第十三周作业参考答案与部分解析

习题 11.5 P234-245

T9. (2)

解 根据 Stokes 公式，我们有

$$\oint_L (y-z)\mathrm{d}x+(z-x)\mathrm{d}y+(x-y)\mathrm{d}z=-2\iint_D \mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$$

根据 L 逆时针的诱导定向，第二型曲面积分的定向应为 D 的上侧. 作换元 $(x,y,h-\frac{h}{a}x)$，我们得到（此时换元在消灭定向之前，所以不取绝对值）

$$\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z=\frac{\partial(y,z)}{\partial(x,y)}\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y=\frac{h}{a}\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y,\ \ \mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x=\frac{\partial(z,x)}{\partial(x,y)}\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y=0$$

故我们得到原式为

$$-2\iint_D (1+\frac{h}{a})\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$$

由于 D 的上侧与 $\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$ 的定向相同，所以不改变符号，即所求为

$$-2\iint_D\left(1+\frac{h}{a}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-2\left(1+\frac{h}{a}\right)S_{x^2+y^2\le a^2}=-2\left(1+\frac{h}{a}\right)\pi a^2.$$

(4)

解 根据 Stokes 公式，我们有

$$\oint_L y^2\mathrm{d}x+xy\mathrm{d}y+xz\mathrm{d}z=\iint_D -z\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+-y\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$$

根据 L 逆时针的诱导定向，第二型曲面积分的定向应为 D 的上侧. 作换元 (x,y,y)，我们得到（此时换元在消灭定向之前，所以不取绝对值）

$$\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x=\frac{\partial(z,x)}{\partial(x,y)}\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y=-1\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$$

故我们得到原式为

$$\iint_D (-y)\cdot(-1)+(-y)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y=0.$$

(5)

(5) 记 $\boldsymbol{v}=(y^2-y,z^2-z,x^2-x)\implies\nabla\times\boldsymbol{v}=(-(2z-1),-(2x-1),-(2y-1))$，记 S 是球面与平面的截面，法向 $\boldsymbol{n}=\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$，由 Stokes 定理得:

$$\oint_L \boldsymbol{v}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\iint_S\nabla\times\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}S=\frac{1}{\sqrt{3}}\iint_S-(2(x+y+z)-3)\,\mathrm{d}S=\sqrt{3}\iint_S\mathrm{d}S=\sqrt{3}\pi a^2.$$

T12.

解 记 $\boldsymbol{v}=(y^2+z^2,z^2+x^2,x^2+y^2)\implies\nabla\times\boldsymbol{v}=2(y-z,z-x,x-y)$, 记 S 为球面被柱面所截得的截面, 其单位法向量 $\boldsymbol{n}=\dfrac{1}{R}(x,y,z)$, 由 Stokes 定理得:

$$\oint_L\boldsymbol{v}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\iint_S\nabla\times\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}S=\frac{2}{R}\iint_S\left(\sum_{\text{cyc}}x(y-z)\right)\mathrm{d}S=0.$$

习题 11.7 P247–248

T3. (2) 答案：$xyz(x+y+z)+C$.

(3)

(3) 由球坐标下的旋度公式知 $\nabla\times\boldsymbol{v}=\boldsymbol{0}$, 故 $\boldsymbol{v}$ 是无旋场, 从而是有势场. 其势函数

$$\varphi(r,\theta,\phi)=\int_{(0,0,0)}^{(r,\theta,\phi)}r^2\boldsymbol{r}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}+C=\int_0^r r^3\,\mathrm{d}r+C=\frac{1}{4}r^4+C.$$

T4.

解 $\boldsymbol{F}$ 是有势场, 因此是无源场, 令

$$\begin{aligned}\nabla\times\boldsymbol{F}&=((a+2)x-3ax,3y-(a+2)y,(5+3az)-(5a+3z))\\&=((2-2a)x,(1-a)y,(3a-3)z+5-5a)=\boldsymbol{0}\\&\implies a=1,\quad \boldsymbol{F}=(x^2+5y+3yz,5x+3xz-2,3xy-4z),\end{aligned}$$

从而其势函数

$$\begin{aligned}\varphi(x,y,z)&=\int_{(0,0,0)}^{(x,y,z)}\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}+C=\left(\int_{(0,0,0)}^{(x,0,0)}+\int_{(x,0,0)}^{(x,y,0)}+\int_{(x,y,0)}^{(x,y,z)}\right)\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}+C\\&=\int_0^x x^2\,\mathrm{d}x+\int_0^y(5x-2)\,\mathrm{d}y+\int_0^z(3xy-4z)\,\mathrm{d}z+C\\&=\frac{1}{3}x^3+(5x-2)y+(3xyz-2z^2)+C.\end{aligned}$$

T5. (2) 答案：$u(x,y,z)=\frac{1}{3}(x^3+y^3+z^3)-2xyz+C$.

T6. (5)

(5) 记 $\boldsymbol{F}=\left(1-\dfrac{1}{y}+\dfrac{y}{z},\dfrac{x}{z}+\dfrac{x}{y^2},-\dfrac{xy}{z^2}\right)$, 则

$$\nabla\times\boldsymbol{F}=\left(-\frac{x}{z^2}+\frac{x}{z^2},-\frac{y}{z^2}+\frac{y}{z^2},\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{y^2}\right)-\left(\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z}\right)\right)=\boldsymbol{0},$$

故 $\boldsymbol{F}$ 在 $\mathbb{R}^3_+$ 上是无旋场, 从而是保守场, 其曲线积分与路径无关,

$$\begin{aligned}&\int_{(1,1,1)}^{(2,2,2)}\left(1-\frac{1}{y}+\frac{y}{z}\right)\mathrm{d}x+\left(\frac{x}{z}+\frac{x}{y^2}\right)\mathrm{d}y-\frac{xy}{z^2}\,\mathrm{d}z\\&=\left(\int_{(1,1,1)}^{(2,1,1)}+\int_{(2,1,1)}^{(2,2,1)}+\int_{(2,2,1)}^{(2,2,2)}\right)\left(1-\frac{1}{y}+\frac{y}{z}\right)\mathrm{d}x+\left(\frac{x}{z}+\frac{x}{y^2}\right)\mathrm{d}y-\frac{xy}{z^2}\,\mathrm{d}z\\&=\int_1^2 1\cdot\mathrm{d}x+\int_1^2\left(2+\frac{2}{y^2}\right)\mathrm{d}y-\int_1^2\frac{4}{z^2}\,\mathrm{d}z\\&=\left(x\Big|_1^2\right)+\left(2y-\frac{2}{y}\right)\Bigg|_1^2+\left(\frac{4}{z}\Big|_1^2\right)\\&=2.\end{aligned}$$

(6)

(6) 记 $\boldsymbol{F}=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}(x,y,z)$, 则

$$\nabla\times\boldsymbol{F}=\frac{1}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}}(-yz+yz,-zx+zx,-xy+xy)=\mathbf{0},$$

故 $\boldsymbol{F}$ 在 $\mathbb{R}^3\setminus\{\mathbf{0}\}$ 上是无旋场, 从而是保守场, 其曲线积分与路径无关, 且其势函数

$$\varphi=\sqrt{x^2+y^2+z^2},$$

$$\int_{(x_1,y_1,z_1)}^{(x_2,y_2,z_2)}\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\int_{(x_1,y_1,z_1)}^{(x_2,y_2,z_2)}\nabla\varphi\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\int_{(x_1,y_1,z_1)}^{(x_2,y_2,z_2)}\mathrm{d}\varphi=0.$$

习题 12.1 P269

T1. (2) 答案：$a_0=\frac{4}{\pi},a_n=\frac{4}{\pi}\cdot\frac{(-1)^{n+1}}{4n^2-1},b_n=0$. 该傅里叶级数收敛至 $f(x)$.

T3. (1) 答案：余弦：$\frac{2}{3}\pi^2+\sum\frac{8}{n^2}(-1)^n\cos nx$ 正弦：$\sum\left[-\frac{4\pi}{n}(-1)^n+\frac{8}{n^3\pi}(-1)^n-\frac{8}{n^3\pi}\right]\sin nx$

(3)

(3) 记 $f(x)$ 的奇延拓和偶延拓分别为 $f_{\mathrm{o}}(x),f_{\mathrm{e}}(x)$.

先考虑正弦级数.

$$\begin{aligned}
b_n&=\frac{2}{\pi}\int_0^{2h}\left(1-\frac{x}{2h}\right)\sin nx\,\mathrm{d}x\\
&=\left(-\frac{2}{\pi n}\cos nx\Big|_0^{2h}\right)-\frac{1}{\pi h}\cdot\left(-\frac{1}{n}\left(x\cos nx-\frac{1}{n}\sin nx\right)\Big|_0^{2h}\right)\\
&=\frac{1}{\pi}\left(\frac{2}{n}-\frac{1}{n^2h}\sin 2nh\right),\\
\Longrightarrow\ f_{\mathrm{o}}(x)&=\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{n}-\frac{1}{n^2h}\sin 2nh\right)\sin nx,\quad x\in\mathbb{R}.
\end{aligned}$$

下面考虑余弦级数.

$$\begin{aligned}
a_0&=\frac{2}{\pi}\int_0^{2h}\left(1-\frac{x}{2h}\right)\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\left(x-\frac{1}{4h}x^2\right)\Big|_0^{2h}=\frac{2h}{\pi},\\
a_n&=\frac{2}{\pi}\int_0^{2h}\left(1-\frac{x}{2h}\right)\cos nx\,\mathrm{d}x\\
&=\left(\frac{2}{n\pi}\sin nx\Big|_0^{2h}\right)-\frac{1}{h\pi}\cdot\frac{1}{n}\left(x\sin nx+\frac{1}{n}\cos nx\right)\Big|_0^{2h}\\
&=\frac{1}{\pi n^2h}(1-\cos 2nh),\\
\Longrightarrow\ f_{\mathrm{e}}(x)&=\frac{h}{\pi}+\frac{1}{\pi h}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}(1-\cos 2nh)\cos nx,\quad x\in\mathbb{R}.
\end{aligned}$$

T4. (2)

(2) 注意到,

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}ax\sin nx\,\mathrm{d}x=-\frac{2a}{n}\cos n\pi=\frac{(-1)^{n-1}}{n}\implies a=\frac{1}{2}.$$

T5. 答案：$S(3\pi)=S(\pi)=\frac{f(\pi+0)+f(-\pi-0)}{2}=\frac{\pi^2}{2},S(-4\pi)=S(0)=\frac{f(0+0)+f(0-0)}{2}=\frac{1-1}{2}=0.$