Chap 8 — 2

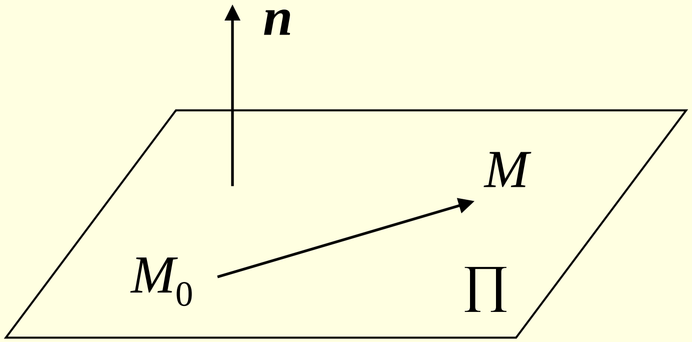
平面与直线

8.2.1 平面的方程

问题: 确定一个平面需要什么条件?

设平面Π过点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$, 且其**法向量**为

$\boldsymbol{n} = (A, B, C)$.



$M(x, y, z) \in \Pi$

$\Leftrightarrow \quad \overrightarrow{M_0M} \perp \boldsymbol{n}$

$\Leftrightarrow \quad \overrightarrow{M_0M} \cdot \boldsymbol{n} = 0 \quad \boxed{\Leftrightarrow \quad A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0}$

点法式方程

三元一次方程

$\boxed{Ax+By+Cz+D=0}\longrightarrow$ 一般式方程

问题: 系数A, B, C, D有些为0时平面有什么特点?

设平面Π过点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 且平行与两个不共线

向量 $\boldsymbol{u}=(u_1,u_2,u_3), \boldsymbol{v}=(v_1,v_2,v_3)$, 则

$$M(x,y,z)\in\Pi \quad\Leftrightarrow\quad (\overrightarrow{M_0M}\times\boldsymbol{u})\cdot\boldsymbol{v}=0$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}=0} \longrightarrow$$ 标准式方程

确定一个平面方程需要

一个点+

一个法向量

两个平行于平面的不共线向量

例1 求过不共线3点 $P_1(x_1,y_1,z_1)$, $P_2(x_2,y_2,z_2)$, $P_3(x_3,y_3,z_3)$ 的平面方程.

$$\boxed{\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0} \longrightarrow \text{三点式方程}$$

例2 平面在三坐标轴上的截距依次为a, b, c

$(abc \neq 0)$, 求平面的方程.

$$\boxed{\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1} \longrightarrow \text{截距式方程}$$

例3 求下列平面的方程:

(1) 过点$A(1,1,1)$, $B(2,2,2)$且垂直于平面

$x + y - z = 4$ 的平面;

(2) 过点$(3, 2, 1)$及 x轴的平面.

■ 两平面的夹角

$$\Pi_1 : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$$

$$\Pi_2 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$

的夹角即法向量间锐夹角:

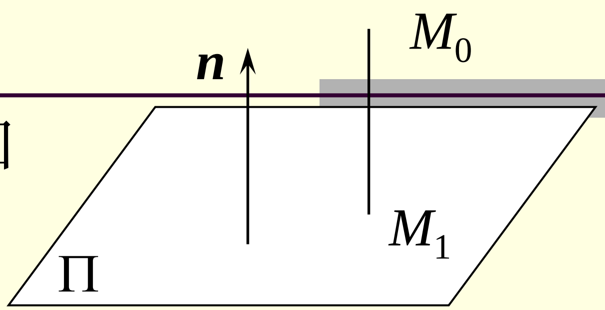
$$\boxed{\theta = \min\{\theta(\boldsymbol{n}_1, \boldsymbol{n}_2),\ \pi - \theta(\boldsymbol{n}_1, \boldsymbol{n}_2)\}}$$

$$\boxed{\cos\theta = |\cos\theta(\boldsymbol{n}_1, \boldsymbol{n}_2)| = \frac{|\boldsymbol{n}_1 \cdot \boldsymbol{n}_2|}{|\boldsymbol{n}_1| \cdot |\boldsymbol{n}_2|}}$$

$$\boxed{\Pi_1 // \Pi_2 \iff \boldsymbol{n}_1 // \boldsymbol{n}_2 \iff \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}}$$

$$\boxed{\Pi_1 \perp \Pi_2 \iff \boldsymbol{n}_1 \perp \boldsymbol{n}_2 \iff A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0}$$

■ 点到平面的距离



设有空间点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 和

平面 $\Pi: Ax + By + Cz + D = 0$

M_0到Π的距离, 即M_0到垂足 $M_1(x_1, y_1, z_1)$ 的距离

$d = |\overrightarrow{M_0M_1}|.$

$$|\overrightarrow{M_0M_1} \cdot \boldsymbol{n}| = |A(x_1 - x_0) + B(y_1 - y_0) + C(z_1 - z_0)|$$

$$= |(Ax_0 + By_0 + Cz_0) - (Ax_1 + By_1 + Cz_1)|$$

$$\Rightarrow \qquad \boxed{d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}}$$

例4 求两平行平面 $\Pi_1: Ax+By+Cz+D_1=0$ 和

$\Pi_2: Ax+By+Cz+D_2=0$ 之间的距离.

$$\boxed{d=\frac{|D_2-D_1|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}}$$

例5 在平面 $x-2y+z-2=0$ 和 $x-2y+z-6=0$

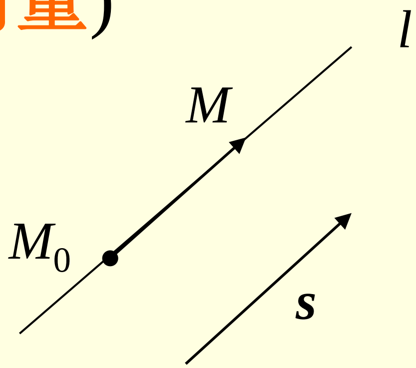
间求一平面, 使之将两平面的距离分为1:3.

8.2.2 直线的方程

问题: 确定一条直线需要什么条件?

设直线 l 过点$M_0(x_0, y_0, z_0)$且平行于非零向量

$\boldsymbol{s} = (m, n, p)$ (称为直线的**方向向量**)



$$M(x, y, z) \in l$$

$$\Leftrightarrow \quad \overrightarrow{M_0M} \,/\!/\, \boldsymbol{s}$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}} \longrightarrow \text{标准式方程}$$

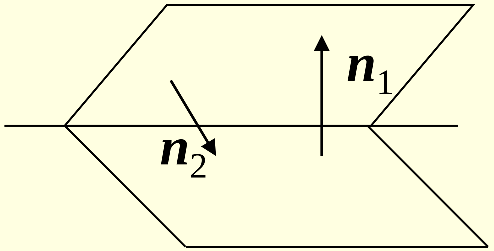
分式分母为零时, 意味着其分子也为零.

$$\Rightarrow \begin{cases} x = x_0 + mt \\ y = y_0 + nt \\ z = z_0 + pt \end{cases} \longrightarrow$$ **参数式方程**

$$\begin{cases} A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0 \\ A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0 \end{cases} \longrightarrow$$ **一般式方程**

是两平面的交线. 它的方向向量为

$$n_1 \times n_2 = \left(\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \right)$$



例6 求过相异两点 $P_1(x_1, y_1, z_1)$ 和 $P_2(x_2, y_2, z_2)$ 的直线方程.

例7 求过点$P(1,-1,2)$且与平面$2x-y-5z-2=0$及 $x-4z=0$均平行的直线方程.

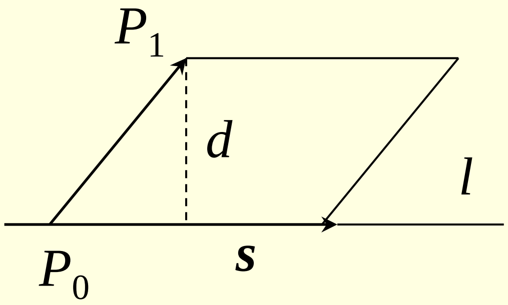
例8 求过点$(-3, 2, -5)$且与三坐标轴正向夹角依次为 $\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{\pi}{4}$ 的直线方程.

例9 用标准式方程表示直线 $\begin{cases} 2x-4y+z=0, \\ 3x-y-2z+10=0. \end{cases}$

■ 点到直线的距离

设直线 l 过点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$, 方向向量为 $\boldsymbol{s}=(m,n,p)$, 点 $P_1(x_1,y_1,z_1)$ 为直线 l 外一点, 则点P_1到直线 l 的距离为:

$$\boxed{d=\frac{|\overrightarrow{P_0P_1}\times\boldsymbol{s}|}{|\boldsymbol{s}|}}$$



例10 求点 $P_1(2,3,1)$ 到直线 $L:\dfrac{x+7}{1}=\dfrac{y+2}{2}=\dfrac{z}{3}$ 的距离.

■ 两直线的夹角

直线 l_1的方向向量为$\boldsymbol{s}_1$, 直线l_2的方向向量为$\boldsymbol{s}_2$, l_1与l_2的夹角为

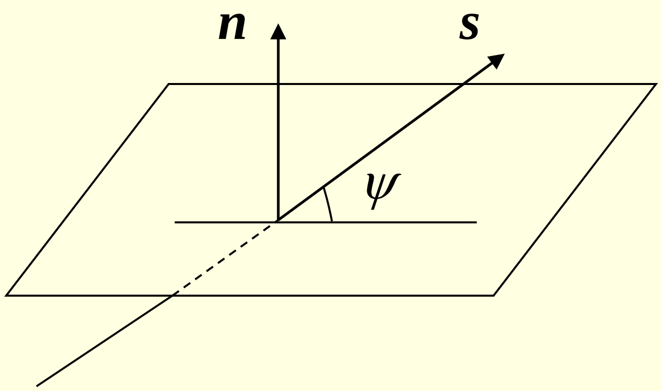
方向向量间的锐夹角

$$\varphi = \min\{\theta(\boldsymbol{s}_1, \boldsymbol{s}_2),\ \pi - \theta(\boldsymbol{s}_1, \boldsymbol{s}_2)\}$$

直线与平面的夹角

设直线 l 的方向向量为 $\boldsymbol{s}$, 平面$\prod$的法向量为 $\boldsymbol{n}$, 则 l 与$\prod$的夹角为

$$\boxed{\psi = \left|\frac{\pi}{2} - \theta(\boldsymbol{s}, \boldsymbol{n})\right|}$$



计算 ψ 可用公式:

$$\boxed{\sin\psi = |\cos\theta(\boldsymbol{s}, \boldsymbol{n})| = \frac{|\boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{s}|\cdot|\boldsymbol{n}|}}$$

例11 求过点(1, 2, 3), 并与直线 $\frac{x}{4}=\frac{y}{5}=\frac{z}{6}$ 垂直,

与平面 $7x+8y+9z=10$ 平行的直线方程.

■ 直线与平面的交点

设直线 l 的方程为 $\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}$,

平面Π的方程为 $Ax+By+Cz+D=0.$

将直线的参数方程代入平面方程得

$$(Am+Bn+Cp)t+(Ax_0+By_0+Cz_0+D)=0$$

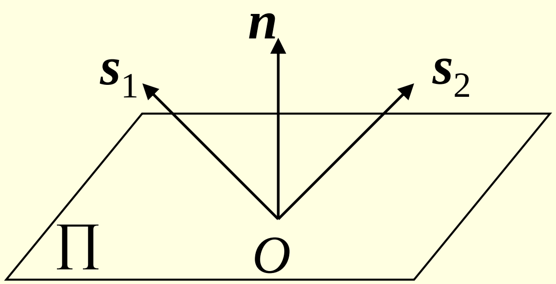
若 $Am+Bn+Cp\neq 0$, 则

$$t=-\frac{Ax_0+By_0+Cz_0+D}{Am+Bn+Cp}$$

问题：当 $Am+Bn+Cp=0$ 时，情形如何?

例12 求入射光线 $L_1:\dfrac{x-1}{4}=\dfrac{y-1}{3}=\dfrac{z-2}{1}$ 在平面

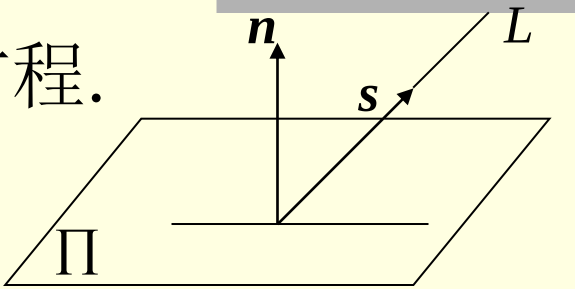
$\Pi: x+2y+5z+2=0$ 上反射光线所在直线的方程.



$$\boxed{\frac{x+3}{-3}=\frac{y+2}{-1}=\frac{z-1}{4}}$$

例13 求直线 $L:\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y+3}{2}=\dfrac{z}{2}$ 在平面

$\Pi: x-2y+z-3=0$ 上的投影直线方程.



■ 直线的共面与异面

设直线L_1过点M_1, 方向向量为$\boldsymbol{s}_1$, 直线L_2过点M_2, 方向向量为$\boldsymbol{s}_2$, 则

L_1与L_2共面(异面)

$$\xleftrightarrow{\text{充分必要条件}} \quad (\boldsymbol{s}_1\times\boldsymbol{s}_2)\cdot\overrightarrow{M_1M_2}=0 \ (\neq 0)$$

异面直线L_1与L_2间的距离

$$d=\frac{|(\boldsymbol{s}_1\times\boldsymbol{s}_2)\cdot\overrightarrow{M_1M_2}|}{|\boldsymbol{s}_1\times\boldsymbol{s}_2|}$$

例14 求过点 $A(-1,0,4)$, 与平面 $\Pi:3x-4y+z=0$ 平行, 且与直线 $L_1:\dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y-3}{1}=\dfrac{z-2}{2}$ 相交的直线方程.

$$\boxed{\frac{x+1}{6}=\frac{y}{5}=\frac{z-4}{2}}$$

■ 平面束方程

过直线 $L:\begin{cases}\Pi_1: A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,\\ \Pi_2: A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0\end{cases}$ 的平面集合

称为平面束, 其方程为

$$\boxed{(A_1x+B_1y+C_1z+D_1)+\lambda(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0 \qquad (※)}$$

λ为参数, 此方程不包括Π_2的方程.

例15 求过点 $P(1,1,2)$ 且与直线 $L_1:\begin{cases}2x+3z=0\\ x-y+z-1=0\end{cases}$ 垂直相交的直线L方程.

$$\boxed{\begin{cases}3x+y-2z=0\\ 6x-8y+5z-8=0\end{cases}}$$

例16 求过直线L: $\begin{cases} x+2z+1=0 \\ x-y-z+1=0 \end{cases}$ 且与平面

$\Pi: x+y+2z-4=0$ 成π/3夹角的平面方程.

$$\boxed{(x+2z+1)+\lambda(x-y-z+1)=0 \quad \Rightarrow \quad \lambda=1,-35}$$

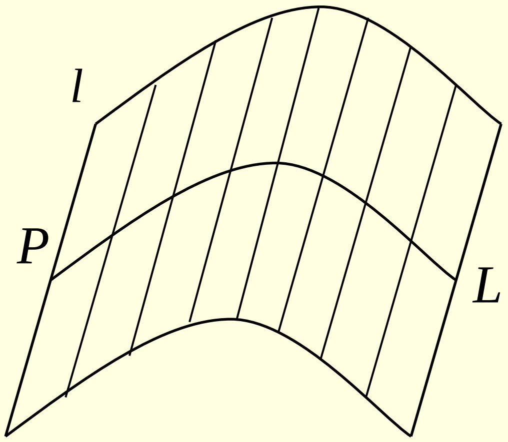
Chap 8 — 3

二次曲面

8.3.1 柱面和旋转面

1. 柱面

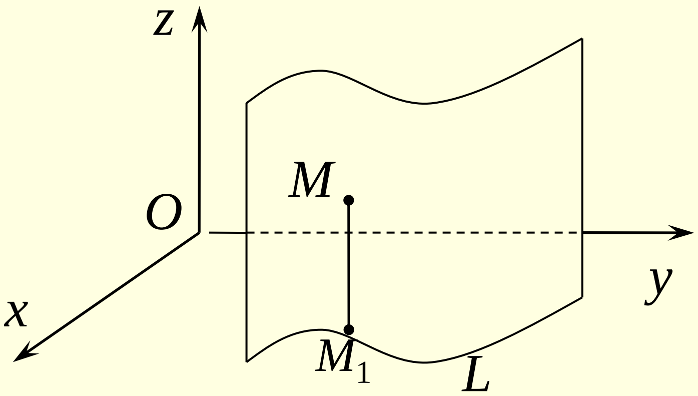
设L是空间曲线, l是过L上点P的直线, P沿L移动时与原方向始终平行的直线l的轨迹为柱面.



L: 准线

l: 母线

母线平行坐标轴的柱面



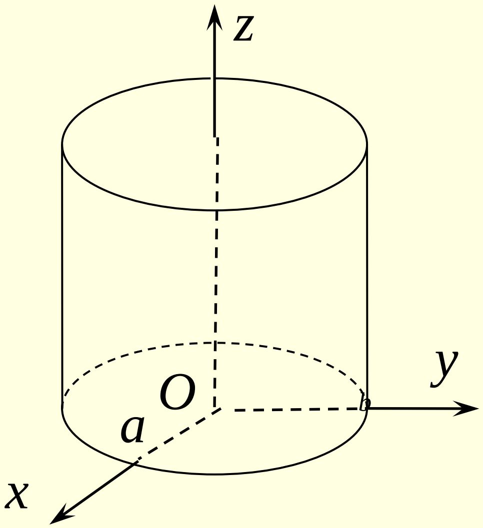
方程特点

不含某个变量, 例如

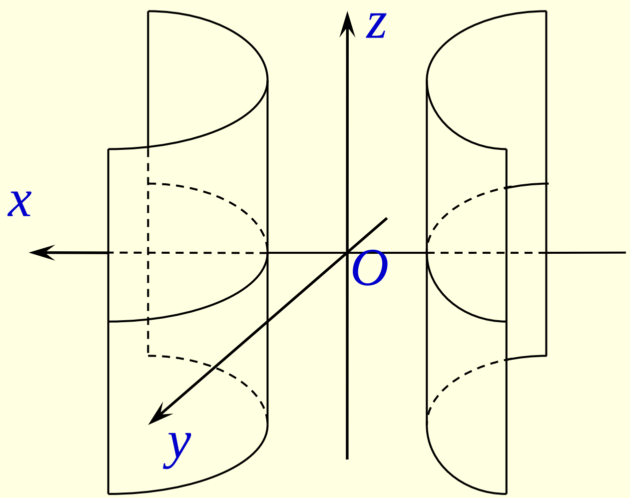
$$F(x,y)=0 \quad (\text{不含}z)$$

二次柱面

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

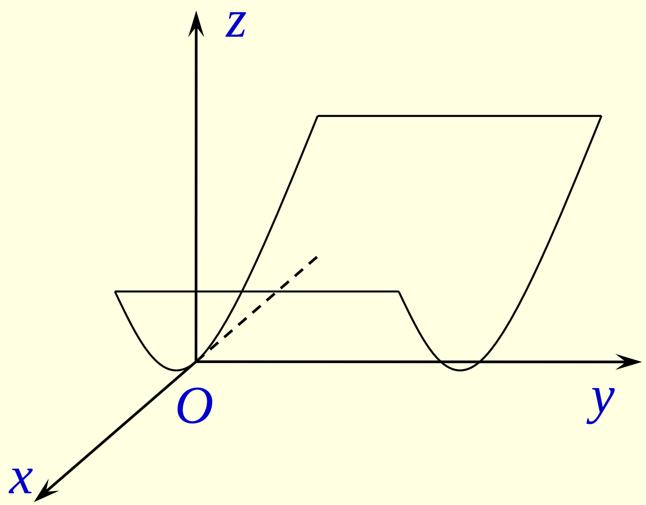


椭圆柱面



$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

双曲柱面



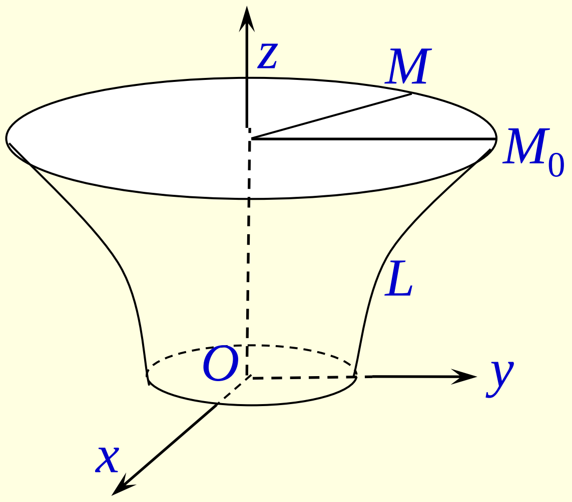
$$x^2 = 2pz \quad (p > 0)$$

抛物柱面

2. 旋转曲面

平面曲线L绕该平面上直线l旋转一周而成的曲面称为**旋转面**

l: 对称轴, L: 子午线.



yOz面上曲线 $\begin{cases} f(y,z)=0 \\ x=0 \end{cases}$

绕Oz轴旋转而成的曲面

$$f(\pm\sqrt{x^2+y^2}, z)=0$$

例1 求yOz面上的双曲线 $\begin{cases} \dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1 \\ x=0 \end{cases}$

分别绕y轴和z轴旋转所得曲面方程.

例2 求空间曲线：$\begin{cases} x=\varphi(z) \\ y=\psi(z) \end{cases}$ 绕z轴旋转一周所得曲面方程.

$$\boxed{x^2+y^2=\varphi^2(z)+\psi^2(z)}$$

8.3.2 二次曲面

在空间坐标系

点 $\xleftrightarrow{\text{一一对应}}$ 坐标(x, y, z)

空间曲面 $\xleftrightarrow{\text{一一对应}}$ 方程 $F(x, y, z) = 0$

曲面一般方程

截痕法 通过用平行坐标面的平面去截曲面所得交线(截痕)了解曲面的性态.

1. 椭球面

方程 $$\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1}$$ $(a, b, c > 0$半轴$)$

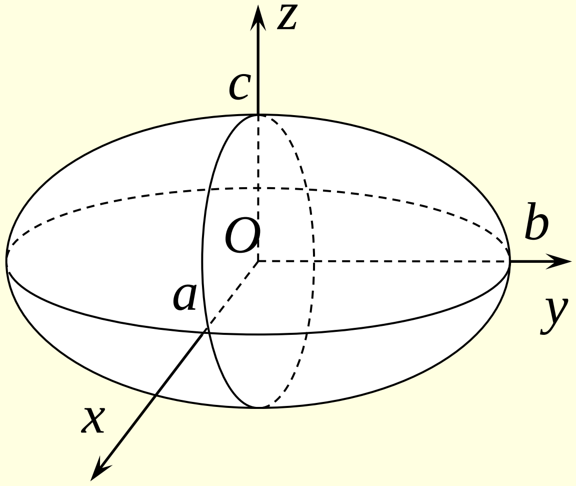
特点 1) 对称性

2) 被平行坐标面的平面截得椭圆.

例如用$z = h$截得

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1-\dfrac{h^2}{c^2} \\ z=h \end{cases}$$

简图

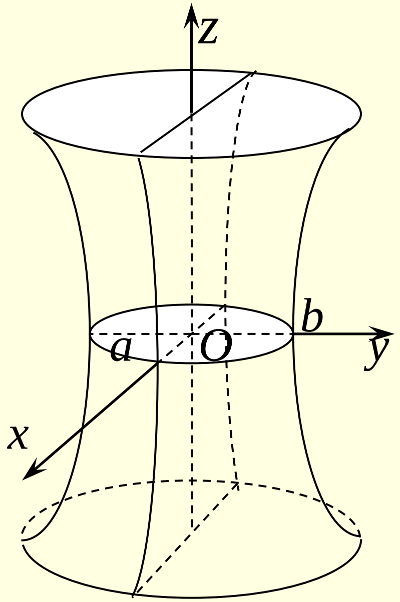


2. 双曲面

单叶双曲面

方程 $$\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1}$$

简图



特点 1) 对称; 2) 与xOy面平行

的平面截得椭圆, 例如

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1+\dfrac{h^2}{c^2}\\ z=h\end{cases}$$

与其他坐标面平行的平面截得双曲线, 例如

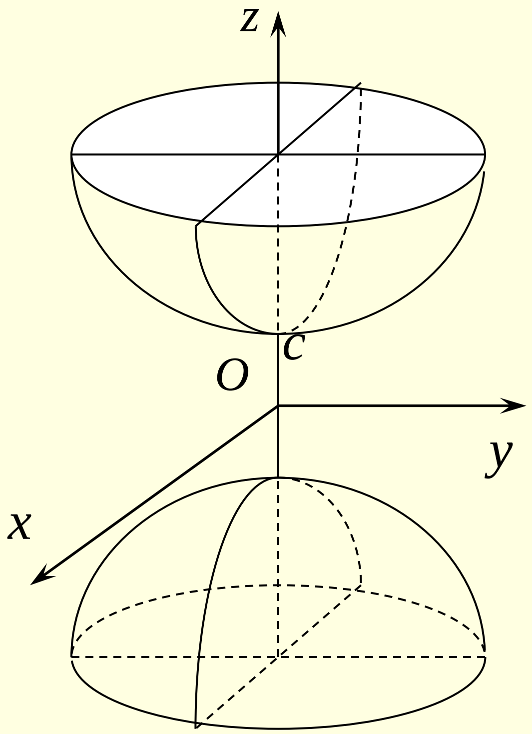
$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1 - \dfrac{h^2}{b^2} \\ y = h \end{cases}$$

(|*h*|大小变化时双曲线的变化)

双叶双曲面

方程 $$\boxed{\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = -1 \quad (a > 0, b > 0, c > 0)}$$

简图



特点 (1) 对称, 图形分为两叶

(2) 与坐标面平行的平面截得双曲线或椭圆.

3. 椭圆锥面

方程 $$\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0 \quad (a>0, b>0, c>0)}$$

(注意四个曲面方程的特点)

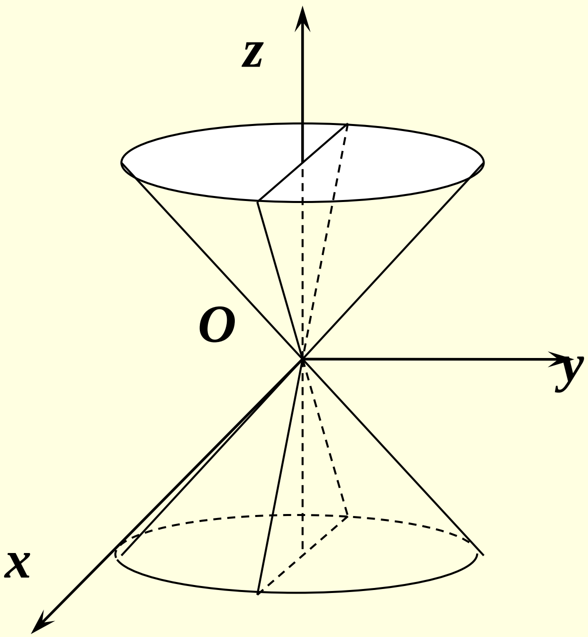
特点 (1) 对称;

(2) 与*xOy*面平行的平面截得原点或椭圆;

(3) 与其他坐标面平行的平面截得相交

直线或双曲线.

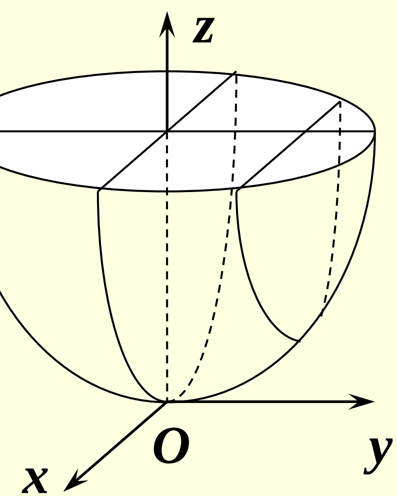
简图



4. 椭圆抛物面

方程 $$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=z\ (a>0, b>0)$$

简图



5. 双曲抛物面

方程 $$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = z \quad (a > 0, b > 0)$$

简图