Chap 6

常微分方程初步

一、典型例子

- **Malthus 模型(1789)**

——人口增长率与人口总数成正比.

人口总数$P(t)$, 增长率 $P'(t)$, 比例常数r, 则有

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t}=rP \longleftarrow \boxed{\text{含未知函数一阶导数}}$$

称为一阶微分方程.

函数 $P=Ce^{rt}$ 适合前述方程. 若 $t=t_0$ 时,

$P=P_0$，则可得 $P=P_0e^{r(t-t_0)}$.

➢ Logistic模型(1838) —— 阻滞增长

—— 人口减少率与人口总数平方成正比.

比例常数$\beta > 0$, 则有

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t} = rP - \beta P^2.$$

➢ 自由落体运动

$$\ddot{x}(t) = -g$$

积分一次得 $\dot{x}(t) = -gt + C_1$

再积分得 $x(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + C_1 t + C_2$

二、基本概念

微分方程 含自变量, 未知函数及其导数的关系式;

方程的阶 未知函数导数的**最高阶数**; 一定出现

n阶方程 一般形式 $F(x, y, y', \cdots, y^{(n)}) = 0,$

$\boxed{x\text{—自变量}, y\text{—未知函数}}$

方程的解 函数$y = y(x)$代入方程得到恒等式;

方程通解 解$y = y(x, C_1, C_2, \ldots, C_n)$中含独立任意

一般解

常数, 且 "个数= 阶数" .

◆ 函数$y = y(x, C_1, C_2)$中任意常数C_1, C_2独立, 即

$$y' = \frac{\partial y}{\partial x} \quad \begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial C_1} & \frac{\partial y}{\partial C_2} \\ \frac{\partial y'}{\partial C_1} & \frac{\partial y'}{\partial C_2} \end{vmatrix} \neq 0. \quad (\neq 0)$$

例1 $y = C_1 x + C_2$中C_1, C_2独立.

$$\begin{vmatrix} x & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1$$

例2 $y = x + C_1 + C_2$中C_1, C_2不独立.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

方程特解 通解中任意常数被确定;

定解条件 用于确定通解中任意常数的条件;

初始条件 自变量取同一点值的定解条件;

边界条件 自变量取区间端点值的定解条件;

定解问题 方程 + 定解条件.

ex. $y = y(x, C_1, C_2, C_3) \longrightarrow \begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial C_i} \; i=1,2,3 \\ \frac{\partial y'}{\partial C_i} \; i=1,2,3 \\ \frac{\partial y''}{\partial C_i} \; i=1,2,3 \end{vmatrix}$

Chap 6 — 1

一阶微分方程

分离变量方程

- 形式 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=g(x)h(y)$
- 解法

化为 $\dfrac{\mathrm{d}y}{h(y)}=g(x)\mathrm{d}x$ 后两边积分

注意 使$h(y)=0$的常数函数$y=c$也是方程的解

例 求解下列方程

(1) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\dfrac{x}{y}$; (2) $\dfrac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t}=rP$

(1) $y\,dy = -x\,dx$

$$\frac{1}{2}y^2 = -\frac{1}{2}x^2 + C$$

$$x^2 + y^2 = C'$$

when $P \neq 0$

(2) $\dfrac{dP}{P} = r\,dt$

$$\ln|P| = rt + C$$

$$P = \pm e^{rt+C} = Ae^{rt} \quad (A := \pm e^{C},\ A \neq 0)$$

when $P=0$，也是解 $(A=0)$.

故通解 $P = Ae^{rt}$

补：$\dfrac{dP}{dt} = rP - \beta P^2$

$P \neq 0$ & $P \neq \dfrac{r}{\beta}$ 时

$$\frac{r\,dP}{P(r-\beta P)} = r\,dt$$

$\langle \int \rangle$

$$\int \frac{dP}{P} + \frac{\beta\,dP}{r-\beta P} = \int r\,dt$$

$$\ln|P| - \ln|r-\beta P| = rt + C_0$$

$$\ln\left|\frac{P}{r-\beta P}\right| = rt + C_0$$

$$\frac{P}{r-\beta P} = Ce^{rt}$$

$$P = r\frac{Ce^{rt}}{1+C\beta e^{rt}} \longrightarrow \frac{r}{\beta} \quad (t \to +\infty)$$

下例(1) $y' = x\sqrt{1-y^2}$

$$\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = x\,dx$$

$$\arcsin y = \frac{1}{2}x^2 + C$$

$$y = \sin\left(\frac{1}{2}x^2 + C\right)$$

$y = \pm 1$ △ (但是通解不要求是全部解，所以只写第一个也可

↑例 求解方程 $y' = x\sqrt{1-y^2}$

■ 一阶齐次方程

➢ 形式 $$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$$

➢ 解法 设 $u = \dfrac{y}{x}$ $\Rightarrow$ $y' = u + xu'$

$\to y = ux$

$u + x\dfrac{du}{dx} = \varphi u$

$x\dfrac{du}{dx} = \varphi(u) - u$

$\dfrac{x}{dx} = \dfrac{\varphi(u)-u}{du}$

$$\Rightarrow \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \frac{\varphi(u) - u}{x}$$

可分离变量

④若 $f(x,y)$ satisfy $f(tx,ty)=t^n f(x,y)$ $(\forall t)$ 则称 f 为 n 次齐次函数

若 $n=0$，简称齐次函数

如 $f(x,y)=\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$

例1 $y'=\frac{y}{x}+\tan\frac{y}{x}$ let $u=\frac{y}{x}$ $y'=u+xu'$

$\cancel{u}+xu'=\cancel{u}+\tan u$

$\frac{x\,du}{dx}=\tan u$

$\Rightarrow \frac{dx}{x}=\frac{du}{\tan u}$ $\quad \int \cot u$

$\ln|x|+C_0=\ln|\sin u|$

$\sin u=Cx$

$\sin\frac{y}{x}=Cx$

例1 求解方程

$$xy' = y + x\tan\frac{y}{x}$$

例2 求解方程 $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x+y}{x-y}$

$2a = -2$

$a+b = -3$

$a-b = 1$

➢ 可化为变量可分离的方程

例3 求解方程 $\dfrac{dy}{dx} = (x+y)^2$

例4 求解方程 $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x+y-3}{x-y+1} = \dfrac{(x-1)+(y-2)}{(x-1)-(y-2)}$ same as eg2 where. $u=\frac{y-2}{x-1}$

联立 $\begin{cases} x+y-3=0 \\ x-y+1=0 \end{cases}$ $\begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases}$

eg2. $\frac{dy}{dx}=\frac{1+\frac{y}{x}}{1-\frac{y}{x}}$ let $u=\frac{y}{x}$

$$x\frac{du}{dx}+u=\frac{1+u}{1-u}$$

$$x\frac{du}{dx}=\frac{1+u^2}{1-u}$$

$$\frac{(1-u)du}{1+u^2}=\frac{dx}{x}$$

$$\arctan u-\frac{1}{2}\ln(u^2+1)=\ln|x|+C$$

where $u=\frac{y}{x}$

$$\sqrt{x^2+y^2}=C'e^{\arctan\frac{y}{x}} \quad C'=e^{-C}$$

eg3. let $\underline{u=x+y}$ $y'=u'-1$

$$\frac{du}{dx}-1=u^2$$

$$\frac{du}{u^2+1}=dx$$

$$\arctan u=x+C$$

$$\arctan(x+y)=x+C.$$

一阶线性方程

y的系数为1

- 形式 $y' + P(x)y = Q(x)$

  y', y 的线性组合

  非齐次项

- 解法 常数变易法

先考虑特殊情况 $Q=0$时的解，再在通解中将常数变换成待定函数

- 公式

$$\boxed{y = \mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}\left(\int Q(x)\mathrm{e}^{\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x + C\right)}$$

$C(x)$

$\int P(x)\mathrm{d}x$ 表示一个原函数

$C=0$ 时

* $y' + P(x)y = 0$

$$\frac{dy}{dx} = -P(x)y$$

$$\frac{dy}{y} = -P(x)dx$$

$$\ln|y| = -\int P(x)dx + C_0$$

$$y = Ce^{-\int P(x)dx} = C\cdot \exp -\int P(x)dx$$

在通解中把常数换为待定函数 $c(x)$

assume $y = c(x)\exp\left(-\int P(x)dx\right)$

$$y' = \left[c'(x) - c(x)P(x)\right]\exp\left[-\int P(x)dx\right]$$

$$y' + P(x)y = Q(x)$$

$$c'(x)\exp\left[-\int P(x)dx\right] = Q(x)$$

$$c'(x) = Q(x)\exp\left(\int P(x)dx\right)$$

$$C(x) = \int Q(x)\exp\left(\int P(x)dx\right)dx + C$$

例　求解下列方程

$y = \exp\left(-\int \frac{dx}{x}\right)\left(\int \frac{\sin x}{x} \exp\left(\int \frac{dx}{x}\right) dx + C\right)$

(1) $xy' + y = \sin x$

$y' + \frac{1}{x} y = \frac{\sin x}{x}$

$= \frac{1}{x}\left(\int \frac{\sin x}{x} x dx + C\right)$

$= \frac{1}{x}(-\cos x + C)$

(2) $(x + y^2)y' = y$

■ Bernoulli方程

➢ 形式 $y' + P(x)y = Q(x)y^n \quad (n \neq 0,1)$

➢ 解法　代换 $z = y^{1-n}$　$z' = (1-n)y^{-n}y'$

n

$\Rightarrow \quad z' + (1-n)P(x)z = (1-n)Q(x)$ 线性方程

(2) $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x+y^2}$

$\frac{dx}{dy} = \frac{x+y^2}{y} = \frac{x}{y} + y$

$x' - \frac{1}{y}x = y$

$x = \exp\left(\int \frac{dy}{y}\right) \cdot \left(\int y \exp\left(\int \frac{-dy}{y}\right) dy + C\right)$

$= y\left(\int y \frac{1}{y} dy + C\right) = y(y+C)$

P_{234} 1. (3, 4)

2. (2, 4)

3. (1) 5. (2)

例　求解方程

$$y' - \frac{2y}{x} + xy^2 = 0$$

例　求解方程

$$(2y^2 + y - x)\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x = 0$$

eg1

$$z = y^{1-2} = y^{-1}$$

$$z' = -y^{-2} y'$$

$$z' + \frac{2}{x} z = x$$

$$z = \exp\int \frac{-2dx}{x} \left(\int x \cdot \exp\left(\int \frac{2dx}{x}\right) dx + C_0 \right)$$

$$= \frac{1}{x^2}\left(\int x^3 dx + C_0\right)$$

$$= \frac{1}{x^2}\left(\frac{x^4}{4} + C_0\right) = \frac{1}{4}x^2 + C_0 x^{-2}$$

$$y = \frac{1}{z} = \frac{4x^2}{x^4 + C}$$

eg2. $y' = \dfrac{y}{2y^2 + y - x}$

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{x}{y} + 2y + 1$$

y 自变量

$$x' + \frac{1}{y}x = 2y + 1$$

$$x = \exp\left(-\int \frac{dy}{y}\right) \cdot \left(\int (2y+1) \exp\int \frac{dy}{y}\, dy + C \right)$$

$$= \frac{1}{y}\left(\int (2y+1)\, y\, dy + C\right)$$

$$= \frac{1}{y}\left(\frac{2}{3}y^3 + \frac{1}{2}y^2 + C\right)$$

可降阶微分方程

二阶微分方程一般形式

$$F(x, y, y', y'') = 0$$

(0) 缺 y, y': $y'' = f(x)$, 容易解

(1) $y'' = f(x, y')$ 型方程（缺 y 型）

$y'' = \frac{d(y')}{dx} = \frac{dp}{dx}$

➤ 解法　设 $y' = p \quad \Rightarrow \dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} = f(x, p)$

let $p = y'$

例　求解方程 $xy'' + y' = 4x \ (x \neq 0)$.

$x\frac{dp}{dx} + p = 4x$

$\frac{dp}{dx} + \frac{1}{x}p = 4$

$p = \frac{1}{x}\left(\int 4 \cdot x + C\right)$

$= 2x + \frac{C}{x}$

$y = x^2 + C_1\ln|x| + C_2$

(2) $y'' = f(y, y')$ （缺x 型）

➢ 解法 设 $y' = p$

$$\Rightarrow \quad p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y} = f(y, p)$$

注意以y为中间变量

解为 $\frac{dy}{dx} = p = g(y, C_1)$ 可分离变量

例 求解方程 $2yy'' = y'^2 + 1$

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx} = p\frac{dp}{dy}$$

$$2yp\frac{dp}{dy}=p^2+1$$

$$\frac{2y}{dy}=\frac{p^2+1}{p\,dp}$$

$$\frac{1}{2}\int\frac{dy}{y}=\int\frac{p\,dp}{p^2+1}$$

$$\int\frac{dy}{y}=\int\frac{d(p^2+1)}{p^2+1}$$

$$\ln|y|+C=\ln|p^2+1|$$

$$C=\ln\left|\frac{y'^2+1}{y}\right|$$

$$C_1=\frac{y'^2+1}{y} \dashrightarrow y'^2+1=C_1y$$

$$C_1y=\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+1$$

$$dx^2=\frac{dy^2}{C_1y-1}$$

$$dx\int dx=dy\int\frac{\frac{1}{C_1}d(C_1y-1)}{C_1y-1}$$

$$x\,dx+C_2dx=\frac{dy}{C_1}\ln|C_1y-1|+C_3dy$$

$$\frac{d(C_1y-1)}{C_1^2}\ln|C_1y-1|$$

$$\frac{1}{2}x^2+C_2x+C_4=(C_1y-1)\ln|C_1y-1|+(C_3-C_1)y$$

$$\int\ln t\,dt=t\ln t-t$$

?

$$\frac{dy}{dx}=\pm\sqrt{C_1y-1}$$

$$dx=\frac{dy}{\pm\sqrt{C_1y-1}}$$

$$C_1\int dx=\int\frac{C_1dy}{\pm\sqrt{C_1y-1}}=\int\frac{d(C_1y-1)}{\pm\sqrt{C_1y-1}}$$

$$C_1x+C_2=\pm2\sqrt{C_1y-1}$$

$$u^{-\frac{1}{2}}du$$

$$\frac{du}{\sqrt{u}}$$