

Chap 12 — 3

收敛性定理

12.3.1 Dirichlet收敛定理

定义 设 $f:[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, 若可将 $[a, b]$ 分为有限个子区间, 使 f 在每个开子区间内部连续可微, 端点有单侧极限, 及拟单侧导数, 则称 f 在 $[a, b]$ 上分段可微.

定理 设 f 以 2π 为周期, 在 $[-\pi, \pi]$ 上分段可微, 则其傅里叶级数收敛, 且

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) = \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}$$

证明记

$$S(x) = \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}$$

f 的F氏级数的部分和函数

$$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

称为 f 的 n 阶**Fourier多项式**. 下面证明:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = S(x)$$

第一步

Dirichlet积分

$$\begin{aligned} S_n(x) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+u) \frac{\sin \frac{2n+1}{2} u}{2 \sin \frac{u}{2}} du \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi [f(x+u) + f(x-u)] \frac{\sin \frac{2n+1}{2} u}{2 \sin \frac{u}{2}} du \end{aligned}$$

def ||

$D_n(u)$

Dirichlet积分核

简单事实

$$\frac{2}{\pi} \int_0^\pi D_n(u) du = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos ku \right) du = 1$$

第二步

$$S_n(x) - S(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi [f(x+u) + f(x-u) - 2S(x)] D_n(u) du$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \varphi(u, x) \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right) u}{2 \sin \frac{1}{2} u} du$$

第三步 (Riemann) 设 g 在 $[0, \pi]$ 上可积且平方可积, 则

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^\pi g(u) \sin\left(n + \frac{1}{2}\right) u du = 0$$

第四步

$$g(u) = \frac{\varphi(u, x)}{2 \sin \frac{u}{2}} = \frac{f(x+u) + f(x-u) - 2S(x)}{2 \sin \frac{u}{2}}$$

在 $[0, \pi]$ 上可积且平方可积.

推论 设 f 连续并满足定理条件, 又 f' 可积且平方可积,

则其F氏级数在**R**上一致收敛, 且

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) = f(x)$$

12.3.2 平方平均收敛定理

定理 设 $f \in R[-\pi, \pi]$, 则 $\{S_n(x)\}$ 平方平均收敛于 f , 即

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - S_n\| = 0$$

例1 写出 $f(x) = x^2$ ($x \in [-\pi, \pi]$) 的F氏级数的和函数

在 $[-\pi, \pi]$ 上的表达式.

$$x^2 \sim \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos nx = x^2 \quad (-\pi \leq x \leq \pi)$$

例2 写出 $f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi < x < 0, \\ x, & 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$ 的F氏级数的和函数

在 $[-\pi, \pi]$ 上的表达式.

$$f(x) \sim \frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{(-1)^n - 1}{n^2 \pi} \cos nx + \frac{(-1)^{n-1}}{n} \sin nx \right\}$$

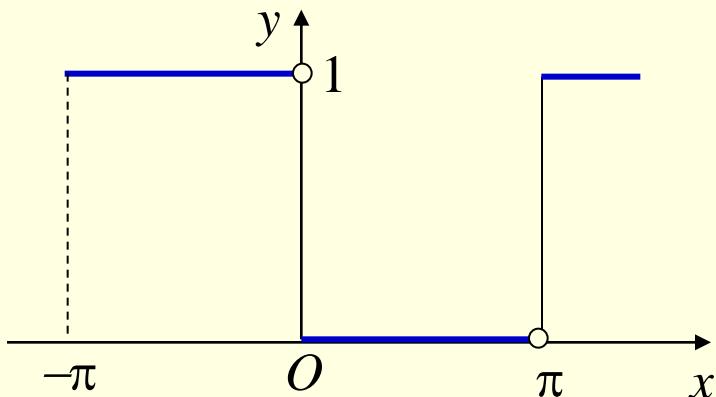
$$= \begin{cases} 0, & -\pi < x < 0, \\ x, & 0 \leq x < \pi, \\ \frac{\pi}{2}, & x = \pm\pi. \end{cases}$$

例3 求 $f(x) = \begin{cases} 1, & -\pi \leq x < 0, \\ 0, & 0 \leq x < \pi \end{cases}$ 的傅氏级数，并写出和函数.

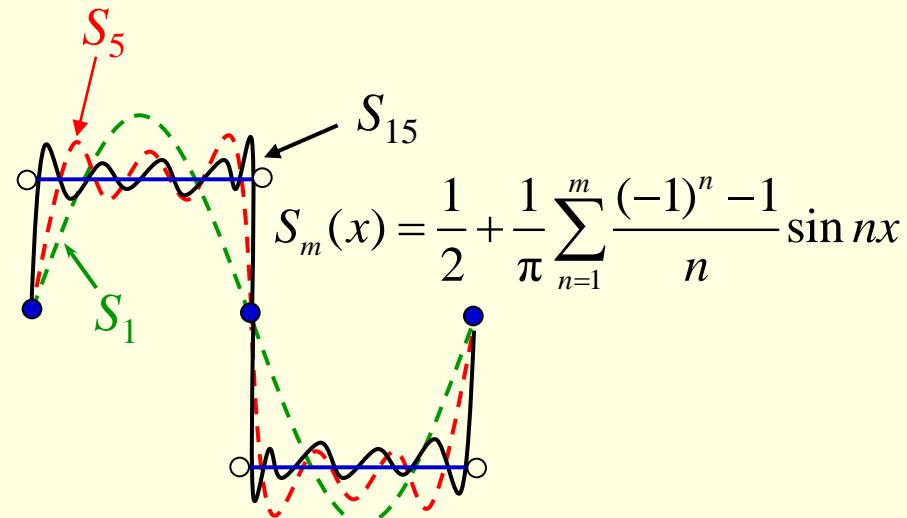
$$f(x) \sim \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n - 1}{n} \sin nx$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{2}{\pi} \left(\sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \dots \right)$$

$$S(x) = \begin{cases} 1, & -\pi < x < 0, \\ \frac{1}{2}, & x = 0, \pm\pi, \\ 0, & 0 < x < \pi. \end{cases}$$



电工学方波



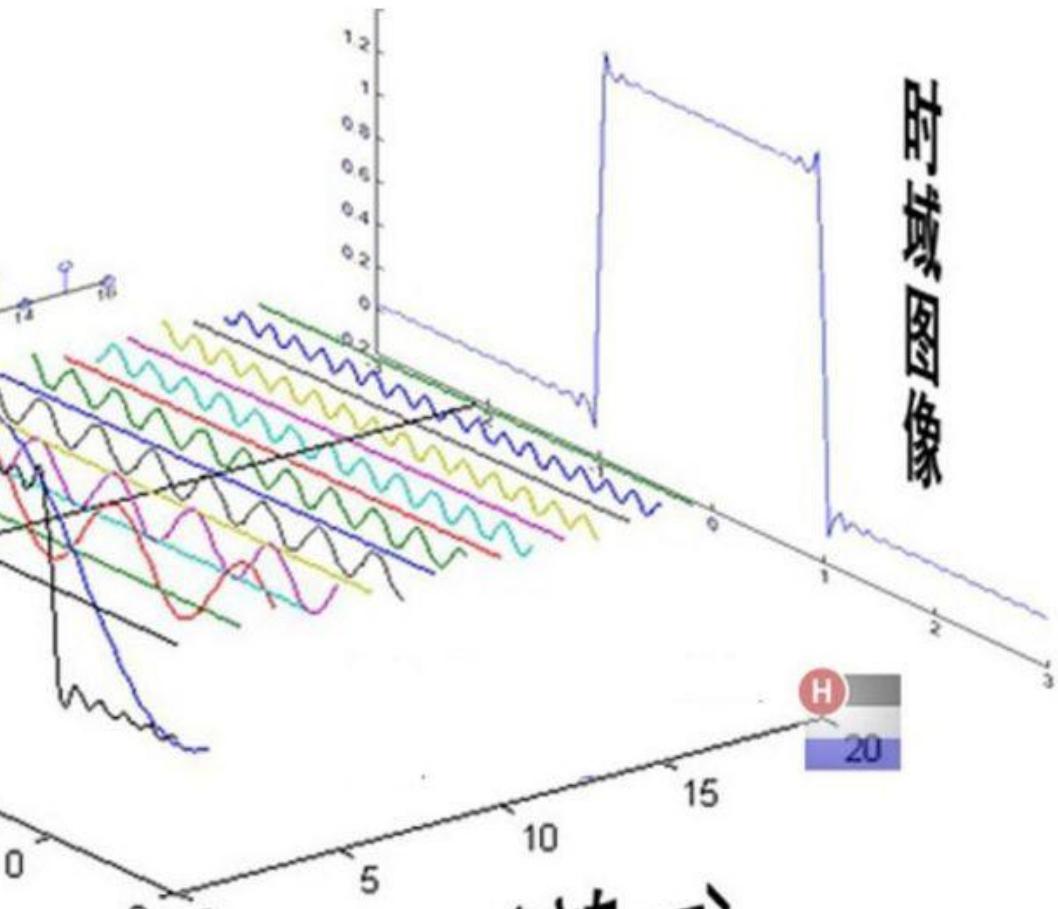
正弦波叠加

频域滤波器



电子发烧友
www.electfans.com

频率方向 →



频域图像

时间方向 →

