

Chap 11 — 7

保守场与无源场

11.7.1 空间曲线积分与路径无关的条件

■ 空间区域的连通性

定义 设 V 为空间区域, 若 V 中的任意闭曲线都可在 V 中连续收缩为一点, 则称 V 为**一维(曲面)单连通**.

若 V 中的任意闭曲面可在 V 中连续收缩为一点, 则称 V 为**二维(空间)单连通**.

定理 设函数 $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$ 在**一维单**

连通区域 V 内有连续偏导数, 则下面四条等价:

(1) 在 V 内的任一条分段光滑闭曲线 L 上

$$\oint_L Pdx + Qdy + Rdz = 0$$

(2) 在 V 内曲线积分 $\int_L Pdx + Qdy + Rdz$ 与路径无关

(3) $Pdx + Qdy + Rdz$ 是某三元函数 φ 的**全微分**, 即

$$d\varphi = Pdx + Qdy + Rdz$$

(4) 在 V 内恒成立 $\frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z}$, $\frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}$, $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$

■ 保守场与势函数

定义 设 $\mathbf{v} = (P, Q, R)$ 是连通区域 V 内光滑向量场, 若

(1) 在 V 内曲线积分 $\int_L Pdx + Qdy + Rdz$ 与路径无关

则称 \mathbf{v} 为 V 中的**保守场**.

(2) $d\varphi = Pdx + Qdy + Rdz$, 则称 φ 是 \mathbf{v} 的**势函数**, \mathbf{v} 是 φ 的**梯度场**, 即 $\mathbf{v} = \nabla \varphi$.

(3) 在 V 内恒有 $\text{rot } \mathbf{v} = \mathbf{0}$, 则称 \mathbf{v} 为 V 中的**无旋场**.

定理 设 $\mathbf{v} = (P, Q, R)$ 是一维单连通区域 V 内的光滑向量场, 则下面三条等价:

- (1) \mathbf{v} 为 V 中的保守场;
- (2) \mathbf{v} 为 V 中有势场(存在势函数);
- (3) \mathbf{v} 为 V 中无旋场.

推论 设 \mathbf{v} 为 V 中的保守场, φ 为 \mathbf{v} 的势函数, 则有

$$\int_A^B \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} = \varphi \Big|_A^B = \varphi(B) - \varphi(A)$$

例1 证明向量场

$$\boldsymbol{v} = (x^2 - yz)\boldsymbol{i} + (y^2 - zx)\boldsymbol{j} + (z^2 - xy)\boldsymbol{k}$$

为有势场, 并求出其一个势函数.

11.7.2 向量势与无源场

定义 设 \mathbf{v} 为光滑向量场, $V \subset \mathbf{R}^3$. 若存在向量场 $\boldsymbol{\alpha}$ 使得 $\mathbf{v} = \text{rot } \boldsymbol{\alpha} = \nabla \times \boldsymbol{\alpha}$, 则称 $\boldsymbol{\alpha}$ 为 \mathbf{v} 的**向量势**.

例2 设向量场 $\boldsymbol{\alpha} = x^2\mathbf{i} - zx\mathbf{j} + xy^2\mathbf{k}$, 令 $\mathbf{v} = \text{rot } \boldsymbol{\alpha}$, 求 \mathbf{v} 及其散度 $\text{div } \mathbf{v}$.

定义 设 \mathbf{v} 为向量场, 若其散度 $\text{div } \mathbf{v} = \nabla \cdot \mathbf{v} = 0$, 则称 \mathbf{v} 为**无源场**.

定理 若 ν 为光滑向量场, 则 ν **存在向量势**的充要条件是 ν 为**无源场**.

命题 若 α, β 均为光滑向量场 ν 的**向量势**, 则 α 与 β 至多相差一个梯度场.