第十周作业参考答案与部分解析

说明：此答案部分来自：余启帆（中国科学技术大学）；其余来自：焦昇扬（上海科技大学）

习题 11.1 P193-194

T2. (2) 答案：$\frac{8\sqrt{2}}{3}\pi^3|a|$.

(3)

$$\int_L (x+y)\,\mathrm{d}s = \int_0^1 x\,\mathrm{d}x + \int_0^1 y\,\mathrm{d}y + \int_0^1 (x+(1-x))\sqrt{2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{2}+1.$$

(5) 答案：$\frac{3}{2}+2\sqrt{2}\pi^2$.

(8)

$$\begin{aligned}\int_L z\,\mathrm{d}s &= \int_0^{t_0} t\sqrt{(\cos t - t\sin t)^2 + (\sin t + t\cos t)^2 + 1}\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{t_0} t\sqrt{t^2+2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{3}(t^2+2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^{t_0} = \frac{1}{3}((t_0^2+2)^{\frac{3}{2}} - 2\sqrt{2}).\end{aligned}$$

(9)

(9) 记 $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$, 则有

$$r^4 = a^2r^2(\cos^2\theta - \sin^2\theta) \implies r^2 = a^2\cos 2\theta \implies r = a\sqrt{\cos 2\theta}, \quad r'(\theta) = a\frac{-\sin 2\theta}{\sqrt{\cos 2\theta}},$$

从而

$$\begin{aligned}\int_L x\sqrt{x^2-y^2}\,\mathrm{d}s &= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} r\cos\theta\sqrt{r^2\cos 2\theta\cdot\left(a^2\cos 2\theta + a^2\frac{\sin^2 2\theta}{\cos 2\theta}\right)}\,\mathrm{d}\theta \\ &= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} r^2 a\cos\theta\,\mathrm{d}\theta = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} a^3\cos 2\theta\cos\theta\,\mathrm{d}\theta \\ &= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} a^3(1-2\sin^2\theta)\,\mathrm{d}(\sin\theta) \\ &= a^3\left(\sin\theta - \frac{2}{3}\sin^3\theta\right)\Big|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}a^3.\end{aligned}$$

(12)

$$\begin{aligned}\int_L (yz+zx+xy)\,\mathrm{d}s &= \frac{1}{2}\int_L ((x+y+z)^2 - (x^2+y^2+z^2))\,\mathrm{d}s \\ &= -\frac{1}{2}\int_L (x^2+y^2+z^2)\,\mathrm{d}s \\ &= -\frac{a^2}{2}\int_L \mathrm{d}s \\ &= -\pi a^3.\end{aligned}$$

T3.

解 考虑从 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(0)$ 到 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u)$ 的弧. 由题意知, $\rho(\boldsymbol{r})=\dfrac{2}{r^2}$, 则

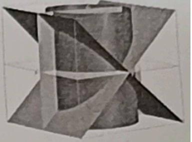
$$
\begin{aligned}
m(u) &= \left|\int_0^u \rho(\mathrm{e}^t\cos t,\mathrm{e}^t\sin t,\mathrm{e}^t)\sqrt{(\mathrm{e}^t(\cos t-\sin t))^2+(\mathrm{e}^t(\sin t+\cos t))^2+(\mathrm{e}^t)^2}\,\mathrm{d}t\right| \\
&= \left|\int_0^u \sqrt{3}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t\right| = \left|\left(-\sqrt{3}\mathrm{e}^{-t}\right)\Big|_0^u\right| = \sqrt{3}\left|1-\mathrm{e}^{-u}\right|.
\end{aligned}
$$

□

习题 11.2 P200

T1. (2)

解 所求区域如右图所示. 将该区域向 xOz 平面投影，我们将得到 xOz 平面内的三角形，其中 $0<x\le|a|,-x\le z\le x$. 这给了我们所求区域的参数化 $(x,\sqrt{a^2-x^2},z)$. 其第一基本形式为



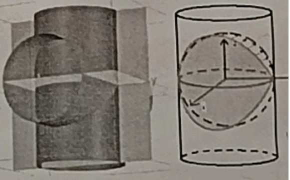
$$
\mathrm{d}S=\sqrt{1+\frac{x^2}{a^2-x^2}+0}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}z
$$

故我们有

$$
S=\iint_D \frac{|a|}{\sqrt{a^2-x^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}z=\int_0^{|a|}\mathrm{d}x\int_{-x}^{x}\frac{|a|}{\sqrt{a^2-x^2}}\mathrm{d}z=2a^2.
$$

(3)

解 所求区域如右图所示. 将该区域向 yOz 平面投影，我们将得到 yOz 平面内的圆，$y^2+z^2\le a^2$. 这给了我们所求区域的参数化 $(\sqrt{a^2-y^2},y,z)$. 其第一基本形式为



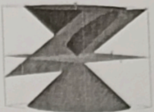
$$
\mathrm{d}S=\sqrt{\frac{y^2}{a^2-y^2}+0+1}\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z
$$

故我们有

$$
S=2\iint_D \frac{|a|}{\sqrt{a^2-y^2}}\mathrm{d}y\mathrm{d}z=2\int_{-a}^{a}\mathrm{d}y\int_{-\sqrt{a^2-y^2}}^{\sqrt{a^2-y^2}}\frac{|a|}{\sqrt{a^2-y^2}}\mathrm{d}z=8\cancel{4}a^2.
$$

(6)

解 所求区域如右图所示. 将该区域向 xOy 平面投影，我们将得到 xOy 平面内的椭圆，其方程由平面 $z=\sqrt{2}(\frac{x}{2}+1)$ 与锥面 $z^2=x^2+y^2$ 在 xOy 平面的投影给出，即满足方程组



$$\begin{cases}2\left(\dfrac{x}{2}+1\right)^2=x^2+y^2\\ z=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{(x-2)^2}{8}+\dfrac{y^2}{4}=1\\ z=0\end{cases}$$

现在我们给出参数化 $(x,y,\sqrt{x^2+y^2})$，其第一基本形式为

$$\mathrm{d}S=\sqrt{1+0+\frac{y^2}{x^2+y^2}+\frac{x^2}{x^2+y^2}}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\sqrt{2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

故我们有

$$S=\iint_D\sqrt{2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\sqrt{2}S_{\text{椭圆}}=8\pi$$

(7)

$$E=\cos^2\varphi+\sin^2\varphi=1,\quad F=0,\quad G=r^2\sin^2\varphi+r^2\cos^2\varphi+h^2=r^2+h^2,$$

则

$$\begin{aligned}\iint_D\mathrm{d}\sigma&=\int_0^a\mathrm{d}r\int_0^{2\pi}\sqrt{r^2+h^2}\,\mathrm{d}\varphi=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^a\sqrt{r^2+h^2}\,\mathrm{d}r\\
&\xlongequal{r=h\tan\theta}2\pi\int_0^{\arctan\frac{a}{h}}h\sec\theta\cdot h\frac{1}{\cos^2\theta}\mathrm{d}\theta\\
&=2\pi h^2\int_0^{\arctan\frac{a}{h}}\frac{\mathrm{d}(\sin\theta)}{\cos^4\theta}\xlongequal{\sin\theta=t}2\pi h^2\int_0^{\frac{a}{\sqrt{h^2+a^2}}}\frac{\mathrm{d}t}{(1+t)^2(1-t)^2}\\
&=2\pi h^2\int_0^{\frac{a}{\sqrt{h^2+a^2}}}\frac{1}{4}\left(\frac{(1+t)+1}{(1+t)^2}+\frac{(1-t)+1}{(1-t)^2}\right)\mathrm{d}t\\
&=\frac{\pi h^2}{2}\left(\ln(1+t)-\frac{1}{1+t}-\ln(1-t)+\frac{1}{1-t}\right)\Bigg|_0^{\frac{a}{\sqrt{h^2+a^2}}}\\
&=\frac{\pi h^2}{2}\left(\ln\frac{\sqrt{h^2+a^2}+a}{\sqrt{h^2+a^2}-a}+\frac{2a\sqrt{h^2+a^2}}{h^2}\right).\end{aligned}$$

T2. (3) 提示：积分区域、思路与 T1.(6) 类似. 最后算二重积分时利用极坐标换元即可.

答案：$\frac{\sqrt{2}+1}{2}\pi$.

(4)

解 积分区域如右图所示. 将该区域向 xOy 平面投影，我们将得到 xOy 平面内的圆，其方程为 $(x-a)^2+y^2\le a^2$. 此外，这个投影给了我们参数化，即 $(x,y,\sqrt{x^2+y^2})$. 前文已算过该参数化的第一基本形式为 $\mathrm{d}S=\sqrt{2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

注意到，该积分区域关于平面 xOz 对称，而被积函数中项 xy,yz 均为关于平面 xOz 的奇函数，所以此部分的积分为 0. 那么我们仅需考虑

$$\iint_S zx\,\mathrm{d}S=\sqrt{2}\iint_D x\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{64\sqrt{2}}{15}\pi a^4$$

(6) 提示：利用柱坐标.　　答案：$2\pi\arctan\frac{H}{R}$.

(7)

(7) 曲面上一点 $(x,y,z)=(x,y,x^2+y^2)$, 由对称性, 只需考虑 $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^+|x^2+y^2\leqslant 1\}$ 的部分, 则

$$\iint_S |xyz|\,\mathrm{d}S=4\iint_D xy(x^2+y^2)\sqrt{1+4x^2+4y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

记 $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$, 则积分区域化为

$$D'=\left\{(r,\theta)\middle|0\leqslant r\leqslant 1, 0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}\right\},$$

从而

$$\begin{aligned}
&4\iint_D xy(x^2+y^2)\sqrt{1+4x^2+4y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=4\iint_0^1\mathrm{d}r\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\cdot r^2\sin\theta\cos\theta r^2\sqrt{1+4r^2}r\\
&=2\int_0^1 r^5\sqrt{1+4r^2}\,\mathrm{d}r\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2\theta\,\mathrm{d}\theta=2\left(-\frac{1}{2}\cos 2\theta\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\right)\int_0^1 r^5\sqrt{1+4r^2}\,\mathrm{d}r\\
&=\int_0^1 r^4\sqrt{1+4r^2}\,\mathrm{d}r^2\xlongequal{r^2=t}\int_0^1 t^2\sqrt{1+4t}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{6}\int_0^1 t^2\,\mathrm{d}(1+4t)^{\frac{3}{2}}\\
&=\frac{1}{6}\left(t^2(1+4t)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1-2\int_0^1 t(1+4t)^{\frac{3}{2}}\,\mathrm{d}t\right)=\frac{5\sqrt{5}}{6}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{10}\int_0^1 t\,\mathrm{d}(1+4t)^{\frac{5}{2}}\\
&=\frac{5\sqrt{5}}{6}-\frac{1}{30}\left(t(1+4t)^{\frac{5}{2}}\Big|_0^1-\int_0^1(1+4t)^{\frac{5}{2}}\,\mathrm{d}t\right)=\frac{5\sqrt{5}}{6}-\frac{25\sqrt{5}}{30}+\frac{1}{30}\cdot\frac{1}{14}(1+4t)^{\frac{7}{2}}\Big|_0^1\\
&=\frac{5\sqrt{5}}{6}-\frac{25\sqrt{5}}{30}+\frac{1}{420}(125\sqrt{5}-1)=\frac{1}{420}(125\sqrt{5}-1).
\end{aligned}$$

□

T3. (1)

解 (1) 由对称性知,

$$\iint_S (x^2+y^2)\,\mathrm{d}S = \frac{2}{3}\iint_S (x^2+y^2+z^2)\,\mathrm{d}S = \frac{2}{3}R^2\iint_S \mathrm{d}S = \frac{8\pi}{3}R^4.$$

(2) 提示：根据对称性，被积函数中 x, y 积分为 0. 所以我们只需考虑对 z 积分. 本题的参数化自然由 xOy 平面上的圆投影给出，具体为 $(x, y, \sqrt{a^2-x^2-z^2})$.

答案：πa^3.

习题 11.3 P215

T1. (2) 提示：分段计算即可.　答案：0.

(3)

记 $x = a\cos\theta, y = a\sin\theta$, 则

$$\int_L \frac{-x\,\mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}y}{x^2+y^2} = \frac{1}{a^2}\int_0^{2\pi}(-a\cos\theta\cdot(-a\sin\theta) + a\sin\theta\cdot a\cos\theta)\,\mathrm{d}\theta$$
$$= \int_0^{2\pi}\sin 2\theta\,\mathrm{d}\theta = -\frac{1}{2}\cos 2\theta\Big|_0^{2\pi} = 0.$$

(6)

解 将 $x+y=2$ 代入 $x^2+y^2+z^2=2(x+y)$ 得 $x^2+y^2+z^2=4$. 再消去 y 我们得到 $x^2+(2-x)^2+z^2=4$，即 $(x-1)^2+\frac{z^2}{2}=1$. 现在我们给予参数化 $x=1+\cos\theta, z=\sqrt{2}\sin\theta, y=1-\cos\theta$，其中由题目的定向，这里 θ 应从 2π 到 0. 那么我们有原式为:

$$-\int_0^{2\pi}(1-\cos\theta)\cdot(-\sin\theta)+\sqrt{2}\sin\theta\cdot(\sin\theta)+(1+\cos\theta)\cdot\sqrt{2}\cos\theta\,\mathrm{d}\theta = -2\sqrt{2}$$

T3.

解 考虑椭圆上的参数化 $(a\cos\theta, b\sin\theta), \theta\in[0,2\pi)$. 根据题目所述，弹力场为 $(-ka\cos\theta, -kb\sin\theta)$. 那么弹力场做功为以下的曲线积分

$$\int_L P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = \int_0^{\frac{\pi}{2}} -ka\cos\theta\,\mathrm{d}a\cos\theta + -kb\sin\theta\,\mathrm{d}b\sin\theta = \frac{k}{2}(a^2-b^2)$$