、填空题（第1、2题各6分，第3-5题各4分，共24分）

1. 设连续函数 $z = f(x, y)$ 满足

$$\lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{f(x,y) - 3x + 2y - 2025}{\sqrt{x^2 + (y-1)^2}} = 0.$$

则

$f(0,1) =$ 2023， $dz|_{(0,1)} =$ +3dx + 2dy

2. 设平面点集 $E = \{(x,y) : (x^2+y^2)(y^2-x^2+1) \le 0\}$，则集合 E 的内部和边界分别为

$E^o =$ $\{(x,y) | y^2-x^2+1 < 0\}$ $\partial E =$ $\{(0,0)\} \cup \{(x,y) | y^2-x^2+1=0\}$

3. 参数曲面

(0, 1, 1)

$$\mathbf{r}(u,v) = (u\cos v, u\sin v, u^2),$$

在点 $(u,v) = (1, \frac{\pi}{2})$ 处的切平面方程为

$2(y-1) + (z-1) = 0$

$(\cos v, \sin v, 2u) \times$
$(-u\sin v, u\cos v, 0)$
$= (-2u^2\cos v, -2u^2\sin v, u)$
$(0, 2, 1)$

4. 函数 $f(x,y) = \frac{\cos y}{x}$ 在点 $(1,0)$ 处的带皮亚诺余项的二阶Taylor公式为

$f(x,y) =$ $1 - (x-1) + (x-1)^2 - \frac{1}{2}y^2$ $+o((x-1)^2 + y^2)$， $(x,y) \to (1,0)$.

5. 设 D 为由 $x = 2$, $y = x$, $x = \frac{1}{y}$ 围成的有界区域，则

$$\iint_D \frac{x^2}{y^2} dxdy = \frac{3}{2} - \ln 2$$

8

二、计算题（每题各8分，共40分）

6. 设直线 L 满足下列条件：

(i) L 过点 $P(1,2,1)$；

(ii) L 与直线 L_1：$\frac{x}{-2}=\frac{y}{-1}=\frac{z}{1}$ 相交；

(iii) L 与直线 L_2：$\frac{x-1}{-3}=\frac{y}{2}=\frac{z+1}{1}$ 垂直.

求直线 L 的一个方程.

L_1 参数方程：$x=-2t$

$y=-t$

$z=t$

设 L 过 $O(-2t,-t,t)$

$\vec{OP}=(1+2t,2+t,1-t)$

$\vec{OP}\cdot(3,2,1)=0$

$t=-\frac{8}{7}$

$\vec{OP}=(-\frac{9}{7},\frac{6}{7},\frac{15}{7})$

取方向向量 ~~$\vec{b}=(9,6,15)$~~

$\vec{b}=(-3,2,5)$

L：$\frac{x-1}{-3}=\frac{y-2}{2}=\frac{z-1}{5}$

7. 求函数 $f(x,y)=x^2+2y^2-x^2y^2$ 在区域 $D=\{(x,y): x^2+y^2\le 4, y\ge 0\}$ 上的最值.

内部:

$f'_x=2x-2xy^2=0$

$f'_y=4y-2x^2y=0$

$\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$

$f(0,0)=0.$

边界: $x^2+y^2=4$ $y=0$

$f(x,y)=4+y^2-x^2y^2$

$=4+y^2-(4-y^2)y^2$

$=y^4-3y^2+4$

$=(y^2-\frac{3}{2})^2+\frac{7}{4}.$

最小值 $\frac{7}{4}$

最大值 当 $y^2=4$ 时: 8.

综上. 最小值 0. $f(0,0)$

最大值 8.

~~$f(\pm 2,\pm 2)$~~

$f(0,\pm 2)$

8. 求微分方程 $xy'' = y'\ln y'$ $(x > 0)$ 满足初始条件 $y(1) = e - 1$, $y'(1) = e$ 的特解.

设 $p = y'$

$$x\frac{dp}{dx} = p\ln p$$

$$\frac{x}{dx} = \frac{p\ln p}{dp}$$

$$\frac{dx}{x} = \frac{dp}{p\ln p}$$

同积分:

$$\int\frac{dx}{x} = \int\frac{1}{\ln p}\,d\ln p$$

$$\ln x + C_0 = \ln\ln p$$

$$C_1 x = \ln p$$

代入 $x=1$, $p=e$.

$\therefore C_1 = 1$

$$x = \ln p$$

$$e^x = p = y'$$

$$y = e^x + C_2.$$

代入 $y(1) = e-1$

$$y = e^x - 1$$

9. 设 $z=z(x,y)$ 具有二阶连续偏导数，并满足方程

$$y\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+2\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{2}{x}.$$

令 $w=xz-y$，并作变换 $u=\frac{x}{y}$，$v=x$. 将上述方程变为 w 关于 u,v 的方程.

$z=\frac{w}{x}+\frac{y}{x}$

$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}$

$=\frac{\partial z}{\partial u}(-\frac{x}{y^2})+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot 0$

$=\frac{\partial z}{\partial u}(-\frac{x}{y^2})$

$\frac{\partial}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial u}\cdot(-\frac{x}{y^2})$

$\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{\partial\frac{w}{x}}{\partial u}+\frac{\partial\frac{y}{x}}{\partial u}$

逆变换 $y=\frac{v}{u}$

$x=v$

$=\frac{\partial\frac{w}{v}}{\partial u}+\frac{\partial\frac{1}{u}}{\partial u}$

$=\frac{\partial w}{\partial u}\frac{1}{v}-\frac{1}{u^2}$

$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial w}{\partial u}(-\frac{1}{y^2})+\frac{1}{x}$

$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=(\frac{\partial}{\partial u}\cdot(-\frac{x}{y^2}))\frac{\partial w}{\partial u}(-\frac{1}{y^2})$

$+\frac{\partial w}{\partial u}\frac{2}{y^3}+0.$

$=\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}\frac{x}{y^4}+\frac{\partial w}{\partial u}\frac{2}{y^3}$

LHS $\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}\frac{x}{y^3}+\frac{\partial w}{\partial u}\frac{2}{y^2}-\frac{2}{y^2}\frac{\partial w}{\partial u}+\frac{2}{x}=\frac{2}{x}$

$\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}\cdot\frac{x}{y^3}=0$

$\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}\cdot\frac{u^3}{v^2}=0$

10. 求平面上由极坐标曲线 $r = 3\sin(2\theta)$ 所围成图形的面积.

$\sin 2\theta \geq 0.$

不妨 $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$

$S = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} r^2 d\theta$

$= \frac{9}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2\theta d\theta$

$= \frac{9}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2\theta d2\theta$

$= \frac{9}{8}\pi$

4

2

三、综合题（每题各8分，共16分）

11. 设$\alpha \in \mathbb{R}$. 根据α的值讨论二重极限

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x^2+y^2)^\alpha \cdot \sin(x^2 y)}{x^4+y^4}$$

是否存在，并证明你的结论.

设 $x=r\cos\theta$

12. 设二元可微函数 F 在直角坐标系下可写为 $F(x,y)=f(x)g(y)$，在极坐标系下可写为 $F(r\cos\theta, r\sin\theta)=h(r)$. 且 $F(x,y)$无零点. 求 $F(x,y)$ 的表达式.

$$\frac{\partial F}{\partial x}=f'(x)g(y)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}=f(x)g'(y)$$

$$\frac{\partial F}{\partial \theta}=\frac{\partial h(r)}{\partial \theta}=0$$

$$\frac{\partial F}{\partial \theta}=\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \theta}+\frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \theta}$$

$$=-f'(x)g(y)\sin\theta+f(x)g'(y)\cos\theta$$

$$\therefore f'(x)g(y)\sin\theta=f(x)g'(y)\cos\theta$$

$$f'(x)g(y)\frac{y}{x}=f(x)g'(y)$$

$$\frac{f'(x)}{x}\cdot g(y)=f(x)\cdot\frac{g'(y)}{y}$$

$\forall x, y.$

又 $\because F$ 无零点，$f(x)\neq 0$, $g(y)\neq 0$.

x, y 为自由变量

$$\frac{f'(x)}{x}=f(x) \qquad \frac{g'(y)}{y}=g(y)$$

以 f 为例

$$\frac{df}{dx}=xf$$

$$\frac{df}{f}=x\,dx$$

$$\ln f=\frac{1}{2}x^2+C$$

$$f(x)=A_1e^{\frac{1}{2}x^2}$$

同理 $g(y)=A_2e^{\frac{1}{2}y^2}$ $\quad F(x,y)=f(x)g(y)=Ae^{\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}y^2}$

四、证明题（每题各10分，共20分）

13. 设二元函数 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 的邻域 U 有定义，且满足

(i) 单变元函数 $f(x,0)$ 在 $x=0$ 处连续；

(ii) 偏导数 $f'_y(x,y)$ 在 U 上存在且有界.

证明 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处连续.

对于 $(\Delta x, \Delta y)$

由(ii) $f(\Delta x,\Delta y)-f(\Delta x,0)=f'_y(\Delta x,\theta\Delta y)\Delta y \quad \theta\in(0,1)$

$|f(\Delta x,\Delta y)-f(\Delta x,0)| \le M\Delta y$

由(i) $\forall \varepsilon>0,\ \exists \delta_1(\varepsilon)\ |\Delta x|<\delta_1$

$f(\Delta x,0)-f(0,0)<\frac{\varepsilon}{2}$

$\forall \varepsilon>0.\ \exists \delta=\min\{\delta_1(\varepsilon), \frac{\varepsilon}{2M}\}\ \forall |\Delta x|<\delta\ \forall |\Delta y|<\delta.$

$|f(\Delta x,\Delta y)-f(0,0)| \le |f(\Delta x,\Delta y)-f(\Delta x,0)|+|f(\Delta x,0)-f(0,0)|$

$\le M\cdot\Delta y+\frac{\varepsilon}{2}$

$< M\cdot\delta+\frac{\varepsilon}{2} \le \varepsilon.$

$\therefore \lim\limits_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} f(\Delta x,\Delta y)=f(0,0)$ 在(0,0)连续.

14. 设二元函数 $F(x,y)$ 具有连续的偏导数，满足 $F(1,1)=0$ 及 $(\nabla F)(1,1)=(2,-1)$. 证明：存在点 $(1,1)$ 的某邻域 U，使得参数曲线 $\gamma(t)=(t^2,t^3)$ 与隐函数曲线 $F(x,y)=0$ 在 U 中有且仅有 1 个交点.

$F(x,y(x))=0$.

(1,1)点: $y'(x)\big|_{x=1} = -\dfrac{F'_x(1,1)}{F'_y(1,1)} = -\dfrac{2}{-1} = 2$

$\gamma(t)$在(1,1)附近可视为.

$y=g(x)=x^{\frac{3}{2}}$

$g'(x) = \frac{3}{2}x^{-\frac{1}{3}}$

(1,1)点. $g'(x)\big|_{x=1} = \frac{3}{2}$

所以,两函数在(1,1)有交点.

且在(1,1)处斜率分别为 $2, \frac{3}{2}$

$y(1+\Delta x)-y(1) = y'(\theta_1\Delta x)\cdot\Delta x$

$y(1+\Delta x) = 1+y'(\theta_1\Delta x)\Delta x$. $\theta_1\in(0,1)$

$g(1+\Delta x) = 1+g'(\theta_2\Delta x)\Delta x$. $\theta_2\in(0,1)$

$\lim\limits_{\Delta x\to 0} y'(\theta_1\Delta x) = 2$

$\lim\limits_{\Delta x\to 0} g'(\theta_2\Delta x) = \frac{3}{2}$.

$\Delta x\in(1-\delta,1+\delta)$

$\therefore \exists\delta$, s.t. $\forall \theta_1\in(0,1)\ \theta_2\in(0,1)$

$y'(\theta_1\Delta x) > g'(\theta_2\Delta x)$

在邻域 $(1-\delta,1+\delta)$

$\therefore$ $\Delta x>0$时 $y(1+\Delta x)>g(1+\Delta x)$

$\Delta x<0$时 $y(1+\Delta x)<g(1+\Delta x)$

$\Delta x=0$时 $y(1+\Delta x)=g(1+\Delta x)$

$\therefore$只有一个交点