Chap 10

多变量函数的重积分

Chap 10 — 1

二重积分

10.1.1 平面图形的面积

设平面点集$D\subset[a,b]\times[c,d]$. 作矩形分割T, 记D内的及与D相交的小矩形面积和分别为$\sigma^-_T(D)$和$\sigma^+_T(D)$.

注 分割越细, $\sigma^-_T(D)$越大(有上界), $\sigma^+_T(D)$越小(有下界)

定义 设$D\subset[a,b]\times[c,d]$. 作矩形分割T, 若

$$\lim_{|T|\to 0}\sigma^+_T(D)=\lim_{|T|\to 0}\sigma^-_T(D)$$

则称D为**Jordan可测集**. 极限值称为D的**测度**(或**面积**).

可求面积

与D边界相交小矩形面积和

注意到 $0 \le \sigma^{+}_{T}(D) - \sigma^{-}_{T}(D) \le \sigma^{+}_{T}(\partial D)$

故当∂D为**零测集**时, 则D可测.

曲顶柱体 设D为可测有界闭集. 以D为底, 曲面$S: z = f(x, y)$为顶, ∂D为准线, 母线平行于Oz轴的柱面为侧面的立体.

问题 如何求此曲顶柱体的体积?

设$D \subset [a, b] \times [c, d]$. 令$f(x, y) = 0$, $(x, y) \in [a, b] \times [c, d] \setminus D$.

(1) **分割**: 取$[a, b]\times[c, d]$的分割T:$\{x_0, x_1, \ldots, x_n; y_0, y_1, \ldots, y_m\}$

得小矩形D_{ij}, 其面积记为$\Delta\sigma_{ij}$.

(2) **求和**: 当D_{ij}很小时, 其上的小曲顶柱体的体积用平顶柱体近似. 任取 $(\xi_i,\eta_j)\in D_{ij}$,则有总体积

$$V \approx \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} f(\xi_i,\eta_j)\Delta\sigma_{ij}.$$

(3) **取极限**: 记 $|T|=\max\limits_{1\le i\le n,1\le j\le m} \operatorname{diam}\{D_{ij}\}$, 则有

$$V = \lim_{|T|\to 0}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} f(\xi_i,\eta_j)\Delta\sigma_{ij}.$$

✓ 用类似思想可求面密度不为常数的平面薄板质量.

10.1.2 二重积分定义

设$f(x, y)$在可测有界闭集$D\subset[a, b]\times[c, d]$上定义. 令$f(x, y)=0, (x, y)\in[a, b]\times[c, d]\setminus D$. 若对$[a, b]\times[c, d]$的$\forall$矩形分割$D_{ij}$及$\forall$ $(\xi_i, \eta_j)\in D_{ij}, (i=1,2,\cdots,n; j=1,2,\cdots,m)$,

总有 $$\lim_{|T|\to 0}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}f(\xi_i,\eta_j)\Delta\sigma_{ij}=I.$$

其中 $|T|=\max\limits_{1\le i\le n,1\le j\le m}\operatorname{diam}\{D_{ij}\}$, 则称$f(x,y)$在$D$上**可积**, I称为$f(x,y)$在D上的**二重积分**, 记为 $\iint\limits_{D}f(x, y)\mathrm{d}\sigma$, 其中$\iint$为**积分号**, D为**积分区域**, $f(x,y)$ 为**被积函数**,

$\mathrm{d}\sigma$为**面积元素**, $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} f(\xi_i,\eta_j)\Delta\sigma_{ij}$ 称为**Riemann和**.

几何、物理意义

◆ 以有界闭集D为底, 以曲面S: $z=f(x,y)$为顶的曲顶柱体体积

$$V=\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma.$$

◆ 形状为D, 面密度为$\mu(x,y)$的平面薄板质量

$$m=\iint_D \mu(x,y)\mathrm{d}\sigma.$$

■ 可积的条件

必要条件 若f 在D上可积, 则f有界.

充要条件 设f在D上有界. 则f 可积 $\Leftrightarrow$

(I) $\overline{\iint_D} f(x,y)\mathrm{d}\sigma = \iint_{\underline{D}} f(x,y)\mathrm{d}\sigma$.   上下积分相等.

(II) $\forall \varepsilon > 0$, $\exists$分割T: $\sum_T \omega_{ij}\Delta\sigma_{ij} < \varepsilon$,其中$\omega_{ij}$为$f$在$D_{ij}$上振幅.

充分条件 (I) 若$f \in C(D)$, 则f可积.

(II) 若f有界且间断点为零测集, 则f可积.

10.1.3 二重积分的性质

设以下性质中出现的积分均存在

性质1 (**线性**) 设α, β是常数, 则

$$\iint_D [\alpha f(x,y)+\beta g(x,y)]\mathrm{d}\sigma = \alpha\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma + \beta\iint_D g(x,y)\mathrm{d}\sigma$$

性质2 (**可加性**) 若D分成内部不交的子集D_1, D_2, 则

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma = \iint_{D_1} f(x,y)\mathrm{d}\sigma + \iint_{D_2} f(x,y)\mathrm{d}\sigma$$

性质3 $\iint_D 1\mathrm{d}\sigma = A_D$ (D的面积)

性质4 (单调性) 若$f(x, y) \le g(x, y)$, 则

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma \le \iint_D g(x,y)\mathrm{d}\sigma$$

推论 (1) 若$f(x, y) \ge 0$, 则 $\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma \ge 0.$

(2) (估值不等式) 若$m \le f(x,y) \le M$, 则

$$mA_D \le \iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma \le MA_D.$$

(3) (绝对值不等式) $\left|\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma\right| \le \iint_D |f(x,y)|\mathrm{d}\sigma.$

性质5 (**中值定理**) 设D是连通有界闭集, $f(x, y) \in C(D)$,

则$\exists(\xi, \eta) \in D$, 使得

$$\iint_D f(x, y)\mathrm{d}\sigma = f(\xi, \eta) A_D.$$

10.1.3 二重积分的计算

定义 设 $f:[a,b]\times[c,d]\to\mathbf{R}$. 固定$x\in[a,b]$, 若存在

首次积分 $\varphi(x)=\int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y$, 且$\varphi$在$[a,b]$可积, 则称

$$\int_a^b \varphi(x)\mathrm{d}x=\int_a^b\left(\int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x$$

为f在$[a,b]\times[c,d]$上先y后x的**累次(二次)积分**, 也记为

$$\int_a^b \mathrm{d}x\int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y$$

想一想 先x后y的累次积分的定义?

极限：二重存在，首次极限存在 ⇒ 二次极限存在

积分：二重存在首次存在，

问题 二重积分与二次积分的关系？

二次存在且与二重相等

定理 设 $f(x, y)$ 在 $[a, b]\times[c, d]$ 可积，且 $\forall x\in[a, b]$，存在

首次积分 $F(x)=\int_c^d f(x, y)\mathrm{d}y$，则

$$\boxed{\iint\limits_{[a,b]\times[c,d]} f(x, y)\mathrm{d}\sigma=\int_a^b \mathrm{d}x\int_c^d f(x, y)\mathrm{d}y}$$

试一试 另一情形 $\iint\limits_{[a,b]\times[c,d]} f(x, y)\mathrm{d}\sigma=\int_c^d \mathrm{d}y\int_a^b f(x, y)\mathrm{d}x$

推论1 若 $f(x,y)$ 在 $[a,b]\times[c,d]$ 连续，则有

矩形连续 均存在相等

$$\boxed{\iint\limits_{[a,b]\times[c,d]} f(x, y)\mathrm{d}\sigma=\int_a^b \mathrm{d}x\int_c^d f(x, y)\mathrm{d}y=\int_c^d \mathrm{d}y\int_a^b f(x, y)\mathrm{d}x}$$

证：任取 $[a,b]\times[c,d]$ 分割 $T=T_x\cup T_y$：$\{x_0,x_1,\dots,x_n;y_0,y_1,\dots,y_m\}$

任 $\xi_i\in[x_{i-1},x_i]$ 则 $F(\xi_i)=\int_c^d f(\xi_i,y)dy$

$$=\sum_{j=1}^{m}\int_{y_{j-1}}^{y_j} f(\xi_i,y)dy$$

$$\sum_{j=1}^{m} m_{ij}\Delta y_j \le F(\xi_i)\le \sum_{j=1}^{m} M_{ij}\Delta y_j \quad (\text{where } M_{ij}=\sup f(D_{ij}))$$

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} m_{ij}\Delta x_i\Delta y_j\le \sum_{i=1}^{n}F(\xi_i)\Delta x_i \le \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} M_{ij}\Delta x_i\Delta y_j$$

令 $|T|\to 0$，$|T_x|\to 0$.

$$\int_a^b F(x)dx=\lim_{|T_x|\to 0}\sum_{i=1}^{n}F(\xi_i)\Delta x_i=\iint_D f(x,y)d\sigma \ \#$$

推论2.

$$\iint_D f(x,y)d\sigma=\iint_{[a,b]\times[c,d]} f(x,y)\,d\sigma=\int_a^b dx\int_c^d f(x,y)dy$$

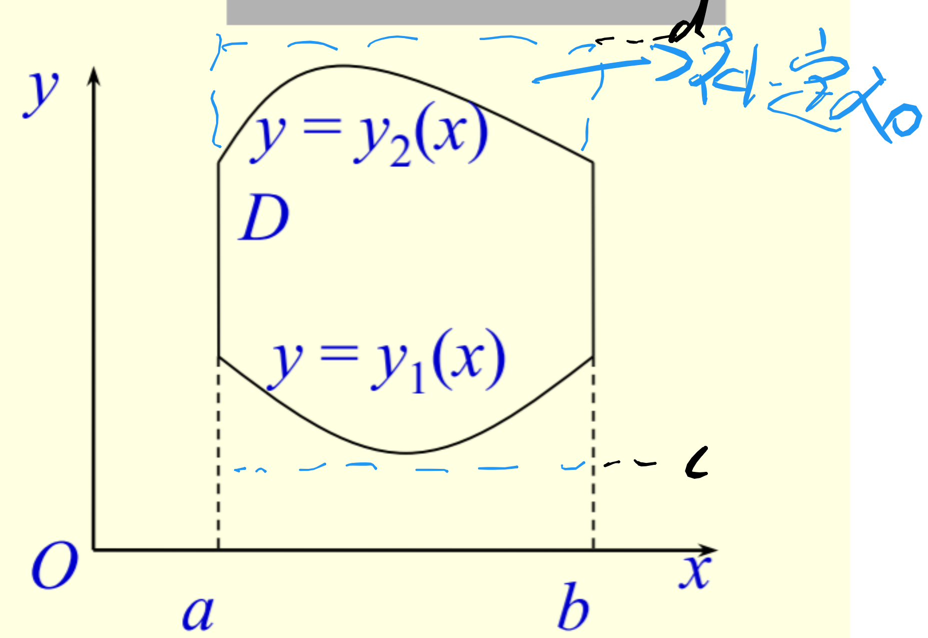
$$=\int_a^b dx\left(\int_c^{y_1(x)}+\int_{y_1(x)}^{y_2(x)}+\int_{y_2(x)}^{d}\right)f(x,y)dy$$

$$=\int_a^b dx\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy$$

推论2 若f在x**型区域**$D=\{(x,y)|a\le x\le b,\ y_1(x)\le y\le y_2(x)\}$

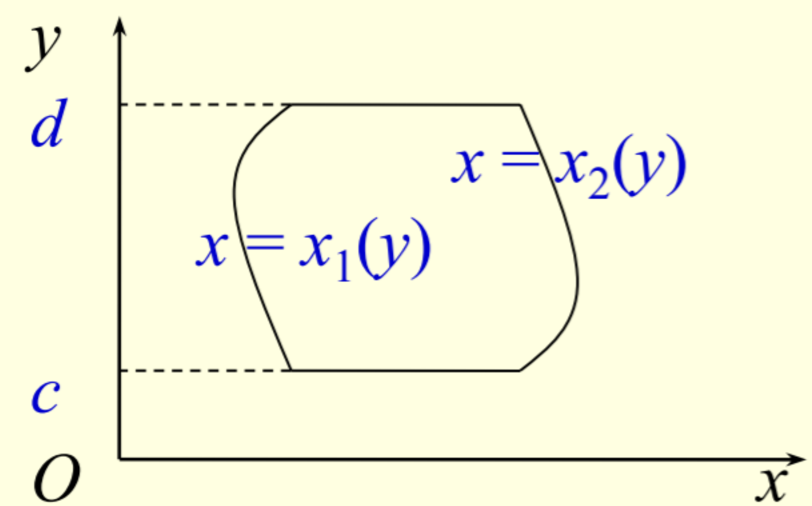
连续，则有

$$\boxed{\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_a^b \mathrm{d}x\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\mathrm{d}y}$$



试一试 y型区域情形

$$\boxed{\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_c^d \mathrm{d}y\int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)\mathrm{d}x}$$



注 面积元素 $\mathrm{d}\sigma=\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

几何直观 过x处且垂直x轴的平面截曲顶柱体得

曲边梯形, 其面积 $A(x)=\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\mathrm{d}y$

故曲顶柱体体积

$$V=\int_a^b A(x)\mathrm{d}x=\int_a^b\left(\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x$$

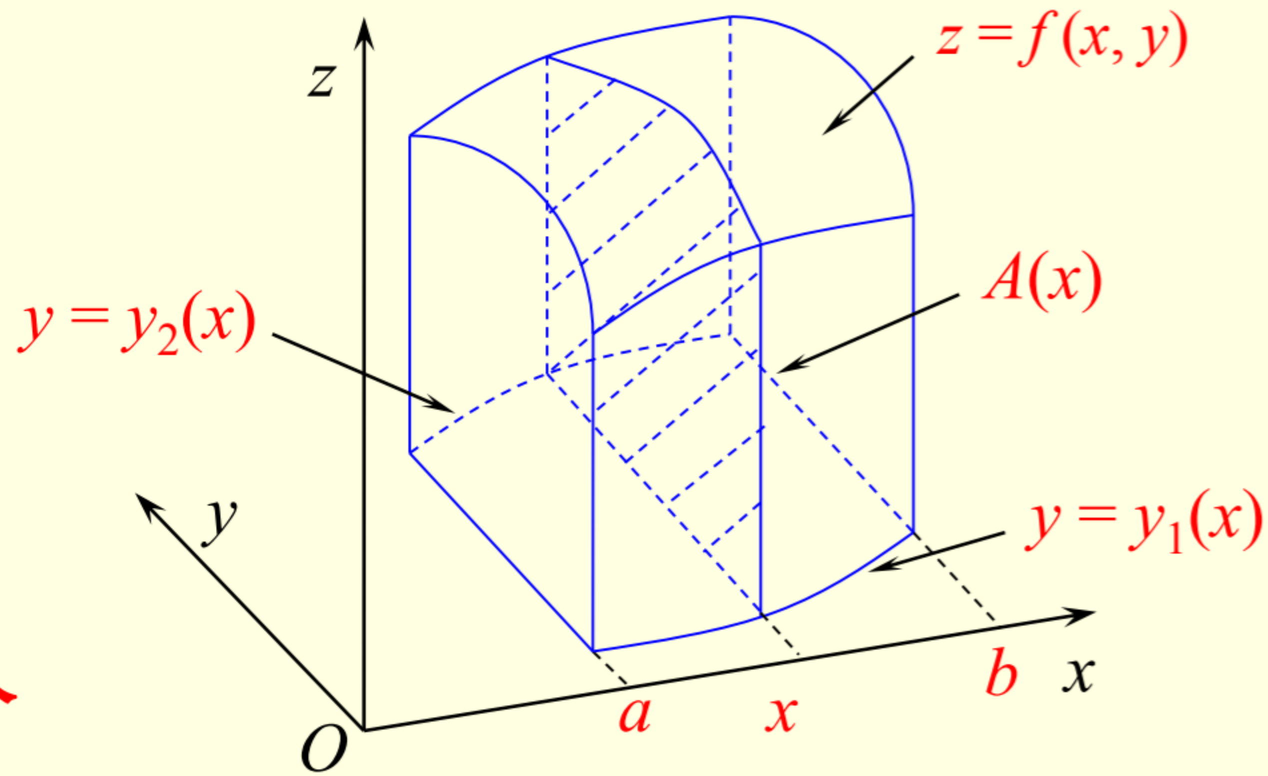
$$\Rightarrow \quad \iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_a^b\left(\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x$$

$$\overset{\text{def}}{=}\int_a^b \mathrm{d}x\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\mathrm{d}y$$

↑

先y后x二次积分



$$\int_a^b dx \int_c^d f(x)g(x)dy$$

结论 设 $f\in C[a,b],\ g\in C[c,d]$, 则有

$$\boxed{\iint\limits_{[a,b]\times[c,d]} f(x)g(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\cdot\int_c^d g(y)\mathrm{d}y}$$

例1 计算 $\iint\limits_{[0,1]^2} \mathrm{e}^{x+y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ $=\int_0^1 e^x dx\int_0^1 e^y dy=(e-1)^2$

例2 计算 $\iint\limits_{[0,\pi]\times[0,1]} x\cos xy\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ $=\int_0^\pi dx\int_0^1 x\cos xy\,dy=\int_0^\pi dx\int_0^1 \cos xy\,dxy$

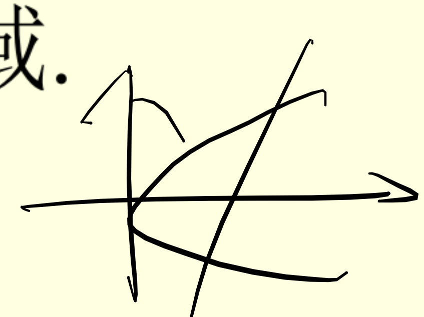
$=\int_0^\pi dx\ \sin xy\Big|_{y=0}^{y=1}$

例3 计算 $\iint\limits_D xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中$D$是由抛物线$y^2=x$与直线 $y=x-2$ 所围区域.

$=\int_0^\pi(\sin x-0)dx$

$=-\cos x\Big|_{x=0}^{x=\pi}$

$=2$



$$\int_{-1}^{1} y\,dy \int_{y^2}^{y+2} x\,dx$$

$$= \int_{-1}^{1} y \cdot \frac{1}{2}x^2 \Big|_{x=y^2}^{x=y+2} \cdot dy$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} y\left[(y+2)^2 - y^4\right]dy = 5\frac{5}{8}$$

◆ 直角坐标计算二重积分步骤

- 画出区域D的草图, 并确定类型;
- 按所确定的类型表示区域D;
- 化二重积分为二次积分(注意上、下限);
- 计算二次积分.

◆ 确定积分区域D类型的原则

- 对它划分的块数越少越好;
- 首次积分可以且容易算出.

例4 计算二次积分 $I=\int_0^1 \mathrm{d}x\int_x^{\sqrt{x}}\frac{\sin y}{y}\mathrm{d}y$

例5 交换二次积分次序

$$\int_0^1 \mathrm{d}y\int_0^{1-\sqrt{1-y^2}} f(x,y)\mathrm{d}x+\int_1^2 \mathrm{d}y\int_0^{2-y} f(x,y)\mathrm{d}x$$

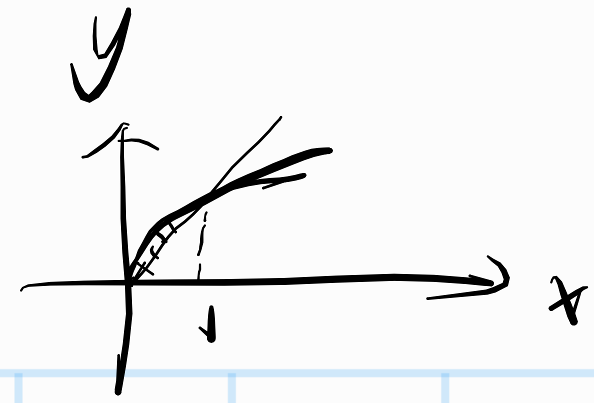
◆ 交换二次积分次序步骤

➢ 将二次积分还原为二重积分;

➢ 由积分限确定积分区域D, 并按另一类型表示它;

➢ 化二重积分为另一次序的二次积分.

eg4. 确定新的积分限



$I = \iint_D \frac{\sin y}{y} d\sigma$ D: $0 \le x \le 1$, $x \le y \le \sqrt{x}$ $\longrightarrow$ $0 \le y \le 1$, $y^2 \le x \le y$

$I = \int_0^1 \frac{\sin y}{y} dy \int_{y^2}^{y} dx$

$= \int_0^1 \frac{\sin y}{y}(y - y^2) dy$

$(y\cos y - \sin x)'$

$= \cancel{\cos y} + y \sin y$

$= \int_0^1 \sin y \, dy - \int_0^1 y \sin y \, dy$

$= -\cos y \Big|_0^1 - (\sin y - y\cos y)\Big|_0^1$

$= -\cos 1 - \sin 1 + \cos 1$

$= 1 - \sin 1$

整个圆域 → 0.

例6 计算二重积分 $I=\iint\limits_{D}(y+y^2\sin^3 x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,

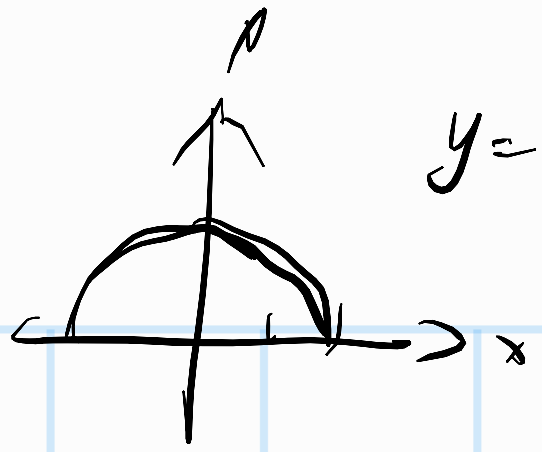
其中D是上半圆域 $\{(x,y)\mid x^2+y^2\le 4, y\ge 0\}$.

◆ 用积分区域对称性和被积函数奇偶性简化积分计算

若D关于y轴对称, 记D_1为D中$x\ge 0$部分, 则

$$\boxed{\iint\limits_{D} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\begin{cases}0, & f(-x,y)=-f(x,y) \\ 2\iint\limits_{D_1} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y, & f(-x,y)=f(x,y)\end{cases}}$$ 关于x奇函数

若D关于x轴对称, 有类似的结果.



$y = \sqrt{4-x^2}$

$$\int_{-2}^{2} dx \int_{0}^{\sqrt{4-x^2}} (y + y^2 \sin^3 x)\, dy$$

$$\int_{0}^{2} dy \int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} (y + y^2 \sin^3 x)\, dx$$

$$= \int_{0}^{2} dy \int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} y\, dx + \int_{0}^{2} dy \int_{-\sqrt{\ }}^{\sqrt{\ }} y^2 \sin^3 x\, dx$$

奇 function, 0.

$$= \quad — \quad + \quad 0$$

$$= \int_{0}^{2} 2\sqrt{4-y^2} \cdot y\, dy$$

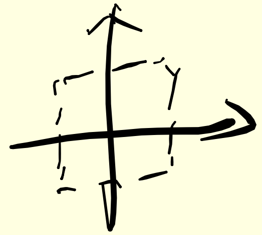
$$= 2\int_{0}^{2} \sqrt{4-y^2}\, y\, dy$$

$$= -\int_{0}^{2} \sqrt{4-y^2}\, d(4-y^2)$$

$\int u^{\frac{1}{2}}$ $\quad \frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}$

$$= -\frac{2}{3}(4-y^2)^{\frac{3}{2}} \Big|_{0}^{2}$$

$$= \frac{2}{3} 4^{\frac{3}{2}} = \frac{16}{3}$$



例7 计算二重积分 $\iint\limits_D \mathrm{e}^{\max\{x^2, y^2\}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y$,

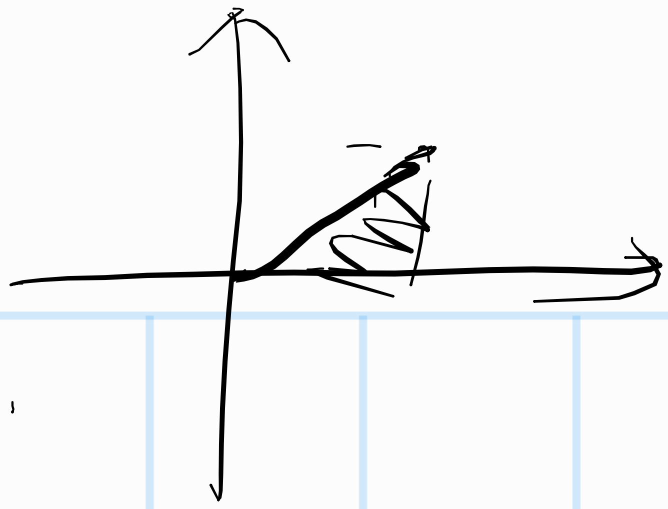
其中 $D = \{(x, y) \mid 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1\}$. (考研试题)

例8 设函数 $f(x) \in C[0, 1]$, 且设 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = A$, 计算

$$\int_0^1 \mathrm{d}x \int_x^1 f(x) f(y) \mathrm{d}y.$$

例9 计算圆柱面 $x^2 + y^2 = R^2$ 与 $x^2 + z^2 = R^2$

所围立体的体积.

eg1 

$$2\iint_E e^{\max\{x^2, y^2\}} dx\,dy$$

$0 \le x \le 1 \quad 0 \le y \le x$

$$2\int_0^1 dx \int_0^x e^{\max\{x^2, y^2\}} dy$$

$$= 2\int_0^1 dx \int_0^x e^{x^2} dy$$

$$= 2\int_0^1 e^{x^2} x\, dx$$

$$= \int_0^1 e^{x^2} d(x^2)$$

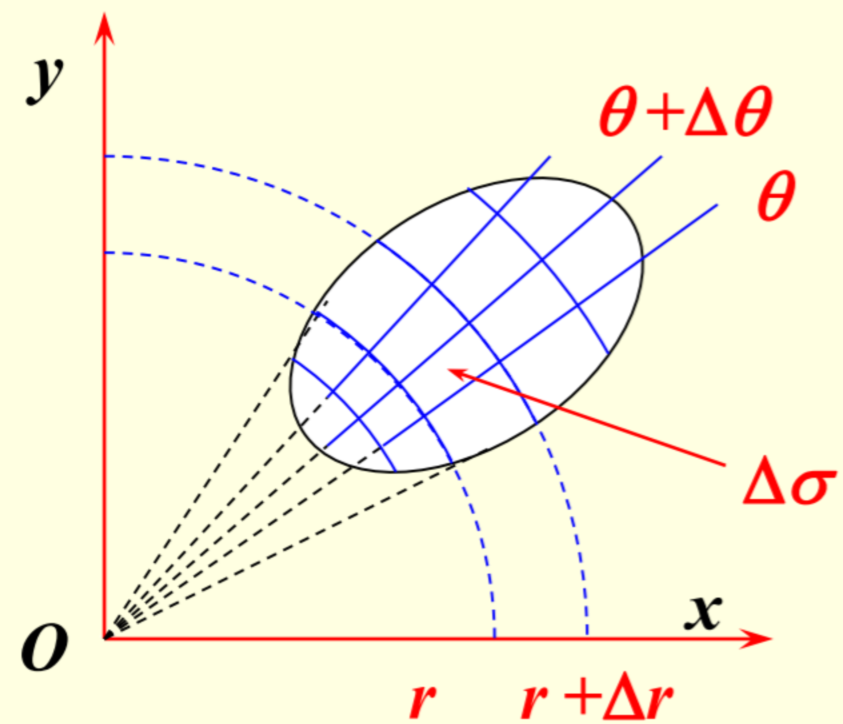
$$= e^{x^2}\Big|_0^1 = e - 1$$

Chap 10 — 2

二重积分的换元

10.2.1 极坐标计算二重积分

当积分区域边界曲线或被积函数用极坐标表示简单时，可用极坐标来计算二重积分



考虑面积元素dσ在极坐标下的形式.

用r=常数(圆周族)和θ=常数(射线族)分割区域D, 则小区域面积

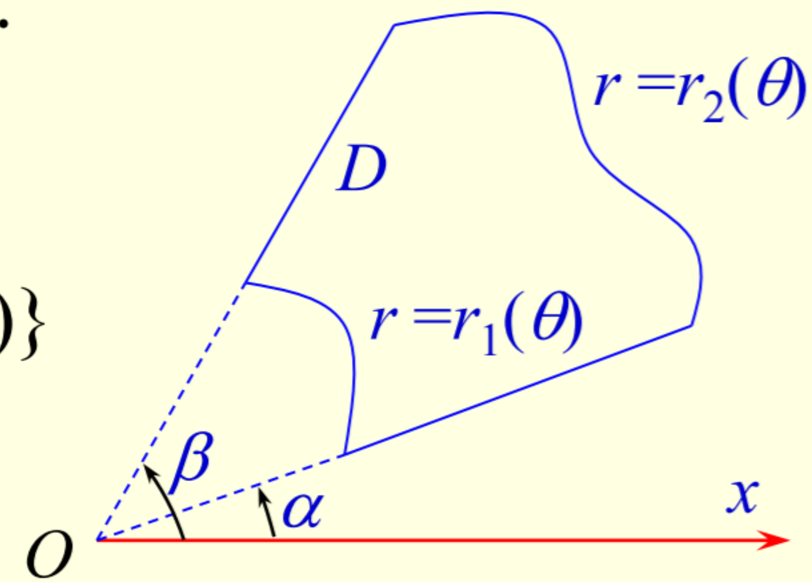
$$\Delta\sigma=\frac{1}{2}[(r+\Delta r)^2\Delta\theta-r^2\Delta\theta]=r\Delta r\Delta\theta+\frac{1}{2}(\Delta r)^2\Delta\theta$$

$$\boxed{\Rightarrow\quad \mathrm{d}\sigma=r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta}$$

从直角坐标到极坐标时的二重积分变换公式

$$\boxed{\iint\limits_{D} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{D'} f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta}$$

其中D'是D在极坐标下的表示形式.



特别地, 若

$$D'=\{(r,\theta)\,|\,\alpha\le\theta\le\beta, r_1(\theta)\le r\le r_2(\theta)\}$$

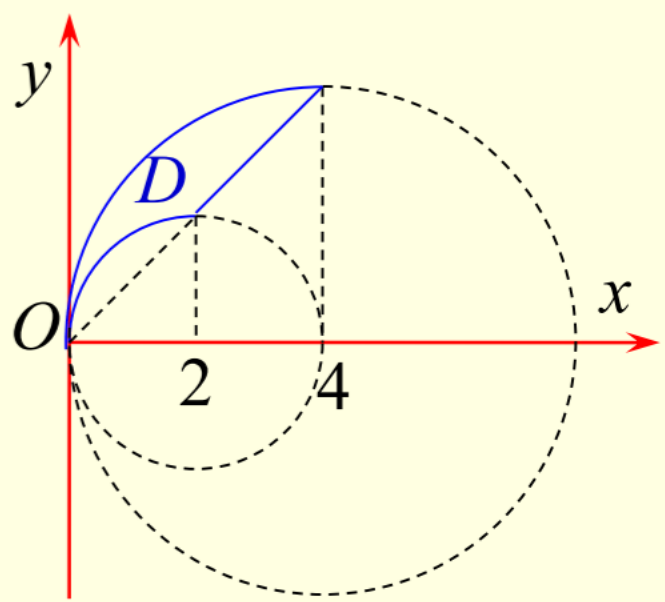
则有

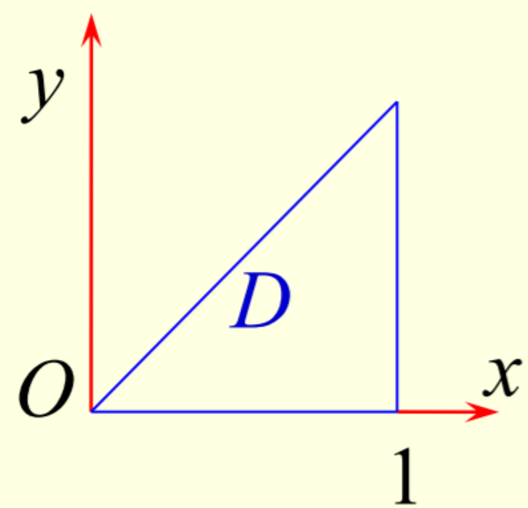
$$\boxed{\begin{aligned}&\iint\limits_{D'} f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\\&=\int_{\alpha}^{\beta}\mathrm{d}\theta\int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)} f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\mathrm{d}r\end{aligned}}$$

例1 将 $I=\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 化为极坐标下的累次积分, 其中D为

(1) 由$y=x$, 上半圆周 $x^2+y^2=4x$ 及 $x^2+y^2=8x$ 围成.

(2) 由直线$y=x, y=0$和$x=1$围成.

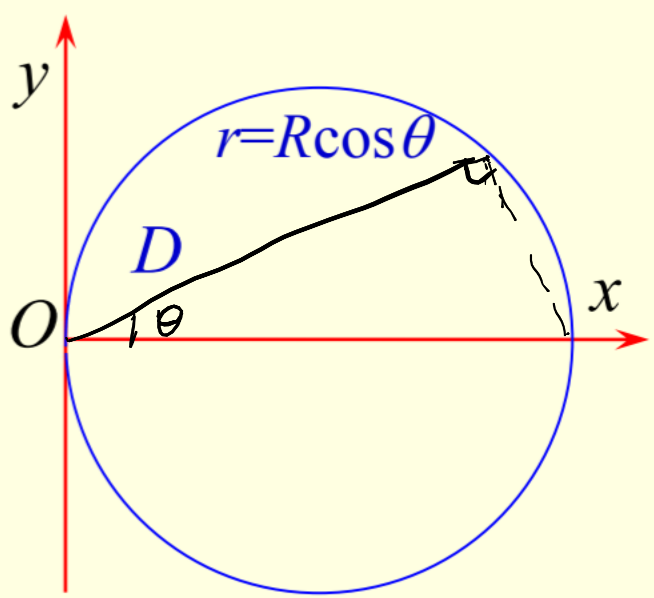


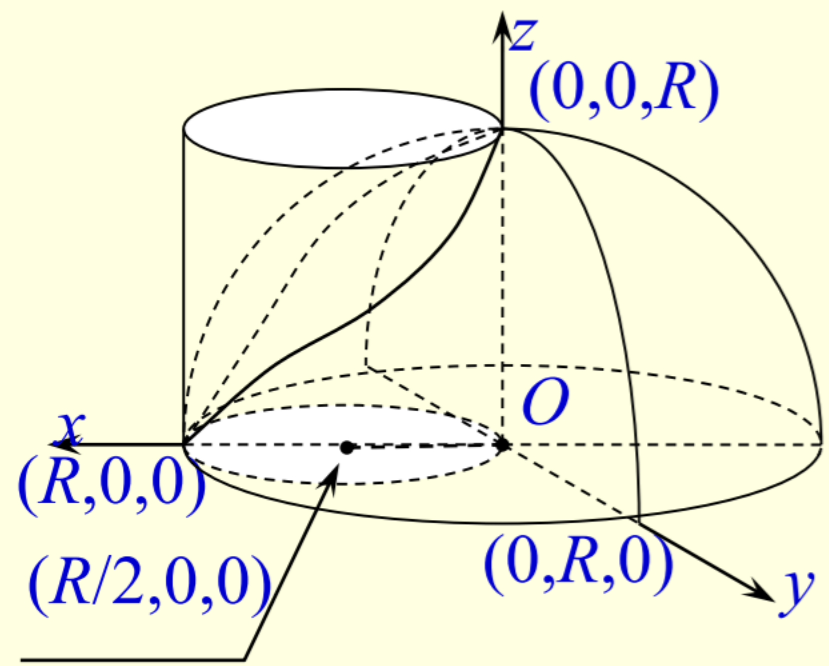


◆ 用极坐标表示积分区域

- 关键: 化积分区域边界为极坐标方程.
- 方法: 将$x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$代入边界的直角坐标方程.

例2 求球体 $x^2+y^2+z^2 \le R^2$ 被圆柱面 $x^2+y^2=\pm Rx$ 所割下部分的体积V.





$$V = 8\iint_D \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}\,dx\,dy = 8\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{R\cos\theta} \sqrt{R^2 - r^2}\cdot r\,dr$$

$$= -4\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{R\cos\theta} \sqrt{R^2 - r^2}\,d(R^2 - r^2)$$

$$= -\frac{8}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (R^2 - r^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_{r=0}^{r=R\cos\theta} d\theta$$

$$= -\frac{8}{3}R^3\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^3\theta)\,d\theta = \frac{4\pi}{3}R^3 - \frac{16}{9}R^3$$

◆ 积分区域边界方程或被积函数含x^2+y^2, 可考虑用极坐标

例3 求球体 $x^2+y^2+z^2\le R^2$ 和 $x^2+y^2+(z-R)^2\le R^2$

相交部分的体积

例4 求双纽线 $\left(x^2+y^2\right)^2=2a^2\left(x^2-y^2\right)$所围图形的面积.

例5 (1) 计算 $I_R=\iint\limits_{D_R}\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中$D_R: x^2+y^2\le R^2, x\ge 0, y\ge 0$

(2) 计算Poisson积分 $I=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x.$

eg3 

$z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$

$z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$ $\quad$ $z=R-\sqrt{R^2-x^2-y^2}$

投影区域：$r=\frac{\sqrt{3}}{2}R$

$$4\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}R} r\,dr\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(2\sqrt{R^2-r^2}-R\right)d\theta$$

$$=4\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}R} r\,dr\,\frac{\pi}{2}\left(2\sqrt{R^2-r^2}-R\right)$$

$$=4\pi\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}R} r\sqrt{R^2-r^2}\,dr-2\pi\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}R} Rr\,dr$$

$$=-2\pi\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}R} r\sqrt{R^2-r^2}\,d$$

10.2.2 二重积分的换元

设变换 $F:\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \end{cases}$ 有连续偏导数, 且满足

$J = \dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \neq 0$, 又$f(x,y) \in C(D)$, 则

注意这是绝对值

$$\boxed{\iint\limits_{D} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_{D'} f(x(u,v),y(u,v))\,|J|\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v}$$

其中$\boldsymbol{F}$将D'变为D.

例6 计算积分$\iint\limits_{D}\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中$D$是由 $\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$

与坐标轴所围区域.

例7 计算二重积分 $\iint\limits_D (x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中区域$D$为

$x^2+y^2 \le x+y+1.$

思考 若D 改为 $\dfrac{(x-2)^2}{a^2}+\dfrac{(y+1)^2}{b^2} \le 1$ 结论如何?

例8 计算积分 $\iint\limits_D xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中$D$为由曲线$xy=1$, $xy=2$, $y=x$和$y=4x$在第一象限所围区域.

例9 计算积分 $I=\iint\limits_D |x|\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中$D$为 $2x^2-2xy+y^2 \le 1$.