Chap 6 — 2

二阶线性微分方程

■ 简谐振动方程

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=-kx(t),\quad k>0\text{为弹性系数}$$

阻力正比于速度, $v>0$为阻尼系数, 则

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=-v\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}-kx(t),$$

若还受周期外力$b\cos\omega t$作用, 则

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=-v\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}-kx(t)+b\cos\omega t$$

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=-v\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}-kx(t)+b\cos\omega t$$

若令

$$\omega_0=\sqrt{\frac{k}{m}},\qquad \beta=\frac{v}{2m},\qquad a=\frac{b}{m}$$

方程化为

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+2\beta\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+\omega_0^2x=a\cos\omega t$$

二阶非齐次线性方程

n 阶线性微分方程标准形式

$$y^{(n)}+p_1(x)y^{(n-1)}+\cdots+p_{n-1}(x)y'+p_n(x)y=f(x)$$

$p_1(x),\ \cdots,\ p_n(x)$ — 方程的系数　$f(x)$ — 非齐次项

特点：方程中关于未知函数及其导数的次数为1

$f(x)\equiv 0$时，得到

$$y^{(n)}+p_1(x)y^{(n-1)}+\cdots+p_{n-1}(x)y'+p_n(x)y=0$$

称为对应的齐次线性微分方程

二阶非齐次线性方程标准形式

$$\boxed{y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x) \qquad (NHL)}$$

二阶齐次线性方程标准形式

$$\boxed{y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \qquad (HL)}$$

定理(唯一性) 设$p(x), q(x), f(x) \in C(I)$, $x_0 \in I$, 则

$$\boxed{\begin{cases} y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x) \\ y(x_0) = \alpha, y'(x_0) = \beta \end{cases}}$$

在$U(x_0)$ 存在唯一解$y(x)$. 当$\alpha = \beta = 0$时, (HL)只有零解

6.2.1 二阶线性方程解的结构

定理 若 $y_1(x), y_2(x)$ 方程(*HL*) 的解，则

$$c_1y_1(x)+c_2y_2(x)\ （c_1,c_2\text{是任意常数}）$$

也是此方程的解.

定理 若 $y_1(x), y_2(x)$ 方程(*NHL*) 的解，则

$$y_1(x)-y_2(x)$$ 是方程(*HL*)的解.

定理 若$y(x)$是(*HL*)的解, $y_0(x)$是(*NHL*) 的解, 则

$$y(x)=y(x)+y_0(x)$$ 是方程(*NHL*)的解.

■ 线性相关与无关

定义 对函数 $y_1(x),\ y_2(x)$, 若存在不全为零的常数 $c_1,\ c_2$, 使得 $c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) \equiv 0\ (x \in I)$

则称 $y_1(x),\ y_2(x)$ **线性相关**, 否则称它们**线性无关**

定义 设 $y_1(x), y_2(x)$ 在区间I上可导, 则称

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}$$

$y_1(x), y_2(x)$ 的**Wronski行列式**

定理 设函数 $y_1(x), y_2(x)$ 是(HL)的解, 则它们在I上

线性相关 $\Leftrightarrow W(x) \equiv 0 \quad (x \in I)$.

定理 设 $y_1(x), y_2(x)$ 是(HL)的解, 则有**Liouville**公式

$$W(x) = W(x_0)\mathrm{e}^{-\int_{x_0}^{x} p(t)\mathrm{d}t}$$

推论 设 $y_1(x), y_2(x)$ 是(HL)的线性无关解, 则 $W(x)$ 恒不为0.

■ 解的结构定理

若$y_1(x)$、 $y_2(x)$是方程(HL)的两个线性无关的解(称为方程的**基本解组**)，那么通解

$$c_1\,y_1(x)+c_2\,y_2(x)\quad (c_1,c_2\text{任意常数})$$

包含了方程(HL)的所有解.

- (HL)的所有解构成了一个二维线性空间，

基本解组是它的一组基.

如何求解二阶齐次线性方程？归结为：

求出两个线性无关的解(即基本解组).

如何求这方程两个线性无关的特解？

■ Liouville公式

若$y_1(x)$是(HL)的非零解，那么

$$y_2 = y_1 \int \frac{1}{y_1^2} e^{-\int_{x_0}^{x} p(t)\mathrm{d}t} \mathrm{d}x$$是(HL)与$y_1(x)$线性无关的解.

求方程 (*HL*) 的解归结为求出一个非零特解

如何求一个特解？

简单形式方程常使用观察法找出特解

$$x^m,\ \mathrm{e}^{\alpha x},\ \sin mx \quad 或 \quad \cos mx$$

例　求解方程

$$(2x+1)y''+4xy'-4y=0$$

$$y_1=x,\quad y_2=-\mathrm{e}^{-2x}$$

例 求解方程

$$xy'' - y' - (x-1)y = 0$$

$$\boxed{y_1 = \mathrm{e}^{x}, \quad y_2 = -\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\right)\mathrm{e}^{-x}}$$

6.2.2 常数变易法

■ 解的结构定理

设 $y^*(x)$ 是非齐次方程(*NHL*)的解，而 $y_1(x)$, $y_2(x)$是对应的齐次方程的基本解组,那么通解

$$y = y^*(x) + c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$$

(c_1,c_2是任意常数)包含了方程(*NHL*)的全部解.

- 要求线性非齐次方程(*NHL*)的通解，只要求出一个特解和对应齐次方程的一个基本解组

问题 如何求出方程的特解呢？

方法：常数变易法

若(HL)的基本解组为 $y_1(x), y_2(x)$, 设(NHL)特解

$$y^* = c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x)$$

代入原方程只能得到一个方程. 附加条件

$$c_1'(x)y_1(x) + c_2'(x)y_2(x) = 0$$

代入(NHL)得到

$$c_1'(x)y_1'(x) + c_2'(x)y_2'(x) = f(x)$$

从而由此两方程解出

$$c_1'(x) = \frac{-y_2(x)f(x)}{W(x)}, \qquad c_2'(x) = \frac{y_1(x)f(x)}{W(x)}$$

例　已知方程 $y'' + y = 0$ 有基本解组为 $\cos x, \sin x$

试求非齐次方程 $y'' + y = \tan x$ 的通解.

补充习题:

求方程 $y'' + y = \sec x$ 的通解

6.2.3 二阶常系数齐次线性方程

二阶方程形式

$$\boxed{y'' + py' + qy = 0}$$

其中 p, q 为常数.

令$y = e^{\lambda x}$得到

$$\lambda^2 + p\lambda + q = 0$$

特征方程，这方程的两个根称为特征根

情况讨论

(1) 特征方程有相异实根 λ_1, λ_2

基本解组：$e^{\lambda_1 x},\ e^{\lambda_2 x}$

(2) 特征方程有相同实根 λ

基本解组：$e^{\lambda x},\ \xrightarrow{\text{Liouville公式}} xe^{\lambda x}$

(3) 特征方程有共轭复根 $\alpha \pm i\beta$

基本解组： $e^{(\alpha+i\beta)x}, e^{(\alpha-i\beta)x}$

$$\longrightarrow e^{\alpha x}\cos\beta x,\quad e^{\alpha x}\sin\beta x$$

二阶齐次常系数微分方程的通解

特征根情况	通解形式
相异实根λ_1, λ_2	$c_1e^{\lambda_1 x}+c_2e^{\lambda_2 x}$
相同实根 λ	$c_1e^{\lambda x}+c_2xe^{\lambda x}$
共轭复根 $\alpha \pm i\beta$	$c_1e^{\alpha x}\cos\beta x+c_2e^{\alpha x}\sin\beta x$

例　求解方程 $y''+5y'+6y=0$

例　求解方程 $y''+4y'+9y=0$

例　求解方程 $y''-4y'+4y=0$

问题与猜测

二阶常系数齐次微分方程基本解组的结论如何推广到n阶常系数齐次微分方程?

例　求解方程 $y'''-3y''+3y'-y=0$

例　求解方程 $y''' - 8y = 0$

补充题 设 $y = \mathrm{e}^{2x} + (x-1)\mathrm{e}^{x}$ 是常系数非齐次线性方程

$y'' + ay' + by = c\mathrm{e}^{x}$ 的一个特解，则（　　　）

(A) $a = -3, b = 2, c = -1$.　**(B)** $a = 3, b = 2, c = -1$.

(C) $a = -3, b = 2, c = 1$.　**(D)** $a = 3, b = 2, c = 1$.

15考研试题

例 设函数$y(x)$满足方程 $y''+2y'+ky=0$, 其中$0<k<1$.

(1) 证明：反常积分 $\int_0^{+\infty} y(x)\mathrm{d}x$ 收敛;

(2) 若$y(0)=1$, $y'(0)=1$, 求 $\int_0^{+\infty} y(x)\mathrm{d}x$ 的值.

16考研试题