Chap 11 — 4

向量场在曲面上的积分

第2型曲面积分.

11.4.1 双侧曲面及其定侧

双侧曲面 设S为光滑曲面, 指定其上点P处的法向量$\boldsymbol{n}$. 当点P 沿S上任意连续闭曲线不越过S的边界回到起始位置时, 法向量$\boldsymbol{n}$始终保持原来指向.

Möbius带 非双侧曲面(**单侧曲面**).

定侧曲面 双侧曲面S的侧向由其**法向量组**确定. 选定S 的一侧为**正侧**, 记为S^+, 则另一侧为**负侧**, 记为S^-

约定 若曲面S的方程为： $z=f(x,y)$, $(x,y)\in D$

则其**单位法向量**

$$\boldsymbol{n}^{\circ}=\pm\frac{(-f'_x,-f'_y,1)}{\sqrt{1+f'^2_x+f'^2_y}}$$

选“+”号时, 则$\boldsymbol{n}^{\circ}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$, 其中

$$\cos\gamma=\frac{1}{\sqrt{1+f'^2_x+f'^2_y}}>0$$

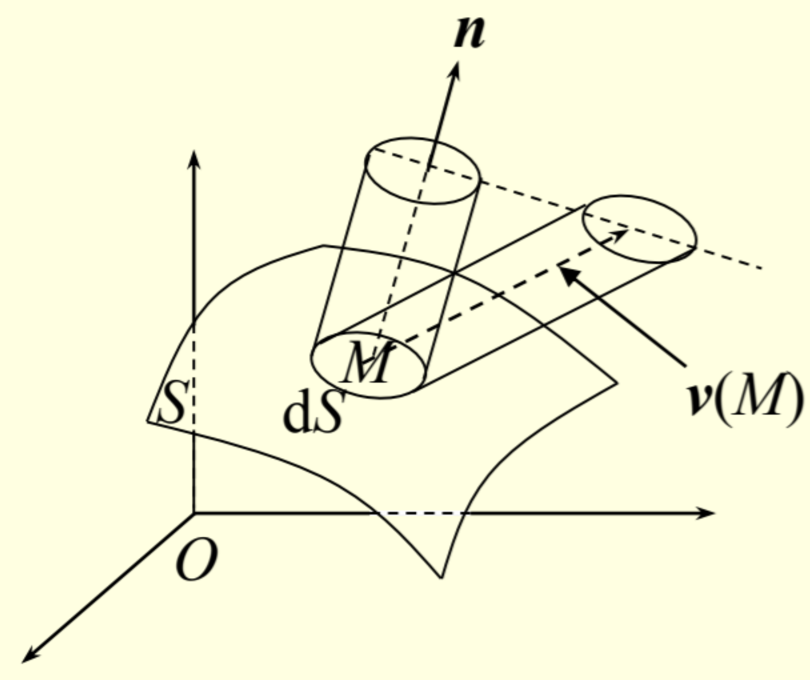
故$\boldsymbol{n}^{\circ}$与z轴正向夹角$\gamma<90^{\circ}$, 指向**上侧**, 规定为S的**正侧**

注 封闭曲面规定其**外侧**为**正侧**

11.4.2 向量场在曲面上的积分的定义与计算

问题 设均匀流体的流速场 $\boldsymbol{v}=(P, Q, R)$. 流体自光滑曲面 S 负侧流向正侧, 求单位时间流体通过 S 的体积流量

微元法 考察单位时间流体通过**曲面微元** $\mathrm{d}S$ 的体积流量



$$\boxed{\begin{gathered}\mathrm{d}N=\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}^{\circ}\mathrm{d}S \\ \Rightarrow N=\iint_S \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}^{\circ}\mathrm{d}S\end{gathered}}$$

第一型

其中 $\boldsymbol{n}^{\circ}$ 是曲面 S 上**指向正侧**单位法向量

定义 设S为定侧曲面, 向量场$\boldsymbol{v}=(P,Q,R)$在S上的

第二型曲面积分

(向量形式) ⟶ $$\iint_S \boldsymbol{v}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} \overset{\text{def}}{=} \iint_S (\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}^\circ)\mathrm{d}S$$

dS

定侧曲面

微元在xOy投影

由于**定侧曲面微元**

cosγ dS

$$\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\boldsymbol{n}^\circ\mathrm{d}S=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)\mathrm{d}S=(\mathrm{d}y\mathrm{d}z,\mathrm{d}z\mathrm{d}x,\mathrm{d}x\mathrm{d}y)$$

于是

$$\boxed{\begin{aligned}\iint_S \boldsymbol{v}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} &= \iint_S (P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)\mathrm{d}S\\ &= \iint_S P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y\end{aligned}}$$

(两型曲面积分关系) (坐标形式)

注 当曲面S封闭时，积分为流体通过S的**通量**，记为

$$N=\oiint_S \boldsymbol{v}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\oiint_S P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

侧向性 第二型曲面积分与曲面的侧向有关，且

$$\iint_{S^-} P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\iint_{S^+} P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

其它性质同第一型曲面积分，如线性性和可加性.

注意 (1) 两型曲面积分的形式不同

(2) 当$P=Q=0$时，$\iint_S R\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 仍为第二型

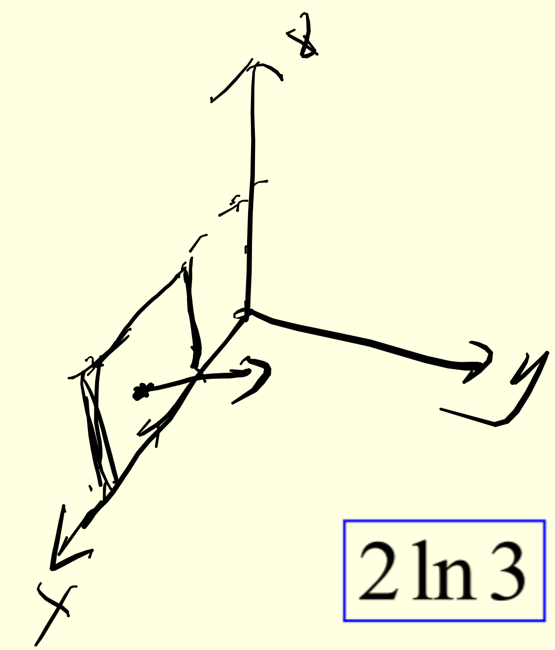
此外, 还有

$$\iint_S P\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \iint_S P\mathrm{d}y\mathrm{d}z + \iint_S Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x + \iint_S R\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

例1 求向量场

$$\boldsymbol{v} = \frac{-y\boldsymbol{i} + x\boldsymbol{j}}{x^2 + y^2}$$



过zOx面上定向为y轴正向的正方形 $\boxed{2\ln 3}$

$S = \{(x,\ 0,\ z) |\ 1 \le x \le 3,\ 0 \le z \le 2\}$的通量.

$$N = \iint_S v \cdot dS = \iint_S \frac{-y}{x^2+y^2} dy\,dz + \frac{x}{x^2+y^2} dx\,dz$$

$$N = \iint_S v\, dS = \iint_S v \cdot \overset{(0,b,0)}{n_0}\, dS = \iint_S \frac{x}{x^2+y^2} dS = \iint_{[1,3]\times[0,2]} \frac{x}{x^2+0^2} dx\,dz = \int_1^3 dx \int_0^2 \frac{1}{x} dz$$

xz不变，y用0来代替

$$= 2\int_1^3 \frac{dx}{x} = 2\ln 3$$

定理 若定侧光滑曲面S为

$$\begin{cases} x = x(u,v), \\ y = y(u,v), \quad (u,v) \in D \\ z = z(u,v), \end{cases}$$

则

$$\left(P\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)} + Q\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)} + R\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right)$$

$$\boxed{\iint_S P\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \pm\iint_D (PA + QB + RC)\mathrm{d}u\mathrm{d}v}$$

注 其中 $\pm$ 号选择由 S 指定侧的法向量确定.

特例 1) 若曲面S的方程为 $z = f(x,y), \quad (x,y) \in D$, 则

$$\boxed{\iint_S P\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \pm\iint_D (-Pf_x' - Qf_y' + R)\mathrm{d}x\mathrm{d}y}$$

合一投影法

$(A,B,C)=r_u'\times r_v'$

证：$\vec{v}=(P,Q,R)$ $\vec{n_0}=\pm\frac{(A,B,C)}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$ 故

$$LHS=\iint_S \vec{v}\cdot\vec{n_0}\,dS=\iint_S \frac{PA+QB+RC}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\sqrt{A^2+B^2+C^2}\,du\,dv=RHS$$

$\pm$：法向量 (A,B,C) 是指定侧，取"+"

(A,B,C) 不是，取"−"

特例：$x=x, y=y, z=f(x,y)$

$r_x'=(1,0,f_x')$ $r_y'=(0,1,f_y')$

$r_x'\times r_y'=(-f_x',-f_y',1)$

$\longrightarrow >0$ 指向"上"侧

2) 当$P=Q=0$, 曲面S为 $z=f(x,y)$, $(x,y)\in D$时

$$\boxed{\iint_S R(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\pm\iint_D R(x,y,f(x,y))\mathrm{d}x\mathrm{d}y}$$

当曲面S指定上侧时, 选 $+$号, 指定下侧时, 选$-$号.

3) 当曲面S为母线平行于z 轴的柱面时

$$\boxed{\iint_S R(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0}$$ RC, C=0

例2 计算积分 $I=\iint_S xyz\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$$\boxed{1)\ 0;\quad 2)\ \frac{2}{15}}$$

其中S 是单位球面 $x^2+y^2+z^2=1$的部分外侧.

1) $z\ge 0$; 2) $x\ge 0, y\ge 0$.

上半球面 第一卦

$z=\sqrt{1-x^2-y^2} \quad x,y\in D$

$$I=\iint_D xy\sqrt{1-x^2-y^2}\,dxdy=0$$

(8) 分上下: $D= x^2+y^2\le 1,\ x\ge 0, y\ge 0$

$$I_{上}=\iint_D xy\sqrt{1-x^2-y^2}$$

$$I_{下}=-\iint_D xy(-\sqrt{1-x^2-y^2})$$

$$I=2\iint_D xy\sqrt{1-x^2-y^2}=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^1 r^2\cos\theta\sin\theta\sqrt{1-r^2}\cdot r\,dr$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2\theta\,d\theta\int_0^1 r^3\sqrt{1-r^2}\,dr$$

$$=1\qquad \underset{r=\sin t}{\int_0^{\frac{\pi}{2}}}\sin^3 t\cos t\,d\sin t$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3 t\cos^2 t\,dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3 t\,dt-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^5 t\,dt$$

$$=\frac{2!!}{3!!}-\frac{4!!}{5!!}=\frac{2}{3}-\frac{8}{15}=\frac{2}{15}$$

⊛ 若S关于xoy对称，则

$$\iint_S R\,dxdy=\begin{cases}2\iint_{S_{上}} R\,dxdy & R关于z奇\\ 0 & R关于z偶\end{cases}$$

例3 设有流速为 $\boldsymbol{v}=(x, 2xy, -2z)$的流体. 求单位时间流体经锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}\,(0\le z\le h)$ 上侧流向下侧的流量.

$$\boxed{\frac{5\pi h^3}{3}}$$

例4 求向量场 $\boldsymbol{v}=(q/r^3)\boldsymbol{r}$ 通过圆柱面S: $x^2+y^2=a^2$, $-h\le z\le h$ 外侧的通量, 其中$\boldsymbol{r}=(x, y, z)$, $r=|\boldsymbol{r}|$.

$$\boxed{4\pi q\frac{h}{\sqrt{a^2+h^2}}}$$

eg3.  下侧.

$$\iint_S x\,dydz + 2xy\,dzdx - 2z\,dxdy$$

$$= (-)\iint_{x^2+y^2\le h} -x f'_x\,dydz - 2xy f'_z\,dzdx - 2z\,dxdy$$

$$= -\iint_{x^2+y^2\le h}\left(-x\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \underbrace{- 2xy\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}}_{0} - 2\sqrt{x^2+y^2}\right)dxdy = \iint_{x^2+y^2\le h}\left(\frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} + 2\sqrt{x^2+y^2}\right)dxdy$$

$$\left\langle \iint \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy = \iint \frac{y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy = \frac{1}{2}\iint \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy = \frac{1}{2}\iint\sqrt{x^2+y^2}\,dxdy \right\rangle$$

$$= \frac{5}{2}\iint_{x^2+y^2\le h}\sqrt{x^2+y^2}\,dxdy = \frac{5}{2}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^h r\cdot r\,dr = \frac{5}{2}\cdot 2\pi\cdot\frac{1}{3}h^3 = \frac{5}{3}\pi h^3$$

eg4. $$N = \iint_S \vec{v}\cdot d\vec{S} = q\iint_S \frac{x\,dydz + y\,dzdx + z\,dxdy}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$$

$r'_\theta = (-a\sin\theta,\ b\cos\theta,\ 0)$

$S: r(\theta, z) = a\cos\theta\,\vec{i} + a\sin\theta\,\vec{j} + z\vec{k}$

$r'_z = (0,\ 0,\ 1)$

$(A, B, C) = r'_\theta \times r'_z = (a\cos\theta,\ a\sin\theta,\ 0)$

外侧

$$N = q\iint_D\left(\frac{a\cos\theta}{(a^2+z^2)^{3/2}}\cdot a\cos\theta + \frac{a\sin\theta}{(a^2+z^2)^{3/2}}\cdot a\sin\theta + \frac{z}{(a^2+z^2)^{3/2}}\cdot 0\right)d\theta dz$$

$$= q\iint_D \frac{a^2+0}{(a^2+z^2)^{3/2}}d\theta dz = q\int_0^{2\pi}d\theta\int_{-h}^{h}\frac{a^2}{(a^2+z^2)^{3/2}}dz$$

例5 求曲面积分

$$\iint_S x^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y^3\mathrm{d}z\mathrm{d}x$$

其中S是上半椭球面

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1\,(z\geq 0)$$

并指定上侧.

$$\boxed{\frac{2\pi abc}{5}(a^2+b^2)}$$

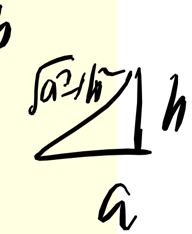
$= 4\pi q a^2 \int_0^h \frac{dz}{(a^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$ $\quad z = a\tan t$

$= 4\pi q a^2 \int \frac{a\, d\tan t}{a^3 \sec^3 t} dt = 4\pi q \int \frac{d\tan t}{\sec^3 t}$

$= 4\pi q \int_0^{\arctan\frac{h}{a}} \frac{\sec^2 t\, dt}{\sec^3 t}$

$= 4\pi q \int_0^{\arctan\frac{h}{a}} \cos t\, dt$

$= 4\pi q \sin t \Big|_0^{\arctan\frac{h}{a}}$



$= 4\pi q \frac{h}{\sqrt{a^2+h^2}}$

$x = a\sin\varphi\cos\theta \quad y = b\sin\varphi\sin\theta \quad z = c\cos\varphi$ $\quad \varphi \in (0, \frac{\pi}{2})$, $\theta \in (0, 2\pi)$

$$I = \iint_D a^3\sin^3\varphi\cos^3\theta \frac{\partial(y,z)}{\partial(\varphi,\theta)} + b^3\sin^3\varphi\sin^3\theta \frac{\partial(z,x)}{\partial(\varphi,\theta)}$$

$$\begin{vmatrix} b\cos\varphi\sin\theta & b\sin\varphi\cos\theta \\ -c\sin\varphi & 0 \end{vmatrix} = bc\sin^2\varphi\cos\theta \qquad \begin{vmatrix} -c\sin\varphi & 0 \\ a\cos\varphi\cos\theta & -a\sin\varphi\sin\theta \end{vmatrix} = ac\sin^2\varphi\sin\theta$$

$$= \iint_D (P\, bc\sin^2\varphi\cos\theta + Q\, ac\sin^2\varphi\sin\theta)\, d\varphi\, d\theta$$

$$= \iint_D abc\sin^5\varphi(a^2\cos^4\theta + b^2\sin^4\theta)\, d\varphi\, d\theta$$

$$= a^3bc\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^5\varphi\, d\varphi\int_0^{2\pi}\cos^4\theta\, d\theta + ab^3c\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^5\varphi\, d\varphi\int_0^{2\pi}\sin^4\theta\, d\theta$$

$$= a^3bc\,\frac{4!!}{5!!}\cdot 4\cdot\frac{3!!}{4!!}\,\frac{\pi}{2} + \bigcirc$$

$$= \frac{2}{5}\pi a^3bc + \frac{2}{5}\pi ab^3c$$

$$= \frac{2}{5}\pi abc(a^2+b^2)$$