Chap 12 — 4

Fourier变换和积分

12.4.1 Fourier积分

设$f(x)$以$2l$为周期, 在$[-l, l]$上可积且绝对可积, 其F氏级数的复数形式为

$$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\omega x}$$

其中 $\omega = \dfrac{\pi}{l}$ 为基频, $F_0 = \dfrac{a_0}{2} = \dfrac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(x)\mathrm{d}x,$

$$F_n = \frac{a_n - \mathrm{i}b_n}{2} = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\omega x}\mathrm{d}x,$$

$$F_{-n} = \overline{F_n}$$

问题 若f非周期函数, 如何求其Fourier级数?

令$f_l(x) = f(x),\ x \in [-l, l]$, 将$f_l(x)$以$2l$为周期延拓, 则

$$f(x) = \lim_{l \to +\infty} f_l(x)$$

记$\lambda_n = n\pi/l,\ \Delta\lambda = \lambda_n - \lambda_{n-1} = \pi/l$, 则

$$f_l(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n \mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda_n x} = \frac{1}{2l} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_{-l}^{l} f_l(t) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda_n t} \mathrm{d}t\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda_n x}$$

令$l \to +\infty$, 则$\Delta\lambda \to 0$, 得到

$$f(x)=\lim_{l\to+\infty} f_l(x) \sim \lim_{\Delta\lambda\to 0}\frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\int_{-l}^{l} f_l(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda_n t}\mathrm{d}t\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda_n x}\Delta\lambda$$

记 $$\varphi_l(\lambda)=\int_{-l}^{l} f_l(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda t}\mathrm{d}t\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda x}$$

则 $$f(x)\sim \lim_{\Delta\lambda\to 0}\frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\varphi_l(\lambda_n)\Delta\lambda$$

由于 $$\lim_{l\to+\infty}\varphi_l(\lambda)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda t}\mathrm{d}t\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda x}$$

故 $$f(x)\sim \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda t}\mathrm{d}t\right]\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda x}\mathrm{d}\lambda$$

上式右端称为函数 f 的**Fourier积分.**

定理 设f在$\mathbf{R}$的任何有限区间分段可微, 且在

$(-\infty, +\infty)$上绝对可积, 则有对任意$x \in \mathbf{R}$, 有

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda t}\mathrm{d}t\right]\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda x}\mathrm{d}\lambda = \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$$

特别地, 若f在x处连续, 则

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda t}\mathrm{d}t\right]\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda x}\mathrm{d}\lambda = f(x)$$

12.4.2 Fourier变换

定义 设f 满足定理条件且连续, 称函数

$$F(\lambda)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda t}\mathrm{d}t$$

为 f 的**Fourier变换**; 而函数

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(\lambda)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda x}\mathrm{d}\lambda$$

称为 $F(\lambda)$ 的**Fourier逆变换**, 上式称为**反演公式**.

注 当 f 在R上连续时, 有

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}\lambda\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda(x-t)}\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}\lambda\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cos\lambda(x-t)\mathrm{d}t$$

$$+\frac{\mathrm{i}}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}\lambda\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\sin\lambda(x-t)\mathrm{d}t$$

实形式Fourier积分

$$=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\mathrm{d}\lambda\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cos\lambda(x-t)\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}\mathrm{d}\lambda\left[\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cos\lambda t\cos\lambda x\,\mathrm{d}t+\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\sin\lambda t\sin\lambda x\,\mathrm{d}t\right]$$

$$\overset{def}{=}\int_0^{+\infty}\left[a(\lambda)\cos\lambda x+b(\lambda)\sin\lambda x\right]\mathrm{d}\lambda$$

其中

$$a(\lambda)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cos\lambda t\,\mathrm{d}t,b(\lambda)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\sin\lambda t\,\mathrm{d}t$$

定义 若f为偶函数, 其**Fourier变换**

$$f(x) \to F_e(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda t} \mathrm{d}t = 2\int_0^{+\infty} f(t) \cos \lambda t \mathrm{d}t$$

称为**余弦变换,** 其**逆变换**为

$$F_e(\lambda) \to f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F_e(\lambda) \mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda x} \mathrm{d}\lambda = \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} F_e(\lambda) \cos \lambda x \mathrm{d}\lambda$$

定义 若f为奇函数，其**Fourier变换**

$$f(x) \to F_o(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda t}\mathrm{d}t = -2\mathrm{i}\int_0^{+\infty} f(t)\sin\lambda t\mathrm{d}t$$

称

$$G_o(\lambda) = \mathrm{i}F_o(\lambda) = 2\int_0^{+\infty} f(t)\sin\lambda t\mathrm{d}t$$

为f的正弦变换，其逆变换为

$$G_o(\lambda) \to f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} G_o(\lambda)\sin\lambda x\mathrm{d}\lambda$$

例1 求指数衰减函数

$$f(x)=\begin{cases} \mathrm{e}^{-\beta x}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0 \end{cases} \quad (\beta > 0)$$

的Fourier变换.

例2 求分段函数

$$f(x)=\begin{cases}1, & |x|<a,\\ \frac{1}{2}, & x=\pm a,\\ 0, & |x|>a\end{cases}$$

的Fourier变换.

例3 求函数 $f(x)=\mathrm{e}^{-ax}\ (a>0, x\geq 0)$

的Fourier余弦变换和正弦变换.

12.4.3 Fourier变换的性质

记 f 的Fourier变换为 $F[f]$, 即

$$F[f](\lambda)=F(\lambda)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda t}\mathrm{d}t$$

(1) 线性性 若 $\alpha,\beta\in\mathbf{R}$, 则

$$F[\alpha f+\beta g]=\alpha F[f]+\beta F[g]$$

(2) 频移性

$$F[f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda_0 x}](\lambda)=F(\lambda+\lambda_0)$$

(3) 微分关系 设$f(\pm\infty)=0$, f'存在**Fourier**变换, 则

$$F[f'] = \mathrm{i}\lambda \cdot F[f]$$

(4) 微分特性 设 f 和 $xf(x)$存在**Fourier**变换, 则

$$F'(\lambda) = F[-\mathrm{i}xf(x)]$$

12.4.4 卷积

定义 设f, g 在$\mathbf{R}$上绝对可积, 则 f 和 g的**卷积**

$$(f * g)(x) \overset{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)g(t)\mathrm{d}t$$

定理 若f 和 g在$\mathbf{R}$上绝对可积, 则有

$$f * g = g * f$$

$$(f * g) * h = f * (g * h)$$

$$(f + g) * h = f * h + g * h$$

定理 若f和 g在**R**上绝对可积, 则有

$$F[f*g]=F[f]\cdot F[g]$$

Parseval等式 若f 可积且平方可积, $F(\lambda)$是f的**F**氏变换, 则有

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f^2(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}|F(\lambda)|^2\,\mathrm{d}\lambda$$

例4 求正弦衰减函数

$$f(x)=\begin{cases} e^{-\beta x}\sin\omega_0 x, & x\geq 0, \\ 0, & x<0 \end{cases} \quad (\beta>0)$$

的Fourier变换.

例5 设无穷长细杆温度分布为$T = T(x, t)$满足

$$\frac{\partial T}{\partial t}=\frac{\partial^2 T}{\partial x^2},\quad T(x,0)=f(x),\ x\in\mathbb{R}$$

其中初始温度 $f(x)$在R上绝对可积.