

Chap 12

Fourier分析

引例 1807年, Fourier研究杆状物热流问题

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{\partial T}{\partial t}, & T = T(x, t), \\ T(0, t) = T(l, t) = 0, & t > 0 \quad (\text{边界条件}) \\ T(x, 0) = f(x), & 0 < x < l \quad (\text{初始条件}) \end{cases}$$

其中 $T = T(x, t)$ 表示 t 时刻杆子 x 处的温度.

解 设 $T(x, t) = \varphi(x)\psi(t)$, 则有

$$\varphi''(x)\psi(t) = \varphi(x)\psi'(t) \Rightarrow \frac{\varphi''(x)}{\varphi(x)} = \frac{\psi'(t)}{\psi(t)} = -\lambda \quad (\lambda > 0)$$

导出

$$\begin{cases} \varphi''(x) + \lambda \varphi(x) = 0, & \dots (1) \\ \varphi(0) = \varphi(l) = 0, \\ \psi'(t) + \lambda \psi(t) = 0. & \dots (2) \end{cases}$$

解方程(1)得 $\varphi(x) = b \sin \sqrt{\lambda} x + c \cos \sqrt{\lambda} x$

由 $\varphi(0) = 0$ 得 $c = 0$; 由 $\varphi(l) = 0$ 得 $\sin \sqrt{\lambda} l = 0$

导出 $\sqrt{\lambda} l = n\pi \Rightarrow \lambda_n = \left(\frac{n\pi}{l} \right)^2 \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$

于是 $\varphi(x) = b_n \sin \frac{n\pi}{l} x$

解方程(2)得 $\psi(t) = C e^{-\lambda t}$, 取 $C = 1$ (为什么可以?)

得一个解 $T_n(x, t) = b_n \exp\left(-\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 t\right) \sin \frac{n\pi}{l} x$

叠加得 $T(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \exp\left(-\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 t\right) \sin \frac{n\pi}{l} x$

令 $t = 0$ 有 $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi}{l} x$ 进而确定 b_n .

问题 $[0, l]$ 上函数 $f(x)$ 总能表示成三角函数之和? 即

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi}{l} x + b_n \sin \frac{n\pi}{l} x \right)$$

右端称为**三角级数**, 其中 a_0, a_n, b_n ($n = 1, 2, \dots$) 称为**系数**

思考 如何确定系数 a_0, a_n, b_n ?

Chap12 — 1

函数的Fourier级数

12.1.1 周期函数与三角函数系的正交性

一、周期函数 若 $g(t)$ 以 T 为周期, 作变换

$$x = \frac{2\pi}{T}t \quad \text{或} \quad t = \frac{T}{2\pi}x$$

则

$$f(x) = g\left(\frac{T}{2\pi}x\right)$$

是以 2π 为周期的函数.

二、周期延拓 若 f 是定义在 $[-l, l]$ 上的函数, 令

$$F(x) = \begin{cases} f(x - 2nl), & (2n-1)l < x < (2n+1)l \\ \frac{f(l) + f(-l)}{2}, & x = (2n+1)l \end{cases}$$

则 F 是 \mathbf{R} 上以 $2l$ 为周期的函数, $F(x) = f(x), x \in (-l, l)$.

例1 设

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq l \\ 0, & -l \leq x < 0 \end{cases}$$

将其延拓为 \mathbf{R} 上周期为 $2l$ 的函数.

三、偶延拓与奇延拓 若 f 是定义在 $[0, l]$ 上的函数, 令

$$f_e(x) = \begin{cases} f(x), & 0 \leq x \leq l \\ f(-x), & -l \leq x < 0 \end{cases}$$

则 $f_e(x)$ 是 $[-l, l]$ 上的偶函数, $f_e(x) = f(x)$, $x \in [0, l]$.

令

$$f_o(x) = \begin{cases} f(x), & 0 < x \leq l \\ 0, & x = 0 \\ -f(-x), & -l \leq x < 0 \end{cases}$$

则 $f_o(x)$ 是 $[-l, l]$ 上的奇函数, $f_o(x) = f(x)$, $x \in (0, l]$.

四、三角函数系的正交性

定义 函数集合 $\{1, \cos x, \sin x, \dots, \cos nx, \sin nx, \dots\}$

称为三角函数系. 其特点: 正交性

$$1) \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx dx = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ 1, & m = n \neq 0 \\ 2, & m = n = 0 \end{cases} \quad (m, n = 1, 2, \dots)$$

$$2) \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx dx = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ 1, & m = n \end{cases} \quad (m, n = 1, 2, \dots)$$

$$3) \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cos nx dx = 0 \quad (m = 1, 2, \dots; n = 0, 1, \dots)$$

12.1.2 周期函数的Fourier级数

设在 $[-\pi, \pi]$ 上函数 $f(x)$ 可展开为三角级数, 即

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

问题 级数的系数 a_n, b_n 与 $f(x)$ 有什么关系?

结论 利用正交性, 可得

Fourier系数公式

$$\begin{cases} a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx, & n = 0, 1, 2, \dots, \\ b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx, & n = 1, 2, \dots. \end{cases}$$

可积且绝对可积 函数 f 满足下两条件之一:

➤ $f \in R[-\pi, \pi]$;

➤ 瑕积分 $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx$ 绝对收敛;

定义 设 $f(x)$ 以 2π 为周期, 且在 $[-\pi, \pi]$ 上可积且绝对可积, 以 f 的Fourier系数 a_n, b_n 为系数的三角级数称为 $f(x)$ 的**Fourier级数(F氏级数)**, 记为

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

注意 正确理解符号“ \sim ”的含义!

12.1.3 Dirichlet收敛定理

定义 设 $f:[a, b] \rightarrow \mathbf{R}$, 若可将 $[a, b]$ 分为有限个子区间, 使 f 在每个子区间内部连续可微, 端点有单侧极限, 及拟单侧导数, 则称 f 在 $[a, b]$ 上分段可微.

定理(Dirichlet) 设 f 以 2π 为周期, 在 $[-\pi, \pi]$ 上分段可微, 则其F氏级数收敛, 且

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) = \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}$$

例2 求 $f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi < x < 0, \\ x, & 0 \leq x < \pi \end{cases}$ 的F氏级数并写出和函数

12.1.4 正弦和余弦级数

设 $f(x)$ 在 $[-\pi, \pi]$ 上可积且绝对可积, 且为奇函数, 则其Fourier系数中 $a_n = 0$,

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx dx$$

其Fourier级数 $f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$ 称为正弦级数.

想一想 余弦级数的定义?

约定 若 f 仅在 $[0, \pi]$ (或 $[-\pi, 0]$)上可积且绝对可积,

对 f 作**奇延拓**后函数 f_o 的F氏(正弦)级数也称为 f 的**正弦级数**, 此时

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx dx$$

想一想 仅在 $[0, \pi]$ 上定义的函数的**余弦级数**?

例3 求 $f(x) = x^2$ ($x \in [0, \pi]$) 的正弦和余弦级数.

12.1.5 周期为 $2l$ 函数的F氏级数

设 $f(x)$ 以 $2l$ 为周期, 在 $[-l, l]$ 上可积且绝对可积. 令 $x = \frac{l}{\pi}t$, 则 $g(t) = f\left(\frac{l}{\pi}t\right)$ 在 $[-\pi, \pi]$ 上可积且绝对可积, 故

$$g(t) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt),$$

从而

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi}{l} x + b_n \sin \frac{n\pi}{l} x \right)$$

其中 $a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{n\pi}{l} x dx, \quad b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{n\pi}{l} x dx$

定理(Dirichlet) 设 f 以 $2l$ 为周期, 在 $[-l, l]$ 上分段可微,

则其F氏收敛, 且

$$\begin{aligned} & \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi}{l} x + b_n \sin \frac{n\pi}{l} x \right) \\ &= \begin{cases} \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}, & x \in (-l, l) \\ \frac{f(-l+0) + f(l-0)}{2} & x = \pm l \end{cases} \end{aligned}$$

例4 求 $f(x) = |\sin x|$ 的周期为 π 的F氏级数并写出和函数

12.1.6 F氏级数的复数形式

由Euler公式

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta \longleftrightarrow \cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}, \sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

可导出 f 的复数形式F氏级数.

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_n - ib_n}{2} e^{in\omega x} + \frac{a_n + ib_n}{2} e^{-in\omega x} \right)$$

其中 $\omega = \frac{\pi}{l}$ 为基频,

$$a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos n\omega x dx, \quad b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin n\omega x dx$$

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_n - \mathrm{i}b_n}{2} \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\omega x} + \frac{a_n + \mathrm{i}b_n}{2} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\omega x} \right)$$

$$\stackrel{\text{def}}{=} F_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(F_n \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\omega x} + F_{-n} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\omega x} \right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\omega x}$$

其中

$$F_0 = \frac{a_0}{2} = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(x) \mathrm{d}x,$$

$$F_n = \frac{a_n - \mathrm{i}b_n}{2} = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(x) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\omega x} \mathrm{d}x,$$

$$F_{-n} = \overline{F_n}$$

称为 f 的 **Fourier** 系数的复数形式.