Chap 13

反常积分和含参变量积分

Chap 13 — 1

反常积分

13.1.1 无穷积分的收敛性

按定义判别敛散性需: 先求原函数, 再取极限.

定理1(Cauchy准则) $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛 $\Leftrightarrow$

$$\boxed{\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists A > a,\ \forall A',\ A'' > A:\ \left|\int_{A'}^{A''} f(x)\,\mathrm{d}x\right| < \varepsilon.}$$

$\Updownarrow$

$$\left|\int_a^{A''} f(x)\,dx - \int_a^{A'} f(x)\,dx\right|$$

➢**问题** $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 发散的Cauchy准则?

$\exists\, \varepsilon > 0$, $\forall A > a$, 找不到这样的 $\int_{A'}^{A''}$

定义 若 $\int_a^{+\infty}|f(x)|\mathrm{d}x$ 收敛, 则称 $\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ **绝对收敛**;

若 $\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 收敛, 但 $\int_a^{+\infty}|f(x)|\mathrm{d}x$ 发散, 则称 $\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ **条件收敛**.

定理2 若 $\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 绝对收敛, 则 $\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 收敛.

$\left|\int_{A'}^{A''}f(x)dx\right|\le\int_{A'}^{A''}|f(x)|dx<\varepsilon$

命题 若 $\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$, $\int_a^{+\infty}g(x)\mathrm{d}x$ 绝对收敛, 则

$\int_a^{+\infty}[f(x)+g(x)]\mathrm{d}x$ 绝对收敛.

问题 若 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 绝对收敛, $\int_a^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x$ 条件收敛,

结论如何? 又问若两者都条件收敛, 结论又如何?

一定条件收敛

不一定 { 条件 / 绝对.

显然收敛.

下证不绝对: (反证)

$\int_a^{+\infty} |f(x)+g(x)| dx$ 收敛

$|g(x)| = |f(x)+g(x)-f(x)| \leq |f(x)+g(x)| + |f(x)|$

敛

则 $g(x)$ 收敛, 矛盾.

13.1.2 非负函数无穷积分判别法

定理3 (收敛原理) 设 $f(x)\ge 0$, 则 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛 $\Leftrightarrow$

$$F(A)=\int_a^{A} f(x)\mathrm{d}x \text{ 在}[a,+\infty)\text{有上界.}$$

定理4 (比较判别法) 设 $g(x)\ge f(x)\ge 0$, 则

(1) $\int_a^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x$ 收敛 $\Rightarrow \int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛.

(2) $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 发散 $\Rightarrow \int_a^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x$ 发散.

定理5 (极限形式) 设 $f(x) \geq 0,\ g(x) > 0$, 且

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = l,$$ 则

(1) 当 $0 < l < +\infty$ 时, $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 与 $\int_a^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x$ 同敛散;

(2) 当 $l = 0$ 时, $\int_a^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x$ 收敛 $\Rightarrow \int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛;

(3) 当 $l = +\infty$ 时, $\int_a^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x$ 发散 $\Rightarrow \int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 发散.

推论 (p-判别法) 设 $f(x) \geq 0$, 且 $\lim\limits_{x \to +\infty} x^p f(x) = l$, 则

(1) 当 $0 \leq l < +\infty$, 且 $p > 1$ 时, $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛;

(2) 当 $0 < l \leq +\infty$, 且 $p \leq 1$ 时, $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 发散.

例1 证明: 对任意 $\alpha \in \mathbf{R}$, $\int_1^{+\infty} x^{\alpha} \mathrm{e}^{-x} \mathrm{d}x$ 收敛.

$f(x)$ def

取 $p=2$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^2 \cdot x^{\alpha}}{e^{-x}} = 0$

$x^{-\alpha} f(x) = e^{-x} \to 0$

$2>1$

p-判别

收敛(1)

$-\alpha > 1$ 时

$-\alpha = 1$ 时

例2 判断 $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x^2 \mathrm{d}x}{\sqrt{x+1}(x^4+x+1)}$ 的敛散性.

$x^2 \cdot \frac{x^2}{\sqrt{x+1}(x^4+x+1)} \to 0$。或 $x^{\frac{5}{2}} \frac{x^2}{\sim} \to 1$.

六、收敛

13.1.3 A-D判别法 掌握非负

Abel变换 设有$\{a_n\}$, $\{b_n\}$, 记$A_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_k$, 则

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = A_n b_n + \sum_{k=1}^{n-1} A_k (b_k - b_{k+1})}$$

积分第二中值定理 设$f \in R[a, b]$, 则有

1) 若$g(x)$在$[a, b]$ 上单调减少且$g(x) \geq 0$, 则$\exists \xi \in [a, b]$使

$$\boxed{\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = g(a)\int_a^\xi f(x)\mathrm{d}x} \longrightarrow \text{Bonnet型}$$

2) 若$g(x)$在$[a, b]$ 上单调增加且$g(x) \geq 0$, 则$\exists \xi \in [a, b]$使

$$\boxed{\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = g(b)\int_\xi^b f(x)\mathrm{d}x}$$

3) 若$g(x)$在$[a, b]$ 上单调, 则$\exists \xi \in [a, b]$使 Weierstrass型

$$\boxed{\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = g(a)\int_a^\xi f(x)\mathrm{d}x + g(b)\int_\xi^b f(x)\mathrm{d}x}$$

定理6 (Bonnet型) 设$f \in R[a, b]$, $g(x)$在$[a, b]$ 单调减少,

且$g(x) \geq 0$, 则$\exists \xi \in [a, b]$使

$$\boxed{\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = g(a)\int_a^{\xi} f(x)\mathrm{d}x}$$

证 令$F(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$, 则$F \in C[a, b]$, 记其最大, 小值为$M, m$

- 若$g(a) = 0$, 则$g(x) \equiv 0$, 结论显见.
- 若$g(a) > 0$, 则只需证 $m \leq \dfrac{\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x}{g(a)} \leq M$

或 $$mg(a) \leq \int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x \leq Mg(a).$$

由$g\in R[a,b]$: $\forall\varepsilon>0$, $\exists[a,b]$分划 T: $a=x_0<x_1<\ldots<x_n=b$

使得 $$\sum_{k=1}^{n}\omega_k(g)\Delta x_k<\varepsilon.$$

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x=\sum_{k=1}^{n}\int_{x_{k-1}}^{x_k}f(x)g(x)\mathrm{d}x$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\int_{x_{k-1}}^{x_k}f(x)[g(x_{k-1})+g(x)-g(x_{k-1})]\mathrm{d}x$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\int_{x_{k-1}}^{x_k}f(x)g(x_{k-1})\mathrm{d}x+\sum_{k=1}^{n}\int_{x_{k-1}}^{x_k}f(x)[g(x)-g(x_{k-1})]\mathrm{d}x$$

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = \underbrace{\sum_{k=1}^{n}\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)g(x_{k-1})\mathrm{d}x}_{\mathbf{I}_1} + \underbrace{\sum_{k=1}^{n}\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)[g(x)-g(x_{k-1})]\mathrm{d}x}_{\mathbf{I}_2}$$

$$|\mathbf{I}_2| \le \sum_{k=1}^{n}\left|\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)[g(x)-g(x_{k-1})]\mathrm{d}x\right| \le \sum_{k=1}^{n}\int_{x_{k-1}}^{x_k} |f(x)|\cdot|g(x)-g(x_{k-1})|\mathrm{d}x$$

$$\le \sum_{k=1}^{n} L\int_{x_{k-1}}^{x_k} \omega_k(g)\mathrm{d}x = L\sum_{k=1}^{n}\omega_k(g)\Delta x_k \le L\varepsilon, \quad \text{其中} |f(x)| \le L.$$

$$\mathbf{I}_1 = \sum_{k=1}^{n} g(x_{k-1})\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{n} g(x_{k-1})\left[F(x_k)-F(x_{k-1})\right]$$

$$= g(x_{n-1})F(x_n) + \sum_{k=1}^{n-1} F(x_k)\left[g(x_{k-1})-g(x_k)\right]$$

$$\boxed{A_k = \sum_{i=1}^{k}\left[F(x_i)-F(x_{i-1})\right] = F(x_k)}$$

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = \mathbf{I}_1 + \mathbf{I}_2\,, \qquad |\mathbf{I}_2| \le L\varepsilon$$

$$\mathbf{I}_1 = g(x_{n-1})F(x_n) + \sum_{k=1}^{n-1} F(x_k)\left[g(x_{k-1}) - g(x_k)\right]$$

$$\Rightarrow \qquad \mathbf{I}_1 \le M\left(g(x_{n-1}) + \sum_{k=1}^{n-1}\left[g(x_{k-1}) - g(x_k)\right]\right) = Mg(a)$$

$$\mathbf{I}_1 \ge m\left(g(x_{n-1}) + \sum_{k=1}^{n-1}\left[g(x_{k-1}) - g(x_k)\right]\right) = mg(a)$$

从而 $\qquad mg(a) - L\varepsilon \le \int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x \le Mg(a) + L\varepsilon$

令$\varepsilon \to 0^+$得 $\qquad mg(a) \le \int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x \le Mg(a).$

回忆：$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 满足以下两条件之一、

Abel: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收 $\{b_n\}$ 单调有界

Dirlet: $S_n=\sum_{k=1}^{n} a_k$ 有界. $\{b_n\}\downarrow$ 且 $\to 0$.

定理7(A-D判别法) 设 f, g 满足下列两组条件之一:

则 $\int_a^{+\infty} f(x)g(x)\mathrm{d}x$ 收敛.

(Abel) $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛, $g(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 单调有界;

(Dirichlet) $F(A)=\int_a^{A} f(x)\mathrm{d}x$ 在 $[a,+\infty)$ 有界, $g(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 单调且 $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=0$.

例3 证明 $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$ 条件收敛.

分析(Abel) $\int_{A'}^{A''} f(x)g(x)dx = g(A')\int_{A'}^{\xi} f(x)dx + g(A'')\int_{\xi}^{A''} f(x)dx$

证：设 $|g(x)|\le M$. ∵ $\int^{+\infty} f$ 敛. $\forall \varepsilon>0$. $\exists A>a$

$\forall A''\ge\xi\ge A'>A$

$\left|\int_{A'}^{\xi} f(x)\,dx\right| < \frac{\varepsilon}{2M}$ $\left|\int_{\xi}^{A''} f(x)dx\right| < \frac{\varepsilon}{2M}$

$\left|\int_{A'}^{A''} f(x)g(x)dx\right| \le |g(A')||\cdot| + |g(A'')||\cdot|$

$< M\cdot\frac{\varepsilon}{2M} + M\cdot\frac{\varepsilon}{2M} = \varepsilon$

eg3. f: $\sin x$ g: $\frac{1}{x}$

敛: $\int$ 有界. 单调 $\to 0$.

$\forall A>1$. $\int_1^A \sin x\,dx$ 有界
$\quad\quad = \cos 1 - \cos A$

$|\sin x| \ge \sin^2 x$

不绝对收敛 $\int_1^{+\infty}\frac{|\sin x|}{x} \ge \int_1^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x} = \int_1^{+\infty}\frac{1-\cos 2x}{2x}$

$= \underbrace{\int_1^{+\infty}\frac{1}{2x}}_{+\infty} - \underbrace{\int_1^{+\infty}\frac{\cos 2x}{2x}}_{0}$ ∴ 不绝对收敛

13.1.4 瑕积分敛散性判别

定理8 (Cauchy准则) 设b为瑕点. $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 收敛 $\Leftrightarrow$

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x', x'' \in (b-\delta, b):\ \left|\int_{x'}^{x''} f(x)\mathrm{d}x\right| < \varepsilon.}$$

➢ **问题** $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 发散的Cauchy准则？

定义 若 $\int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x$ 收敛, 则称 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ **绝对收敛**;

若 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 收敛, 但 $\int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x$ 发散, 则称 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ **条件收敛**.

定理9 若 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 绝对收敛, 则 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 收敛.

命题 若 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$, $\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$ 绝对收敛, 则

$$\int_a^b [f(x)+g(x)]\mathrm{d}x \text{ 绝对收敛.}$$

问题 若 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 绝对收敛, $\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$ 条件收敛,

结论如何? 又问若两者都条件收敛, 结论又如何?

定理10 (收敛原理) 设 $f(x) \geq 0$, 则 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 收敛 $\Leftrightarrow$

$$F(A) = \int_a^A f(x)\mathrm{d}x \text{ 在}[a, b)\text{有上界.}$$

定理11 (比较判别法) 设 $g(x) \geq f(x) \geq 0$，则

(1) $\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$ 收敛 $\Rightarrow$ $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 收敛.

(2) $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 发散 $\Rightarrow$ $\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$ 发散.

定理11(极限形式) 设b为瑕点$f(x)\geq 0,\ g(x)>0$, 且

$$\lim_{x\to b^-}\frac{f(x)}{g(x)}=l, \text{则}$$

(1) 当$0<l<+\infty$时, $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 与 $\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$ 同敛散;

(2) 当$l=0$时, $\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$ 收敛 $\Rightarrow \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 收敛;

(3) 当$l=+\infty$时, $\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$ 发散 $\Rightarrow \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 发散.

推论 (p-**判别法**) 设 $f(x)\ge 0$, 且 $\lim\limits_{x\to b^-}(b-x)^p f(x)=l$, 则

(1) 当$0\le l<+\infty$, 且$p<1$ 时, $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 收敛;

(2) 当$0<l\le+\infty$, 且$p\ge 1$ 时, $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 发散.

思考 a为瑕点的 p-判别法?

例5 讨论椭圆积分

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}},\ (0<k<1)$$

$\frac{1}{\sqrt{1-x}\sqrt{2(1-k^2)}}$

$(1-x)(1+x)(1-k^2x^2)$

$\therefore (1-x)^{\frac{1}{2}} f(x) \to \frac{1}{\sqrt{2(1-k^2)}}$ 收敛

的敛散性.

例6 讨论 $\int_0^1 \frac{\ln x}{1-x^2}\mathrm{d}x$ 的敛散性.

例7 讨论 $\int_0^{+\infty} \frac{x^\alpha \arctan x}{2+x^\beta}\mathrm{d}x \ (\beta>0)$ 的敛散性.

$x^{-(\alpha+1)}$ $\quad \frac{x^\alpha \arctan x}{2+x^\beta} = \frac{1}{2}$

$\downarrow$

p

eg. $x=0$ 瑕点

$x=1$ $\lim u = \frac{\frac{1}{x}}{-2x} = -\frac{1}{2}$

$f(x) = \frac{-\ln x}{1-x^2}$ 非负

$\lim\limits_{x\to 0^+} x^{\frac{1}{2}} \cdot (-\ln x) = 0$ $p=\frac{1}{2}<1$.

$\therefore \int_0^1 \frac{-\ln x}{1-x^2} dx$ 收敛