ciascuna. Ogni cella è quindi identificata da un numero di 32 bit, detto **indirizzo**.

Lo spazio di memoria è in larga parte implementato attraverso Random Access Memory (RAM), ovvero memoria volatile. Solo una piccola parte dello spazio è implementata attraverso Read Only Memory (ROM), ovvero memoria permanente, che contiene le istruzioni da eseguire al reset.

Accesso allo spazio di memoria

Il processore può accedere (leggere/scrivere) a:

- Singole locazioni (byte) da 8 bit;
- Doppie locazioni (word) da 16 bit;
- Quadruple locazioni (double word) da 32 bit.

Per gli accessi 16/32 bit si usa l'indirizzo più piccolo delle 2/4 locazioni. Si ricorda che l'indirizzo più grande contiene i bit più significativi (lo spazio di memoria è *little-endian*).

Gli indirizzi di memoria assembler sono solo simbolici, e vengono tradotti dall'assemblatore, e in parte runtime. Questo significa che non si può accedere a memoria appartenente al sistema operativo, o memoria fuori dai limiti fisici del sistema, ecc...

1.5.2 Spazio di Input/Output

Lo spazio di Input/Output è formato da 2^{16} , ovvero 64k, locazioni o **porte**. Ogni porta ha una capacità di un byte ed è indirizzata da un numero di 16 bit.

Il processore accede alle porte attraverso operazioni particolari di lettura o scrittura (**IN** o **OUT**). Spesso le porte sono configurate per un solo tipo di operazione: sola lettura o sola scrittura.

Le locazioni di memoria sono solitamente identiche fra di loro, le porte di I/O no. Indirizzi diversi significano dispositivi diversi, e si rende quindi necessario conoscere fisicamente gli indirizzi.

1.5.3 Processore

Il processore è dotato di una memoria interna formata da locazioni di memoria da 32 bit (**registri**). Questi si dividono in registri **generali**, riservati alle elaborazioni, e **di stato**, riservati a compiti speciali.

Registri generali

I registri iniziano generalmente con la lettera **E**, che sta per *Extended*. Questo perché storicamente i registri erano da 16 bit, e successivamente sono stati estesi a 32 bit. Possiamo quindi riferirci a più sezioni dello stesso registro:

- **EAX**: tutti i 32 bit del registro esteso;
- **AL**: la parte *bassa* del registro **AX**, ergo quella meno significativa, da 8 bit;
- **AH**: la parte *alta* del registro **AX**, ergo quella più significativa, da 8 bit;
- **AX**: il registro **AX** legacy, che combina **AL** e **AH**, da 16 bit.

Alcuni registri vengono storicamente utilizzati per particolari funzioni:

- **EAX** è utilizzato da alcune istruzioni aritmetiche per contenere operandi e risultati. Viene detto **accumulatore**.
- **ESI**, **EDI**, **EBX**, **EBP** vengono detti registri puntatore, dove **B** sta per base e **I** per indice. In particolare:
 - **ESI**, **EDI** vengono utilizzati come registri indice per accessi in memoria.
 - **EBX** è utilizzato come indirizzo di base per l'accesso in memoria. Viene solitamente detto **base**.
 - **EBP** è utilizzato sempre come indirizzo di base per l'accesso in memoria.
- **ECX** è utilizzato come contatore nei cicli. Viene detto **contatore**.
- **EDX** è utilizzato come operando di operazioni aritmetiche. Viene detto **data**.
- **ESP** è utilizzato per indirizzare la **pila** o **stack**, ovvero una parte di memoria con disciplina LIFO che serve a gestire sottoprogrammi.

Registri di stato

Ricordiamo due registri di stato:

- L'EIP viene detto **instruction pointer**, o **program counter**. Viene usato per contenere l'indirizzo della locazione dalla quale sarà prelevata la prossima istruzione da eseguire. Il contenuto dell'EIP è fissato al reset iniziale, e impostato sulla prima istruzione da eseguire (in memoria ROM) all'indirizzo 0xFFFF0000. Un po' di celle in memoria centrale da questo indirizzo in poi sono implementate in ROM.

Possiamo quindi dire che il ciclo fetch-loop si svolge come segue:

- Il processore preleva dalla memoria, all'indirizzo EIP, una nuova istruzione;
- Incrementa EIP del numero di byte dell'istruzione prelevata;
- Esegue l'istruzione e ripete.

Da questo si ha che le istruzioni in memoria vengono eseguite sequenzialmente nell'ordine in cui sono incontrate, a meno che non si definiscano salti attraverso altre determinate istruzioni.

- L'EF viene detto **extended flag**. Consiste di 32 elementi detti **flag**, fra cui ricordiamo:
 - **OF**: flag di overflow (traboccamento) delle operazioni aritmetiche, si imposta se l'ultima operazioni, presi gli operandi come interi, ha prodotto un risultato non rappresentabile su n bit;
 - **SF**: flag di segno, impostato quando l'ultima operazione restituisce un complemento a 2 con $MSB = 1$ (ergo negativo);
 - **ZF**: flag zero, che viene impostato quando l'ultima operazione restituisce qualcosa di nullo;
 - **CF**: flag di carry (riporto), che viene impostato quando l'ultima operazione richiede un riporto o un prestito, ergo presi gli operandi come naturali il risultato non è rappresentabile su n bit.

I flag **OF** e **SF** sono significativi per operazioni su interi. Il flag **CF** è significativo per operazioni su naturali. Il flag **ZF** è significativo per entrambi i tipi di operazione.

Al reset i flag visti finora sono impostati a 0.

2 Lezione del 25-09-24

2.1 Introduzione all'Assembler

2.1.1 Codifica macchina e codifica mnemonica

Possiamo adottare 2 metodi per codificare le istruzioni eseguite dal processore:

- **Codifica macchina**: la serie di zeri e di uni che codificano, nel linguaggio del processore, le operazioni che esegue. Il formato macchina è, nell'architettura che ci interessa, il seguente:
- **Codifica mnemonica**: un modo **simbolico** per riferirsi alle istruzioni. Un'istruzione può quindi essere semplicemente: **MOV** %EAX, 0x01F4E39.

Il linguaggio assembler usa la codifica mnemonica delle istruzioni, e dispone di sovrastrutture sintattiche che lo rendono più comprensibile agli umani. Ad esempio, permette l'uso di nomi simbolici per locazioni di memoria: **MOV** %EAX, pippo.

Segmento	Byte	Funzione
I Prefix (Instruction Prefix)	0/1 byte	Modifica l'istruzione.
O Prefix (Operand-size prefix)	0/1 byte	Modifica la dimensione degli operandi.
Opcode	1/2 byte	Specifica l'operazione.
Mode (ModR/M Byte)	0/1 byte	Specifica la modalità d'indirizzamento e i registri operandi.
SIB Byte	0/1 byte	Viene usato in congiunzione con il Mod/RM byte quando si usa l'indirizzamento complesso (scale-index-base).
Displacement	0/1/2/4 byte	Specifica un'offset in memoria, sempre nell'indirizzamento complesso.
Immediate	0/1/2/4 byte	Specifica le costanti ad indirizzamento immediato.

2.1.2 Istruzioni in codifica mnemonica

Un'istruzione ha 3 campi:

- **Codice operativo:** stabilisce quale operazione eseguire;
- **Suffisso di lunghezza:** stabilisce la lunghezza (che può variare) degli operandi;
- **Operandi:** gli operandi su cui si applica l'operazione. Possono essere contenuti in registri, in celle di memoria, nelle porte I/O o direttamente nell'istruzione (**costanti**).

Il suffisso di lunghezza può essere omesso quando è chiaro (essenzialmente quando si usa un registro).

Sintatticamente la struttura è `OPCODEsuffix source, dest`, che diventa qualcosa come `ADD %BX, pluto`. Questa istruzione effettua l'operazione `ADD` (aggiungi), aggiungendo al registro `BX` ciò che è contenuto nel simbolo `pluto`.

Operandi di istruzioni

Le istruzioni ammettono 0, 1 o 2 operandi. Quando sono 2, il primo operando si chiama **sorgente** e il secondo **destinatario**, e solitamente hanno la stessa lunghezza. Quando è 1, l'operando può essere sia sorgente che destinatario a seconda dell'istruzione.

2.1.3 Primo esempio di programma

Si presenta un programma per contare il numero di uno trovati dalla locazione `0x00000100` a `0x000001013e` scriverlo nella locazione `0x00000104`.

```

1 MOVb $0x00, %CL      # sposta $0x00 in %CL
2 MOVL 0x00000100, %EAX # sposta 32 bit da 0x00000100 a %EAX
3 CMPL $0x00000000, %EAX # confronta 32 bit di 0 con il registro %EAX
4 JE    %EIP+$0x07      # salta se uguale a %EIP+$0x07,
5                      # ergo 0x0000020C + 0x07 = 0x00000213
6 SHRL %EAX             # trasla a destra %EAX
7 ADCb $0x00, %CL       # aggiungi a %CL 0 + carry
8 JMP   %EIP-$0x0C      # salta incondizionato a %EIP-$0x0C,
9                      # ergo 0x00000213 - 0x0C = 0x00000207
10 MOVb %CL, 0x00000104 # sposta byte da %CL a 0x00000104

```

Il programma svolge i seguenti passi:

Algoritmo 2 Conta 0

```

Inizializza il registro CL (Counter Low) a 0
Sposta i 32 bit da 0x00000000 a 0x00000103 in EAX
while true do
  if EAX è vuoto (tutti zeri) then
    Salta all'ultima istruzione
  end if
  Sposta EAX a destra
  Aggiungi il flag carry (che prende il valore rimosso da EAX) al registro CL
end while
Sposta il byte in CL nella locazione 0x00000104

```

2.1.4 Istruzioni assembler

Le istruzioni assembler si dividono in:

- **Operative:** ovvero quelle che svolgono qualche operazione (ADD, SHR, MOV, CMP,);
- **Di controllo:** cioè che si occupano di alterare il flusso del programma (JMP, JE, ecc...).

Indirizzamento delle istruzioni operative

Le istruzioni operative si indirizzano attraverso l'**OPCODE** (codice operazione, ADD, MOV, ecc...), seguito da un suffisso (**B**, *byte* da 8 bit, **W**, *word* da 16 bit o **L**, *long* da 32 bit) che può essere omesso, e gli indirizzi sorgente e destinazione.

- Si possono **indirizzare i registri** sia come sorgenti che come destinatari, ovvero gli 8 registri generali da 32 bit, gli 8 registri generali da 16 bit, e gli 8 registri generali da 8 bit (disponibili solo sui registri A, B, C e D). Bisogna precedere i nomi dei registri con %.
- Si può avere **indirizzamento immediato**, ovvero di costanti preceduti da \$, solo sull'operando sorgente.
- Si può **indirizzare la memoria**, ma solo da sorgente o solo da destinatario, specificando un'indirizzo di memoria da 32 bit. Ergo non posso scrivere:

```
1 MOVB pippo, pluto
```

ma devo scrivere:

```
1 MOV pippo, %EAX # qua il suffisso di lunghezza e' implicito
2 MOVL %EAX, pluto
```

L'indirizzamento della memoria, nel caso più generale, è dato da:

$$\text{indirizzo} = \text{base} + \text{indice} \times \text{scala} \pm \text{displacement}$$

dove base e indice sono due registri generali da 32 bit, scala una costante dal valore 1 (default), 2, 4, 8, e displacement una costante intera.

La sintassi è `OPCODEsfx +/- disp(base,indice,scala)`.

Si distingue poi l'indirizzamento di tipo:

- **Diretto**, dove si indica soltanto il displacement, che coincide con l'indirizzo. `OPCODEW 0x00002001` significa prendi la word a partire da `0x00002001`.
- **Indiretto**, o con registro puntatore, dove si sfrutta un registro: `OPCODEL (%EBX)` significa indirizzare il valore indirizzato da EBX. Si può specificare una scala: `OPCODEL (,%EBX,4)` significa il valore nel registro EBX moltiplicato per 4. Si noti come a essere moltiplicato è l'indice e non la base.
- **Displacement e registro di modifica**, ad esempio da `OPCODEW 0x002A3A2B (%EDI)` si ottiene l'operando a 16 bit ottenuto sommando al displacement `0x002A3A2B` il contenuto di EDI, modulo 2^{32} .
- **Bimodificato senza displacement**, ad esempio `OPCODEW (%EBX, %EDI)`, che dipende dalla somma di EBX e EDI. Si può anche includere una scala: `OPCODEW (%EBX, %EDI, 8)`, che va a moltiplicare solo %EDI.
- **Bimodificato con displacement**, come prima ma con displacement: `OPCODEB 0x002F9000 (%EBX, %EDI)`, ovvero l'indirizzo dato da base in EBX + indice in EDI + l'offset modulo 2^{32} . Si può avere anche negativo: `OPCODEB -0x9000 (%EBX, %EDI)`, dove si sottrae l'offset invece di sommarlo.

Notare che senza il \$ i numeri in formato esadecimale sono interpretati automaticamente come indirizzi. Inoltre, i suffissi di dimensione si riferiscono al numero di locazioni all'indirizzo *puntato* dai registri, non alla dimensione dei registri o altre cose ridicole.

- Si possono **indirizzare le porte I/O**, come prima in uno solo dei due operandi. Questo si fa con le istruzioni specifiche IN e OUT. In particolare si ha indirizzamento di tipo:
 - **Diretto**, solo per indirizzi < 256 , in quanto nel formato macchina ci sono 8 bit. Ad esempio `IN 0x001A, %AL` o `OUT %AL, 0x003A`.
 - **Indiretto con registro puntatore**, usando come registro puntatore soltanto DX. Ad esempio `IN (%DX), %AX` o `OUT %AL, (%DX)`.

2.2 Panoramica sulle istruzioni

Abbiamo diviso le istruzioni in **operative** e **di controllo**. Possiamo fare ulteriori suddivisioni:

- **Operative:**
 - Di trasferimento;
 - Aritmetiche;
 - Di traslazione/rotazione;
 - Logiche.
- **Di controllo:**
 - Di salto;
 - Di gestione di sottoprogrammi.

Conviene definire formato, funzionamento, comportamento sui flag e modalità di indirizzamento ammesse per gli operandi di ogni operazione, in quanto l'assembler non è **ortogonale**, ergo ci sono particolari restrizioni su *quali* operandi e modalità di indirizzamento possono essere combinate.

3 Lezione del 26-09-24

3.1 Istruzioni di trasferimento

Le istruzioni di trasferimento spostano memoria:

- Dalla memoria a un registro;
- Da un registro a un registro;
- Dallo spazio I/O a un registro.

Non esistono altre possibilità, ergo non si può (per quanto interessa a noi) spostare da memoria a memoria. In verità esistono alcune istruzioni nei processori di nuova generazione che ottimizzano operazioni di questo tipo, che verranno viste in seguito. Sfruttando i registri, il trasferimento da memoria a memoria si fa attraverso un registro, in due istruzioni.

Nessuna istruzione di trasferimento modifica i flag.

3.1.1 MOVE

- **Formato:** **MOV** source, destination
- **Azione:** sostituisce l'operando destinatario con una copia dell'operando sorgente.
- **Flag:** nessuno.

Operandi	Esempi
Memoria, Registro Generale	MOV 0x00002000, %EDX
Registro Generale, Memoria	MOV %CL, 0x12AB1024
Registro Generale, Registro Generale	MOV %AX, %DX
Immediato, Memoria	MOVB \$0x5B, (%EDI)
Immediato, Registro generale	MOV \$0x54A3, %AX

3.1.2 LOAD EFFECTIVE ADDRESS

- **Formato:** **LEA** source, destination
- **Azione:** sostituisce l'operando destinatario con l'espressione indirizzo contenuta nell'operando sorgente.
- **Flag:** nessuno.

Operandi	Esempi
Memoria, Registro Generale a 32 bit	LEA 0x00002000, %EDX
	LEA 0x00213AB1 (%EAX,%EBX,4), %ECX

A differenza di MOV, LEA calcola l'indirizzo della locazione di memoria cercata come $\text{base} + \text{index} \times \text{scala} \pm \text{displacement}$, e carica quell'indirizzo nella destinazione, non il valore contenuto in esso. Nel primo esempio, questo equivale alla MOV con indirizzamento immediato. In altri casi permette di ricavare esplicitamente il valore ottenuto dall'indirizzamento complesso.

3.1.3 EXCHANGE

- **Formato:** **XCHG** source, destination
- **Azione:** sostituisce l'operando destinatario con l'operando sorgente e viceversa. Questa operazione è l'unica che modifica il sorgente.
- **Flag:** nessuno.

Operandi	Esempi
Memoria, Registro Generale	XCHG 0x00002000, %DX
Registro Generale, Memoria	XCHG %AL, 0x000A2003
Registro Generale, Registro Generale	XCHG %EAX, %EDX

Grazie a quest'istruzione in assembler si possono scambiare due operandi con una sola istruzione (**non trasparenza** dei registri) **atomica**. Questo è particolarmente utile nel caso di esecuzione concorrente.

3.1.4 INPUT

- **Formato:**
 - **IN** indirizzo, %AL (8 bit)
 - **IN** indirizzo, %AX (16 bit)
 - **IN** (%DX), %AX (8 bit)
 - **IN** (%DX), %A1 (16 bit)
- **Azione:** sostituisce il contenuto del registro destinatario (AL 8 bit, AX 16 bit) con il contenuto di un adeguato numero di porte consecutive. L'indirizzo è specificato direttamente (per porte con indirizzo < 256), o indirettamente usando il registro DX.
- **Flag:** nessuno.

3.1.5 OUTPUT

- **Formato:**
 - **OUT** %AL, indirizzo (8 bit)
 - **IN** %AX, indirizzo (16 bit)
 - **IN** %AX, (%DX) (8 bit)
 - **IN** %A1, (%DX) (16 bit)
- **Azione:** copia il contenuto del registro sorgente (AL 8 bit, AX 16 bit) su un adeguato numero di porte consecutive. L'indirizzo è specificato direttamente (per porte con indirizzo < 256), o indirettamente usando il registro DX.
- **Flag:** nessuno.

3.1.6 Non ortogonalità INPUT/OUTPUT

Le uniche due operazioni che gestiscono l'input e l'output possono trasferire solo dai o nei registri AL e AX, e indirizzare indirettamente la memoria puntando col registro DX. Questo rende le operazioni non ortogonali: non si possono usare altri registri, ed eventuali operazioni vanno fatte nel processore,

3.2 Pila

La pila, o **stack**, è una regione di memoria gestita con politica Last In First Out (LI-FO), essenziale al funzionamento del calcolatore. Permette di annidare sottoprogrammi, funzionalità per cui l'assembler è organizzato.

Generalmente, la pila viene usata come segue per eseguire i sottoprogrammi:

- Prima di saltare al sottoprogramma, si fa **PUSH** sulla pila dell'indirizzo di ritorno (e.g. l'indirizzo della prossima istruzione);
- Si esegue il sottoprogramma;
- Al termine del sottoprogramma, si fa **POP** dalla pila del prossimo indirizzo.

Più sottoprogrammi possono chiamarsi a vicenda (annidarsi), ponendosi su livelli via via superiori della pila. Al termine della sua esecuzione, ogni sottoprogramma tornerà all'indirizzo di ripresa del sottoprogramma precedente, finché tutti i sottoprogrammi non termineranno l'esecuzione.

Il registro **ESP** punta al top della pila, ergo non va usato per altri scopi. Va però inizializzato prima che parta il programma. Si deve inoltre notare che la pila in assembler si estende *verso il basso*: aggiungere alla pila significa decrementare ESP, e rimuovere dalla pila significa incrementare ESP. I frame successivi della pila si vanno a disporre via via sotto (o "a sinistra") del frame corrente.

Per lavorare sulla pila si usano le istruzioni:

3.2.1 PUSH

- **Formato:** **PUSH** source
- **Azione:** decrementa ESP e copia il sorgente nell'indirizzo puntato da ESP. Il sorgente deve essere a 16 bit o a 32 bit. Nello specifico, compie le seguenti azioni:
 - Decrementa l'indirizzo contenuto nel registro ESP di 2 o 4;
 - Memorizza una copia dell'operando sorgente nella word o long il cui indirizzo è contenuto in ESP.
- **Flag:** nessuno.

Operandi	Esempi
Memoria	PUSHW 0x3214200A
Immediato	PUSHL \ \$0x4871A000
Registro Generale	PUSH %BX

3.2.2 POP

- **Formato:** **POP** destination
- **Azione:** copia una word o un long dall'indirizzo puntato dall'ESP nel destinatario e incrementa ESP. Nello specifico compie le seguenti azioni:
 - Sostituisce all'operando destinatario una copia del contenuto nella word o long il cui indirizzo è contenuto in ESP;
 - Incrementa di due o quattro l'indirizzo contenuto in ESP, rimuovendo la word o il long copiato.
- **Flag:** nessuno.

Operandi	Esempi
Memoria	POPW 0x02AB2000
Registro Generale	POP \%BX

Dati temporanei nella pila

Solitamente la pila viene usata per memorizzare dati temporanei, visto che i registri sono pochi e spesso hanno scopi diversi in momenti diversi. Ad esempio:

```

1 # sto usando %EAX, mi serve un dato da una porta
2 PUSH %EAX
3 IN 0x001A, %AL
4 ...
5 POP %EAX # ritorno da dove ero

```

3.2.3 PUSHAD

- **Formato:** **PUSHAD**
- **Azione::** salva nella pila corrente una copia degli 8 registri generali a 32 bit, nell'ordine: EAX, ECX, EDX, EBX, ESP, EBP, ESI, EDI.
- **Flag:** nessuno.

3.2.4 POPAD

- **Formato:** **POPAD**
- **Azione::** copia dalla pila corrente gli 8 registri generali a 32 bit, nell'ordine: EAX, ECX, EDX, EBX, ESP, EBP, ESI, EDI.
- **Flag:** nessuno.

3.3 Istruzioni aritmetiche

Molte operazioni aritmetiche di base non distinguono numeri naturali e numeri interi, distinzione che viene fatta solo per moltiplicazioni e divisioni.

Le operazioni possono modificare i flag, e in questo caso i flag da controllare dipenderanno dal tipo di numeri su cui si è fatta l'operazione (informazione nota soltanto al programmatore).

Abbiamo quindi che un'operazione aritmetica si svolge seguendo i passi:

- Si esegue l'operazione;
- Si controllano i flag interessati (OF, SF e ZF sugli interi, CF e ZF sui naturali) per verificarne l'esito.

Vediamo quindi le operazioni aritmetiche:

3.3.1 ADD

- **Formato:** `ADD source, destination`
- **Azione:** modifica l'operando destinatario sommandovi l'operando sorgente. Il risultato è consistente sia che si interpretino i numeri come naturali, che come interi.
- **Flag:** attiva CF se, interpretando i numeri come naturali, si è verificato un riporto; attiva OF se, interpretando gli operandi come interi, si è verificato un traboccamento. Inoltre attiva opportunamente ZF e SF se il numero è rispettivamente zero o negativo (in complemento a 2).

Operandi	Esempi
Memoria, Registro Generale	<code>ADD 0x00002000, %EDX</code>
Registro Generale, Memoria	<code>ADD %CL, 0x12AB1024</code>
Registro Generale, Registro Generale	<code>ADD %AX, %DX</code>
Immediato, Memoria	<code>ADD \$0x5B, (%EDI)</code>
Immediato, Registro Generale	<code>ADD \$0x54A3, %AX</code>

Funzionamento della ADD

Il passo elementare di una somma consiste nel sommare le cifre degli addendi, x_i e y_i e un riporto entrante r_i per produrre:

- La prossima cifra s_i del risultato;
- Un riporto uscente r_{i+1} (cioè il riporto entrante per il prossimo passo).

L'ultimo riporto, se non entra in memoria, attiva il carry flag (CF).

Possiamo facilmente ricavare il risultato che dà ogni tripla di argomenti su un singolo bit del risultato, e il riporto entrante generato:

x_i	y_i	r_i	$(x_i + y_i + r_i)_{10}$	s_i	r_{i+1}
0	0	0	0	0	0
1	0	0	1	1	0
0	1	0	1	1	0
0	0	1	1	1	0
1	1	0	2	0	1
1	0	1	2	0	1
0	1	1	2	0	1
1	1	1	3	1	1

Questa tabella viene valutata su ogni tripla di cifre x_i , y_i e riporto r_i incontrata, generando r_n riporti consecutivi.

L'operazione di somma ha lo stesso effetto sia su naturali che su interi in complemento a 2: la differenza sta nel controllo dell'attivazione dei flag. Si ha infatti che, se X

e Y sono le rappresentazioni su n bit di due interi x e y , allora la rappresentazione di $s = x + y$ (se esprimibile su n bit) è data da $S = X + Y$.

Tolto il CF, il processore attiva i flag OF, ZF e SF secondo le modalità:

- **OF:** rappresenta l'overflow, ergo la non rappresentabilità, nel caso di somme intere, e guarda ai segni (il MSB):
 - **Segni discordi:** non c'è overflow;
 - **Segni concordi:** il risultato è corretto se è concorde con gli operandi.

Alternativamente, si può pensare che l'OF viene attivato sulla base degli ultimi due riporti. Se sono discordi (cioè $r_n \neq r_{n-1}$), si attiva;

- **ZF:** si attiva se la rappresentazione S finale è uguale a 0 (si ricorda che lo 0 è tale sia in base che in complemento a 2);
- **SF:** si attiva se il MSB è uguale a 1, che in complemento a due significa segno negativo.

3.3.2 INCREMENT

- **Formato:** **INC** destination
- **Azione:** equivale all'istruzione **ADD** $\$1$, destination.
- **Flag:** modifica tutti i flag di ADD tranne CF (il riporto).

Operandi	Esempi
Memoria	INCB ($\%ESI$)
Registro Generale	INC $\%CX$

Quest'istruzione è più compatta di ADD, e (forse solo storicamente) è anche più veloce. Questo deriva dal fatto che la circuiteria che implementa l'incremento è (in teoria) più efficiente di quella che implementa le somme.

3.3.3 SUBTRACT

- **Formato:** **SUB** source, destination
- **Azione:** modifica l'operando destinatario sottraendovi l'operando sorgente. Il risultato è consistente sia che si interpretino i numeri come naturali, che come interi.
- **Flag:** attiva CF se, interpretando i numeri come naturali, si è verificato un riporto; attiva OF se, interpretando gli operandi come interi, si è verificato un traboccamento.

Operandi	Esempi
Memoria, Registro Generale	SUB 0x00002000, $\%EDX$
Registro Generale, Memoria	SUB $\%CL$, 0x12AB1024
Registro Generale, Registro Generale	SUB $\%AX$, $\%DX$
Immediato, Memoria	SUBB $\$0x5B$, ($\%EDI$)
Immediato, Registro Generale	SUB $\$0x54A3$, $\%AX$

Funzionamento della SUBTRACT

Il passo elementare della sottrazione potrebbe sembrare effettivamente il contrario di quello della somma: si sottraggono le cifre del sottraendo e del minuendo, x_i e y_i , e un riporto entrante r_i al minuendo, per produrre:

- La prossima cifra d_i del risultato;
- Un riporto uscente r_{i+1} (cioè il riporto entrante per il prossimo passo).

In verità risulta più conveniente usare la stessa circuiteria della somma, e adottare quindi semplicemente il complemento a 2. Abbiamo che:

$$X - Y = X + \bar{Y} + 1$$

ergo possiamo sfruttare il carry bit (che prendiamo come già impostato), ed eseguire la somma fra X e il complemento di Y . Questo ci dà il risultato corretto sia che si parli di naturali che di interi, visto che equivale a $X + (-Y)$.

In generale, l'algoritmo esatto usato per la sottrazione (sottrazione manuale con prestiti, o addizione del complemento) non è poi così importante. Dobbiamo però fare attenzione ai flag, che vengono impostati in modo diverso rispetto alla somma, ovvero:

- **CF:** non viene impostato sul riporto effettivamente generato dalla somma (in quanto 1) sarebbe irrilevante; 2) non siamo nemmeno sicuri che il complemento a 2 sia il modo in cui viene effettivamente svolta la sottrazione a livello ALU), ma sul **prestito** che si sarebbe dovuto fare nel caso si avesse avuto $Y > X$. In altre parole, nel caso di numeri naturali, il CF rappresenta se la somma è un naturale (quando è 0) o se è un intero negativo (quando è 1).
- **OF:** rappresenta l'overflow, ergo la non rappresentabilità, nel caso di sottrazioni intere, e guarda come per le somme, ai segni (il MSB):
 - **Segni concordi:** non c'è overflow;
 - **Segni discordi:** il risultato è corretto se è concorde col minuendo.
- **ZF:** si attiva se la rappresentazione S finale è uguale a 0 (si ricorda che lo 0 è tale sia in base che in complemento a 2);
- **SF:** si attiva se il MSB è uguale a 1, che in complemento a due significa segno negativo.

Si ricorda un'ultima volta: la circuiteria per la somma (e per la sottrazione) non è diversa fra naturali ed interi: è controllando i flag giusti che si riesce ad ottenere informazioni riguardo all'esito della somma, e i flag giusti sono noti solo se lo è il tipo di rappresentazione degli operandi (nozione che conosce solo il programmatore).

3.3.4 DECREMENT

- **Formato:** **DEC** destination
- **Azione:** equivale all'istruzione **SUB** $\$1$, destination.
- **Flag:** modifica tutti i flag di SUBTRACT tranne CF (il prestito).

Operandi	Esempi
Memoria	DEC (%EDI)
Registro Generale	DEC %CX

3.3.5 ADD WITH CARRY

- **Formato:** **ADC** source, destination
- **Azione:** modifica l'operando destinatario sommandovi sia l'operando sorgente sia il contenuto del flag CF.
- **Flag:** modifica tutti i flag come ADD.

Operandi	Esempi
Memoria, Registro Generale	ADC 0x00002000, %EDX
Registro Generale, Memoria	ADC %CL, 0x12AB1024
Registro Generale, Registro Generale	ADC %AX, %DX
Immediato, Memoria	ADCB \$0x5B, (%EDI)
Immediato, Registro Generale	ADC \$0x54A3, %AX

Quest'istruzione è utile per effettuare somme di numeri più grandi di 32 bit. In questo caso si:

- Effettua la somma dei 32 bit meno significativi con ADD;
- Sommano i successivi 32 bit con ADC portandosi quindi dietro il carry.

3.3.6 SUBTRACT WITH BORROW

- **Formato:** **SBB** source, destination
- **Azione:** modifica l'operando destinatario sottraendovi sia l'operando sorgente sia il contenuto del flag CF.
- **Flag:** modifica tutti i flag come SUBTRACT.

Operandi	Esempi
Memoria, Registro Generale	SBB 0x00002000, %EDX
Registro Generale, Memoria	SBB %CL, 0x12AB1024
Registro Generale, Registro Generale	SBB %AX, %DX
Immediato, Memoria	SBBB \$0x255B, (%EDI)
Immediato, Registro Generale	SBB \$0x54A3, %AX

Come ormai dovrebbe essere chiaro, è la duale dell'ADC, e si usa per effettuare sottrazioni di numeri più grandi di 32 bit.

3.3.7 NEGATE

- **Formato:** **NEG** destination

- **Azione:** interpreta l'operando destinatario come un numero intero e lo sostituisce con il suo opposto in complemento a 2.
- **Flag:** quando l'operazione non è possibile (l'intervallo di rappresentabilità degli interi in complemento a 2 non è simmetrico) imposta il flag OF. Imposta inoltre il flag CF quando l'operando è diverso da zero, e tutti gli altri flag in base a nullità e segno del risultato.

Operandi	Esempi
Memoria	NEGB (%EDI)
Registro Generale	NEG %CX

Funzionamento della NEGATE

L'opposto di un numero X in complemento a due è:

$$-X = \bar{X} + 1$$

Si ricordi che questo ha senso *solamente* se il numero è rappresentato in complemento a due.

3.3.8 COMPARE

- **Formato:** **CMP** source, destination
- **Azione:** verifica se l'operando destinatario è maggiore, uguale o minore dell'operando sorgente, sia interpretando gli operandi come naturali che come interi, e aggiorna i flag di conseguenza. Più propriamente, la compare si comporta come la SUB, ma senza sovrascrivere nessuno degli operandi.
- **Flag:** come la SUB.

Operandi	Esempi
Memoria, Registro Generale	CMP 0x00002000, %EDX
Registro Generale, Memoria	CMP %CL, 0x12AB1024
Registro Generale, Registro Generale	CMP %AX, %DX
Immediato, Memoria	CMPB \$0x255B, (%EDI)
Immediato, Registro Generale	CMP \$0x54A3, %AX

3.3.9 Funzionamento della COMPARE

Solitamente la CMP si usa nei salti condizionati come:

```
1 CMP %AX, %BX
2 JCOND # salto condizionato
```

Ciò che fa la CMP è effettivamente creare un'oggetto temporaneo:

$$\text{tmp} = \text{dest} - \text{source}$$

che viene poi rimosso.

I flag restano però aggiornati, e questo valore può essere interpretato correttamente dalla JE per effettuare un salto condizionale.

3.4 Moltiplicazioni

Le moltiplicazioni, a differenza delle somme e delle differenze, sono diverse fra naturali ed interi. Bisogna inoltre notare che le dimensioni il risultato della somma di un numero a n cifre sta su n o $n + 1$ cifre, mentre il prodotto di due numeri a n cifre sta su $2n$ cifre. In altre parole, il numero di bit necessari a memorizzare il risultato non è più confrontabile con quello degli operatori.

3.4.1 MULTIPLY

- **Formato:** **MUL** source
- **Azione:** considera l'operando sorgente come un moltiplicando, l'operando destinatario (implicito) come un moltiplicatore, e effettua la moltiplicazione assumendo i numeri naturali. Nello specifico:
 - Sorgente a 8 bit, si ha $AX = AL \times source$;
 - Sorgente a 16 bit, si ha $DX_AX = AX \times source$;
 - Sorgente a 32 bit, si ha $EDX_EAX = EAX \times source$.
- **Flag:** imposta CF e OF se il risultato non sta nel numero di bit di source. SF e ZF sono indefiniti.

Operandi	Esempi
Memoria	MULB (\%ESI)
Registro Generale	MUL \%ECX

3.4.2 INTEGER MULTIPLY

- **Formato:** **IMUL** source
- **Azione:** considera l'operando sorgente come un moltiplicando, l'operando destinatario (implicito) come un moltiplicatore, e effettua la moltiplicazione assumendo i numeri interi. Nello specifico:
 - Sorgente a 8 bit, si ha $AX = AL \times source$;
 - Sorgente a 16 bit, si ha $DX_AX = AX \times source$;
 - Sorgente a 32 bit, si ha $EDX_EAX = EAX \times source$.
- **Flag:** li imposta tutti, ma non è attendibile.

Operandi	Esempi
Memoria	IMULB (\%ESI)
Registro Generale	IMUL \%ECX

Funzionamento delle MULTIPLY e INTEGER MULTIPLY

Queste operazioni hanno sia un operando che il destinatario impliciti, in base al tipo dell'operando fornito. Questo deriva dal fatto che il risultato di una moltiplicazione raramente sta nello stesso numero di bit dei fattori. Di preciso, abbiamo visto i 3 tipi di moltiplicazione concessi:

- Sorgente a 8 bit, si ha $AX = AL \times \text{source}$;
- Sorgente a 16 bit, si ha $DX_AX = AX \times \text{source}$;
- Sorgente a 32 bit, si ha $EDX_EAX = EAX \times \text{source}$.

La differenza fra le prime due operazioni e l'ultima, in particolare con sorgente a 16 bit, che usa una due registri da 16 bit separati, ha principalmente motivi storici (il registro EAX è stato introdotto dopo).

Si può rimettere il valore dai due registri a 16 bit in un registro a 32 bit attraverso la pila:

```
1 PUSH \%DX
2 PUSH \%AX
3 POP  \%EAX
```

4 Lezione del 27-09-24

4.1 Divisioni

La divisione è l'operazione più complessa fra le 4 operazioni aritmetiche fondamentali. I risultati, di base, sono due: **quoziente** e **resto**. Inoltre, l'operazione non è ben definita quando il divisore vale 0.

Facciamo innanzitutto delle considerazioni di dimensione dei risultati:

$$X/Y \rightarrow (Q, R), \quad 0 \leq R \leq Y - 1, \quad 0 \leq Q \leq X$$

In assembler, si assume il quoziente e il resto stiano sulla metà dei bit che rappresentano il dividendo. Bisogna fare attenzione in quanto questo non è sempre il caso.

4.1.1 DIVIDE

- **Formato:** **DIV** source
- **Azione:** considera l'operando sorgente come un divisore, l'operando destinatario (implicito) come un dividendo, e effettua la divisione assumendo i numeri naturali. Nello specifico:
 - Sorgente a 8 bit, si ha $AL = AX \div \text{source}$, e $AH = AX \bmod \text{source}$;
 - Sorgente a 16 bit, si ha $AX = DX_AX \div \text{source}$, e $DX = DX_AX \bmod \text{source}$;
 - Sorgente a 32 bit, si ha $EAX = EDX_EAX \div \text{source}$, e $EDX = EDX_EAX \bmod \text{source}$;

Nel caso il quoziente non sia esprimibile su un numero di bit pari a quello del divisore, allora si genera un'eccezione interna, che mette in esecuzione un sotto-programma. Da lì in poi i risultati generati non sono più attendibili

- **Flag:** imposta tutti i bit, ma non è attendibile.

Operandi	Esempi
Memoria	DIVB (%ESI) \# AX destinazione implicita
Registro Generale	DIV \%ECX \# EDX_EAX destinazione implicita

Attenzione: la destinazione implicita non è quella che va a contenere il risultato, ma quella che contiene il dividendo. Negli esempi, le destinazioni quoziente resto sono rispettivamente AL e AH, EAX e EDX.

4.1.2 INTEGER DIVIDE

- **Formato:** `IMUL source`
- **Azione:** considera l'operando sorgente come un divisore, l'operando destinatario (implicito) come un dividendo, e effettua la divisione assumendo i numeri interi. Nello specifico:
 - Sorgente a 8 bit, si ha $AL = AX / source$, e $AH = AX \bmod source$;
 - Sorgente a 16 bit, si ha $AX = DX_AX / source$, e $DX = DX_AX \bmod source$;
 - Sorgente a 32 bit, si ha $EAX = EDX_EAX / source$, e $EDX = EDX_EAX \bmod source$;
- **Flag:** li imposta tutti, ma non è attendibile.

Operandi	Esempi
Memoria	<code>IDIVB (%ESI) \# AX destinazione implicita</code>
Registro Generale	<code>IDIV %ECX \# EDX_EAX destinazione implicita</code>

Bisogna stare attenti ai segni della divisione intera. Nella divisione intera il resto ha sempre il segno del dividendo, ed è minore in modulo del divisore. Ciò significa che il quoziente si approssima sempre all'intero più vicino allo zero (*per troncamento*). Ad esempio, $-7 \text{ idiv } 3 = -2$, -1 e $7 \text{ idiv } -3 = -2$, $+1$.

Funzionamento delle DIVIDE e INTEGER DIVIDE

Esistono quindi, come per le moltiplicazioni, tre tipi di divisione, con operando e destinatario impliciti:

- Sorgente a 8 bit, si ha $AL = AX / source$, e $AH = AX \bmod source$;
- Sorgente a 16 bit, si ha $AX = DX_AX / source$, e $DX = DX_AX \bmod source$;
- Sorgente a 32 bit, si ha $EAX = EDX_EAX / source$, e $EDX = EDX_EAX \bmod source$;

In tabella questo significa:

Dim. sorgente (divisore)	Dim. dividendo	Dividendo	Quoziente	Resto
8 bit	16 bit	AX	AL	AH
16 bit	32 bit	DX_AX	AX	DX
32 bit	64 bit	EDX_EAX	EAX	EDX

Se il quoziente non sta nel numero di bit previsto, viene sollevata un'eccezione, e il programma va in HALT. Bisogna quindi decidere quali versioni usare tenendo conto delle dimensioni dei possibili quoziente. Questo è importante in quanto non è così raro avere divisioni dove il quoziente non sta nella metà dei bit del dividendo, ad esempio:

```

1 MOV $3, %CL
2 MOV $15000, %AX
3 DIV %CL # come metto 5000 su una locazione da 8 bit?
```

per risolvere il problema, dobbiamo costringere il processore ad usare un altro tipo di divisione, quindi:

```
1 MOV $3, %CX
2 MOV $15000, %AX
3 MOV $0, %DX # devo ripulire DX, verra' usato il dividendo DX_AX
4 DIV %CX # il risultato va in AX, tutto bene
```

4.2 Note conclusive su moltiplicazioni e divisioni

Dobbiamo quindi ricordarci, riguardo a moltiplicazioni e divisioni, di:

- Scegliere con cura la versione che usiamo (soprattutto nel caso di divisioni dove il quoziente potrebbe non stare nella metà del numero di bit del dividendo);
- Azzerare di azzerare i registri DX o EDX prima della divisione, se è a più di 8 bit;
- Ricordare che il contenuto di DX o EDX viene modificato per operazioni su più di 8 bit.

4.3 Estensione di campo

Attraverso l'estensione di campo si rappresenta lo stesso numero su più cifre. Questo è banale sui naturali (si aggiunge uno zero), ma più complicato per gli interi. In questo caso si estende con il bit più significativo (quello di segno).

4.3.1 CONVERT BYTE TO WORD

- **Formato:** CBX
- **Azione:** interpreta il contenuto di AL come un numero intero a 8 bit, la rappresenta su 16 bit e quindi lo memorizza in AX.
- **Flag:** nessuno.

4.3.2 CONVERT WORD TO DOUBLEWORD

- **Formato:** CWDE
- **Azione:** interpreta il contenuto di AX come un numero intero a 16 bit, la rappresenta su 32 bit e quindi lo memorizza in EAX.
- **Flag:** nessuno.

Poniamo ad esempio di voler sommare due interi, uno in AX e l'altro in EBX:

```
1 MOV $-5, %AX
2 MOV $100000, %EBX
3 CWDE
4 ADD %EAX, %EBX
```


4.4 Istruzioni di traslazione e rotazione

Queste istruzioni variano l'ordine dei bit in un operando destinatario. Hanno due formati: `OCPODE source, destination` o `OPCODE destination`.

Quando si specifica un sorgente, esso rappresenta il numero di iterazioni per cui si ripete l'operazione. Il sorgente può essere ad indirizzamento immediato o essere il registro CL. Inoltre, deve essere ≤ 31 (sarebbe inutile fare ≥ 32 trasformazioni di 32 bit). Quando è omesso, il sorgente vale di default 1.

4.4.1 SHIFT LOGICAL LEFT

- **Formato:** **SHL** source, destination
- **Azione:** interpreta l'operando sorgente come un naturale n , e per n iterazioni:
 - Sostituisce il bit in CF con il MSB;
 - Sostituisce ogni bit (tranne il LSB) con il bit immediatamente a destra (il meno significativo);
 - Sostituisce il LSB con 0.
- **Flag:** nessuno.

Operandi	Esempi
Immediato, Registro Generale	SHL \$1, %EAX
Immediato, Memoria	SHLB \$7, 0x00002000
Registro CL, Registro Generale	SHL %CL, %EAX
Registro CL, Memoria	SHLL %CL, (%EDI)
Memoria	SHLL (%EDI)
Registro Generale	SHL %AX

La SHL è utile per effettuare moltiplicazioni per 2 (shift a sinistra in binario significa $\times 2$), tranne nei casi in cui il prodotto non sta sul numero di bit del destinatario.

Per questo si controlla il CF, facendo però attenzione che per n iterazioni (date dal sorgente) vengono effettuati n sovrascrizioni del CF. Ergo, se la moltiplicazione fallisce, non sappiamo *quando* fallisce.

4.4.2 SHIFT ARITHMETIC LEFT

- **Formato:** **SAL** source, destination
- **Azione:** è identica alla SHL. Quindi equivale a moltiplicare per 2^{source} .
- **Flag:** nessuno.

Esiste come duale della SAR, ma in questo caso non deve fare nulla di diverso dalla SHL.

4.4.3 SHIFT LOGICAL RIGHT

- **Formato:** **SHR** source, destination
- **Azione:** interpreta l'operando sorgente come un naturale n , e per n iterazioni:
 - Sostituisce il bit in CF con il LSB;
 - Sostituisce ogni bit (tranne il MSB) con il bit immediatamente a sinistra (il più significativo);
 - Sostituisce il MSB con 0.
- **Flag:** nessuno.

Operandi	Esempi
Immediato, Registro Generale	SHR \$1, %EAX
Immediato, Memoria	SHRB \$7, 0x00002000
Registro CL, Registro Generale	SHR %CL, %EAX
Registro CL, Memoria	SHRL %CL, (%EDI)
Memoria	SHRL (%EDI)
Registro Generale	SHR %AX

La SHR, come la SHL, è utile per effettuare divisioni per 2 (shift a destra in binario significa $\div 2$), concessa approssimazione del bit perso, tranne nei casi in cui il numero è un intero (lo 0 al MSB corrompe il segno). Per questo motivo si definisce la:

4.4.4 SHIFT ARITHMETIC RIGHT

- **Formato:** **SAR** source, destination
- **Azione:** è identica alla SHR, ma non sostituisce il MSB con 0, lasciandolo tale. Questo equivale a dividere per 2^{source} .
- **Flag:** nessuno.

La SAR ci permette di dividere velocemente interi per 2, come avremmo fatto sui naturali con la SHR.

4.4.5 Divisioni intere

Le IDIV e SAR approssimano diversamente: la IDIV approssima per troncamento, mentre la SAR approssima sempre a sinistra. Quindi, IDIV e SAR danno lo stesso quoziente solo quando il dividendo è positivo, o il resto nullo.

4.5 Istruzioni di rotazione

Le istruzioni di rotazione ruotano i bit, cioè effettuano uno shift con rientro dei bit in uscita dal lato opposto, con la possibilità di includere o meno CF nella rotazione.

4.5.1 ROTATE LEFT

- **Formato:** **ROL** source, destination
- **Azione:** interpreta l'operando sorgente come un naturale n , e per n iterazioni ruota verso sinistra senza usare il carry.
- **Flag:** nessuno.

Operandi	Esempi
Immediato, Registro Generale	ROL \$1, %EAX
Immediato, Memoria	ROLB \$7, 0x00002000
Registro CL, Registro Generale	ROL %CL, %EAX
Registro CL, Memoria	ROLL %CL, (%EDI)
Memoria	ROLL (%EDI)
Registro Generale	ROL %AX

4.5.2 ROTATE RIGHT

- **Formato:** **ROR** source, destination
- **Azione:** interpreta l'operando sorgente come un naturale n , e per n iterazioni ruota verso destra senza usare il carry.
- **Flag:** nessuno.

Operandi	Esempi
Immediato, Registro Generale	ROR \$1, %EAX
Immediato, Memoria	RORB \$7, 0x00002000
Registro CL, Registro Generale	ROR %CL, %EAX
Registro CL, Memoria	RORL %CL, (%EDI)
Memoria	RORL (%EDI)
Registro Generale	ROR %AX

4.5.3 ROTATE CARRY LEFT

- **Formato:** **RCL** source, destination
- **Azione:** interpreta l'operando sorgente come un naturale n , e per n iterazioni ruota verso sinistra usando il carry.
- **Flag:** imposta il carry assumendolo a sinistra del MSB.

Operandi	Esempi
Immediato, Registro Generale	RCL \$1, %EAX
Immediato, Memoria	RCLB \$7, 0x00002000
Registro CL, Registro Generale	RCL %CL, %EAX
Registro CL, Memoria	RCLL %CL, (%EDI)
Memoria	RCLL (%EDI)
Registro Generale	RCL %AX

4.5.4 ROTATE CARRY RIGHT

- **Formato:** **RCR** source, destination
- **Azione:** interpreta l'operando sorgente come un naturale n , e per n iterazioni ruota verso destra usando il carry.
- **Flag:** imposta il carry assumendolo a destra del LSB.

Operandi	Esempi
Immediato, Registro Generale	RCR \$1, %EAX
Immediato, Memoria	RCRB \$7, 0x00002000
Registro CL, Registro Generale	RCR %CL, %EAX
Registro CL, Memoria	RCRL %CL, (%EDI)
Memoria	RCRL (%EDI)
Registro Generale	RCR %AX

4.6 Istruzioni logiche

Queste istruzioni applicano gli operatori dell'algebra di Boole, e solitamente modificano flag.

4.6.1 NOT

- **Formato:** **NOT** destination
- **Azione:** modifica il destinatario applicandogli il NOT bit a bit.
- **Flag:** nessuno.

Operandi	Esempi
Memoria	NOTL (%ESI)
Registro Generale	NOT %CX

4.6.2 AND

- **Formato:** **AND** source, destination
- **Azione:** modifica il destinatario applicando l'AND bit a bit degli operandi.
- **Flag:** modifica tutti i flag (annulla CF e OF).

Operandi	Esempi
Memoria, Registro Generale	AND 0x00002000, %EDX
Registro Generale, Memoria	AND %CL, 0x12AB1024
Registro Generale, Registro Generale	AND %AX, %DX
Immediato, Memoria	AND 5x5B, (%EDI)
Immediato, Registro Generale	AND \$0x45AB54A3, %EAX

4.6.3 OR

- **Formato:** **OR** source, destination
- **Azione:** modifica il destinatario applicando l'OR bit a bit degli operandi.
- **Flag:** modifica tutti i flag (annulla CF e OF).

Operandi	Esempi
Memoria, Registro Generale	OR 0x00002000, %EDX
Registro Generale, Memoria	OR %CL, 0x12AB1024
Registro Generale, Registro Generale	OR %AX, %DX
Immediato, Memoria	OR 5x5B, (%EDI)
Immediato, Registro Generale	OR \$0x45AB54A3, %EAX

4.6.4 XOR

- **Formato:** **XOR** source, destination
- **Azione:** modifica il destinatario applicando l'OR bit a bit degli operandi.
- **Flag:** modifica tutti i flag (annulla CF e OF).

Operandi	Esempi
Memoria, Registro Generale	XOR 0x00002000, %EDX
Registro Generale, Memoria	XOR %CL, 0x12AB1024
Registro Generale, Registro Generale	XOR %AX, %DX
Immediato, Memoria	XOR 5x5B, (%EDI)
Immediato, Registro Generale	XOR \$0x45AB54A3, %EAX

4.6.5 Uso delle istruzioni logiche

Le istruzioni logiche vengono usate per operare su singoli bit degli operandi, usando uno specifico operatore sorgente immediato detto maschera (**bitmask**). Nello specifico:

- **AND:**
 - si usa per testare singoli bit di un operando. Ad esempio, si può implementare un salto condizionale se il quinto bit di AL vale zero:

```

1 AND $0x20, %AL # 0x20 = 00100000
2 JZ # vale zero

```
 - si usa per resettare singoli bit di un operando. Ad esempio, si può resettare il sesto bit di BH:

```

1 AND $0xBF, %BH # 0xBF = 10111111

```
 - si usa per l'estensione di operandi *naturali*. Ad esempio, si possono sommare due numeri naturali, di cui uno in AL e l'altro in EBX:

```

1 MOV $5, %AL
2 MOV $100000, %EBX
3 AND $0x000000FF, %EAX
4 ADD %EAX, %EBX

```

- **OR:** si usa per settare singoli bit di un operando. Ad esempio, si può settare il quarto bit di CL:

```
1 OR $0x10, %CL # =x10 = 00010000
```

- **XOR:**

- si usa per invertire singoli bit. Ad esempio, si può invertire il quinto bit del registro AH:

```
1 XOR $0x20, %AH # 0x20 = 00100000
```

- si usa per resettare registri. Ad esempio, si può resettare EAX come:

```
1 XOR %EAX, %EAX # equivale a dire MOV $0, %EAX, ma occupa
2                # 1 byte invece di 5
```

4.7 Istruzioni di controllo

Le istruzioni di controllo permettono di alterare il flusso del programma, che altrimenti scorrerebbe normalmente in sequenza (le istruzioni vengono eseguite come vengono lette in memoria).

Conosciamo il ciclo fetch-execute: il processore carica un'istruzione, incrementa EIP, e la esegue. Alcune istruzioni alterano il valore di EIP, implementando quindi alterazioni del flusso di esecuzione:

- **Istruzioni di salto:** JMP, Jcon;
- **Istruzioni di gestione sottoprogrammi:** CALL, RET.

4.7.1 JUMP

- **Formato:** **JMP** [%EIP +/- displacement, **JMP** *extended_register, **JMP** *memory
- **Azione:** calcola un'indirizzo di salto e lo immette nel registro EIP.
- **Flag:** nessuno.

Solitamente le istruzioni di salto si riferiscono ad un nome simbolico, ed è quindi compito dell'assemblatore ricondurre la sintassi ad una delle forme sopra riportate.

4.7.2 JUMP if CONDITION MET

- **Formato:** Jcon [%EIP +/- displacement
- **Azione:** esamina il contenuto dei flag. Se da questo esame risulta che la condizione *con* è soddisfatta, si comporta come **JMP** [%EIP +/- displacement, altrimenti non fa nulla.
- **Flag:** nessuno.

I prossimi paragrafi riguardano tutti i di condizione supportati.

Condizione	Funzionamento
JZ	Jump If Zero, la condizione è soddisfatta se ZF è impostato, ergo se il risultato dell'istruzione precedente è stato 0.
JNZ	Jump If Not Zero, la condizione è soddisfatta se ZF non è impostato, ergo se il risultato dell'istruzione precedente non è stato 0.
JC	Jump if Carry, la condizione è soddisfatta se CF è impostato.
JNC	Jump if No Carry, la condizione è soddisfatta se CF non è impostato.
JO	Jump if Overflow, la condizione è soddisfatta se OF è impostato.
JNO	Jump if No Overflow, la condizione è soddisfatta se OF non è impostato.
JS	Jump if Sign, la condizione è soddisfatta se SF è impostato.
JNS	Jump if No Sign, la condizione è soddisfatta se SF non è impostato.

4.7.3 Condizioni sui flag

Esistono le seguenti condizioni sui singoli flag:

Esempi

```
1 ADD %AX, %BX
2 JC ...
3 # continua
```

Se la somma dei contenuti di AX e BX presi come naturali non è rappresentabile su 16 bit, salta.

```
1 ADD %AX, %BX
2 JO ...
3 # continua
```

Se la somma dei contenuti di AX e BX presi come interi non è rappresentabile su 16 bit, salta.

```
1 SUB %AL, %BL
2 JS ...
3 # continua
```

Se la somma differenza dei contenuti di BL ed AL (in quest'ordine) presi come interi è negativa, salta.

4.7.4 Condizioni sui naturali

Esistono le seguenti condizioni sui confronti fra naturali:

Tutte queste condizioni seguono sempre una CMP, che aggiorna i flag in modo da permettere il confronto. I risultati dei confronti possono sempre evincersi dai flag.

Esempi

Condizione	Funzionamento
JE	Jump if Equal, la condizione è soddisfatta se ZF contiene 1, cioè dopo CMP su due numeri uguali.
JNE	Jump if Not Equal, la condizione è soddisfatta se ZF contiene 0, cioè dopo CMP su due numeri non uguali.
JA	Jump if Above, la condizione è soddisfatta se CF contiene 0 e ZF contiene 1, cioè dopo CMP su un destinatario maggiore del sorgente.
JAE	Jump if Above or Equal, la condizione è soddisfatta se CF contiene 0, cioè dopo CMP su un destinatario maggiore o uguale del sorgente.
JB	Jump if Below, la condizione è soddisfatta se CF contiene 1, cioè dopo CMP su un destinatario minore del sorgente.
JBE	Jump if Below or Equal, la condizione è soddisfatta se CF contiene 1 o ZF contiene 1, cioè dopo CMP su un destinatario minore o uguale del sorgente.

```

1 CMP %AX, %BX
2 JAE ...
3 # continua

```

Se BX è maggiore o uguale di AX, presi come naturali, salta.

```

1 CMP %EDX, %ECX
2 JB ...
3 # continua

```

Se ECX è minore stretto di EDX, presi come naturali, salta.

4.7.5 Condizioni sugli interi

Esistono le seguenti condizioni sui confronti fra interi:

Condizione	Funzionamento
JE	Jump if Equal, la condizione è soddisfatta se ZF contiene 1, cioè dopo CMP su due numeri uguali.
JNE	Jump if Not Equal, la condizione è soddisfatta se ZF contiene 0, cioè dopo CMP su due numeri non uguali.
JG	Jump if Greater, la condizione è soddisfatta se ZF contiene 0 o se SF è uguale a OF, cioè dopo CMP su un destinatario maggiore del sorgente.
JGE	Jump if Greater or Equal, la condizione è soddisfatta se SF è uguale a OF, cioè dopo CMP su un destinatario maggiore o uguale del sorgente.
JB	Jump if Less, la condizione è soddisfatta se SF è diverso da OF, cioè dopo CMP su un destinatario minore del sorgente.
JBE	Jump if Less or Equal, la condizione è soddisfatta se ZF contiene 1 o se Sf è diverso da OF, cioè dopo CMP su un destinatario minore o uguale del sorgente.

Come prima, queste operazioni seguono sempre una CMP ed evincono il risultato del confronto dai flag.

Esempi

```
1 CMP %AX, %BX
2 JGE ...
3 # continua
```

Se BX è maggiore o uguale di AX, presi come interi, salta.

```
1 CMP %EDX, %ECX
2 JL ...
3 # continua
```

Se ECX è minore stretto di EDX, presi come interi, salta.

5 Lezione del 01-10-24

5.1 Istruzioni per sottoprogrammi

Nei sottoprogrammi vengono coinvolte due istruzioni **CALL**, e **RET**. Entrambe si riferiscono alla pila.

5.1.1 CALL

- **Formato:** **CALL** %EIP +/- \$displacement, **CALL** *extended_register, **CALL** *memory
- **Azione:** effettua la chiamata di un sottoprogramma, ovvero:
 - Salva il valore corrente di EIP nella pila;
 - Modifica EIP come farebbe JMP.
- **Flag:** nessuno.

Operandi	Esempi
Displacement	CALL 0x00400010
Registro	CALL *%EAX
Memoria	CALL *0x00400010

5.1.2 RET

- **Formato:** **RET**
- **Azione:** ritorna da un sottoprogramma, ovvero:
 - Rimuove un long dalla pila;
 - Lo inserisce in EIP.
- **Flag:** nessuno.

Esistono poi altre istruzioni di controllo, ovvero:

5.1.3 NOP

- **Formato:** **NOP**
- **Azione:** è l'istruzione nulla.
- **Flag:** nessuno.

5.1.4 HLT

- **Formato:** **HLT**
- **Azione:** arresta l'esecuzione fino al prossimo interrupt.
- **Flag:** nessuno.

5.1.5 HLF

- **Formato:** **HLF**
- **Azione:** arresta l'esecuzione e causa l'autocombustione del processore.
- **Flag:** nessuno.

5.2 Istruzioni privilegiate

Il codice in assembler può girare secondo due modalità sul sistema:

- **Sistema:** con accesso totale a tutte le istruzioni;
- **Utente:** senza l'accesso ad alcune istruzioni dette privilegiate.

Tra le istruzioni privilegiate ci sono **HLT**, **IN** e **OUT**. La **HLT** non è un grande problema, ma lo sono **IN** e **OUT**. Per ottenere input e output dal sistema, adoperiamo quindi determinati sottoprogrammi di servizio atti a fornire esattamente queste informazioni.

L'uso di sottoprogrammi di servizio per l'input/output è dovuto al fatto che le interfacce sono sistemi complessi, facili da portare in stato inconsistente, mentre i sottoprogrammi si assicurano di farne un corretto uso.

5.3 Struttura di un programma assembler

Vediamo adesso come strutturare un programma assembler scritto nell'ambiente GAS (Gnu Assembler). Un programma assembler è diviso in due sezioni

- **Sezione dati:** qui si dichiarano le variabili, ergo nomi simbolici per indirizzi di memoria che contengono i dati del programma;
- **Sezione codice:** istruzioni.

In un programma abbiamo bisogno di:

- **Istruzioni**, viste finora;
- **Direttive**, necessarie all'assemblaggio e alla dichiarazione di variabili.

Ad esempio, potremo avere:

```

1 .GLOBAL _main
2
3 .DATA
4 ...
5
6 .TEXT
7 _main:  NOP
8 ...
9         RET

```

Le linee che iniziano col punto sono direttive, le altre istruzioni. Una riga qualsiasi del codice è fatta come:

```
1 nome: OPCODE operandi # commento [\CR]
```

dove abbiamo una label, l'istruzione e un commento.

Tutto qui può mancare, tranne il ritorno carrello. Tutte le righe, inclusa l'ultima, vanno terminate. Inoltre, l'ultima riga dovrebbe essere una RET, che restituisce l'esecuzione al chiamante (qui l'ambiente).

Conviene iniziare il programma con una NOP, per assicurarsi che in fase di inizializzazione esso non faccia effettivamente nulla.

Vediamo ad esempio il programma visto prima per il conteggio degli uni, reso in questa struttura:

```

1 .GLOBAL _main
2 .DATA
3 dato:      .LONG 0x0F0F0101
4 conteggio: .BYTE 0x00
5
6 .TEXT
7 _main:     NOP
8           MOVB $0x00, %CL
9           MOVL dato, %EAX
10 comp:     CMPL $0x00, %EAX
11           JE fine
12           SHRL %EAX
13           ADCB $0x00, %CL
14           JMP comp
15 fine:     MOVB %CL, conteggio
16           RET

```

5.3.1 Direttive

Tutte le direttive iniziano con il carattere punto. Esse sono:

- **Dichiarazione di variabili:** Variabili dichiarate di seguito sono sempre consecutive in memoria. Si ha, di base:
 - .BYTE: riserva 1 byte;
 - .WORD: riserva 2 byte;
 - .LONG: riserva 4 byte.

Esempi

```

1 var0: .WORD      # scalare, 2 byte, valore 0x0000
2                # (considerato brutto, non inizializzare
3                # si fa con .FILL)
4 var1: .BYTE 0x30  # scalare, 1 byte, valore 0x30

```

```

5 var2: .BYTE 0x30,0x31      # vettore, 2 componenti da 1 byte,
6                             # valore 0x30 e 0x31
7 var3: .WORD 0x1020, 0x32AB # vettore, 2 componenti da 2 byte,
8                             # valore 0x1020e 0x32AB
9 var4: .LONG var3+2         # scalare, 4 byte, valore 0xAB

```

Esistono altri modi di inizializzare variabili particolari:

- `.FILL numero, dim, espressione`: dichiara numero variabili di lunghezza dim e le inizializza ad espressione (0 di default). Dim può essere 1, 2 o 4.
- **ASCII**: si può usare la codifica ASCII fra single tick ' , coi caratteri speciali dopo sequenze di escape, per indicare singoli byte. Ad esempio:

```

1 var5: .BYTE 'S', 'o', 'n', 'n', 'o'      # vettore, 4 componenti
2                                           # da 1 byte
3 var6: .BYTE 0x53, 0x6F, 0x6E, 0x6E, 0x6F # vettore, 4 componenti
4                                           # da 1 byte
5 var7: .ASCII "Stea"                      # vettore, 4 componenti
6                                           # da 1 byte
7 var8: .ASCIZ "Stea"                      # vettore, 5 componenti
8                                           # da 1 byte (include il
9                                           # terminatore)
10

```

• Altre direttive:

- `.INCLUDE "path"`: include un sorgente nel presente file, prima dell'assemblamento;
- `.SET nome, espressione`: serve a creare **costanti simboliche**. Tali costanti hanno nome nome e valore espressione. Ad esempio:

```

1 .SET dimensione, 4
2 .SET n_iter, (100 * dimensione)
3 ...
4 MOV $n_iter, %CX # e' accesso immediato

```

5.4 Costanti numeriche

Possiamo indicare costanti numeriche attraverso le seguenti convenzioni:

- **Naturali**: non hanno segno, e vengono convertite nella loro rappresentazione in base 2;
- **Intere**: hanno un segno + o - davanti, e vengono convertite nella loro rappresentazione in complemento a 2.

Inoltre possiamo scrivere costanti in base 2, 8, 10 e 16 attraverso i prefissi `0b`, `0`, nessun prefisso e `0x`.

Le variabili, quando non sono della dimensione giusta, vengono solitamente troncate (con avviso dall'assemblatore) o estese (senza avvisi dall'assemblatore).

5.5 Controllo di flusso

I costrutti di flusso a cui siamo abituati vengono implementati attraverso istruzioni di salto. Conviene comunque ragionare in costrutti ad alto livello, e limitarsi a tradurli in assembler. Da qui in poi useremo una sintassi pseudo-C per indicare questi costrutti ad alto livello.

5.5.1 If-then-else

Prendiamo la sintassi:

```

1 if(%AX < variabile) {
2     //ramo if
3     ...
4 } else {
5     //ramo else
6     ...
7 }
8 //proseguì
9 ...

```

potremo tradurla in due modi:

- Invertendo i rami then e else:

```

1         CMP variabile, %AX
2         JB ramothen
3 ramoelse: ... # ramo else
4         JMP segue
5 ramothen: ... # ramo then
6 segue:   # proseguì
7

```

- Invertendo la condizione:

```

1         CMP variabile, %AX
2         JAE ramoelse
3 ramothen: ... # ramo then
4         JMP segue
5 ramoelse: ... # ramo else
6 segue:   ... # proseguì

```

5.5.2 Ciclo for

Prendiamo:

```

1 for(int i = 0; i < variabile; i++) {
2     //iter
3     ...
4 }
5 //proseguì
6 ...

```

si rende attraverso il registro CX, come:

```

1         MOV $0, %CX
2 ciclo:  CMP var, %CX
3         JE segue
4         ... # iter
5         INC %CX
6         JMP ciclo
7 segue:  ... # proseguì

```

5.5.3 Ciclo do-while

Prendiamo infine:

```

1 do {
2     //iter
3     ...
4 } while (AX < var)
5 //proseguì
6 ...

```

si rende come:

```

1 ciclo: ... # iter
2         CMP var, %AX
3         JB ciclo
4         ... # proseguì

```

5.5.4 Un piatto di spaghetti

In assembler ci è concesso fare ciò che non è permesso da linguaggi strutturati come il C o il Pascal. In questi linguaggi, un costrutto ha un solo punto di ingresso e un solo punto di uscita.

In assembler, invece, possiamo saltare fuori e dentro cicli e costrutti quando e dove vogliamo, ed è il programmatore che deve pensare a cosa il programma sta effettivamente facendo. Ad esempio, nessuno ci vieta di dire:

```

1 ciclo: ... # inizio ciclo
2         ...
3 label1: ... # meta' ciclo
4         CMP var, %AX
5         JB ciclo
6         ...
7         JMP label1 # salto dentro un ciclo a meta' esecuzione?

```

In assembler abbiamo a disposizione un'istruzione dedicata per i loop, che è:

5.5.5 LOOP

- **Formato:** `LOOP destination`
- **Azione:** decrementa ECX e salta alla destinazione se $ECX \neq 0$. ECX va inizializzato al numero di iterazioni desiderate, e non va toccato durante il ciclo.
- **Flag:** nessuno.

Si nota che la LOOP decrementa sempre ECX, quindi si applica difficilmente a cicli FOR dove vogliamo che la variabile di controllo incrementi, e ci serve che il suo valore nel corpo del ciclo. Si noti la differenza nei due esempi:

```

1 for(int i = var; i > 0; i--) {
2     //iter (usa i)
3 }

```

diventa:

```

1         MOV var, %ECX
2 ciclo: ... # iter
3         LOOP ciclo

```

```

1 for(int i = 0; i < var; i++) {
2     //iter (usa i)
3 }

```

diventa:

```

1         MOV $0, %EBX # usa EBX
2 ciclo: ... # iter
3         INC EBX
4         CMP var, %EBX
5         JE ciclo

```

5.5.6 LOOP condizionali

Esistono versioni condizionali della LOOP, che sono **LOOPE** e **LOOPNE**, simili alle Jump condizionali. In questo caso, oltre al registro ECX, si verifica la condizione e nel caso si salta. Ad esempio:

```

1      MOV $10, %ECX
2 ciclo:  CMP src, dest
3          LOOPcond ciclo

```

Queste istruzioni non sono indispensabili, in quanto possono essere rimpiazzate facilmente dalla **CMP** unita ad un Jump condizionale.

5.6 Passaggio di argomenti a sottoprogrammi

Le **CALL** e **RET** prima definite non forniscono modi per passare parametri ai sottoprogrammi, o restituire valori ai chiamanti.

Dobbiamo quindi stabilire delle convenzioni, scegliendo se:

- Usare locazioni di memoria condivise;
- Usare registri;
- Usare la pila (che non verrà visto nel corso).

In assembler non esiste il concetto di visibilità o variabili locali, tutta la memoria è indirizzabile a qualsiasi livello. Comunque, quando si scrive un sottoprogramma, bisogna specificare i parametri di ingresso e di uscita con un'opportuno commento, come:

```

1 # sottoprogramma "sottoprogram", [descrizione]
2 # ingresso: %AX, [descrizione]
3 #           %EBX, [descrizione]
4 # uscita:   CAX, [descrizione]
5
6 sottoprogram: ...
7               MOV ..., %CX # preparo il ritorno
8               RET

```

adesso potremo usare il sottoprogramma come:

```

1 MOV ..., %AX # preparo i parametri
2 MOV ..., %EBX
3 CALL sottoprogram # chiamo
4 MOV %CX, var # var contiene il ritorno

```

6 Lezione del 02-10-24

6.1 Effetti collaterali

I sottoprogrammi non dovrebbero avere effetti collaterali, ergo dovrebbero lasciare i registri come li trovano. Per fare ciò, si sfrutta la pila per immagazzinare i loro valori precedenti:

```

1 sottoprogram: PUSH ... # fai push dei registri
2               PUSH ...
3               ... # esegui il sottoprogramma
4               MOV ..., %CX
5

```

```

6     POP ... # riprendi i resisti
7     POP ...
8     RET

```

Sono fondamentali due linee guida:

- Bisogna stare attenti ad operazioni come **IDIV** e **IMUL**, che sporcano registri come EDX implicitamente;
- Bisogna far corrispondere una **POP** ad ogni **PUSH**, altrimenti si lascia la pila in uno stato inconsistente per il prossimo **RET**.

6.2 Sottoprogramma principale

Il `_main` va in esecuzione come un sottoprogramma, ergo deve terminare con una **RET** e lasciare in EAX un valore di ritorno (0 significa tutto ok, $\neq 0$ significa codice di errore). Per quanto ci riguarda, basterà scrivere **XOR %EAX, %EAX**.

6.3 Dichiarazione dello stack

Lo stack esiste se viene:

1. Dichiarato con una direttiva;
2. Inizializzato con il registro ESP.

Dichiarare significa allocare abbastanza memoria, e inizializzare significa impostare ESP alla cella successiva al fondo dello stack (si ricorda che lo stack si evolve verso sinistra). Ad esempio, potremo avere:

```

1 .DATA
2 ...
3 mystack: .FILL 1024, 4 #dichiarazione stack
4 .SET     initial_esp, (mystack + 1024*4)
5
6 .TEXT
7 _main:   NOP
8         MOV $initial_esp, %ESP # inizializzazione stack

```

Lo stack può essere grande a piacere del programmatore. Nel nostro ambiente (ma non in generale) possiamo omettere la dichiarazione.

La pila può essere anche usata per il passaggio dei documenti (è il metodo che usano i compilatori). Questo risulta difficile da fare a mano, e quindi è sconsigliato per programmi più semplici.

6.4 Sottoprogrammi di Input/Output

In assembler non esistono istruzioni di ingresso e uscita (tranne le **IN** e **OUT**, che però sappiamo essere privilegiate). Si usano quindi i servizi del sistema (DOS), ovvero sottoprogrammi scritti da altri che girano in modalità sistema. Questi servizi sono molto primitivi: permettono l'uscita di singoli caratteri. Esistono quindi sottoprogrammi (leggermente) più sofisticati per l'output di numeri, ecc...

6.4.1 I/O tastiera e video

Le informazioni che entrano ed escono da interfacce sono solo codice ASCII di singoli caratteri. Infatti in assembler non esiste il concetto di I/O tipato di variabili.

Ricevere il numero 32 significa ottenere i caratteri '3' e '2', mentre stamparlo significa inviare i caratteri '3' e '2'. Questo chiaramente sul decimale si traduce in moltiplicazioni per 10 (in entrata) e divisioni per 10 con resto (in uscita) atte ad ottenere queste cifre.

6.4.2 I/O di caratteri e stringhe

Nel corso si userà il file di utilità `.INCLUDE "./files/utility.s"`. Questo file mette a disposizione alcuni sottoprogrammi fra cui:

- **inchar:** mette in AL la codifica ASCII del tasto premuto;
- **outchar:** mette sul video la codifica ascii contenuta in AL;
- **newline:** stampa `0x0D` (Carriage Return) e `0x0A` (Line Feed), ergo va a capo;
- **pauseN:** mette in pausa il programma e stampa a video:

```
1 Checkpoint number N. Press any key to continue
```

dove N deve essere una cifra decimale.

Sopra questi sottoprogrammi sono state scritte routine più complesse:

- **inline:**
 - **Descrizione:** porta una stringa di massimo 80 caratteri in un buffer di memoria, digitando con eco su video.
 - **Parametri di ingresso:**
 - * EBX: indirizzo di memoria del buffer;
 - * CX: numero di caratteri da leggere (massimo 80, una linea).

Questo programma legge effettivamente 78 caratteri utili, in quanto gli ultimi 2 sono obbligatoriamente il nuova linea. Il programma inoltre gestisce la pressione dei tasti invio (finisci di ottenere caratteri) e backspace (cancella caratteri).

- **outline, outmess:**
 - **Descrizione:** stampa a video massimo 80 caratteri da un buffer di memoria. Si ferma prima se trova un carattere di ritorno carrello, andando anche a capo.
 - **Parametri di ingresso:**
 - * EBX: indirizzo di memoria del buffer;
- **inbyte, inword, inlong:**
 - **Descrizione:** prelevano da tastiera (con eco sul video) 2, 4 o 8 caratteri. Interpretano tale sequenza di caratteri come un numero esadecimale a 2, 4 o 8 cifre. Ignorano tutti gli altri caratteri.
 - **Parametri di ingresso:**
 - * AL, AX, o EAX: il numero esadecimale digitato.

- **outbyte, outword, outlong:**
 - **Descrizione:** stampano a video 2, 4 o 8 caratteri, corrispondenti a cifre esadecimali.
 - **Parametri di ingresso:**
 - * AL, AX, o EAX: il numero esadecimale da stampare.
 - **indecimal_byte, indecimal_word, indecimal_long:**
 - **Descrizione:** prelevano da tastiera (con eco sul video) fino a 3, 5 o 10 cifre decimali. Interpretano tale sequenza di caratteri come un numero decimale.
 - **Parametri di ingresso:**
 - * AL, AX, o EAX: il numero decimale digitato.
- Se il numero decimale è troppo grande viene troncato. Inoltre si può usare invio per dare ingresso a meno cifre.
- **outdecimal_byte, outdecimal_word, outdecimal_long:**
 - **Descrizione:** stampano a video caratteri corrispondenti a cifre decimali.
 - **Parametri di ingresso:**
 - * AL, AX, o EAX: il numero decimale da stampare.

6.5 Manipolazione di stringhe e vettori

In assembler non esistono tipi di dati né strutture dati. Si supporta però il concetto di vettore: si dichiarano vettori di variabili di una certa dimensione, e si indirizzano i loro elementi attraverso l'indirizzamento complesso ($\text{displacement} + \text{base} + \text{indice} \times \text{scala}$).

In verità esistono istruzioni stringa, che servono a copiare interi buffer di memoria, che sfruttano i registri ESI e EDI. Ad esempio, copiare un vettore a mano significherebbe:

```

1 vett_sorg:  .FILL 1000,4
2 vett_dest:  .FILL 1000,4
3
4             MOV $1000, %ECX
5             LEA vett_sorg, %ESI
6             LEA vett_dest, %EDI
7 ciclo:     MOV (%ESI), %EAX
8             MOV %EAX, (%EDI)
9             ADD $4, %ESI
10            ADD $4, %EDI
11            LOOP ciclo

```

ma abbiamo la possibilità di scrivere la stessa cosa come:

```

1 vett_sorg:  .FILL 1000,4
2 vett_dest:  .FILL 1000,4
3
4             MOV $1000, %ECX
5             LEA vett_sorg, %ESI
6             LEA vett_dest, %EDI
7             REP MOVSL

```

dove l'istruzione **REP MOVSL** indica ripetizione (prefisso **REP**), di movimento da stringa a stringa su long (**MOVSL**) finché $\text{ECX} \neq 0$.

6.5.1 Direction Flag

Esiste un'altro bit utile nel registro dei flag: il Direction Flag, o DF. Si imposta con le istruzioni:

- **STD**: SET DIRECTION FLAG, la imposta ad 1;
- **CLD**: CLEAR DIRECTION FLAG, la imposta a 0;

Si usa questo flag per dare indicazioni alla prossima istruzione:

6.5.2 MOVE DATA FROM STRING TO STRING (with REPEAT)

- **Formato**: `MOVSSuf, REP MOVSSuf`
- **Azione**: copia il numero di byte indicato dal suffisso *suf* dall'indirizzo di memoria puntato da ESI all'indirizzo di memoria puntato da EDI. Successivamente, SE DF è 1, sottrae da ESI e EDI il numero di byte indicati da *suf*, altrimenti li somma.
Se si include il prefisso, le operazioni vengono ripetute decrementando ECX (come per `LOOP`).
- **Flag**: nessuno.

Esistono poi altre istruzioni di stringa, fra cui:

6.5.3 LOAD DATA FROM STRING

- **Formato**: `LODSsuf`
- **Azione**: copia in AL, AX, oppure EAX, il contenuto della memoria all'indirizzo puntato da ESI. Successivamente incrementa o decrementa ESI di 1, 2 o 4 a seconda di DF.
- **Flag**: nessuno.

6.5.4 STORE DATA TO STRING

- **Formato**: `STOSsuf`
- **Azione**: copia il registro AL, AX, oppure EAX, in memoria all'indirizzo puntato da EDI. Successivamente incrementa o decrementa EDI di 1, 2 o 4 a seconda di DF.
- **Flag**: nessuno.

Si dovrebbe essere notato che ESI sta per sorgente, ed EDI per destinatario. Vediamo quindi degli esempi:

Copia un vettore da una parte all'altra, eseguendo un'operazione su tutti i suoi elementi:

```

1      MOV $1000, %CX
2      LEA buffer_src, %ESI
3      LEA buffer_dst, %EDI
4      CLD
5 ciclo: LODSL
6      ... #modifica %EAX
7      STOSL
8      LOOP ciclo

```

Riempi un buffer in memoria di zeri:

```

1 MOV $1000, %ECX
2 LEA buffer, %EDI
3 XOR %EAX, %EAX
4 CLD
5 REP STOSL

```

6.5.5 Istruzioni stringa per l'I/O

Esistono delle istruzioni stringa di ingresso e uscita:

6.5.6 INSERT STRING

- **Formato:** `INSsuf`
- **Azione:** fa ingresso di 1, 2 o 4 byte dalla porta di I/O il cui offset è contenuto in DX. L'operando viene inserito in memoria a partire dall'indirizzo contenuto in EDI. Successivamente incrementa o decrementa EDI di 1, 2, o 4 a seconda di DF.
- **Flag:** nessuno.

6.5.7 OUTPUT STRING

- **Formato:** `INSsuf`
- **Azione:** fa uscita di 1, 2 o 4 byte dall'indirizzo di memoria contenuto in EDI. L'operando viene inserito nella porta di I/O il cui offset è contenuto in DX. Successivamente incrementa o decrementa ESI di 1, 2, o 4 a seconda di DF.
- **Flag:** nessuno.

6.5.8 Istruzioni di confronto su stringhe

Vediamo infine alcune istruzioni per effettuare confronti su e fra stringhe:

6.5.9 COMPARE STRINGS

- **Formato:** `CMPSsuf`
- **Azione:** confronta il valore delle locazioni (singole, doppie o quadruple) indicate da ESI (sorgente) ed EDI (destinatario). Successivamente incrementa o decrementa ESI di 1, 2, o 4 a seconda di DF.
- **Flag:** nessuno.

6.5.10 SCAN STRING

- **Formato:** `SCASsuf`
- **Azione:** confronta il contenuto del registro AL, AX o EAX con la locazione (singola, doppia o quadrupla) di memoria indirizzata da EDI. L'algoritmo di confronto è lo stesso di CMP. Successivamente incrementa o decrementa ESI di 1, 2, o 4 a seconda di DF.
- **Flag:** nessuno.

Quest'espressione si usa per trovare valori noti dentro un vettore con, $DF = 0$ che cerca la prima occorrenza, e $DF = 1$ che cerca l'ultima. Ad esempio, poniamo di voler trovare il primo elemento differente fra due vettori:

```
1 array1: .WORD 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10
2 array2: .WORD 1, 2, 3, 4, 7, 6, 7, 8, 9, 10
3
4 CLD
5 LEA array 1, %ESI
6 LEA array2, %EDI
7 MOV $10, %ECX
8 REPE CMPSW
```

dove si noti che alla fine del ciclo EDI e ESI puntano all'elemento successivo.

6.5.11 Prefissi di ripetizione

Vediamo nel dettaglio il prefisso **REP**, e le sue varianti **REPE** e **REPNE**. Bisogna ricordare che questi prefissi si applicano ad istruzioni, non a blocchi di codice.

- **REP**: si può usare con **MOVS**, **LDS**, **STOS**, **INS** e **OUTS**, anche se l'utilizzo con **LDS** è privo di senso (almeno che non si voglia ottenere l'ultimo elemento...).
- **REPE** e **REPNE**: si può usare con **CMPS** e **SCAS**, ed effettua al massimo **ECX** ripetizioni, finché la condizione specificata è vera.

6.5.12 Perché due direzioni?

L'uso di due direzioni di scorrimento di stringhe attraverso il flag **DF** è utile, soprattutto nel caso si debbano fare traslazioni del vettore (copia di buffer **parzialmente sovrapposti**). Infatti, cercando di spostare il vettore a destra spostandoci verso destra, finiremo per copiare sempre gli stessi dati.

6.6 Note sull'efficienza

Un compilatore ottimizza il codice in alto livello per il sistema su cui quel codice dovrà girare. Un assembler, invece, traduce le istruzioni una per una.

6.6.1 Tempo di esecuzione di un processo

Un processo è un programma in esecuzione con dei dati. In questo, dipende dai dati, dallo stato del sistema, e da cosa sta facendo il processore (chi lo sta usando?). Questo rende il calcolatore una macchina poco prevedibile, e il tempo di esecuzione del processo difficile da calcolare a priori. Di base, infatti:

- Il clock non va a velocità costante;
- Il vostro processo non necessariamente gira su un solo core;
- Altri meccanismi introducono variabilità considerevoli:
 - Memorie cache;
 - Code di prefetch;
 - Esecuzione in pipeline: eseguire un'istruzione significa fare fetch dell'istruzione, recuperare l'OPCODE, il sorgente, scrivere sul destinatario, ecc... conviene eseguire queste operazioni in pipeline, cioè eseguendo in parallelo più istruzioni possibili contemporaneamente;

- Esecuzione non sequenziale: il processore non esegue necessariamente il codice nell'ordine in cui è scritto: se possibile, modifica l'ordine in modo da caricare in modo più efficiente possibile la pipeline;
- Branch prediction: quando si esegue in pipeline, le istruzioni condizionali creano forti bottleneck di prestazioni. Per ovviare a questo problema, il processore cerca di predire il tipo della prossima istruzione, pagando un prezzo nel caso si sbaglia, ma ottenendo un significativo incremento di velocità nel caso abbia successo.

6.6.2 Lunghezza delle istruzioni e tempo di fetch

Il numero di byte occupati da un'istruzione dipende dall'OPCODE e dal tipo di indirizzamento. Se gli operandi sono **registri**, le istruzioni stanno normalmente su 1 byte; gli operandi **immediati** devono essere codificati (in 1, 2 o 4 byte); i **displacement** occupano 4 byte.

La lunghezza delle istruzioni, oltre alle dimensioni dei file binari, influenza anche il tempo di fetch delle stesse, e va quindi tenuto in considerazione.

6.6.3 Tempo di esecuzione delle istruzioni

Il tempo di esecuzione delle istruzioni dipende molto dall'architettura specifica del processore (anche in processori della stessa famiglia).

Abbiamo che le istruzioni ALU (escluse MUL e DIV) costano poco, su $O(1)$ cicli di clock. Le MUL e DIV costano sui $O(10)$ cicli di clock, e per questo vengono tradotte in procedure alternative (attraverso LEA o le istruzioni di shift) dai compilatori attraverso apposite tabelle di corrispondenza.

Le operazioni più costose sono quelle della FPU (Floating Point Unit), che richiedono sulle $O(100)$ istruzioni.

Anche le istruzioni condizionali sono molto costose, ma per i motivi visti prima che rallentano le pipeline.

7 Lezione del 03-10-24

7.1 Assembler a 64 bit

Finora abbiamo studiato il linguaggio assembler a 32 bit (registri estesi EAX, EBX, ecc...). Vediamo adesso alcune caratteristiche dell'assembler a 64 bit.

Nei processori a 64 bit Intel-AMD x86 abbiamo 16 registri generali a 64 bit, con prefisso R, e che quindi si indicano come RAX, RBX, ecc... Di questi si può indirizzare la parte estesa dei 32 bit meno significativi (EAX), i 16 bit meno significativi (AX), e gli 8 bit meno significativi (AL). Per RAX, RBX, RCX e RDX si possono inoltre indirizzare gli 8 bit precedenti ad AL, BL, CL e DL usando AH, BH, CH e DH, ma questo è sconsigliato in quanto ci sono diverse limitazioni (non sono compatibili col prefisso REX).

Una lista completa dei registri generali è la seguente, inclusi i nomi dei sottoregistri di dimensione minore:

Ricordiamo poi i registri RIP, l'Instruction Pointer, e RFLAGS che è il registro dei flag.

64 bit	32 bit	16 bit	8 bit	8 bit (legacy)
RAX	EAX	AX	AL	AH
RBX	EBX	BX	BL	BH
RCX	ECX	CX	CL	CH
RDX	EDX	DX	DL	DH
RSP	ESP	SP	SPL	
RBP	EBP	BP	BPL	
RSI	ESI	SI	SIL	
RDI	EDI	DI	DIL	
R8	R8D	R8W	R8B	
R9	R9D	R9W	R9B	
R10	R10D	R10W	R10B	
R11	R11D	R11W	R11B	
R12	R12D	R12W	R12B	
R13	R13D	R13W	R13B	
R14	R14D	R14W	R14B	
R15	R15D	R15W	R15B	

7.1.1 Spazio indirizzabile

Tecnicamente con architettura a 64 bit si potrebbero indirizzare 2^{64} byte distinti, ma i processori moderni permettono di indirizzarne solo $2^{48} = 256$ TiB, con alcuni modelli più recenti che arrivano a $2^{57} = 128$ PiB. I 47 (o 56) bit occupati sono i meno significativi, e i restanti 16 (o 7) devono avere il valore del bit più significativo utilizzato. Questo significa che sono indirizzabili effettivamente due porzioni contigue ma separate fra di loro di memoria:

	48 bit	57 bit
Regione alta	0000 0000 0000 0000 0000 7fff ffff ffff	0000 0000 0000 0000 01ff ffff ffff ffff
Regione bassa	ffff 8000 0000 0000 ffff ffff ffff ffff	fe00 0000 0000 0000 ffff ffff ffff ffff

Lo spazio I/O, infine, è di $2^{16} = 64$ KiB locazioni.

7.1.2 Istruzioni

Le operazioni possono usare 1, 2, 4 o 8 byte per un operando (rispettivamente Byte, Word, Long e Quad).

Notiamo che non possiamo usare displacement o operandi immediati a 64 bit: siamo limitati a 32 bit. Per ovviare a questo problema esiste una versione alternativa della **MOV**:

7.1.3 MOVABS

- **Formato:** MOVABS \$const, destination
- **Azione:** porta una costante a 64 bit (che ci permette di scrivere) in un indirizzo generale.
- **Flag:** nessuno.

Operandi	Esempi
Immediato	MOVABS \$0xffff8105402300ef, %RBX
Memoria	CALL 0x00ef0b2a, %RAX
Registro	CALL %RAX, 0x00ef0b2a

In generale, in assembler a 64 bit si usano registri con valori base di 64 bit, e poi si indirizza con displacement a 32 bit, che in complemento a 2 concedono $\pm 2^{32}$, ergo $\pm 2\text{GB}$ di memoria indirizzabile rispetto alla base.

7.2 Reti logiche

Una rete logica è un modello astratto di un sistema fisico, costituito da dispositivi tra loro interconnessi. Le informazioni vengono codificate da questi dispositivi attraverso fenomeni fisici che si presentano in due aspetti distinti (corrente forte / corrente debole, tensione forte / tensione debole, magnetizzazione / non magnetizzazione, ecc...).

7.2.1 Caratterizzazione di rete logica

Una rete logica è caratterizzata da:

- Un'insieme di N variabili di ingresso. Il loro valore all'istante temporale t si chiama stato di ingresso. L'insieme di tutti i 2^N stati di ingresso si indicherà come $X.X = \{x_{N-1}x_{N-2}\dots x_1x_0\}$.
- Un'insieme di M variabili di uscita. Il loro valore all'istante temporale t si chiama stato di uscita. L'insieme di tutti i 2^M stati di uscita si indicherà come $Z.Z = \{x_{M-1}x_{M-2}\dots x_1x_0\}$.
- Una legge di evoluzione che determina come le uscite si evolvono in funzione degli ingressi.

Possiamo classificare le reti logiche in base a 2 criteri riguardanti l'evoluzione nel tempo:

- **Presenza/assenza di memoria:**
 - **Reti combinatorie:** analoghe a funzioni matematiche, le loro uscite dipendono solo dai loro ingressi in un qualsiasi istanti t ;
 - **Reti sequenziali:** lo stato di uscita dipende dalla storia degli ingressi precedenti, ergo sono reti con memoria.
- **Temporizzazione della legge di evoluzione:**
 - **Reti asincrone:** l'aggiornamento delle uscite avviene costantemente nel tempo;
 - **Reti sincronizzate:** l'aggiornamento delle uscite avviene ad istanti di sincronizzazione discreti nel tempo.

I modelli sono ortogonali, ergo possiamo avere qualsiasi delle 4 combinazioni di queste caratteristiche:

- Reti combinatorie (si considerano le sincronizzate come caso particolare);

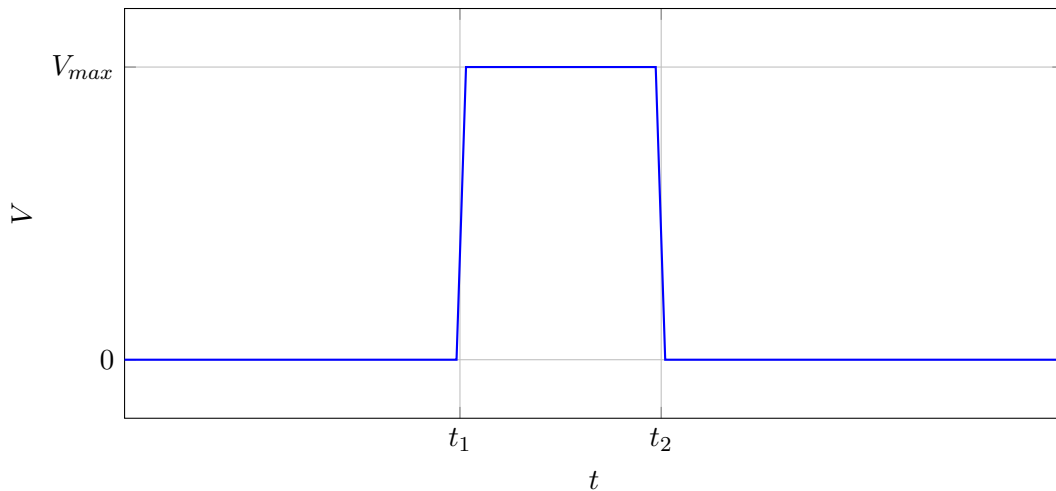
- Reti sequenziali asincrone;
- Reti sequenziali sincronizzate.

Quindi in sostanza una rete logica comunica con l'esterno attraverso variabili logiche (0 e 1). L'interpretazione di questi messaggi è una convenzione del progettista, programmatore, ecc...

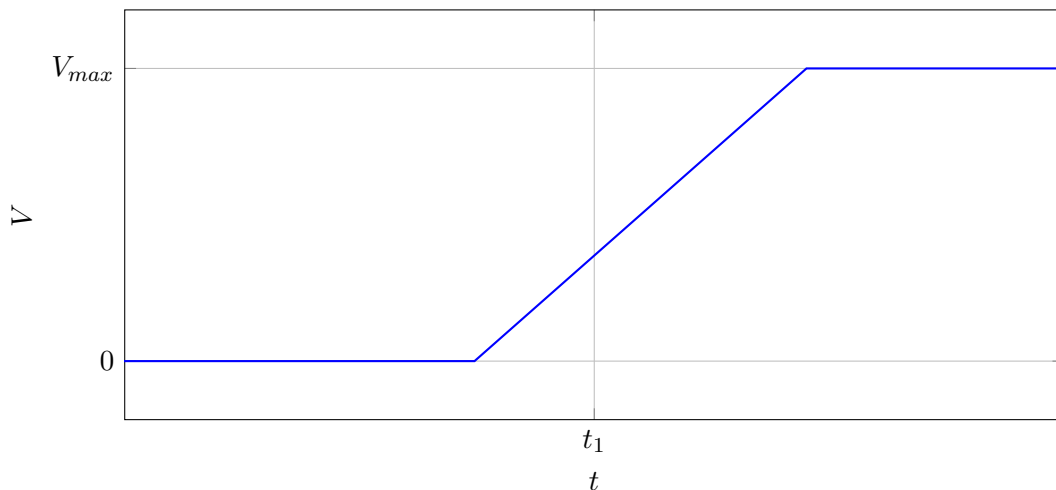
Usiamo le reti logiche per modellizzare circuiti elettronici all'interno del calcolatore, che codificano le informazioni in tensione. Notiamo quindi che una rete logica fisica ha, oltre agli ingressi e alle uscite, i collegamenti ai terminali positivi e negativi di un generatore di tensione, che noi ignoreremo.

7.3 Transizione dei segnali

Una variabile logica (per noi il voltaggio su un circuito) può settarsi (andare a 1), restare settato per tempi paragonabili a ΔT , e resettarsi (andare a 0) in un qualsiasi momento temporale t :



In un sistema fisico reale, durante la transizione c'è un periodo di indecisione in cui il voltaggio sale o scende fisicamente fino al valore necessario, sotto l'atto di una qualche potenza. Vediamo il grafico a $\Delta t \ll \Delta T$:



Decidiamo di ignorare questo problema, in quanto abbiamo visto che il Δt di transizione è molto più piccolo del Δt di stasi delle variabili.

Il problema si presenta nel caso si parli di **contemporaneità**. Supponiamo di avere una rete logica con due ingressi x_0 e x_1 e un'uscita z_0 . Abbiamo che prima dell'istante t_1 lo stato di ingresso è $(1, 0)$, e che subito dopo lo stesso stato è $(0, 1)$. Nell'istante di transizione non abbiamo la sicurezza che le singole transizioni delle due variabili della rete avvengano contemporaneamente:



Questa considerazione è importante nel caso delle reti logiche asincrone, dove considerare le transizioni come contemporanee potrebbe portare alla comparsa di stati di uscita spuri, e nelle reti sequenziali, dove potrebbe portare ad evoluzioni imprevedibili del sistema.

7.4 Reti combinatorie

Una rete combinatoria è caratterizzata da:

- Un'insieme di N variabili logiche di ingresso;
- Un'insieme di M variabili logiche di uscita;
- Una descrizione funzionale $F : X \rightarrow Z$ che mappa stati di ingresso a stati di uscita;
- Una legge di evoluzione nel tempo che adegua $F(X)$ allo stato di ingresso X continuamente.

7.4.1 Tempo di attraversamento

Il tempo di attraversamento (o di accesso) è una caratteristica di tutte le reti logiche asincrone: è il tempo necessario perché la rete si "accorga" della variazione degli ingressi e aggiorni di conseguenza le sue uscite.

Questo tempo è solitamente non nullo, ed è quindi necessario attendere che la rete arrivi a **regime** prima di valutare le uscite. Questo vincolo prende il nome di **pilotaggio in modo fondamentale**: si dice che è una rete è pilotata in modo fondamentale quando chi la pilota aspetta sempre che essa arrivi a regime prima di valutare le sue uscite.

8 Lezione del 08-10-24

8.1 Descrizione funzionale

La caratteristica più importante di una rete combinatoria è la funzione F , cioè la descrizione funzionale. Esistono più modi per esprimere questa funzione:

- A parole;
- Usando notazioni testuali (e.g. il Verilog);
- Attraverso **tabelle di verità**. In una tabella di verità contiene due insiemi di colonne: gli ingressi e le uscite. Ogni riga mostra una configurazione di stati di ingresso e il corrispondente stato d'uscita. Ad esempio:

x_2	x_1	x_0	z_1	z_0
0	0	0	0	0
0	0	1	—	1
0	1	0	1	0
...				

Si dice che la variabile di uscita **riconosce** particolari stati quando si attiva in presenza di essi. Inoltre, i trattini indicano stati **non specificati**, in inglese DC, *don't care*. Questi non equivalgono alla fascia di indeterminazione, ma a uno dei due stati accettati, anche se non è importante quale. I *don't care* vanno conservati, e non fissati a variabili come 0 o 1, in quanto è importante mantenere il funzionamento interno delle reti il più semplice possibile.

8.1.1 Descrizione e sintesi

Una **descrizione** di una rete deve essere formale, in modo che si possa capire esattamente cosa fa quella rete. La **sintesi** di una rete è il progetto stesso di realizzazione della rete, cioè quali componenti combinare in quale modo, ecc... Prima si fa la descrizione, e poi la sintesi.

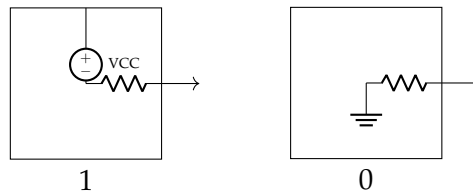
Notiamo una proprietà fondamentale: ogni rete combinatoria di N ingressi e M uscite può essere realizzata interconnettendo M reti combinatorie ad N ingressi ed una uscita. Questo ci permette di trattare tutte le reti con reti con una sola uscita.

8.2 Reti a 0 ingressi

Le reti a 0 ingressi di uscita si chiamano **generatori di costante**, e rappresentano un caso degenere. Si indicano come:



La loro uscita chiaramente vale 1 o 0 costante. Fisicamente, i generatori di costante si realizzano collegando resistori in serie al VCC (genera 1) o a massa (genera 0), ergo:



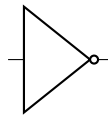
8.3 Reti a 1 ingresso

8.3.1 Invertitore

L'invertitore, detto anche porta **NOT** è una rete descritta dalla tabella di verità:

x	z
0	1
1	0

e indicata come:



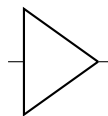
Essenzialmente nega il suo ingresso.

8.3.2 Elemento neutro

L'elemento neutro, detto anche *buffer*, è una rete descritta dalla tabella di verità:

x	z
0	0
1	1

e indicata come:



Lascia il suo ingresso invariato. Può avere un'utilità come rete di rallentamento, in quanto, inevitabilmente, si perde tempo per attraversarla (pensa alla NOP). Questo è utile per le temporizzazioni delle reti.

Inoltre, dal punto di vista elettrico, l'elemento neutro ha anche un'utilità per la **rigenerazione** dei segnali. Infatti, essendo collegato a massa e al VCC, può prendere segnali scadenti (vicini alla fascia di indeterminazione) e trasformarli in segnali di buona qualità (vicini al fondoscala). Questa proprietà, veramente, è comune a tutte le reti logiche, ma l'elemento neutro è l'unico che non ha altri effetti collaterali.

8.3.3 Reti costanti

Si possono interpretare i generatori di costante come reti ad un ingresso degeneri. Effettivamente, restano tali a se stesse, in quanto gli ingressi sono ignorati. Le loro tabelle di verità sono:

Generatore di 1:

x	z
0	1
1	1

Generatore di 0:

x	z
0	0
1	0

8.4 Reti a 2 ingressi

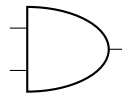
La prima domanda da porsi quando si parla di reti a 2 (come N) ingressi, è quante reti possiamo creare in tutto. Su N ingressi, la tabella di verità avrà 2^N righe. Le configurazioni possibili di 0 e 1 su 2^N righe sono 2^{2^N} . Ergo, nel caso $N = 2$, abbiamo $2^{2^2} = 16$ possibili combinazioni, che sono:

x_1	x_0	z^0	z^1	z^2	z^3	z^4	z^5	z^6	z^7	z^8	z^9	z^{10}	z^{11}	z^{12}	z^{13}	z^{14}	z^{15}
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

Ad alcune di queste corrispondono nomi speciali. Vediamole nel dettaglio:

8.4.1 Porta AND

La porta AND, indicata in z^1 , corrisponde al \wedge logico, ergo $z = 1 \Leftrightarrow x_0 = x_1 = 1$. Si indica come:

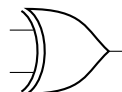


e ha tabella di verità:

x_1	x_0	z
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

8.4.2 Porta XOR

La porta XOR, indicata in z^6 , corrisponde all'*aut* logico, cioè esclusivo, ergo $z = 1 \Leftrightarrow x_0 \neq x_1$. Si indica come:

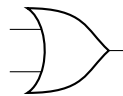


e ha tabella di verità:

x_1	x_0	z
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

8.4.3 Porta OR

La porta OR, indicata in z^7 , corrisponde al \vee logico, ergo $z = 0 \Leftrightarrow x_0 = x_1 = 0$. Si indica come:

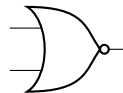


e ha tabella di verità:

x_1	x_0	z
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

8.4.4 Porta NOR

La porta NOR, indicata in z^8 , corrisponde alla negazione dell' \vee logico, ergo $z = 1 \Leftrightarrow x_0 = x_1 = 0$. Si indica come:

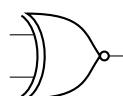


e ha tabella di verità:

x_1	x_0	z
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

8.4.5 Porta XNOR

La porta XNOR, indicata in z^9 , corrisponde alla negazione dell'*aut* logico, ergo $z = 1 \Leftrightarrow x_0 = x_1$. Si indica come:

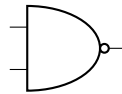


e ha tabella di verità:

x_1	x_0	z
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

8.4.6 Porta NAND

La porta NAND, indicata in z^{14} , corrisponde alla negazione dell' \wedge logico, ergo $z = 0 \Leftrightarrow x_0 = x_1 = 1$. Si indica come:



e ha tabella di verità:

x_1	x_0	z
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Si dovrebbe essere notato che un pallino finale indica negazione. A volte si usa solo questa notazione, invece di tutta la porta NOT.

8.4.7 Casi degeneri

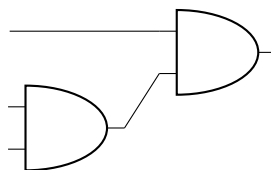
Alcuni casi speciali della tabella delle possibili reti a due porte sono degeneri: abbiamo due generatori di costante (z^0 e z^{15}), due elementi neutri, rispettivamente su x_1 e x_0 (z^3 e z_5), e due inversori sugli stessi ingressi (z_{10} e z_{12}).

8.5 AND e OR a più ingressi

Posso pensare di estendere AND e OR ad N ingressi:

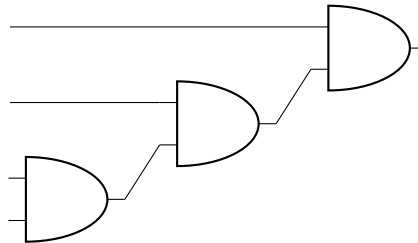
- **AND a N ingressi:** l'uscita vale 1 se tutti gli N ingressi valgono 1;
- **OR a N ingressi:** l'uscita vale 1 se almeno un'ingresso vale 1;

Questo può essere realizzato concatenando più porte logiche dello stesso tipo, come segue:

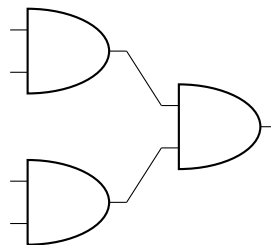


La dimostrazione è semplice dalla tabella di verità, o dalle proprietà degli operatori logici.

Una nota va fatta sulle combinazioni di più di 3 ingressi, infatti una rete del genere è sconsigliata:



in quanto il segnale deve attraversare al massimo 3 livelli di logica, mentre disponendo le porte come:



il segnale dovrà attraversare al massimo 2 livelli di logica.

Conviene quindi disporre gli N ingressi e le relative porte come un'albero binario bilanciato, in modo da minimizzare gli attraversamenti di livelli di logica. Si noti che questo discorso vale per AND e OR: non per NAND, NOR, XOR o XNOR.

Possiamo osservare velocemente cosa accade se si collegano queste porte fra di loro:

- **NAND:** un singolo NAND può formare un NOT quando i suoi ingressi sono uniti insieme. Se si mettono 2 NAND in serie (a *cascata*) in questo modo, si ottiene di nuovo un AND;
- **NOR:** un singolo NOR può formare un NAND nello stesso modo del NAND. Se si mettono 2 NOR a cascata, si ottiene di nuovo un NOR;
- **XOR:** con ≥ 2 XOR, si crea effettivamente un controllore di parità, ergo una rete che si attiva quando un numero dispari dei suoi ingressi sono accesi;
- **XNOR:** con ≥ 2 XNOR, si ha l'opposto che con gli XOR: si crea una rete che si attiva quando un numero pari dei suoi ingressi sono accesi.

Queste porte si indicano solitamente come con gli input su unica orizzontale, che risulta più compatto.

8.6 Algebra di Boole

L'algebra di Boole adopera gli operatori logici conosciuti, applicati ad elementi del campo binario $GF(2) = \{0, 1\}$

Vediamo questi operatori:

- **Complemento logico:** si indica come \bar{x} , oppure $!x$ o $/x$. Si definisce come:

$$\bar{0} = 1, \quad \bar{1} = 0$$

- **Somma logica:** si indica con $x + y$, e ha tabella di verità:

x	y	$x + y$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

cioè equivale all'OR.

- **Prodotto logico:** si indica con $x \cdot y$, e ha tabella di verità:

x	y	$x \cdot y$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

cioè equivale all'AND.

Su questi operatori valgono le proprietà:

1. **Involutiva del complemento:** $\bar{\bar{x}} = x$;
2. **Commutativa della somma e del prodotto:** $x + y = y + x$, $x \cdot y = y \cdot x$;
3. **Associativa della somma:** $x + y + z = (x + y) + z = x + (y + z)$;
4. **Associativa del prodotto:** $x \cdot y \cdot z = (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$;
5. **Distributiva della somma rispetto al prodotto:** $x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z)$;
6. **Distributiva del prodotto rispetto alla somma:** $x + (y \cdot z) = (x + y) \cdot (x + z)$. Bisogna fare attenzione in quanto questa non vale in \mathbb{R} ;
7. **Complementazione:** $x \cdot \bar{x} = 0$, $x + \bar{x} = 1$;
8. **Unione e intersezione:** $x + 0 = x$, $x + 1 = 1$, cioè 0 è l'elemento neutro e 1 l'elemento assorbente della somma (non lo è in \mathbb{R});
 $x \cdot 0 = 0$, $x \cdot 1 = x$, cioè 1 è l'elemento neutro e 0 l'elemento assorbente del prodotto;
9. **Idempotenza:** $x + x = x$, $x \cdot x = x$, altra che non vale in \mathbb{R} ;
10. **Leggi di De Morgan:** $\overline{x \cdot y} = \bar{x} + \bar{y}$ e $\overline{x + y} = \bar{x} \cdot \bar{y}$.

8.6.1 Teoremi di De Morgan

Le leggi di De Morgan comuni della logica si estendono ad N variabili come:

$$1. \overline{x_0 \cdot x_1 \cdot \dots \cdot x_n} = \bar{x}_0 + \bar{x}_1 + \dots + \bar{x}_n$$

$$2. \overline{x_0 + x_1 + \dots + x_n} = \bar{x}_0 \cdot \bar{x}_1 \cdot \dots \cdot \bar{x}_n$$

Dimostrazione per induzione

Richiamiamo le basi dell'induzione:

- Si dimostra che una proprietà vale per un certo numero n_0 (passo base);
- Si dimostra che se vale per un certo $n \geq n_0$, allora vale anche per $n + 1$.

Partiamo con le dimostrazioni classiche ottenute con le tabelle di verità:

x	y	$x \cdot y$	$\overline{x \cdot y}$	\bar{x}	\bar{y}	$\bar{x} + \bar{y}$
0	0	0	1	1	1	1
0	1	0	1	1	0	1
1	0	0	1	0	1	1
1	1	1	0	0	1	0

che ci portano a $n_0 = 2$. Posso quindi porre l'ipotesi:

$$\overline{x_0 \cdot \dots \cdot x_{n-1}} = \bar{x}_0 + \dots + \bar{x}_{n-1}$$

e la tesi:

$$\overline{x_0 \cdot \dots \cdot x_{n-1} \cdot x_n} = \bar{x}_0 + \dots + \bar{x}_{n-1} + \bar{x}_n$$

A questo punto faccio il passo induttivo, sfruttando l'associatività del prodotto (o della somma), e quindi riscrivendo la tesi come:

$$\overline{\alpha \cdot x_n}, \quad \alpha = x_0 + \dots + x_{n-1}$$

dove notiamo la variabile introdotta α , se complementata, rispetta:

$$\bar{\alpha} = \overline{x_0 \cdot \dots \cdot x_{n-1}} = \bar{x}_0 + \dots + \bar{x}_{n-1}$$

dall'ipotesi.

Possiamo quindi svolgere il passaggio:

$$\overline{\alpha \cdot x_n} = \bar{\alpha} + \bar{x}_n = \bar{x}_0 + \dots + \bar{x}_{n-1} + \bar{x}_n$$

che conferma la tesi.

8.6.2 Algebra di Boole e reti combinatorie

Esiste una corrispondenza fra l'algebra di Boole e le reti combinatorie. In particolare, si ha che:

- **Data una rete combinatoria**, (comunque complessa), è sempre possibile trovare un'espressione booleana che mette in relazione ogni sua uscita con gli ingressi (in verità un'espressione per ogni uscita);

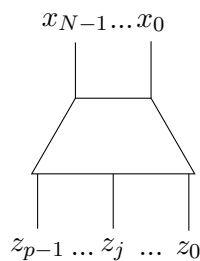
- **Data un'espressione booleana**, è sempre possibile sintetizzare una rete combinatoria (ad un'uscita) in cui la relazione tra ingresso ed uscita data è dall'espressione.

Si noti che, effettivamente, espressioni logiche equivalenti \Leftrightarrow reti logiche che svolgono lo stesso compito, ma non per questo l'equivalenza è totale: ci conviene creare reti che usano meno componenti possibili, in quanto queste le rende più affidabili, più economiche e meno dispendiose di energia. Le proprietà dell'algebra di Boole possono quindi essere usate per ridurre il numero di porte logiche, attraverso un processo che chiameremo **minimizzazione**.

9 Lezione del 09-10-24

9.1 Decoder

Un decoder è una rete con N ingressi e p uscite con $p = 2^N$. Si indica come:



La sua legge di corrispondenza stabilisce che ogni uscita riconosce uno ed un solo stato di ingresso, in particolare l'uscita j -esima (z_j) riconosce lo stato di ingresso i cui bit sono la codifica di j in base 2, cioè:

$$(x_{n-1}, \dots, x_0)_2 = j$$

Ad esempio, un decoder da 2 a 4 ha tabella di verità:

x_1	x_0	z_0	z_1	z_2	z_3
0	0	1	0	0	0
0	1	0	1	0	0
1	0	0	0	1	0
1	1	0	0	0	1

che equivale alla codifica *one-hot* del binario in ingresso (cioè ogni numero codificato da n bit viene mandato al j -esimo di p output che corrispondono uno ad uno ai numeri rappresentabili).

Vediamo di passare da questa descrizione ad una sintesi della rete. Abbiamo che:

$$\begin{cases} z_3 = x_1 \cdot x_0 \\ z_2 = x_1 \cdot \bar{x}_0 \\ z_1 = \bar{x}_1 \cdot x_0 \\ z_0 = \bar{x}_1 \cdot \bar{x}_0 \end{cases}$$

cioè ogni "indice" del decoder corrisponde al prodotto dei due ingressi opportunamente negati: l'ultima uscita avrà tutti i bit attivi (sarebbe $2^N - 1$ considerando numeri naturali),

ergo prende il prodotto di tutti gli ingressi. Di contro, la prima uscita (0) avrà tutti i bit disattivi, quindi prenderà il prodotto di tutti gli ingressi negati. Gli altri numeri vengono indirizzati prendendo il prodotto e complementando i bit che quel particolare numero si aspetterebbe come 0. Notiamo che, sebbene si abbiano 4 negazioni, nella rete fisica conviene negare gli input in entrata risparmiando 2 invertitori.

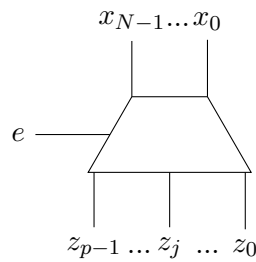
Per le figure, rimandiamo a <https://github.com/Guray00/IngegneriaInformatica/blob/master/SECONDO%20ANNO/I%20SEMESTRE/Reti%20Logiche/Diapositive%20OCR/Reti%20combinatorie%20ocr.pdf>.

Generalizziamo quindi questa struttura a decoder da N a 2^N , applicando quanto detto prima. Si avrà:

$$\begin{cases} z_0 = \overline{x_{N-1}} \cdot \overline{x_{N-2}} \cdot \dots \cdot \overline{x_1} \cdot \overline{x_0} \\ z_1 = \overline{x_{N-1}} \cdot \overline{x_{N-2}} \cdot \dots \cdot \overline{x_1} \cdot x_0 \\ \dots \\ z_{p-2} = x_{N-1} \cdot x_{N-2} \cdot \dots \cdot x_1 \cdot \overline{x_0} \\ z_{p-1} = x_{N-1} \cdot x_{N-2} \cdot \dots \cdot x_1 \cdot x_0 \end{cases}$$

9.1.1 Decoder con enabler

Il problema dei decoder come appena descritti è che non sono espandibili: non si possono costruire, come avevamo visto per i gli AND o gli OR, reti di più decoder combinati. Introduciamo per questo motivo il decoder con **enabler**:



Questi decoder hanno $N + 1$ ingressi, cioè quelli normali più l'enabler, che ha il compito di "accendere" il decoder stesso. Fisicamente, potremmo semplicemente inserire il decoder e come ingresso aggiuntivo agli AND già predisposti, per avere che:

$$z_i = \begin{cases} y_i & e = 1 \\ 0 & e = 0 \end{cases}$$

e quindi:

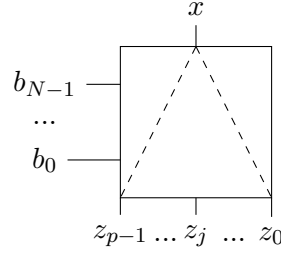
$$\begin{cases} z_0 = e \cdot \overline{x_{N-1}} \cdot \overline{x_{N-2}} \cdot \dots \cdot \overline{x_1} \cdot \overline{x_0} \\ z_1 = e \cdot \overline{x_{N-1}} \cdot \overline{x_{N-2}} \cdot \dots \cdot \overline{x_1} \cdot x_0 \\ \dots \\ z_{p-2} = e \cdot x_{N-1} \cdot x_{N-2} \cdot \dots \cdot x_1 \cdot \overline{x_0} \\ z_{p-1} = e \cdot x_{N-1} \cdot x_{N-2} \cdot \dots \cdot x_1 \cdot x_0 \end{cases}$$

Adesso basta accorgersi che reti di decoder con $N > 2$ possono crearsi concatenando decoder a decoder, cioè usando un decoder con i bit più significativi in entrata per generare l'enabler di N nuovi decoder, i quali ricevono i bit meno significativi in entrata.

Ad esempio, se vogliamo creare un decoder 4to16 a partire da decoder 2to4, useremo 4 decoder, con gli stessi input (x_0 e x_1), abilitati da un quinto decoder con input x_2 e x_3 .

9.2 Demultiplexer

Il demultiplexer è una rete con $N + 1$ ingressi e $p = 2^N$ uscite:



Chiamiamo x la **variabile da commutare**, e le altre **variabili di comando** (b). La j -esima uscita insegue la variabile da commutare se e solo se:

$$(b_{n-1}, \dots, b_0)_2 = j$$

altrimenti vale 0. Questo significa che il demultiplexer invia il suo input, x , all'output z_j tale che i controlli $b_{N-1} \dots b_0$ sono la codifica binaria di j .

Il multiplexer, fisicamente, è identico ad un decoder con enabler: si fa la parte di decoding con il:

$$\begin{cases} z_0 = \overline{x_{N-1}} \cdot \overline{x_{N-2}} \cdot \dots \cdot \overline{x_1} \cdot \overline{x_0} \\ z_1 = \overline{x_{N-1}} \cdot \overline{x_{N-2}} \cdot \dots \cdot \overline{x_1} \cdot x_0 \\ \dots \\ z_{p-2} = x_{N-1} \cdot x_{N-2} \cdot \dots \cdot x_1 \cdot \overline{x_0} \\ z_{p-1} = x_{N-1} \cdot x_{N-2} \cdot \dots \cdot x_1 \cdot x_0 \end{cases}$$

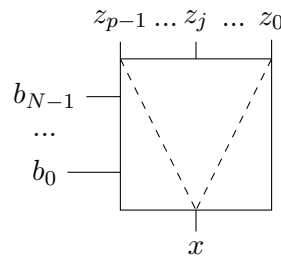
di prima, e si moltiplica per x per ottenere il comportamento desiderato:

$$\begin{cases} z_0 = x \cdot \overline{x_{N-1}} \cdot \overline{x_{N-2}} \cdot \dots \cdot \overline{x_1} \cdot \overline{x_0} \\ z_1 = x \cdot \overline{x_{N-1}} \cdot \overline{x_{N-2}} \cdot \dots \cdot \overline{x_1} \cdot x_0 \\ \dots \\ z_{p-2} = x \cdot x_{N-1} \cdot x_{N-2} \cdot \dots \cdot x_1 \cdot \overline{x_0} \\ z_{p-1} = x \cdot x_{N-1} \cdot x_{N-2} \cdot \dots \cdot x_1 \cdot x_0 \end{cases}$$

Con $x = e$ questo è un decoder con enabler x .

9.3 Multiplexer

Il multiplexer è il duale del demultiplexer: una rete con $N + 2^N$ ingressi e 1 uscita:



Gli ingressi b_i si chiamano variabili di comando, e selezionano l'ingresso connesso all'uscita come:

$$z = x_i \Leftrightarrow (b_{N-1}, \dots, b_1, b_0) = i$$

Abbiamo detto che il multiplexer è il duale del demultiplexer: se quest'ultimo prendeva un segnale x e lo inviava al j -esimo output sulla base della codifica di j ottenuta alle variabili di controllo, il multiplexer prende il j -esimo ingresso, secondo gli stessi canoni, e lo invia alla linea x di uscita.

Alla base della sintesi di un multiplexer sta un decoder: infatti, abbiamo che quest'ultimo seleziona uno solo (*one-hot*) degli output, che possiamo moltiplicare (mettiamo una AND) per l'ingresso corrispondente. Visto che solo uno degli output in uscita dagli AND è attivo in un dato momento, possiamo ricombinare il segnale finale con un unico grande OR.

Come prima, possiamo eliminare gli AND in cascata dal decoder connettendoli agli AND già contenuti in esso.

Otteniamo quindi la descrizione algebrica (si noti che adesso abbiamo fatto sintesi \rightarrow descrizione, mentre fino a questo punto avevamo fatto l'operazione inversa, descrizione \rightarrow sintesi):

$$\begin{aligned} z = & x_0 \cdot \overline{b_{N-1}} \cdot \overline{b_{N-2}} \cdot \dots \cdot \overline{b_1} \cdot \overline{b_0} + \\ & x_1 \cdot \overline{b_{N-1}} \cdot \overline{b_{N-2}} \cdot \dots \cdot \overline{b_1} \cdot b_0 + \\ & \dots + \\ & x_{p-2} \cdot b_{N-1} \cdot b_{N-2} \cdot \dots \cdot b_1 \cdot \overline{b_0} + \\ & x_{p-1} \cdot b_{N-1} \cdot b_{N-2} \cdot \dots \cdot b_1 \cdot b_0 \end{aligned}$$

Notiamo che il multiplexer è una rete a 2 livelli di logica: il segnale passerà al massimo da un AND e un OR. Le NOT sugli ingressi non si contano, in quanto in una rete fisica le variabili di comando proverranno da registri, che forniscono già una versione negata del loro output senza bisogno di ulteriori inversori.

9.3.1 Multiplexer come rete combinatoria universale

Dimostriamo il seguente teorema:

Teorema 9.1: Multiplexer come rete combinatoria universale

Un multiplexer con N variabili di comando è in grado di realizzare qualunque legge combinatoria ad N ingressi ed un uscita, connettendo i 2^N ingressi a generatori di costante.

Abbiamo che:

- Un multiplexer si ricava con porte AND, OR e NOT a due livelli di logica;

- Un multiplexer realizza qualsiasi rete combinatoria ad un'uscita;
- una rete a più uscite può essere scomposta in più reti con le uscite messe "in parallelo".

Allora qualsiasi rete combinatoria può essere creata combinando AND, OR e NOT su due livelli di logica.

Inoltre, si può dimostrare che per qualsiasi tabella di verità ad N ingressi, si può trovare una rete che la implementa tramite un multiplexer a $N - 1$ variabili di comando, e al più porte NOT.

9.4 Modello strutturale universale per reti combinatorie

Vediamo adesso un modo per sintetizzare una rete logica ad N ingressi ed M uscite a partire da una tabella di verità. Si prende prima di tutto un decoder con N ingressi, e si creano M linee parallele alle 2^N (che è anche il numero delle righe della tabella di verità) linee di uscita del decoder. Si combinano quindi queste linee di uscita attraverso OR su ogni intersezione che corrisponde ad una certa cella della tabella di verità.

9.4.1 Riduzione dei costi

Definiamo informalmente il costo come ridotto quando si usano meno porte logiche. Troviamo quindi un modo per ridurre il costo della rete creata. Avremo che, inizialmente, tutte le uscite si presentano in una forma canonica **SP**, che sta per Somma di Prodotti, del tipo:

$$z_j = x_{n-1} \cdot \dots \cdot x_0 + \dots + x_{n-1} \cdot \dots \cdot x_0$$

con la possibilità di complementare qualsiasi x . Questa forma equivale effettivamente a una forma normale disgiuntiva.

Possiamo quindi usare le proprietà dell'algebra di Boole per raggruppare e semplificare i termini. Vogliamo un algoritmo che ci permetta di eseguire questi passaggi in modo ordinato, e ci porti sempre alla soluzione ottimale.

10 Lezione del 10-10-24

10.1 Sintesi di reti in forma SP a costo minimo

Esistono due criteri di costo per le reti:

- **A porte:** ogni porta conta per un'unità di costo;
- **A diodi:** ogni ingresso conta per un'unità di costo.

Presentiamo un metodo, applicabile a reti con un'uscita, che produce reti in forma SP a 2 livelli di logica in quanto, per una legge combinatoria F , si ha::

$$\text{Sintesi di } F \text{ a 2 L.L. in forma SP} \subset \text{Sintesi di } F \text{ a 2 L.L.} \subset \text{Sintesi di } F$$

10.1.1 Espansione di Shannon

Si può dimostrare il seguente risultato:

Teorema 10.1: Espansione di Shannon

Si può sempre scrivere qualunque legge combinatoria f come somma di prodotti degli ingressi (diretti o negati).

Questo significa che, se ho una legge combinatoria $z = f(x_{N-1}, \dots, X_0)$, posso dire:

$$\begin{aligned} z = & f(0, \dots, 0, 0) \cdot \overline{x_{N-1}} \cdot \overline{x_{N-2}} \cdot \dots \cdot \overline{X_1} \cdot \overline{X_0} + \\ & f(0, \dots, 0, 1) \cdot \overline{x_{N-1}} \cdot \overline{x_{N-2}} \cdot \dots \cdot \overline{X_1} \cdot X_0 + \\ & \dots + \\ & f(1, \dots, 1, 0) \cdot x_{N-1} \cdot x_{N-2} \cdot \dots \cdot X_1 \cdot \overline{X_0} + \\ & f(1, \dots, 1, 1) \cdot x_{N-1} \cdot x_{N-2} \cdot \dots \cdot X_1 \cdot X_0 \end{aligned}$$

che equivale a quanto avevamo visto con la sintesi di reti combinatorie a N ingressi con multiplexer a N variabili di comando.

A questo punto possiamo ottenere la cosiddetta **forma canonica SP**, applicando le proprietà:

$$\begin{cases} 1 \cdot \alpha = \alpha \\ 0 \cdot \alpha = 0 \\ 0 + \beta = \beta \end{cases}$$

all'espansione di Shannon (sostanzialmente rimuoviamo tutti i termini a cui corrispondono uscite negate). Della forma canonica SP possiamo dire che è:

- **SP:** è fatta da somme e prodotti;
- **Canonica:** ogni prodotto ha come fattori tutti gli ingressi, diretti o negati;
- Ciascuno dei termini della somma si chiama **mintermine**;
- Ogni mintermine corrisponde ad uno stato riconosciuto dalla rete.

L'insieme dei termini (mintermini) sommati fra di loro che otteniamo dall'espansione di Shannon prende il nome di **lista di mintermini**.

10.2 Semplificazione della forma canonica SP

Definiamo quindi un metodo per la semplificazione della lista dei mintermini. Divideremo quest'operazione in due passaggi principali:

- **Identificazione degli implicanti principali:** si ricava una lista di termini ricavati da quelli di partenza, e di dimensioni più piccole, che rappresentano la stessa legge combinatoria;
- **Eliminazione delle ridondanze:** si rimuovono gli implicanti che non portano informazioni utili alla legge combinatoria.

10.2.1 Metodo di Quine-McCluskey

Si presenta il metodo di Quine-McCluskey per l'identificazione degli implicanti principali. Questo metodo prevede di:

- **Fondere i mintermini** applicando **esaustivamente** la regola:

$$\alpha x + \alpha \bar{x} = \alpha$$

che possiamo dimostrare come:

$$\alpha x + \alpha \bar{x} = \alpha(x + \bar{x}) = \alpha, \quad x + \bar{x} = 1$$

alla lista dei mintermini.

Ripetiamo questo passaggio $N - 1$ volte per la dimensione N dei termini, riducendo ogni volta la dimensione degli implicanti di 1. Si ricava una forma SP, detta **lista di implicanti**.

- **Rimuovere i duplicati** dalla lista dei duplicanti, applicando l'altra regola:

$$\alpha x + \alpha = \alpha$$

sugli implicanti che hanno elementi in comune.

Troviamo quindi quella che è detta **lista degli implicanti principali**. Questa lista contiene meno elementi della forma canonica SP, ma non è ancora di costo minimo: potrebbe contenere ridondanze, cioè implicanti non necessari alla corretta modellizzazione della legge combinatoria.

10.2.2 Liste di copertura non ridondanti

Una **lista di copertura** è una lista di implicanti, la cui somma è una forma SP per la funzione f . La **lista di copertura non ridondante** è la lista che smette di essere una lista di copertura appena si toglie un elemento.

Un punto importante è che la lista dei mintermini è una lista non ridondante, mentre la lista degli implicanti principali può esserlo. Si introduce quindi uno strumento per la visualizzazione degli implicanti e le loro ridondanze.

10.3 Mappe di Karnaugh

Per una rete a N ingressi la corrispondente **mappa di Karnaugh** è una matrice di 2^N celle, dove le coordinate rappresentano gli ingressi, e gli elementi della matrice le uscite. Sono diagrammi che tornano utili per rappresentare graficamente gli implicanti, ed eliminarne le ridondanze. Vediamo, ad esempio, mappe con $N = 2, 3$ e 4 :

		X_0	
		0	1
X_1	0	0	1
	1	1	0

		X_1X_0			
		00	01	11	10
X_2	0	0	0	1	-
	1	1	-	0	0

		X_1X_0			
		00	01	11	10
X_3X_2	00	0	0	0	0
	01	0	0	0	0
	11	0	0	0	0
	10	0	0	0	0

In una mappa di Karnaugh, celle **contigue** hanno coordinate **adiacenti**, e viceversa. Oltre le 4 coordinate, per le mappe non possiamo più rappresentare queste mappe senza la terza dimensione.

10.3.1 Ricerca dei sottocubi principali

Definiamo innanzitutto:

- **Sottocubo di ordine 1:** una casella che contiene un 1, corrispondente quindi ad uno stato di ingresso riconosciuto dalla rete, si indica come SO1;
- **Coordinate** di un SO1: stato di ingresso corrispondente al sottocubo;
- **Adiacenza** fra SO1: due SO1 sono adiacenti se differiscono fra loro di una sola coordinata.

Vediamo, ad esempio, una mappa di Karnaugh con $N = 2$, una serie di sottocubi di ordine 1 con la tabella associata:

		X_0	
		0	1
X_1	0	0	1
	1	1	0

	X_1	X_0
A	0	1
B	1	0

Notiamo come A corrisponde all'implicante $\overline{X_1}X_0$, e B all'implicante $X_1\overline{X_0}$. Possiamo continuare:

- **Sottocubo di ordine 2:** costituito da SO1 adiacenti, e si dice che **copre** i SO1 che lo formano. Si indica come SO2;
- **Sottocubo di ordine 4:** costituito da SO2 adiacenti, e si dice che **copre** i SO2 che lo formano. Si indica come SO4;

- **Sottocubo di ordine 8:** costituito da SO4 adiacenti, e si dice che **copre** i SO4 che lo formano. Si indica come SO8;

Vediamo un'ultimo esempio, con $N = 4$:

		$X_1 X_0$			
		00	01	11	10
$X_3 X_2$	00	1	1	0	1
	01	0	0	1	1
	11	0	0	1	1
	10	1	0	0	1

	X_3	X_2	X_1	X_0
A	0	0	0	-
B	-	1	1	-
C	-	-	1	0
D	-	0	-	0

Notiamo dall'esempio che le mappe di Karnaugh rispettano quello che potremmo chiamare *effetto pacman*: lo stesso implicante può esistere su lati opposti della mappa. Il bisogno di rappresentare le adiacenze dà origine a questa particolarità, come determina l'ordine particolare delle attivazioni degli ingressi. Inoltre, notiamo come i trattini nelle tabelle delle coordinate denotano che la variabile non influenza l'implicante, cioè rappresentano, in inglese, un *don't care*.

Si dice che un sottocubo è **principale** quando non esiste nessun sottocubo più grande che lo copre completamente. Si ha quindi che sottocubi e implicanti sono correlati: un sottocubo principale di ordine p rappresenta un implicante principale di $N - \log_2(p)$ variabili.

Si presenta quindi l'algoritmo per la ricerca dei sottocubi principali:

Algoritmo 3 per la ricerca dei sottocubi principali

Input: una mappa

Output: i sottocubi principali della mappa

ciclo:

Considera tutti i sottocubi di ordine p non interamente contenuti in sottocubi di ordine più grande, e segnali tutti: questi sono sicuramente principali

if l'insieme trovato finora basta a coprire tutta la mappa **then**

 L'algoritmo è terminato

else

 Poni $p \leftarrow \frac{p}{2}$ e vai a ciclo

end if

10.3.2 Ricerca delle liste di copertura non ridondanti

Una **lista di copertura** è l'insieme (qualunque) di sottocubi che coprono tutti gli SO1 della mappa. La lista dei sottocubi principali è una lista di copertura. Una **lista di copertura non ridondante** è una lista di copertura che smette di essere tale quando si toglie un sottocubo.

Come avevamo visto algebricamente, la lista degli SO1 (che corrisponderebbe ai mintermini) non è ridondante, ma la lista dei sottocubi principali (che corrisponderebbe agli implicanti) può esserlo.

Possiamo classificare i sottocubi principali come segue:

- Alcuni sottocubi sono gli unici a coprire un dato sottocubo di ordine 1. In questo caso, si chiamano sottocubi **essenziali**, e costituiscono il **cuore** (*core*) della mappa.
- Alcuni insiemi di sottocubi possono essere disposti, per cui rimuovere uno a caso fra i sottocubi compresi non risulta in variazioni della copertura. Questi si dicono **semplicemente eliminabili**.
- I sottocubi interamente contenuti all'interno di sottocubi essenziali sono sempre ridondanti, e si dicono **assolutamente eliminabili**.

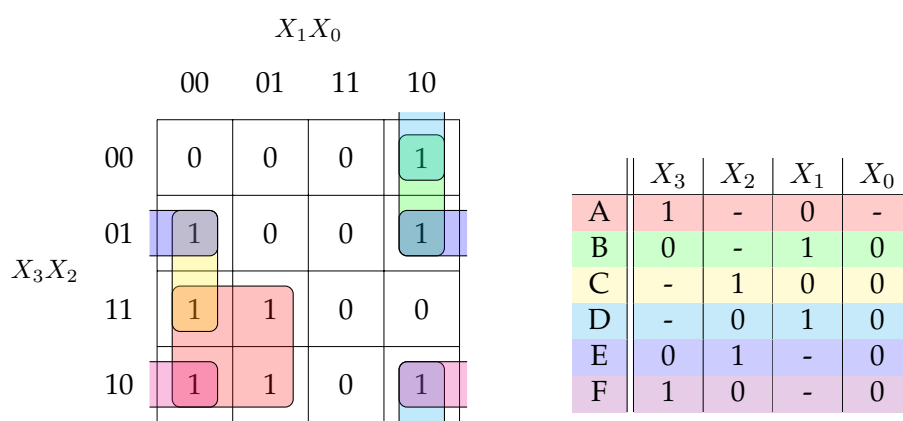
Rimuovendo i sottocubi assolutamente eliminabili, e mantenendo solo un sottoinsieme dei sottocubi semplicemente eliminabili, possiamo generare una qualsiasi lista non ridondante a partire dalla lista di copertura data. Vogliamo però selezionare la lista non ridondante che dà costo minimo.

10.3.3 Ricerca delle liste di copertura di costo minimo

Per trovare una **lista di copertura di costo minimo**, applichiamo un determinato criterio quando eliminiamo i sottocubi semplicemente eliminabili. In generale avremo che, per qualsiasi sottocubo semplicemente eliminabile, potremo considerarlo come:

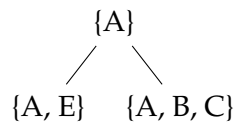
- **Essenziale**, in questo caso resta nella lista di copertura, e qualche altro sottocubo diventa assolutamente eliminabile;
- **Assolutamente eliminabile**, in questo caso si toglie dalla lista di copertura, e qualche altro sottocubo diventa essenziale.

Il criterio adottato è quello di conservare il minor numero di sottocubi possibile. Prendiamo in esempio la mappa:

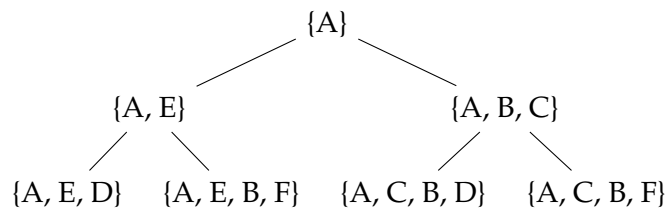


Si ha che il sottocubo A è essenziale: altrimenti non potremmo mai coprire 1101 e 1001. Tutti gli altri cubi sono semplicemente eliminabili. Partiamo quindi dalla configurazione {A}, e decidiamo quali elementi includere successivamente. La prima zona che

osserviamo è quella di E: i sottocubi semplicemente eliminabili sono $\{A, B, C, E\}$. Eliminando C e B, resta E, e viceversa: chiaramente è meglio lasciare solo E. Possiamo rendere questo graficamente come:



La prossima zona di interesse è rappresentata da B, D, E e F. Si può continuare con la struttura ad albero:



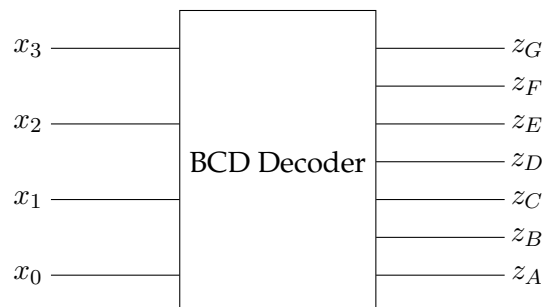
Scegliamo quindi $\{A, E, D\}$.

11 Lezione del 11-10-24

11.1 Sintesi di leggi non completamente specificate

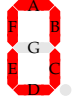
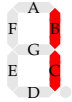

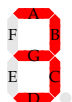
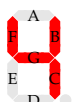
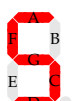
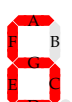



Applichiamo quanto abbiamo detto sulla sintesi di reti in forma SP a costo minimo, nel caso particolare in cui la legge non è completamente specificata (*don't care*).

Prendiamo in esempio un decodificatore BCD a 7 segmenti, simile a quello che si potrebbe trovare ad accendere le tracce di un display a cristalli liquidi.



Questo componente ha 4 variabili di ingresso, interpretate come una cifra in base 2 j , e 7 uscite, che specificano quali tracce accendere per visualizzare la cifra ottenuta in base 10. Si ha che con 4 variabili di ingresso si indirizzano 16 possibili configurazioni dei segmenti, quando ne abbiamo bisogno solo 10 (una per ogni cifra decimale). Le configurazioni di ingresso scartate si dicono quindi non specificate.

La tabella di verità della rete sarà quindi:

j	x_3	x_2	x_1	x_0	z_G	z_F	z_E	z_D	z_C	z_B	z_A	Display
0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	
1	0	0	0	1	0	0	0	0	1	1	0	
2	0	0	1	0	1	0	1	1	0	1	1	
3	0	0	1	1	1	0	0	1	1	1	1	
4	0	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	
5	0	1	0	1	1	1	0	1	1	0	1	
6	0	1	1	0	1	1	1	1	1	0	1	
7	0	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	
8	1	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	
9	1	0	0	1	1	1	0	1	1	1	1	
10	1	0	1	0	—	—	—	—	—	—	—	
11	1	0	1	1	—	—	—	—	—	—	—	
12	1	1	0	0	—	—	—	—	—	—	—	
13	1	1	0	1	—	—	—	—	—	—	—	
14	1	1	1	0	—	—	—	—	—	—	—	
15	1	1	1	1	—	—	—	—	—	—	—	

Visto che vogliamo sintetizzare reti su uscite singole, prendiamo la tabella di verità della rete sull'uscita z_E (le altre uscite richiederanno procedimenti simili):

j	x_3	x_2	x_1	x_0	z_E
0	0	0	0	0	1
1	0	0	0	1	0
2	0	0	1	0	1
3	0	0	1	1	0
4	0	1	0	0	0
5	0	1	0	1	0
6	0	1	1	0	1
7	0	1	1	1	0
8	1	0	0	0	1
9	1	0	0	1	0
10	1	0	1	0	—
11	1	0	1	1	—
12	1	1	0	0	—
13	1	1	0	1	—
14	1	1	1	0	—
15	1	1	1	1	—

Disegniamo quindi la mappa di Karnaugh. Quando si disegnano mappe di Karnaugh con elementi indeterminati, questi si interpretano diversamente a seconda che si stiano cercando i sottocubi principali, o che si stiano classificando:

- **Ricerca dei sottocubi principali:** si prendono come 1. Questo ci permette di prendere i sottocubi più grandi possibili nella ricerca dei primali (è irrilevante se si vanno a impostare uscite non specificate a 1).

Si trova quindi:

		$X_1 X_0$								
		00	01	11	10					
$X_3 X_2$	00	1	0	0	1	A	x_3	x_2	x_1	x_0
	01	0	0	0	1		1	-	1	-
	11	-	-	-	-		-	-	1	0
	10	1	0	-	-		1	1	-	-
							-	0	-	0
						E	1	-	-	0

- **Classificazione dei sottocubi principali:** si prendono come 0. Così si evita di conservare implicanti che siano rilevanti su uscite non specificate (sarebbe inutile).

Si ha quindi che i sottocubi A e C prendono solo SO1 indeterminati, ergo si scartano. Restano B e D essenziali, ed E a questo punto eliminabile, in quanto è già compreso in questi.

La sintesi completa della rete è allora:

$$z_E = x_1 \overline{x_0} + \overline{x_2} x_0$$

11.2 Sintesi in forma PS

Abbiamo usato finora la forma SP (somma di prodotti). Esiste la duale, ovvero la forma PS (prodotto di somme). Per trovare questa forma, esiste un metodo parallelo a quello studiato per la SP, dove si parte dal considerare i maxtermini invece che dei mintermini, cioè scegliendo sottocubi negli elementi che valgono 0 della mappa di Karnaugh.

Non considereremo questo metodo, ma un'alternativa più veloce:

Algoritmo 4 per la sintesi in forma PS

Input: una legge combinatoria F

Output: la sintesi in forma PS di F

Si ricava \overline{F} complementando F

Si realizza una sintesi SP della legge \overline{F}

Si ottiene una sintesi di F aggiungendo un invertitore in uscita alla rete SP che sintetizza \overline{F}

Si applicano i teoremi di de Morgan, da destra verso sinistra

Algebricamente, l'ultimo passaggio significa scrivere \overline{F} in forma SP:

$$\overline{z} = P_1 + \dots + P_k$$

dove P_i sono prodotti di variabili di ingresso, e applicare de Morgan come:

$$z = \overline{\overline{z}} = \overline{P_1 + \dots + P_k} = \overline{P_1} \cdot \dots \cdot \overline{P_k}$$

A questo punto si applica di nuovo de Morgan, come:

$$\overline{P_i} = \overline{\prod x_j} = \sum \overline{x_j}$$

11.2.1 Dualità fra forme SP e PS

Con il procedimento presentato abbiamo che se \overline{F} è in forma canonica SP, allora F è in forma canonica PS. Se la sintesi SP di \overline{F} costa C , allora la sintesi PS di F costa C . Quindi se la sintesi SP di \overline{F} è a costo minimo fra tutte le possibili sintesi SP, lo è anche la sintesi PS di F fra tutte le possibili sintesi PS. Se fosse il contrario, applicando de Morgan più volte avrei sintesi di costo sempre minore, violando la dualità.

A questo punto sappiamo effettuare la sintesi a costo minimo in forma SP di una qualsiasi legge F , e ponendo di sintetizzare prima \overline{F} in forma SP, sappiamo anche trovare la sintesi a costo minimo in forma PS della stessa legge. Non possiamo determinare con sicurezza quale fra queste due sintesi ha costo minimo in generale, quindi bisogna controllare per forza la tabella della verità.

Troviamo ad esempio la sintesi in forma PS del BCD a 7 segmenti visto prima. Si ha che la negazione di F , su z_E , è:

j	x_3	x_2	x_1	x_0	z_E	$\overline{z_E}$
0	0	0	0	0	1	0
1	0	0	0	1	0	1
2	0	0	1	0	1	0
3	0	0	1	1	0	1
4	0	1	0	0	0	1
5	0	1	0	1	0	1
6	0	1	1	0	1	0
7	0	1	1	1	0	1
8	1	0	0	0	1	0
9	1	0	0	1	0	1
10	1	0	1	0	—	—
11	1	0	1	1	—	—
12	1	1	0	0	—	—
13	1	1	0	1	—	—
14	1	1	1	0	—	—
15	1	1	1	1	—	—

Ricaviamo quindi la mappa di Karnaugh:

		$X_1 X_0$			
		00	01	11	10
$X_3 X_2$	00	0	1	1	0
	01	1	1	1	0
	11	-	-	-	-
	10	0	1	-	-

	x_3	x_2	x_1	x_0
A	-	-	-	1
B	1	1	-	-
C	1	-	1	-
D	-	1	0	-

Si ha che B e C sono inutili, in quanto comprendono solo indeterminati. Restano allora A e D, entrambi essenziali, ergo la sintesi SP di \overline{F} è:

$$\overline{F} = \overline{z_E} = x_0 + x_2 \overline{x_1}$$

che neghiamo per ottenere nuovamente F :

$$F = z_E = \overline{x_0 + x_2 \overline{x_1}}$$

A questo punto si può applicare de Morgan, prima sulla somma e poi sul prodotto a destra, per ottenere:

$$= \overline{x_0} \cdot \overline{x_2 \overline{x_1}} = \overline{x_0} \cdot (\overline{x_2} + x_1)$$

Cioè è la sintesi di z_E in forma PS, che notiamo essere meno costosa della sintesi in forma SP, di due porte logiche in meno.

12 Lezione del 15-10-24

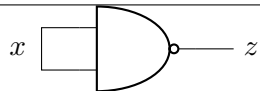
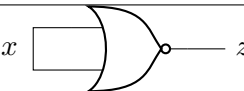
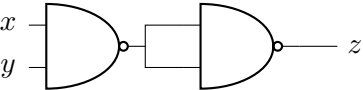
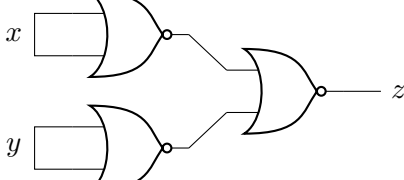
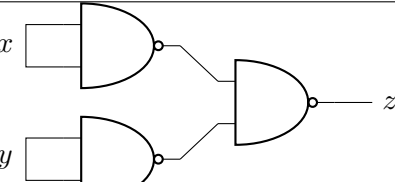
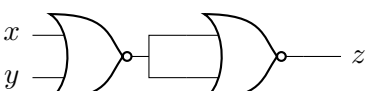
12.1 Porte logiche universali

Si dice che NAND e NOR sono **porte logiche universali**. Si possono realizzare AND, OR e NOT usando solo porte NAND o solo porte NOR.

Algebricamente, questo significa fare:

Porta	Realizzazione NAND	Realizzazione NOR
NOT	$x = x \cdot x \Rightarrow \bar{x} = \overline{x \cdot x}$	$x = x + x \Rightarrow \bar{x} = \overline{x + x}$
AND	$x \cdot y = \overline{(\overline{x \cdot y})}$	$x \cdot y = \overline{\bar{x} + \bar{y}}$ (de Morgan)
OR	$x + y = \overline{\bar{x} \cdot \bar{y}}$ (de Morgan)	$x + y = \overline{(\overline{x + y})}$

cioè collegare porte logiche fisiche nelle seguenti configurazioni:

Porta	Realizzazione NAND	Realizzazione NOR
NOT		
AND		
OR		

Potremmo sembrare che, se si poteva realizzare qualsiasi rete combinatoria con AND, OR e NOT su 2 livelli di logica, usando solo NAND o NOR dovremmo accontentarci di 4 livelli di logica (AND e OR richiedono di per sé una rete a 2 livelli di logica).

In verità, le porte NAND e NOR permettono di creare circuiti logici con gli stessi livelli di logica delle porte AND, OR e NOT.

12.1.1 Sintesi a porte NAND

Vediamo quindi il seguente algoritmo per la sintesi di un circuito con sole porte NAND:

Algoritmo 5 sintesi a porte NAND

Input: un circuito in forma SP

Output: una sintesi a porte NAND

Si sostituisce la porta OR con il suo equivalente a NAND

Si sostituisce ciascun AND con il suo equivalente a NAND

Si eliminano le coppie di NOT interne a cascata

Ignoriamo i NOT sull'ingresso, in quanto abbiamo visto sono effettivamente gratuiti. Abbiamo quindi che, rimuovendo le coppie NOT interni (creati da coppie di NAND con gli stessi input) ritorniamo in una forma a 2 livelli di logica.

Dal punto di vista algebrico si ha:

$$z = P_1 + P_2 + \dots + P_k = \overline{\overline{P_1 + P_2 + \dots + P_k}} = \overline{\overline{P_1} \cdot \overline{P_2} \cdot \dots \cdot \overline{P_k}}$$

dove il complemento superiore è l'ultima porta NAND (quella che sostituisce l'OR), e i singoli P_i complementati sono singole porte NAND (P_i è un prodotto, quindi $\overline{P_i}$ è una porta NAND).

12.1.2 Sintesi a porte NOR

Vediamo poi l'algoritmo per la sintesi di un circuito con sole porte NOR:

Algoritmo 6 sintesi a porte NOR

Input: un circuito in forma PS

Output: una sintesi a porte NOR

Si sostituisce la porta AND con il suo equivalente a NOR

Si sostituisce ciascun OR con il suo equivalente a NOR

Si eliminano le coppie di NOT interne a cascata

Anche qui ignoriamo i NOT sull'ingresso, per gli stessi motivi di prima, e rimuovendo le coppie NOT interni (creati da coppie di NAND con gli stessi input) ritorniamo nuovamente in una forma a 2 livelli di logica.

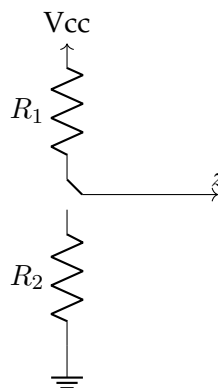
Dal punto di vista algebrico si ha:

$$z = S_1 \cdot S_2 \cdot \dots \cdot S_k = \overline{\overline{S_1 \cdot S_2 \cdot \dots \cdot S_k}} = \overline{\overline{S_1} + \overline{S_2} + \dots + \overline{S_k}}$$

dove il complemento superiore è l'ultima porta NOR (quella che sostituisce l'AND), e i singoli S_i complementati sono singole porte NOR (S_i è una somma, quindi $\overline{S_i}$ è una porta NOR).

12.2 Porte tri-state

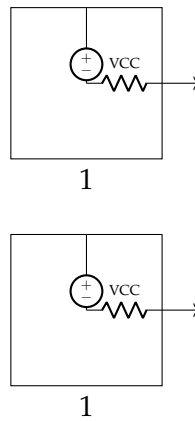
Fa comodo poter connettere insieme le uscite delle reti usando bus condivisi, cioè linee di ingresso-uscita. Abbiamo che l'uscita di una rete, dal punto di vista di una rete, corrisponde a un interruttore fra il Vcc (1 logico) o la massa (0 logico), cioè:



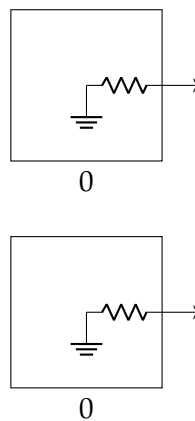
dove R_1 e R_0 sono incognite.

Quando vado a collegare più uscite sulla stessa linea possono crearsi più situazioni:

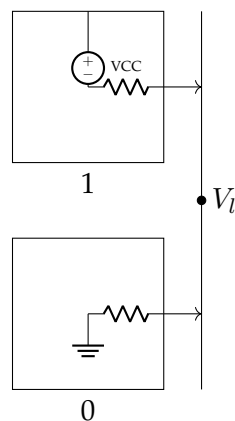
- **1 logici:** se ho due 1 logici, cioè due generatori di potenziale a V_{cc} , connessi sulla stessa linea, ho che la tensione sulla linea è sempre V_{cc} , quindi tutto ok:



- **0 logici:** allo stesso tempo, se ho due 0 logici, quindi due collegamenti a massa, sulla linea si avrà tensione nulla:



- **0 e 1 logici:** se collego un 1 logico e uno 0 logico alla stessa linea, ottengo effettivamente un partitore di tensione:

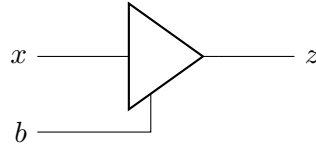


da cui ricavo:

$$V_l = \frac{R_0}{R_1 + R_0}$$

Notiamo soprattutto che se R_0 e R_1 sono molto piccoli, otteniamo correnti I molto grandi, che significa componenti bruciati.

Per risolvere il problema dato da 0 e 1 logici connessi sulla stessa linea, usiamo specifici apparecchi detti **porte tri-state**, che sono capaci di disconnettere fisicamente un'uscita da una linea condivisa. Si rappresentano come:



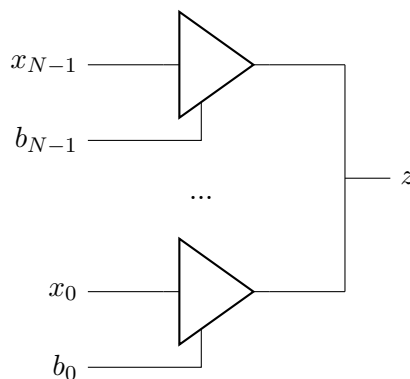
dove x è l'ingresso, z l'uscita, e b l'enabler. A $b = 1$ la porta si comporta come un'elemento neutro, mentre a $b = 0$ offre un'alta impedenza, effettivamente scollegando l'uscita. La tabella di verità corrispondente sarà:

b	x	z
1	0	0
1	1	1
0	-	Hi-Z

Notiamo che il valore Hi-Z (alta impedenza) non è un valore logico: ciò che esce da una porta in stato Hi-Z viene interpretato come un filo staccato dal resto della rete. Ogni porta logica gestisce poi questa situazione secondo le sue specifiche di realizzazione, restando comunque attaccata sia a V_{cc} che a massa, e quindi non in uno stato HiZ.

12.2.1 Multiplexer decodificati

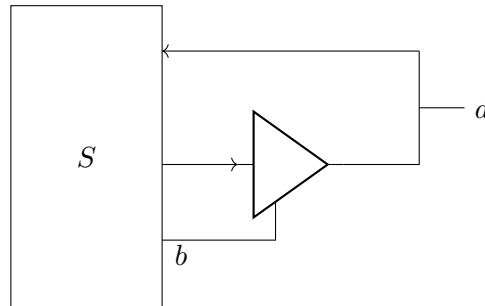
Un componente realizzato attraverso le porte tri-state è il multiplexer decodificato:



Questo componente offre alta indipendenza a tutte le variabili x_i in ingresso tranne una, quella all'indice j , selezionata attraverso una variabile di comando b_j .

12.2.2 Linea di ingresso/uscita

Si usano le porte tri-state per permettere a componenti di comunicare su linee di ingresso/uscita, ad esempio con la memoria. In questo caso, si biforca la linea, ammettendo la linea in entrata così com'è, e mettendo una porta tri-state nella linea in uscita.



Così, quando il componente S vuole comunicare con l'esterno, imposta l'enabler b a 1 e mette sulla linea d ciò che vuole comunicare. Altrimenti tiene b a 0 e ascolta ciò che arriva su d .

Se il componente S comunica con un altro componente T , questi dovranno impostare alternativamente i loro enabler b_S e b_T a 1 e 0, scambiandosi messaggi sulla linea d .

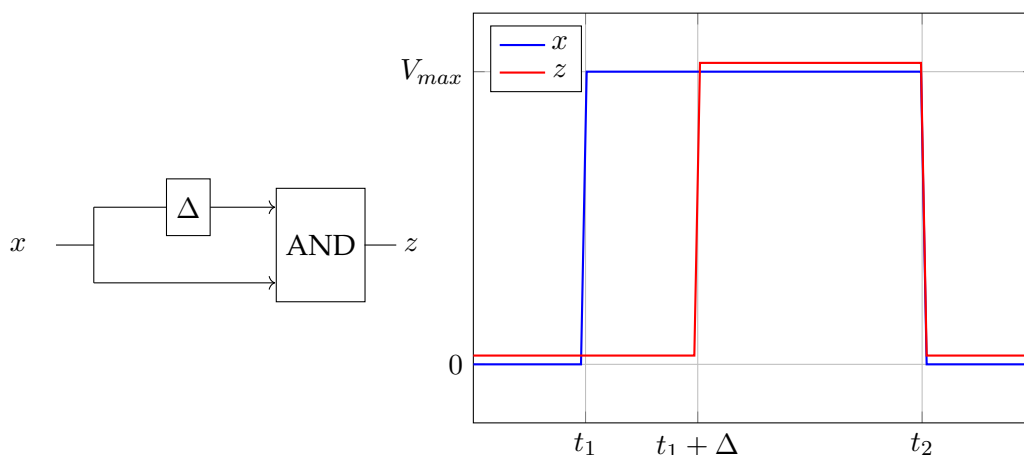
12.3 Circuiti di ritardo e formatori di impulso

A volte bisogna trattare di **segnali**. In questo caso si usano gli elementi neutri Δ (realizzati spesso con numeri pari di invertitori), che sappiamo porre un **ritardo simmetrico** agli ingressi, dove simmetrico significa identico sulle transizioni $0 \rightarrow 1$ e $1 \rightarrow 0$.

Potrebbe essere utile avere circuiti con ritardi **asimmetrici**, cioè variabili sulle transizioni $0 \rightarrow 1$ e $1 \rightarrow 0$. Indichiamo questi componenti come Δ^+ .

12.3.1 Circuito di ritardo sul fronte di discesa

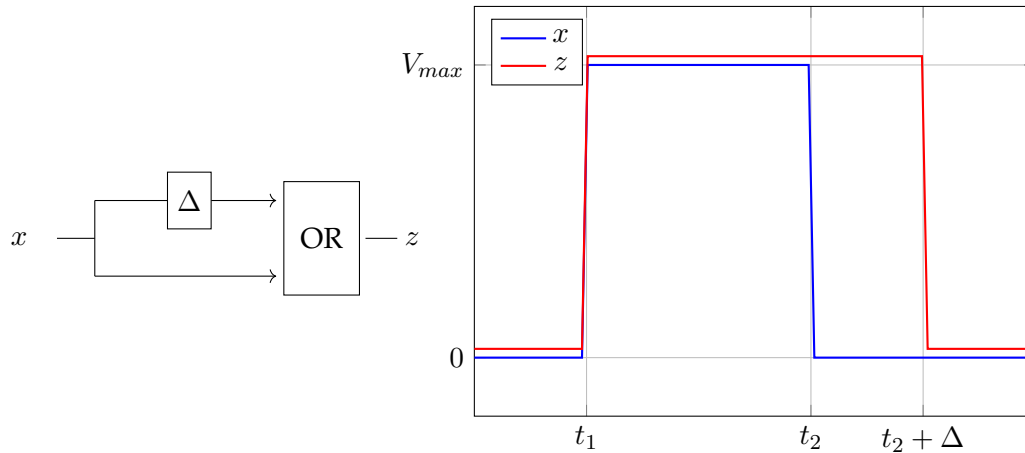
Collegando un neutro Δ assieme al segnale stesso ad una porta AND, si ottiene un'andamento del tipo:



Nello specifico, transizionando da $1 \rightarrow 0$, si ha che il primo ingresso che va a 0 porta a 0 l'uscita. C'è un ritardo piccolo da parte della porta AND. Quando invece si transiziona da $0 \rightarrow 1$, si ha che il secondo ingresso che va a 1 (quello che passa da Δ) porta a 1 l'uscita. C'è un ritardo grande da parte del Δ e della porta AND.

12.3.2 Circuito di ritardo sul fronte di salita

Allo stesso modo, collegando un neutro Δ assieme al segnale stesso ad una porta OR, si ottiene un'andamento del tipo:

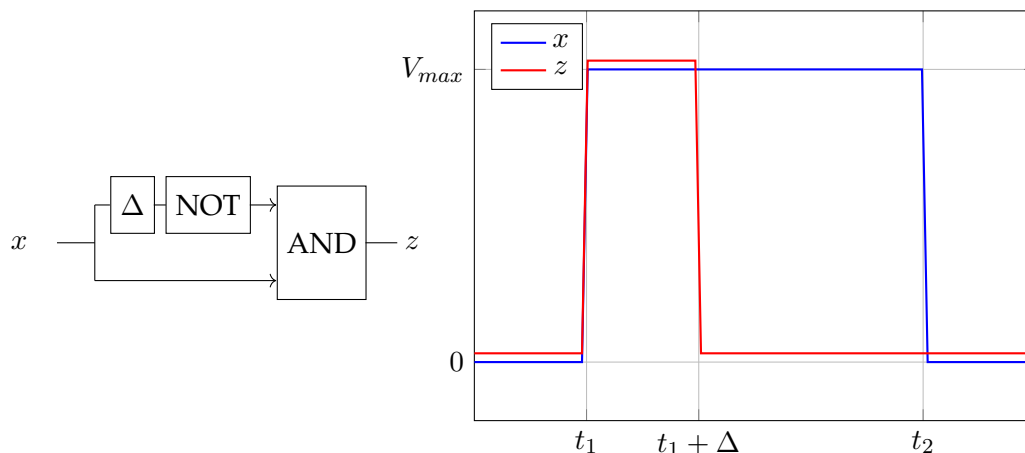


Nello specifico, transizionando da $0 \rightarrow 1$, si ha che il primo ingresso che va a 1 porta a 1 l'uscita. C'è un ritardo piccolo da parte della porta OR. Quando invece si transiziona da $1 \rightarrow 0$, si ha che il secondo ingresso che va a 0 (quello che passa da Δ) porta a 0 l'uscita. C'è un ritardo grande da parte del Δ e della porta OR.

12.3.3 Formatore di impulso sul fronte di salita

I formatori di impulso sono reti combinatorie che generano in uscita un **impulso** di durata nota. Si indicano con P^+ .

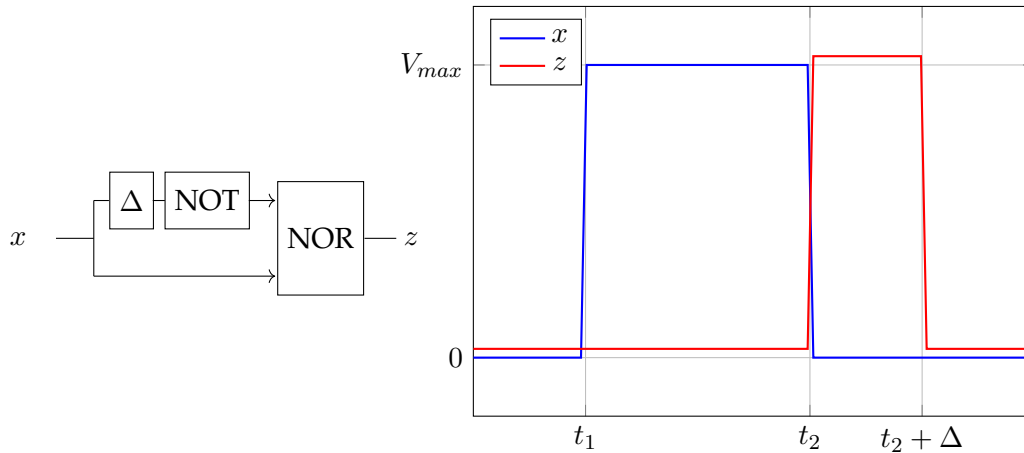
Si crea un formatore di impulso sul fronte di salita collegando la negazione di un Δ e il segnale stesso ad una porta AND, cioè:



Nello specifico, transizionando da $0 \rightarrow 1$, si ha che il segnale va a 1, attivando la AND (l'ingresso dalla NOT era già attivo). Dopo il ritardo Δ , NOT torna a 0, e quindi l'uscita della AND va a 0. Si ha quindi un'impulso di durata del ritardo Δ . Transizionando da $1 \rightarrow 0$, invece, si ha che il segnale "ancora" istantaneamente l'uscita della AND a zero, ergo non si hanno altri artefatti.

12.3.4 Formatore di impulso sul fronte di discesa

Si crea un formatore di impulso sul fronte di discesa collegando la negazione di un Δ e il segnale stesso ad una porta NOR, cioè:



Nello specifico, transizionando da $0 \rightarrow 1$, si ha che il segnale va a 1, ergo la NOR resta a 0 (l'ingresso dalla NOT era già attivo, e due ingressi attivi sono sempre 0 della NOR). Dopo il ritardo Δ , l'uscita della NOT torna a 0, così che quando si stacca il segnale, per una durata Δ entrambe le linee in entrata alla NOR vanno a 0, e quindi questa va a 1. Dopo il ritardo Δ , NOT torna a 0, e quindi l'uscita della AND va a 0. Si ha quindi, ancora una volta, un'impulso di durata del ritardo Δ .

13 Lezione del 17-10-24

13.1 Rappresentazione dei numeri naturali

Noi rappresentiamo i numeri naturali attraverso una notazione posizionale, ovvero come:

- Un numero $\beta \geq 2$, detto **base di rappresentazione**. Nel caso del sistema decimale, $\beta = 10$.
- Un'insieme di β simboli, detti **cifre**, a ciascuno dei quali è associato un numero naturale $\in [0, \beta - 1]$.
- Una **legge di rappresentazione** che fa corrispondere ad ogni sequenza di cifre un numero naturale.

13.1.1 Notazione posizionale

Dato un numero $A \in \mathbb{N}$, lo posso rappresentare in base β attraverso una sequenza di cifre:

$$A \equiv (a_{n-1}a_{n-2}\dots a_1a_0)_\beta, \quad 0 \leq a_i \leq \beta - 1, \quad 0 \leq i \leq n - 1$$

dove la legge di rappresentazione è:

$$A = \sum_{i=0}^{n-1} a_i \cdot \beta^i$$

Nella rappresentazione di un numero naturale, una cifra contribuisce a determinare il numero in modo differente a seconda della propria posizione nella sequenza.

Normalmente usiamo il sistema decimale, con $\beta = 10$. Nell'informatica, ci interessiamo al sistema binario, con $\beta = 2$.

13.2 Teorema della divisione con resto

Vediamo come trovare la rappresentazione di un naturale A in una base β , noto che questo è sempre possibile:

Teorema 13.1: della divisione con resto

Dato $x \in \mathbb{N}, \beta \in \mathbb{N}, \beta > 0$, esiste ed è unica la coppia di numeri q, r :

- $q \in \mathbb{N}$;
- $r \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq r < \beta$;

tale che $x = q \cdot \beta + r$.

questo vale anche per gli interi $\in \mathbb{Z}$, scambiando i simboli \mathbb{N} con \mathbb{Z} .

Dimostrazione

Pensiamo di dividere \mathbb{Z} in intervalli:

$$[n \cdot \beta, (n+1) \cdot \beta[, \quad n \in \mathbb{Z}$$

Si avrà che

$$\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} [n \cdot \beta, (n+1) \cdot \beta[\equiv \mathbb{Z}$$

ergo x farà parte del q -esimo intervallo di questa lista. Possiamo definire allora $r = x - q \cdot \beta$, e da come abbiamo preso gli intervalli, $0 \leq r < \beta$.

Resta da dimostrare l'unicità dei q, r trovati. Possiamo sostenere per assurdo che esistano due coppie (q_1, r_1) e (q_2, r_2) diverse tali che $x = q_1 \cdot \beta + r_1 = q_2 \cdot \beta + r_2$, con le ipotesi $q_i \in \mathbb{Z}$ e $0 \leq r_i < \beta$.

Varrà allora:

$$(q_1 - q_2) \cdot \beta = r_2 - r_1$$

e dall'ipotesi:

$$-\beta < (r_2 - r_1) < \beta \rightarrow -\beta < (q_1 - q_2) \cdot \beta < \beta$$

Cioè:

$$-1 < (q_1 - q_2) < 1$$

che in \mathbb{Z} significa $q_1 - q_2 = 0$, che è contro l'ipotesi.

L'unicità del risultato è garantita da $0 \leq r \leq \beta - 1$.

13.2.1 Divisioni

Si ha che una divisione restituisce quoziente e resto:

$$q = \left\lfloor \frac{x}{\beta} \right\rfloor, \quad r = |x|_{\beta}, \quad x = q \cdot \beta + r = \left\lfloor \frac{x}{\beta} \right\rfloor \cdot \beta + |x|_{\beta}$$

Se la divisione è tra naturali, anche q è naturale, cioè $x \in \mathbb{N} \Rightarrow q \in \mathbb{N}$.

13.2.2 Proprietà dell'operatore modulo

Abbiamo usato l'operatore modulo ($|x|_\beta$). Vediamone alcune proprietà, dato $\alpha \in \mathbb{N}^+$:

$$1. |x + k \cdot \alpha|_\alpha = |x|_\alpha, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Questo da:

$$x = \left\lfloor \frac{x}{\alpha} \right\rfloor \cdot \alpha + |x|_\alpha, \quad x + k \cdot \alpha = \left(\left\lfloor \frac{x}{\alpha} \right\rfloor + k \right) \cdot \alpha + |x|_\alpha$$

chiamiamo $x' = x + k \cdot \alpha$:

$$x' = \left\lfloor \frac{x'}{\alpha} \right\rfloor \cdot \alpha + |x'|_\alpha = \left\lfloor \frac{x}{\alpha} + k \right\rfloor \cdot \alpha + |x'|_\alpha = \left(\left\lfloor \frac{x}{\alpha} \right\rfloor + k \right) \cdot \alpha + |x'|_\alpha$$

Dove il passaggio $\left\lfloor \frac{x}{\alpha} + k \right\rfloor = \left\lfloor \frac{x}{\alpha} \right\rfloor + k$ è concesso da $k \in \mathbb{Z}$. Notiamo che le ultime due espressioni ricavate si equivalgono, ergo dev'essere vero che $|x'|_\alpha = |x|_\alpha$, da cui la tesi.

$$2. |x + y|_\alpha = ||x|_\alpha + |y|_\alpha|_\alpha$$

Questo da:

$$|x + y|_\alpha = \left| \left\lfloor \frac{x}{\alpha} \right\rfloor \cdot \alpha + |x|_\alpha + \left\lfloor \frac{y}{\alpha} \right\rfloor \cdot \alpha + |y|_\alpha \right|_\alpha = \left| \left(\left\lfloor \frac{x}{\alpha} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{y}{\alpha} \right\rfloor \right) \cdot \alpha + |x|_\alpha + |y|_\alpha \right|_\alpha$$

e l'applicazione della proprietà (1), da cui la tesi.

$$3. |x \cdot y|_\alpha = ||x|_\alpha \cdot |y|_\alpha|_\alpha$$

Questo da:

$$\begin{aligned} |x \cdot y|_\alpha &= \left| \left(\left\lfloor \frac{x}{\alpha} \right\rfloor \cdot \alpha + |x|_\alpha \right) \left(\left\lfloor \frac{y}{\alpha} \right\rfloor \cdot \alpha + |y|_\alpha \right) \right|_\alpha \\ &= \left| \left\lfloor \frac{x}{\alpha} \right\rfloor \left\lfloor \frac{y}{\alpha} \right\rfloor \alpha^2 + \left(\left\lfloor \frac{x}{\alpha} \right\rfloor |y|_\alpha + \left\lfloor \frac{y}{\alpha} \right\rfloor |x|_\alpha \right) \alpha + |x|_\alpha \cdot |y|_\alpha \right|_\alpha \end{aligned}$$

Chiamiamo allora:

$$\left\lfloor \frac{x}{\alpha} \right\rfloor \left\lfloor \frac{y}{\alpha} \right\rfloor \alpha + \left(\left\lfloor \frac{x}{\alpha} \right\rfloor |y|_\alpha + \left\lfloor \frac{y}{\alpha} \right\rfloor |x|_\alpha \right) = k$$

da cui:

$$|x \cdot y|_\alpha = |k \cdot \alpha + |x|_\alpha \cdot |y|_\alpha|_\alpha$$

che ancora applicando la proprietà (1) dà la tesi.

13.2.3 Algoritmo delle divisioni successive

Possiamo usare il teorema della divisione con resto iterativamente per trovare la sequenza di cifre che rappresentano A in base β :

Algoritmo 7 delle divisioni successive

Input: un naturale A e una base β

Output: la rappresentazione di A in base β

$i \leftarrow 1$

while $q_i \neq 0$ **do**

$A = q_i \cdot \beta + \alpha_{i-1}$

$i \leftarrow i + 1$

end while

Dimostriamo la correttezza dell'algoritmo: si ha che eseguendo i passaggi ricaviamo una forma:

$$A = a_0 + \beta \cdot q_1 = a_0 + \beta \cdot (a_1 + \beta(a_2 + \beta \cdot (...)))$$

e quindi:

$$A = \sum_{i=0}^{n-1} a_i \cdot \beta^i$$

che è per definizione la rappresentazione di A in base β . Inoltre, il teorema della divisione con resto garantisce che la n -upla di cifre trovata è **unica**.

13.2.4 Rappresentazione su un numero finito di cifre

Con n cifre in base β , sappiamo che potremo formulare β^n sequenze differenti quindi rappresentare al massimo il numero $\beta^n - 1$, cioè quello dove tutte le cifre hanno valore massimo, $\beta - 1$.

Ciò si dimostra da:

$$A = \sum_{i=0}^{n-1} (\beta - 1) \cdot \beta^i = \sum_{i=0}^{n-1} \beta^{i+1} - \sum_{i=0}^{n-1} \beta^i = \sum_{i=1}^n \beta^i - \sum_{i=0}^{n-1} \beta^i = \beta^n - 1$$

Il numero di cifre necessario per rappresentare A è il numero minimo n per cui $\beta^n - 1 \geq A$, ergo:

$$n = \log_{\beta}(\beta^n) \geq \log_{\beta}(A + 1) \rightarrow n = \lceil \log_{\beta}(A + 1) \rceil$$

13.3 Reti combinatorie per i numeri naturali

Vogliamo cosotruire reti logiche che elaborino numeri naturali rappresentati in una data base β , generalmente $\beta = 2$. Si useranno **reti combinatorie**, dove lo *stato di uscita* è il **risultato** e lo *stato di ingresso* sono gli **operandi**.

Per ogni operazione aritmetica di base daremo una descrizione **indipendente dalla base**, usando le proprietà della notazione posizionale per scomporre l'operazione in blocchi elementari. In seguito, dettaglieremo le reti logiche che implementano questi blocchi elementari in base 2, attraverso le porte logiche già studiate.

Notiamo che spesso ci concentreremo più sulle **cifre** che sulle codifiche, indipendentemente dalla base.

13.3.1 Complemento

Dato $A = (a_{n-1}a_{n-2}...a_1a_0)_{\beta}$, in base β su n cifre, $0 \leq A \leq \beta^n$, definisco complemento di a in base β il numero:

$$\overline{A} = \beta^n - 1 - A$$

Si ha che il complemento di un numero a n cifre sta su n cifre, e che:

$$\overline{A} = \beta^n - 1 - A = \sum_{i=0}^{n-1} (\beta - 1)\beta^i - \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i \beta^i = \sum_{i=0}^{n-1} (\beta - 1 - \alpha_i)\beta^i$$

$\beta - 1 - \alpha_i$ è una cifra in base β in quanto compresa fra 0 e $\beta - 1$. Quindi, $\overline{A} = (\overline{a_{n-1}a_{n-2}...\overline{a_1a_0}})_{\beta}$.

Questo significa che basta saper fare il complemento di una singola cifra per fare il complemento di un numero. In base 2, questo significa usare una porta not. In altre basi

diventà più complicato, ad esempio in base 10 con codifica BCD avrò un circuito con 4 ingressi e 4 uscite, con tabella di verità:

x_3	x_2	x_1	x_0	z_3	z_2	z_1	z_0
0	0	0	0	1	0	0	1
0	0	0	1	1	0	0	0
0	0	1	0	0	1	1	1
0	0	1	1	0	1	1	0
0	1	0	0	0	1	0	1
0	1	0	1	0	1	0	0
0	1	1	0	0	0	1	1
0	1	1	1	0	0	1	0
1	0	0	0	0	0	0	1
1	0	0	1	0	0	0	0
1	0	1	0	—	—	—	—
1	0	1	1	—	—	—	—
1	1	0	0	—	—	—	—
1	1	0	1	—	—	—	—
1	1	1	0	—	—	—	—
1	1	1	1	—	—	—	—

che dopo una sintesi dà:

$$\begin{cases} z_3 = \overline{x_3 x_2 x_1} \\ z_2 = \overline{x_3 x_2} x_1 + x_2 \overline{x_1} \\ z_1 = x_1 \\ z_0 = \overline{x_0} \end{cases}$$

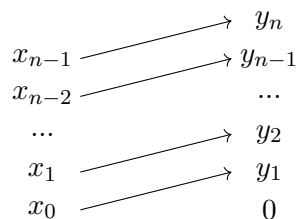
14 Lezione del 22-10-24

14.1 Operazioni a costo nullo

14.1.1 Moltiplicazioni e divisioni per potenze di base

Moltiplicare e dividere per potenze della base β significa semplicemente aggiungere o togliere zeri, ergo si tratta di operazioni a **costo nullo**. Se le operazioni sono a costo nullo, è molto probabile che le reti che le implementano sono **prive di logica**.

- **Moltiplicazione:** effettivamente, la rete che implementa una moltiplicazione per β sposta gli input x_{n-1}, \dots, x_0 "su", attraverso una mappa:

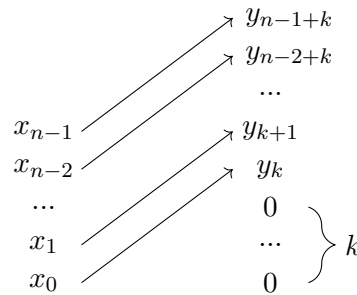


assegnando y_0 ad un generatore di zero.

Per reti che moltiplicano per multipli $\beta \cdot k$, generalizzeremo la stessa cosa come:

$$\begin{cases} y_j = x_{j-k}, & k \leq j \leq n-1+k \\ y_j = 0, & 0 \leq j \leq k-1 \end{cases}$$

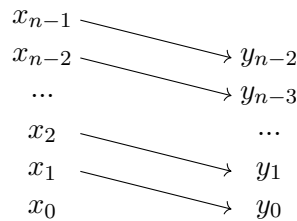
ottenendo quindi la mappa:



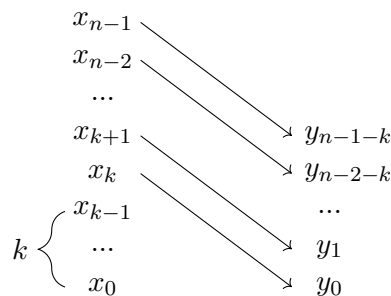
- **Quoziente:** allo stesso modo, si ha che si vogliono spostare gli input "giù", ovvero applicare:

$$\begin{cases} y_j = x_{j+k}, & k \leq j \leq n-1-k \end{cases}$$

che per $k = 1$ è:



e per k arbitrari è:



dove i primi k elementi di x vengono trascurati (**troncamento**).

- **Resto:** il resto significa semplicemente "tagliare" tutti gli ingressi prima di x_k , ergo:

$$\begin{cases} y_j = x_j, & 0 \leq j \leq k-1 \end{cases}$$

secondo la mappa:

$$\begin{array}{ccc}
 x_{n-1} & & \\
 \dots & & \\
 x_{k-1} & \longrightarrow & y_{k-1} \\
 x_{k-2} & \longrightarrow & y_{k-2} \\
 \dots & & \dots \\
 x_1 & \longrightarrow & y_1 \\
 x_0 & \longrightarrow & y_0
 \end{array}$$

14.1.2 Concatenamento

Concatenare in X due numeri Y e Z a k e $n - k$ cifre significa dire:

$$X = Z \cdot \beta^k + Y$$

Anche questa è un'operazione a complessità nulla, in quanto significa prendere le cifre di Y e Z :

$$\begin{cases} x_j = y_j, & 0 \leq j \leq k-1 \\ x_j = z_j, & k \leq j \leq n-1 \end{cases}$$

secondo la mappa:

$$\begin{array}{ccc}
 z \left\{ \begin{array}{ccc} z_{n-k-1} & \longrightarrow & y_n \\ \dots & & \dots \\ z_0 & \longrightarrow & y_k \end{array} \right. & & \\
 y \left\{ \begin{array}{ccc} y_{k-1} & & y_{k-1} \\ \dots & \longrightarrow & \dots \\ y_0 & \longrightarrow & y_0 \end{array} \right. & &
 \end{array}$$

14.1.3 Estensione di campo

L'estensione di campo è l'operazione con cui rappresentiamo un naturale su n cifre su un numero maggiore di cifre. Per i naturali dobbiamo trivialmente aggiungere zero a sinistra della MSD, mentre vedremo che per l'aritmetica intera dovremmo replicare la MSD sulle cifre aggiunte per mantenere il segno corretto.

Abbiamo quindi che per un numero $x = (x_{n-1}, \dots, x_0)$ su n cifre vogliamo trovare l'esteso $x' = (x_{n-1+k}, \dots, x_0)$ su $n + k$ cifre, cioè il numero tale per cui:

$$\begin{cases} x'_j = x_j, & 0 \leq j \leq n-1 \\ x'_j = 0, & n \leq j \leq n-1+k \end{cases}$$

cioè che rispetta la mappa:

$$\begin{array}{ccc}
 & \begin{array}{c} 0_{n-1+k} \\ \dots \\ 0_n \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{c} 0_{n-1+k} \\ \dots \\ 0_n \end{array}} \right\} k & \\
 x_{n-1} & \longrightarrow & y_{n-1} \\
 x_{n-2} & \longrightarrow & y_{n-2} \\
 \dots & & \dots \\
 x_1 & \longrightarrow & y_1 \\
 x_0 & \longrightarrow & y_0
 \end{array}$$

14.2 Addizione

La somma, sostanzialmente, consiste nel:

1. Sommare le coppie di cifre di pari posizione, singolarmente, dalla LSD alla MSD e tenendo conto dell'eventuale **riporto entrante**;
2. Se la somma di cifre non è rappresentabile su una singola cifra, usare il **riporto uscente** per la coppia di cifre successive.

Abbiamo che il riporto è sempre $\in \{0, 1\}$, e che per la prima coppia di cifre possiamo assumerlo $= 0$. Ad ogni passaggio, quindi, applichiamo una funzione:

$$(a_i, b_i, c_{in}) \rightarrow (s_i, c_{out})$$

Inoltre, si ha che l'algoritmo non dipende dalla base β , ma solamente dalla **notazione posizionale**.

14.2.1 Dimensioni di somme

Avevamo quindi che, dati X, Y in base β su n cifre, cioè $X, Y \in [0, \beta^n - 1]$, con $C_{in} \in [0, 1]$, volevamo calcolare:

$$Z = X + Y + C_{in}$$

ovvero trovare il cosiddetto **full adder**. Possiamo dimostrare che il numero di cifre su cui sta il risultato è:

$$0 \leq X + Y + C_{in} \leq 2\beta^n - 1 \leq \beta^{n+1} - 1$$

dove la cifra $n + 1$ è compresa in $Z_{n+1} \in [0, 1]$, cioè rappresenta il riporto uscente di $X + Y$.

Possiamo quindi affermare con sicurezza che la somma fra due naturali espressi in base β su n cifre più un'eventuale riporto entrante C_{in} produce un naturale che è sempre rappresentabile su $n + 1$ cifre in base β , delle quali la $n + 1$ -esima cifra è il riporto uscente, e può valere soltanto 0 o 1.

Quello che vogliamo è un circuito sommatore in base β a n cifre che prenda le cifre di due naturali X e Y su n cifre e un riporto entrante C_{in} (un bit), e restituisca un'altro naturale Z , sempre su n cifre e un riporto uscente C_{out} (sempre un bit).

Nel caso uno dei numeri abbia $m > n$ cifre, si estende il numero su n cifre fino a m (aggiungendo $n - m$ zeri in testa), e poi si somma. Se si vuole poi che la somma sia *sempre* rappresentabile, bisogna usare un sommatore ad $n + 1$ cifre, ed estendere gli ingressi su $n + 1$ cifre. In questo caso l'ultimo riporto sarà sempre zero.

14.2.2 Ripple carry e full adder

Creare circuiti per $2n + 1$ ingressi può essere complicato, quindi si preferisce adottare un approccio **modulare**, dove si scompone ogni somma su una singola coppia di cifre, purchè:

- Le somme vengano eseguite dalla LSD alla MSD;
- Il riporto si **propaghi** (in inglese *ripple*) da una cifra alla successiva.

Chiamiamo quindi ogni sommatore su due cifre (una di X e una di Y) **full adder**, e il montaggio in cui li disponiamo a **ripple carry** (*propagazione dei resti*).

14.2.3 Full adder in base 2

In base 2, un full adder è un circuito con 3 ingressi (x_i , y_i e c_{in}) e 2 uscite (s_i e c_{out}). Abbiamo che la rete dovrebbe avere tabella di verità:

x_i	y_i	c_{in}	s_i	c_{out}
0	0	0	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	1	0
0	1	1	0	1
1	0	0	1	0
1	0	1	0	1
1	1	0	0	1
1	1	1	1	1

Potremmo adesso applicare Karnaugh, ma notiamo che s_i vale 1 quando la somma degli ingressi è dispari, cioè si può dire che è lo XOR in cascata di x_i , y_i e c_{in} . Allo stesso modo, il c_{out} non sarà altro che un circuito SP standard, che prende gli AND di ogni coppia di ingressi e li passa attraverso un OR. Abbiamo che il full adder è una rete a 2 livelli di logica.

14.2.4 Incrementatore

Abbiamo che in assembler potevamo distinguere fra le operazioni **ADD** \$1, %a1 e **INC** %a1. Possiamo fare l'assunzione che almeno uno degli ingressi di un full adder sia sempre zero per realizzare un **half adder**: ad esempio, prendiamo $y_i = 0$. In questo caso, c_{out} potrà essere prodotto con un solo livello di logica, cioè attraverso l'AND fra x_i e c_{in} . Allo stesso modo, potremo ridurre s_i ad un solo XOR fra x_i e c_{in} .

Facciamo delle considerazioni sulle prestazioni: se in un full adder ogni input arriva in tempo t , dopo 2 livelli di logica il c_{in} del prossimo full adder arriverà a $t + 2$. Quindi il risultato di quel full adder uscirà a $t + 4$ e così via. Si ha che per n full adder concatenati, ergo n cifre, l' $n - 1$ -esima cifra viene computata in tempo $t + 2n$. Questo ci dice che la somma è sì **scomponibile**, ma non **parallelizzabile**.

In verità, negli anni, sono state sviluppate architetture che implementano il **carry lookahead**, cioè implementano su due livelli di logica, con 5 ingressi, un "precalcolo" del carry a qualche $t + 4$, cioè ogni due full adder (i 5 ingressi sono il primo carry e i 2 + 2 ingressi dei 2 full adder). Questo pressapoco raddoppia la velocità di calcolo delle somme su n cifre, passando quindi da $t + 2n$ a $\approx t + n$.

Riassumendo, quindi, gli incrementatori risultavano più veloci dei full adder per ottimizzazioni di questo tipo e in quanto implementavano tutto su un solo livello di logica.

14.3 Sottrazione

L'algoritmo di sottrazione consiste nell'applicare un'algoritmo analogo alla somma ma con prestiti al contrario, cioè nel:

1. Sottrarre le coppie di cifre di pari posizione, singolarmente, dalla LSD alla MSD;
2. Se la somma di cifre non è rappresentabile su una singola cifra, generare un **prestito** (*borrow*) per la coppia di cifre successive.

Si ha anche qui che il prestito è sempre $\in [0, 1]$. Inoltre, anche questo algoritmo non dipende dalla base β , ma solo dalla notazione posizionale.

14.3.1 Dimensioni di sottrazioni

Abbiamo quindi due naturali X e Y in base β su n cifre, quindi tali che $X, Y \in [0, \beta^n - 1]$, e un bit B_{in} con $0 \leq b_{in} \leq 1$. Voglio calcolare il naturale:

$$Z = X - Y - b_{in}$$

ammesso che questo naturale *esista!*. Questo perché i naturali non sono chiusi rispetto alla sottrazione, cioè:

$$-\beta^n \leq X - Y - b_{in} \leq \beta^n - 1$$

potrei avere $Z \in \mathbb{Z}$.

14.3.2 Rappresentabilità

Dico quindi che, dal teorema della divisione con resto, posso scrivere Z come quoziente e resto di una divisione per β^n :

$$Z = -b_{out} \cdot \beta^n + D = X - Y - b_{in}$$

definito:

$$-b_{out} = \left\lfloor \frac{X - Y - b_{in}}{\beta^n} \right\rfloor, \quad D = |X - Y - b_{in}|_{\beta^n}$$

dove noto che $b_{out} \in \{0, 1\}$ indipendentemente da β (si comporta come il *carry* della somma).

Posso quindi scrivere Y come il suo complemento, noto che:

$$Y + \bar{Y} = \beta^n - 1, \quad Y = \beta^n - 1 - \bar{Y}$$

da cui sostituendo:

$$(1 - b_{out}) \cdot \beta^n + D = X + \bar{Y} + (1 - b_{in}) \equiv \bar{b}_{out} \cdot \beta^n + D = X + \bar{Y} + \bar{b}_{in}$$

dove si complementano i bit b_{in} e b_{out} . Chiamiamo:

$$\begin{cases} \bar{b}_{out} = c_{out} \\ \bar{b}_{in} = c_{in} \end{cases}$$

Otteniamo che l'equazione finale è sostanzialmente quella di un sommatore:

$$\bar{b}_{out} \cdot \beta^n + D = X + \bar{Y} + \bar{b}_{in} \equiv c_{out} \cdot \beta^n + D = X + \bar{Y} + c_{in}$$

dove la differenza fra X e Y meno un prestito entrante, se naturale, può essere ottenuta se sommo X ad \bar{Y} , più un'eventuale riporto entrante ottenuto complementando il prestito entrante. Se a questo punto il riporto uscente di \bar{b}_{out} vale 1, si ha che la differenza è un naturale pari a D , altrimenti non è rappresentabile.

14.3.3 Comparazione di numeri naturali

Dati due **naturali** X e Y , si possono usare i sottrattori per comparare i loro valori, cioè per ottenere $x < Y$. Per fare ciò, si calcola $X - Y$ e si guarda il prestito uscente: se $b_{out} = 1$, allora $X < Y$, altrimenti viceversa.

Per controllare l'uguaglianza, invece, si prende b_{out} e D : se $b_{out} = 1$ (differenza rappresentabile) e $D = 0$, allora $X = Y$, altrimenti viceversa.

14.4 Moltiplicazione

Dati X e C naturali in base β su n cifre, cioè $X, C \in [0, \beta^n - 1]$, e Y naturale in base β su m cifre, cioè $Y \in [0, \beta^m - 1]$, vogliamo calcolare:

$$P = X \cdot Y + C$$

14.4.1 Dimensioni di prodotti

Si ha che, da quanto detto prima:

$$P = X \cdot Y + C \leq (\beta^n - 1) \cdot (\beta^m - 1) + (\beta^n - 1) = \beta^m \cdot (\beta^n - 1) < \beta^{n+m} - 1$$

cioè il risultato sta su $n + m$ cifre.

14.4.2 Algoritmo di moltiplicazione

La moltiplicazione fra naturali si effettua come segue:

1. Si moltiplica X per tutte le cifre di Y , iterativamente;
2. Moltiplicando, si generano **risultati parziali**, che vengono disposti a partire dalla cifra per cui stiamo moltiplicando, per quanto ci riguarda si tratta di una moltiplicazione per β^k ;
3. I risultati parziali vengono sommati fra di loro con riporto.

Diverse architetture implementano diversi algoritmi di moltiplicazione, ma l'idea fondamentale è quella di creare risultati parziali e sommarli fra di loro. Un modo particolarmente efficiente di fare moltiplicazioni è quello di:

1. Moltiplicare un numero ad n cifre per un numero ad una sola cifra;
2. Sommare gli m addendi, opportunamente traslati, per ottenere il risultato finale.

Possiamo sfruttare il fatto che la somma è **associativa**, e che la cifra i -esima del prodotto, con $0 \leq i \leq n - 1$, è determinata univocamente dai prodotti parziali $j \leq i$, ergo possiamo sommare i risultati parziali mentre si svolgono le moltiplicazioni. Quest'ultima differenza è la più sostanziale dalla classica moltiplicazione "in colonna" insegnata a scuola.

Si va quindi a definire una rete detta **moltiplicatore con addizionatore**, che:

1. Moltiplica X per una cifra di Y , sommando un termine C inizialmente nullo, che viene poi impostato alle cifre più significative del risultato parziale trovato. La LSD, invece, viene assegnata direttamente alla posizione corrispondente nel risultato finale.
2. Infine, concatena tutti le cifre ottenute come LSD nel risultato finale.

In questo modo possiamo fare solo moltiplicazioni su $n \times 1$ cifra e somme su due addendi su $n + 1$ cifre.

14.4.3 Moltiplicatore con addizionatore in base 2

Vediamo quindi come realizzare un moltiplicatore con addizionatore $n \times 1$ in base 2, cioè un moltiplicatore con addizionatore ad una cifra.

Vorremmo il risultato, piuttosto triviale in $\beta = 2$:

$$P_i = y_i \cdot X + C = \begin{cases} (0+) C, & y_i = 0 \\ X + C, & y_i = 1 \end{cases}$$

Possiamo effettuare la selezione su y_i attraverso quello che è effettivamente un **multiplexer**. Quello che facciamo quindi è collegare un multiplexer fra X e 0 con variabile di controllo y_i a un ingresso di un full adder, e C all'altro ingresso. L'ingresso C_{in} del full adder varrà 0, mentre l'uscita C_{out} verrà concatenata alla somma S .

Abbiamo che in base 2 un multiplexer a due ingressi, con uno di questi negato, è effettivamente una porta AND fra l'ingresso non nullo e la variabile di controllo. Sostituiamo quindi il multiplexer con un AND a n fra X e y_i .

14.4.4 Richiamo all'assembler

Avevamo visto che in assembler la moltiplicazione aveva un solo operando esplicito, mentre l'altro era implicito su AL, AX o EAX. Il risultato veniva poi concatenato in AX, DX_AX o EDX_EAX. Questo rispetta la logica vista finora: partendo da fattori su n e m bit, con $n = m$, si arriva ad un risultato rappresentabile su $n + m = 2n$ bit, cioè $8 + 8 = 16$ bit (AL \rightarrow AX), $16 + 16 = 32$ bit (AX \rightarrow DX_AX) e $16 + 16 = 32$ bit (EAX \rightarrow EDX_EAX).

14.4.5 Convertitori di base

Vediamo come realizzare un convertitore da 2 cifre, x_1 e x_0 in codifica BCD, alla codifica binaria. Due cifre rappresentano al massimo 99, che in binario sta su 7 bit. Ergo vogliamo un circuito con 8 bit di ingresso (4 bit + 4 bit degli ingressi BCD) e 7 bit di uscita. Abbiamo che, banalmente, la conversione si effettua come:

$$y = 10 \cdot x_1 + x_0$$

Questo si può realizzare con un moltiplicatore con addizionatore con $X = x_1$, $Y = 10$ e $C = x_0$. Abbiamo che il risultato è su 8 bit, di cui sappiamo però possiamo ridurre il campo a 7.

Un circuito più efficiente può essere realizzato usando solo somme e shift, infatti abbiamo che:

$$y = 10 \cdot x_1 + x_0 = 8 \cdot x_1 + 2 \cdot x_1 + x_0$$

che appare migliore dal punto di vista della realizzazione in aritmetica binaria (8 e 2 sono 2^3 e 2^1). Abbiamo quindi che possiamo usare i moltiplicatori per b^k , e ottenere un circuito con lo stesso comportamento.

Per la precisione, prendiamo $8 \cdot x_1$ e troviamo che si estende fino a 7 bit. Prendiamo poi $2 \cdot x_1 + x_0$ e vediamo che la somma si rappresenta su 5 bit. Sommando i 7 bit di $8 \cdot x_1$ ai 5 di $2 \cdot x_1 + x_0$ abbiamo un risultato sempre su 7 bit.

15 Lezione del 23-10-24

15.1 Divisione

Siano dati X , un naturale in base β su $n + m$ cifre, detto **dividendo**, con $0 \leq X \leq \beta^{n+m} - 1$, e Y , un naturale in base β su m cifre, detto **divisore**, con $0 \leq Y \leq \beta^m - 1$. Vogliamo calcolare i due numeri Q ed R tali che:

$$X = Q \cdot Y + R$$

Abbiamo che, con $|Y = 0|$, la divisione non è fattibile, quindi avremo bisogno di un uscita di **non fattibilità** `no_div`.

15.1.1 Dimensioni di resti e quozienti

Assumendo $Y > 0$, si ha che Q sta su $n + m$ cifre (caso peggiore $Y = 1$), mentre R sta su m cifre, in quanto $0 \leq R \leq Y$ dalle proprietà della divisione. Scelgo, per ragioni tecniche, che il quoziente dovrà stare su n cifre, quindi impongo $Q \leq \beta^n - 1$. Nel caso non si possa rappresentare Q , quindi, userò sempre la stessa uscita `no_div` di prima.

La decisione fatta riguardo a Q implica che:

$$X = Q \cdot Y + R \leq (\beta^n - 1) \cdot Y + (Y - 1) = \beta^n \cdot Y - 1 \Rightarrow X < \beta^n \cdot Y$$

L'ipotesi potrebbe sembrare limitante, ma visto che si può ricavare n che soddisfi la disuguaglianza, possiamo eseguire qualsiasi divisione poste **estensioni** del dividendo e **riserve** di cifre (cioè più delle strettamente necessarie) per il quoziente.

Nel caso il numero di cifre n, m sia dato dal problema, cioè quando si lavora su **campi finiti**, l'ipotesi è restrittiva.

L'obiettivo è quello di progettare circuiti che eseguano questa divisione su campi di dimensioni prestabilite: dovremmo ricordare questa proprietà nello sviluppo e del circuito (e noteremo ha un significato specifico), e quando andiamo ad utilizzarlo, cioè quando si scrivono istruzioni assembly che ordinano divisioni fra numeri su registri di dimensione diversa.

15.1.2 Modulo divisore

Vogliamo quindi realizzare un circuito che:

1. Verifichi la **fattibilità** della divisione nelle ipotesi date;
2. Se il quoziente sta su n cifre, lo restituisca, altrimenti restituisca `no_div`.

La divisione viene svolta, tradizionalmente, prendendo un sottoinsieme delle n cifre più significative del dividendo, tali per cui possiamo trovare quante volta il divisore sta nel sottoinsieme. Visto che non possiamo riscalar il numero di cifre prese dal divisore una volta assemblato il circuito, abbiamo bisogno di un numero minimo di cifre da prendere ogni volta, per essere sicuri di poter eseguire la divisione. Formalmente, quindi, prendo il minimo numero di cifre più significative di X per ottenere un $X' \in [Y, \beta \cdot Y[$. In questo m cifre possono non bastare (potremmo avere che le m cifre più significative di X sono $< Y$), mentre $m + 1$ bastano sempre (purché X non abbia zeri in testa).

Si calcolano quindi i quozienti e i resti **parziali**, q e R' , dalla divisione di X' e Y . Si ha che q sta su una sola cifra, perché $X' < \beta \cdot Y$ dall'ipotesi.

Calcolo quindi il nuovo dividendo X' concatenando R' con la cifra più significativa non ancora utilizzata di X . Il nuovo dividendo, date le ipotesi, è ancora $< \beta \cdot Y$:

$$R' \leq Y - 1, \quad \beta \cdot R' + (\beta - 1) \leq \beta \cdot Y - \beta + \beta + 1 = \beta \cdot Y$$

Si itera fino ad esaurimento delle cifre del dividendo. A questo punto il **quoziente** è ottenuto dal concatenamento dei quozienti parziali, e il resto è l'ultimo resto parziale.

Abbiamo che l'unica divisione effettiva è quella di $m + 1$ per m cifre, mentre tutte le altre sono effettivamente scomposizioni, quindi circuiti di logica a costo nullo. Resta quindi da calcolare solo il flag di non fattibilità `no_div`: questo deriva naturalmente da quanto avevamo detto riguardo alle dimensioni del dividendo:

$$X < \beta^n \cdot Y$$

Inoltre, vogliamo impostare `no_div` anche nel caso Y sia nullo, per ovvi motivi.

15.1.3 Divisione nei processori Intel x86

Abbiamo visto come nei processori Intel x86, abbiamo a disposizione tre versioni della divisione:

Dim. sorgente (divisore)	Dim. dividendo	Dividendo	Quoziente	Resto
8 bit	16 bit	AX	AL	AH
16 bit	32 bit	DX_AX	AX	DX
32 bit	64 bit	EDX_EAX	EAX	EDX

Si ha che la **div** ammette dividendo su $2n$ bit e divisore su n bit, con $n = 8, 16, 32$, e richiede che il quoziente stia su n bit (altrimenti genera un'eccezione). Questo è quello che si otterrebbe ponendo $n = m$.

15.1.4 Divisione elementare in base 2

Resta quindi da capire come effettuare la divisione elementare fra un numero a $m + 1$ cifre e un altro a m cifre, sotto l'ipotesi $X \leq 2Y = 2^1 \cdot Y$ (siamo in $\beta = 2$).

Abbiamo che Q può valere 0 o 1. Vale 0 se il divisore Y è maggiore del dividendo X , 1 altrimenti. R , invece, è uguale al dividendo X se questo è minore del divisore Y , altrimenti è uguale a $X - Y$:

$$Q = \begin{cases} 0, & X < Y \\ 1, & X \geq Y \end{cases}, \quad R = \begin{cases} X, & X < Y \\ X - Y, & X \geq Y \end{cases}$$

Per rappresentare questo sistema ci serve un comparatore fra X e Y . Lo realizziamo con un sottrattore (di cui bisognavamo comunque per il calcolo di $X - Y$), quindi mandando Y complementato (ed opportunamente esteso) al secondo input di un sommatore, ed X al primo. Il sommatore ha $C_{in} = 0$.

Fuori dal sommatore, avremo $X - Y$ come risultato, e b_{out} come discriminante per $X < Y$. Mandiamo quindi X e $X - Y$ agli ingressi di un multiplexer con variabile di controllo C_{out} dal sommatore, cioè discriminiamo fra X e $X - Y$ sulla base di quanto restituito dal comparatore.

A questo punto si ha che b_{out} rappresenta Q , mentre l'uscita del multiplexer è R .

16 Lezione del 24-10-24

16.0.1 Rappresentazione dei numeri interi

Vogliamo rappresentare numeri interi su n cifre. Finora avevamo definito la legge di rappresentazione:

$$A = \sum_{i=0}^{n-1} a_i \cdot \beta^i$$

per i numeri naturali.

Nel sistema decimale, usiamo solitamente la rappresentazione **modulo e segno**, cioè usiamo un segno prefisso (+ o -), e poi indichiamo il modulo come un naturale.

In base 2, invece, decidiamo di sfruttare la seguente proprietà: preso un insieme di β^n numeri interi, posso sempre trovare una legge biunivoca che gli fa corrispondere un insieme di β^n numeri naturali.

Definisco quindi una legge $L : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}$, e chiamo A un numero naturale (che indicheremo in Maiuscolo da qui in avanti) e a un numero intero (che indicheremo in minuscolo da qui in avanti). Si ha quindi che:

$$A = L(a) \Leftrightarrow a = L^{-1}(A)$$

e cioè:

$$a \leftrightarrow^L A \equiv (a_{n-1}a_{n-2}\dots a_1a_0)_\beta$$

cioè con la stessa sequenza di cifre indichiamo sia un naturale che il corrispondente intero. Notiamo che la a minuscola qui significa *cifra*, che è indifferentemente di A o di a (numeri naturali e interi).

Scegliendo leggi L valide possiamo ottenere dei significativi vantaggi implementativi: ad esempio potremmo definire una legge che permette di usare la stessa circuiteria per le operazioni aritmetiche sia sui naturali che sugli interi.

Il **dominio** di L dovrà essere contiguo, cioè un'intervallo, magari il più simmetrico possibile rispetto allo zero. Questo è possibile solo se β è dispari. Nel caso di β pari, come sarà nel nostro caso di interesse $\beta = 2$, dovremmo prendere un numero "in più" a destra o a sinistra. Nel sistema adottato (sarà il complemento a 2) prendiamo il numero a sinistra, cioè quello negativo, ergo avremo l'**intervallo di rappresentabilità**:

$$\left[-\frac{\beta^n}{2}, \frac{\beta^n}{2} - 1 \right]$$

Notiamo che da qui in poi assumeremo di lavorare in β pari, in quanto in caso contrario dovremmo usare la seguente notazione:

$$\left\lfloor -\frac{\beta^n}{2} \right\rfloor, \quad \left\lceil -\frac{\beta^n}{2} \right\rceil, \quad \dots$$

che appesantirebbe la trattazione, cosa inutile in quanto abbiamo stabilito che il nostro interesse finale è trovare metodi che si applichino a $\beta = 2$.

Abbiamo infatti che, posto $\beta = 2$, l'intervallo riportato precedentemente rappresenta quello a cui siamo abituati per la rappresentabilità dei numeri interi in complemento a 2:

$$\left[-2^{n-1}, 2^{n-1} - 1 \right]$$

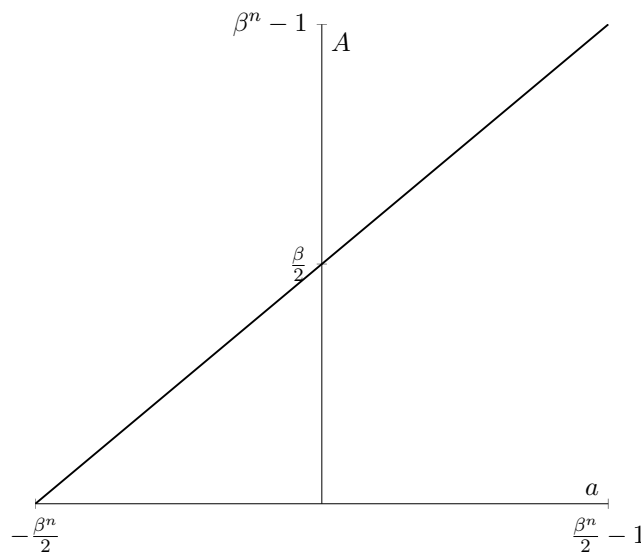
16.0.2 Rappresentazione in traslazione

Una possibile legge di rappresentazione è data da:

$$L(a) = A = a + \frac{\beta^n}{2}$$

chiamiamo $\frac{\beta^n}{2}$ **fattore di polarizzazione**. Questa rappresentazione è utile, **monotona** ($a < b \Leftrightarrow A < B$), e viene usata nei convertitori analogico/digitale e digitale/analogico, dove viene chiamata *binario bipolare*. Inoltre, ricordiamo che rappresenta l'esponente nei numeri reali in virgola mobile secondo lo standard IEEE 754.

Su un grafico dove le ordinate rappresentano A e le ascisse a , abbiamo la mappa:



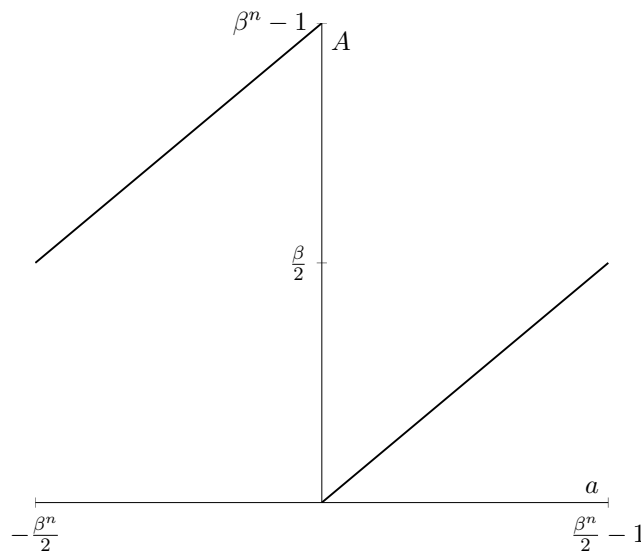
16.0.3 Complemento alla radice

Definiamo la legge, che abbiamo solitamente chiamato **complemento a 2**:

$$L(a) = A = \begin{cases} a, & 0 \leq a < \frac{\beta^n}{2} \\ \beta^n + a, & -\frac{\beta^n}{2} \leq a < 0 \end{cases}$$

Con questa legge perdiamo la **monotoneità**. Ciò nonostante, è la legge usata di norma dal processore.

Ricordiamo che graficamente si può rendere con il cosiddetto diagramma a farfalla:



16.0.4 Modulo e segno

Possiamo sempre usare la legge di rappresentazione in modulo e segno, cioè $(s, M) \leftrightarrow a$:

$$s = \begin{cases} 0, & a \geq 0 \\ 1, & a < 0 \end{cases}$$

$$M = \text{abs}(a)$$

Notiamo che noi intendiamo, per modulo e segno, una rappresentazione dove n bit rappresentano il modulo, e l' n -esimo bit rappresenta il segno, per un totale di $n + 1$ bit. Non stiamo quindi mettendo in relazione intervalli di naturali con intervalli di interi, ma intervalli di naturali complementati da un bit in più di segno, con intervalli di interi. Abbiamo quindi che questo tipo di rappresentazione non ricade nella categoria definita prima. Ricordiamo comunque che viene applicata per rappresentare il segno dei numeri reali in virgola mobile secondo lo standard IEEE 754.

16.0.5 Determinazione del segno

Posso determinare il segno di un numero intero a dalle cifre della sua rappresentazione A :

$$\begin{cases} a \geq 0 \Leftrightarrow 0 \leq A < \frac{\beta^n}{2} \\ a < 0 \Leftrightarrow \frac{\beta^n}{2} \leq A < \beta^n \end{cases}$$

Facciamo le solite considerazioni:

- Il **massimo numero rappresentabile** è $\frac{\beta^n}{2} - 1$, che in CR ha rappresentazione $(\frac{\beta}{2} - 1, \beta, \dots, \beta)_\beta$;
- Il **minimo numero rappresentabile** è $\frac{\beta^n}{2}$, che in CR ha rappresentazione $(\frac{\beta}{2}, 0, \dots, 0)_\beta$;
- Lo **0** coincide in A e a , ergo vale 0 e ha rappresentazione in CR $(0, \dots, 0)_\beta$;
- Il **-1** è $\beta^n - 1$, che in CR ha rappresentazione $(\beta, \dots, \beta)_\beta$.

Quindi, per capire se la rappresentazione A è un numero naturale maggiore o minore di $\frac{\beta^n}{2}$, che equivale a capire se l'intero che rappresenta è maggiore o minore di zero, basta guardare la cifra più significativa:

$$\begin{cases} a_{n-1} < \frac{\beta}{2} \Leftrightarrow 0 \leq A < \frac{\beta^n}{2} \\ a_{n-1} \geq \frac{\beta}{2} \Leftrightarrow \frac{\beta^n}{2} \leq A < \beta^n \end{cases}$$

Questo ci permette di riscrivere L nella forma più elegante:

$$L(a) = A = \begin{cases} a, & a_{n-1} < \frac{\beta}{2} \\ \beta^n + a, & a_{n-1} \geq \frac{\beta}{2} \end{cases}$$

16.0.6 Legge inversa del CR

Possiamo ottenere per sostituzione la legge inversa della legge di rappresentazione CR:

$$L(a) = A = \begin{cases} a, & 0 \leq a < \frac{\beta^n}{2} \\ \beta^n + a, & -\frac{\beta^n}{2} \leq a < 0 \end{cases}, \quad L^{-1}(A) = a = \begin{cases} A, & 0 \leq A < \frac{\beta^n}{2} \\ A - \beta^n, & \frac{\beta^n}{2} \leq A < \beta^n \end{cases}$$

Che possiamo riscrivere nel modo più elegante:

$$L^{-1}(A) = a = \begin{cases} A, & a_{n-1} < \frac{\beta}{2} \\ -(\bar{A} + 1), & a_{n-1} \geq \frac{\beta}{2} \end{cases}$$

usando quanto detto sulla MSD e quanto conosceamo sui complementi (ancora, è sostanzialmente un complemento a 2).

In particolare, il cambio delle disequazioni viene fatto note le proprietà sul MSD. La trasformazione $A - \beta^n = -(\bar{A} + 1)$ si ricava invece dalla proprietà fondamentale:

$$A + \bar{A} = \beta^n - 1$$

con semplici passaggi algebrici.

16.0.7 Forma alternativa del CR

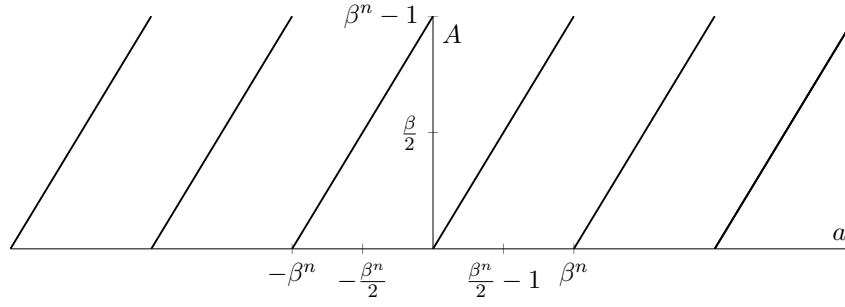
Possiamo usare la forma più concisa (ma anche più pericolosa) delle legge di rappresentazione CR:

$$L(a) = A = |a|_{\beta^n}, \quad \text{se } -\frac{\beta^n}{2} \leq a < \frac{\beta^n}{2} - 1$$

Abbiamo che:

1. Se $a \geq 0$, allora è anche $< \beta^n$, quindi $A = a = |a|_{\beta^n}$;
2. Se $a < 0$, allora è compreso in $[-\frac{\beta^n}{2}, 0[$, quindi diviso β^n dà quoziente -1 , cioè dal teorema della divisione con resto, $a = -1 \cdot \beta^n + |a|_{\beta^n}$. Avevamo dalla legge di rappresentazione in complemento a radice che, sotto questa ipotesi, volevamo esattamente $\beta^n + a$, ergo si ottiene ugualmente $A = |a|_{\beta^n}$.

Possiamo quindi interpretare il complemento a radice come una rappresentazione modulare:



Occorre fare attenzione in quanto questo è vero solo nel caso a sia **rappresentabile**, cioè se rispetta: $-\frac{\beta^n}{2} \leq a < \frac{\beta^n}{2} - 1$. In caso contrario, come è chiaro dal grafico, si potrebbero avere le stesse rappresentazioni per interi diversi fra di loro (cioè essenzialmente un overflow).

16.1 Operazioni su interi in CR

Vogliamo progettare circuiti che lavorano sulle rappresentazioni, come avevamo fatto per i naturali. Ricordiamo che la rappresentazione vale per un naturale A o un intero a a seconda di quanto deciso dal programmatore, e nient'altro.

16.1.1 Valore assoluto

Vogliamo trovare il valore assoluto di un numero intero $B = \text{abs}(a)$, con:

$$a \in \left[-\frac{\beta^n}{2}, \frac{\beta^n}{2} - 1\right] \Rightarrow B \in \left[0, \frac{\beta^n}{2}\right]$$

Si ha che B è un numero naturale rappresentabile su n cifre. Sappiamo che:

$$\text{abs}(a) = \begin{cases} a, & a \geq 0 \\ -a, & a < 0 \end{cases}$$

Posso quindi ottenere $\text{abs}(a)$ complementando la rappresentazione nel range di valori che so essere negativo (cioè quando $a_{n-1} \geq \frac{\beta}{2}$):

$$B = \text{abs}(a) = \begin{cases} A, & a_{n-1} < \frac{\beta}{2} \\ \bar{A} + 1, & a_{n-1} \geq \frac{\beta}{2} \end{cases}$$

Logicamente, questo sarà rappresentato da un multiplexer che discrimina fra A e $\bar{A} - 1$. La variabile di comando sarà data da b_{out} di un comparatore fra a_{n-1} e $\frac{\beta}{2}$.

In base 2 questo è notevolmente più semplice: avrò che basta prendere a_{n-1} come variabile di comando. Si potrà quindi complementare con uno XOR fra le cifre di A e a_{n-1} , e usare a_{n-1} anche come ingresso di un incrementatore, con le cifre di A all'altro ingresso.

16.2 Conversione da CR a MS

Vediamo come convertire un numero in CR nella rappresentazione modulo e segno. Prima di tutto notiamo una discrepanza nell'intervallo di rappresentabilità:

$$i_{MS} = [-\beta^n + 1, \beta^n - 1] \not\equiv i_{CR} = \left[-\frac{\beta^n}{2}, \frac{\beta^n}{2}\right]$$

Abbiamo però che $i_{CR} \subset i_{MS}$, tolto il bit di segno, quindi l'operazione è sempre fattibile, calcolando l'assoluto e stabilendo:

$$\text{sgn}(a) = \begin{cases} 0, & a_{n-1} < \frac{\beta}{2} \Leftrightarrow a_{n-1} = 0 \\ 1, & a_{n-1} \geq \frac{\beta}{2} \Leftrightarrow a_{n-1} = 1 \end{cases}$$

dove si è riportato il valore di a_{n-1} in base $\beta = 2$.

16.3 Calcolo dell'opposto

Vediamo come trovare l'opposto di un numero in CR, quindi dato $A \leftrightarrow a$, $B \leftrightarrow b$ tale che $b = -a$. Questo' operazione non è sempre possibile, a causa dell'asimmetria dell'intervallo di rappresentabilità in CR $[-\frac{\beta^n}{2}, \frac{\beta^n}{2}]$: avremo che il numero in $-\frac{\beta^n}{2}$, negativo, non ha opposto positivo rappresentabile.

Avremo quindi bisogno di un flag di overflow, diciamo ow . Le due uscite, l'opposto e ow , andranno quindi calcolate separatamente. Assumendo $ow = 0$, si ha:

$$\begin{aligned} B &= |-a|_{\beta^n} = |-1|_{\beta^n} \cdot |a|_{\beta^n}|_{\beta^n} = |(\beta^n - 1) \cdot A|_{\beta^n} \\ &= |\beta^n \cdot A - A|_{\beta^n} = |-A|_{\beta^n} = |-\beta^n + 1 + \bar{A}|_{\beta^n} = |1 + \bar{A}|_{\beta^n} \end{aligned}$$

cioè si ritrova sostanzialmente la legge di rappresentazione inversa L^{-1} .

Sappiamo di poter implementare questa legge con una negazione di tutte le cifre, seguita da un incremento di 1. Nel caso precedente, avevamo usato lo XOR in quanto volevamo che la negazione fosse condizionale (pilotata dal bit di segno). In questo caso vogliamo negare sempre, quindi basta una porta NOT.

L' ow viene invece impostato sulla base di un AND fra le cifre più significative a_{n-1} del numero non negato e b_{n-1} del numero negato.

16.3.1 Richiamo all'assembly

Si ricorda che in assembly avevamo l'istruzione **NEG**, che interpretava una sequenza di bit come un numero intero, e ne calcolava l'opposto se possibile, impostando il flag OF altrimenti.

16.4 Estensione di campo per gli interi

Avevamo detto che l'estensione di campo per gli interi richiedeva logica. Possiamo infatti ricavare, per via algebrica il valore dell'intero con l' n -esima cifra aggiunta, A_{EST} :

$$A_{EST} = \begin{cases} a, & 0 \leq a < \frac{\beta^n}{2} \\ \beta^{n+1} + a, & -\frac{\beta^n}{2} \leq a < 0 \end{cases} = \begin{cases} A, & 0 \leq a < \frac{\beta^n}{2} \\ \beta^n \cdot (\beta - 1) + a, & -\frac{\beta^n}{2} \leq a < 0 \end{cases}$$

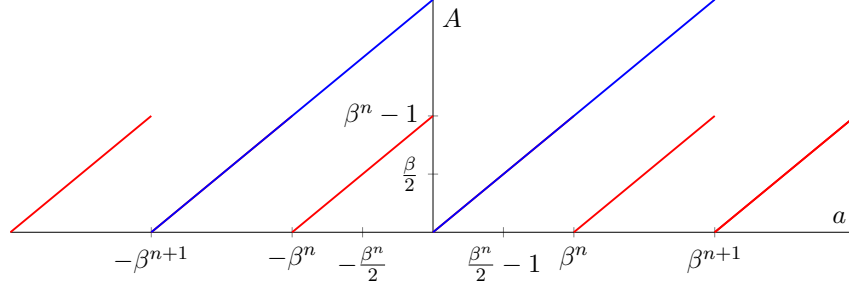
da cui troviamo:

$$= \begin{cases} 0 \cdot \beta^n + A, & 0 \leq a < \frac{\beta^n}{2} \\ \beta^n \cdot (\beta - 1) + a, & -\frac{\beta^n}{2} \leq a < 0 \end{cases}$$

Notiamo che i termini che moltiplicano β^n sono quelli della cifra che vogliamo aggiungere. Possiamo quindi definire la cifra aggiunta:

$$a_n = \begin{cases} 0, & a_{n-1} < \frac{\beta^n}{2} \\ \beta - 1, & a_{n-1} \geq \frac{\beta^n}{2} \end{cases}$$

Graficamente, possiamo pensare all'estensione di campo come una traslazione verso l'alto del lato sinistro dell'intervallo di ordinate, cioè quello che rappresenta gli interi negativi. Più propriamente, se avevamo dato la rappresentazione $|a|_{\beta^n}$ per A , adesso dobbiamo prendere $|a|_{\beta^{n+1}}$ che graficamente dà:



da cui si nota ancora meglio che il lato per interi positivi resta tale, mentre il lato negativo trasla in alto (in rosso si ha $|a|_{\beta^n}$, e in blu $|a|_{\beta^{n+1}}$).

Dal punto di vista della base 2, questo tipo di estensore può essere realizzato semplicemente replicando la $n - 1$ -esima cifra.

17 Lezione del 29-10-24

17.1 Riduzione di campo di interi

Vogliamo creare un circuito che passa dalla rappresentazione A su $n + 1$ cifre di un numero intero a , ad un A^{RID} su n cifre, che rappresenta sempre a . Chiaramente questo non è sempre possibile, e vale soltanto se:

$$a \in \left[-\frac{\beta^n}{2}, \frac{\beta^n}{2} - 1 \right] \subset \left[-\frac{\beta^{n+1}}{2}, \frac{\beta^{n+1}}{2} - 1 \right]$$

Avremo quindi bisogno di un flag di overflow ow , per indicare la non rappresentabilità. Verifichiamo da quanto visto sulle estensioni di campo, che i numeri che rispettano tale proprietà sono i tali per cui $MSD = 0$ e la cifra successiva $a_{n-1} < \frac{\beta}{2}$, e i tali per cui $MSD = \beta - 1$ e la cifra successiva $a_{n-1} \geq \frac{\beta}{2}$. Quindi:

$$ow = 0 \Leftrightarrow \left(a_n = 0 \wedge a_{n-1} < \frac{\beta}{2} \right) \vee \left(a_n = \beta - 1 \wedge a_{n-1} \geq \frac{\beta}{2} \right)$$

Abbiamo sul grafico a farfalla adattato all'estensione su $n + 1$ bit, che queste regole isolano le due sezioni del campo di numeri estesi $\left[-\frac{\beta^{n+1}}{2}, \frac{\beta^{n+1}}{2} - 1 \right]$ che hanno riscontro nel campo ridotto $\left[-\frac{\beta^n}{2}, \frac{\beta^n}{2} - 1 \right]$.

Quindi, in questo caso, il numero a è rappresentabile su n cifre, e si può calcolare il ridotto A^{RID} semplicemente rimuovendo l'ultima cifra, cioè calcolando:

$$A^{RID} = |A|_{\beta^n}$$

Chiamiamo il circuito che riconosce la non riducibilità **circuito di overflow**. In base 2, si ha rispetto alle cifre che $a_{n-1} < \frac{\beta}{2}$ vale se $a_{n-1} = 0$, e viceversa $a_{n-1} \geq \frac{\beta}{2}$ vale se $a_{n-1} = 1$, cioè un numero non è rappresentabile su $n - 1$ bit se le sue due cifre più significative sono uguali. In questo modo il circuito si traduce in un confronto fra le due cifre più significative a_n e a_{n-1} , che si fa con uno XOR.

17.1.1 Moltiplicazione di interi per potenza della base

Vediamo come si realizza un moltiplicatore per $b = \beta \cdot a$, dato $A = (a_n - 1 a_{n-2} \dots a_0)$ rappresentante a su n cifre, B rappresentante b su $n + 1$ cifre.

Vogliamo chiederci prima di tutto se b è sempre rappresentabile da B su $n + 1$ cifre. Questo è vero, in quanto si può dimostrare che:

$$B = \beta \cdot A$$

Questo viene da:

$$L: B = \begin{cases} b = \beta \cdot a, & 0 \leq a < \frac{\beta^n}{2} \\ \beta^{n+1} + b = \beta^{n+1} + \beta \cdot a = \beta \cdot (\beta^n + a), & -\frac{\beta^n}{2} \leq a < 0 \end{cases}$$

dove si nota che a e $\beta^n + a$ valgono A nei rispettivi campi di esistenza. Si applica quindi quanto conosceamo sulle moltiplicazioni per potenze di base su naturali, e il prodotto sta su $n + 1$ cifre.

Per prodotti con potenze ulteriori della base, diciamo β^k , si ha che:

$$b = \beta^k \cdot a \equiv B = \beta^k \cdot A$$

e quindi il risultato starà su $n + k$ cifre.

17.1.2 Divisione per potenza della base

Vogliamo fare l'operazione equivalente per le divisioni, cioè dato A rappresentante a su $n + 1$ cifre, trovare B rappresentante b su n cifre tale per cui $b = \left\lfloor \frac{a}{\beta} \right\rfloor$.

Possiamo dimostrare, come prima, che:

$$B = \left\lfloor \frac{A}{\beta} \right\rfloor$$

Per fare ciò, approfittiamo della proprietà vista sul complemento a radice che ci permette di rappresentare B come $|b|_{\beta^n}$:

$$\begin{aligned} B = \left\lfloor \frac{a}{\beta} \right\rfloor_{\beta^n} &= \left\lfloor \frac{\lfloor a/\beta^{n+1} \rfloor \cdot \beta^{n+1} + |a|_{\beta^{n+1}}}{\beta} \right\rfloor_{\beta^n} = \left\lfloor \lfloor a/\beta^{n+1} \rfloor \cdot \beta^n + \frac{|a|_{\beta^{n+1}}}{\beta} \right\rfloor_{\beta^n} \\ &= \left\lfloor \frac{|a|_{\beta^{n+1}}}{\beta} \right\rfloor_{\beta^n} = \left\lfloor \frac{A}{\beta} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{A}{\beta} \right\rfloor \end{aligned}$$

Abbiamo quindi che possiamo sfruttare quanto avevamo detto sulla divisione per potenze di basi su naturali, e il quoziente sta su n cifre.

Per divisioni con potenze ulteriori della base, diciamo β^k , si ha che:

$$b = \left\lfloor \frac{a}{\beta^k} \right\rfloor \equiv B = \left\lfloor \frac{A}{\beta^k} \right\rfloor$$

e quindi il risultato starà su $n - k$ cifre (o A dovrà stare su $n + k$ cifre rispetto a B , solita cosa).

17.1.3 Note sugli shift logico e aritmetico

Abbiamo visto come sono state definite operazioni diverse per lo shift logico (SH) e aritmetico (SA) in linguaggio assembly. Abbiamo visto adesso, però, che moltiplicazione e divisione per la base si fanno allo stesso modo sia su interi che su naturali.

Possiamo dire che, nel caso dello shift a sinistra, effettivamente le operazioni eseguite dal calcolatore sono uguali sia nel caso di SHL che SAR. Per quanto riguarda lo shift a destra, invece, dobbiamo renderci conto che la $n - 1$ -esima cifra (quella che avevamo escluso dicendo che A su $n + 1$ cifre va in B su n cifre) resterà comunque nella locazione di memoria, cioè non si possono ridimensionare le locazioni. C'è quindi una differenza sul modo in cui si popola l' $n - 1$ -esimo bit entrante: lo shift aritmetico SAL ripete il MSD (cioè estende l'intero su n cifre) e lo shift logico SHL introduce sempre zeri (ergo perde i segni nel caso di a negativi).

17.2 Somma di interi

Dati A e B in base β su n cifre, rappresentanti rispettivamente gli interi a e b , vogliamo calcolare S su n cifre tale S rappresenta s e $s = a + b$. Abbiamo, che la somma potrebbe uscire dall'intervallo di rappresentabilità su n cifre, in quanto sta su:

$$-\beta^n \leq s \leq \beta^n - 2$$

e starebbe al massimo su $n + 1$ cifre:

$$[-\beta^n, \beta^n - 2] \subset \left[-\frac{\beta^{n+1}}{2}, \frac{\beta^n + 1}{2} - 1 \right]$$

Abbiamo quindi bisogno di flag di overflow, ow .

Quando s è invece rappresentabile su n cifre, si ha che:

$$S = |s|_{\beta^n} = |a + b|_{\beta^n} = ||a|_{\beta^n} + |b|_{\beta^n}|_{\beta^n} = |A + B|_{\beta^n}$$

Questa è la proprietà fondamentale per cui si usa il complemento alla radice, e lo passiamo dimostrare da quanto già dimostrato sulle proprietà dell'operatore modulo.

Si può quindi usare un sommatore (che è quindi indifferente per naturali e interi), e l'unico problema resta determinare il flag ow .

L'unica cosa che dovremo aggiungere è un modo per calcolare il flag ow . Per adesso abbiamo dal sommatore l'uscita C_{out} , cioè il riporto della somma: questa non basta da sola a verificare la rappresentabilità del risultato. Notiamo che la somma è sempre rappresentabile estendendo gli ingressi a $n + 1$ bit e riducendo in uscita. Se la riduzione è possibile, ergo le ultime due cifre più significative sono diverse, allora la somma è rappresentabile.

In una base arbitraria, per fare ciò devo effettivamente fare lo XOR delle due cifre, mentre in binario posso sfruttare le proprietà dello XOR, ricordando che internamente al full adder, la cifra in uscita s non è altro che $a \oplus b \oplus c$. Si ha quindi:

$$ow = s_n \oplus s_{n-1} = (a_n \oplus b_n \oplus c_n) \oplus (a_{n-1} \oplus b_{n-1} \oplus c_{n-1}) = 0 \oplus c_n \oplus c_{n-1} = c_n \oplus c_{n-1}$$

Possiamo quindi ricavare il flag ow confrontando il C_{out}^n con l' $n - 1$ -esimo C_{out}^{n-1} : a bit uguali sia ow falso, e viceversa, cioè si usa un singolo XOR

Si ha quindi che la stessa circuiteria esegue somme sia fra interi che fra naturali. In assembly, avevamo visto che la ADD esegue le stesse operazioni, ed è compito del programmatore controllare i flag di carry o di overflow a seconda di ciò che era andato a sommare (interi \rightarrow overflow, naturali \rightarrow carry).

17.3 Sottrazione di interi

La sottrazione fra interi è analoga alla somma: abbiamo sempre due A e B in base β su n cifre, e vogliamo trovare D sempre su n cifre tale per cui fra a , b e d rappresentati vale $a - b = d$. Si ha, prendendo il complemento a radice:

$$D = |d|_{\beta^n} = |a - b|_{\beta^n} = |a - b|_{\beta^n} = ||a|_{\beta^n} - |b|_{\beta^n}| = |A - B|_{\beta^n} = |A + \bar{B} + 1|_{\beta^n}$$

Come prima, abbiamo che il flag ow è dato dallo XOR degli ultimi due prestiti (prima erano riporti). Questo si dimostra analogamente a prima, prendendo il bit esteso:

$$\begin{aligned} D^{EST} &= |d|_{\beta^{n+1}} = |a - b|_{\beta^{n+1}} = ||a|_{\beta^{n+1}} - |b|_{\beta^{n+1}}|_{\beta^{n+1}} \\ &= |A^{EST} - B^{EST}|_{\beta^{n+1}} = |A^{EST} + \overline{B^{EST}} - 1|_{\beta^{n+1}} \end{aligned}$$

cioè si ha che sull' $n + 1$ -esimo bit la differenza è uguale prendendo le estensioni degli ingressi su $n + 1$ bit, ergo la rappresentabilità è data dalla riducibilità del risultato su n bit, e quindi come prima dallo XOR sugli ultimi due prestiti.

17.4 Comparazione di numeri interi

Notiamo che c'è una differenza fra la comparazione fra interi e quella fra naturali. Per quanto riguarda l'uguaglianza $a = b$, abbiamo effettivamente la stessa cosa dei naturali.

Invece, per la minoranza $a < b$, non possiamo più controllare i prestiti uscenti. Dobbiamo quindi guardare il segno del risultato della sottrazione, che deve quindi poter essere svolta: si estende su $n + 1$ cifre e si controlla la n esima cifra del risultato: questa varrà da $\text{sgn}(a - b)$, e quindi da flag di minoranza per $a < b$. Se non si fosse esteso su $n + 1$ cifre, non avremmo potuto essere sicuro di non aver scartato eventuali valori negativi (negli intervalli di non rappresentabilità).

17.5 Moltiplicazione e divisione di interi

Moltiplicazioni e divisioni di interi riescono più facili se prima si converte in rappresentazione modulo e segno: i moduli si moltiplicano o dividono come naturali, e il segno viene determinato dai segni degli operandi attraverso la comune algebra alternante $(+ \cdot + = +, + \cdot - = -, - \cdot - = +)$.

Ricordiamo di aver già visto un circuito di conversione da CR a MS. Ci manca quindi il circuito di conversione opposto:

17.5.1 Conversone da MS a CR

Vogliamo una rete che prende in ingresso il valore assoluto su n cifre ed il segno della rappresentazione di un numero intero, e produce un uscita la sua rappresentazione in complemento alla radice su n cifre. Quest'operazione non è sempre possibile: abbiamo $-(\beta^n - 1) \leq a \leq \beta^n - 1$ in ingresso e $-\frac{\beta^n}{2} \leq a \leq \frac{\beta^n}{2} - 1$ in uscita.

Se l'operazione è fattibile, avremo che:

$$A = |a|_{\beta^n} = \begin{cases} |ABS_a|_{\beta^n}, & a \geq 0 \\ | - ABS_a|_{\beta^n}, & a < 0 \end{cases} = \begin{cases} |ABS_a|_{\beta^n}, & a \geq 0 \\ |\overline{ABS_a} + 1|_{\beta^n}, & a < 0 \end{cases}$$

Quindi si usa un multiplexer, con il segno della rappresentazione MS a variabile di controllo, che distingue fra la rappresentazione stessa ABS_a e il suo complemento (calcolato con un circuito di inversione e incremento).

Per quanto riguarda l'overflow, abbiamo invece che ow è impostato in due casi:

- Siamo fuori dal campo di rappresentabilità: questo si verifica quando $\text{abs}(a) > \frac{\beta^N}{2}$, cioè si è passati oltre agli $n - 1$ bit su cui dobbiamo ridurre il modulo;
- Si è sull'unico valore positivo che non ha rappresentazione con $a = \frac{\beta^n}{2}$ e il bit di segno vale 0, cioè a è uguale al massimo rappresentabile $\frac{\beta^n}{2} - 1 + 1$.

Questo si sintetizza nella regola, espressa attraverso l'operatore ternario:

$$\text{ow} = \left(\left(\text{abs}(a) > \frac{\beta^n}{2} \right) \vee \left(\left(\text{abs}(a) = \frac{\beta^n}{2} \right) \wedge (\text{sgn}(a) = 1) \right) \right) ? 1 : 0$$

Occorre stare attenti fra la funzione segno e il valore del bit di segno, in quanto vale, come per la convenzione solita sul bit di segno:

$$\begin{cases} \text{sgn}(a) = 1 \Rightarrow \text{ow} = 0 \\ \text{sgn}(a) = -1 \Rightarrow \text{ow} = 1 \end{cases}$$

Riassumiamo brevemente come si svolge la conversione fra complemento a radice e rappresentazione modulo e segno. Abbiamo sostanzialmente che, salvo il caso della conversione da MS a CR dove si può incappare in non rappresentabilità, la conversione da CR a MS e viceversa si fa sempre con un multiplexer che distingue fra la rappresentazione A presa così com'è e il suo complemento calcolato con inversione incremento. In particolare:

- Nel caso **CR a MS**, si prende A se per la cifra più significativa a_{n-1} vale $a_{n-1} \geq \frac{\beta}{2}$, altrimenti il complemento \bar{A} : questo significa che il multiplexer è pilotato dalla MSD;
- Nel caso **MS a CR**, si prende A se il bit di segno non è impostato, e il complemento \bar{A} altrimenti: questo significa che il multiplexer è pilotato dal bit di segno.

17.5.2 Moltiplicazione

Per svolgere la moltiplicazione vogliamo quindi trasformare due ingressi A e B , rappresentanti gli interi a e b su n e m bit, nella loro rappresentazione MS come:

$$a \Rightarrow \text{sgn}(a), \text{abs}(a), \quad a \Rightarrow \text{sgn}(a), \text{abs}(a),$$

dove i segni stanno su un bit e i moduli su n e m bit.

Abbiamo che la moltiplicazione dei moduli di A e B è sempre rappresentabile, in quanto:

$$\text{sgn}(A) \cdot \text{sgn}(B) \leq \frac{\beta^n}{2} \cdot \frac{\beta^m}{2} = \frac{\beta^{n+m}}{2}$$

Osserviamo quindi che il prodotto intero p è:

$$p = \begin{cases} \text{abs}(a) \cdot \text{abs}(b), & \text{sgn}(a) = \text{sgn}(b) \\ -\text{abs}(a) \cdot \text{abs}(b), & \text{sgn}(a) \neq \text{sgn}(b) \end{cases}$$

ergo:

$$\begin{cases} \text{abs}(p) = \text{abs}(a) \cdot \text{abs}(b) \\ \text{sgn}(p) = \text{sgn}(a) \cdot \text{sgn}(b) \end{cases}$$

cioè quanto avevamo detto sulla rappresentazione modulo e segno per i prodotti.

Si ha quindi che il moltiplicatore fra interi si realizza convertendo gli ingressi da CR a MS, mandando i valori assoluti ad un moltiplicatore per naturali, e ricavando il segno del successivo convertitore da MS a CR (che ci darà il risultato) da uno XOR fra i segni degli MS in ingresso. L'overflow non è considerato in quanto non potrà mai verificarsi (da sopra).

17.5.3 Divisione

Vogliamo calcolare, dati due naturali A e B rappresentanti gli interi a e b su n e m cifre, il quoziente Q e il resto R , rispettivamente su n e m cifre, tali che:

$$a = q \cdot b + r$$

Per svolgere questa divisione abbiamo bisogno di una riformulazione del teorema della divisione con resto che funzioni sull'anello \mathbb{Z} , in quanto adesso la semplice $a = q \cdot b + r$ con $r < b$ ammette infiniti valori di r (che può essere negativo). Decidiamo quindi di imporre:

- Il quoziente q è positivo se i segni di a e b sono concordi, e negativo viceversa;
- r e b sono uguali in segno.

Da qui si ha la proprietà più importante, cioè:

$$\begin{cases} \text{abs}(r) < \text{abs}(b) \\ \text{sgn}(r) = \text{sgn}(b) \end{cases}$$

Si verifica che questo significa che vogliamo i risultati che ci aspettiamo dalla comune divisione fra interi.

Abbiamo quindi, pensando in modulo e segno, che:

$$a = q \cdot b + r$$

diventa:

$$\text{sgn}(a) \cdot \text{abs}(a) = q \cdot \text{sgn}(b) \cdot \text{abs}(b) + \text{sgn}(r) \cdot \text{abs}(r)$$

Ma se avevamo $\text{sgn}(a) = \text{sgn}(r)$, allora:

$$\text{abs}(a) = (q \cdot \text{sgn}(b) \cdot \text{sgn}(a)) \cdot \text{abs}(b) + \text{abs}(r)$$

Si nota quindi che $q \cdot \text{sgn}(b) \cdot \text{sgn}(a)$ è semplicemente $\text{abs}(q)$, ergo si può rendere la divisione fra interi come la divisione fra i moduli di quegli interi, prendendo il segno separatamente (che è quello che avevamo fatto per la moltiplicazione).

Resta da trovare il valore del flag di non fattibilità no_div . Abbiamo, dal divisore fra naturali, che la rappresentabilità è data da:

$$\text{abs}(a) < \beta^n \cdot \text{abs}(q)$$

Questa condizione non basta, in quanto non si è ancora assicurato che l'intero in uscita sia rappresentabile su n cifre. Si prende quindi anche il flag di overflow ow , ricavato dalla conversione finale da MS a CR, e si mette a OR con il flag no_div che abbiamo ricavato dal circuito divisore.

18 Lezione del 30-10-24

18.1 La funzione di memoria

Finora abbiamo visto reti combinatorie, cioè **reti prive di memoria**, dove lo stato di uscita ad un istante dipende solo dallo stato di ingresso corrente. Nelle **reti sequenziali**, invece, l'uscita dipende dalla sequenza degli stati di ingresso visti dalla rete fino a quel momento. Questa memoria si implementa attraverso **anelli di retroazione**.

Prendiamo ad esempio un buffer con un anello di retrazione, cioè una linea che porta la sua uscita al suo ingresso, e che estrae in uscita q .

Questo potrà quindi esistere in due situazioni di stabilità:

- L'uscita vale 0, e va in ingresso al buffer, dove si **rigenera** (o si *autosostiene*);
- L'uscita vale 1, e va in ingresso al buffer, dove ancora una volta si rigenera e mantiene il suo valore.

La presenza del buffer è fondamentale: mantiene l'uscita q a 0 e 1, e soprattutto ci assicura di poter associare a quel punto della rete uno stato logico.

Il problema di una rete di questo genere è che è fondamentalmente inutile: non si può controllare lo stato di stabilità del buffer, e quindi non si possono immagazzinare bit diversi a tempi diversi.

18.1.1 Uscita negata

Realizziamo allora il nostro buffer, sostituendolo con due porte NOR disposte come invertitori (quindi un doppio invertitore, che equivale al buffer). Si ha che fra le due porte NOR abbiamo il valore complementato del buffer, cioè 1 a 0 e 0 a 1. Possiamo quindi dotare la rete di un'ulteriore uscita q_N , che equivale appunto alla negazione di q . Per questo motivo, avevamo detto, nella valutazione dei livelli di logica si ignorano le porte NOT: solitamente abbiamo già un valore negato a disposizione dai registri.

18.1.2 Stato all'accensione

Ora, se all'accensione q e q_N sono discordi, la rete si troverà già in uno degli stati stabili, e lì resterà. In caso contrario, se sono concordi, teoricamente ciascuna delle due uscite dovrebbe oscillare all'infinito, con un periodo pari al doppio del tempo di risposta delle porte (in due passaggi si completa un ciclo, cioè l'ingresso della prima porta torna al neutro). Nella pratica, la rete si stabilizza, in quanto il tempo delle porte sarà necessariamente diverso e quindi si creerà prima o poi una condizione analoga a prima, dove le uscite sono discordi e la rete resta stabile.

18.1.3 Latch SR

Vediamo quindi come rendere pilotabile lo stato del circuito. Introduciamo due ingressi negli input (finora duplicati) delle porte NOR: in entrata alla prima porta avremo il comando S , per SET, e in entrata alla seconda porta avremo il comando R , per RESET. Questi ingressi sono *attivi alti*, cioè i comandi S e R vengono dati quando le rispettive entrate sono in tensione. Chiamiamo questa rete **latch SR**, a volte impropriamente detta *flip-flop SR*.

Vediamo il funzionamento della rete nei diversi casi di attivazione degli ingressi:

- $S = 1, R = 0$: si ha che la prima NOR ha un ingresso 1, ergo mette l'uscita a 0. Quindi, la seconda NOR ha un ingresso 0, ergo mette l'uscita a 1. Ci troviamo nella configurazione stabile $q = 1, q_N = 0$, cioè abbiamo memorizzato un bit.
- $S = 0, R = 1$: si ha che la seconda NOR ha un ingresso 1, ergo mette l'uscita a 0. Quindi, la prima NOR ha un ingresso 0, quindi mette l'uscita a 1. Ci troviamo nella configurazione stabile $q = 0, q_N = 1$, cioè abbiamo resettato un bit.
- $S = 0, R = 0$: l'uscita della prima NOR vale 0 se $q = 1$, e 1 se $q = 0$, quindi q_N dà semplicemente \bar{q} e viceversa, e la rete conserva il valore che aveva precedentemente. Questo comportamento rende la rete **sequenziale**: nello stato di **conservazione**, cioè quello a ingressi disattivati, si ha che la rete rimane nello stato stabile S_0 o S_1 nel quale si era portata in un momento precedente nella sequenza di stati. Si può anche dire che la rete **ricorda** l'ultimo SET o RESET ricevuto. Comunque, è una rete **asincrona**, in quanto l'uscita si aggiorna subito rispetto agli ingressi (e non in sincronia ad un clock).
- $S = 1, R = 1$: semanticamente, questa istruzione non ha molto significato. In uno stato di pilotaggio corretto, diciamo che questo stato **non è permesso**. Se si venisse a verificare, avremmo che alla prima porta un'entrata è 1, e quindi l'uscita è 0. Alla seconda porta, quindi, un'uscita sarà 1, e avremo di nuovo uscita 0. Forzeremmo quindi la rete in uno stato $q = 0, q_N = 0$, che non significa nulla dal punto di vista della rappresentazione in bit della memoria.

18.1.4 Tabella di applicazione

Per descrivere il comportamento delle reti con memoria usiamo le **tabelle di applicazione**. Queste rappresentano, a sinistra, il valore attuale della variabile e il valore successivo che si vuole questa assuma, e a destra il comando necessario perchè l'uscita passi dal valore attuale a quello successivo. Nel caso del latch SR, si ha che questa è:

q	q'	s	r
0	0	0	-
0	1	1	0
1	0	0	1
1	1	-	0

18.1.5 Regole di pilotaggio

Avevamo visto le regole per le reti combinatorie:

- Siamo in **pilotaggio in modo fondamentale**: si cambiano gli ingressi solo quando la rete è a regime;
- Gli stati di ingresso consecutivi devono essere adiacenti (per evitare *race condition*).

Vogliamo definire una serie di regole simili per le reti sequenziali. Abbiamo che la regola di **pilotaggio in modo fondamentale** va rispettata comunque: la rete avrà un certo **tempo di attraversamento** di cui tenere conto. Anche la seconda regola, degli **stati di ingressi consecutivi adiacenti**, è fondamentale: se non viene rispettata, si possono presentare in ingresso stati transitori spuri, e l'evoluzione delle uscite diventa imprevedibile.

Nel latch SR, però, vale che questa legge può essere violata: cioè il latch SR è robusto nei confronti di pilotaggi scorretti. Questo è il punto di forza che lo rende la rete alla base dei registri e di tutti gli elementi di memoria.

18.1.6 Lo stato iniziale

Abbiamo detto che l'SR è l'elemento alla base dei circuiti di memoria. Si ha, però, che all'accensione il bit contenuto nell'SR è **casuale** (da quello che avevamo visto dalle modalità di pilotaggio). All'accensione di un calcolatore, si ha che alcuni elementi possono avere un valore casuale (ad esempio la RAM), altri no (ad esempio l'istruzione pointer). Si definisce quindi una **fase di reset**, distinta dalla **fase operativa**, cioè quella di operatività standard. Nella fase di reset si inizializzano gli elementi di memoria: notiamo che questo reset non corrisponde al comando R, di RESET, che diamo ai latch. In generale non è vero che gli elementi di memoria contengono tutti zero all'accensione del calcolatore.

Abbiamo che la circuiteria di trigger è realizzata attraverso un circuito RC, fra l'interruttore ON/OFF e il pulsante di reset, con $\tau = R \cdot C \approx 0 \mu s$, dove si collega il nodo fra R e C ad un trigger di Schmitt. Il trigger di Schmitt effettivamente "quantizza" la tensione, cioè scatta ad un valore 1 di tensione solamente quando la tensione in entrata è maggiore di una certa soglia. Abbiamo quindi che, spostando l'interruttore nella posizione ON, il circuito raggiunge il regime in un tempo $\approx \tau$, e quindi il trigger va a 1 in un tempo $\approx \tau$. Lo stesso quando si preme il pulsante di reset, il condensatore C si scarica e dobbiamo riportare nuovamente il circuito a regime, per cui abbiamo un istante $\approx \tau$ dove il trigger è a 0.

Abbiamo che l'uscita di questa rete va ad un ingresso detto /reset (che ricordiamo è distinto dai singoli reset dei latch SR), che è *attivo basso*: cioè nella fase iniziale dell'accensione, e ad ogni pressione successiva del pulsante reset, si ha che dal trigger esce per un tempo $\approx \tau$ il comando di /reset.

Per implementare effettivamente il meccanismo di reset si dota il latch SR di due ingressi aggiuntivi: /preset e /preclear, entrambi attivi bassi. Si distinguono quindi i seguenti casi:

- /preset = /preclear = 1: la rete si comporta come un latch SR normale;
- /preset = 0: la rete si comporta nello stato S_1 (indipendentemente dallo stato di s e r);
- /preclear = 0: la rete si comporta nello stato S_0 (indipendentemente dallo stato di s e r);
- /preset = /preclear = 0: abbiamo, come nel caso già visto dei semplici ingressi Set e Reset, che questo stato non è permesso, e quindi non è interessante conoscere il funzionamento della rete in tale stato.

Abbiamo quindi che per inizializzare un latch SR a 1 si porta /preset a /reset, e /preclear al Vcc. Viceversa, per inizializzare il latch a 0 si porta /preset al Vcc e /preclear a /reset.

Vogliamo quindi modificare la sintesi del latch SR: conviene unirlo ad una rete combinatoria, che ha per ingresso S, R, /preset e /preclear, e in uscita z_r e z_s (che andranno in ingresso al latch vero e proprio).

Abbiamo, dalla sintesi con le mappe di Karnaugh, posto $X_1 X_0 \leftarrow \text{/preset/preclear}$ e $X_3 X_2 \leftarrow SR$:

		X_1X_0			
		00	01	11	10
X_3X_2	00	–	10	00	01
	01	–	10	01	01
	11	–	10	10	01
	10	–	10	10	01

Da cui si ricava la sintesi:

$$\begin{cases} z_s = \overline{\text{preset}} + (\text{preclear} \cdot s) \\ z_r = \overline{\text{preclear}} + (\text{preset} \cdot r) \end{cases}$$

A questo punto, visto che il latch SR è realizzato a porte NOR, possiamo semplificare gli OR e i NOR in cascata: se assumiamo una NOR come una OR in serie ad una NOT, si ha che due OR equivalgono a una singola OR, ergo si possono mandare le uscite delle reti combinatorie appena sintetizzate direttamente ai NOR del latch SR, rimuovendo le OR che avremmo normalmente introdotto in una sintesi SP.

18.2 Tabelle e grafi di flusso

Le RSA (Reti Sequenziali Asincrone) si descrivono usando **tabelle di flusso** e **grafi di flusso**. Una tabella di flusso è una tabella che descrive come si evolvono lo stato interno e l'uscita al variare degli stati di ingresso. Ad esempio, per un latch SR:

	00	01	11	10	q
s_0	s_0	s_0	–	s_1	0
s_1	s_1	s_0	–	s_1	1

Si ha che nella tabella, le righe rappresentano gli stati e le colonne i possibili comandi in entrata: all'intersezione fra uno stato e un comando si ha lo stato successivo. Inoltre, l'ultima colonna indica il valore effettivo delle uscite in ogni stato (qui si è riportato solo q).

Un formalismo del tutto identico è quello del grafo di flusso: si prendono gli stati come nodi, e si disegnano archi (diretti) etichettati con gli stati di ingresso.

Questi strumenti sono utili per la descrizione e la verifica (in questo caso, sotto **ispezione, statica**) delle reti logiche. Nel caso di reti sequenziali, la verifica **dinamica** si fa attraverso un **diagramma di temporizzazione**:

1. Si decide uno stato iniziale;
2. Si attribuiscono valori agli ingressi nel tempo;
3. Si osserva l'evoluzione temporale della rete.