第十五周作业参考答案与部分解析

习题 12.4 P294-295

T1. (1) 答案:

$$\int_0^{+\infty}[A(\lambda)\cos\lambda x+B(\lambda)\sin\lambda x]\,\mathrm{d}\lambda=\begin{cases}f(x), & x\neq T\\ \dfrac{kT}{2}, & x=T\end{cases}$$

其中

$$A(\lambda)=\frac{k}{\pi\lambda^2}(\lambda T\sin\lambda T+\cos\lambda T-1),\ \ B(\lambda)=\frac{k}{\pi\lambda^2}(\sin\lambda T-\lambda T\cos\lambda T).$$

(2) 答案:

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{1-\cos\lambda}{\lambda}\sin\lambda x\,\mathrm{d}\lambda$$

T2. (2)

(2) 注意到 $f(x)$ 为偶函数, 故其 Fourier 变换为

$$\begin{aligned}\hat{f}(u)&=\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-a|t|}\cos bt\cos ut\,\mathrm{d}t\\&=2\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-at}\cos bt\cos ut\,\mathrm{d}t\\&=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-at}(\cos t(u-b)+\cos t(u+b))\,\mathrm{d}t\\&=a\left(\frac{1}{a^2+(u-b)^2}+\frac{1}{a^2+(u+b)^2}\right).\end{aligned}$$

T3. (1)

$$\begin{aligned}a(u)&=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-t}\cos ut\,\mathrm{d}t=\frac{2}{\pi}\frac{1}{1+u^2},\\ \Longrightarrow\ f(x)&=\int_0^{+\infty}\frac{2}{\pi}\frac{1}{1+u^2}\cos ux\,\mathrm{d}u=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\cos ux}{1+u^2}\,\mathrm{d}u.\end{aligned}$$

(2) 答案:

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{u\sin ux}{1+u^2}\,\mathrm{d}u$$

T4.

解 注意到, $f(x)$ 为偶函数, 因此其 Fourier 变换为余弦变换,

$$a(u)=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}f(t)\cos ut\,\mathrm{d}t=\frac{2}{\pi}\int_0^1\cos ut\,\mathrm{d}t=\frac{2}{\pi}\frac{\sin u}{u},$$

$$\Longrightarrow\ f(x)\sim\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\sin u\cos ux}{u}\,\mathrm{d}u=\begin{cases}1, & |x|<1,\\ \dfrac{1}{2}, & |x|=1,\\ 0, & |x|>1,\end{cases}$$

$$\Longrightarrow\ \int_0^{+\infty}\frac{\sin u\sin ux}{u}\,\mathrm{d}u=\begin{cases}\dfrac{\pi}{2}, & |x|<1,\\ \dfrac{\pi}{4}, & |x|=1,\\ 0, & |x|>1.\end{cases}$$

习题 13.1 P307

T1. (3)

$$\lim_{x\to\infty} x^{\frac{1}{3}}\cdot\frac{x\arctan x}{\sqrt[3]{1+x^4}}=\frac{\pi}{2}\Rightarrow\int_0^{+\infty}\frac{x\arctan x}{\sqrt[3]{1+x^4}}\mathrm{d}x \text{ 发散}$$

(4)

(4)

$$\int_{e^2}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x\ln\ln x}=\int_{e^2}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}\ln x}{\ln\ln x}\xlongequal{\ln x\to t}\int_2^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{\ln t},$$

注意到

$$\frac{\frac{1}{\ln t}}{\frac{1}{t}}=\frac{t}{\ln t}\to+\infty,\quad t\to+\infty,$$

由 $\int_2^{+\infty}\frac{1}{t}\mathrm{d}t$ 发散及比较判别法知, 原积分发散.

(6)

$$\lim_{x\to1^-}\frac{(1-x)^{\frac{5}{3}}x^2}{\sqrt[3]{(1-x^2)^5}}=\lim_{x\to1^-}\frac{(1-x)^{\frac{5}{3}}}{\sqrt[3]{(1-x^2)^5}}=\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\Rightarrow\int_0^{+\infty}\frac{x^2}{\sqrt[3]{(1-x^2)^5}}\mathrm{d}x \text{ 发散}$$

(9)

$$\lim_{x\to0^+}\frac{x}{e^x-\cos x}=1\Rightarrow\int_0^1\frac{1}{e^x-\cos x}\mathrm{d}x \text{ 发散}$$

(11) 提示：按照 $x=0$ 与 $x=\frac{\pi}{2}$ 分段判断（用上述方法）.　答案：发散.

(12)

(12)

$$\int_0^{+\infty}\frac{\arctan x}{x^\mu}\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{\arctan x}{x^\mu}\mathrm{d}x+\int_1^{+\infty}\frac{\arctan x}{x^\mu}\mathrm{d}x,$$

而

$$\frac{\arctan x}{x^\mu}\sim\frac{1}{x^{\mu-1}},\quad x\to0,$$

(I) 当 $\mu-1\leqslant0\iff\mu\leqslant1$ 时, $\int_0^1\frac{\arctan x}{x^\mu}\mathrm{d}x$ 是 Riemann 可积的;

(II) 当 $0<\mu-1<1\iff1<\mu<2$ 时, $\int_0^1\frac{1}{x^{\mu-1}}\mathrm{d}x$ 收敛, 由比较判别法知, $\int_0^1\frac{\arctan x}{x^\mu}\mathrm{d}x$ 收敛;

(III) 当 $\mu-1\geqslant1\iff\mu\geqslant2$ 时, $\int_0^1\frac{1}{x^{\mu-1}}\mathrm{d}x$ 发散, 由比较判别法知, $\int_0^1\frac{\arctan x}{x^\mu}\mathrm{d}x$ 发散;

又

$$\frac{\arctan x}{x^\mu}\sim\frac{\pi}{2}\frac{1}{x^\mu},\quad x\to+\infty,$$

(I) 当 $\mu>1$ 时, $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^\mu}\mathrm{d}x$ 收敛, 由比较判别法知, $\int_1^{+\infty}\frac{\arctan x}{x^\mu}\mathrm{d}x$ 收敛;

(II) 当 $\mu\leqslant1$ 时, $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^\mu}\mathrm{d}x$ 发散, 由比较判别法知, $\int_1^{+\infty}\frac{\arctan x}{x^\mu}\mathrm{d}x$ 发散.

从而原积分当且仅当 $1<\mu<2$ 时收敛, 其余情况均发散.

T2. (3)

(3) 一方面,

$$\int_2^{+\infty}\frac{|\sin x|}{x\ln x}\,\mathrm{d}x \geqslant \int_2^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x\ln x}\,\mathrm{d}x=\int_2^{+\infty}\frac{1}{2x\ln x}\,\mathrm{d}x-\int_2^{+\infty}\frac{\cos 2x}{2x\ln x}\,\mathrm{d}x,$$

$\int_2^{+\infty}\frac{1}{2x\ln x}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\ln\ln x\Big|_2^{+\infty}$ 发散, 又 $\int_2^{a}\cos 2x\,\mathrm{d}x$ $(a>2)$ 有界且 $\frac{1}{2x\ln x}$ 单调递减趋于 0, 由 Dirichlet 判别法知, $\int_2^{+\infty}\frac{\cos 2x}{2x\ln x}\,\mathrm{d}x$ 收敛, 从而 $\int_2^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x\ln x}\,\mathrm{d}x$ 发散, 由比较判别法知, $\int_2^{+\infty}\frac{|\sin x|}{x\ln x}\,\mathrm{d}x$ 发散.

另一方面, $\int_2^{a}\sin x\,\mathrm{d}x$ $(a>2)$ 有界且 $\frac{1}{x\ln x}$ 单调递减趋于 0, 由 Dirichlet 判别法知, $\int_2^{+\infty}\frac{\sin x}{x\ln x}\,\mathrm{d}x$ 收敛.

综上, 原积分条件收敛.

(4)

(4)

$$\int_0^{+\infty}\frac{\ln(1+x)}{x^2(1+x^p)}\,\mathrm{d}x=\int_0^{1}\frac{\ln(1+x)}{x^2(1+x^p)}\,\mathrm{d}x+\int_1^{+\infty}\frac{\ln(1+x)}{x^2(1+x^p)}\,\mathrm{d}x,$$

注意到

$$0<\frac{\ln(1+x)}{x^2(1+x^p)}<\frac{\ln(1+x)}{x^2}<\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}},\quad x\to+\infty,$$

由比较判别法知, $\int_1^{+\infty}\frac{\ln(1+x)}{x^2(1+x^p)}\,\mathrm{d}x$ 收敛;

又

$$\frac{\ln(1+x)}{x^2(1+x^p)}\sim\frac{x}{x^2(1+x^p)}\sim\frac{1}{x},\quad x\to 0,$$

由 $\int_0^{1}\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$ 发散及比较判别法知, $\int_0^{1}\frac{\ln(1+x)}{x^2(1+x^p)}\,\mathrm{d}x$ 发散, 从而原积分发散.

(6)

解法 1: 令 $t=\frac{1}{x}$, 则 $\int_0^1\frac{\sin\frac{1}{x}}{x^p}\mathrm{d}x=\int_1^{+\infty}\frac{\sin t}{t^{2-p}}\mathrm{d}t$.

当 $2-p>1$, 即 $p<1$时, 原积分绝对收敛;

当 $0<2-p\leqslant 1$, 即 $1\leqslant p<2$时, 原积分条件收敛;

当 $2-p\leqslant 0$, 即 $p\geqslant 2$时, 原积分发散. (因为当 $q>0$时, 总有

$\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}x^q\sin x\mathrm{d}x>(n\pi)^q\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\sin x\mathrm{d}x=2(n\pi)^q$, 由 Cauchy 准则知 $\int_1^{+\infty}x^q\sin x\mathrm{d}x$ 发散;

或利用 Abel 判敛法解释如下:

若 $\int_1^{+\infty}x^q\sin x\mathrm{d}x$ $(q>0)$ 收敛, 则 $\int_1^{+\infty}\sin x\mathrm{d}x=\int_1^{+\infty}x^q\sin x\frac{1}{x^q}\mathrm{d}x$ 也收敛, 与 $\int_1^{+\infty}\sin x\mathrm{d}x$ 发散矛盾)

解法 2： 当 $0<p<1$ 时，由于 $\left|\dfrac{\sin\frac{1}{x}}{x^p}\right| \leqslant \dfrac{1}{x^p}$，且 $\int_0^1 \dfrac{1}{x^p}\mathrm{d}x$ 收敛，所以原积分绝对收敛；

当 $p=2$ 时，$\int_a^1 \dfrac{\sin\frac{1}{x}}{x^2}\mathrm{d}x = \cos 1 - \cos\dfrac{1}{a}$，所以原积分发散，但 $\int_a^1 \dfrac{\sin\frac{1}{x}}{x^2}\mathrm{d}x$ 有界；

当 $1 \leqslant p < 2$ 时，$\int_0^1 \dfrac{\sin\frac{1}{x}}{x^p}\mathrm{d}x = \int_0^1 \dfrac{\sin\frac{1}{x}}{x^2}x^{2-p}\mathrm{d}x$，由于 $\int_a^1 \dfrac{\sin\frac{1}{x}}{x^2}\mathrm{d}x$ 有界，x^{2-p} 单调且 $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{2-p}=0$，根据 Dirichlet 判敛法，原积分收敛；

当 $p>2$ 时，由 $\int_0^1 \dfrac{\sin\frac{1}{x}}{x^2}\mathrm{d}x = \int_0^1 \dfrac{\sin\frac{1}{x}}{x^p}x^{p-2}\mathrm{d}x$，若 $\int_0^1 \dfrac{\sin\frac{1}{x}}{x^p}\mathrm{d}x$ 收敛，又 x^{p-2} 在 $(0,1]$ 上单调有界，则根据 Abel 判敛法可知 $\int_0^1 \dfrac{\sin\frac{1}{x}}{x^2}\mathrm{d}x$ 收敛，矛盾. 故原积分发散.

T3.

先证：$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=b$ 存在.

只需证 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上有界. 用反证法. 假设 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上无界，则 $\exists X>a$，使得当 $x>X$ 时，有 $f(x)<-1$，从而 $\int_X^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x < \int_X^{+\infty}(-1)\,\mathrm{d}x$，原积分发散，与题设矛盾. 故 $f(x)$ 有界. 又 $f(x)$ 单调，从而 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=b$ 存在.

下证：$b=0$.

用反证法. 假设 $b\neq 0$，不妨 $b>0$，从而对 $\varepsilon=\dfrac{b}{2}$，$\exists X'>a$，使得当 $x>X'$ 时，有

$$|f(x)-b|<\frac{b}{2} \iff \frac{b}{2}<f(x)<\frac{3}{2}b,$$

从而

$$\int_{X'}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x > \int_{X'}^{+\infty}\frac{b}{2}\,\mathrm{d}x \to +\infty,$$

故原积分发散，与题设矛盾. 因此 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=b=0$.

说明 此处的“连续”条件并不是必需的.