

Chap 12 — 2

平方平均收斂

12.2.1 基本概念

记 $L^2[a, b] = \{f(x) | f \text{ 在 } [a, b] \text{ 上可积且平方可积}\}$

➤ $L^2[a, b]$ 是一个线性空间

➤ 设 $f, g \in L^2[a, b]$, 其内积定义为

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x)dx$$

$$\|f\| = \sqrt{\langle f, f \rangle} = \sqrt{\int_a^b f^2(x)dx}$$

➤ f, g 之间的距离

$$\|f - g\| = \sqrt{\langle f - g, f - g \rangle} = \sqrt{\int_a^b [f(x) - g(x)]^2 dx}$$

➤ 三角函数系

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}, \dots, \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}}, \dots \right\}$$

是 $L^2[-\pi, \pi]$ 的**标准正交系**.

定义 设 $f \in L^2[a, b]$, 若存在 $f_n \in L^2[a, b]$ 使得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b [f_n(x) - f(x)]^2 dx = 0$$

则称 f_n **平方平均收敛**于 f .

12.2.2 Bessel不等式

记 n 阶三角多项式集合为

$$G = \left\{ g_n(x) \mid g_n(x) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^n (\alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx) \right\}$$

问题 $\forall f \in L^2[-\pi, \pi]$, 是否存在 $g_n(x) \in G$ 使得 $g_n(x)$ 是 $f(x)$ 的最佳逼近?

定理 设 $f \in L^2[-\pi, \pi]$, 则对 $\forall g_n \in G$ 有

$$\|f - S_n(x)\| \leq \|f - g_n(x)\|$$

其中 $S_n(x)$ 是 f 的 n 阶Fourier多项式.

命题 设 $f \in L^2[-\pi, \pi]$, 则有

$$\|f - S_n\|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx - \pi \left[\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k^2 + b_k^2) \right]$$

其中 a_k, b_k 是 f 的F氏系数.

Bessel不等式 设 $f \in L^2[-\pi, \pi]$, 则 f 的F氏系数满足

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx$$

推论 设 $f \in L^2[-\pi, \pi]$, 则级数

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2)$$

收敛, 故 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$, 其中 a_n, b_n 是 f 的F氏系数.

12.2.3 平方平均收敛

定理 设 $f \in L^2[-\pi, \pi]$, 则 $\{S_n(x)\}$ 平方平均收敛于 f , 即

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - S_n\|^2 = 0$$

Parseval等式 设 $f \in L^2[-\pi, \pi]$, 则 f 的F氏系数满足

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx$$

例1 已知 $x^2 \sim \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos nx$, 求 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$

推论 设 $f \in C[-\pi, \pi]$, 且 f 与三角函数系

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}, \dots, \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}}, \dots \right\}$$

中的每一个都正交, 则 $f(x) \equiv 0$.

➤ 若 $f, g \in C[-\pi, \pi]$, 且F氏系数相等, 则 $f(x) \equiv g(x)$

推论 设 $f, g \in L^2[-\pi, \pi]$, 其F氏系数分别为 a_n, b_n 和

\bar{a}_n, \bar{b}_n , 则

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx = \frac{a_0 \bar{a}_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \bar{a}_n + b_n \bar{b}_n).$$

推论 设 $f \in L^2[-\pi, \pi]$, 其F氏级数为

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

则对 $\forall [a, b] \subset [-\pi, \pi]$, 有

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b \frac{a_0}{2} dx + \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b (a_n \cos nx + b_n \sin nx) dx$$

12.2.4 广义Fourier级数

设 $\{\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x), \dots\}$ 是 $L^2[a, b]$ 的标准正交系, 即

$$\langle \varphi_m(x), \varphi_n(x) \rangle = \int_a^b \varphi_m(x) \varphi_n(x) dx = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ 1, & m = n \end{cases}$$

称 $a_n = \int_a^b f(x) \varphi_n(x) dx$ 为 f 的**广义F氏系数**,

而 f 的**广义F氏级数**定义为

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(x).$$

定理 设 $f \in L^2[a, b]$, $\{\varphi_n(x)\}$ 为标准正交系, 则对任意

n 次 φ -多项式 $T_n(x) = \sum_{k=1}^n \alpha_k \varphi_k(x)$, 有

$$\|f - S_n\| \leq \|f - T_n\|$$

$$\|f - S_n\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{m=1}^n a_m^2$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} a_m^2 \leq \|f\|^2$$

其中 $S_n(x) = \sum_{k=1}^n a_k \varphi_k(x)$ 是 f 的广义F氏级数前 n 项和.

定义 设 $\{\varphi_n(x)\}$ 为 $L^2[a, b]$ 的标准正交系, 且

$$\sum_{m=1}^{\infty} a_m^2 = \|f\|^2$$

则称 $\{\varphi_n(x)\}$ 为 $L^2[a, b]$ 的**完备**标准正交系.

定理 设 $\{\varphi_n(x)\}$ 为 $L^2[a, b]$ 的完备标准正交系, 则

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^n a_k \varphi_k(x)$$

平方平均收敛于 f , 即 $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - S_n\| = 0$

定理 设 $\{\varphi_n(x)\}$ 为 $L^2[a, b]$ 的完备标准正交系, 则

(1) 若 $f \in C[a, b]$, 则 $f(x) \equiv 0$ 当且仅当 f 的广义F氏系数

$$a_n = 0, (n = 1, 2, \dots)$$

(2) 从 $\{\varphi_n(x)\}$ 中删去任一函数, 则剩余函数系不完备;

(3) 若 $\int_a^b \varphi_0^2(x) dx = 1$, 则 $\{\varphi_n(x)\}$ 增加 $\varphi_0(x)$ 所得函数系
非正交系.