MAP-311 Projet Scilab
Equations dirigées par un Processus de Poisson

Valentin LAPPAROV
Sergey PAVLOV

Juin 2016

Processus de Poisson et processus de Poisson composés

1.1 Processus de Poisson

T.1

☐ Montrons par recurrence: $f_n(x) = \frac{\lambda^n}{(n-1)!} x^{n-1} e^{-\lambda x} \mathbf{1}_{\mathbb{R}^+}(x)$
Pour $n = 1, T_1 = \frac{\lambda^1}{(1-1)!} x^{1-1} e^{-\lambda x} \mathbf{1}_{\mathbb{R}^+}(x) = \lambda e^{-\lambda x} \mathbf{1}_{\mathbb{R}^+}(x)$.
Soit c'est vrai pour k. Montrons pour $k+1$.
$T_{k+1} = T_k + \tau_{k+1}$. Par définition, T_k et τ_{k+1} sont indépendents. Utilisons la formule de la convolution pour trouver la dénsité $f_{n+1}(x)$ de leur somme :

$$f_{n+1}(u) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_n(x) f(u-x)\, dx = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\lambda^n}{(n-1)!} x^{n-1} e^{-\lambda x} \mathbf{1}_{\mathbb{R}^+}(x)) \lambda e^{-\lambda u - x} \mathbf{1}_{\mathbb{R}^+}(u-x)\, dx =$$

$$= \int\limits_0^u \frac{\lambda^{n+1}}{(n-1)!} x^{n-1} e^{-\lambda u}\, dx = \frac{\lambda^{n+1}}{(n-1)!} e^{-\lambda u} \int\limits_0^u x^{n-1}\, dx = \frac{\lambda^{n+1}}{n!} e^{-\lambda u} u^n,$$

pour $u \geq 0$ et 0 sinon.
Alors,

$$f_{n+1}(x) = \frac{\lambda^{n+1}}{n!} e^{-\lambda x} x^n \mathbf{1}_{\mathbb{R}^+}(x). \blacksquare$$

T.2

☐ Utilisons la formule des probabilités totales:

$$\mathbb{P}\{N_t = n\} = \mathbb{P}\{T_n \leq t \leq T_n + \tau_{n+1}\} =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{P}\{T_n \leq t \leq T_n + \tau_{n+1} | \tau_{n+1} \in (x, x+dx)\} \mathbb{P}\{\tau_{n+1} \in (x, x+dx)\}\, dx =$$

$$= \int\limits_0^t dx f(x) \int\limits_{t-x}^t f_n(y)\, dy + \int\limits_t^{+\infty} dx f(x) \int\limits_0^t f_n(y)\, dy =$$

/*on change les limites de la premiere integrale*/

$$= \int_0^t f_n(y)dy \int_{t-y}^t f(x)dx + \int_t^{+\infty} dx f(x) \int_0^t f_n(y)\,dy = \int_0^t dy f_n(y)(e^{-\lambda(t-y)} - e^{-\lambda t} + e^{-\lambda t}) =$$

$$= \int_0^t \frac{\lambda^n}{(n-1)!} y^{n-1} e^{-\lambda t} dy = e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!}.\blacksquare$$

T.3

Montrons que le vecteur aléatoire $U^* := (U_{(1)}, \dots U_{(n)})$ a une densité que l'on calculera.
Pour chaque $\sigma \in \pi_n$ - groupe des permutations $\{1, 2, \dots n\}$ on peut associer l'ensemble $E(\sigma)$ des vecteurs $(x_1, x_2, \dots x_n) \in \mathbf{R}^n$ tels que $x_{\sigma(1)} < x_{\sigma(2)} < \cdots < x_{\sigma(n)}$. Or $\mathbf{P}(x_{\sigma(i)} = x_{\sigma(j)}) = 0$, on peut considérer qu'il n'y a pas de vecteurs qui ont au moins deux composantes égales et donc $E(\sigma)$ sont disjoints.
Soit $\phi_\sigma : E(\sigma) \to E$ telle que $\phi(x_1, x_2, \dots x_n) = (x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \dots, x_{\sigma(n)})$, alors $\phi(U) = U^*$. On voit que ϕ_σ est linéaire et le déterminant de matrice de permutation est ± 1. Le jacobien de ϕ est donc égal a 1.
Alors, pour toute permutation σ et tout borélien B on a:

$$\int_{\phi_\sigma^{-1}(B)} f_U(x)dx = \int_B f_U(\phi_\sigma^{-1}(y))dy$$

Or, si $\tau = \sigma^{-1}$, pour $y = (y_1, \dots y_n)$, on a:

$$f_U(\phi_\sigma^{-1}(y)) = f(y_{\tau(1)}) \dots f(y_{\tau(n)}) = f(y_1) \dots f(y_n) = f_U(y)$$

et donc

$$\int_{\phi_\sigma^{-1}(B)} f_U(x)dx = \int_B f_U(y)dy$$

.
Comme $\mathbf{P}_{U^*}(B) = \mathbf{P}(U^* \in B) = \mathbf{P}(\phi(U) \in B) = \mathbf{P}_U(\phi \in B)$, on en deduit :

$$\mathbf{P}_{U^*}(B) = \int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{1}_{\phi\in B} f_U(x)dx = \sum_\sigma \int_{E(\sigma)} \mathbf{1}_{\phi \in B} f_U(x)dx = \sum_\sigma \int_{\phi_\sigma^{-1}(B)} f_U(x)dx = n! \int_B f_U(y)dy,$$

ce qui montre que la densité de U^* est $n! f(x_1) \dots f(x_n)$ sur E et 0 ailleurs.
Alors, la densité de vecteur $(U_{(1)}, \dots, U_{(n)})$:

$$f_{U_{(1)},\dots,U_{(n)}}(u_1, \dots, u_n) = \frac{n!}{t^n} \mathbf{1}_{\{0 \leqslant u_1 \leqslant u_2 \leqslant \dots \leqslant u_n \leqslant t\}}$$

T.4

□ Soit $T_n = \tau_1 + \cdots + \tau_n$
Nous cherchons la densité de vecteur aléatoire $(T_1, \dots, T_n)$. Nous considérons une fonction h continue bornée sur $\mathbb{R}^n$, et nous calculons

$$\mathbf{E}h(T_1, \dots, T_n) = \mathbf{E}h(\tau_1, \tau_1 + \tau_2, \dots, \tau_1 + \cdots + \tau_n) =$$

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} h(x_1, x_1 + x_2, \dots, x_1 + \cdots + x_n) f_{\tau_1, \dots, \tau_n}(x_1, \dots, x_n)\, dx_1 \dots dx_n =$$

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} h(x_1, x_1 + x_2, \dots, x_1 + \cdots + x_n) f_{\tau_1}(x_1), \dots, f_{\tau_n}(x_n)\, dx_1 \dots dx_n =$$

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} h(u_1, u_2, \dots, u_n) f_{\tau_1}(u_1) f_{\tau_2}(u_2 - u_1), \dots f_{\tau_n}(u_n - u_{n-1})\, du_1 \dots du_n =$$

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} h(u_1, u_2, \dots, u_n) \lambda e^{-\lambda u_1} \mathbf{1}_{\{u_1 \geqslant 0\}} \lambda e^{-\lambda(u_2 - u_1)} \mathbf{1}_{\{u_2 - u_1 \geqslant 0\}} \dots \lambda e^{-\lambda(u_n - u_{n-1}) \mathbf{1}_{\{u_n - u_{n-1} \geqslant 0\}}}\, du_1 \dots du_n =$$

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} h(u_1, u_2, \dots, u_n) \lambda^n e^{-\lambda u_n} \mathbf{1}_{\{0 \leqslant u_1 \leqslant u_2 \leqslant \cdots \leqslant u_n\}}\, du_1 \dots du_n$$

Alors, la densité de vecteur $(T_1, \dots, T_n)$ est

$$f_{T_1, \dots, T_n}(u_1, \dots, u_n) = \lambda^n e^{-\lambda u_n} \mathbf{1}_{\{0 \leqslant u_1 \leqslant u_2 \leqslant \cdots \leqslant u_n\}}$$

La condition $\{N_t = n\}$ implique $T_n \leqslant t$ et nous connaissons que $\mathbb{P}(N_t = n) = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}$
En plus on a calcule la densité de vecteur $(U_{(1)}, \dots, U_{(n)})$:

$$f_{U_{(1)}, \dots, U_{(n)}}(u_1, \dots, u_n) = \frac{n!}{t^n} \mathbf{1}_{\{0 \leqslant u_1 \leqslant u_2 \leqslant \cdots \leqslant u_n \leqslant t\}}$$

Mais la loi conditionnelle $(T_1, \dots, T_n)$ sachant $N_t = n$ est la probabilité

$$\mathbb{P}(T_1, \dots, T_n | N_t = n) = \frac{\mathbb{P}(T_1, \dots, T_n, N_t = n)}{\mathbb{P}(N_t = n)},$$

d'où on peut conclure que la loi conditionnelle $(T_1, \dots, T_n)$ sachant $N_t = n$ est la meme que celle de $(U_{(1)}, \dots, U_{(n)})$.■

1.2 Introduction à l'intégrale stochastique par rapport à un processus de Poisson

T.5

□ Soit $f(s) = \sum_{i=0}^{K-1} a_i \mathbf{1}_{]t_i,t_{i+1}]}(s)$. On pose:

$$I_e(f) = \sum_{i=0}^{K-1} a_i(\tilde{N}_{t_{i+1}} - \tilde{N}_{t_i})$$

$I_e(f)$ est une variable aléatoire centrée:

$$\mathbf{E}I_e(f) = \mathbf{E}\sum_{i=0}^{K-1} a_i(\tilde{N}_{t_{i+1}} - \tilde{N}_{t_i}) = \sum_{i=0}^{K-1} a_i(\mathbf{E}\tilde{N}_{t_{i+1}} - \mathbf{E}\tilde{N}_{t_i})$$

Mais $\mathbf{E}\tilde{N}_t = \mathbf{E}N_t - \lambda t = \lambda t - \lambda t = 0 \Rightarrow \mathbf{E}I_e(f) = 0$
En plus

$$\mathbf{E}I_e(f)^2 = \lambda\|f\|_2^2.$$

On a:

$$\mathbf{E}I_e(f)^2 = \mathbf{E}(\sum_{i=0}^{K-1} a_i(\tilde{N}_{t_{i+1}} - \tilde{N}_{t_i}))^2 =$$

$$\sum_{i=0}^{K-1} \mathbf{E}(a_i(\tilde{N}_{t_{i+1}} - \tilde{N}_{t_i}))^2 + 2\sum_{0\leqslant i<j\leqslant K-1} \mathbf{E}(a_i(\tilde{N}_{t_{i+1}} - \tilde{N}_{t_i}))(a_j(\tilde{N}_{t_{j+1}} - \tilde{N}_{t_j})) =$$

$$\sum_{i=0}^{K-1} a_i^2(\mathbf{E}\tilde{N}_{t_{i+1}}^2 - 2\mathbf{E}\tilde{N}_{t_{i+1}}\tilde{N}_{t_i} + \mathbf{E}\tilde{N}_{t_i}^2) + 2\sum_{0\leqslant i<j\leqslant K-1} \mathbf{E}(a_i(\tilde{N}_{t_{i+1}} - \tilde{N}_{t_i})a_j)\mathbf{E}(\tilde{N}_{t_{j+1}} - \tilde{N}_{t_j}) =$$

$$\sum_{i=0}^{K-1} a_i^2(\mathbf{E}\tilde{N}_{t_{i+1}}^2 + \mathbf{E}\tilde{N}_{t_i}^2) = \lambda\sum_{i=0}^{K-1} a_i^2(t_{i+1} - t_i) = \lambda\sum_{i=0}^{K-1}\int_{t_i}^{t_{i+1}} a_i^2 ds =$$

$$\lambda\int_0^\infty (a_0^2\mathbf{1}_{]t_0,t_1]}(s) + \cdots + a_{K-1}^2\mathbf{1}_{]t_{K-1},t_K]}(s))ds = \lambda\int_0^\infty (\sum_{i=0}^{K-1} a_i\mathbf{1}_{]t_i,t_{i+1}]}(s))^2 ds =$$

$$\lambda\int_0^\infty f^2(s)ds = \lambda\|f\|_2^2.\blacksquare$$

T.6

□ $\mathcal{H}$ est dense dans $L^2(\mathbb{R}^+, ds)$ muni de la norme $\|f\|_2$:

$$\forall f \in L^2(\mathbb{R}^+, ds) \exists \{f_n\} \in \mathcal{H} : \|f - f_n\|_2 \to 0, n \to \infty$$

Pour chaque $f \in \mathcal{H}$ on pose:

$$\int_0^\infty f(t) d\tilde{N}(t) dt := \sum_{i=0}^{\infty} a_i (\tilde{N}_{t_{i+1}} - \tilde{N}_{t_i})$$

La suite $S_k := \sum_{i=0}^{K-1} a_i (\tilde{N}_{t_{i+1}} - \tilde{N}_{t_i})$ est une suite de Cauchy:

$$\mathbf{E}(S_l - S_k)^2 = \mathbf{E}(\sum_{i=k}^{l-1} a_i (\tilde{N}_{t_{i+1}} - \tilde{N}_{t_i}))^2 = \lambda \sum_{i=k}^{l-1} \mathbf{E}(a_i^2)(t_{i+1} - t_i) = \lambda \int_{t_k}^{t_l} \mathbf{E}(f(s)^2) ds \to 0, l, k \to \infty$$

Or $\int_0^\infty f^2(s) ds < +\infty$ et par completude de L^2, la suite $S_k := \sum_{i=0}^{K-1} a_i (\tilde{N}_{t_{i+1}} - \tilde{N}_{t_i})$ converge. Donc, $\forall f \in L^2(\mathbb{R}^+, ds)$ on peut definir

$$I(f) := \lim_{n \to \infty} \int_0^\infty f_n(t) d\tilde{N}(t) dt,$$

où $\{f_n\} \in \mathcal{H} : \|f - f_n\|_2 \to 0, n \to \infty$.
Par la théorème de convergence dominée la définition est correcte. ■

T.7

□ En utilisant le fait que $\mathbf{E} I_e(f) = 0$ et la théorème de convergence dominée:

$$\lim_{n \to \infty} \mathbf{E} I_e(f) = \mathbf{E} I(f)$$

on peut conclure que

$$\mathbf{E} I(f) = 0, \forall f \in L^2(\mathbb{R}^+, ds). ■$$

.

1.3 Résolution numérique d'équations différentielles stochastiques dirigées par un processus de Poisson

T.8

□ Supposons que les moments des sauts du processus N_t soient $T_1, T_2, \ldots$. Entre 2 sauts le prosessus de poisson ne se change pas. Donc entre 2 sauts(soit $t \in (T_i, T_{i+1})$) on a: $d\tilde{N}_t = -\lambda dt$. On obtient l'equation differentielle $X_t' = -\lambda\sigma X_t$, avec la condition initialle $X_{T_i^+}$, qui nous donne la solution $X_t = X_{T_i^+} e^{-\lambda\sigma(t-T_i^+)}, \forall t \in (T_i, T_{i+1})$.
Au cas où t correspond le moment d'un saut(soit t = T_i), le processus X aussi fait un saut tel que $dX_t = X_{t^+} - X_{t^{t_-}} = \sigma X_{t_-}(dN - \lambda dt)$. En vue que les intervals entre les sauts du prossesus de Poisson sont dirigés par les variables aléatoires indépendantes, $dN = 1, dt = 0$ et $X_{t^+} = X_{t^{t_-}} + \sigma X_{t_-} \Longrightarrow X_{t^+} = (\sigma+1)X_{t_-}$.
Maintenant on peut conclure, que pour un valeur $t \in (T_i, T_{i+1}]$,

$$X_t = xe^{-\lambda\sigma(t-T_i)} \prod_{k=0}^{i-1} e^{-\lambda\sigma(T_{k+1}-T_k)}(\sigma+1)^i = xe^{-\lambda\sigma t}(\sigma+1)^{N_t}.$$

$$\mathbb{E}X_t = xe^{-\lambda\sigma t} \sum_{k=0}^{+\infty} (\sigma+1)^k e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!} = xe^{-\lambda(\sigma+1)t} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(\lambda t(\sigma+1))^k}{k!} = xe^{-\lambda(\sigma+1)t} e^{\lambda(\sigma+1)t} = x. \blacksquare$$

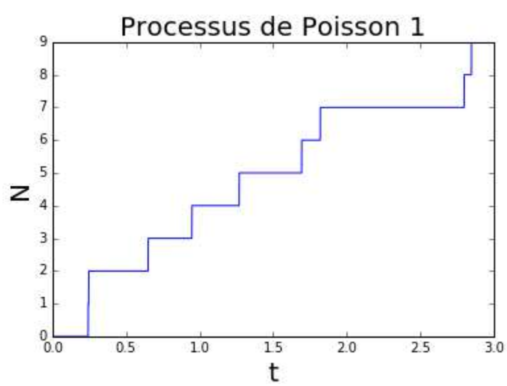
Simulation

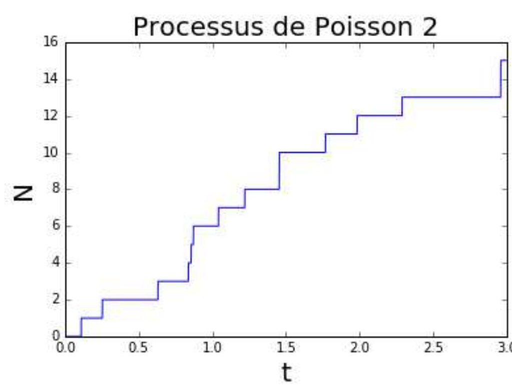
S.1

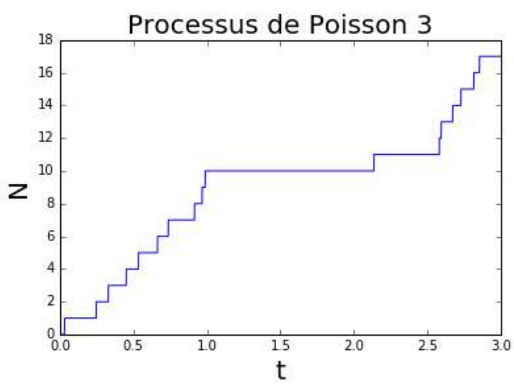
Presentons un algorithme possible pour simulation d'un processus de Poisson:

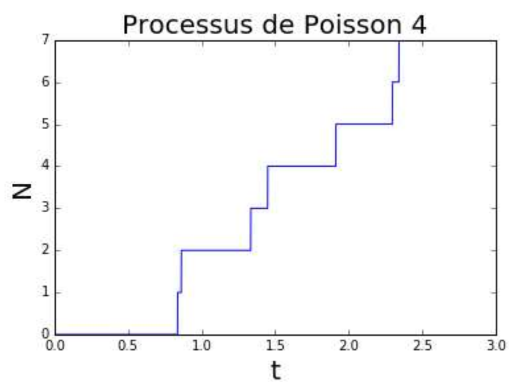
$T := 0;$
$N := 0;$
$t := 3;$
$\lambda := 4;$
repeat
  $T := T + \tau_i;$ {où τ_i est de loi exponentielle de parametre λ}
  $N := N + 1;$
until $T \geq t;$

En sachant les moments des sauts du processus, on sait le processus à n'importe quel moment. Presentons les graphiques obtenus:



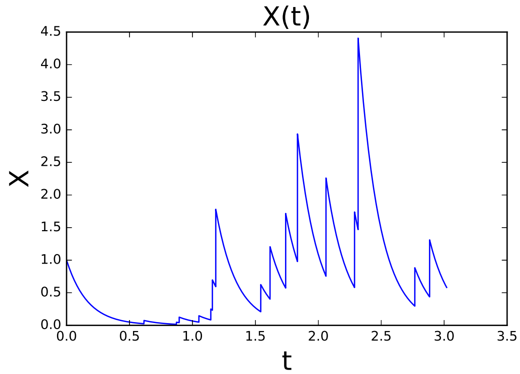


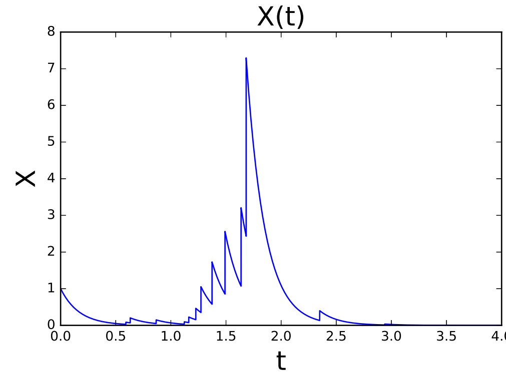


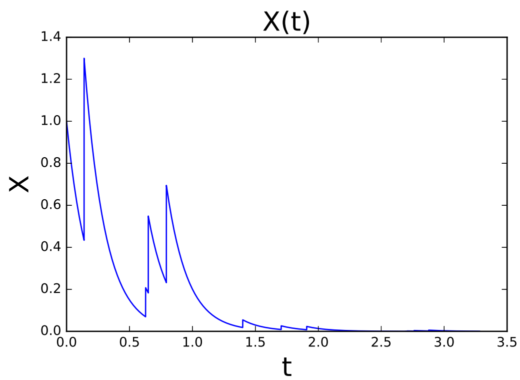


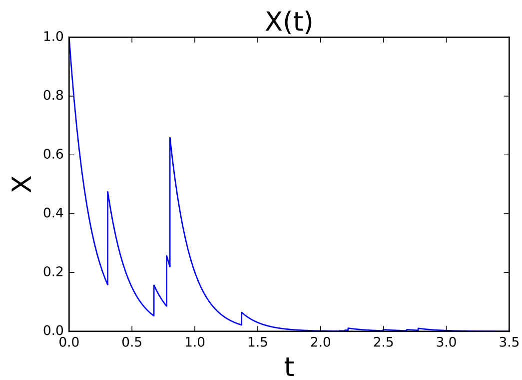
S.2

L'algorithm pour faire S.2 et S.3 est déjà expliqué à la solution de T.8: entre les sauts du prosessus de Poisson il faut integrer l'equation numeriquement ou explicitement (possible pour S.2). Dès qu'on atteint le moment de saut, on calcule la valeur initiale pour l'intégration suivante. Voici les graphiques:









S.3

Voici les resultats de simulation:
Montrons la dynamique de convergeance de valeur moyenne vers la constante $x = 1$, pour le valeurs $t \in \{0, 0.4, 0.8, 1.2, 1.6, 2.0, 2.4, 2.8, 3.2, 3.6, 4.0\}$. Voici les graphiques pour 10, 100, 500, 1000, 2000 et 5000 trajectoires: