

Chap 11

曲线和曲面积分

Chap 11 — 1

数量场在曲线上的积分

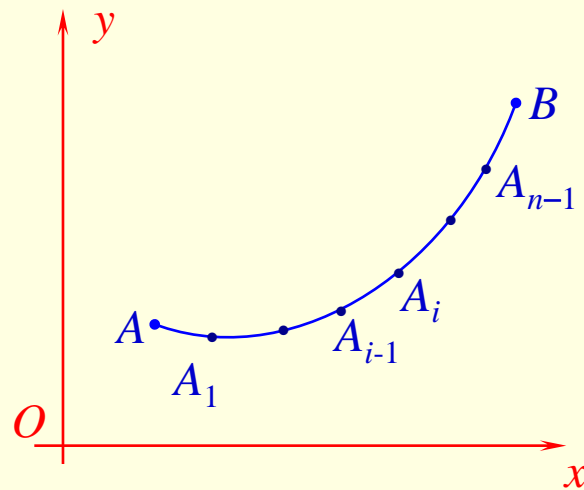
11.1.1 基本概念

问题 如何求一段弧状质线的质量?

设有 xOy 面上的曲线 L , 其端点为 A, B , 点 (x, y) 处的线密度为 $\varphi(x, y)$.

用分点 A_1, A_2, \dots, A_{n-1} 将 L 分成 n 小段, 记 $A_0 = A, A_n = B$, 第 i 小段弧 $A_{i-1}A_i$ 的长度为 Δs_i , 任取 (ξ_i, η_i)

\in 弧 $A_{i-1}A_i$, 则第 i 小段弧质量近似为 $\varphi(\xi_i, \eta_i)\Delta s_i$, 故



总质量近似为
$$\sum_{i=1}^n \varphi(\xi_i, \eta_i) \Delta s_i$$

记 $|T| = \max_{1 \leq i \leq n} \Delta s_i$, 则弧状质线的质量

$$m = \lim_{|T| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \varphi(\xi_i, \eta_i) \Delta s_i$$

试一试 去掉物理背景, 给出定义在曲线 L 上的函数
 $f(x, y)$ 的**第一型曲线积分(数量场的曲线积分)**

$$\int_L f(x, y) ds = \lim_{|T| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta s_i$$

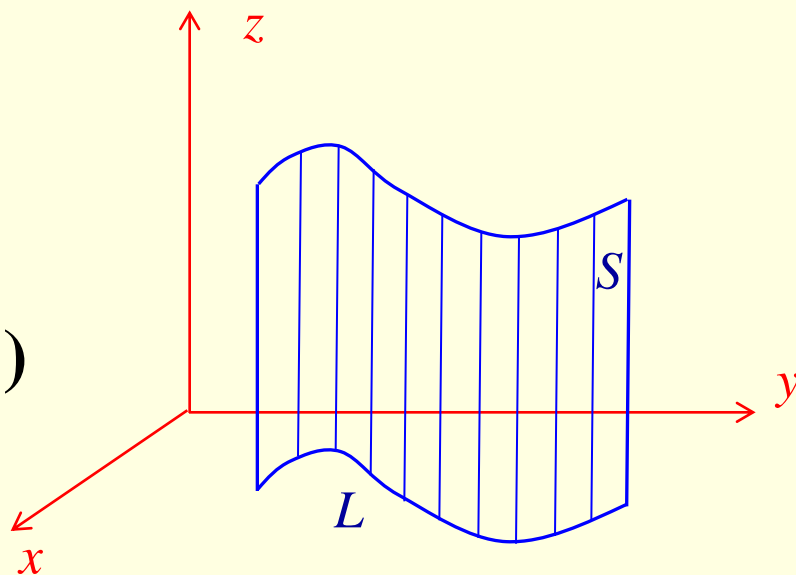
的定义.

几何问题 如何求一块柱面的面积?

设曲线 $L \subset xOy$ 面, S 是以 L 为准线, 母线平行 Oz 轴的柱面, 其高度为 $f(x, y)$, 求 xOy 面以上部分柱面 S 的面积

$$S = \int_L f(x, y) ds$$

(第一型曲线积分 **几何意义**)



■ 性质 无方向性 若曲线 L 为 AB , 则

$$\int_{AB} f(x, y)ds = \int_{BA} f(x, y)ds$$

线性性 设 α, β 为常数, 则

$$\int_L [\alpha f(x, y) + \beta g(x, y)]ds = \alpha \int_L f(x, y)ds + \beta \int_L g(x, y)ds$$

可加性 设曲线段 L_1 与 L_2 首尾相接成曲线 L , 则

$$\int_L f(x, y)ds = \int_{L_1} f(x, y)ds + \int_{L_2} f(x, y)ds$$

此外, $\int_L 1ds = s_L$, 其中 s_L 为曲线 L 的弧长.

11.1.2 数量场曲线积分的计算

定理 设 $f(x, y)$ 在光滑曲线 L 上连续, L 的**参数方程**为

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j}, \quad t \in [\alpha, \beta]$$

则有

$$\int_L f(x, y) ds = \int_{\alpha}^{\beta} f(x(t), y(t)) \underbrace{\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}}_{ds} dt$$

ds弧微分

注意 由于 ds 是弧长, 取正值, 故定积分限应 $\alpha < \beta$

若曲线 L 的方程为 $y = y(x)$, $x \in [a, b]$, 则

$$\int_L f(x, y) ds = \int_a^b f(x, y(x)) \sqrt{1 + y'^2(x)} dx$$

例1 计算曲线积分 $\int_L x ds$, 其中 L 为抛物线 $y = x^2$ 上

点 $O(0, 0)$ 与点 $B(1, 1)$ 间的弧段.

$$\frac{5\sqrt{5}-1}{12}$$

例2 求曲线积分 $\int_L x ds$, 其中 L 为平面上 $O(0, 0)$, $A(1, 0)$,

$B(0, 1)$ 为顶点的三角形的边界.

$$\frac{\sqrt{2}+1}{2}$$

例3 求曲线积分 $\int_L xy ds$, 其中 L 为椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

在第一象限的弧段.

$$\frac{ab(a^2 + ab + b^2)}{3(a + b)}$$

例4 已知质线的线密度为 $\varphi = \sqrt{x^2 + y^2}$, 其形状为上半

圆周 $L: y = \sqrt{4x - x^2}, x \in [0, 4]$, 求该质线的质量.

16

回顾 在极坐标 $r = r(\theta)$ 下, $ds = \sqrt{r^2 + r'^2} d\theta$

■ 思考与猜测 对于空间曲线 L :

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}, \quad t \in [\alpha, \beta]$$

第一型曲线积分 $\int_L f(x, y, z)ds$ 的概念与计算公式如何?

例5 计算 $\int_L (x^2 + y^2 + z^2)ds$, 其中曲线 L 为球面

$x^2 + y^2 + z^2 = 4$ 与平面 $x + z = 2$ 的交线.

提示: 将 L 的方程化为参数方程

$$8\sqrt{2}\pi$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 4 \\ z + x = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x-1)^2 + \frac{y^2}{2} = 1 \\ z + x = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 + \cos t \\ y = \sqrt{2} \sin t \\ z = 1 - \cos t \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi]$$

Chap 11 — 2

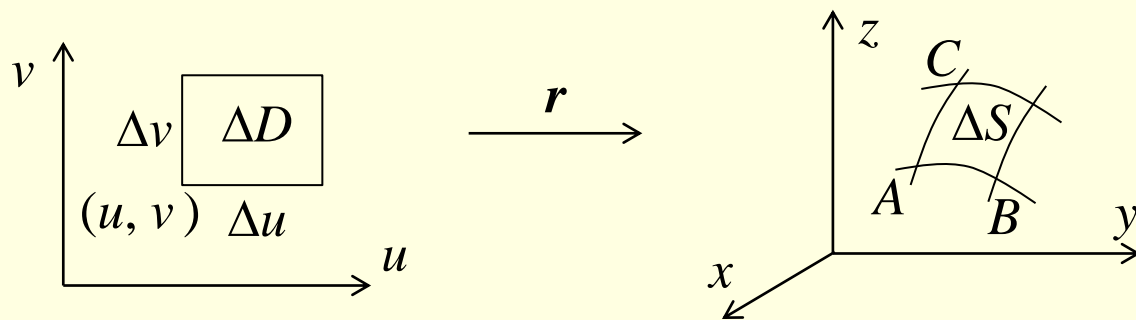
数量场在曲面上的积分

11.2.1 曲面的面积

设有光滑参数曲面 S :

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v) = x(u, v)\mathbf{i} + y(u, v)\mathbf{j} + z(u, v)\mathbf{k}, \quad (u, v) \in D$$

微元法 在 D 中取小矩形 ΔD , 其对应小曲面 ΔS , 其面积



近似为向量 \overrightarrow{AB} 和向量 \overrightarrow{AC} 张成的平行四边形的面积

由于 $\overrightarrow{AB} = \mathbf{r}(u + \Delta u, v) - \mathbf{r}(u, v) \approx \mathbf{r}'_u(u, v)\Delta u$

$$\overrightarrow{AC} = \mathbf{r}(u, v + \Delta v) - \mathbf{r}(u, v) \approx \mathbf{r}'_v(u, v)\Delta v$$

故小曲面 ΔS 的面积 $\Delta S \approx |\mathbf{r}'_u(u, v) \times \mathbf{r}'_v(u, v)| \Delta u \Delta v$

从而 **曲面面积元素**

$$dS = |\mathbf{r}'_u(u, v) \times \mathbf{r}'_v(u, v)| du dv$$

故曲面 S 面积

$$\begin{aligned} S &= \iint_D |\mathbf{r}'_u(u, v) \times \mathbf{r}'_v(u, v)| du dv \\ &= \iint_D \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} du dv \end{aligned}$$

其中

$$A = \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)}, \quad B = \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)}, \quad C = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}$$

特别地, 当曲面为显式方程

$$z = z(x, y), \quad (x, y) \in D$$

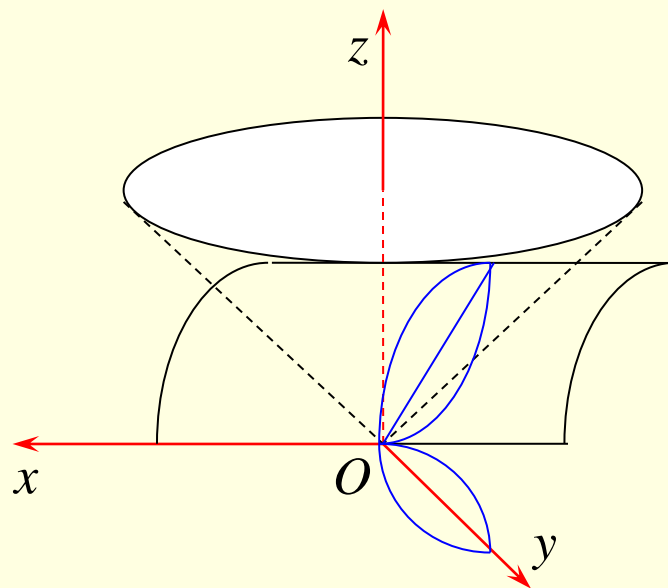
则

$$dS = \sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2} dx dy$$

$$S = \iint_D \sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2} dx dy$$

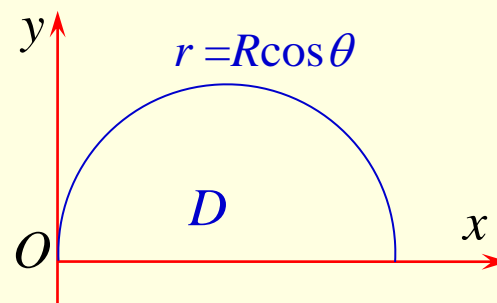
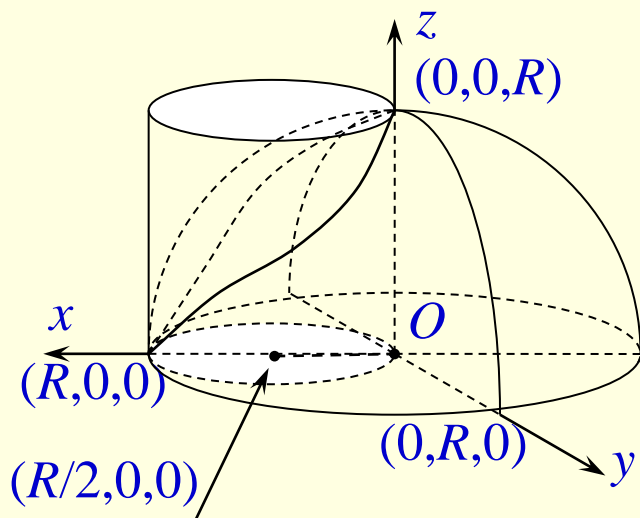
例1 计算锥面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 被柱面
 $z^2 = 2y$ 所截部分的面积.

$$\sqrt{2}\pi$$



例2 计算球面 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ 被圆柱面 $x^2 + y^2 = \pm Rx$ 所割下部分的曲面面积(**Viviani曲面**).

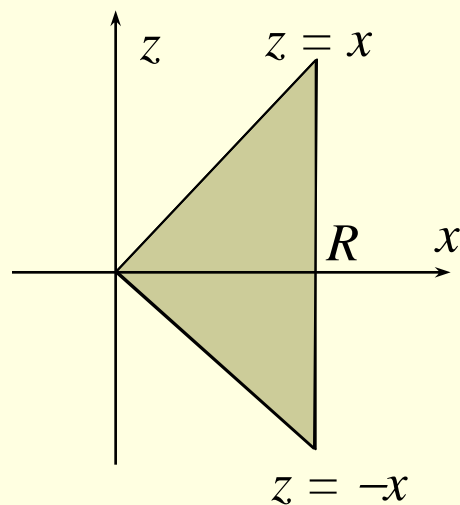
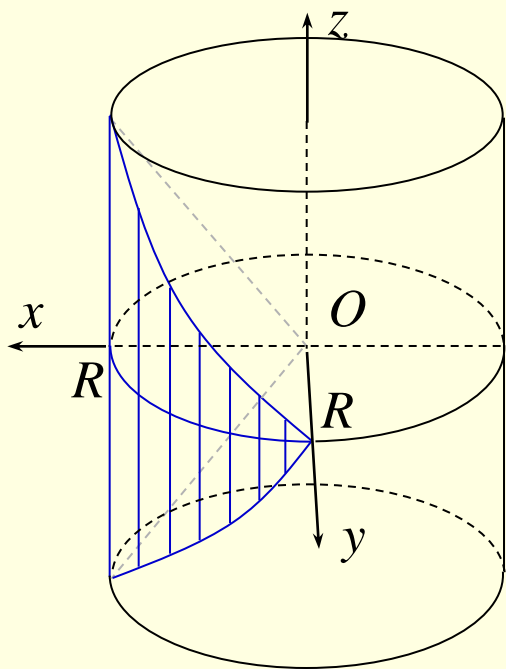
$$4\pi R^2 - 8R^2$$



例3 计算柱面 $x^2 + y^2 = R^2$ 被两平面 $x \pm z = 0$ ($x > 0, y > 0$)

所截下部分曲面的面积.

$$2R^2$$



11.2.2 数量场曲面积分的概念与计算

问题 如何求面密度为 $f(x, y, z)$ 的曲面 S 的质量?

采用**分割, 作近似和, 取极限**的思想可得其质量, 进而导出 $f(x, y, z)$ 在 S 上的**第一型曲面积分**的定义

$$\iint_S f(x, y, z) dS = \lim_{|T| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta S_i$$

第一型曲面积分也称为**数量场的曲面积分**, 它有类似于第一型曲线积分的性质, 如线性性和可加性.

定理 设光滑曲面 S 的参数方程为

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v) = x(u, v)\mathbf{i} + y(u, v)\mathbf{j} + z(u, v)\mathbf{k}, \quad (u, v) \in D$$

又函数 $f(x, y, z)$ 在 S 上连续, 则

$$\iint_S f(x, y, z) dS = \iint_D f(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} du dv$$

其中

$$A = \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)}, \quad B = \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)}, \quad C = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}$$

特别地, 当曲面为**显式方程** $z = z(x, y), \quad (x, y) \in D$

则

$$\iint_S f(x, y, z) dS = \iint_D f(x, y, z(x, y)) \sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2} dx dy$$

例1 计算曲面积分

$$I = \iint_S (x + y + z) dS$$

其中 S 为上半球面 $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$

$$\pi R^3$$

提示 注意曲面的对称性

例2 计算曲面积分

$$I = \iint_S (x^2 + y^2 + z^2) dS$$

$$3\sqrt{2}\pi$$

其中 S 为锥面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 被柱面 $x^2 + y^2 = 2x$ 所截得曲面

例3 计算曲面积分

$$I = \iint_S z \, dS$$

其中 S 为螺旋面

$$\begin{cases} x = r \cos t, \\ y = r \sin t, \\ z = t, \end{cases} \quad (r, t) \in [0, a] \times [0, 2\pi]$$

$$\pi^2 (a\sqrt{1+a^2} + \ln(a + \sqrt{1+a^2}))$$