Chap 11

曲线和曲面积分

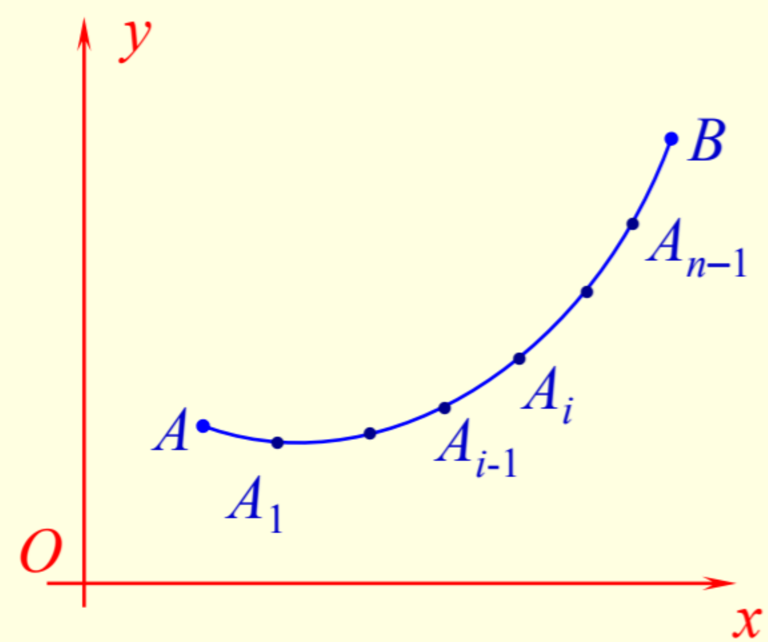
Chap 11 — 1

数量场在曲线上的积分

11.1.1 基本概念

问题 如何求一段弧状质线的质量?

设有xOy面上的曲线L, 其端点为A, B, 点(x, y)处的线密度为$\varphi(x, y)$.



用分点$A_1, A_2, \dots, A_{n-1}$将L分成n小段, 记$A_0 = A$, $A_n = B$, 第i小段弧$A_{i-1}A_i$的长度为Δs_i,任取(ξ_i, η_i) $\in$弧$A_{i-1}A_i$, 则第i小段弧质量近似为$\varphi(\xi_i, \eta_i)\Delta s_i$, 故

总质量近似为 $\sum_{i=1}^{n}\varphi(\xi_i,\eta_i)\Delta s_i$

记 $|T|=\max\limits_{1\le i\le n}\Delta s_i$，则弧状质线的质量

$$m=\lim_{|T|\to 0}\sum_{i=1}^{n}\varphi(\xi_i,\eta_i)\Delta s_i$$

试一试 去掉物理背景, 给出定义在曲线L上的函数

$f(x,y)$的**第一型曲线积分(数量场的曲线积分)**

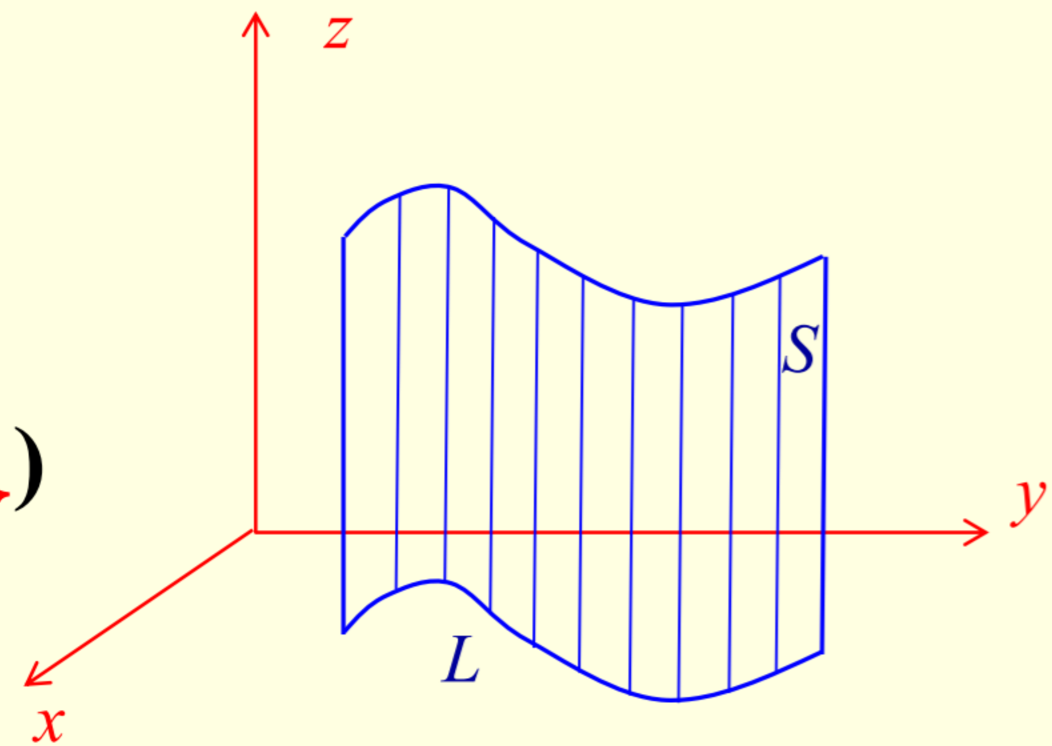
$$\int_L f(x,y)\mathrm{d}s=\lim_{|T|\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i,\eta_i)\Delta s_i$$

的定义.

几何问题 如何求一块柱面的面积?

设曲线$L \subset xOy$ 面, S是以L为准线, 母线平行Oz轴的柱面, 其高度为 $f(x, y)$, 求xOy 面以上部分柱面S的面积

$$\boxed{S = \int_L f(x, y) \mathrm{d}s}$$



(第一型曲线积分**几何意义**)

■ **性质　无方向性** 若曲线L为 $\overset{\frown}{AB}$,则

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} f(x,y)\mathrm{d}s = \int_{\overset{\frown}{BA}} f(x,y)\mathrm{d}s$$

线性性 设α, β为常数, 则

$$\int_L [\alpha f(x,y) + \beta g(x,y)]\mathrm{d}s = \alpha\int_L f(x,y)\mathrm{d}s + \beta\int_L g(x,y)\mathrm{d}s$$

可加性 设曲线段L_1与L_2首尾相接成曲线L, 则

$$\int_L f(x,y)\mathrm{d}s = \int_{L_1} f(x,y)\mathrm{d}s + \int_{L_2} f(x,y)\mathrm{d}s$$

此外, $\int_L 1\mathrm{d}s = s_L$,其中s_L 为曲线L的弧长.

11.1.2 数量场曲线积分的计算

定理 设$f(x,y)$在光滑曲线L上连续, L的**参数方程**为

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)=x(t)\boldsymbol{i}+y(t)\boldsymbol{j},\ t\in[\alpha,\beta]$$

则有

$$\boxed{\int_L f(x,y)\mathrm{d}s=\int_\alpha^\beta f(x(t),y(t))\underbrace{\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}\mathrm{d}t}_{\mathrm{d}s\text{弧微分}}}$$

注意 由于ds是弧长, 取正值, 故定积分限应$\alpha<\beta$

若曲线L的方程为$y=y(x)$, $x\in[a,b]$, 则

$$\boxed{\int_L f(x,y)\mathrm{d}s=\int_a^b f(x,y(x))\sqrt{1+y'^2(x)}\mathrm{d}x}$$

证：取分割 T、$[\alpha,\beta]$ 对应分割 T'

$$\Delta s_i = \int_{t_{i-1}}^{t_i} \sqrt{x'(t)^2 + y'^2(t)}\, dt$$

$$= \sqrt{x'(t^*)^2 + y'(t^*)^2}\, \Delta t_i$$

从而 $\lim\limits_{|T|\to 0} \sum f(\xi_i, \eta_i) \Delta s_i = \sum\limits_{|T'|\to 0} f(x(t_i^*), y(t_i^*)) \sqrt{x'(t_i^*)^2 + y'(t_i^*)^2}\, \Delta t_i$

即 $\int_L f(x,y) ds = \int_\alpha^\beta f(x(t), y(t)) \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}\, dt$

例1 计算曲线积分 $\int_L x\mathrm{d}s$，其中L为抛物线 $y=x^2$上点$O(0, 0)$ 与点$B(1, 1)$间的弧段.

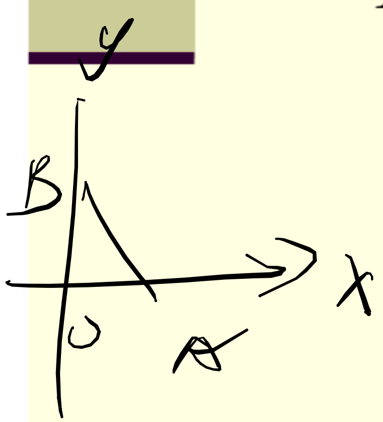
$$\boxed{\frac{5\sqrt{5}-1}{12}}$$

$$\int_0^1 x\sqrt{1+(2x)^2}\,dx = \int_0^1 x\sqrt{1+4x^2}\,dx = \frac{1}{8}\int_0^1\sqrt{1+4x^2}\,d(1+4x^2)$$

$$= \frac{1}{8}\cdot\frac{2}{3}(1+4x^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1 = \frac{5\sqrt{5}}{12} - \frac{1}{12}$$

例2 求曲线积分 $\int_L x\mathrm{d}s$，其中L为平面上$O(0, 0)$，$A(1, 0)$，$B(0, 1)$为顶点的三角形的边界.

$$\boxed{\frac{\sqrt{2}+1}{2}}$$



OB 积分$=0$

AB: $y=1-x$ $\int_0^1 x\sqrt{1+1^2}\,dx = \sqrt{2}\int_0^1 x\,dx$

$= \frac{\sqrt{2}}{2}$

OA: $y=0$ $\int_0^1 x\,dx = \frac{1}{2}$

例3 求曲线积分 $\int_L xy\mathrm{d}s$，其中L为椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$

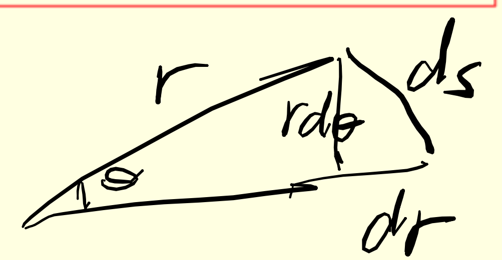
在第一象限的弧段.

$$\boxed{\frac{ab(a^2+ab+b^2)}{3(a+b)}}$$

例4 已知质线的线密度为 $\varphi=\sqrt{x^2+y^2}$，其形状为上半圆周L: $y=\sqrt{4x-x^2}$，$x\in[0,4]$，求该质线的质量.

$\boxed{16}$

回顾 在极坐标 $r=r(\theta)$下，$\boxed{\mathrm{d}s=\sqrt{r^2+r'^2}\mathrm{d}\theta}$



$(ds)^2=(rd\theta)^2+dr^2$

eg3 $L: x=a\cos\theta \quad y=b\sin\theta \quad (0\le\theta\le\frac{\pi}{2})$

则 $ds=\sqrt{(-a\sin\theta)^2+(b\cos\theta)^2}\,d\theta=\sqrt{b^2+(a^2-b^2)\sin^2\theta}\,d\theta$

$$\int_L xy\,ds=\int_0^{\frac{\pi}{2}} ab\cos\theta\sin\theta\sqrt{b^2+(a^2-b^2)\sin^2\theta}\,d\theta$$

$$=\frac{ab}{2(a^2-b^2)}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{b^2+(a^2-b^2)\sin^2\theta}\,d\left(b^2+(a^2-b^2)\sin^2\theta\right)$$

$$=\frac{ab}{3(a^2-b^2)}\left(b^2+(a^2-b^2)\sin^2\theta\right)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{ab(a^3-b^3)}{3(a^2-b^2)}$$

eg4 一:

$L: x=2+2\cos t \quad y=2\sin t \quad t\in[0,\pi]$

$ds=\sqrt{(-2\sin t)^2+(2\cos t)^2}\,dt=2dt$

$L: r=4\cos\theta,\ \theta\in[0,\pi]$

$x^2+y^2=4x$

注：曲线积分求解，函数可用曲线方程变形/化简

$m=\int_L\sqrt{x^2+y^2}\,ds=\int_0^{\pi}\sqrt{4(2+2\cos t)}\cdot 2dt=$

二：$r=4\cos\theta \quad \theta\in[0,\frac{\pi}{2}] \quad ds=\sqrt{(4\cos\theta)^2+(-4\sin\theta)^2}\,d\theta=4d\theta$

若L关于x轴对称，则

$$\int_L f(x,y)\,ds=\begin{cases}2\int_{L_{上}} f\,ds & f关于y偶\\ 0 & f关于y奇\end{cases}$$

■ 思考与猜测　对于空间曲线L:

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t) = x(t)\boldsymbol{i} + y(t)\boldsymbol{j} + z(t)\boldsymbol{k},\ t \in [\alpha, \beta]$$

第一型曲线积分 $\int_L f(x, y, z)\mathrm{d}s$ 的概念与计算公式如何?

例5 计算 $\int_L (x^2 + y^2 + z^2)\mathrm{d}s$, 其中曲线$L$为球面

$x^2 + y^2 + z^2 = 4$ 与平面$x + z = 2$的交线.

提示: 将L 的方程化为参数方程　$\boxed{8\sqrt{2}\pi}$

消z　　椭圆

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 4 \\ z + x = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x-1)^2 + \dfrac{y^2}{2} = 1 \\ z + x = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 + \cos t \\ y = \sqrt{2}\sin t \\ z = 1 - \cos t \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi]$$

向 xOy 投影：投影柱面：消 z

$$I = \int_L 4\,ds = \int_0^{2\pi} 4\sqrt{2}\,dt = 8\sqrt{2}\pi$$

where $ds = \sqrt{(-\sin t)^2 + (\sqrt{2}\cos t)^2 + (\sin t)^2}\,dt$
$= \sqrt{2}\,dt$

bonus: calc: $\int_L z\,ds$

$$\int_L z\,ds = \int_L x\,ds \quad (x\ z\ \text{地位相同})$$

$$\int_L z\,ds = \frac{1}{2}\int_L (x+z)\,ds = \frac{1}{2}\int_L 2\,ds = 2\sqrt{2}\pi$$

bonus: ① $C: \begin{cases} x^2+y^2+z^2=4 \\ x+y+z=0 \end{cases}$

$$\int_C x^2\,ds = \frac{1}{3}\int (x^2+y^2+z^2)\,ds = \frac{1}{3}\int 4\,ds = \frac{4}{3}\times \text{周长} = \frac{16}{3}\pi$$

$$\int_C x\,ds = \frac{1}{3}\int (x+y+z)\,ds = 0$$

$$\int_L xy\,ds = \frac{1}{3}\int (xy+yz+xz)\,ds = \frac{1}{3}\int \frac{(x+y+z)^2 - (x^2+y^2+z^2)}{2}\,ds$$

$$= \frac{1}{6}\int -4\,ds = -\frac{2}{3}\,4\pi = -\frac{8}{3}\pi$$

review 积分第一中值定理

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(\xi)\int_a^b g(x)\,dx \quad \xi \in (a,b)$$

where: $f \in C[a,b]$ $g \in R[a,b]$, g 在积分区间不变号

命题：$f(x,y)$ 在光滑曲线 $x=x(t)$ $y=y(t)$ $t\in[\alpha,\beta]$ 连续

求证存在 $(x_0,y_0)\in L$

$$\int_L f(x,y)\,ds = f(x_0,y_0)\Delta L$$

$$LHS = \int_\alpha^\beta f(x(t),y(t))\,ds$$

$\nearrow C$ $\nearrow$ 不变号 $(\sqrt{x'^2+y'^2})$

$$= f(x(t_0),y(t_0))\int_\alpha^\beta ds$$

$$= f(x_0,y_0)\,\Delta L = RHS.$$

Chap 11 — 2

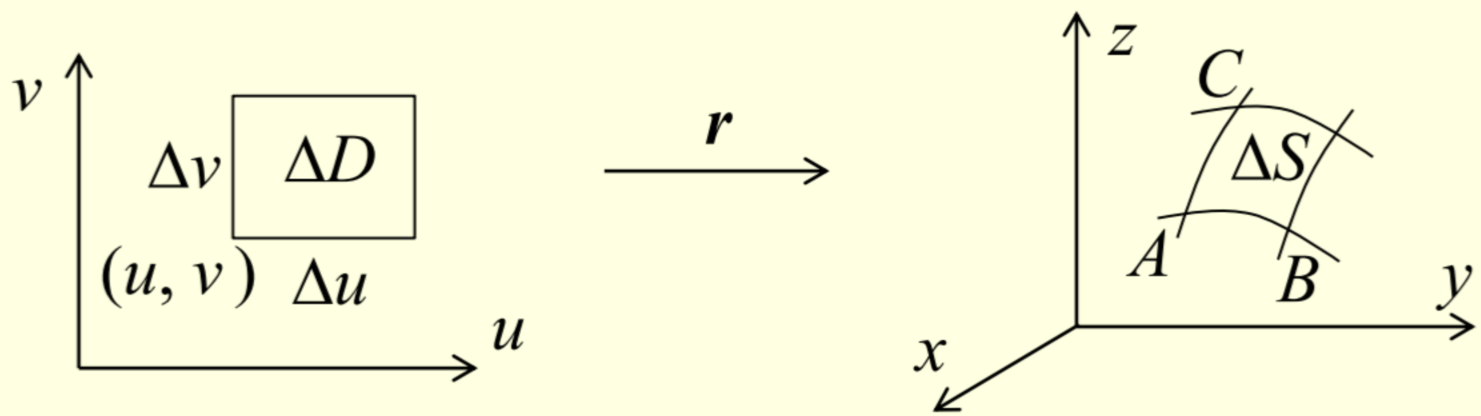
数量场在曲面上的积分

11.2.1 曲面的面积

设有光滑参数曲面S:

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u,v)=x(u,v)\boldsymbol{i}+y(u,v)\boldsymbol{j}+z(u,v)\boldsymbol{k},\ (u,v)\in D$$

微元法 在D中取小矩形ΔD, 其对应小曲面ΔS, 其面积



近似为向量AB和向量AC张成的平行四边形的面积

由于 $$\overrightarrow{AB} = \boldsymbol{r}(u+\Delta u, v) - \boldsymbol{r}(u,v) \approx \boldsymbol{r}_u'(u,v)\Delta u$$

$$\overrightarrow{AC} = \boldsymbol{r}(u, v+\Delta v) - \boldsymbol{r}(u,v) \approx \boldsymbol{r}_v'(u,v)\Delta v$$

故小曲面ΔS的面积 $\Delta S \approx |\boldsymbol{r}_u'(u,v) \times \boldsymbol{r}_v'(u,v)| \Delta u \Delta v$

从而**曲面面积元素**

$$\mathrm{d}S = |\boldsymbol{r}_u'(u,v) \times \boldsymbol{r}_v'(u,v)| \,\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

$\left(\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u}\right) \times \left(\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v}\right)$

故曲面S面积

$$\boxed{\begin{aligned} S &= \iint_D |\boldsymbol{r}_u'(u,v) \times \boldsymbol{r}_v'(u,v)| \,\mathrm{d}u\mathrm{d}v \\ &= \iint_D \sqrt{A^2+B^2+C^2}\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v \end{aligned}}$$

法向量(A,B,C)

其中

$$A=\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)},\quad B=\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)},\quad C=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$$

特别地, 当曲面为**显式方程**

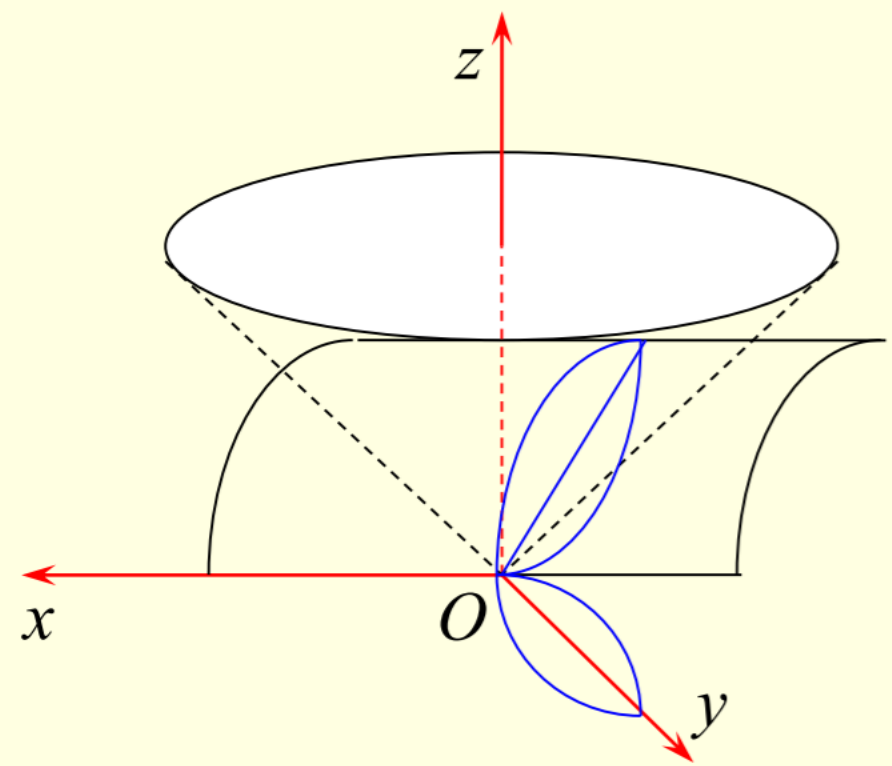
$$z=z(x,y),\quad (x,y)\in D$$

$\vec{n}=(-f'_x,-f'_y,1)$

则

$$\boxed{\begin{gathered}\mathrm{d}S=\sqrt{1+{z'_x}^2+{z'_y}^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ S=\iint_D\sqrt{1+{z'_x}^2+{z'_y}^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\end{gathered}}$$

例1 计算锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 被柱面 $z^2=2y$ 所截部分的面积.



解: $\begin{cases} z=\sqrt{x^2+y^2} \\ z^2=2y \end{cases} \rightarrow x^2+y^2=2y$

$\boxed{\sqrt{2}\pi}$

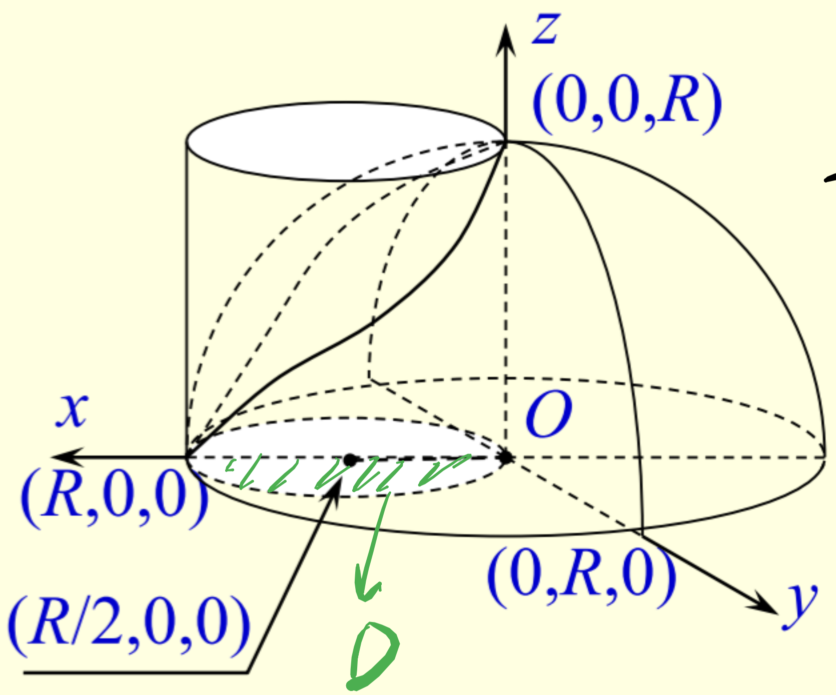
$D: x^2+y^2\le 2y \qquad x^2+(y-1)^2\le 1.$

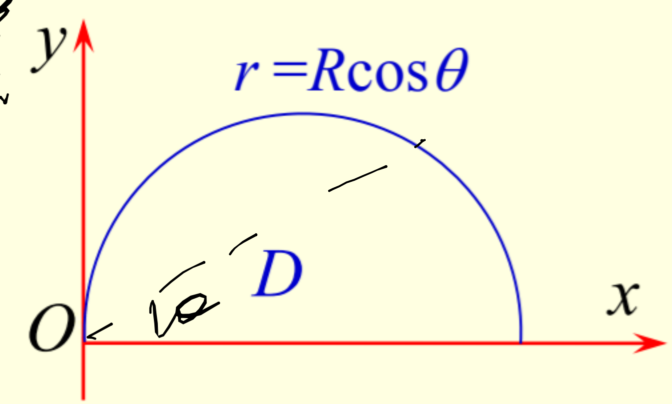
$z'_x=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \quad z'_y=\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$

$S=\iint\limits_D \sqrt{1+\dfrac{x^2+y^2}{x^2+y^2}}\,dx\,dy=\sqrt{2}\iint\limits_D dx\,dy=\sqrt{2}\cdot\pi\cdot 1^2=\sqrt{2}\pi.$

例2 计算球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$ 被圆柱面 $x^2+y^2=\pm Rx$ 所割下部分的曲面面积(**Viviani曲面**).

$$\boxed{4\pi R^2-8R^2}$$





$\frac{S}{8}$ = 第一卦限曲面面积

$z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$ $x,y\in D$. $z'_x=\frac{-x}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}$ $z'_y=\frac{-y}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}$

$$\frac{S}{8}=\iint_D\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}\,dxdy=\iint_D\sqrt{1+\frac{x^2+y^2}{R^2-x^2-y^2}}\,dxdy=\iint_D\sqrt{\frac{R^2}{R^2-x^2-y^2}}\,dxdy$$

$$=R\iint_D\frac{dxdy}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}=R\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{R\cos\theta}\frac{r}{\sqrt{R^2-r^2}}\,dr$$

$$=R\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[-\sqrt{R^2-r^2}\right]_{r=0}^{r=R\cos\theta}d\theta=R\int_0^{\frac{\pi}{2}}(R-R\sin\theta)\,d\theta$$

$$=R^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin\theta)\,d\theta=\frac{\pi}{2}R^2-R^2$$

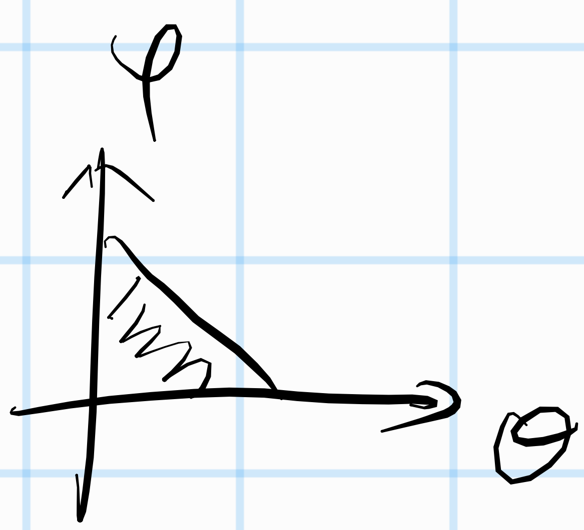
$$S=4\pi R^2-8R^2$$

解二. $\begin{cases}x=R\sin\varphi\cos\theta\\ y=R\sin\varphi\sin\theta\\ z=R\cos\varphi\end{cases}$

交线满足 $x^2+y^2=Rx$ $R^2\sin^2\varphi=R^2\sin\varphi\cos\varphi$

$\sin\varphi=\cos\theta$

$\theta+\varphi=\frac{\pi}{2}$


φ

θ

$r'_\varphi=(R\cos\varphi\cos\theta,\ R\cos\varphi\sin\theta,\ -R\sin\varphi)$

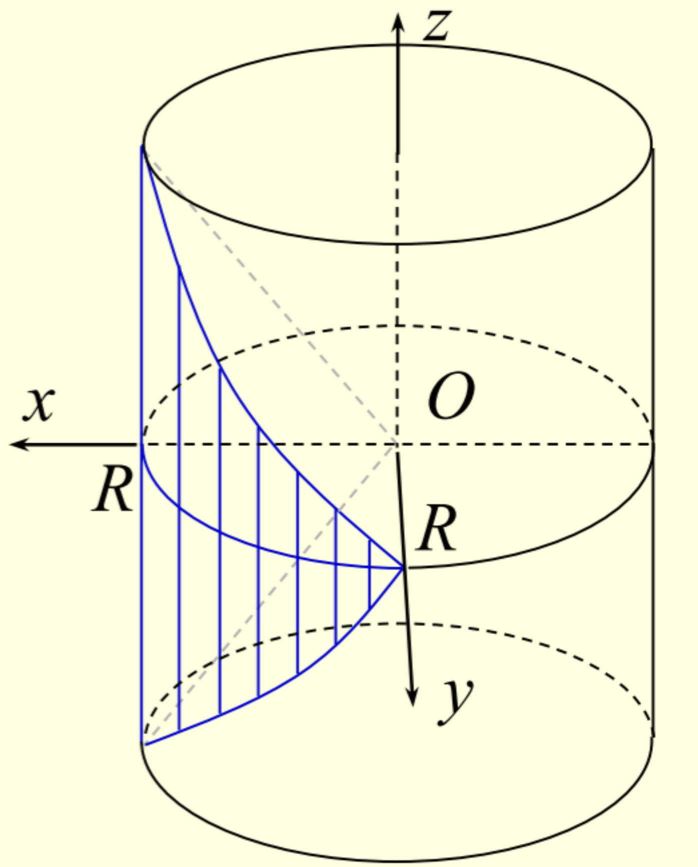
$r'_\theta=(-R\sin\varphi\sin\theta,\ R\sin\varphi\cos\theta,\ 0)$

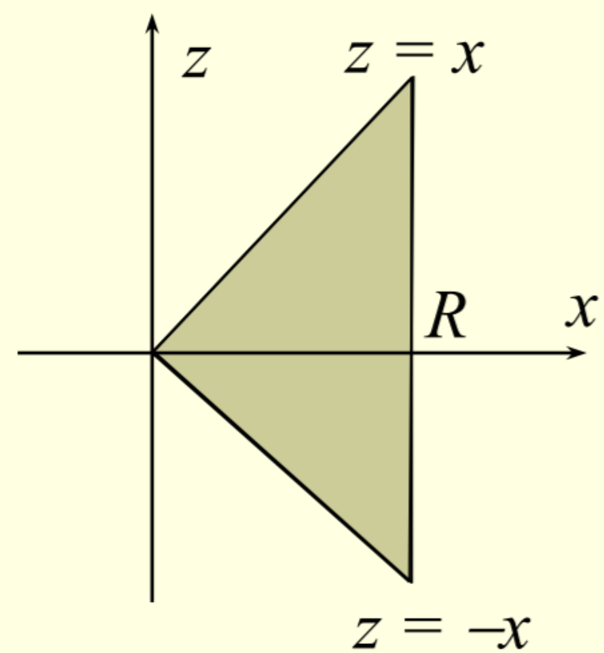
$r'_\varphi \times r'_\theta = R^2\sin\varphi(\cos\varphi\cos\theta, \cos\varphi\sin\theta, -\sin\varphi)$
$\times(-\sin\theta, \cos\theta, 0)$
$= R^2\sin\varphi(\sin\varphi\cos\theta, \sin\varphi\sin\theta, \cos\varphi)$

例3 计算柱面 $x^2+y^2=R^2$ 被两平面 $x\pm z=0\,(x>0, y>0)$

所截下部分曲面的面积.

$\boxed{2R^2}$





11.2.2 数量场曲面积分的概念与计算

问题 如何求面密度为$f(x, y, z)$的曲面S的质量?

采用**分割**, **作近似和**, **取极限**的思想可得其质量, 进而导出 $f(x, y, z)$在S上的**第一型曲面积分**的定义

$$\iint_S f(x, y, z)\mathrm{d}S = \lim_{|T|\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta S_i$$

第一型曲面积分也称为**数量场的曲面积分**, 它有类似于第一型曲线积分的性质, 如线性性和可加性.

定理 设光滑曲面S的参数方程为

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u,v)=x(u,v)\boldsymbol{i}+y(u,v)\boldsymbol{j}+z(u,v)\boldsymbol{k},\ (u,v)\in D$$

又函数$f(x,y,z)$在S上连续, 则

$$\boxed{\iint_S f(x,y,z)\mathrm{d}S=\iint_D f(x(u,v),y(u,v),z(u,v))\sqrt{A^2+B^2+C^2}\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v}$$

其中
$$A=\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)},\quad B=\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)},\quad C=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$$

特别地, 当曲面为显式方程 $z=z(x,y),\quad (x,y)\in D$

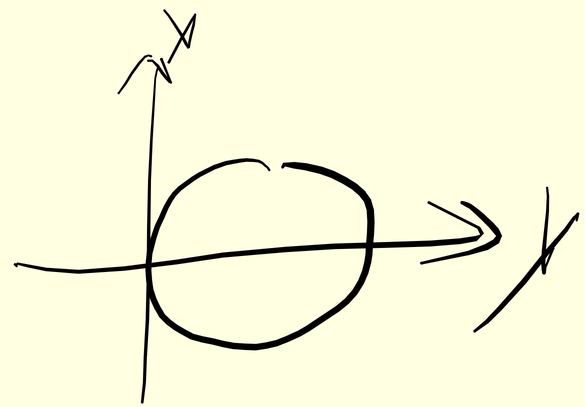
则
$$\boxed{\iint_S f(x,y,z)\mathrm{d}S=\iint_D f(x,y,z(x,y))\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y}$$

例1 计算曲面积分

$$I=\iint_S (x+y+z)\mathrm{d}S$$

其中S为上半球面 $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$ $\boxed{\pi R^3}$

提示 注意曲面的对称性



例2 计算曲面积分

$$I=\iint_S (x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}S \qquad \boxed{3\sqrt{2}\pi}$$

其中S为锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 被柱面 $x^2+y^2=2x$ 所截得曲面

投到 yOz

eg1. $D: y^2+z^2 \le R^2 \quad z>0$

$$\iint x\,dS = \iint_{S_1} x\,dS + \iint_{S_2} x\,dS = \iint_D \sqrt{R^2-y^2-z^2}\sqrt{1+x_y'^2+x_z'^2}$$

$$+\iint_D -\sqrt{R^2-y^2-z^2}\sqrt{1+x_y'^2+x_z'^2} = 0$$

同理 $\iint y\,dS = 0$.

$$I = \iint_{S} z\,dS = \iint_{x^2+y^2\le R^2} \sqrt{R^2-x^2-y^2}\sqrt{1+\left(\frac{-x}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}\right)^2+\left(\frac{-y}{\sqrt{R^2-x}}\right)^2}\,dxdy$$

$$= R\iint_{x^2+y^2\le R^2} dxdy = \pi R^3$$

eg2. $S: z=\sqrt{x^2+y^2} \quad (x,y)\in D \quad x^2+y^2\le 2x$

$$I = \iint_D (x^2+y^2+(x^2+y^2))\sqrt{1+\frac{x^2}{x^2+y^2}+\frac{y^2}{x^2+y^2}}\,dxdy$$

$4\cos^4\theta$

$$= 2\sqrt{2}\iint_D (x^2+y^2)\,dxdy = 2\sqrt{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta\int_0^{2\cos\theta} r^2\,r\,dr$$

$$= 2\sqrt{2}\cdot 4\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\theta\,d\theta$$

$$= 16\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4 d\theta = 16\sqrt{2}\,\frac{3!!}{4!!}\,\frac{\pi}{2} = 3\sqrt{2}\pi$$

线面积分被积函数可用线面方程变形

例3 计算曲面积分　　　　重积分不可以！

$$I=\iint_S z\,\mathrm{d}S$$

其中S为**螺旋面**

$$\begin{cases} x = r\cos t, \\ y = r\sin t, \quad (r,t)\in[0,a]\times[0,2\pi] \\ z = t, \end{cases}$$

$$\boxed{\pi^2\left(a\sqrt{1+a^2}+\ln\left(a+\sqrt{1+a^2}\right)\right)}$$

$(x,y,z)'_r = (\cos t, \sin t, 0)$

$(x,y,z)'_t = (-r\sin t, r\cos t, 1)$ $\quad dS = \sqrt{r^2+1}\, dr\, dt$

$(\sin t, -\cos t, r)$