Chap 13 —4

含参变量反常积分

定义 设$f(x,u)$在$[a,+\infty)\times[\alpha,\beta]$定义, 若对$\forall u\in[\alpha,\beta]$:

$\int_a^{+\infty} f(x,u)\mathrm{d}x$收敛, 则称之为**含参变量无穷积分**, 记为

$$\varphi(u)=\int_a^{+\infty} f(x,u)\mathrm{d}x, \quad u\in[\alpha,\beta]$$

- **说明** $\int_a^{+\infty} f(x,u)\mathrm{d}x$ 收敛, 即对$\forall u\in[\alpha,\beta]$:

$$\lim_{A\to+\infty}\int_a^{A} f(x,u)\mathrm{d}x=\int_a^{+\infty} f(x,u)\mathrm{d}x$$

或 $\forall\varepsilon>0, \exists X>a, \forall A>X$:

$$\left|\int_a^{A} f(x,u)\mathrm{d}x-\int_a^{+\infty} f(x,u)\mathrm{d}x\right|=\left|\int_A^{+\infty} f(x,u)\mathrm{d}x\right|<\varepsilon$$

13.4.1 一致收敛性

定义 对 $\int_a^{+\infty} f(x,u)\mathrm{d}x$，若

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists X > a,\ \forall A > X,\ \forall u \in [\alpha, \beta],\ 有$$

$$\left| \int_A^{+\infty} f(x,u)\mathrm{d}x \right| < \varepsilon$$

则称 $\int_a^{+\infty} f(x,u)\mathrm{d}x$ 在 $[\alpha, \beta]$ 上一致收敛.

- 一致收敛 $\Rightarrow$ 收敛

定理 $\int_a^{+\infty} f(x,u)\mathrm{d}u$ 在 $[\alpha, \beta]$ 上一致收敛的充要条件是:

$$\lim_{A\to+\infty} \beta(A) = 0$$

其中 $\beta(A) = \sup_{u\in[\alpha,\beta]} \left| \int_A^{+\infty} f(x,u)\mathrm{d}x \right|$

定理(Cauchy准则) $\int_a^{+\infty} f(x,u)\mathrm{d}x$ 在 $[\alpha, \beta]$ 上一致收敛

$$\Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0, \exists X > a, \forall A', A'' > X, \forall u \in [\alpha, \beta]:$$

$$\left| \int_{A'}^{A''} f(x,u)\mathrm{d}x \right| < \varepsilon$$

定理(Weierstrass-判别法) 设存在 $p(x)\geq 0$使得

(1) $\forall x\in[a,+\infty), \forall u\in[\alpha,\beta]: |f(x,u)|\leq p(x)$

(2) $\int_a^{+\infty} p(x)\mathrm{d}x$ 收敛

则 $\int_a^{+\infty} f(x,u)\mathrm{d}x$ 在$[\alpha,\beta]$上一致收敛.

例1 判断 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin ux}{1+x^2}\mathrm{d}x$ **($u\in\mathbf{R}$)**的一致收敛性.

例2 设$\alpha > 0$, 证明:

(1) $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-(\alpha+u^2)x} \sin x \mathrm{d}x$ 关于u在$u \geq 0$上一致收敛;

(2) $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-(\alpha+u^2)x} \sin x \mathrm{d}u$ 关于x 在$x \geq 0$上一致收敛.

例3 证明 $\int_a^{+\infty} u\mathrm{e}^{-ux} \mathrm{d}x$ 在$u \geq 0$上不一致收敛.

定理(A-D判别法)

设 $f(x, u), g(x, u)$满足下列两组条件之一:

则 $\int_a^{+\infty} f(x,u)g(x,u)\mathrm{d}x$ 在$[\alpha, \beta]$上一致收敛.

(Abel) $\forall u \in [\alpha, \beta]$, $g(x, u)$关于x单调, 且一致有界,

$\int_a^{+\infty} f(x,u)\mathrm{d}x$ 关于u在$[\alpha, \beta]$上一致收敛;

(Dirichlet) $\forall u \in [\alpha, \beta]$, $g(x, u)$关于x单调, 且一致趋于0 $(x \to +\infty)$, $\int_a^{A} f(x,u)\mathrm{d}x$ 一致有界.

例4 设$\alpha > 0$, 证明积分

$$\int_0^{+\infty} \frac{x\sin\beta x}{\alpha^2 + x^2}\,\mathrm{d}x$$

在$\beta \geq \beta_0 > 0$上一致收敛.

例5 证明积分 $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-ux}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$ 在$u \geq 0$上一致收敛.

13.4.2 含参反常积分的性质

设 $\varphi(u)=\int_a^{+\infty} f(x,u)\mathrm{d}x, \quad u\in[\alpha,\beta].$

任取一严格递增$\{A_n\}$, 满足$A_0=a$ 且 $A_n\to+\infty(n\to\infty)$

令 $w_n(u)=\int_{A_{n-1}}^{A_n} f(x,u)\mathrm{d}x$, 则有

$$\boxed{\int_a^{+\infty} f(x,u)\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{A_{n-1}}^{A_n} f(x,u)\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty} w_n(u)}$$

引理 设 $\int_a^{+\infty} f(x,u)\mathrm{d}x$ 在$[\alpha,\beta]$上一致收敛, 则 $\sum_{n=1}^{+\infty} w_n(u)$在$[\alpha,\beta]$上一致收敛.

定理(连续性) 设$f(x, u) \in C[a, +\infty) \times [\alpha, \beta]$, 且

$\varphi(u) = \int_a^{+\infty} f(x,u)\mathrm{d}x$ 在$[\alpha, \beta]$上一致收敛, 则$\varphi(u) \in C[\alpha, \beta]$

➢ **积分号下取极限**

$$\boxed{\lim_{u \to u_0} \int_a^{+\infty} f(x,u)\mathrm{d}x = \int_a^{+\infty} f(x,u_0)\mathrm{d}x = \int_a^{+\infty} \lim_{u \to u_0} f(x,u)\mathrm{d}x}$$

定理(交换积分次序) 设$f(x, u) \in C[a, +\infty) \times [\alpha, \beta]$, 且

$\varphi(u) = \int_a^{+\infty} f(x,u)\mathrm{d}x$ 在$[\alpha, \beta]$上一致收敛, 则

$$\boxed{\int_\alpha^\beta \mathrm{d}u \int_a^{+\infty} f(x,u)\mathrm{d}x = \int_a^{+\infty} \mathrm{d}x \int_\alpha^\beta f(x,u)\mathrm{d}u}$$

定理(可导性) 设

(1) $f(x,u), f'_u(x,u) \in C[a,+\infty) \times [\alpha,\beta]$;

(2) $\int_a^{+\infty} f(x,u)\mathrm{d}x$ 在$[\alpha,\beta]$上收敛;

(3) $\int_a^{+\infty} f'_u(x,u)\mathrm{d}x$ 在$[\alpha,\beta]$上一致收敛,

则$\varphi(u) = \int_a^{+\infty} f(x,u)\mathrm{d}x \in C^{(1)}[\alpha,\beta]$, 且

$$\boxed{\varphi'(u) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\int_a^{+\infty} f(x,u)\mathrm{d}x = \int_a^{+\infty} \frac{\partial f(x,u)}{\partial u}\mathrm{d}x}$$

➢ 积分号下求导数

例6 计算 $I=\int_0^{+\infty}\frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}\,dx \quad (0<a<b)$

例7 计算 $I(\beta)=\int_0^{+\infty}e^{-x^2}\cos 2\beta x\,dx$

13.4.3 几个重要的积分

一. Dirichlet积分

$$\boxed{\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}}$$

例8 设 $I(u)=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-ux}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$

证明 (1) $I(u)\in C[0,+\infty)$;

(2) $I'(u)=-\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-ux}\sin x\mathrm{d}x\quad(u>0)$

二. Laplace积分

$$I(\beta)=\int_0^{+\infty}\frac{\cos\beta x}{\alpha^2+x^2}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2\alpha}\mathrm{e}^{-\alpha\beta}\quad(\alpha>0,\beta\geq 0)$$

$$J(\beta)=\int_0^{+\infty}\frac{x\sin\beta x}{\alpha^2+x^2}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\mathrm{e}^{-\alpha\beta}\quad(\alpha>0,\beta>0)$$

三. Fresnel积分

$$\int_0^{+\infty}\sin x^2\mathrm{d}x=\sqrt{\frac{\pi}{8}}=\int_0^{+\infty}\cos x^2\mathrm{d}x$$