Chap 10－3

三重积分

10.3.1 三重积分的概念和性质

一. 定义 设$f(x, y, z)$在**可求积**有界闭域$\Omega \subset [a, b] \times [c, d] \times [e, h](:=V)$定义. 令$f(x, y, z) = 0, (x, y, z) \in V \setminus \Omega$. 若对$V$的$\forall$长方体分割$V_{ijk}$及$\forall(\xi_i, \eta_j, \zeta_k) \in V_{ijk}$, 总有

$$\lim_{|T|\to 0}\sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_i, \eta_j, \zeta_k)\Delta V_{ijk} = I,$$

其中 $\Delta V_{ijk} = \mathrm{Vol}(V_{ijk}),\quad |T| = \max\limits_{1\le i\le l, 1\le j\le m, 1\le k\le n} \mathrm{diam}\{V_{ijk}\}$,

则称$f(x, y, z)$在Ω上**可积**, I称为f在Ω上的**三重积分**,

记为 $\iiint\limits_{\Omega} f(x, y, z)\mathrm{d}V$, $\mathrm{d}V$称为**体积元素**.

物理意义 设$\rho(x, y, z)$是占有空间区域Ω的物体

的体密度函数, 则该物体的质量

$$m = \iiint_{\Omega} \rho(x, y, z) \mathrm{d}V.$$

二. 性质 类似二重积分, 有线性、可加性、

单调性和中值定理, 还有

$$\iiint_{\Omega} 1 \mathrm{d}V = V_{\Omega} \quad (\mathrm{Vol}(\Omega))$$

10.3.2 三重积分的累次积分

在直角坐标下, 由于$\mathrm{d}V=\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, 因此有

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}V=\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

定理 设$f(x,y,z)$在$[a,b]\times[c,d]\times[e,h]$可积.

(1) 若$\forall(x,y)\in[a,b]\times[c,d]$, 存在**首次积分**

$$\mu(x,y)=\int_e^h f(x,y,z)\mathrm{d}z,\ 则$$

$$\boxed{\iiint\limits_{[a,b]\times[c,d]\times[e,h]} f(x,y,z)\mathrm{d}V=\iint\limits_{[a,b]\times[c,d]}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\int_e^h f(x,y,z)\mathrm{d}z}$$

(2) 若$\forall z\in [e, h]$, 存在二重积分

$$\mu(z)=\iint\limits_{[a,b]\times[c,d]} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,\ \text{则}$$

$$\boxed{\iiint\limits_{[a,b]\times[c,d]\times[e,h]} f(x,y,z)\mathrm{d}V=\int_e^h \mathrm{d}z\iint\limits_{[a,b]\times[c,d]} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y}$$

例1 计算积分 $\iiint\limits_{[0,1]^3} x^2 y\mathrm{e}^{xyz}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$

$$\boxed{\mathrm{e}-\frac{5}{2}}$$

一. 柱线法(坐标面投影法)

设Ω是以曲面$z=z_1(x,y)$为底, 曲面$z=z_2(x,y)$为顶, 而侧面是母线平行z轴的柱面所围成区域. 又Ω在xy上的投影区域为D, 则Ω可表示为

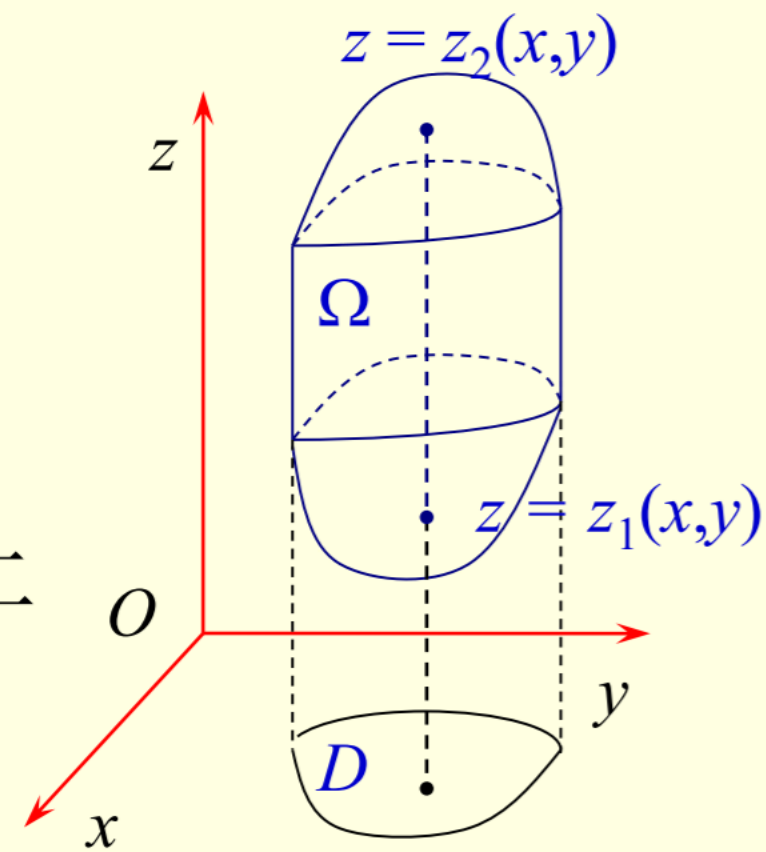
xy型正则区域

$$\left\{(x,y,z)\mid z_1(x,y)\le z\le z_2(x,y),(x,y)\in D\right\}$$

从质量角度求三重积分, 将$f(x, y, z)$视为密度函

数, 则$\forall(x, y)\in D$,

$$\mu(x, y)=\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x, y, z)\mathrm{d}z$$



是Ω内由$z_1(x, y)$到$z_2(x, y)$的线段上

所分布的质量, 故物体总质量为

$$\iint_D \mu(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_D\left(\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x, y, z)\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

从而(设 $D=\{(x,y)\mid a\le x\le b, y_1(x)\le y\le y_2(x)\}$)

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iint_{D}\left(\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$\overset{\text{def}}{=}\iint_{D}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\mathrm{d}z$$

$$=\int_a^b \mathrm{d}x\int_{y_1(x)}^{y_2(x)}\mathrm{d}y\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\mathrm{d}z$$

先z再y后x
三次积分

例2 计算积分$\iiint_{\Omega} y\cos(x+z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中$\Omega$由抛物柱面 $y=\sqrt{x}$ 及平面$y=0, z=0$ 和 $x+z=\dfrac{\pi}{2}$ 围成.

$$\boxed{\frac{\pi^2}{16}-\frac{1}{2}}$$

二. 截面法(坐标轴投影法)

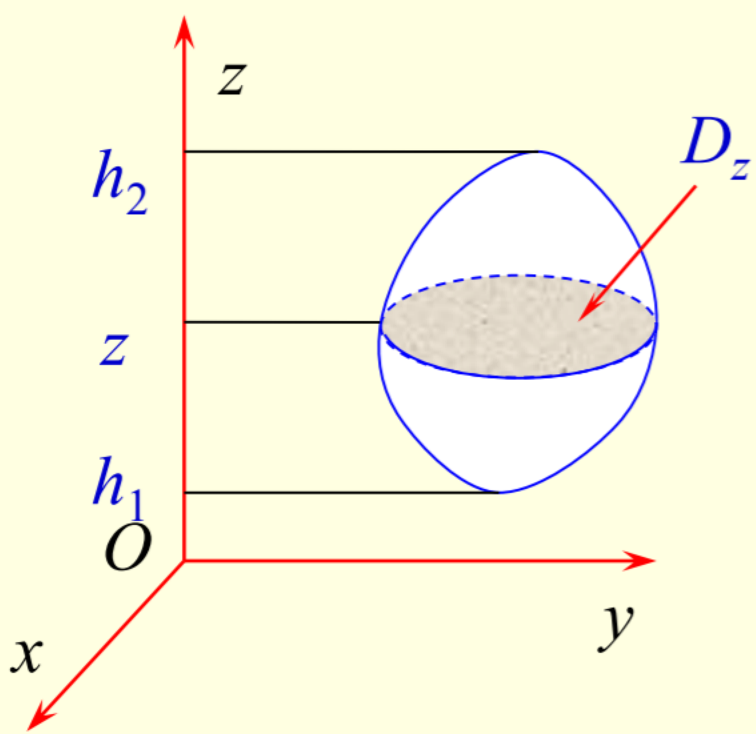
设区域Ω在z轴上投影区间为$[h_1, h_2]$, 即Ω介于平面$z=h_1$与$z=h_2$之间, 过z处且垂直z轴的平面截Ω得截面区域D_z, 则Ω可表示为 $\boxed{z型空间区域}$

$$\Omega=\{(x,y,z)\,|\,h_1\le z\le h_2,(x,y)\in D_z\}$$

从质量角度考虑, 对$z\in[h_1, h_2]$,

$$\mu(z)=\iint_{D_z} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

是物体在截面D_z上分布的质量,



所以物体总质量为

$$\int_{h_1}^{h_2} \mu(z)\mathrm{d}z = \int_{h_1}^{h_2} \left(\iint_{D_z} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}z$$

从而

$$\boxed{\begin{aligned} \iiint_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z &= \int_{h_1}^{h_2} \left(\iint_{D_z} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}z \\ &\stackrel{\text{def}}{=} \int_{h_1}^{h_2} \mathrm{d}z \iint_{D_z} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \end{aligned}}$$

$$\iiint_\Omega x\,dV = \iint_{D_{yz}} dy\,dz \int_{-\sqrt{z-y^2}}^{\sqrt{z-y^2}} x\,dx = 0$$

若 Ω 关于x对称

$\iiint_\Omega f\,dV = \begin{cases} 0 & 奇 \\ 2\iiint_{\Omega_半} dV & 关于x偶 \end{cases}$

例3 计算 $I=\iiint\limits_\Omega (x+z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, 其中Ω由旋转抛物面 $z=x^2+y^2$ 与平面 $z=2$ 围成. (注意对称性) $\boxed{4\pi}$

例4 设物体位于 $\Omega: z\ge\sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{3}},\ x^2+y^2+(z-2)^2\le 4$, 其密度为$|z|$, 求此物体的质量. $\boxed{21\pi}$

10.3.3 三重积分的换元

一. 变量代换

设变换 $T:\begin{cases} x = x(u,v,w) \\ y = y(u,v,w) \\ z = z(u,v,w) \end{cases}$ 有连续偏导数, 且满足

$$J = \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} = \begin{vmatrix} x_u & x_v & x_w \\ y_u & y_v & y_w \\ z_u & z_v & z_w \end{vmatrix} \neq 0,$$ 又$f(x,y,z)\in C(\Omega)$, 则

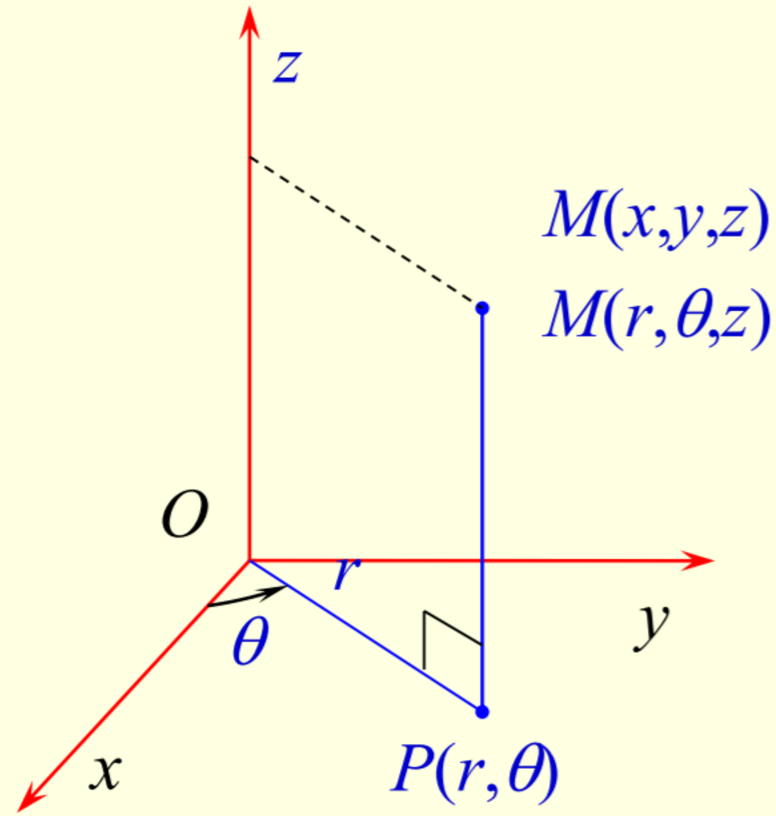
$$\boxed{\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iiint_{\Omega'} f(x(u,v,w),y(u,v,w),z(u,v,w))\,|J|\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w.}$$

其中T将Ω'变为Ω.

二. 柱面坐标系

此坐标系实乃x,y坐标转变为极坐标, 其变换公式为

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = z \end{cases}$$



由 $\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,z)} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & r\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r,$

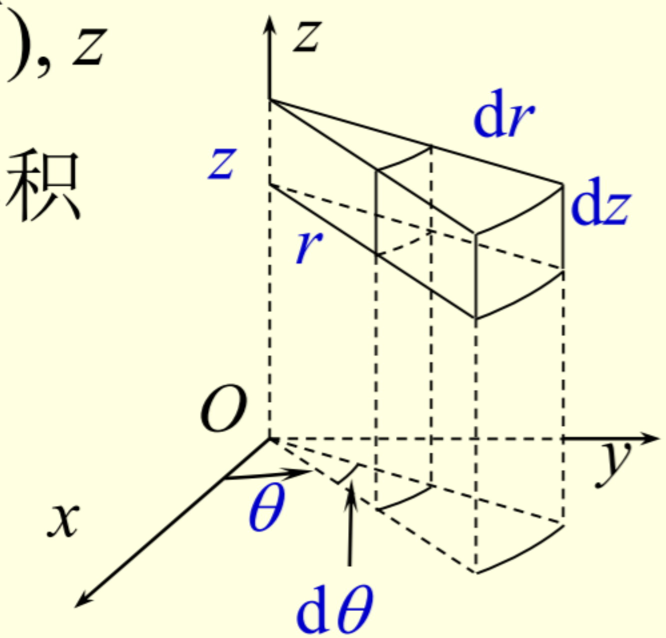
得到柱面坐标积分公式

$$\boxed{\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}V = \iiint\limits_{\Omega'} f(r\cos\theta, r\sin\theta, z) r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z}$$

其中Ω'是Ω在柱面坐标系下的表示形式.

体积微元几何意义

用$r =$ 常数(圆柱面), $\theta =$ 常数(半平面), $z =$ 常数(平面)的曲面分割Ω, 小区域的体积近似等于长方体的体积, 故为$r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z$



注意 在具体计算时, 通常用柱线法或截面法得到D(或D_z)的二重积分, 再转化为极坐标.

例5 计算 $I=\iiint\limits_{\Omega}(x+z)\mathrm{d}V$, 其中Ω是空间域

$z\geq\sqrt{x^2+y^2}$， $z\leq\sqrt{1-(x^2+y^2)}$.

$\boxed{\dfrac{\pi}{8}}$

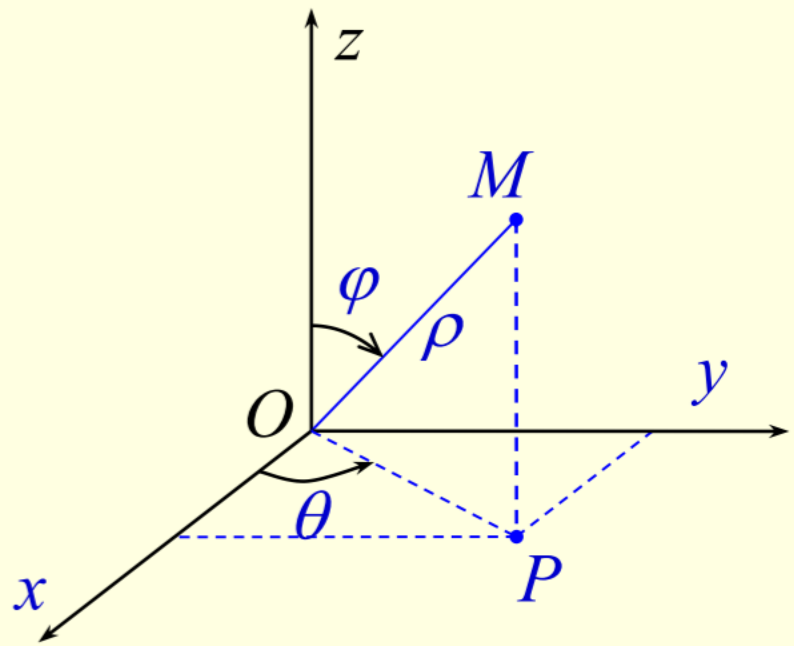
例6 计算 $I=\iiint\limits_{\Omega}(x+y)^2\mathrm{d}V$, 其中Ω是由曲线 $\begin{cases}y^2=2z\\x=0\end{cases}$

绕z轴旋转得到的曲面与平面$z=2$, $z=8$所围成的区域.

$\boxed{336\pi}$

三. 球面坐标系

设$M(x,y,z)$是空间一点, 引进球面坐标(ρ,φ,θ)



$$\rho=|\overrightarrow{OM}|\in[0,+\infty)$$

$$\varphi=(\overrightarrow{OM},Oz)\in[0,\pi]$$

$$\theta:\overrightarrow{OP}\text{ 对}Ox\text{轴的倾角}\in[0,2\pi]$$

(或 $[-\pi,\pi]$)

坐标变换关系式

$$\boxed{\begin{cases}x=\rho\sin\varphi\cos\theta\\ y=\rho\sin\varphi\sin\theta\\ z=\rho\cos\varphi\end{cases}}$$

由于Jacobi行列式

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\varphi,\theta)}=\begin{vmatrix}\sin\varphi\cos\theta & \rho\cos\varphi\cos\theta & -\rho\sin\varphi\sin\theta\\ \sin\varphi\sin\theta & \rho\cos\varphi\sin\theta & \rho\sin\varphi\cos\theta\\ \cos\varphi & -\rho\sin\varphi & 0\end{vmatrix}=\rho^2\sin\varphi$$

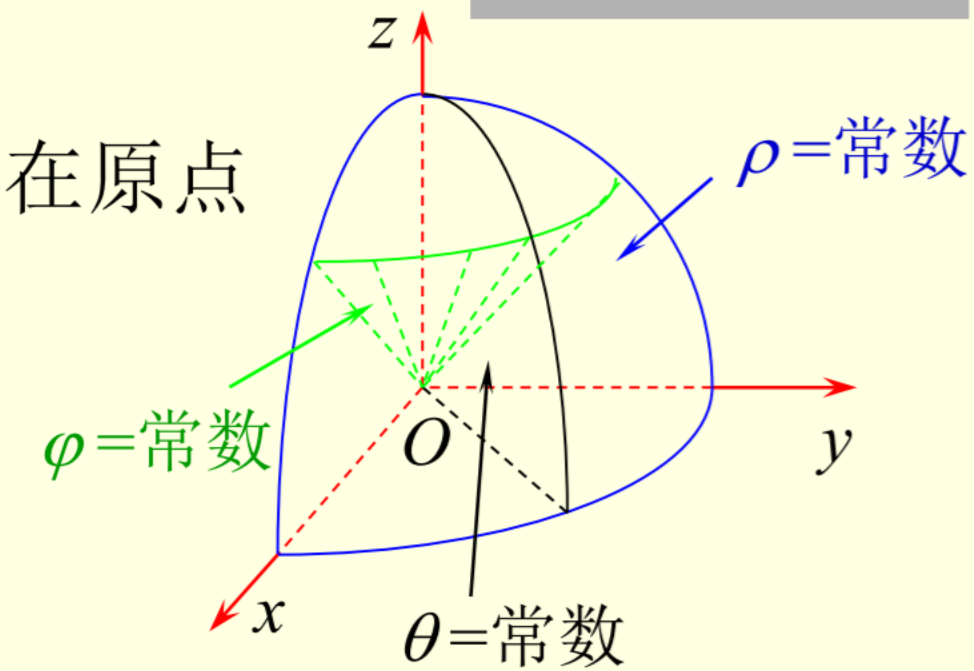
导出

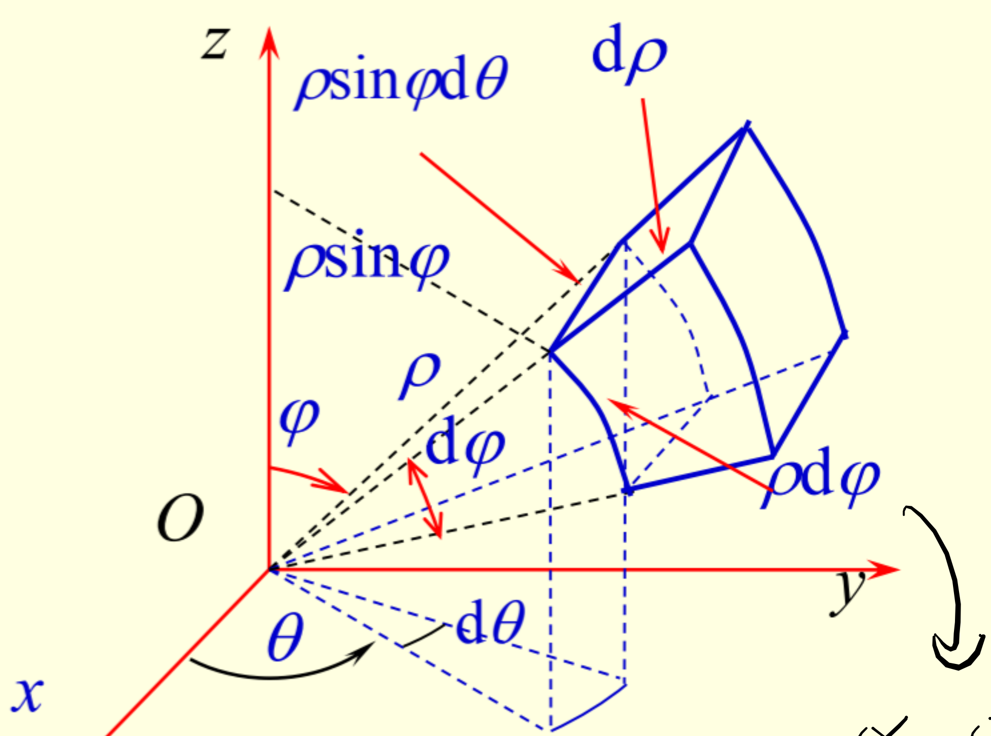
$$\boxed{\begin{aligned}&\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}V\\ =&\iiint\limits_{\Omega'} f(\rho\sin\varphi\cos\theta,\rho\sin\varphi\sin\theta,\rho\cos\varphi)\rho^2\sin\varphi\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta\end{aligned}}$$

其中Ω'是Ω在球面坐标系下的表示形式.

◆ 使用球面坐标时

ρ=常数(球面)　　球心
φ=常数(半圆锥面)顶点　　在原点
θ=常数(半平面) ——过z轴





投影

长×宽×高

◆ 体积微元几何意义

用上面三类曲面分割Ω, 所得小区域近似视为长方体, 故体积

$$\boxed{\mathrm{d}V = \rho^2 \sin\varphi \,\mathrm{d}\rho\, \mathrm{d}\varphi\, \mathrm{d}\theta}$$

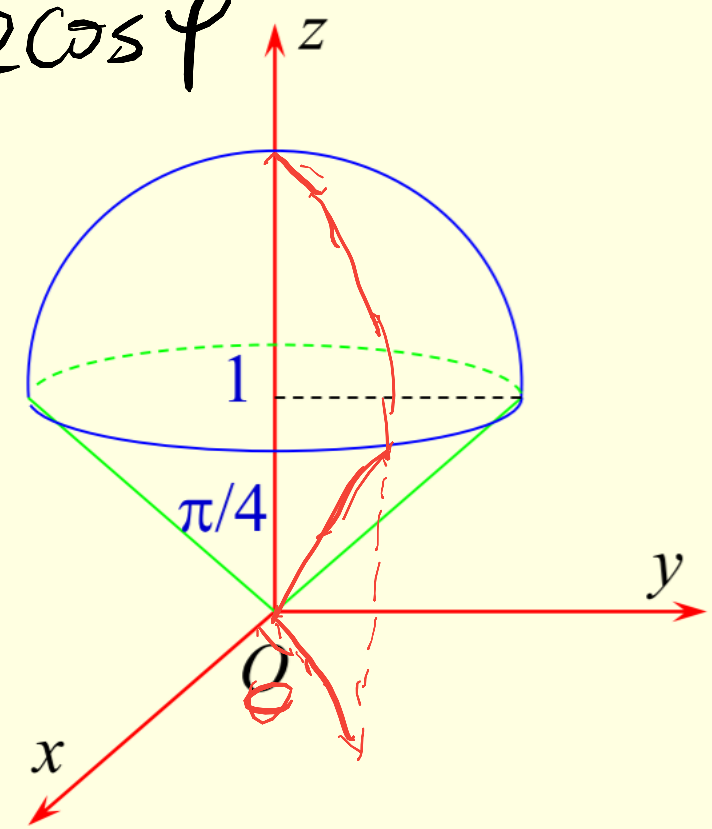
● 积分区域边界曲面方程或被积函数含$x^2+y^2+z^2$，

可考虑用球面坐标 $\rho = 2\cos\varphi$

例7 计算 $I=\iiint\limits_{\Omega}\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,\mathrm{d}V$，其中

Ω是由球面 $x^2+y^2+z^2=2z$ 与锥面 $\varphi=\frac{\pi}{4}$

$z=\sqrt{x^2+y^2}$ 围成含z轴部分区域.



$$\boxed{\frac{(8-\sqrt{2})\pi}{5}}$$

固定θ：

φ：$[0,\frac{\pi}{4}]$

ρ：$[0, 2\cos\varphi]$

例8 求立体Ω：$\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{z}{c}\right)^{\frac{2}{3}}\le 1$ 的体积. $\boxed{\frac{4}{35}\pi abc}$

故

eg7. $I=\iiint\limits_{\Omega'} \rho\cdot\rho^2\sin\varphi \, d\rho \, d\varphi \, d\theta$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin\varphi \, d\varphi \int_0^{2\cos\varphi} \rho^3 \, d\rho$$

$$= 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin\varphi \, d\varphi \, \frac{4\cos^4\varphi}{4}$$

$$= 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin\varphi \cos^4\varphi \, d\varphi$$

eg8. $V=\iiint\limits_{\Omega} 1 \, dV$

$x=au^2 \quad y=bv^2 \quad z=cw^2$

$\Omega' \quad u^2+v^2+w^2 \le 1$

$$J=\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} = abc\begin{vmatrix} 3u^2 & 0 & 0 \\ 0 & 3v^2 & 0 \\ 0 & 0 & 3w^2 \end{vmatrix} = 27abc\,u^2v^2w^2$$

$$V=\iiint\limits_{\Omega'} 27abc \, u^2v^2w^2 \, du \, dv \, dw$$

$$V=27abc\iiint\limits_{\Omega'} (\rho\sin\varphi\cos\theta)^2(\rho\sin\varphi\sin\theta)^2(\rho\cos\varphi)^2\rho^2\sin\varphi \, d\rho \, d\varphi \, d\theta$$

$\theta \int_0^{2\pi} \quad \varphi \int_0^{\pi} \quad \rho \int_0^1$

$$= \cdots = \frac{4}{35}\pi abc$$

例9 函数 $f(u)$ 在 $U(0)$ 可导, 且 $f(0)=0$, 求极限

$$\lim_{t\to 0^+}\frac{1}{t^4}\iiint_{\Omega_t} f(\sqrt{x^2+y^2+z^2})\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

其中 Ω_t 是 $x^2+y^2+z^2\le t^2$.

$$\boxed{\pi f'(0)}$$

例10 求位于 Ω: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}\le 1$, 而密度函数为

$\mu=1+z^2$ 的物体的质量.

$$\boxed{\frac{4\pi abc}{3}+\frac{4\pi abc^3}{15}}$$

10.3.4 重积分的物理应用

一. 质心 空间质点$m_i(x_i, y_i, z_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, 其质心

$$x_0 = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i m_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i} \qquad y_0 = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i m_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i} \qquad z_0 = \frac{\sum_{i=1}^{n} z_i m_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}$$

物体Ω 可分成n小块V_i, 其质量$\rho(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta V_i$, **质心**为

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \xi_i \rho(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta V_i}{\sum_{i=1}^{n} \rho(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta V_i} \to x_G = \frac{\iiint_{\Omega} x\rho(x, y, z)\mathrm{d}V}{\iiint_{\Omega} \rho(x, y, z)\mathrm{d}V}$$

类似可得y_G, z_G. 当$\rho = 1$时, 得其**形心**坐标

$$x_G = \frac{1}{V(\Omega)}\iiint_\Omega x\,\mathrm{d}V$$

y_G, z_G 可类似得到, 其中$V(\Omega)$表示物体的体积.

想一想 面密度为$\mu(x, y)$的薄板D的**质心**(**形心**)?

例11 设球体 $x^2 + y^2 + z^2 \le 2az$ 中任一点的密度与该点到原点的距离成正比, 求此物体的质心.

$$\boxed{\left(0, 0, \frac{8}{7}a\right)}$$

二. 转动惯量

把物体Ω视为位于(ξ_i, η_i, ζ_i), 质量为$\rho(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta V_i$的质点系$V_i (i = 1, 2, \ldots, n)$, 该质点系对$x$轴**转动惯量**

$$\sum_{i=1}^{n}(\eta_i^2 + \zeta_i^2)\rho(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta V_i$$

$$\downarrow$$

$$I_x \overset{\text{def}}{=} \iiint_\Omega (y^2 + z^2)\rho(x, y, z)\mathrm{d}V$$

类似可得对y轴和z轴, 以及对原点O的转动惯量

$$I_O = \iiint_\Omega (x^2 + y^2 + z^2)\rho(x, y, z)\mathrm{d}V$$

想一想 面密度为$\mu(x, y)$的薄板D的**转动惯量**?

例12 求底半径为R, 高为l的均匀圆柱体对其轴线的转动惯量.

$$\boxed{\frac{1}{2}MR^2}$$

例13 求半径为R, 质量为M的均匀球体绕其直径的转动惯量.

$$\boxed{\frac{2}{5}MR^2}$$

Chap 10－4

n重积分

想一想 n元函数$f(\boldsymbol{x})$在n 维立体上重积分的定义?

定理 设f 在$\Omega=[a_1, b_1]\times[a_2, b_2]\times\cdots\times[a_n, b_n]$上连续, 则

$$\int_{\Omega} f(x_1, x_2, \cdots, x_n)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n$$

$$=\int_{a_1}^{b_1}\mathrm{d}x_1\int_{[a_2,b_2]\times\cdots\times[a_n,b_n]} f(x_1, x_2, \cdots, x_n)\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n$$

$$=\int_{[a_1,b_1]\times\cdots\times[a_{n-1},b_{n-1}]}\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_{n-1}\int_{a_n}^{b_n} f(x_1, x_2, \cdots, x_n)\mathrm{d}x_n$$

例1 求$\mathbf{R}^n$中的几何体(n 维单纯形)

$$T_n = \left\{(x_1, x_2, \cdots, x_n) \middle| x_1 + x_2 + \cdots + x_n \le h, x_i \ge 0\,(i = 1, 2, \cdots, n)\right\}$$

的体积V_n.

练习 设$\Omega = [0,\ 1] \times [0,\ 1] \times \cdots \times [0,\ 1] \subset \mathbf{R}^n$，求

$$(1) \int_{\Omega} (x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2)\mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2 \cdots \mathrm{d}x_n$$

$$(2) \int_{\Omega} (x_1 + x_2 + \cdots + x_n)^2 \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2 \cdots \mathrm{d}x_n$$

eg1: $V_3 = \iiint_{T_3} 1\,dx_1dx_2dx_3 = \int_0^h dx_1 \iint_{x_2+x_3\le h-x_1} 1\,dx_2dx_3$

$$= \int_0^h \frac{(h-x_1)^2}{2!}dx_1 = \frac{-(h-x_1)^3}{3!}\Big|_0^h = \frac{h^3}{3!}$$

下证: 设 $V_{n-1} = \frac{h^{n-1}}{(n-1)!}$ 则

$$V_n = \int_{T_n} 1\,dx_1\cdots dx_n = \int_0^h dx_1 \int_{\substack{x_2+x_3+\cdots+x_n\\ \le h-x_1}} 1\,dx_2dx_3\cdots dx_n$$

$$= \int_0^h \frac{(h-x_1)^{n-1}}{(n-1)!}dx_1 = -\frac{(h-x_1)^n}{n!}\Big|_0^h = \frac{h^n}{n!}$$

例2 求4维球体

$$B_4=\left\{(x_1,x_2,x_3,x_4)\middle|x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2\le R^2\right\}$$

的体积V_4.

思考题 求n维球体

$$B_n=\left\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)\middle|x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2\le R^2\right\}$$

的体积V_n.

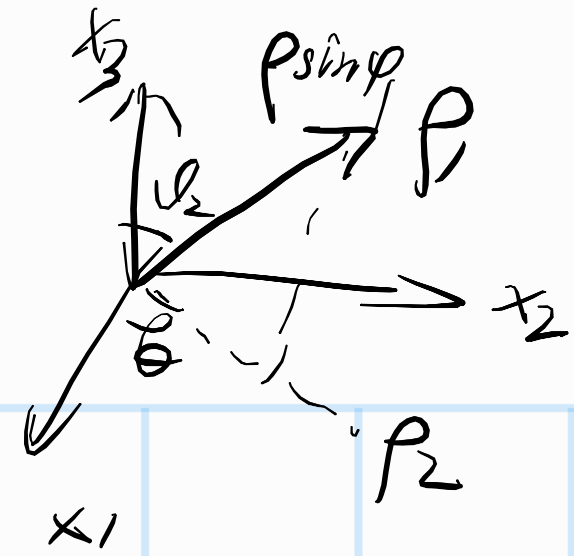
eg2.

$$x_4 = \rho\cos\varphi_1$$

$$x_3 = \rho\sin\varphi_1\cos\varphi_2$$

$$x_2 = \rho\sin\varphi_1\sin\varphi_2\sin\theta$$

$$x_1 = \rho\sin\varphi_1\sin\varphi_2\cos\theta$$



$$\frac{\partial(x_1, x_2, x_3, x_4)}{\partial(\rho, \varphi_1, \varphi_2, \theta)} = \rho^3\sin^2\varphi_1\sin\varphi_2 \geq 0$$

$$V_4 = \int_{B_4} \rho^3\sin^2\varphi_1\sin\varphi_2\, d\rho\, d\varphi_1\, d\varphi_2\, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi}\sin^2\varphi_1\, d\varphi_1 \int_0^{\pi}\sin\varphi_2\, d\varphi_2 \int_0^{R}\rho^3\, d\rho$$

$$= 2\pi\cdot\frac{\pi}{2}\cdot 2\cdot\frac{R^4}{4} = \frac{\pi^2}{2}R^4$$