Chap 12 — 2

平方平均收斂

(1) $f \in R[a,b]$

(2) 瑕积分 $\int_a^b f^2(x)dx$ 收敛

12.2.1 基本概念

记 $L^2[a,b]=\{f(x) | f\text{在}[a,b]\text{上可积且平方可积}\}$

$|f(x)| \le \frac{f^2(x)+1}{2} dx$

∵ $\int_a^b f^2(x)dx$ 收敛 $\to \int_a^b \frac{f^2(x)+1}{2}dx$ 收敛 $\to \int_a^b |f(x)|$ 收敛 $\to \int_a^b f(x)dx$ 收敛

- $L^2[a, b]$是一个**线性空间**
- 设$f, g \in L^2[a, b]$, 其**内积**定义为

$$\langle f,g\rangle=\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x$$

$$\| f \|=\sqrt{\langle f,f\rangle}=\sqrt{\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x}$$

- f, g之间的**距离**

$$\| f-g \|=\sqrt{\langle f-g,f-g\rangle}=\sqrt{\int_a^b [f(x)-g(x)]^2\,\mathrm{d}x}$$

➢ 三角函数系

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}, \cdots, \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}}, \cdots\right\}$$

是$L^2[-\pi, \pi]$的标准正交系.

定义 设$f \in L^2[a, b]$, 若存在$f_n \in L^2[a, b]$使得

$$\lim_{n\to\infty} \| f_n - f \|^2 = \lim_{n\to\infty} \int_a^b \left[f_n(x) - f(x)\right]^2 \mathrm{d}x = 0$$

则称f_n平方平均收敛于f.

12.2.2 Bessel不等式

记n阶三角多项式集合为

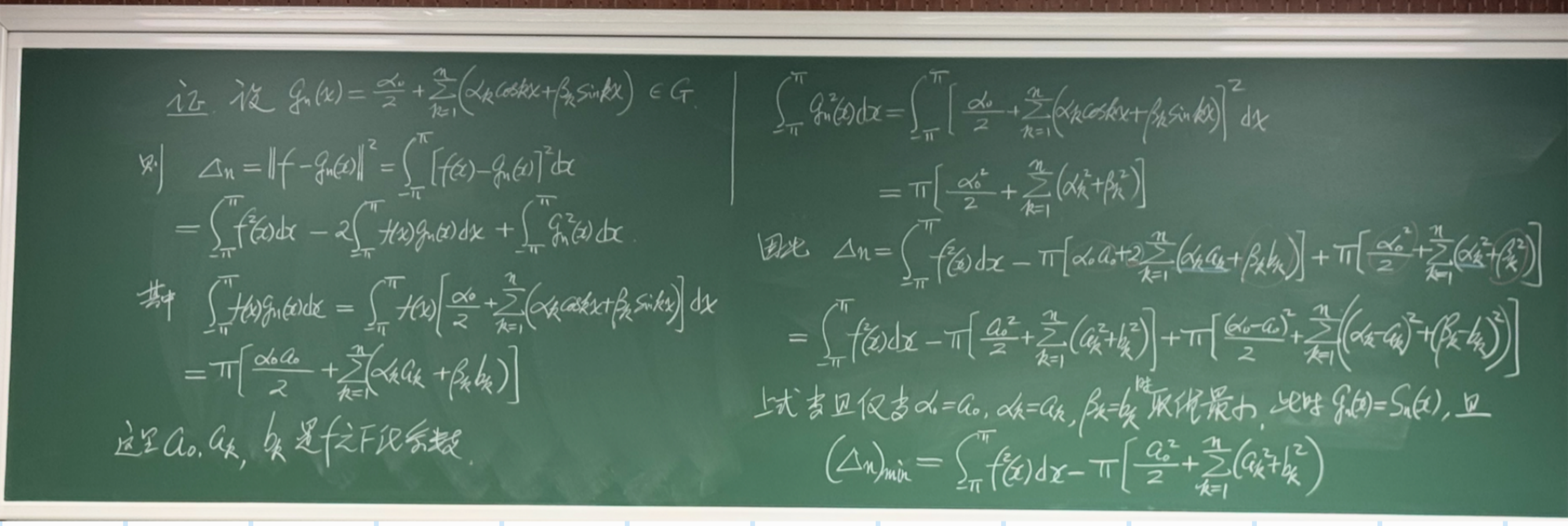
$$G=\left\{g_n(x)\middle| g_n(x)=\frac{\alpha_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}(\alpha_k\cos kx+\beta_k\sin kx)\right\}$$

问题 $\forall f\in L^2[-\pi,\pi]$, 是否存在$g_n(x)\in G$ 使得$g_n(x)$是 $f(x)$的最佳逼近?

定理 设$f\in L^2[-\pi,\pi]$, 则对$\forall g_n\in G$ 有

$$\| f-S_n(x)\|\le\| f-g_n(x)\|$$

其中$S_n(x)$是f 的n阶Fourier多项式.



Bessel 不等式.

$$0\le\|f-S_n\|^2=\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)dx-\pi\left(\frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k^2+b_k^2)\right)$$

$$\Rightarrow \frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k^2+b_k^2)\le\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)dx$$

命题 设 $f \in L^2[-\pi, \pi]$, 则有

$$\| f - S_n \|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\mathrm{d}x - \pi\left[\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n}\left(a_k^2 + b_k^2\right)\right]$$

其中 a_k, b_k 是 f 的F氏系数.

Bessel不等式 设 $f \in L^2[-\pi, \pi]$, 则 f 的F氏系数满足

$$\boxed{\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2) \le \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\mathrm{d}x}$$

等号?

推论 设 $f \in L^2[-\pi, \pi]$,则级数

$$\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)$$

收敛, 故 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0 = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$, 其中$a_n$, b_n是f 的**F**氏系数.

12.2.3 平方平均收敛

定理 设 $f \in L^2[-\pi, \pi]$, 则 $\{S_n(x)\}$ 平方平均收敛于 f, 即

$$\lim_{n\to\infty} \| f - S_n \|^2 = 0$$

Parseval等式 设 $f \in L^2[-\pi, \pi]$, 则 f 的F氏系数满足

$$\boxed{\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\mathrm{d}x}$$

例1 已知 $x^2 \sim \dfrac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n^2}\cos nx$, 求 $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^4}$

$$\frac{2}{9}\pi^4 + 16\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^4 dx$$

$$16\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4} = \frac{2}{5}\pi^4 - \frac{2}{9}\pi^4$$

$$= \frac{8}{45}\pi^4$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$$

推论1 设 $f \in C[-\pi, \pi]$，且 f 与三角函数系

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}, \cdots, \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}}, \cdots\right\}$$

中的每一个都正交，则 $f(x) \equiv 0$.

$f-g \equiv 0$、

- 若 $f, g \in C[-\pi, \pi]$，且F氏系数相等，则 $f(x) \equiv g(x)$

推论2 设 $f, g \in L^2[-\pi, \pi]$，其F氏系数分别为 a_n, b_n 和 $\bar{a}_n, \bar{b}_n$，则

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)\mathrm{d}x = \frac{a_0\bar{a}_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\bar{a}_n + b_n\bar{b}_n\right).$$

Co 1: $a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = 0$. $b_n = 0$.

$$0 = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx$$

$$\Rightarrow \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx = 0 \xRightarrow{f\text{连续}} f(x) \equiv 0.$$

Co 2: $(*) f(x)g(x) = \frac{1}{4}\left[(f+g)^2 - (f-g)^2\right]$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(f+g)^2\,dx = \frac{(a_0+\overline{a_0})^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left((a_n+\overline{a_n})^2 + (b_n+\overline{b_n})^2\right)$$

两等式作差

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)\,dx = \frac{a_0\overline{a_0}}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\overline{a_n} + b_n\overline{b_n})$$

推论3 设 $f\in L^2[-\pi,\pi]$, 其F氏级数为

$$f(x)\sim \frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

则对 $\forall[a,b]\subset[-\pi,\pi]$, 有　　积分后相等

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^b \frac{a_0}{2}\mathrm{d}x+\sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b(a_n\cos nx+b_n\sin nx)\mathrm{d}x$$

Co3 证: $g(x)=\begin{cases}1 & x\in[a,b]\\ 0 & x\in[-\pi,\pi]\setminus[a,b]\end{cases}$

$\bar{a}_0$　　$\bar{a}_n$　　$\bar{b}_n$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)\,dx=\int_a^b f(x)\,dx \overset{Co2}{=} \frac{a_0}{2}\times\int_a^b 1\,dx+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\int_a^b\cos nx\,dx+b_n\int_a^b\sin nx\,dx\right)$$

$= RHS$

12.2.4 广义Fourier级数

设$\{\varphi_1(x),\varphi_2(x),\cdots,\varphi_n(x),\cdots\}$ 是$L^2[a,b]$的标准正交系，即

$$\langle\varphi_m(x),\varphi_n(x)\rangle=\int_a^b\varphi_m(x)\varphi_n(x)\mathrm{d}x=\begin{cases}0, & m\neq n\\ 1, & m=n\end{cases}$$

称 $a_n=\int_a^b f(x)\varphi_n(x)\mathrm{d}x$为$f$的广义F氏系数，

而f 的广义F氏级数定义为

$$f(x)\sim\sum_{n=1}^{\infty}a_n\varphi_n(x).$$

定理 设$f\in L^2[a,b]$, $\{\varphi_n(x)\}$为标准正交系，则对任意

n次φ-多项式 $T_n(x)=\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\varphi_k(x)$, 有

$$\|f-S_n\|\le\|f-T_n\|$$

$$\|f-S_n\|^2=\|f\|^2-\sum_{m=1}^{n}a_m^2$$

$$\sum_{m=1}^{\infty}a_m^2\le\|f\|^2$$

Bessel

其中 $S_n(x)=\sum_{k=1}^{n}a_k\varphi_k(x)$ 是f的广义F氏级数前n项和.

定义 设$\{\varphi_n(x)\}$为$L^2[a,b]$的标准正交系，且

$$\sum_{m=1}^{\infty} a_m^2 = \| f \|^2$$

Parseval.

则称$\{\varphi_n(x)\}$为$L^2[a,b]$的**完备**标准正交系.

定理 设$\{\varphi_n(x)\}$为$L^2[a,b]$的完备标准正交系，则

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k \varphi_k(x)$$

平方平均收敛于f, 即 $\lim\limits_{n\to\infty} \| f - S_n \| = 0$

定理 设$\{\varphi_n(x)\}$为$L^2[a, b]$的完备标准正交系，则

(1) 若$f \in C[a, b]$，则$f(x) \equiv 0$当且仅当f的广义F氏系数

$a_n = 0, (n = 1, 2, \ldots)$ "$\Rightarrow$" 显然 "$\Leftarrow$" 除件 $0 = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$

(2) 从$\{\varphi_n(x)\}$中删去任一函数，则剩余函数系不完备； $= \int_a^b f^2(x)dx$ $+C$

不妨删 φ_1 $0 = \sum_{n=2}^{\infty} a_n^2 < \int_a^b \varphi_1^2(x) dx = 1$ 即 $\sum_{n=2}^{\infty} a_n^2 < \|\varphi\|^2$

(3) 若$\int_a^b \varphi_0^2(x)\mathrm{d}x = 1$，则$\{\varphi_n(x)\}$增加$\varphi_0(x)$所得函数系

非正交系.