Chap 6

常微分方程初步

一、典型例子

- **Malthus 模型(1789)**

——人口增长率与人口总数成正比.

人口总数$P(t)$, 增长率 $P'(t)$, 比例常数r, 则有

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t} = rP$$

含未知函数
一阶导数

称为一阶微分方程.

函数 $P = C\mathrm{e}^{rt}$ 适合前述方程. 若 $t = t_0$ 时,

$P = P_0$, 则可得 $P = P_0\mathrm{e}^{r(t-t_0)}$.

➢ **Logistic模型(1838)** —— 阻滞增长

—— 人口减少率与人口总数平方成正比.

比例常数$\beta > 0$, 则有

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t} = rP - \beta P^2.$$

➢ 自由落体运动

$$\ddot{x}(t) = -g$$

积分一次得 $\dot{x}(t) = -gt + C_1$

再积分得 $x(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + C_1 t + C_2$

二、基本概念

微分方程 含自变量, 未知函数及其导数的关系式;

方程的阶 未知函数导数的**最高阶数**;

n阶方程 一般形式 $F(x, y, y', \cdots, y^{(n)}) = 0$,

x—自变量, y—未知函数

方程的解 函数$y = y(x)$代入方程得到恒等式;

方程通解 解$y = y(x, C_1, C_2, \ldots, C_n)$中含**独立**任意常数, 且 “个数= 阶数” .

◆ 函数$y=y(x, C_1, C_2)$中任意常数C_1, C_2独立, 即

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial y}{\partial C_1} & \dfrac{\partial y}{\partial C_2} \\ \dfrac{\partial y'}{\partial C_1} & \dfrac{\partial y'}{\partial C_2} \end{vmatrix} \neq 0.$$

例1 $y=C_1x+C_2$中C_1, C_2独立.

例2 $y=x+C_1+C_2$中C_1, C_2不独立.

方程特解 通解中任意常数被确定;

定解条件 用于确定通解中任意常数的条件;

初始条件 自变量取同一点值的定解条件;

边界条件 自变量取区间端点值的定解条件;

定解问题 方程 + 定解条件.

Chap 6 — 1

一阶微分方程

■ 分离变量方程

- 形式 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=g(x)h(y)$

- 解法

化为 $\dfrac{\mathrm{d}y}{h(y)}=g(x)\mathrm{d}x$ 后两边积分

注意 使$h(y)=0$的常数函数$y=c$也是方程的解

例 求解下列方程

(1) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\dfrac{x}{y}$; (2) $\dfrac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t}=rP$

例 求解方程 $y' = x\sqrt{1-y^2}$

一阶齐次方程

- 形式 $$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$$
- 解法 设 $u = \dfrac{y}{x} \Rightarrow y' = u + xu'$

$$\Rightarrow \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \frac{\varphi(u) - u}{x}$$

可分离变量

例　求解方程

$$xy' = y + x\tan\frac{y}{x}$$

例　求解方程　$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{x+y}{x-y}$

➢ 可化为变量可分离的方程

例　求解方程　$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = (x+y)^2$

例　求解方程　$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{x+y-3}{x-y+1}$

一阶线性方程

- 形式 $y' + P(x)y = Q(x)$

非齐次项

- 解法 常数变易法

先考虑特殊情况 $Q=0$时的解，再在通解中将常数变换成待定函数

- 公式

$$\boxed{y = \mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}\left(\int Q(x)\mathrm{e}^{\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x + C\right)}$$

$\int P(x)\mathrm{d}x$ 表示一个原函数

例　求解下列方程

(1) $xy' + y = \sin x$

(2) $(x + y^2)y' = y$

■ Bernoulli方程

- 形式 $y' + P(x)y = Q(x)y^n \quad (n \neq 0,1)$
- 解法　代换 $z = y^{1-n}$

$$\Rightarrow \quad z' + (1-n)P(x)z = (1-n)Q(x)$$ 线性方程

例　求解方程

$$y' - \frac{2y}{x} + xy^2 = 0$$

例　求解方程

$$(2y^2 + y - x)\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x = 0$$

■ 可降阶微分方程

二阶微分方程一般形式

$$F(x, y, y', y'') = 0$$

(1) $y'' = f(x, y')$ 型方程（缺y 型）

- 解法　设 $y' = p$　$\Rightarrow \dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} = f(x, p)$

例　求解方程 $xy'' + y' = 4x \ (x \neq 0).$

(2) $y'' = f(y, y')$ （缺x 型）

- 解法　　设 $y' = p$

$$\Rightarrow \ p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y} = f(y, p)$$

注意以y为中间变量

例 求解方程 $2yy'' = y'^2 + 1$