第十四周作业参考答案与部分解析

习题 12.1 P269-270

T3. (2) 答案：

余弦级数：

$$\frac{A}{2l}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2A}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2l}\cos\frac{n\pi x}{l}$$

正弦级数：

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2A}{n\pi}\left(1-\cos\frac{n\pi}{2l}\right)\sin\frac{n\pi x}{l}$$

注记：在非 $[-\pi,\pi]$ 上求傅里叶级数时，我们应该用新的内积

$$\langle f,g\rangle := \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$$

在此内积下，$\{\frac{1}{2},\sin\frac{n\pi x}{l},\cos\frac{n\pi x}{l},\cdots\}$ 构成一组标准正交集，故投影系数的计算也应为

$$a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x,\quad b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x.$$

T5. (1)

解 (1) 将 $f(x)$ 偶延拓, 周期 $T=2$, 则 $S(x)$ 为 $f(x)$ 的余弦级数, 从而

$$S\left(\frac{9}{4}\right)=S\left(\frac{1}{4}\right)=f\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{4},$$
$$S\left(-\frac{5}{2}\right)=S\left(\frac{5}{2}\right)=S\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}\left(f\left(\frac{1}{2}+\right)+f\left(\frac{1}{2}-\right)\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right)=\frac{3}{4}.$$

T8. 关键步骤：

$$1-x^2\sim 1-\frac{1}{3}\pi^2+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4}{n^2}\cdot(-1)^{n+1}\cdot\cos nx.$$

(1) 代入 $x=0$ 得

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}=\frac{\pi^2}{12}.$$

(2) 代入 $x=\pi$ 得

$$1-\pi^2=1-\frac{1}{3}\pi^2-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}.$$

习题 12.2 P279

T1.

解 显然 $f(x)$ 是偶函数, 因此其 Fourier 级数为余弦函数.

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^a 1\cdot \mathrm{d}x = \frac{2a}{\pi},$$
$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^a \cos nx\,\mathrm{d}x = \frac{2}{n\pi}\left(\sin nx\Big|_0^a\right) = \frac{2}{n\pi}\sin na,$$
$$\Longrightarrow f(x) \sim \frac{a}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n\pi}\sin na\cos nx = \begin{cases} f(x), & |x| \neq a, \\ \frac{1}{2}, & |x| = a, \end{cases} \quad |x| < \pi.$$

(1) 显然 $f \in L^2[-\pi,\pi]$, 由 Parseval 等式得:

$$\frac{1}{2}\frac{4a^2}{\pi^2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n^2\pi^2}\sin^2 na = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,\mathrm{d}x = \frac{2a}{\pi},$$
$$\Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 na}{n^2} = \frac{a\pi}{2} - \frac{1}{2}a^2,$$

(2)

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos^2 na}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^2} - \frac{\sin^2 na}{n^2}\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 na}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} - \left(\frac{a\pi}{2} - \frac{1}{2}a^2\right).$$

T2.

证明 由 $f \in L^2[-\pi,\pi]$ 及 Bessel 不等式知,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 < M_1, \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n^2 < M_2$$

均收敛, 其中 $M_1, M_2 < +\infty$.

由 Cauchy 不等式知,

$$\left(\sum_{k=1}^{n}\left|\frac{a_k}{k}\right|\right)^2 \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}\right) < M_1\cdot\frac{\pi^2}{6}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*,$$

故 $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{a_n}{n}\right|$ 收敛, 从而 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n}$ 收敛; 同理可证得 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{n}$ 收敛.

T3.

解 显然 $f(x)$ 是奇函数, 因此其 Fourier 级数为正弦级数.

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} 1\cdot\sin nx\,\mathrm{d}x = -\frac{2}{n\pi}\left(\cos nx\Big|_0^{\pi}\right) = \frac{2}{n\pi}(1-(-1)^n),$$
$$\Longrightarrow f(x) \sim \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}(1-(-1)^n)\sin nx = \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)x}{2n-1},$$

显然 $f \in L^2[-\pi,\pi]$, 由 Parseval 等式知,

$$\frac{16}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)\,\mathrm{d}x=2,$$
$$\Longrightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}=\frac{\pi^2}{8}.$$

另一方面, 由 Parseval 等式推论知, 对 $\forall x\in[-\pi,\pi]$, 有

$$\int_0^x f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x\frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}\,\mathrm{d}x,$$
$$\Longrightarrow x=\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}\Big|_0^x\right)=\frac{4}{\pi}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}\right),$$
$$\Longrightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}=\frac{\pi}{4}\left(\frac{\pi}{2}-x\right),\quad 0\leqslant x\leqslant\pi.$$

事实上, 从级数角度, 由 Dirichlet 定理知, Fourier 级数 $\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}$ 在 $(0,\pi)$ 上内闭一致收敛于 $f(x)$, 从而无穷求和与积分次序可交换, 故

$$\int_0^x f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{4}{\pi}\int_0^x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}\,\mathrm{d}x=\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x\frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}\,\mathrm{d}x,$$
$$\Longrightarrow x=\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}\Big|_0^x\right)=\frac{4}{\pi}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}\right),$$
$$\Longrightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}=\frac{\pi}{4}\left(\frac{\pi}{2}-x\right),\quad 0<x<\pi.$$

又端点处有

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}=\frac{\pi^2}{8}$$

也满足上式, 故

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}=\frac{\pi}{4}\left(\frac{\pi}{2}-x\right),\quad 0\leqslant x\leqslant\pi.$$

T5. 答案:

$$\frac{2a}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi x}{l}.$$

习题 12.3 P285

T1.

证明 取

$$f(x)=\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1, & 0<x<\pi,\\ 0, & x=0,\\ -1, & -\pi<x<0,\end{cases}$$

由**习题** 12.2.3的结论知,

$$f(x)=\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)x}{2n-1},\quad -\pi<x<\pi,$$

故

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}=\frac{\pi}{4}f(x)=\frac{\pi}{4},\quad 0<x<\pi.$$

在上式中令 $x=\frac{\pi}{2}$, 得:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}=\frac{\pi}{4}.$$

T2. (1)

$$\frac{\pi}{2}+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}((-1)^n-1)\cos nx.$$

(2)

$$1-\frac{1}{2}\cos x+2\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2-1}\cos nx$$

T4. (1)

提示 在 $\cos ax$ 的 Fourier 展开式中, 令 $x=\pi$ 并记 $a\pi\to x$.

T7. 略.

T8. 提示：作奇延拓即可.

T9.

(1)
提示 由于 $f(x)\in C[-\pi,\pi]$, 从而级数一致收敛于 f, 因此可微, 取 $f'(0)$ 即可.
令 $x=1$.
(2)
提示 运用 Parseval 等式.