

# Chap 10

多变量函数的重积分

# Chap 10 — 1

二重积分

### 10.1.1 平面图形的面积

设平面点集  $D \subset [a, b] \times [c, d]$ . 作矩形分割  $T$ , 记  $D$  内的及与  $D$  相交的小矩形面积和分别为  $\sigma^-_T(D)$  和  $\sigma^+_T(D)$ .

注 分割越细,  $\sigma^-_T(D)$  越大(有上界),  $\sigma^+_T(D)$  越小(有下界)

**定义** 设  $D \subset [a, b] \times [c, d]$ . 作矩形分割  $T$ , 若

$$\lim_{|T| \rightarrow 0} \sigma^+_T(D) = \lim_{|T| \rightarrow 0} \sigma^-_T(D)$$

则称  $D$  为 **Jordan 可测集**. 极限值称为  $D$  的 **测度(或面积)**.

注意到

$$0 \leq \sigma_T^+(D) - \sigma_T^-(D) \leq \sigma_T^+(\partial D)$$

---

故当 $\partial D$ 为零测集时, 则 $D$ 可测.

**曲顶柱体** 设 $D$ 为可测有界闭集. 以 $D$ 为底, 曲面

$S: z = f(x, y)$ 为顶,  $\partial D$ 为准线, 母线平行于 $Oz$ 轴的柱面为侧面的立体.

**问题** 如何求此曲顶柱体的体积?

设 $D \subset [a, b] \times [c, d]$ . 令 $f(x, y) = 0, (x, y) \in [a, b] \times [c, d] \setminus D$ .

(1) **分割**: 取  $[a, b] \times [c, d]$  的分割  $T: \{x_0, x_1, \dots, x_n; y_0, y_1, \dots, y_m\}$

---

得小矩形  $D_{ij}$ , 其面积记为  $\Delta\sigma_{ij}$ .

(2) **求和**: 当  $D_{ij}$  很小时, 其上的小曲顶柱体的体积用平顶柱体近似. 任取  $(\xi_i, \eta_j) \in D_{ij}$ , 则有总体积

$$V \approx \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m f(\xi_i, \eta_j) \Delta\sigma_{ij}.$$

(3) **取极限**: 记  $|T| = \max_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m} \text{diam}\{D_{ij}\}$ , 则有

$$V = \lim_{|T| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m f(\xi_i, \eta_j) \Delta\sigma_{ij}.$$

✓ 用类似思想可求面密度不为常数的平面薄板质量.

## 10.1.2 二重积分定义

设 $f(x, y)$ 在可测有界闭集 $D \subset [a, b] \times [c, d]$ 上定义. 令 $f(x, y) = 0, (x, y) \in [a, b] \times [c, d] \setminus D$ . 若对 $[a, b] \times [c, d]$ 的 $\forall$ 矩形分割 $D_{ij}$ 及 $\forall (\xi_i, \eta_j) \in D_{ij}, (i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, m)$ ,

总有 
$$\lim_{|T| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m f(\xi_i, \eta_j) \Delta\sigma_{ij} = I.$$

其中  $|T| = \max_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m} \text{diam}\{D_{ij}\}$ , 则称 $f(x, y)$ 在 $D$ 上**可积**,  $I$ 称为 $f(x, y)$ 在 $D$ 上的**二重积分**, 记为  $\iint_D f(x, y) d\sigma$ , 其中  $\iint$ 为**积分号**,  $D$ 为**积分区域**,  $f(x, y)$ 为**被积函数**,

$d\sigma$ 为**面积元素**,  $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m f(\xi_i, \eta_j) \Delta\sigma_{ij}$  称为**Riemann和**.

## ■ 几何、物理意义

- ◆ 以有界闭集 $D$ 为底, 以曲面 $S: z = f(x, y)$ 为顶的曲顶柱体体积

$$V = \iint_D f(x, y) d\sigma.$$

- ◆ 形状为 $D$ , 面密度为 $\mu(x, y)$ 的平面薄板质量

$$m = \iint_D \mu(x, y) d\sigma.$$

## ■ 可积的条件

**必要条件** 若 $f$  在 $D$ 上可积, 则 $f$ 有界.

**充要条件** 设 $f$ 在 $D$ 上有界. 则 $f$  可积 $\Leftrightarrow$

$$(I) \iint_D f(x, y) d\sigma = \iint_{\bar{D}} f(x, y) d\sigma.$$

(II)  $\forall \varepsilon > 0, \exists$ 分割 $T: \sum_T \omega_{ij} \Delta\sigma_{ij} < \varepsilon$ , 其中 $\omega_{ij}$ 为 $f$ 在 $D_{ij}$ 上振幅.

**充分条件** (I) 若 $f \in C(D)$ , 则 $f$ 可积.

(II) 若 $f$ 有界且间断点为零测集, 则 $f$ 可积.

### 10.1.3 二重积分的性质

设以下性质中出现的积分均存在

**性质1 (线性)** 设 $\alpha, \beta$ 是常数, 则

$$\iint_D [\alpha f(x, y) + \beta g(x, y)] d\sigma = \alpha \iint_D f(x, y) d\sigma + \beta \iint_D g(x, y) d\sigma$$

**性质2 (可加性)** 若 $D$ 分成内部不交的子集 $D_1, D_2$ , 则

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = \iint_{D_1} f(x, y) d\sigma + \iint_{D_2} f(x, y) d\sigma$$

**性质3**  $\iint_D 1 d\sigma = A_D$  (D的面积)

**性质4 (单调性)** 若  $f(x, y) \leq g(x, y)$ , 则

$$\iint_D f(x, y) d\sigma \leq \iint_D g(x, y) d\sigma$$

**推论** (1) 若  $f(x, y) \geq 0$ , 则  $\iint_D f(x, y) d\sigma \geq 0$ .

(2) (**估值不等式**) 若  $m \leq f(x, y) \leq M$ , 则

$$mA_D \leq \iint_D f(x, y) d\sigma \leq MA_D.$$

(3) (**绝对值不等式**)  $\left| \iint_D f(x, y) d\sigma \right| \leq \iint_D |f(x, y)| d\sigma.$

**性质5 (中值定理)** 设 $D$ 是连通有界闭集,  $f(x, y) \in C(D)$ ,

则 $\exists(\xi, \eta) \in D$ , 使得

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = f(\xi, \eta) A_D.$$

### 10.1.3 二重积分的计算

**定义** 设  $f: [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbf{R}$ . 固定  $x \in [a, b]$ , 若存在  
**首次积分**  $\varphi(x) = \int_c^d f(x, y) dy$ , 且  $\varphi$  在  $[a, b]$  可积, 则称

$$\int_a^b \varphi(x) dx = \int_a^b \left( \int_c^d f(x, y) dy \right) dx$$

为  $f$  在  $[a, b] \times [c, d]$  上先  $y$  后  $x$  的累次(二次)积分, 也记为

$$\int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy$$

想一想 先  $x$  后  $y$  的累次积分的定义?

## 问题 二重积分与二次积分的关系?

**定理** 设 $f(x, y)$ 在 $[a, b] \times [c, d]$ 可积, 且 $\forall x \in [a, b]$ , 存在  
**首次积分**  $F(x) = \int_c^d f(x, y) dy$ , 则

$$\iint_{[a,b] \times [c,d]} f(x, y) d\sigma = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy$$

**试一试 另一情形**  $\iint_{[a,b] \times [c,d]} f(x, y) d\sigma = \int_c^d dy \int_a^b f(x, y) dx$

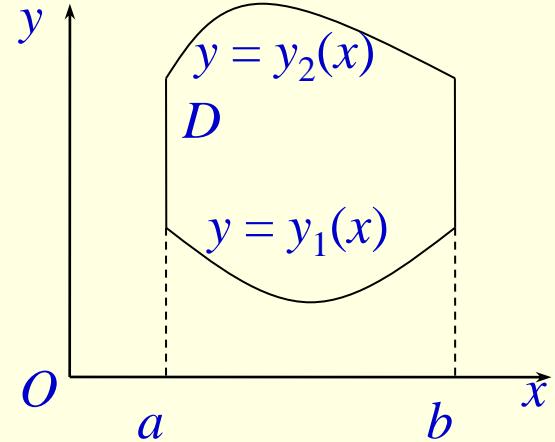
**推论1** 若 $f(x, y)$ 在 $[a, b] \times [c, d]$ 连续, 则有

$$\iint_{[a,b] \times [c,d]} f(x, y) d\sigma = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x, y) dx$$

**推论2** 若 $f$ 在**x型区域** $D = \{(x, y) | a \leq x \leq b, y_1(x) \leq y \leq y_2(x)\}$

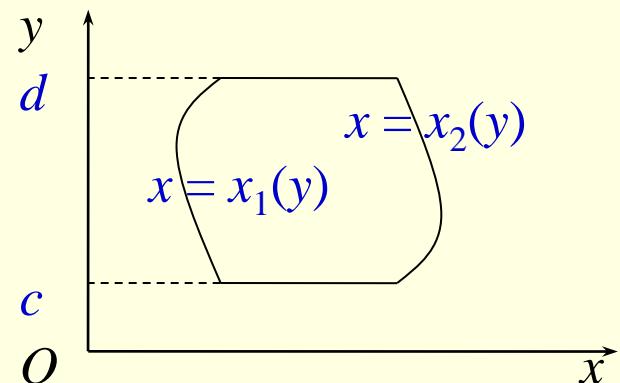
连续, 则有

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy$$



**试一试**  $y$ 型区域情形

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_c^d dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x, y) dx$$



**注** 面积元素  $d\sigma = dx dy$

几何直观 过 $x$ 处且垂直 $x$ 轴的平面截曲顶柱体得

曲边梯形, 其面积

$$A(x) = \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy$$

故曲顶柱体体积

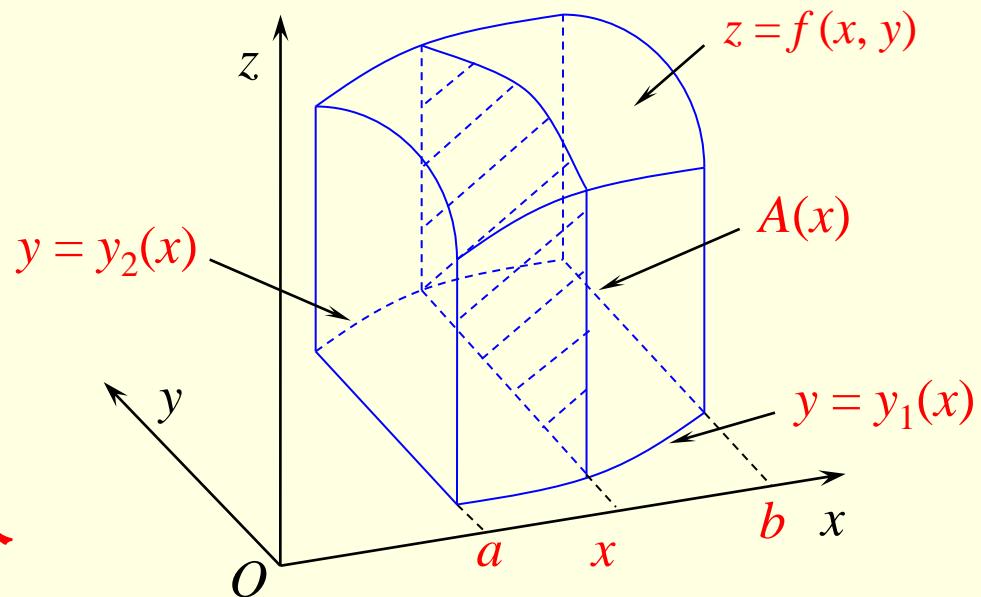
$$V = \int_a^b A(x) dx = \int_a^b \left( \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy \right) dx$$

$$\Rightarrow \iint_D f(x, y) dxdy$$

$$= \int_a^b \left( \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy \right) dx$$

$$\stackrel{\text{def}}{=} \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy$$

先 $y$ 后 $x$ 二次积分



**结论** 设  $f \in C[a,b]$ ,  $g \in C[c,d]$ , 则有

$$\iint_{[a,b] \times [c,d]} f(x)g(y)dxdy = \int_a^b f(x)dx \cdot \int_c^d g(y)dy$$

**例1** 计算  $\iint_{[0,1]^2} e^{x+y}dxdy$

**例2** 计算  $\iint_{[0,\pi] \times [0,1]} x \cos xy dxdy$

**例3** 计算  $\iint_D xy dxdy$ , 其中  $D$  是由抛物线  $y^2 = x$  与直线  $y = x - 2$  所围区域.

## ◆ 直角坐标计算二重积分步骤

---

- 画出区域 $D$ 的草图, 并确定类型;
- 按所确定的类型表示区域 $D$ ;
- 化二重积分为二次积分(注意上、下限);
- 计算二次积分.

## ◆ 确定积分区域 $D$ 类型的原则

---

- 对它划分的块数越少越好;
- 首次积分可以且容易算出.

**例4** 计算二次积分  $I = \int_0^1 dx \int_x^{\sqrt{x}} \frac{\sin y}{y} dy$

---

**例5** 交换二次积分次序

$$\int_0^1 dy \int_0^{1-\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx + \int_1^2 dy \int_0^{2-y} f(x, y) dx$$

◆ 交换二次积分次序步骤

- 将二次积分还原为二重积分；
- 由积分限确定积分区域  $D$ , 并按另一类型表示它；
- 化二重积分为另一次序的二次积分.

**例6** 计算二重积分  $I = \iint_D (y + y^2 \sin^3 x) dx dy$ ,

其中  $D$  是上半圆域  $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 4, y \geq 0\}$ .

◆ 用积分区域对称性和被积函数奇偶性简化积分计算

若  $D$  关于  $y$  轴对称, 记  $D_1$  为  $D$  中  $x \geq 0$  部分, 则

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \begin{cases} 0, & f(-x, y) = -f(x, y) \\ 2 \iint_{D_1} f(x, y) dx dy, & f(-x, y) = f(x, y) \end{cases}$$

若  $D$  关于  $x$  轴对称, 有类似的结果.

**例7** 计算二重积分  $\iint_D e^{\max\{x^2, y^2\}} dx dy$ ,

其中  $D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$ . (考研试题)

**例8** 设函数  $f(x) \in C[0, 1]$ , 且设  $\int_0^1 f(x) dx = A$ , 计算

$$\int_0^1 dx \int_x^1 f(x) f(y) dy.$$

**例9** 计算圆柱面  $x^2 + y^2 = R^2$  与  $x^2 + z^2 = R^2$  所围立体的体积.

# Chap 10 — 2

二重积分的换元

## 10.2.1 极坐标计算二重积分

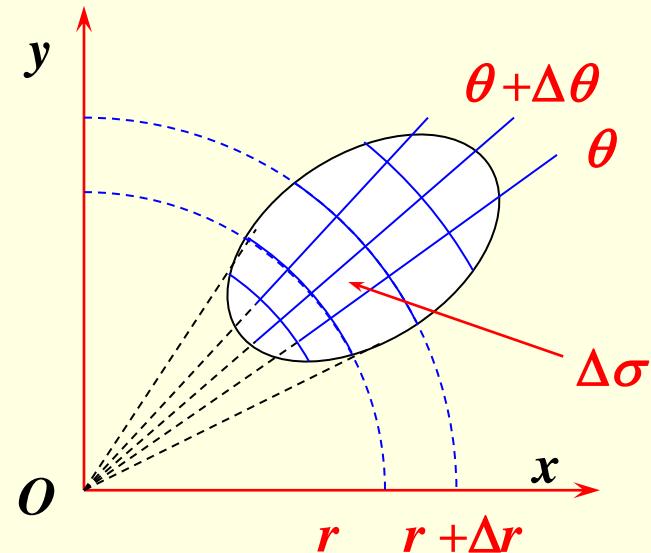
当积分区域边界曲线或被积函数用极坐标表示简单时，可用极坐标来计算二重积分

考虑面积元素 $d\sigma$ 在极坐标下的形式。

用 $r = \text{常数}$ (圆周族)和 $\theta = \text{常数}$ (射线族)分割区域 $D$ ，则小区域面积

$$\Delta\sigma = \frac{1}{2}[(r + \Delta r)^2 \Delta\theta - r^2 \Delta\theta] = r \Delta r \Delta\theta + \frac{1}{2}(\Delta r)^2 \Delta\theta$$

$$\Rightarrow d\sigma = r dr d\theta$$



## 从直角坐标到极坐标时的二重积分变换公式

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D'} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr d\theta$$

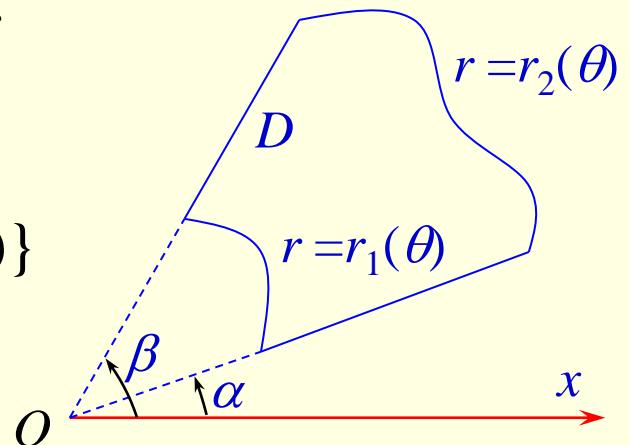
其中  $D'$  是  $D$  在极坐标下的表示形式.

特别地, 若

$$D' = \{(r, \theta) \mid \alpha \leq \theta \leq \beta, r_1(\theta) \leq r \leq r_2(\theta)\}$$

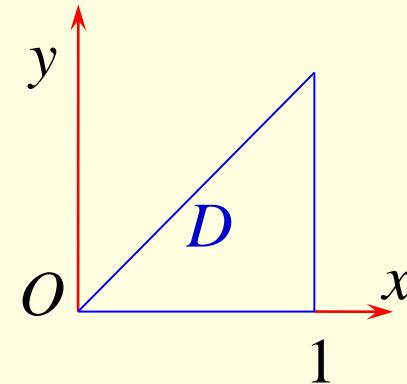
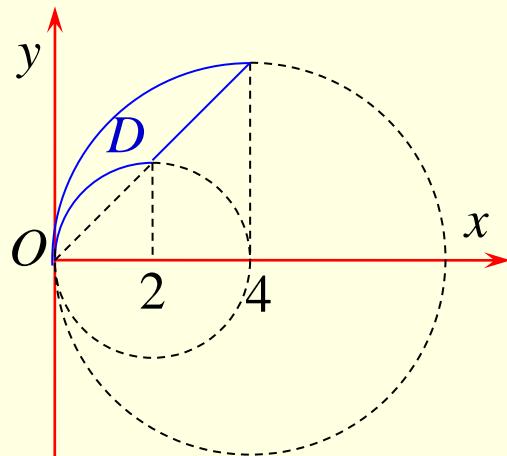
则有

$$\begin{aligned} & \iint_{D'} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr d\theta \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} d\theta \int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr \end{aligned}$$



**例1** 将  $I = \iint_D f(x, y) dx dy$  化为极坐标下的累次积分, 其中  $D$  为

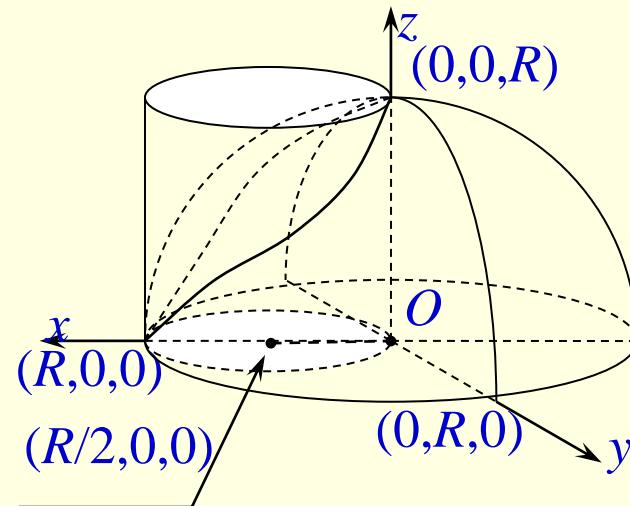
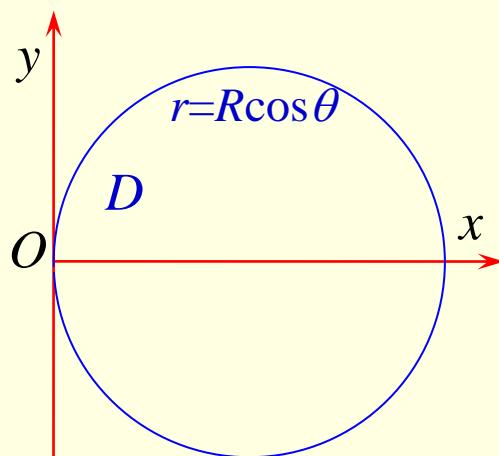
- (1) 由  $y = x$ , 上半圆周  $x^2 + y^2 = 4x$  及  $x^2 + y^2 = 8x$  围成.
- (2) 由直线  $y = x$ ,  $y = 0$  和  $x = 1$  围成.



## ◆ 用极坐标表示积分区域

- 关键: 化积分区域边界为极坐标方程.
- 方法: 将 $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ 代入边界的直角坐标方程.

**例2** 求球体  $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$  被圆柱面  $x^2 + y^2 = \pm Rx$  所割下部分的体积V.



◆ 积分区域边界方程或被积函数含  $x^2 + y^2$ , 可考虑用极坐标

**例3** 求球体  $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$  和  $x^2 + y^2 + (z - R)^2 \leq R^2$

相交部分的体积

**例4** 求双纽线  $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2)$  所围图形的面积.

**例5** (1) 计算  $I_R = \iint_{D_R} e^{-(x^2+y^2)} dx dy$ , 其中  $D_R : x^2 + y^2 \leq R^2, x \geq 0, y \geq 0$

(2) 计算Poisson积分  $I = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$ .

## 10.2.2 二重积分的换元

设变换  $F : \begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \end{cases}$  有连续偏导数, 且满足

$J = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \neq 0$ , 又  $f(x, y) \in C(D)$ , 则

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D'} f(x(u, v), y(u, v)) |J| du dv$$

其中  $F$  将  $D'$  变为  $D$ .

**例6** 计算积分  $\iint_D (\sqrt{x} + \sqrt{y}) dx dy$ , 其中  $D$  是由  $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$

与坐标轴所围区域.

**例7** 计算二重积分  $\iint_D (x+y) dx dy$ , 其中区域  $D$  为

$$x^2 + y^2 \leq x + y + 1.$$

**思考** 若  $D$  改为  $\frac{(x-2)^2}{a^2} + \frac{(y+1)^2}{b^2} \leq 1$  结论如何?

**例8** 计算积分  $\iint_D xy dx dy$ , 其中  $D$  为由曲线  $xy = 1$ ,  
 $xy = 2$ ,  $y = x$  和  $y = 4x$  在第一象限所围区域.

**例9** 计算积分  $I = \iint_D |x| dx dy$ , 其中  $D$  为  $2x^2 - 2xy + y^2 \leq 1$ .