Chap 11 — 3

向量场在曲线上的积分

11.3.1 曲线的定向

设曲线L的端点为A, B, 规定其一为起点, 这样的曲线称为**定向曲线**. 起点为 A, 终点为B的定向曲线记为L_{AB}

设平面定向曲线L的参数方程为

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t) = x(t)\boldsymbol{i} + y(t)\boldsymbol{j}$$

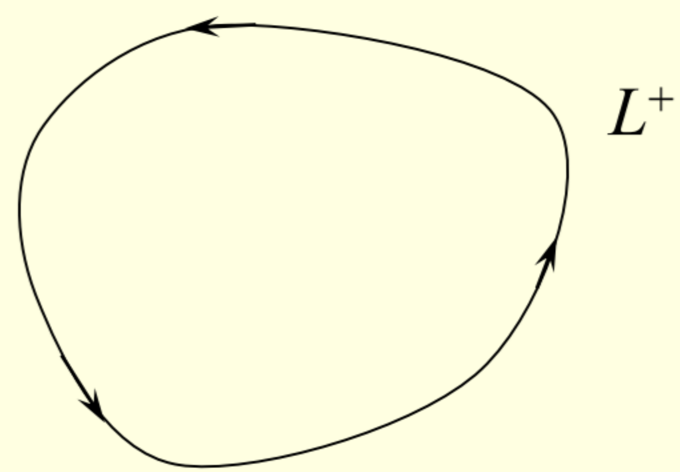
其起点参数为α, 终点参数为β, 则记该定向曲线L为

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t) = x(t)\boldsymbol{i} + y(t)\boldsymbol{j}, \quad t : \alpha \to \beta$$

结论 $\boldsymbol{r}'(t)=x'(t)\boldsymbol{i}+y'(t)\boldsymbol{j}$ 是指向参数增加方向切向量

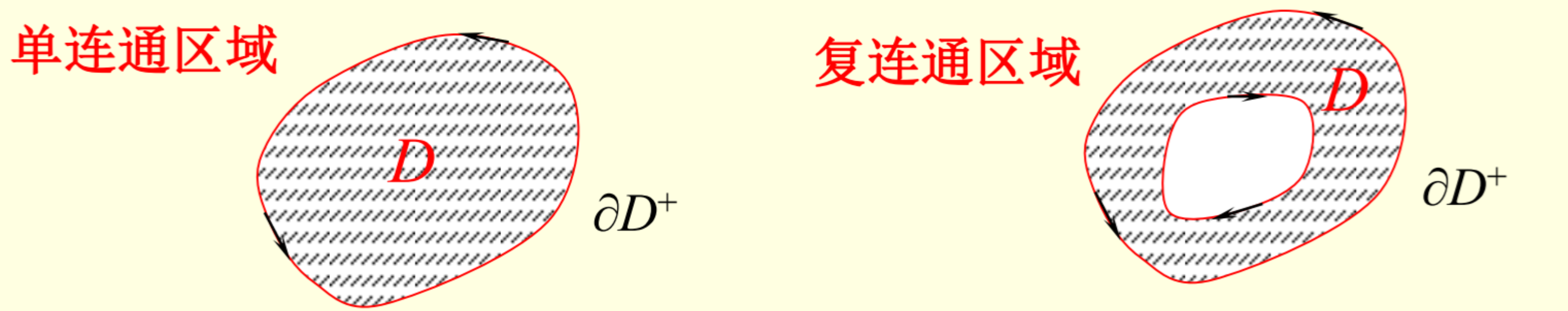
因此 $\boldsymbol{\tau}\overset{\text{def}}{=}\dfrac{\boldsymbol{r}'(t)}{|\boldsymbol{r}'(t)|}$ 是指向参数增加方向单位切向量

对简单闭曲线$L\subset xOy$面, 通常规定逆时针方向为其正向, 记为L^+, 顺时针方向为负向, 记为L^-.



■ 连通区域及其边界定向

设D为平面区域, 若D内的任意一条闭曲线所围区域都落在D内, 则称D为**单连通**的, 否则称其为**复连通**的



当点沿区域D边界朝一个方向前进时, D总在其左手侧, 规定此方向为区域D诱导的**边界正向**, 记为∂D^+

与∂D^+相反的方向称为D的**边界负向**, 记为∂D^-

11.3.2 向量场在曲线上的积分与计算

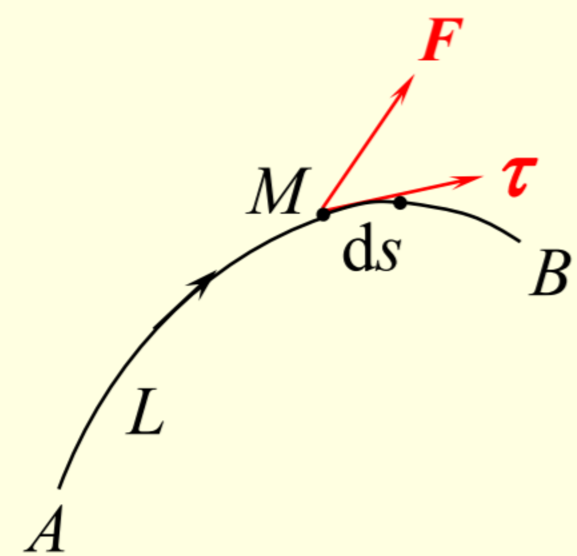
问题 设光滑平面曲线L上有连续作用力(**向量场**)

$\boldsymbol{F}(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$, 求$\boldsymbol{F}$ 作用于质点使之沿L自

起点A移动到终点B所做的功?

考察质点在 L上任一M 处

移动一段**弧微元**$\mathrm{d}s$所作的功



$$\mathrm{d}W = \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{\tau} \mathrm{d}s$$

$$\Rightarrow W = \int_L \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{\tau} \mathrm{d}s$$

定义 设L为定向曲线, 向量场$\boldsymbol{F}=(P,Q)$在L上的

第二型曲线积分

(向量形式) ⟶ $$\int_L \boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} \overset{\text{def}}{=} \int_L (\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{\tau})\mathrm{d}s$$

由于**定向弧微分**

$$\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\boldsymbol{\tau}\mathrm{d}s=(\cos\alpha,\cos\beta)\mathrm{d}s=(\mathrm{d}x,\mathrm{d}y)$$

于是

$$\boxed{\begin{aligned}\int_L \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{\tau}\mathrm{d}s &= \int_L (P\cos\alpha+Q\cos\beta)\mathrm{d}s \\ &= \int_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y\end{aligned}}$$

(两型曲线积分关系) (坐标形式)

注 当L为闭曲线时, 视向量场 $\boldsymbol{v}=(P, Q)$为流体的

流速场, 则积分表示流体沿L的**环(流)量**, 可记为

$$\Phi=\oint_L \boldsymbol{v}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}=\oint_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$$

方向性 第二型曲线积分与曲线的方向有关, 且

$$\int_{L_{BA}} P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=-\int_{L_{AB}} P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$$

其它性质同第一型曲线积分, 如线性性和可加性.

注意 (1) 两型曲线积分的形式不同

(2) 当$Q=0$时，$\int_L P\mathrm{d}x$ 仍为第二型

此外, 还有

$$\int_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=\int_L P\mathrm{d}x+\int_L Q\mathrm{d}y$$

例1 试将第二型曲线积分

$$I=\int_L x^2\mathrm{d}x-xy\mathrm{d}y$$

化为第一型曲线积分, 其中L是自点$(-1, 0)$到点$(1, 0)$

的上半圆周 $y=\sqrt{1-x^2}$.

定理 若定向曲线L为

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} \quad t:\alpha \to \beta$$

则

$$\boxed{\int_L P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = \int_\alpha^\beta \left[P(x(t),y(t))x'(t) + Q(x(t),y(t))y'(t)\right]\mathrm{d}t}$$

特例 (1) 若曲线L的方程为 $y = y(x),\ x{:}a \to b$, 则

$$\boxed{\int_L P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = \int_a^b \left[P(x,y(x)) + Q(x,y(x))y'(x)\right]\mathrm{d}x}$$

(2) 若L为平行x轴的定向线段, 则 $\int_L Q\mathrm{d}y = 0$

α<β时L定向是t增加方向

$$\vec{\tau} = \frac{(x'(t), y'(t))}{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}} \quad \vec{F} = (P, Q)$$

$$LHS = \int_L P\,dx + Q\,dy = \int_L (\vec{F} \cdot \vec{\tau})\,ds$$

$$= \int_\alpha^\beta (P, Q) \cdot \frac{(x'(t), y'(t))}{\sqrt{\sim}} \cdot \sqrt{\sim}\,dt$$

$$= RHS$$

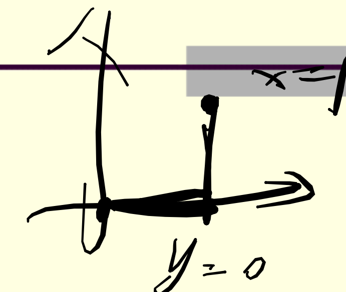
$\alpha > \beta$时

$$\int_{L^-} P\,dx + Q\,dy = \int_\beta^\alpha \sim$$

$$\int_L P\,dx + Q\,dy = \int_\alpha^\beta \sim$$

例2 计算曲线积分

$$I=\int_L 2xy\mathrm{d}x+x^2\mathrm{d}y$$



其中L是由点$O(0, 0)$ 到点$B(1, 1)$的如下路径:

(1) 直线$y=x$;

(2) 曲线$y=x^3$;

(3) 由O经点$A(1, 0)$到B的折线.

3) $I=\left(\int_{\overrightarrow{OA}}+\int_{\overrightarrow{AB}}\right)2xydx+x^2dy$

$=0+\int 1^2dy=1$

1) $I=\int_0^1 2x^2dx+x^2dx=\int_0^1 3x^2dx=1$

2) $I=\int_0^1 2x^4dx+x^2\,3x^2dx=\int_0^1 5x^4dx=1$

■ 思考与猜测 对于空间定向曲线L:

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)=x(t)\boldsymbol{i}+y(t)\boldsymbol{j}+z(t)\boldsymbol{k},\ t:\alpha\to\beta$$

向量场$\boldsymbol{F}=(P, Q, R)$在L上的**第二型曲线积分**

$$\int_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z$$

的概念与计算公式如何?

例3 在力场$\boldsymbol{F}=(y, -x, z)$作用下, 质点沿螺旋线

$$L: x=R\cos t, y=R\sin t, z=t,$$

由点$A(R, 0, 0)$运动到点$B(R, 0, 2\pi)$, 求$\boldsymbol{F}$所做的功.

eg3 $W = \int_L \vec{F}\, d\vec{r} = \int_0^{2\pi} y\, dx + (-x)\, dy + z\, dz$

$$= \int_0^{2\pi} (-R^2 \sin^2 t - R^2 \cos^2 t + t)\, dt$$

$$= \int_0^{2\pi} (t - R^2)\, dt = \frac{1}{2} t^2 \Big|_0^{2\pi} - 2\pi R^2$$

$$= 2\pi^2 - 2\pi R^2$$

例4 已知质量为M和m的质点间的引力为

$$\boldsymbol{F} = -k\frac{mM}{r^3}\boldsymbol{r}$$

其中$\boldsymbol{r}$是质点M指向质点m的位置向量，$r = |\boldsymbol{r}|$. 求质点m从点A运动到点B时，引力$\boldsymbol{F}$所做的功.

$$\boxed{kmM\left(\frac{1}{r_B}-\frac{1}{r_A}\right)}$$

例5 求向量场

$$\boldsymbol{v}_1 = \frac{-y\boldsymbol{i}+x\boldsymbol{j}}{x^2+y^2}, \quad \boldsymbol{v}_2 = \frac{x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}}{x^2+y^2}$$

沿xOy面上的圆周 $L: x^2+y^2=R^2$逆时针方向的环量.

11.3.3 Green定理

定理(Green公式) 设 $\boldsymbol{v}=(P,Q)$为平面有界闭域D上的光滑向量场, D的边界分段光滑, 则有

$$\boxed{\oint_{\partial D^+} P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y}$$

注 二重积分与其边界上第二型曲线积分的关系

分析 先证 $\oint_{\partial D^+} P\mathrm{d}x=-\iint_D\frac{\partial P}{\partial y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

再证 $\oint_{\partial D^+} Q\mathrm{d}y=\iint_D\frac{\partial Q}{\partial x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 两式相加即证

推论 设平面有界闭域D的边界分段光滑, 则其面积

$$\boxed{S=\frac{1}{2}\oint_{\partial D^+} x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}$$

例6 计算积分 $I=\oint_L (y-x)\mathrm{d}x+(3x+y)\mathrm{d}y$

其中L为椭圆周 $\dfrac{(x-1)^2}{4}+(y-2)^2=1$, 取逆时针方向.

例7 计算积分

$$I=\int_{AO}(\mathrm{e}^x\sin y-4x)\mathrm{d}x+(\mathrm{e}^x\cos y-3)\mathrm{d}y$$

其中 AO 是由$A(a,0)$到$O(0,0)$的弧段 $y=\sqrt{ax-x^2},(a>0)$

eg6:

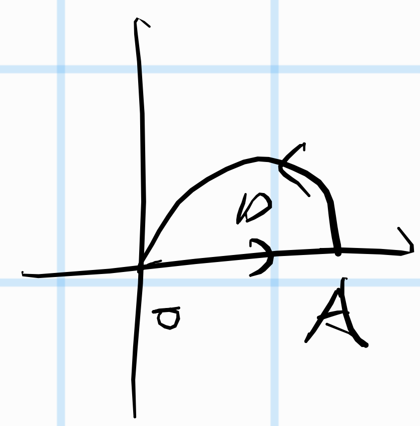
$$I=\iint\left(\frac{\partial(3x+y)}{\partial x}-\frac{\partial(y-x)}{\partial y}\right)dxdy$$

$$=\iint(3-1)\,dxdy$$

$$=2\iint_D dxdy=2\pi\cdot 2\cdot 1=4\pi$$

eg7 添加 $\overline{OA}$ 与 $\overset{\frown}{AO}$ 围成 D

$$I=\left(\oint_{AO\cup OA}-\int_{\overline{OA}}\right)Pdx+Qdy$$



$$=\iint_D(e^x\cos y-e^x\cos y)dxdy-\int_{\overline{OA}}(e^x\sin y-4x)dx$$

$$=0-\int_0^a(e^x\sin 0-4x)dx=2a^2$$

例8 设L是任意一条不过原点O的正向光滑闭曲线, 求

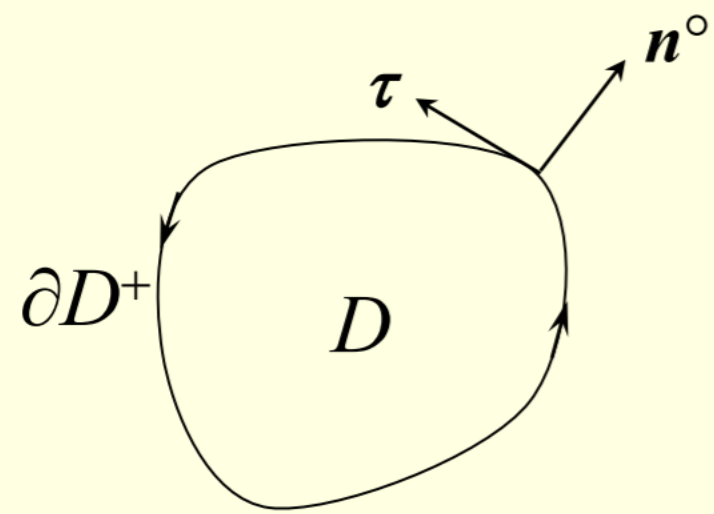
$$I=\oint_L \frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}$$

■ Green公式的向量形式

设$\boldsymbol{F}=(Q,-P)$, $\boldsymbol{\tau}=(\cos\alpha,\cos\beta)$为$\partial D^+$的单位切向量,

设$\boldsymbol{n}^\circ$为∂D的单位外法向量, 则

$\boldsymbol{n}^\circ=(\cos\beta,-\cos\alpha)$, 故有



$$\boxed{\oint_{\partial D}\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}^\circ\mathrm{d}s=\iint_D\nabla\cdot\boldsymbol{F}\mathrm{d}\sigma}$$

$P=\frac{-y}{x^2+y^2}$, $Q=\frac{x}{x^2+y^2}$ $\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}=\frac{\partial P}{\partial y}$

L围成D

1) D不包含原点 $I=\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy=0$

2) 挖原点

以原点为圆心，半径为 ε 做圆

$C_\varepsilon: x^2+y^2=\varepsilon^2$

C_ε与L围成D

$$\oint_{L\cup C_\varepsilon} Pdx+Qdy=0$$

$$\oint_L Pdx+Qdy=0-\oint_{C_\varepsilon}(Pdx+Qdy)$$

$$=\oint_{\partial D_\varepsilon^+}\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}=\frac{1}{\varepsilon^2}\oint_{\partial D_\varepsilon^+} xdy-ydx$$

$$=\frac{1}{\varepsilon^2}\iint_D 2dxdy=2\frac{1}{\varepsilon^2}\cdot\pi\varepsilon^2=2\pi$$

向量形式：

$$\oint_{\partial D} (\mathbb{F} \cdot \vec{n}^{\circ})\, ds$$

$$= \oint_{\partial D} (P\cos\alpha + Q\cos\beta)\, ds$$

$$= \oint_{\partial D^+} P\,dx + Q\,dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) d\sigma$$

$$= \iint_D \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right)(Q, -P)\, d\sigma$$

$$\overset{def}{=} \iint_D (\nabla \cdot \mathbb{F})\, d\sigma$$

13.3.4 平面曲线积分与路径无关的条件

定义 设D为平面单连通区域. 若对任意$A, B \in D$, 以及任意分段光滑曲线$L_{AB} \subset D$, 曲线积分

$$\int_{L_{AB}} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$$

的值仅与A, B 有关, 而与L无关, 则称在D内曲线积分与路径无关, 此时积分可记为

$$\int_{A}^{B} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$$

定理(Green) 设 $\boldsymbol{v}=(P(x,y),\ Q(x,y))$是单连通区域$D$内的光滑向量场, 则下面四条等价:

(1) 在D内的任一条分段光滑闭曲线L上

$$\oint_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=0$$

封闭曲线积分为0

(2) 在D内曲线积分 $\int_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$ 与路径无关

(3) 向量场$\boldsymbol{v}$是某函数的**梯度场**, 即存在$\varphi(x,y)$, 使得

$$\boldsymbol{v}=\nabla\varphi(x,y) \quad \text{或} \quad \mathrm{d}\varphi=P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$$

(P,Q)是梯度场

(4) 在D内恒成立 $\dfrac{\partial Q}{\partial x}\equiv\dfrac{\partial P}{\partial y}$

例9 计算积分

$$\int_L 2\mathrm{e}^{2x}\cos y\mathrm{d}x - \mathrm{e}^{2x}\sin y\mathrm{d}y$$

其中L是上半椭圆 $\dfrac{(x-2)^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}=1$ 由$O(0,0)$到$A(2,3)$的弧

推论 设 $\boldsymbol{v}$ 是单连通区域D内的光滑向量场, 且$\boldsymbol{v}$ 在D内的曲线积分与路径无关, 则对$\forall A, B\in D$, 有

$$\int_A^B \boldsymbol{v}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \varphi(B)-\varphi(A)$$

其中$\varphi(x,y)$满足$\boldsymbol{v} = \nabla\varphi.$

11.3.5 全微分求积与全微分方程

设$P(x, y)$, $Q(x, y)$在单连通区域D有连续偏导数, 且

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$$

则存在二元函数φ使得$\mathrm{d}\varphi = P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$, 即$P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$是$\varphi$的全微分, 此时称$\varphi$为$P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$的原函数. 已知

$$\boxed{\varphi(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y} \longleftarrow (\varphi\text{的求法})$$

注 上述求原函数的过程称为全微分求积(分)

例10 求 $\dfrac{x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x}{x^2 + y^2}\ (x > 0)$ 的原函数, 并计算积分

$$I = \int_{(1,0)}^{(\sqrt{3},3)} \frac{x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x}{x^2 + y^2}$$

若 $P(x, y)\mathrm{d}x + Q(x, y)\mathrm{d}y$ 是某函数的全微分, 则称方程 $P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = 0$ 为全微分方程.

不满足时: 一次微分形式

判别式 $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = \dfrac{\partial P}{\partial y}$

解法 求出原函数 $\varphi(x, y)$, 则通解为 $\varphi(x, y) = C$

原因: 两边 d

$y(x)$

例11 求解方程 $(x^2 + 2xy)\mathrm{d}x + (x^2 - y^2)\mathrm{d}y = 0$

eg10. 起点 (1, 0)

$$\varphi(x,y)=\int_{(1,0)}^{(x,y)}\frac{x\,dy-y\,dx}{x^2+y^2}=\left(\int_{(1,0)}^{(x,0)}+\int_{(x,0)}^{(x,y)}\right)\sim$$

$$=\int_1^x\frac{-0\,dx}{x^2+0^2}+\int_0^y\frac{x\,dy}{x^2+y^2}=x\int_0^y\frac{dy}{y^2+x^2}=x\cdot\frac{1}{x}\arctan\frac{y}{x}$$

$$=\arctan\frac{y}{x}$$

$$I=\arctan\frac{y}{x}\Big|_{(1,0)}^{(\sqrt{3},3)}=\arctan\sqrt{3}-0=\frac{\pi}{3}$$

eg11. $\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial(x^2-y^2)}{\partial x}=2x \quad \frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial(x^2+2xy)}{\partial y}=2x$

是全微分方程。

$$\int_{(0,0)}^{(x,y)}P\,dx+Q\,dy=\int_{(0,0)}^{(x,0)}P\,dx+\int_{(x,0)}^{(x,y)}Q\,dy$$

$$=\int_0^x(x^2+2x\cdot 0)\,dx+\int_0^y(x^2-y^2)\,dy$$

$$=\frac{1}{3}x^3+x^2y-\frac{1}{3}y^3$$

$y(x)$: $\frac{1}{3}x^3+x^2y-\frac{1}{3}y^3=C$