Chap 6 — 2

二阶线性微分方程

■ 简谐振动方程

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=-kx(t),\quad k>0\text{为弹性系数}$$

阻力正比于速度, $\nu>0$为阻尼系数, 则

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=-\nu\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}-kx(t),$$

若还受周期外力$b\cos\omega t$作用, 则

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=-\nu\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}-kx(t)+b\cos\omega t$$

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=-v\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}-kx(t)+b\cos\omega t$$

若令

$$\omega_0=\sqrt{\frac{k}{m}},\qquad \beta=\frac{v}{2m},\qquad a=\frac{b}{m}$$

方程化为

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+2\beta\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+\omega_0^2x=a\cos\omega t$$

二阶非齐次线性方程

n 阶线性微分方程标准形式

$$\boxed{y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = f(x)}$$

$p_1(x),\ \cdots,\ p_n(x)$ — 方程的系数　$f(x)$ — 非齐次项

特点：方程中关于未知函数及其导数的次数为1

$f(x) \equiv 0$时，得到

$$\boxed{y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = 0}$$

称为对应的齐次线性微分方程

二阶非齐次线性方程标准形式

非 齐次 线性

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x) \qquad (NHL)$$

二阶齐次线性方程标准形式

齐次 线性

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \qquad (HL)$$

定理(唯一性) 设 $p(x), q(x), f(x) \in C(I)$, $x_0 \in I$, 则

▲之后讨论的基础

$$\begin{cases} y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x) \\ y(x_0) = \alpha, y'(x_0) = \beta \end{cases}$$

在 $U(x_0)$ 存在唯一解 $y(x)$. 当 $\alpha = \beta = 0$ 时, (HL) 只有零解

“常微分方程”的书有证明，证明略，不要求掌握。

6.2.1 二阶线性方程解的结构

定理 若 $y_1(x), y_2(x)$ 方程(HL) 的解，则

$$c_1y_1(x)+c_2y_2(x) \quad (c_1,c_2\text{是任意常数})$$

也是此方程的解. ∵线性,显然

(求导线性,方程线性)

叠加原理

定理 若 $y_1(x), y_2(x)$ 方程(NHL) 的解，则

$$y_1(x)-y_2(x)$$ 是方程(HL)的解.

定理 若$y(x)$是(HL)的解，$y_0(x)$是(NHL) 的解, 则

$$\tilde{y}(x)=y(x)+y_0(x)$$ 是方程(NHL)的解.

■ 线性相关与无关

定义 对函数 $y_1(x), y_2(x)$, 若存在不全为零的常数 $\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2$, 使得 $c_1y_1(x)+c_2y_2(x)\equiv 0\ (x\in I)$

则称 $y_1(x), y_2(x)$ **线性相关**, 否则称它们**线性无关**

定义 设 $y_1(x), y_2(x)$ 在区间 I 上可导, 则称

$$W(x)=\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}$$

$y_1(x), y_2(x)$ 的**Wronski行列式**

$y^{(n+1)}=0$

定理1 设函数 $y_1(x), y_2(x)$ 是(HL)的解, 则它们在I上

线性相关 $\Leftrightarrow W(x)\equiv 0 \ (x\in I)$.

定理2 设 $y_1(x), y_2(x)$ 是(HL)的解, 则有**Liouville**公式

$$W(x)=W(x_0)\mathrm{e}^{-\int_{x_0}^{x} p(t)\mathrm{d}t}$$

推论 设 $y_1(x), y_2(x)$ 是(HL)的线性无关解, 则 $W(x)$

恒不为0.

反证.

定理1

"$\Rightarrow$" $\begin{cases} C_1y_1+C_2y_2=0 \\ C_1y_1'+C_2y_2'=0 \end{cases}$ 由线性代数相关 $\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}=0$

"$\Leftarrow$" 注意：$y_1(x)$ $y_2(x)$ 是HL的解

取x_0 $\begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) \end{vmatrix}=0$ (条件相同只需一点，$W(x_0)=0$

$\begin{cases} C_1y_1(x_0)+C_2y_2(x_0)=0 \\ C_1y_1'(x_0)+C_2y_2'(x_0)=0 \end{cases}$ 非0解 C_1 C_2

let $y(x)=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)$ 则$y(x)$是HL的解 ①

$y(x_0)=C_1y_1(x_0)+C_2y_2(x_0)=0$ ②

$y'(x_0)=C_1y_1'(x_0)+C_2y_2'(x_0)=0$ ③

>初值条件

由初值条件

$y(x)\equiv 0$

即$y_1(x)$ $y_2(x)$线性相关.

定理2. Hint: "2定理1"⇐"只一点 → HL解的W要么恒为0
要么恒不为0.

Hint：找$W(x)$满足的微分方程.

sol of HL:

$y_1'' = -p(x)y_1' - q(x)y_1$

$y_2'' = -p(x)y_2' - q(x)y_2$

证：first $W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = y_1y_2' - y_2y_1'$

$$W'(x) = y_1'y_2' + y_1y_2'' - y_2'y_1' - y_2y_1''$$

$$= y_1y_2'' - y_1''y_2$$

$$= y_1\cdot(-p(x)y_2') - (-p(x)y_1')y_2$$

$$= -p(x)\left[y_1y_2' - y_1'y_2\right]$$

$$= -p(x)\,W(x)$$

$$W' + p(x)W = 0$$ 通解公式

$$W(x) = \exp\left(-\int p(x)dx\right)(0\cdot\cdots + C)$$ 一个特殊的原函数

$$= \exp\left(-\int_{x_0}^{x} p(t)dt\right)\cdot C$$

$$x = x_0 \longrightarrow W(x_0) = C$$

$$\therefore W(x) = W(x_0)e^{-\int_{x_0}^{x} p(t)dt}$$

反证

推论：若 $W(x_0) = 0 \Rightarrow W(x) \equiv 0 \Rightarrow y_1(x)$ 与 $y_2(x)$ 线性相关

■ 解的结构定理

若$y_1(x)$、 $y_2(x)$是方程(HL)的两个线性无关的解(称为方程的基本解组)，那么通解

$$c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) \quad (c_1, c_2\text{任意常数})$$

包含了方程(HL)的所有解.

➢ (HL)的所有解构成了一个二维线性空间，

基本解组是它的一组基. $y_1(x)$ $y_2(x)$

证：

首先 $C_1 C_2$ 独立. $y=C_1y_1+C_2y_2$

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial C_1} & \frac{\partial y}{\partial C_2} \\ \frac{\partial y'}{\partial C_1} & \frac{\partial y'}{\partial C_2}\end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2'\end{vmatrix} = W(x)\neq 0.$$

其次 所有解.

思路：assume $y(x)$ 任意解. find $C_1\ C_2$. s.t. $y=C_1y_1+C_2y_2$

○ 找特殊解 取 x_0

$$W(x_0) = \begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0)\end{vmatrix} \neq 0.$$

$$\begin{cases} C_1y_1(x_0)+C_2y_2(x_0)=y(x_0) \\ C_1y_1'(x_0)+C_2y_2'(x_0)=y'(x_0)\end{cases} \qquad \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2\end{bmatrix} = [W]^{-1}\begin{bmatrix} y(x_0) \\ y'(x_0)\end{bmatrix}$$

$C_1\ C_2$ 依赖 x_0

so. x_0 must 固定

存在唯一 $C_1\ C_2$ (都非0)

let $\tilde{y}(x)=C_1y_1(x_0)+C_2y_2(x_0)$

$\tilde{y}(x)$ 是HL解

$\tilde{y}(x_0)=C_1y_1(x_0)+C_2y_2(x_0)=y(x_0)$

$\tilde{y}'(x_0)=y'(x_0)$.

$\tilde{y}(x)$ 满足初值条件 $\{y(x_0), y'(x_0)\}$ & $y(x)$ 显然满足初值条件 $\{y(x_0), y'(x_0)\}$

$\Downarrow$

$\tilde{y}(x)\equiv y(x)$

$\therefore y(x)=\tilde{y}(x)=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)$.

如何求解二阶齐次线性方程？归结为：

求出两个线性无关的解(即基本解组).

如何求这方程两个线性无关的特解?

如果获得其中一个

■ Liouville公式

若$y_1(x)$是(HL)的非零解，那么

$$y_2 = y_1 \int \frac{1}{y_1^2} e^{-\int_{x_0}^{x} p(t)\mathrm{d}t} \mathrm{d}x$$是(HL)与$y_1(x)$线性无关的解.

证 $W(x)=\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}$ 其中 $y_2(x)$ 待定

$W(x)=W(x_0)e^{-\int_{x_0}^{x}p(t)dt}$ (不妨设 $W(x_0)=1$) (否则取 $y_{2*}=\frac{y_2}{W(x_0)}$)

$y_1y_2'-y_2y_1'=e^{-\int_{x_0}^{x}p(t)dt}$

$y_1\neq 0$ 同除 y_1^2

$\left(\frac{y_2}{y_1}\right)'=\frac{1}{y_1^2}e^{-\int_{x_0}^{x}p(t)dt}$

$\frac{y_2}{y_1}=\int\frac{1}{y_1^2}e^{-\int_{x_0}^{x}p(t)dt}dx$

$y_2=y_1\int\frac{1}{y_1^2}e^{-\int_{x_0}^{x}p(t)dt}dx$ #

求方程 (*HL*) 的解归结为求出一个非零特解

如何求一个特解？

简单形式方程常使用观察法找出特解

x^m, $\mathrm{e}^{\alpha x}$, $\sin mx$ 或 $\cos mx$

例　求解方程

$$(2x+1)y''+4xy'-4y=0$$

$y_1 = x, \quad y_2 = -\mathrm{e}^{-2x}$

注意到 $y_1=x$ 是解 $\quad y''+\overset{p(x)}{\frac{4x}{2x+1}}y'-\frac{4}{2x+1}y=0$

$$y_2=x\int\frac{1}{x^2}e^{-\int\frac{4x}{2x+1}dx}dx$$

其中 $\int\frac{4x}{2x+1}dx=\int(2-\frac{2}{2x+1})dx=2x-\int\frac{d(2x+1)}{2x+1}=2x-\ln|2x+1|$

$$=x\int\frac{1}{x^2}e^{-2x}(2x+1)dx$$

$$=x\int\frac{2e^{-2x}}{x}dx+x\int\frac{e^{-2x}}{x^2}dx$$

$$=x\int\frac{2e^{-2x}}{x}dx-x\int e^{-2x}d\frac{1}{x}$$

分部

$$=x\cancel{\int\frac{2e^{-2x}}{x}dx}-e^{-2x}+x\cancel{\int\frac{1}{x}de^{-2x}}$$

$$=-e^{-2x}$$

通解 $y=C_1x+C_2e^{-2x}$

例 求解方程

$$xy'' - y' - (x-1)y = 0$$

$$\boxed{y_1 = \mathrm{e}^x, \quad y_2 = -\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\right)\mathrm{e}^{-x}}$$

6.2.2 常数变易法

$y_1 = e^x \qquad y'' - \frac{1}{x}y' - (1-\frac{1}{x})y = 0 \qquad (e^{-2x})' = -2e^{-2x}$

$y_2 = y_1 \int \frac{1}{y_1^2} e^{\int \frac{dx}{x}} dx = e^x \int e^{-2x} x \, dx$

$= e^x \int x \, d(-\frac{1}{2}e^{-2x}) = -\frac{1}{2}xe^{-x} + e^x \int \frac{1}{2} e^{-2x} dx$

$= -\frac{1}{2}xe^{-x} - \frac{1}{4}e^{-x}$

解的结构定理

设 $y^*(x)$ 是非齐次方程(NHL)的解，而 $y_1(x)$, $y_2(x)$是对应的齐次方程的基本解组,那么通解

6.2.1叠加原理

$$y = y^*(x) + c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$$

(c_1,c_2是任意常数)包含了方程(NHL)的全部解.

- 要求线性非齐次方程(NHL)的通解，只要求出一个特解和对应齐次方程的一个基本解组

问题 如何求出方程的特解呢？

方法：**常数变易法**

若(HL)的基本解组为 $y_1(x), y_2(x)$, 设(NHL)特解

$$y^* = c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x)$$

代入原方程只能得到一个方程. 附加条件 C_1 C_2 太多

附加以限制

$$c_1'(x)y_1(x) + c_2'(x)y_2(x) = 0$$

代入(NHL)得到

$$c_1'(x)y_1'(x) + c_2'(x)y_2'(x) = f(x)$$

W行列式

attach $= 0$

$$y^{*\prime} = C_1(x)y_1'(x) + C_2(x)y_2'(x) + C_1'(x)y_2(x) + C_2'(x)y_2(x)$$

$$y^{*\prime\prime} = C_1(x)y_1''(x) + C_2(x)y_2''(x) + C_1'(x)y_1'(x) + C_2'(x)y_2'(x)$$

NHL $\quad y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$

$$\left(C_1(x)\left[y_1''(x) + p(x)y_1'(x) + q(x)y_1(x)\right] + C_2(x)\left[y_2''(x) + p(x)y_2'(x) + q(x)y_2(x)\right]\right)^{0}$$

$$+ C_1'(x)y_1'(x) + C_2'(x)y_2'(x) = f(x)$$

从而由此两方程解出（{ 解得）

$$c_1'(x) = \frac{-y_2(x)f(x)}{W(x)}, \qquad c_2'(x) = \frac{y_1(x)f(x)}{W(x)}$$

例　已知方程 $y''+y=0$ 有基本解组为cos$x$, sin$x$

试求非齐次方程 $y''+y=\tan x$ 的通解.

补充习题:

求方程 $y''+y=\sec x$ 的通解

is like that.

6.2.3 二阶常系数齐次线性方程

二阶方程形式

$$\boxed{y'' + py' + qy = 0}$$

其中 p, q 为常数.

令$y = \mathrm{e}^{\lambda x}$得到

$$\lambda^2 + p\lambda + q = 0$$

特征方程，这方程的两个根称为特征根

情况讨论

(1) 特征方程有相异实根 λ_1, λ_2

基本解组：$e^{\lambda_1 x}$, $e^{\lambda_2 x}$

(2) 特征方程有相同实根 λ　　$\lambda = -\frac{p}{2}$　　$y_2 = e^{\lambda x}\int e^{-2\lambda x} e^{-px} dx$

基本解组：$e^{\lambda x}$, $\xrightarrow{\text{Liouville公式}} xe^{\lambda x}$　　$= xe^{\lambda x}$

(3) 特征方程有共轭复根　$\alpha \pm i\beta$　　$y_1, y_2 = e^{\alpha x}(\cos\beta x \pm i \sin\beta x)$

基本解组：　$e^{(\alpha+i\beta)x}, e^{(\alpha-i\beta)x}$　　$\tilde{y}_1 = \frac{y_1+y_2}{2} = e^{\alpha x}\cos\beta x$

$\longrightarrow e^{\alpha x}\cos\beta x,\ e^{\alpha x}\sin\beta x$　　$\tilde{y}_2 = \frac{y_1-y_2}{2i} = e^{\alpha x}\sin\beta x$

二阶齐次常系数微分方程的通解

特征根情况	通解形式
相异实根λ_1, λ_2	$c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}$
相同实根 λ	$c_1 e^{\lambda x} + c_2 x e^{\lambda x}$
共轭复根 $\alpha \pm i\beta$	$c_1 e^{\alpha x} \cos \beta x + c_2 e^{\alpha x} \sin \beta x$

例　求解方程 $y''+5y'+6y=0$

例　求解方程 $y''+4y'+9y=0$

例　求解方程 $y''-4y'+4y=0$

问题与猜测

二阶常系数齐次微分方程基本解组的结论如何推广到n阶常系数齐次微分方程?

例　求解方程 $y'''-3y''+3y'-y=0$

推广 $y^{(n)}+p_1y^{(n-1)}+\cdots+p_ny=0$

特征方程 $\lambda^n+p_1\lambda^{n-1}+\cdots+p_{n-1}\lambda+p_n=0$

例　求解方程 $y''' - 8y = 0$

补充题 设 $y = \mathrm{e}^{2x} + (x-1)\mathrm{e}^{x}$ 是常系数非齐次线性方程

$y'' + ay' + by = c\mathrm{e}^{x}$ 的一个特解，则（　　　）

(A) $a = -3, b = 2, c = -1.$　(B) $a = 3, b = 2, c = -1.$

(C) $a = -3, b = 2, c = 1.$　(D) $a = 3, b = 2, c = 1.$

15考研试题

例 设函数$y(x)$满足方程 $y''+2y'+ky=0$, 其中$0<k<1$.

(1) 证明：反常积分 $\int_0^{+\infty} y(x)\mathrm{d}x$ 收敛;

(2) 若$y(0)=1, y'(0)=1$, 求 $\int_0^{+\infty} y(x)\mathrm{d}x$ 的值.

16考研试题