

Chap 10

多变量函数的重积分

Chap 10 — 1

二重积分

10.1.1 平面图形的面积

设平面点集 $D \subset [a, b] \times [c, d]$. 作矩形分割 T , 记 D 内的及与 D 相交的小矩形面积和分别为 $\sigma^-_T(D)$ 和 $\sigma^+_T(D)$.

注 分割越细, $\sigma^-_T(D)$ 越大(有上界), $\sigma^+_T(D)$ 越小(有下界)

定义 设 $D \subset [a, b] \times [c, d]$. 作矩形分割 T , 若

$$\lim_{|T| \rightarrow 0} \sigma^+_T(D) = \lim_{|T| \rightarrow 0} \sigma^-_T(D)$$

则称 D 为 **Jordan可测集**. 极限值称为 D 的 **测度(或面积)**.

注意到 $0 \leq \sigma_T^+(D) - \sigma_T^-(D) \leq \sigma_T^+(\partial D)$

故当 ∂D 为**零测集**时, 则 D 可测.

曲顶柱体 设 D 为可测有界闭集. 以 D 为底, 曲面 $S: z = f(x, y)$ 为顶, ∂D 为准线, 母线平行于 Oz 轴的柱面为侧面的立体.

问题 如何求此曲顶柱体的体积?

设 $D \subset [a, b] \times [c, d]$. 令 $f(x, y) = 0, (x, y) \in [a, b] \times [c, d] \setminus D$.

(1) **分割**: 取 $[a, b] \times [c, d]$ 的分割 $T: \{x_0, x_1, \dots, x_n; y_0, y_1, \dots, y_m\}$ 得小矩形 D_{ij} , 其面积记为 $\Delta\sigma_{ij}$.

(2) **求和**: 当 D_{ij} 很小时, 其上的小曲顶柱体的体积用平顶柱体近似. 任取 $(\xi_i, \eta_j) \in D_{ij}$, 则有总体积

$$V \approx \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m f(\xi_i, \eta_j) \Delta\sigma_{ij}.$$

(3) **取极限**: 记 $|T| = \max_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m} \text{diam}\{D_{ij}\}$, 则有

$$V = \lim_{|T| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m f(\xi_i, \eta_j) \Delta\sigma_{ij}.$$

✓ 用类似思想可求面密度不为常数的平面薄板质量.

10.1.2 二重积分定义

设 $f(x, y)$ 在可测有界闭集 $D \subset [a, b] \times [c, d]$ 上定义. 令 $f(x, y) = 0, (x, y) \in [a, b] \times [c, d] \setminus D$. 若对 $[a, b] \times [c, d]$ 的 \forall 矩形分割 D_{ij} 及 $\forall (\xi_i, \eta_j) \in D_{ij}, (i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, m)$,

$$\text{总有} \quad \lim_{|T| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m f(\xi_i, \eta_j) \Delta \sigma_{ij} = I.$$

其中 $|T| = \max_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m} \text{diam}\{D_{ij}\}$, 则称 $f(x, y)$ 在 D 上**可积**, I 称

为 $f(x, y)$ 在 D 上的**二重积分**, 记为 $\iint_D f(x, y) d\sigma$, 其中

\iint 为**积分号**, D 为**积分区域**, $f(x, y)$ 为**被积函数**,

$d\sigma$ 为面积元素, $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m f(\xi_i, \eta_j) \Delta\sigma_{ij}$ 称为**Riemann和**.

■ 几何、物理意义

◆ 以有界闭集 D 为底, 以曲面 $S: z = f(x, y)$ 为顶的曲顶柱体体积

$$V = \iint_D f(x, y) d\sigma.$$

◆ 形状为 D , 面密度为 $\mu(x, y)$ 的平面薄板质量

$$m = \iint_D \mu(x, y) d\sigma.$$

■ 可积的条件

必要条件 若 f 在 D 上可积, 则 f 有界.

充要条件 设 f 在 D 上有界. 则 f 可积 \Leftrightarrow

$$(I) \iint_D f(x, y) d\sigma = \iint_{\bar{D}} f(x, y) d\sigma.$$

(II) $\forall \varepsilon > 0, \exists$ 分割 $T: \sum_T \omega_{ij} \Delta\sigma_{ij} < \varepsilon$, 其中 ω_{ij} 为 f 在 D_{ij} 上振幅.

充分条件 (I) 若 $f \in C(D)$, 则 f 可积.

(II) 若 f 有界且间断点为零测集, 则 f 可积.

10.1.3 二重积分的性质

设以下性质中出现的积分均存在

性质1 (线性) 设 α, β 是常数, 则

$$\iint_D [\alpha f(x, y) + \beta g(x, y)] d\sigma = \alpha \iint_D f(x, y) d\sigma + \beta \iint_D g(x, y) d\sigma$$

性质2 (可加性) 若 D 分成内部不交的子集 D_1, D_2 , 则

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = \iint_{D_1} f(x, y) d\sigma + \iint_{D_2} f(x, y) d\sigma$$

性质3 $\iint_D 1 d\sigma = A_D$ (D 的面积)

性质4 (单调性) 若 $f(x, y) \leq g(x, y)$, 则

$$\iint_D f(x, y) d\sigma \leq \iint_D g(x, y) d\sigma$$

推论 (1) 若 $f(x, y) \geq 0$, 则 $\iint_D f(x, y) d\sigma \geq 0$.

(2) (估值不等式) 若 $m \leq f(x, y) \leq M$, 则

$$mA_D \leq \iint_D f(x, y) d\sigma \leq MA_D.$$

(3) (绝对值不等式) $\left| \iint_D f(x, y) d\sigma \right| \leq \iint_D |f(x, y)| d\sigma.$

性质5 (中值定理) 设 D 是连通有界闭集, $f(x, y) \in C(D)$,

则 $\exists(\xi, \eta) \in D$, 使得

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = f(\xi, \eta) A_D.$$

10.1.3 二重积分的计算

定义 设 $f: [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbf{R}$. 固定 $x \in [a, b]$, 若存在
首次积分 $\varphi(x) = \int_c^d f(x, y)dy$, 且 φ 在 $[a, b]$ 可积, 则称

$$\int_a^b \varphi(x)dx = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y)dy \right) dx$$

为 f 在 $[a, b] \times [c, d]$ 上先 y 后 x 的**累次(二次)积分**, 也记为

$$\int_a^b dx \int_c^d f(x, y)dy$$

想一想 先 x 后 y 的累次积分的定义?

问题 二重积分与二次积分的关系？

定理 设 $f(x, y)$ 在 $[a, b] \times [c, d]$ 可积, 且 $\forall x \in [a, b]$, 存在
首次积分 $F(x) = \int_c^d f(x, y)dy$, 则

$$\iint_{[a,b] \times [c,d]} f(x, y) d\sigma = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy$$

试一试 另一情形 $\iint_{[a,b] \times [c,d]} f(x, y) d\sigma = \int_c^d dy \int_a^b f(x, y) dx$

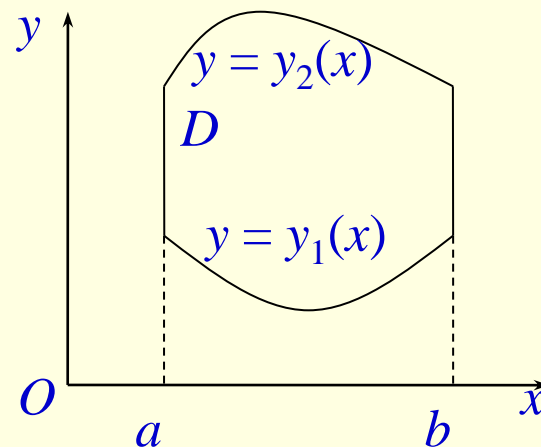
推论1 若 $f(x, y)$ 在 $[a, b] \times [c, d]$ 连续, 则有

$$\iint_{[a,b] \times [c,d]} f(x, y) d\sigma = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x, y) dx$$

推论2 若 f 在 **x 型区域** $D = \{(x, y) | a \leq x \leq b, y_1(x) \leq y \leq y_2(x)\}$

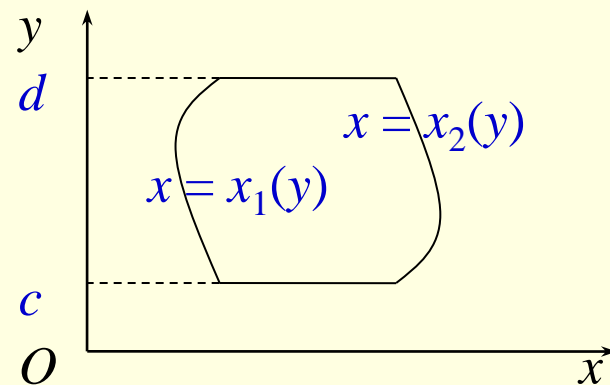
连续, 则有

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy$$



试一试 y 型区域情形

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_c^d dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x, y) dx$$



注 面积元素 $d\sigma = dx dy$

几何直观 过 x 处且垂直 x 轴的平面截曲顶柱体得

曲边梯形, 其面积 $A(x) = \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy$

故曲顶柱体体积

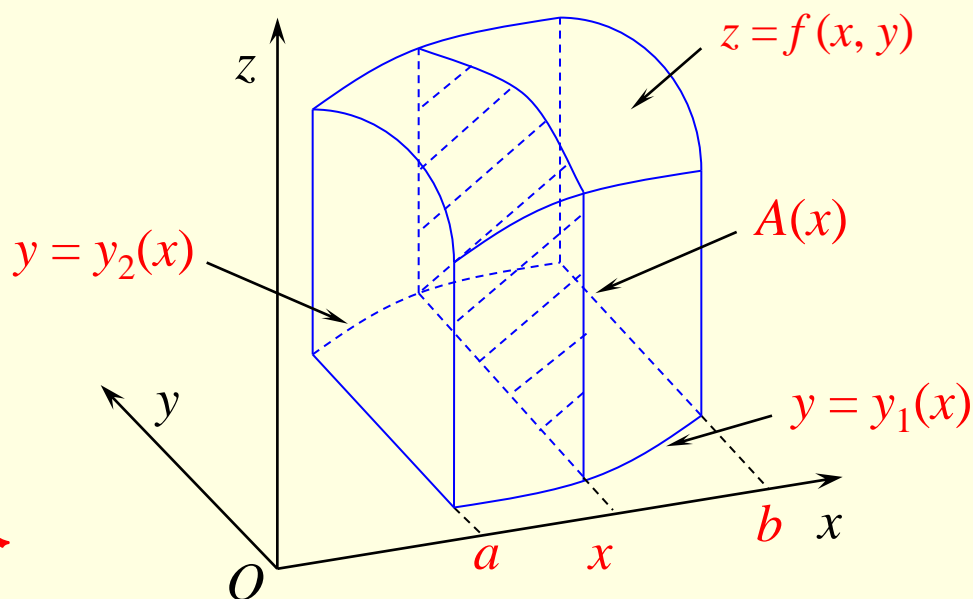
$$V = \int_a^b A(x) dx = \int_a^b \left(\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy \right) dx$$

$$\Rightarrow \iint_D f(x, y) dx dy$$

$$= \int_a^b \left(\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy \right) dx$$

$$\stackrel{\text{def}}{=} \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy$$

↑
先 y 后 x 二次积分



结论 设 $f \in C[a, b]$, $g \in C[c, d]$, 则有

$$\iint_{[a,b] \times [c,d]} f(x)g(y)dx dy = \int_a^b f(x)dx \cdot \int_c^d g(y)dy$$

例1 计算 $\iint_{[0,1]^2} e^{x+y} dx dy$

例2 计算 $\iint_{[0,\pi] \times [0,1]} x \cos xy dx dy$

例3 计算 $\iint_D xy dx dy$, 其中 D 是由抛物线 $y^2 = x$ 与直线 $y = x - 2$ 所围区域.

◆ 直角坐标计算二重积分步骤

- 画出区域 D 的草图, 并确定类型;
- 按所确定的类型表示区域 D ;
- 化二重积分为二次积分(注意上、下限);
- 计算二次积分.

◆ 确定积分区域 D 类型的原则

- 对它划分的块数越少越好;
- 首次积分可以且容易算出.

例4 计算二次积分 $I = \int_0^1 dx \int_x^{\sqrt{x}} \frac{\sin y}{y} dy$

例5 交换二次积分次序

$$\int_0^1 dy \int_0^{1-\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx + \int_1^2 dy \int_0^{2-y} f(x, y) dx$$

◆ 交换二次积分次序步骤

- 将二次积分还原为二重积分;
- 由积分限确定积分区域 D , 并按另一类型表示它;
- 化二重积分为另一次序的二次积分.

例6 计算二重积分 $I = \iint_D (y + y^2 \sin^3 x) dx dy$,

其中 D 是上半圆域 $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 4, y \geq 0\}$.

◆ 用积分区域对称性和被积函数奇偶性简化积分计算

若 D 关于 y 轴对称, 记 D_1 为 D 中 $x \geq 0$ 部分, 则

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \begin{cases} 0, & f(-x, y) = -f(x, y) \\ 2 \iint_{D_1} f(x, y) dx dy, & f(-x, y) = f(x, y) \end{cases}$$

若 D 关于 x 轴对称, 有类似的结果.

例7 计算二重积分 $\iint_D e^{\max\{x^2, y^2\}} dx dy$,

其中 $D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$. (考研试题)

例8 设函数 $f(x) \in C[0, 1]$, 且设 $\int_0^1 f(x) dx = A$, 计算

$$\int_0^1 dx \int_x^1 f(x) f(y) dy.$$

例9 计算圆柱面 $x^2 + y^2 = R^2$ 与 $x^2 + z^2 = R^2$
所围立体的体积.

Chap 10 — 2

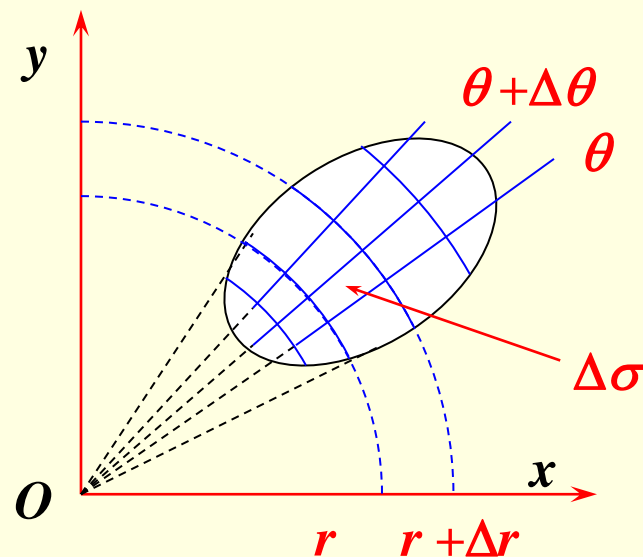
二重积分的换元

10.2.1 极坐标计算二重积分

当积分区域边界曲线或被积函数用极坐标表示简单时,
可用极坐标来计算二重积分

考虑面积元素 $d\sigma$ 在极坐标下的
形式.

用 $r = \text{常数}$ (圆周族)和 $\theta = \text{常数}$ (射线族)分割区域 D , 则小区域面积



$$\Delta\sigma = \frac{1}{2}[(r + \Delta r)^2 \Delta\theta - r^2 \Delta\theta] = r\Delta r\Delta\theta + \frac{1}{2}(\Delta r)^2 \Delta\theta$$

$$\Rightarrow d\sigma = r dr d\theta$$

从直角坐标到极坐标时的二重积分变换公式

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D'} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr d\theta$$

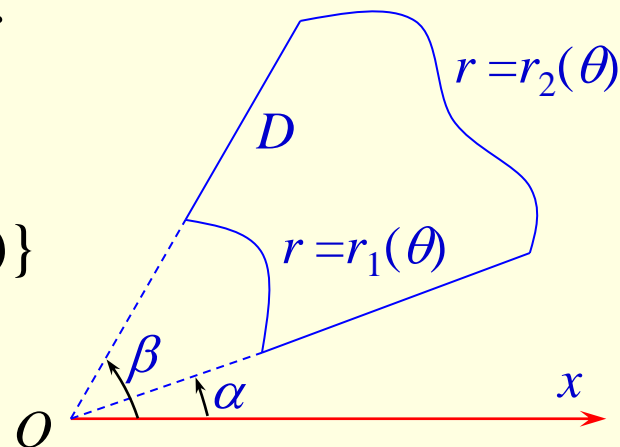
其中 D' 是 D 在极坐标下的表示形式.

特别地, 若

$$D' = \{(r, \theta) \mid \alpha \leq \theta \leq \beta, r_1(\theta) \leq r \leq r_2(\theta)\}$$

则有

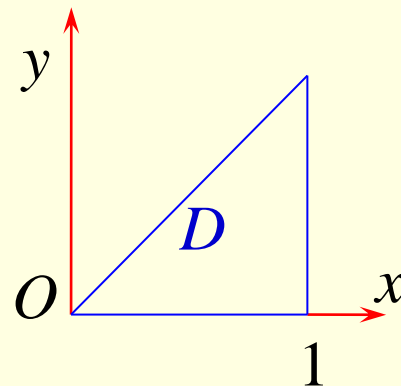
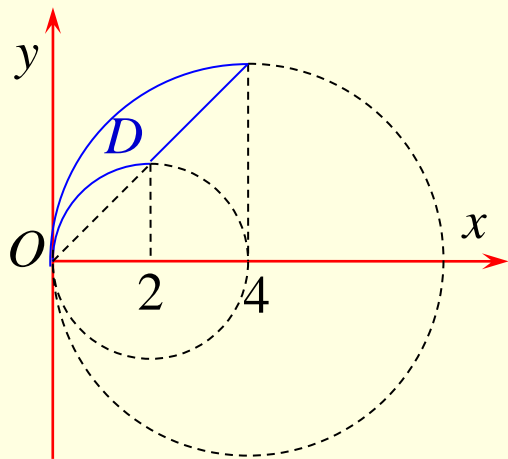
$$\begin{aligned} & \iint_{D'} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr d\theta \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} d\theta \int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr \end{aligned}$$



例1 将 $I = \iint_D f(x, y) dx dy$ 化为极坐标下的累次积分, 其中 D 为

(1) 由 $y = x$, 上半圆周 $x^2 + y^2 = 4x$ 及 $x^2 + y^2 = 8x$ 围成.

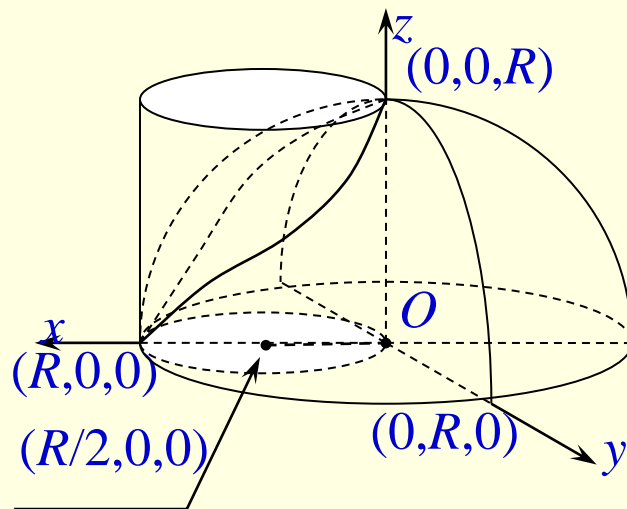
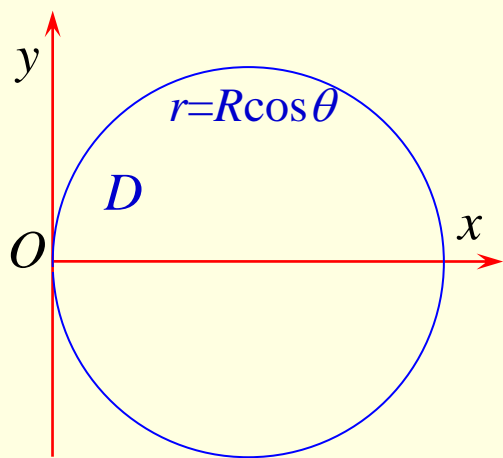
(2) 由直线 $y = x$, $y = 0$ 和 $x = 1$ 围成.



◆ 用极坐标表示积分区域

- 关键: 化积分区域边界为极坐标方程.
- 方法: 将 $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ 代入边界的直角坐标方程.

例2 求球体 $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$ 被圆柱面 $x^2 + y^2 = \pm Rx$ 所割下部分的体积 V .



◆ 积分区域边界方程或被积函数含 $x^2 + y^2$, 可考虑用极坐标

例3 求球体 $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$ 和 $x^2 + y^2 + (z - R)^2 \leq R^2$
相交部分的体积

例4 求双纽线 $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2)$ 所围图形的面积.

例5 (1) 计算 $I_R = \iint_{D_R} e^{-(x^2+y^2)} dx dy$, 其中 $D_R: x^2 + y^2 \leq R^2, x \geq 0, y \geq 0$

(2) 计算 **Poisson积分** $I = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$.

10.2.2 二重积分的换元

设变换 $\mathbf{F} : \begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \end{cases}$ 有连续偏导数, 且满足

$J = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \neq 0$, 又 $f(x, y) \in C(D)$, 则

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D'} f(x(u, v), y(u, v)) |J| du dv$$

其中 \mathbf{F} 将 D' 变为 D .

例6 计算积分 $\iint_D (\sqrt{x} + \sqrt{y}) dx dy$, 其中 D 是由 $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$

与坐标轴所围区域.

例7 计算二重积分 $\iint_D (x+y) dx dy$, 其中区域 D 为

$$x^2 + y^2 \leq x + y + 1.$$

思考 若 D 改为 $\frac{(x-2)^2}{a^2} + \frac{(y+1)^2}{b^2} \leq 1$ 结论如何?

例8 计算积分 $\iint_D xy dx dy$, 其中 D 为由曲线 $xy = 1$, $xy = 2$, $y = x$ 和 $y = 4x$ 在第一象限所围区域.

例9 计算积分 $I = \iint_D |x| dx dy$, 其中 D 为 $2x^2 - 2xy + y^2 \leq 1$.