

Chap 13

反常积分和含参变量积分

Chap 13 — 1

反常积分

13.1.1 无穷积分的收敛性

按定义判别敛散性需：先求原函数，再取极限。

定理1(Cauchy准则) $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛 \Leftrightarrow

$$\forall \varepsilon > 0, \exists A > a, \forall A', A'' > A: \left| \int_{A'}^{A''} f(x)dx \right| < \varepsilon.$$

➤ **问题** $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 发散的Cauchy准则？

定义 若 $\int_a^{+\infty} |f(x)| dx$ 收敛, 则称 $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ **绝对收敛**;

若 $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ 收敛, 但 $\int_a^{+\infty} |f(x)| dx$ 发散, 则称 $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ **条件收敛**.

定理2 若 $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ 绝对收敛, 则 $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ 收敛.

命题 若 $\int_a^{+\infty} f(x) dx, \int_a^{+\infty} g(x) dx$ 绝对收敛, 则

$\int_a^{+\infty} [f(x) + g(x)] dx$ 绝对收敛.

问题 若 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 绝对收敛, $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ 条件收敛,

结论如何? 又问若两者都条件收敛, 结论又如何?

13.1.2 非负函数无穷积分判别法

定理3 (收敛原理) 设 $f(x) \geq 0$, 则 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛 \Leftrightarrow

$$F(A) = \int_a^A f(x)dx \text{ 在 } [a, +\infty) \text{ 有上界.}$$

定理4 (比较判别法) 设 $g(x) \geq f(x) \geq 0$, 则

$$(1) \int_a^{+\infty} g(x)dx \text{ 收敛} \Rightarrow \int_a^{+\infty} f(x)dx \text{ 收敛.}$$

$$(2) \int_a^{+\infty} f(x)dx \text{ 发散} \Rightarrow \int_a^{+\infty} g(x)dx \text{ 发散.}$$

定理5 (极限形式) 设 $f(x) \geq 0$, $g(x) > 0$, 且

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = l, \text{ 则}$$

(1) 当 $0 < l < +\infty$ 时, $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 与 $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ 同敛散;

(2) 当 $l = 0$ 时, $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ 收敛 $\Rightarrow \int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛;

(3) 当 $l = +\infty$ 时, $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ 发散 $\Rightarrow \int_a^{+\infty} f(x)dx$ 发散.

推论 (p -判别法) 设 $f(x) \geq 0$, 且 $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^p f(x) = l$, 则

(1) 当 $0 \leq l < +\infty$, 且 $p > 1$ 时, $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛;

(2) 当 $0 < l \leq +\infty$, 且 $p \leq 1$ 时, $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 发散.

例1 证明: 对任意 $\alpha \in \mathbf{R}$, $\int_1^{+\infty} x^\alpha e^{-x} dx$ 收敛.

例2 判断 $\int_1^{+\infty} \frac{x^2 dx}{\sqrt{x+1}(x^4 + x + 1)}$ 的敛散性.

13.1.3 A-D判别法

Abel变换 设有 $\{a_n\}, \{b_n\}$, 记 $A_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_k$, 则

$$\sum_{k=1}^n a_k b_k = A_n b_n + \sum_{k=1}^{n-1} A_k (b_k - b_{k+1})$$

积分第二中值定理 设 $f \in R[a, b]$, 则有

1) 若 $g(x)$ 在 $[a, b]$ 上单调减少且 $g(x) \geq 0$, 则 $\exists \xi \in [a, b]$ 使

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = g(a)\int_a^\xi f(x)dx \longrightarrow \text{Bonnet型}$$

2) 若 $g(x)$ 在 $[a, b]$ 上单调增加且 $g(x) \geq 0$, 则 $\exists \xi \in [a, b]$ 使

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = g(b)\int_\xi^b f(x)dx$$

3) 若 $g(x)$ 在 $[a, b]$ 上单调, 则 $\exists \xi \in [a, b]$ 使 **Weierstrass型**

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = g(a)\int_a^\xi f(x)dx + g(b)\int_\xi^b f(x)dx$$

定理6 (Bonnet型) 设 $f \in R[a, b]$, $g(x)$ 在 $[a, b]$ 单调减少,

且 $g(x) \geq 0$, 则 $\exists \xi \in [a, b]$ 使

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = g(a)\int_a^\xi f(x)dx$$

证 令 $F(x) = \int_a^x f(t)dt$, 则 $F \in C[a, b]$, 记其最大, 小值为 M, m

➤ 若 $g(a) = 0$, 则 $g(x) \equiv 0$, 结论显见.

➤ 若 $g(a) > 0$, 则只需证
$$m \leq \frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{g(a)} \leq M$$

或
$$mg(a) \leq \int_a^b f(x)g(x)dx \leq Mg(a).$$

由 $g \in R[a, b]: \forall \varepsilon > 0, \exists [a, b]$ 分划 $T: a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$

使得

$$\sum_{k=1}^n \omega_k(g) \Delta x_k < \varepsilon.$$

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)g(x)dx$$

$$= \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)[g(x_{k-1}) + g(x) - g(x_{k-1})]dx$$

$$= \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)g(x_{k-1})dx + \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)[g(x) - g(x_{k-1})]dx$$

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)g(x_{k-1})dx + \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)[g(x) - g(x_{k-1})]dx$$

\mathbf{I}_1 \mathbf{I}_2

$$|\mathbf{I}_2| \leq \sum_{k=1}^n \left| \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)[g(x) - g(x_{k-1})]dx \right| \leq \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} |f(x)| \cdot |g(x) - g(x_{k-1})| dx$$

$$\leq \sum_{k=1}^n L \int_{x_{k-1}}^{x_k} \omega_k(g) dx = L \sum_{k=1}^n \omega_k(g) \Delta x_k \leq L\varepsilon, \quad \text{其中 } |f(x)| \leq L.$$

$$\mathbf{I}_1 = \sum_{k=1}^n g(x_{k-1}) \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x) dx = \sum_{k=1}^n g(x_{k-1}) [F(x_k) - F(x_{k-1})]$$

$$= g(x_{n-1})F(x_n) + \sum_{k=1}^{n-1} F(x_k) [g(x_{k-1}) - g(x_k)]$$

$$A_k = \sum_{i=1}^k [F(x_i) - F(x_{i-1})] = F(x_k)$$

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = \mathbf{I}_1 + \mathbf{I}_2, \quad |\mathbf{I}_2| \leq L\varepsilon$$

$$\mathbf{I}_1 = g(x_{n-1})F(x_n) + \sum_{k=1}^{n-1} F(x_k)[g(x_{k-1}) - g(x_k)]$$

$$\Rightarrow \quad \mathbf{I}_1 \leq M \left(g(x_{n-1}) + \sum_{k=1}^{n-1} [g(x_{k-1}) - g(x_k)] \right) = Mg(a)$$

$$\mathbf{I}_1 \geq m \left(g(x_{n-1}) + \sum_{k=1}^{n-1} [g(x_{k-1}) - g(x_k)] \right) = mg(a)$$

从而 $mg(a) - L\varepsilon \leq \int_a^b f(x)g(x)dx \leq Mg(a) + L\varepsilon$

令 $\varepsilon \rightarrow 0^+$ 得 $mg(a) \leq \int_a^b f(x)g(x)dx \leq Mg(a)$.

定理7(A-D判别法) 设 f, g 满足下列两组条件之一:

则 $\int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$ 收敛.

(Abel) $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛, $g(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 单调有界;

(Dirichlet) $F(A) = \int_a^A f(x)dx$ 在 $[a, +\infty)$ 有界, $g(x)$

在 $[a, +\infty)$ 单调且 $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$.

例3 证明 $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ 条件收敛.

13.1.4 瑕积分敛散性判别

定理8 (Cauchy准则) 设 b 为瑕点. $\int_a^b f(x)dx$ 收敛 \Leftrightarrow

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x', x'' \in (b - \delta, b): \left| \int_{x'}^{x''} f(x)dx \right| < \varepsilon.$$

➤ **问题** $\int_a^b f(x)dx$ 发散的Cauchy准则?

定义 若 $\int_a^b |f(x)| dx$ 收敛, 则称 $\int_a^b f(x) dx$ **绝对收敛**;

若 $\int_a^b f(x) dx$ 收敛, 但 $\int_a^b |f(x)| dx$ 发散, 则称 $\int_a^b f(x) dx$ **条件收敛**.

定理9 若 $\int_a^b f(x) dx$ 绝对收敛, 则 $\int_a^b f(x) dx$ 收敛.

命题 若 $\int_a^b f(x) dx$, $\int_a^b g(x) dx$ 绝对收敛, 则

$\int_a^b [f(x) + g(x)] dx$ 绝对收敛.

问题 若 $\int_a^b f(x)dx$ 绝对收敛, $\int_a^b g(x)dx$ 条件收敛,

结论如何? 又问若两者都条件收敛, 结论又如何?

定理10 (收敛原理) 设 $f(x) \geq 0$, 则 $\int_a^b f(x)dx$ 收敛 \Leftrightarrow

$$F(A) = \int_a^A f(x)dx \text{ 在 } [a, b) \text{ 有上界.}$$

定理11 (比较判别法) 设 $g(x) \geq f(x) \geq 0$, 则

$$(1) \int_a^b g(x)dx \text{ 收敛} \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \text{ 收敛.}$$

$$(2) \int_a^b f(x)dx \text{ 发散} \Rightarrow \int_a^b g(x)dx \text{ 发散.}$$

定理11(极限形式) 设 b 为瑕点 $f(x) \geq 0$, $g(x) > 0$, 且

$$\lim_{x \rightarrow b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = l, \text{ 则}$$

(1) 当 $0 < l < +\infty$ 时, $\int_a^b f(x)dx$ 与 $\int_a^b g(x)dx$ 同敛散;

(2) 当 $l = 0$ 时, $\int_a^b g(x)dx$ 收敛 $\Rightarrow \int_a^b f(x)dx$ 收敛;

(3) 当 $l = +\infty$ 时, $\int_a^b g(x)dx$ 发散 $\Rightarrow \int_a^b f(x)dx$ 发散.

推论 (p -判别法) 设 $f(x) \geq 0$, 且 $\lim_{x \rightarrow b^-} (b-x)^p f(x) = l$, 则

(1) 当 $0 \leq l < +\infty$, 且 $p < 1$ 时, $\int_a^b f(x)dx$ 收敛;

(2) 当 $0 < l \leq +\infty$, 且 $p \geq 1$ 时, $\int_a^b f(x)dx$ 发散.

思考 a 为瑕点的 p -判别法?

例5 讨论椭圆积分

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}, \quad (0 < k < 1)$$

的敛散性.

例6 讨论 $\int_0^1 \frac{\ln x}{1-x^2} dx$ 的敛散性.

例7 讨论 $\int_0^{+\infty} \frac{x^\alpha \arctan x}{2+x^\beta} dx$ ($\beta > 0$) 的敛散性.