Chap 12 — 3

收敛性定理

12.3.1 Dirichlet收敛定理

定义 设$f:[a, b]\to\mathbf{R}$, 若可将$[a, b]$分为有限个子区间, 使f在每个开子区间内部连续可微, 端点有单侧极限, 及拟单侧导数, 则称f 在$[a, b]$上分段可微.

定理 设f以2π为周期, 在$[-\pi, \pi]$上分段可微, 则其F氏级数收敛, 且

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)=\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$$

证明 记

$$S(x)=\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$$

f 的F氏级数的部分和函数

$$S_n(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)$$

称为f 的n阶**Fourier多项式**. 下面证明:

$$\lim_{n\to\infty}S_n(x)=S(x)$$

第一步

Dirichlet积分

$$S_n(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x+u)\frac{\sin\frac{2n+1}{2}u}{2\sin\frac{u}{2}}\mathrm{d}u$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}[f(x+u)+f(x-u)]\frac{\sin\frac{2n+1}{2}u}{2\sin\frac{u}{2}}\mathrm{d}u$$

$$\frac{\sin\frac{2n+1}{2}u}{2\sin\frac{u}{2}} \overset{\text{def}}{=} D_n(u)$$

Dirichlet积分核

证(续) 一. 由 $a_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\cos kt\,dt$, $b_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\sin kt\,dt$

则 $$S_n(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\,dt+\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\Big[\overset{\cos k(t-x)}{\boxed{\cos kt\cos kx+\sin kt\sin kx}}\Big]dt$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\Big[\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos k\underbrace{(t-x)}_{u}\Big]dt=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\cdot\frac{\sin(n+\frac{1}{2})(t-x)}{2\sin\frac{t-x}{2}}dt$$

$$\xlongequal[t=x+u]{u=t-x}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi-x}^{\pi-x}f(x+u)\cdot\frac{\sin\frac{2n+1}{2}u}{2\sin\frac{u}{2}}du=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x+u)\cdot\frac{\sin\frac{2n+1}{2}u}{2\sin\frac{u}{2}}du$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(\int_{0}^{\pi}+\int_{-\pi}^{0}\right)f(x+u)D_n(u)\,du=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\big[f(x+u)+f(x-u)\big]D_n(u)\,du$$

其中 $$\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos ku=\frac{1}{2}+\frac{1}{2\sin\frac{u}{2}}\sum_{k=1}^{n}2\cos ku\sin\frac{u}{2}$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2\sin\frac{u}{2}}\sum_{k=1}^{n}\Big[\sin(k+\tfrac{1}{2})u-\sin(k-\tfrac{1}{2})u\Big]$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2\sin\frac{u}{2}}\Big(\sin(n+\tfrac{1}{2})u-\sin\frac{u}{2}\Big)=\frac{\sin(n+\frac{1}{2})u}{2\sin\frac{u}{2}}$$

$$\int_{-\pi}^{0}f(x+u)D_n(u)\,du\xlongequal{u=-t}\int_{\pi}^{0}f(x-t)\cdot D_n(t)\cdot(-dt)$$

$$=\int_{0}^{\pi}f(x-u)D_n(u)\,du$$

简单事实

$$\boxed{\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} D_n(u)\mathrm{d}u = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left(\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos ku\right)\mathrm{d}u = 1}$$

第二步

$S(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} 2S(x) D_n(u) du$ (拼以合法)

$$S_n(x) - S(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}[f(x+u)+f(x-u)-2S(x)]D_n(u)\mathrm{d}u$$

$$\stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\varphi(u,x)\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)u}{2\sin\frac{1}{2}u}\mathrm{d}u$$

二. 由 $S(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}2S(x)D_n(u)\,du$ (积分合法)

有 $S_n(x)-S(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}[f(x+u)+f(x-u)-2S(x)]D_n(u)\,du$.

⊛ Riemann引理 设g在$[a,b]$可积且绝对可积，则

$$\lim_{p\to+\infty}\int_a^b g(u)\sin pu\,du=0$$

三. $\int_0^{\pi}g(u)\sin(n+\frac{1}{2})u\,du=\int_0^{\pi}g(u)\left(\cos\frac{u}{2}\cdot\sin nu+\sin\frac{u}{2}\cos nu\right)du$.

令 $\psi(u)=\begin{cases}g(u), & 0\le u\le\pi\\ 0, & -\pi\le u<0\end{cases}$ 则

由于 $\int_{-\pi}^{\pi}\psi(u)\cos\frac{u}{2}\sin nu\,du=\int_0^{\pi}g(u)\cos\frac{u}{2}\sin nu\,du$

及 $\psi(u)\cos\frac{u}{2}$ 在$[-\pi,\pi]$上可积且平方可积，故其F氏系数趋于0.

即 $\lim_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi}\psi(u)\cos\frac{u}{2}\sin nu\,du=0$.

类似 …… $\sin\frac{u}{2}\cos nu$ ——， 即证

⊗ 已证：$S_n(x)-S(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{f(x+u)+f(x-u)-2S(x)}{2\sin\frac{u}{2}}\sin(n+\frac{1}{2})u\,du$.

四. 首先 $f(x+u)+f(x-u)-2S(x)$ 在$[0,\pi]$可积且平方可积.

当$u>0$时, $g(u)$可积且平方可积. 又

$$\lim_{u\to0^+}g(u)=\lim_{u\to0^+}\left[\frac{f(x+u)-f(x+0)}{2\sin\frac{u}{2}}+\frac{f(x-u)-f(x-0)}{2\sin\frac{u}{2}}\right]$$

$$=\lim_{u\to0^+}\left[\frac{f(x+u)-f(x+0)}{u}-\frac{f(x-u)-f(x-0)}{-u}\right]=(\text{拟右导}-\text{拟左导})$$ 存在.

从而 $g(u)$ 在$[0,\pi]$可积且平方可积.

Co. 证. 设f'的F氏系数为a_n',b_n', 则

$$a_n'=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f'(x)\cos nx\,dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\,d f(x)$$

$$=\frac{1}{\pi}f(x)\cos nx\Big|_{-\pi}^{\pi}+\frac{n}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,dx=nb_n.$$

$$b_n'=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f'(x)\sin nx\,dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\,d f(x)$$

$$=\frac{1}{\pi}f(x)\sin nx\Big|_{-\pi}^{\pi}-\frac{n}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx=-na_n$$

由于 $|a_n\cos nx+b_n\sin nx|\le|a_n|+|b_n|=\frac{|a_n'|+|b_n'|}{n}$

$$\le\frac{1}{2}\left(a_n'^2+\frac{1}{n^2}\right)+\frac{1}{2}\left(b_n'^2+\frac{1}{n^2}\right)=\frac{1}{2}\left(a_n'^2+b_n'^2\right)+\frac{1}{n^2}$$

且 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n'^2+b_n'^2)$收敛, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$收敛, 从而据W-判

f之F氏级数在$[-\pi,\pi]$一致收敛(于$f(x)$).

第三步 (Riemann) 设 g 在[0, π]上可积且平方可积, 则

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^{\pi} g(u)\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)u\mathrm{d}u = 0$$

第四步

$$g(u) = \frac{\varphi(u,x)}{2\sin\frac{u}{2}} = \frac{f(x+u)+f(x-u)-2S(x)}{2\sin\frac{u}{2}}$$

在[0, π]上可积且平方可积.

推论 设f连续并满足定理条件, 又f'可积且平方可积,

则其F氏级数在R上一致收敛, 且

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)=f(x)$$

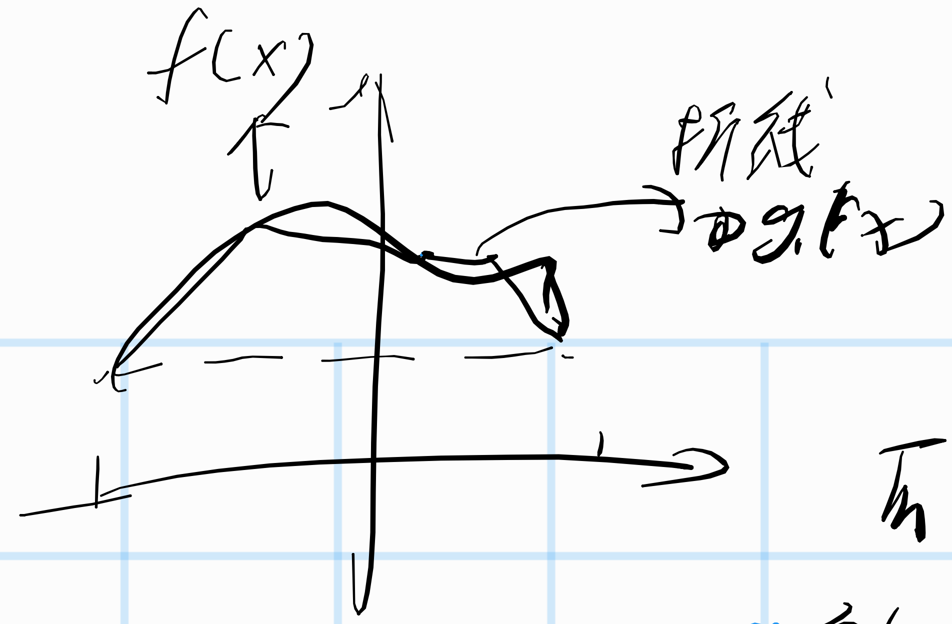
12.3.2 平方平均收敛定理

定理 设 $f\in R[-\pi,\pi]$, 则 $\{S_n(x)\}$ 平方平均收敛于 f, 即

$$\lim_{n\to\infty}\|f-S_n\|=0$$

仅还需要可积,

分析：修改成以2π为周期函数



不妨 $f(-\pi)=f(\pi)$

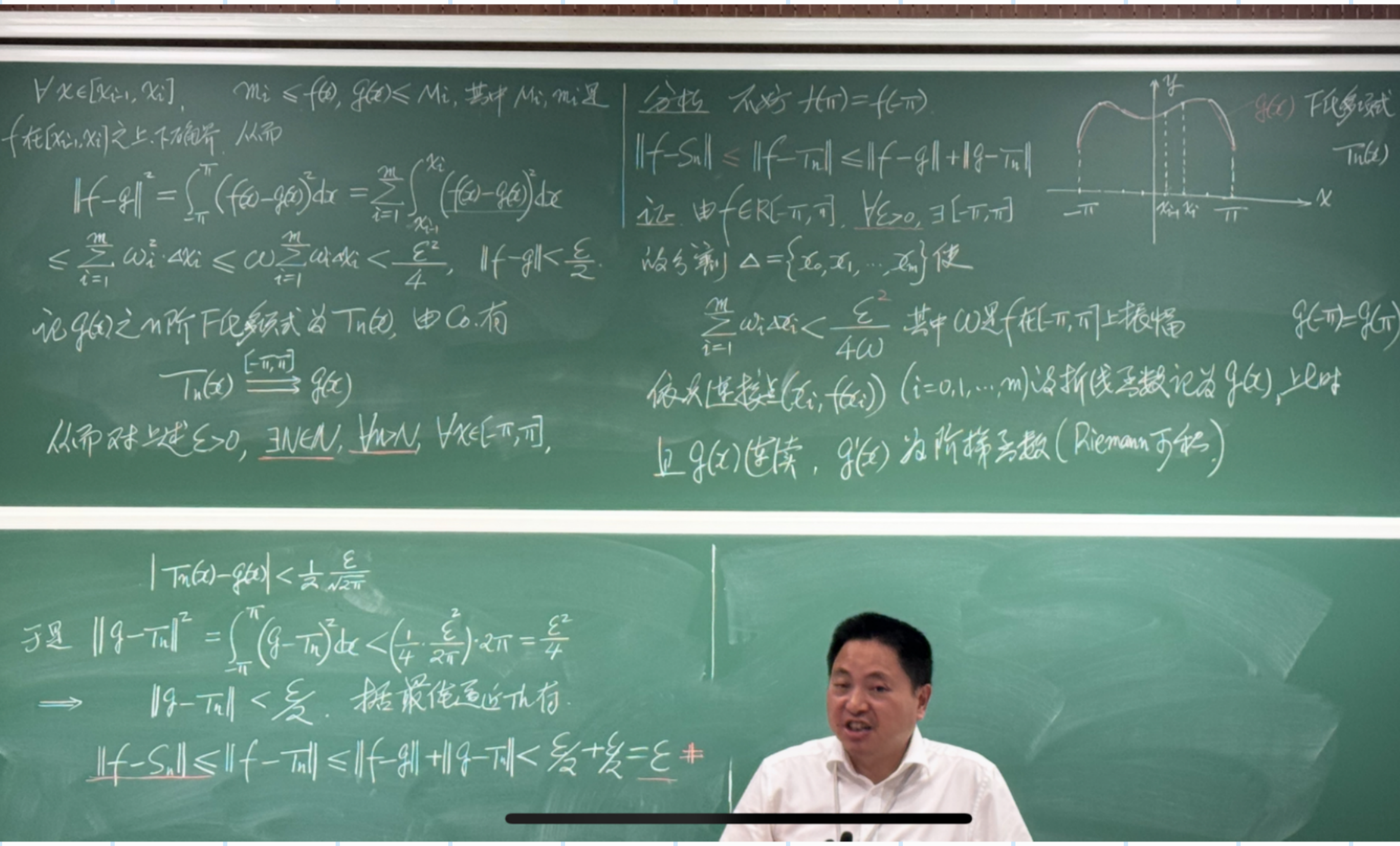
而：g 的 F 多项式

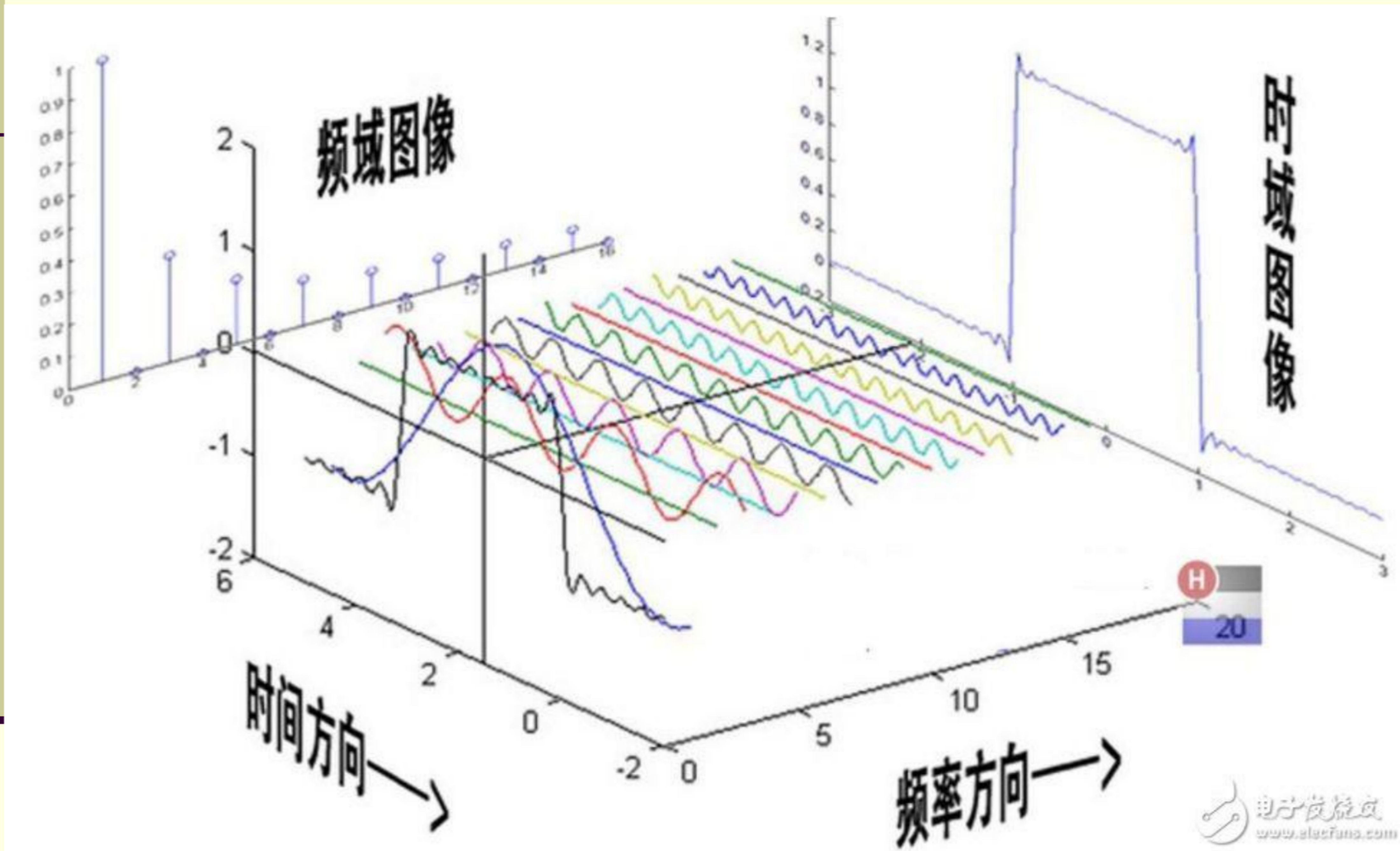
$\|f-S_n\| \le \|f-T_n\| \le \|f-g\| + \|g-T_n\|$

Bessel不等式

$\forall \varepsilon>0$，$\exists[-\pi,\pi]$ 的分割 $\Delta=\{x_0,x_1,\dots,x_m\}$ 使

$\sum_{i=1}^{m} \omega_i \Delta x_i < \frac{\varepsilon^2}{4\omega}$ 其中 ω 是 f 在 $[-\pi,\pi]$ 上振幅.





频域图像
时域图像
时间方向—>
频率方向—>