Chap 9 — 5

多变量函数Taylor公式与极值

9.5.1 二元函数的微分中值定理

凸区域 若区域D中任意两点的连线都含于D.

微分中值定理 设f 在凸区域D中可微, 则$\exists\ \theta\in(0,1)$:

$$\boxed{\begin{aligned} & f(x_0+h, y_0+k)-f(x_0, y_0) \\ = & f_x'(x_0+\theta h, y_0+\theta k)h+f_y'(x_0+\theta h, y_0+\theta k)k \end{aligned}}$$

- 若 $f(x,y)$在区域D可微, 且 $f_x'(x,y)=0,\ f_y'(x,y)=0,$ 则

$$f(x,y)\equiv C$$

9.5.2 二元函数的Taylor公式

回忆 **一元函数Taylor公式:**

$$f(x_0+h)=\sum_{m=0}^{n}\frac{1}{m!}h^m\frac{\mathrm{d}^m f(x_0)}{\mathrm{d}x^m}+R_n \overset{\text{def}}{=} \sum_{m=0}^{n}\frac{1}{m!}\left(h\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^m f(x_0)+R_n$$

定理(Taylor公式) 设函数 $f(x,y)$在$B(P_0(x_0,y_0))$有$n+1$阶连续偏导数, 则∃ $\theta\in(0,1)$:

$$f(x_0+h,y_0+k)=\sum_{m=0}^{n}\frac{1}{m!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^m f(x_0,y_0)+R_n$$

其中**Lagrange型余项**

$$R_n=\frac{1}{(n+1)!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{n+1} f(x_0+\theta h,y_0+\theta k)$$

➢ m阶偏导数算子

$$\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^m=\sum_{i+j=m}\frac{m!}{i!\,j!}h^i k^j\frac{\partial^m}{\partial x^i\partial y^j}$$

➢ $n=0$时, 即**Lagrange中值定理**

➢ $n=1$时, 一阶**Taylor公式**

$$f(x_0+h,y_0+k)=f(x_0,y_0)+\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)f(x_0,y_0)$$
$$+\frac{1}{2}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f(x_0+\theta h,y_0+\theta k)$$

例1 求 $f(x,y)=\mathrm{e}^x\cos y$ 在(0, 0)处的二阶Taylor展式

想一想 三元及n元函数的Taylor公式?

9.5.3 二元函数的极值

一. 极值定义

若在点$P_0(x_0,y_0)$的某邻域内

$$f(x,y)\le f(x_0,y_0)\quad (\text{or } f(x,y)\ge f(x_0,y_0))$$

则称函数 f 在(x_0, y_0)处取极大值(or 极小值),

$P_0(x_0,y_0)$称为函数的极大值点(or极小值点).

二. 极值的必要条件

若 $f(x,y)$可偏导, 且在$P_0(x_0,y_0)$取极值, 则

$$f_x'(x_0,y_0)=0=f_y'(x_0,y_0)$$

- 满足上式的点称为**驻点**(**驻点未必是极值点**)

例2 考察函数 $f(x, y) = xy$在(0,0)的情况.

- **极值点未必是驻点!**

例3 考察函数 $f(x, y) = (x^2+y^2)^{1/2}$在(0,0)的情况.

- **可偏导的极值点必是驻点!**

三. 极值的充分条件

定理 设 $f(x, y)$ 在$B(P_0(x_0,y_0))$的二阶偏导数连续, 且

$$f_x'(x_0, y_0) = 0,\ f_y'(x_0, y_0) = 0,$$

记**Hesse矩阵** $$\boldsymbol{H} = \begin{pmatrix} f_{xx}'' & f_{xy}'' \\ f_{yx}'' & f_{yy}'' \end{pmatrix}_{P_0}$$

则有 **(1)** 若$\boldsymbol{H}$为正定矩阵, 则 $f(x_0, y_0)$为严格极小值;

若$\boldsymbol{H}$为负定矩阵, 则 $f(x_0, y_0)$为严格极大值

(2) 若$\boldsymbol{H}$为不定矩阵, 则 $f(x_0, y_0)$非极值.

证明思路

$$\Delta f = f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0, y_0)$$

$$= \left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right) f(x_0, y_0) + \frac{1}{2}\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f(x_0, y_0) + o(\rho^2)$$

$$= \frac{1}{2}\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f(x_0, y_0) + o(\rho^2)$$

$$= \frac{1}{2}[h^2 f''_{xx} + 2hkf''_{xy} + k^2 f''_{yy}]_{(x_0, y_0)} + o(\rho^2)$$

$$= \frac{\rho^2}{2}\left\{[\xi^2 f''_{xx} + 2\xi\eta f''_{xy} + \eta^2 f''_{yy}]_{(x_0, y_0)} + o(1)\right\}$$

其中 $\rho = \sqrt{h^2+k^2}, \xi = \frac{h}{\rho}, \eta = \frac{k}{\rho}$. 利用***H***的型确定$\Delta f$的符号.

命题 设 $$\boldsymbol{H}=\begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}$$

二次型

$$Q(h,k)=(h\quad k)H\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}=Ah^2+2Bhk+Ck^2$$

则有 **(1)** $Q(h,k)$是**定的** $\Leftrightarrow$ $|\boldsymbol{H}|>0$. 且

当$A>0$时, Q为**正定**; 当$A<0$时, Q为**负定**.

(2) $Q(h,k)$是**不定的** $\Leftrightarrow$ $|\boldsymbol{H}|<0$.

(3) $Q(h,k)$是**半定的** $\Leftrightarrow$ $|\boldsymbol{H}|=0$.

推论 设 $f(x, y)$ 在$B(P_0(x_0,y_0))$的二阶偏导数连续, 且

$$f_x'(x_0, y_0) = 0,\ f_y'(x_0, y_0) = 0,$$

记 $A = f_{xx}''(x_0, y_0), B = f_{xy}''(x_0, y_0), C = f_{yy}''(x_0, y_0)$

(1) 若**Hesse行列式** $|\boldsymbol{H}| = AC - B^2 < 0$, 则 $f(x_0, y_0)$非极值

(2) 若 $|\boldsymbol{H}| > 0$, 则 $f(x_0, y_0)$为极值, 且当$A > 0$时, $f(x_0, y_0)$ 为严格极小值; 当$A < 0$时, $f(x_0, y_0)$为严格极大值.

想一想 当$|\boldsymbol{H}| = 0$时, 结论如何?

例4 求函数 $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$ 的极值.

9.5.4 条件极值

例5 求体积V_0固定, 表面积最小的圆柱体底圆半径与高之比.

在许多极值问题中, 函数自变量还要满足一些**约束条件**, 这类极值问题称为**条件极值**. 如求**目标函数**

$$u = f(x, y)$$

在约束条件 $\varphi(x, y) = 0$ 下的极值.

注 相对于条件极值, 对自变量无约束条件的极值问题称为**无条件极值**.

■ 直接法

如果可从约束条件 $\varphi(x, y) = 0$ 中解出一个变量，比如 $y = y(x)$，然后代入目标函数得

$$u = f(x, y(x))$$

再求此一元函数的无条件极值.

■ Lagrange乘数法

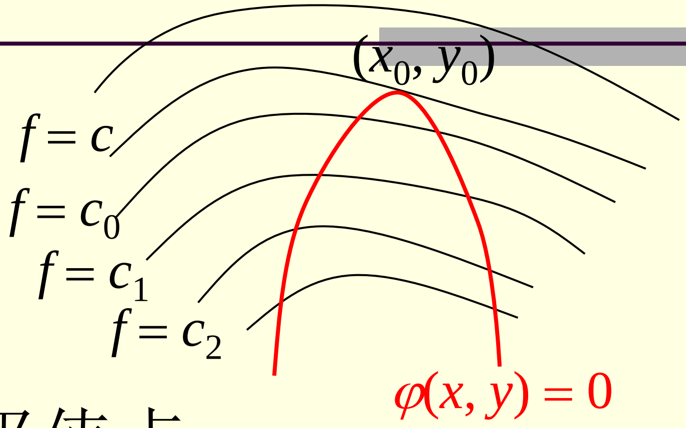
引进辅助函数(**Lagrange函数**)

$$L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda\varphi(x, y)$$

从其无条件极值的必要条件

几何意义

$$\begin{cases} L'_x = f'_x + \lambda\varphi'_x = 0 \\ L'_y = f'_y + \lambda\varphi'_y = 0 \\ L'_\lambda = \varphi(x, y) = 0 \end{cases}$$



求出的(x_0, y_0)是可能的条件极值点.

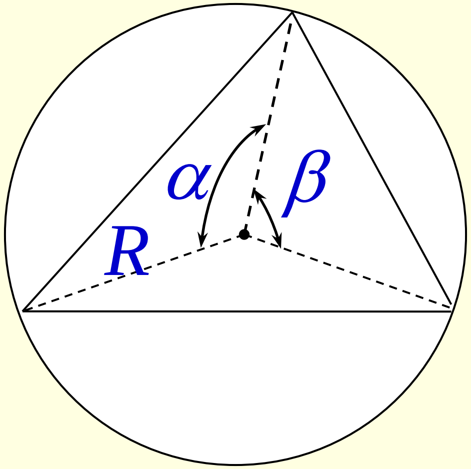
例6 在曲面 $z = x^2 + 2y^2$ 上求一点P, 使其到平面 $x - y + 2z + 6 = 0$ 的距离最短.

Ex. 在椭圆 $x^2 + 4y^2 = 4$ 上求一点P, 使其到直线 $2x + 3y - 6 = 0$ 的距离最短.

■ 最值问题

原则 有界闭区域上的可微函数的最值在内部驻点或边界点取到. 实际问题中, 若最值必在区域内部取得又驻点唯一, 则此驻点就是最值点.

例7 在半径为R的圆中求面积最大的内接三角形的边长



解 $S = \dfrac{R^2}{2}\left(\sin\alpha + \sin\beta - \sin(\alpha+\beta)\right),$

其中$\alpha, \beta \in (0, 2\pi)$ 且$\alpha + \beta < 2\pi$.

例8 求函数 $f(x,y)=2x^2+6xy+y^2$ 在椭圆域 $x^2+2y^2\le 3$ 上的最大值和最小值.