Chap 12

Fourier分析

引例 1807年, Fourier研究杆状物热流问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \dfrac{\partial T}{\partial t}, & T = T(x,t), \\ T(0,t) = T(l,t) = 0, & t > 0 \quad \text{(边界条件)} \\ T(x,0) = f(x), & 0 < x < l \quad \text{(初始条件)} \end{cases}$$

其中 $T = T(x, t)$ 表示 t 时刻杆子 x 处的温度.

解 设 $T(x, t) = \varphi(x)\,\psi(t)$, 则有

$$\frac{\frac{\partial T}{\partial t}}{T} < 0$$

$$\varphi''(x)\psi(t) = \varphi(x)\psi'(t) \quad \Rightarrow \quad \frac{\varphi''(x)}{\varphi(x)} = \frac{\psi'(t)}{\psi(t)} = -\lambda \quad (\lambda > 0)$$

导出 $$\begin{cases} \varphi''(x)+\lambda\varphi(x)=0, & \cdots(1) \\ \varphi(0)=\varphi(l)=0, & \\ \psi'(t)+\lambda\psi(t)=0. & \cdots\ (2) \end{cases}$$

解方程(1)得 $\varphi(x)=b\sin\sqrt{\lambda}x+c\cos\sqrt{\lambda}x$

由 $\varphi(0)=0$ 得 $c=0$; 由 $\varphi(l)=0$ 得 $\sin\sqrt{\lambda}l=0$

导出 $\sqrt{\lambda}l=n\pi \quad\Rightarrow\quad \lambda_n=\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 \quad (n=0,1,2,\cdots)$

于是 $$\varphi(x)=b_n\sin\frac{n\pi}{l}x$$

解方程(2)得 $\psi(t)=Ce^{-\lambda t}$, 取 $C=1$ (为什么可以?)

得一个解 $$T_n(x,t)=b_n\exp\left(-\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 t\right)\sin\frac{n\pi}{l}x$$

叠加得 $$T(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\exp\left(-\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 t\right)\sin\frac{n\pi}{l}x$$

令$t=0$有 $$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\frac{n\pi}{l}x$$ 进而确定b_n.

问题 $[0, l]$上函数$f(x)$总能表示成三角函数之和? 即

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi}{l}x+b_n\sin\frac{n\pi}{l}x\right)$$

右端称为三角级数, 其中a_0, a_n, b_n $(n=1,2,\ldots)$称为系数

思考 如何确定系数a_0, a_n, b_n?

Chap12 — 1

函数的Fourier级数

12.1.1 周期函数与三角函数系的正交性

一、周期函数 若$g(t)$以T为周期, 作变换

$$x=\frac{2\pi}{T}t \quad \text{或} \quad t=\frac{T}{2\pi}x$$

则

$$f(x)=g\left(\frac{T}{2\pi}x\right)$$

是以2π为周期的函数.

二、周期延拓 若f是定义在$[-l, l\,]$上的函数, 令

$$F(x)=\begin{cases} f(x-2nl), & (2n-1)l<x<(2n+1)l \\ \dfrac{f(l)+f(-l)}{2}, & x=(2n+1)l \end{cases}$$

则F是**R**上以$2l$为周期的函数, $F(x)=f(x),\ x\in(-l, l\,)$.

例1 设

$$f(x)=\begin{cases} x, & 0\le x\le l \\ 0, & -l\le x<0 \end{cases}$$

将其延拓为**R**上周期为$2l$的函数.

$$F(x)=\begin{cases} 0 & (2n-1)l<x\le 2nl \\ x-2nl & 2nl<x<(2n+1)l \\ \frac{l}{2} & x=(2n+1)l \end{cases}$$

三、偶延拓与奇延拓 若f是定义在$[0, l\,]$上的函数, 令

$$f_e(x)=\begin{cases} f(x), & 0\le x\le l \\ f(-x), & -l\le x<0 \end{cases}$$

则 $f_e(x)$是$[-l, l\,]$上的偶函数, $f_e(x)=f(x), x\in[0, l\,]$.

令

$$f_o(x)=\begin{cases} f(x), & 0<x\le l \\ 0, & x=0 \\ -f(-x), & -l\le x<0 \end{cases}$$

则$f_o(x)$是$[-l, l\,]$上的奇函数, $f_o(x)=f(x), x\in(0, l\,]$.

四、三角函数系的正交性

定义 函数集合 $\{1, \cos x, \sin x, \cdots, \cos nx, \sin nx, \cdots\}$

称为三角函数系. 其特点: 正交性　积化和差

1) $$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx \mathrm{d}x = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ 1, & m = n \neq 0 \\ 2, & m = n = 0 \end{cases} \quad (m, n = 1, 2, \cdots)$$

2) $$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx \mathrm{d}x = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ 1, & m = n \end{cases} \quad (m, n = 1, 2, \cdots)$$

3) $$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cos nx \mathrm{d}x = 0 \quad (m = 1, 2, \cdots; n = 0, 1, \cdots)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\cos(m+n)x + \cos(m-n)x\right)dx$$

m≠n时

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(m+n)x}{m+n} + \frac{\sin(m-n)x}{m-n}\right]_{-\pi}^{\pi}$$

$$= 0$$

m=n≠0时 原 $= \left.\frac{\sin(m+n)x}{m+n}\right|_{-\pi}^{\pi} + \pi = \pi$

12.1.2 周期函数的Fourier级数

设在$[-\pi,\pi]$上函数$f(x)$可展开为三角级数, 即

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

deal m=n=0.

问题 级数的系数a_n, b_n与$f(x)$有什么关系?

结论 利用正交性，可得

Fourier系数公式

$$\begin{cases} a_n=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\mathrm{d}x, & n=0,1,2,\cdots, \\ b_n=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\mathrm{d}x, & n=1,2,\cdots. \end{cases}$$

⊗ 由题定义,

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,dx = \int_{-\pi}^{\pi}\frac{a_0}{2}\cos kx\,dx + \sum_{n=1}^{\infty}\int_{-\pi}^{\pi}(a_n\cos nx + b_n\sin nx)\cos kx\,dx$$

$$= \begin{cases} \pi a_0 & k=0 \\ \int_{-\pi}^{\pi} a_k\cos kx\cos kx\,dx = \pi a_k \end{cases}$$

故得证.

含字 常见 $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx$ 和 $\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|\,dx$ 收敛

可积且绝对可积 函数f满足下两条件之一:

- ➢ $f \in R[-\pi, \pi]$; 若 $\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|\,dx$ 收敛 ∵ $\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)\cos nx| \leq f(x)$,
- ➢ 瑕积分 $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\mathrm{d}x$ 绝对收敛; ∴ $\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)\cos nx|$ 收敛

$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx$ 绝对收敛

定义 设$f(x)$以2π为周期, 且在$[-\pi, \pi]$上可积且绝对可积, 以f的Fourier系数a_n, b_n为系数的三角级数称为$f(x)$的**Fourier级数(F氏级数)**, 记为

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

注意 正确理解符号 “~” 的含义!

12.1.3 Dirichlet收敛定理

定义 设$f:[a, b]\to\mathbf{R}$, 若可将$[a, b]$分为有限个子区间, 使f在每个开子区间内部连续可微, 端点有单侧极限, 及拟单侧导数, 则称f 在$[a, b]$上分段可微.

定理(Dirichlet) 设f以2π为周期, 在$[-\pi, \pi]$上分段可微,

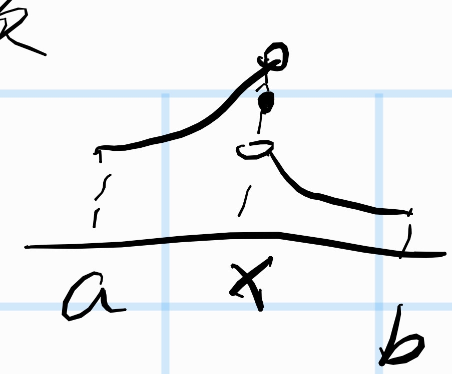
则其F氏级数收敛, 且

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)=\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$$

例2 求 $f(x)=\begin{cases}0, & -\pi<x<0,\\ x, & 0\le x<\pi\end{cases}$的F氏级数并写出和函数

左导数: $f'_-(x) = \lim\limits_{x\to x_0^-} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ 左导数

拟左导数 $\lim\limits_{x\to x_0^-} \dfrac{f(x)-f(x_0-0)}{x-x_0}$ ← 左极限



分段函数

eg2. $a_0 = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \dfrac{1}{\pi}\dfrac{1}{2}\pi^2 = \dfrac{\pi}{2}$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos nx\,dx$$

$$= \frac{1}{n\pi}\int_0^{\pi} x\,d\sin nx = \frac{1}{n\pi}x\sin nx\Big|_0^{\pi} - \frac{1}{n\pi}\int_0^{\pi}\sin nx\,dx$$

$$= -\frac{1}{n^2\pi}\cos nx\Big|_0^{\pi} = \frac{(-1)^n-1}{n^2\pi}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin nx\,dx = -\frac{1}{n\pi}\int_0^{\pi} x\,d\cos x = -\frac{\pi}{n\pi} + \frac{1}{n^2\pi}\int_0^{\pi}\cos nx\,dx$$

$$= \frac{(-1)^{n-1}}{\pi}$$

$$f(x) \sim \frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n-1}{n^2\pi}\cos nx + \frac{(-1)^{n-1}}{n}\sin nx\right)$$

12.1.4 正弦和余弦级数

设$f(x)$在$[-\pi, \pi]$上可积且绝对可积, 且为奇函数, 则

其Fourier系数中$a_n = 0,$

$$\boxed{b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\mathrm{d}x}$$

其Fourier级数 $f(x) \sim \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$ 称为正弦级数.

想一想 余弦级数的定义?

约定 若f仅在$[0, \pi]$(或$[-\pi, 0]$)上可积且绝对可积,

对f作**奇延拓**后函数f_o的F氏(正弦)级数也称为f的**正弦级数**, 此时

$$\boxed{b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\mathrm{d}x}$$

想一想 仅在$[0, \pi]$上定义的函数的**余弦级数**?

例3 求 $f(x)=x^2\ (x\in[0,\pi])$ 的正弦和余弦级数.

$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2 \sin nx dx$

$= \frac{-2}{n\pi}\int_0^{\pi} x^2 d\cos nx$

$= \frac{-2}{n\pi}\left[x^2\cos nx\Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\cos nx dx^2\right]$

$= \frac{-2}{n\pi}\left((-1)^n\pi^2 -\right.$

余弦级数 $f(x) \sim \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos nx = \begin{cases} x^2 & 0<x<\pi \\ 0 & x=0 \\ \pi^2 & x=\pi \end{cases} = x^2$

$x=\pi$

$$\frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \pi^2 \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

$x=0$ $\frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = 0$

12.1.5 周期为$2l$函数的F氏级数

设$f(x)$以$2l$为周期, 在$[-l, l]$上可积且绝对可积. 令

$x=\frac{l}{\pi}t$, 则 $g(t)=f\left(\frac{l}{\pi}t\right)$在$[-\pi,\pi]$上可积且绝对可积, 故

$$g(t)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nt+b_n\sin nt),$$

从而

$$\boxed{f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi}{l}x+b_n\sin\frac{n\pi}{l}x\right)}$$

其中 $a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi}{l}x\mathrm{d}x,\ \ b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\mathrm{d}x$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(t)\cos nt\,dt$$

$$\xlongequal{x=\frac{l}{\pi}t} \frac{1}{\pi}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\left(n\frac{\pi}{l}x\right)\frac{\pi}{l}\,dx$$

$$= \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx$$

定理(Dirichlet) 设f 以$2l$为周期, 在$[-l, l]$上分段可微,

则其F氏收敛, 且

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi}{l}x+b_n\sin\frac{n\pi}{l}x\right)$$

$$=\begin{cases}\dfrac{f(x+0)+f(x-0)}{2}, & x\in(-l,l)\\[2ex] \dfrac{f(-l+0)+f(l-0)}{2} & x=\pm l\end{cases}$$

例4 求$f(x)=|\sin x|$的周期为π的F氏级数并写出和函数

$l=\frac{\pi}{2}$ $\quad a_0=\frac{2}{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,dx=\frac{4}{\pi}$

$$a_n=\frac{2}{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\cos\frac{n\pi}{\frac{\pi}{2}}x\,dx$$

$$=\frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\cos(2nx)\,dx$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin(2n+1)x-\sin(2n-1)x)\,dx$$

$$=\frac{2}{\pi}\left[\frac{-\cos(2n+1)x}{2n+1}+\frac{\cos(2n-1)x}{2n-1}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{-4}{\pi}\cdot\frac{1}{4n^2-1}$$

$$f(x)\sim\frac{2}{\pi}-\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2nx}{4n^2-1}=\begin{cases}\sin x, & -\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}\\ 1 & x=\pm\frac{\pi}{2}\end{cases}$$

12.1.6 F氏级数的复数形式

由Euler公式

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}=\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta \longleftrightarrow \cos\theta=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}}{2},\sin\theta=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}}{2\mathrm{i}}$$

可导出 f 的复数形式F氏级数.

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n-\mathrm{i}b_n}{2}\mathrm{e}^{in\omega x}+\frac{a_n+\mathrm{i}b_n}{2}\mathrm{e}^{-in\omega x}\right)$$

其中 $\omega=\dfrac{\pi}{l}$ 为基频,

$$a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos n\omega x\mathrm{d}x,\quad b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin n\omega x\mathrm{d}x$$

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n - \mathrm{i}b_n}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\omega x} + \frac{a_n + \mathrm{i}b_n}{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\omega x}\right)$$

$$\overset{\text{def}}{=} F_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(F_n \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\omega x} + F_{-n}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\omega x}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\omega x}$$

其中

$$F_0 = \frac{a_0}{2} = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(x)\mathrm{d}x,$$

$$F_n = \frac{a_n - \mathrm{i}b_n}{2} = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\omega x}\mathrm{d}x,$$

$$F_{-n} = \overline{F_n}$$

称为f的**Fourier系数的复数形式.**

$$\frac{a_n - ib_n}{2}$$

$$F_n = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(x)(\cos n\omega x - i\sin n\omega x)\,dx$$

$$= \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(x)\, e^{-in\omega x}\,dx$$