Chap 12 — 4

Fourier变换和积分

12.4.1 Fourier积分

设$f(x)$以$2l$为周期, 在$[-l, l]$上可积且绝对可积, 其F氏级数的复数形式为

$$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\omega x}$$

其中 $\omega = \dfrac{\pi}{l}$ 为基频, $F_0 = \dfrac{a_0}{2} = \dfrac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(x)\mathrm{d}x,$

$$F_n = \frac{a_n - \mathrm{i}b_n}{2} = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\omega x}\mathrm{d}x,$$

$$F_{-n} = \overline{F_n}$$

问题 若f非周期函数, 如何求其Fourier级数?

令$f_l(x)=f(x), x\in[-l, l]$, 将$f_l(x)$以$2l$为周期延拓, 则

$$f(x)=\lim_{l\to+\infty} f_l(x)$$

记$\lambda_n=n\pi/l, \Delta\lambda=\lambda_n-\lambda_{n-1}=\pi/l$, 则

$$f_l(x)\sim\sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n \mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda_n x}=\frac{1}{2l}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\int_{-l}^{l} f_l(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda_n t}\mathrm{d}t\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda_n x}$$

令$l\to+\infty$, 则$\Delta\lambda\to 0$, 得到

$$f(x)=\lim_{l\to+\infty} f_l(x) \sim \lim_{\Delta\lambda\to 0}\frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\int_{-l}^{l} f_l(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda_n t}\mathrm{d}t\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda_n x}\Delta\lambda$$

记 $$\varphi_l(\lambda)=\int_{-l}^{l} f_l(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda t}\mathrm{d}t\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda x}$$

则 $$f(x)\sim \lim_{\Delta\lambda\to 0}\frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\varphi_l(\lambda_n)\Delta\lambda$$

由于 $$\lim_{l\to+\infty}\varphi_l(\lambda)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda t}\mathrm{d}t\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda x}$$

故 $$f(x)\sim \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda t}\mathrm{d}t\right]\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda x}\mathrm{d}\lambda$$

上式右端称为函数 f 的**Fourier积分.**

定理 设f在$\mathbf{R}$的任何有限区间分段可微, 且在

$(-\infty, +\infty)$上绝对可积, 则有对任意$x \in \mathbf{R}$, 有

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda t}\mathrm{d}t\right]\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda x}\mathrm{d}\lambda = \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$$

特别地, 若 f 在x处连续, 则

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda t}\mathrm{d}t\right]\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda x}\mathrm{d}\lambda = f(x)$$

12.4.2 Fourier变换

定义 设f 满足定理条件且连续, 称函数

$$F(\lambda)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda t}\,\mathrm{d}t$$

为 f 的**Fourier变换**; 而函数

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(\lambda)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda x}\,\mathrm{d}\lambda$$

称为 $F(\lambda)$ 的**Fourier逆变换**, 上式称为**反演公式**.

注 当 f 在R上连续时, 有

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}\lambda\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda(x-t)}\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}\lambda\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cos\lambda(x-t)\mathrm{d}t$$

← 偶函数

关于λ的

$$+\frac{\mathrm{i}}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}\lambda\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\sin\lambda(x-t)\mathrm{d}t$$

← 奇函数

0

$$=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\mathrm{d}\lambda\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cos\lambda(x-t)\mathrm{d}t$$

实形式Fourier积分

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}\mathrm{d}\lambda\left[\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cos\lambda t\cos\lambda x\,\mathrm{d}t+\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\sin\lambda t\sin\lambda x\,\mathrm{d}t\right]$$

$$\overset{def}{=}\int_0^{+\infty}[a(\lambda)\cos\lambda x+b(\lambda)\sin\lambda x]\mathrm{d}\lambda$$

其中

$$a(\lambda)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cos\lambda t\,\mathrm{d}t,b(\lambda)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\sin\lambda t\,\mathrm{d}t$$

类比 $f(x) = \frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos nx + b_n\sin nx$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\cos nt\,dt$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\sin nt\,dt$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)(\cos\lambda t + i\sin\lambda t)$$

0

定义 若f为偶函数, 其Fourier变换

$$f(x) \to F_e(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda t}\mathrm{d}t = 2\int_0^{+\infty} f(t)\cos\lambda t\,\mathrm{d}t$$

称为余弦变换, 其逆变换为

$$F_e(\lambda) \to f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F_e(\lambda)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda x}\mathrm{d}\lambda = \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} F_e(\lambda)\cos\lambda x\,\mathrm{d}\lambda$$

定义 若f为奇函数, 其**Fourier变换**

$$f(x)\to F_o(\lambda)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda t}\mathrm{d}t=-2\mathrm{i}\int_0^{+\infty}f(t)\sin\lambda t\mathrm{d}t$$

称

$$G_o(\lambda)=\mathrm{i}F_o(\lambda)=2\int_0^{+\infty}f(t)\sin\lambda t\mathrm{d}t$$

为f的正弦变换, 其逆变换为

$$G_o(\lambda)\to f(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}G_o(\lambda)\sin\lambda x\mathrm{d}\lambda$$

例1 **求指数衰减函数**

$$f(x)=\begin{cases} e^{-\beta x}, & x\ge 0, \\ 0, & x<0 \end{cases} \quad (\beta>0)$$

的Fourier变换.

$$F(\lambda)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\lambda t}dt$$

$$=\int_{0}^{+\infty} e^{-(\beta+i\lambda)t}dt$$

$$=\frac{1}{-(\beta+i\lambda)}e^{-(\beta+i\lambda)t}\Big|_{0}^{+\infty}=\frac{1}{\beta+i\lambda}$$

例2 求分段函数

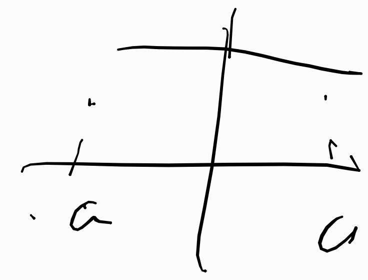
$$f(x)=\begin{cases}1, & |x|<a,\\ \dfrac{1}{2}, & x=\pm a,\\ 0, & |x|>a\end{cases}$$

的Fourier变换.

例3 求函数 $f(x)=\mathrm{e}^{-ax}\ (a>0, x\geq 0)$

的Fourier余弦变换和正弦变换.

eg2.



$$F(\lambda)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\lambda t}dt$$

$$=\int_{-a}^{a} e^{-i\lambda t}dt$$

$$=\frac{1}{-i\lambda t}e^{-i\lambda t}\Big|_{-a}^{a}=\frac{1}{-i\lambda a}e^{-i\lambda a}-\frac{1}{i\lambda a}e^{i\lambda a}$$

f 偶函数 $F_e(\lambda)=2\int_0^{+\infty} f(t)\cos\lambda t\,dt=2\int_0^a \cos\lambda t\,dt$

$$=\frac{2\sin\lambda t}{\lambda}\Big|_0^a=\frac{2\sin a\lambda}{\lambda}$$

逆变换：

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\sin\lambda a\cos\lambda x}{\lambda}d\lambda=f(x).$$

eg3. $F_e(\lambda)=2\int_0^{+\infty} f(x)\cos\lambda t\,dt$

$$=2\int_0^{+\infty} e^{-at}\cos\lambda t\,dt \qquad de^{-a\lambda}$$

$$-ae^{-a\lambda}$$

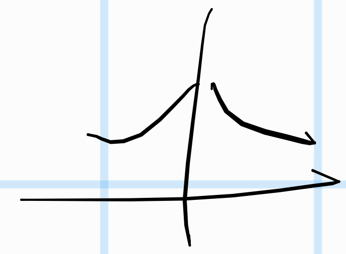
$$=-2a\int_0^{+\infty}\cos\lambda t=\cdots$$

$$F_e(\lambda)=\int_0^{+\infty} f(t)e^{-i\lambda t}dt+\int_{-\infty}^{0} f(-t)e^{-i\lambda t}dt$$

$$=\int_0^{+\infty} e^{-(a+i\lambda)t}dt+\int_{-\infty}^{0} e^{(a-i\lambda)t}dt$$

$$=\frac{1}{a+i\lambda}+\frac{1}{a-i\lambda}=\frac{2a}{a^2+\lambda^2}$$

验证：$\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} F_e(\lambda)\cos(\lambda x)\,d\lambda = \frac{2a}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\cos\lambda x}{a^2+\lambda^2}\,d\lambda = \begin{cases} e^{-ax}, & x\geq 0 \\ e^{ax}, & x<0 \end{cases}$



12.4.3 Fourier变换的性质

记 f 的Fourier变换为 $F[f]$, 即

$$F[f](\lambda)=F(\lambda)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda t}\mathrm{d}t$$

(1) 线性性 若 $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$, 则

$$F[\alpha f+\beta g]=\alpha F[f]+\beta F[g]$$

(2) 频移性

$$F[f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda_0 x}](\lambda)=F(\lambda+\lambda_0)$$

$LHS = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\lambda x} e^{-i\lambda_0 x} dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i(\lambda+\lambda_0)x} dx = \underline{RHS}$

(3) 微分关系 设$f(\pm\infty)=0$, f'存在Fourier变换, 则

$$F[f'] = \mathrm{i}\lambda \cdot F[f]$$

(4) 微分特性 设f 和 $xf(x)$存在Fourier变换, 则

$$F'(\lambda) = F[-\mathrm{i}xf(x)]$$

$$(3) = \int_{-\infty}^{\infty} f'(t)\, e^{-i\lambda t}\, dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda t}\, df(t)$$

$$= f(t)e^{-i\lambda t}\Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} f(t)(-i\lambda)\, e^{-i\lambda t}\, dt$$

$$= \quad 0 \quad + i\lambda F[f]$$

(4) $F'(\lambda) = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\lambda t} dt\right)' \longrightarrow \frac{d}{d\lambda}$

$= \int_{-\infty}^{\infty} [f(t) e^{-i\lambda t}]' dt$

$= \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{(-it) f(t)} e^{-i\lambda t} dt$

$= F[-ix f(x)]$

12.4.4 卷积

定义 设f, g 在**R**上绝对可积, 则 f 和 g的**卷积**

$$(f*g)(x) \overset{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)g(t)\mathrm{d}t$$

定理 若f 和 g在**R**上绝对可积, 则有

$$f*g = g*f$$

$$(f*g)*h = f*(g*h)$$

$$(f+g)*h = f*h + g*h$$

定理 若f和 g在**R**上绝对可积, 则有

$$F[f*g]=F[f]\cdot F[g]$$

Parseval等式 若f 可积且平方可积, $F(\lambda)$是f的**F**氏变换, 则有

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f^2(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}|F(\lambda)|^2\,\mathrm{d}\lambda$$

$$F[f*g](\lambda)=\int_{-\infty}^{+\infty}dx\int_{-\infty}^{+\infty}f(x-t)g(t)e^{-i\lambda x}dt$$

swap

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}g(t)dt\int_{-\infty}^{+\infty}f(x-t)\,e^{-i\lambda x}dx$$

$$\overset{u=x-t}{=}\int_{-\infty}^{+\infty}g(t)\,dt\int_{-\infty}^{+\infty}f(u)e^{-i\lambda u}\,e^{-i\lambda t}du$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}g(t)e^{-i\lambda t}dt\int_{-\infty}^{+\infty}f(u)e^{-i\lambda u}du$$

$= RHS$

P等式：令 $g(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)f(x+t)dt$ $\quad F[g](\lambda)\overset{?}{=}|F(\lambda)|^2$

反演公式：$g(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}|F(\lambda)|^2e^{-i\lambda x}d\lambda$

$$F[g](\lambda)=\int_{-\infty}^{+\infty}g(x)e^{-i\lambda x}=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-i\lambda x}dx\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)f(x+t)dt$$

$$\overset{swap}{=}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\,dt\int_{-\infty}^{+\infty}f(x+t)\,e^{-i\lambda x}dx$$

$$\overset{u=x+t}{=}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\,dt\int_{-\infty}^{+\infty}f(u)\,e^{-i\lambda u}e^{i\lambda t}dx$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{i\lambda t}dt\int_{-\infty}^{+\infty}f(u)e^{-i\lambda t}=\overset{共轭}{\overline{F(\lambda)}}\,F(\lambda)$$

$$= |F(\lambda)|^2$$

~~原等式：$\int_{-\infty}^{+\infty} f^2(t)\,dt \wedge \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F[g](\lambda)$~~ $d\lambda$

两侧同时反演

$$g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} |F(\lambda)|^2 e^{i\lambda x}\,d\lambda$$

令 $x=0$ 即证

$$g(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) f(t)\,dt = LHS$$

$$g(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} |F(\lambda)|^2 e^0\,d\lambda = RHS.$$

例4 求正弦衰减函数

$g(x)$

$$f(x)=\begin{cases} e^{-\beta x}\sin\omega_0 x, & x\ge 0, \\ 0, & x<0 \end{cases} \quad (\beta>0)$$

的**Fourier**变换.

例5 设无穷长细杆温度分布为$T=T(x,t)$满足

$$\frac{\partial T}{\partial t}=\frac{\partial^2 T}{\partial x^2},\quad T(x,0)=f(x),\, x\in\mathbb{R}$$

其中初始温度$f(x)$在**R**上绝对可积.

$$\frac{e^{i\omega_0 x} - e^{-i\omega_0 x}}{2i}$$

$$f(x) = g(x)\sin\omega_0 x$$

$$= \frac{1}{2i} g(x)\left(e^{i\omega_0 x} - e^{-i\omega_0 x}\right)$$

频移性.

$$F[f](\lambda) = \frac{1}{2i} F[g(x)e^{i\omega_0 x}](\lambda) + \frac{1}{2i} F[g(x)e^{-i\omega_0 x}](\lambda)$$

$$= \frac{1}{2i} F[g](\lambda-\omega_0) - \frac{1}{2i} F[g](\lambda+\omega_0)$$

$$= \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{\beta+i(\lambda-\omega_0)} - \frac{1}{\beta+i(\lambda+\omega_0)}\right)$$

$$\frac{1}{2i}\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\, e^{i\omega_0 x} e^{-i\lambda x}\, dx$$

$$= \frac{1}{2i}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\beta x + i\lambda(\omega_0 - x)}\, dx$$

$$= \quad e^{(-\beta - i\lambda)x + i\lambda\omega_0}$$

$$\frac{e^{\sim}}{2i(-\beta - i\lambda)}$$

eg5.

$F[T]$
$= u(\lambda,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} T(x,t) e^{-i\lambda x} dx$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \int \cdots \frac{\partial T}{\partial t} \sim = F\left[\frac{\partial T}{\partial t}\right]$$

$$F\left[\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right](\lambda) = (i\lambda)^2 F[T](\lambda) = -\lambda^2 F[T](\lambda)$$

$$= -\lambda^2 u(\lambda,t)$$

故 $\dfrac{\partial u(\lambda,t)}{\partial t} = -\lambda^2 u(\lambda,t)$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\lambda^2 u$$

$$u(\lambda,t) = C(\lambda) e^{-\lambda^2 t}$$

令 $t=0$. 设 $F[f] = C(\lambda) = u(\lambda,0)$

$$u(\lambda,t) = F[f] \cdot e^{-\lambda^2 t}$$

$$\overset{def}{=} F[f] \cdot F[g]$$

$$= F[f * g]$$

$$T(\lambda,t) = f * g\ (\lambda)$$

$$g(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F[g](\lambda) e^{i\lambda x} d\lambda = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda^2 t} e^{i\lambda x} d\lambda$$

$T(\lambda, \gamma) =$