第十一、十二周作业参考答案与部分解析

(希望同学们能通过这份解答找到这类问题的通性通法，并仔细地体会定向的选取与消灭.)

习题 11.3 P215-216

T4. (2) **解** 令 $P=xy+x+y, Q=xy+x-y$，那么根据格林公式，

$$\oint_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$$

注意到这里 L 是顺时针，故对应 D 的定向为 $\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}x$，所以在这个定向下

$$\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y=(-)\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\iint_D(x-y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

但根据对称性，这个积分的结果为 0.

(4) **解** 令 $P=\sqrt{x^2+y^2}, Q=y\left[xy+\ln\left(x+\sqrt{x^2+y^2}\right)\right]$，那么根据格林公式，

$$\oint_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$$

注意到这里 L 是逆时针，故对应 D 的定向为 $\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$，所以在这个定向下

$$\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y=(+)\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_D y^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\int_0^1\mathrm{d}y\int_{y^2+1}^2 y^2\,\mathrm{d}x=\frac{4}{15}$$

(5) **解** 令 $P=x^2+2xy-y^2, Q=x^2-2xy+y^2$，为了使用格林公式，我们添加有向线段 BA.

$$\oint_{AMB+BA} P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$$

注意到这里 $AMB+BA$ 是逆时针，故对应 D 的定向为 $\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$，所以在这个定向下

$$\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y=(+)\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_D 0\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$$

故我们得到

$$\int_{AMB}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+\int_{BA}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=0\Leftrightarrow\int_{AMB}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=\int_{AB}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$$

由于在 AB 上 $x=0,\mathrm{d}x=0$，那么我们有

$$\int_{AB}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=\int_{-1}^1 y^2\,\mathrm{d}y=\frac{2}{3}$$

(6) 提示：与 (5) 类似，加上有向线段 OA.

答案：$\frac{1}{8}m\pi a^2$.

T5. (2) **解** 根据格林公式，当我们取 $\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$ 为标准定向时，我们有

$$\sigma(D)=\iint_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_D \mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y=\oint_{L=\partial D}-y\mathrm{d}x+0\mathrm{d}y$$

其中，L 的定向应该为逆时针. 在 x 轴上，我们有 $y=0$，故积分只由摆线贡献，从 2π 积到 0. 综上所述：

$$\oint_{L=\partial D}-y\mathrm{d}x=-\int_{2\pi}^{0}a(1-\cos t)\,\mathrm{d}a(t-\sin t)=3\pi a^2$$

T6.

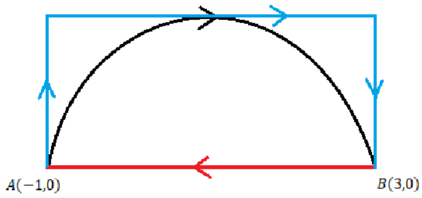
解 (1) 记 $x=a\cos\theta, y=a\sin\theta$, 则

$$\int_{L_1}\frac{-y\,\mathrm{d}x+x\,\mathrm{d}y}{x^2+y^2}=\int_{\pi}^{0}\frac{-a\sin\theta\cdot(-a\sin\theta)+a\cos\theta\cdot a\cos\theta}{a^2}\mathrm{d}\theta=\int_{\pi}^{0}\mathrm{d}\theta=-\pi.$$

(2) 提示：构造如右图所示蓝黑色区域，最后使用公式

$$\arctan\frac{1}{x}+\arctan x=\frac{\pi}{2}$$

答案：$-\pi$.



T7. (1) *Proof.* Denote $\boldsymbol{n}=(\cos\alpha,\sin\alpha)$, since f is differentiable, then we have

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{n}}=\cos\alpha\frac{\partial f}{\partial x}+\sin\alpha\frac{\partial f}{\partial y}$$

Moreover, the anticlockwise tangent vector of L is $(-\sin\alpha,\cos\alpha)$, which is to say, $-\sin\alpha\,\mathrm{d}s=\mathrm{d}x$, $\cos\alpha\,\mathrm{d}s=\mathrm{d}y$. Thus,

$$\oint_L\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{n}}\mathrm{d}s=\oint_L\cos\alpha\frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}s+\sin\alpha\frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}s=\oint_L\frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}y-\frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}x$$

by which we make the 1^{st} form integration on L to the 2^{nd} form of vector field

$$\boldsymbol{v}(x,y)=\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\boldsymbol{i}-\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\boldsymbol{j}$$

anticlockwise. Then *Green's Formula*, we have

$$\oint_L\frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}y-\frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}x=\iint_D\Delta f\,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y=\iint_D\Delta f\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

The last identity gives by: Since L is anticlockwise, then D has orientation $\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$. □

(2) 见 P234 T7 的解答，它们是一模一样的.

(3) *Proof.* Suppose $\boldsymbol{n}=(\cos\alpha,\cos\beta)$, then

$$\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}=\cos\alpha\frac{\partial u}{\partial x}+\cos\beta\frac{\partial u}{\partial y},\qquad \frac{\partial v}{\partial \boldsymbol{n}}=\cos\alpha\frac{\partial v}{\partial x}+\cos\beta\frac{\partial v}{\partial y}$$

Therefore, we have

$$\oint_L\left(v\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}-u\frac{\partial v}{\partial \boldsymbol{n}}\right)\mathrm{d}s=\oint_L\left(v\left(\cos\alpha\frac{\partial u}{\partial x}+\cos\beta\frac{\partial u}{\partial y}\right)-u\left(\cos\alpha\frac{\partial v}{\partial x}+\cos\beta\frac{\partial v}{\partial y}\right)\right)\mathrm{d}s$$

$$=\oint_L-\cos\beta\left(u\frac{\partial v}{\partial y}-v\frac{\partial u}{\partial y}\right)\mathrm{d}s+\oint_L\cos\alpha\left(v\frac{\partial u}{\partial x}-u\frac{\partial v}{\partial x}\right)\mathrm{d}s$$

$$=\oint_L\left(u\frac{\partial v}{\partial y}-v\frac{\partial u}{\partial y}\right)\mathrm{d}x+\oint_L\left(v\frac{\partial u}{\partial x}-u\frac{\partial v}{\partial x}\right)\mathrm{d}y\qquad (\text{By } -\cos\beta\,\mathrm{d}s=\mathrm{d}x,\cos\alpha\,\mathrm{d}s=\mathrm{d}y)$$

$$= \iint_D \left(v\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - u\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - u\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + v\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \quad \text{(By } Green's\ formula\text{)}$$

$$= \iint_D (v\Delta u - u\Delta v)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \quad \text{(Kill the orientation)}$$

□

习题 11.4 P227

T1.（1）**解** 我们将椭球面分为上下两侧，记上侧为 S_1，记下侧为 S_2：

$$\iint_S (x+y^2+z)\,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y = \iint_{S_1} (x+y^2+z)\,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y + \iint_{S_2} (x+y^2+z)\,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$$

我们首先消灭积分的定向：$\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$ 给出的定向为 z 轴正方向，故与 S_1 的外法向（指天）同向，与 S_2 的外法向（指地）反向，故有

$$\iint_{S_1} (x+y^2+z)\,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y = (+)\iint_{S_1} (x+y^2+z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$\iint_{S_2} (x+y^2+z)\,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y = (-)\iint_{S_2} (x+y^2+z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

故我们有

$$\iint_S (x+y^2+z)\,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y = \iint_{S_1} (x+y^2+z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y - \iint_{S_2} (x+y^2+z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

现在注意到积分区域 S_1 在 xOy 平面的投影给了我们参数化 $(ar\cos\theta, br\sin\theta, c\sqrt{1-r^2})$，而 S_2 上我们有 $(ar\cos\theta, br\sin\theta, -c\sqrt{1-r^2})$，故积分就变为

$$\begin{aligned}\iint_S &(x+y^2+z)\,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y \\ &= \iint_D \left(ar\cos\theta + (br\sin\theta)^2 + c\sqrt{1-r^2}\right) abr\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta \\ &- \iint_D \left(ar\cos\theta + (br\sin\theta)^2 - c\sqrt{1-r^2}\right) abr\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta \\ &= \iint_D 2c\sqrt{1-r^2}abr\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\end{aligned}$$

其中区域 D 为 $r\in[0,1], \theta\in[0,2\pi]$. 这个二重积分最后算出的结果为 $\frac{4}{3}\pi abc$.

（3）**解** 注意到 $\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z$ 的定向为 x 轴正方向，这与积分区域 $x\le 0$ 且远离球心的一侧方向相反

$$\iint_S (xy^2z^2)\,\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z = (-)\iint_S (xy^2z^2)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

这时积分区域 S 朝 yOz 的投影给出了参数化 $(-\sqrt{R^2-r^2}, r\cos\theta, r\sin\theta)$, 则

$$\iint_S (xy^2z^2)\,\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z = -\iint_D \left(-\sqrt{R^2-r^2}(r\cos\theta)^2(r\sin\theta)^2\right) r\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$$

其中积分区域为 $D: 0\le r\le R, \theta\in[0,2\pi]$. 这个二重积分算出来的结果为 $\frac{2\pi R^7}{105}$.

（5）**解** 注意到 $\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z, \mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x, \mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$ 的定向为 x, y, z 轴正方向，这与第一卦限远离原点的方

向吻合，故消灭定向如下

$$\iint_S x^2\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+y^2\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+z^2\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$$
$$=(+)\iint_S x^2\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(+)\iint_S y^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}z+(+)\iint_S z^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

我们给予这个积分参数化 $(x,y,1-x-y)$，积分区域 D 为 S 到平面 xOy 的投影，为标准的等腰直角三角形，即 $x+y\le 1, x\ge 0, y\ge 0$. <u>注意此时换元需要添加绝对值</u>

$$\mathrm{d}y\mathrm{d}z=|-1|\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\mathrm{d}x\mathrm{d}y,\ \ \mathrm{d}x\mathrm{d}z=|-1|\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

故

$$\iint_S x^2\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+y^2\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+z^2\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y=\iint_D (x^2+y^2+(1-x-y)^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{4}$$

（7）**解** 本题我们先换元 $(x,y,\sqrt{a^2-x^2-y^2})$，此时由于<u>换元在考虑定向之前，换元公式没有绝对值</u>.

$$\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z=\frac{\partial(y,z)}{\partial(x,y)}\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y=\det\begin{pmatrix}0 & 1\\ -\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} & -\frac{y}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\end{pmatrix}\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$$
$$=\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$$
$$\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x=\frac{\partial(z,x)}{\partial(x,y)}\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y=\det\begin{pmatrix}-\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} & -\frac{y}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\\ 1 & 0\end{pmatrix}\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$$
$$=\frac{y}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$$

故我们将积分变化成为了

$$\iint_S (xz^2\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}+x^2y\frac{y}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}+y^2z)\,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$$
$$=\iint_S (x^2\sqrt{a^2-x^2-y^2}+\frac{x^2y^2}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}+y^2\sqrt{a^2-x^2-y^2})\,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$$

现在我们消灭定向，由于 $\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$ 的定向指向 z 轴正方向，与上半球面的上侧同向，故

$$\iint_S (x^2\sqrt{a^2-x^2-y^2}+\frac{x^2y^2}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}+y^2\sqrt{a^2-x^2-y^2})\,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$$
$$=(+)\iint_S (x^2\sqrt{a^2-x^2-y^2}+\frac{x^2y^2}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}+y^2\sqrt{a^2-x^2-y^2})\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

最后用极坐标换元，我们就得到了答案 $\frac{2\pi}{5}a^5$.

T2. 提示：用高斯公式. 答案：$\frac{1}{3}a^3bc+abc$.

习题 11.7 P249

T5. （1）思路：先验证向量场 $(3x^2+6xy^2)\mathrm{d}x+(6x^2y-4y^3)\mathrm{d}y$ 无旋，从而对该向量场的积分与路径无关，任找一条便于计算的积分路径算曲线积分即可.

答案：$u=x^3+3x^2y^2-y^4+C$.

T6. （1） 答案：0.

（3） 答案：$3\sqrt{5}-1$.

T11.

解 记 $\boldsymbol{v}=2xy\boldsymbol{i}+Q(x,y)\boldsymbol{j}:=P\boldsymbol{i}+Q\boldsymbol{j}$, 令

$$\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=Q'_x-2x=0 \implies Q(x,y)=x^2+f(y).$$

考虑积分 $\displaystyle\int_{(0,0)}^{(x,y)}\boldsymbol{v}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}$, 由于其积分与路径无关, 从而

$$\int_{(0,0)}^{(x,y)}\boldsymbol{v}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\left(\int_{(0,0)}^{(x,0)}+\int_{(x,0)}^{(x,y)}\right)\boldsymbol{v}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\int_0^y(x^2+f(y))\,\mathrm{d}y=x^2y+\int_0^y f(y)\,\mathrm{d}y,$$

由题意知,

$$t^2+\int_0^1 f(y)\,\mathrm{d}y=t+\int_0^t f(y)\,\mathrm{d}y,\quad \forall t\in\mathbb{R},$$

上式两边对 t 求导得:

$$2t=1+f(t) \implies f(t)=2t-1 \implies Q(x,y)=x^2+2y-1.$$

□

T12. （1）

解 (1) 注意到,

$$LHS=\mathrm{d}\left(\frac{1}{2}x^2y^2+2xy-2y\sin x+y\cos x\right):=\mathrm{d}u=0 \implies u(x,y)=C,$$

故该微分方程的解为方程

$$\frac{1}{2}x^2y^2+2xy-2y\sin x+y\cos x=C,\quad C\in\mathbb{R}$$

所确定的隐函数.

习题 11.5 P233-P234

T1.（2）**解** 我们直接使用高斯公式

$$\iint_S xy\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+yz\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+zx\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y=\iiint_V (x+y+z)\,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z$$

这里由于 S 的曲面为外表面，那么 V 的定向为 $\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z$，故消灭定向为

$$\iiint_V (x+y+z)\,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z=\iiint_V (x+y+z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

其退化为一般的重积分，答案为 $\frac{1}{8}$.

（4）**解** 我们直接使用高斯公式

$$\iint_S xy^2\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+yz^2\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+zx^2\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y=\iiint_V (x^2+y^2+z^2)\,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z$$

这里由于 S 的曲面为外表面，那么 V 的定向为 $\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z$，故消灭定向为

$$\iiint_V (x^2+y^2+z^2)\,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z=\iiint_V (x^2+y^2+z^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

其退化为一般的重积分，用球坐标即得到答案为 $\frac{\pi}{15}$.

（5）**解** 我们添加曲面$S'\colon z=1, x^2+y^2\le 1$，其定向为曲面上侧. 那么根据高斯公式

$$\iint_{S+S'}(x-z)\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+(y-x)\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+(z-y)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y=3\iiint_V \mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z$$

这里由于闭曲面 $S+S'$ 为外表面，那么 V 的定向为 $\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z$, 故消灭定向为

$$\iiint_V 3\,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z=\iiint_V 3\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\frac{3\pi}{2}$$

注意到在 S' 上 $z\equiv 1$, 故补充的积分为

$$\iint_{S'}(x-z)\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+(y-x)\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+(z-y)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y=\iint_{S'}(1-y)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$$

其中消灭定向中因为 S' 定向为曲面上侧，故与 $\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$ 同向. 那么我们有

$$\iint_{S'}(1-y)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y=(+)\iint_D (1-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\pi$$

故最后的结果为 $\frac{\pi}{2}$.

（6）提示：类似于（5），我们添加圆面 $x^2+y^2\le 1, z=0$，定向取曲面下侧.

答案：$\frac{\pi a^4}{2}$.

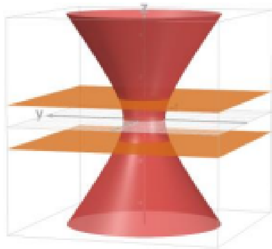
T2. （1）见 T3. 答案：$-4\pi km$.

（2）直接用高斯公式得到答案 0.

（3）略.

T3.

Solution. We add surface $S'_{in} := x^2+y^2+z^2=1$, the normal vector points to the origin, then the orientation of $S \cup S'_{in}$ is compatible with $\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z$. Therefore, by *Gauss' formula*, let $P=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, Q=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, R=\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, we have



$$\iint_{S\cup S'_{in}} P\mathrm{d}y\wedge \mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\wedge \mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\wedge \mathrm{d}y=\iiint_V\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=0$$

Hence,

$$\iint_S P\mathrm{d}y\wedge \mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\wedge \mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\wedge \mathrm{d}y=-\iint_{S'_{in}} P\mathrm{d}y\wedge \mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\wedge \mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\wedge \mathrm{d}y$$

Then it suffices to take the outer orientation of $x^2+y^2+z^2=1$, denote by S'_{out}, and the result is we desired. However, on $x^2+y^2+z^2=1$ we have

$$\iint_S P\mathrm{d}y\wedge \mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\wedge \mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\wedge \mathrm{d}y=\iint_{S'_{out}} x\mathrm{d}y\wedge \mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\wedge \mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\wedge \mathrm{d}y$$

Here we can freely use the *Gauss' formula* again, which turns to

$$\iint_{V_{x^2+y^2+z^2\le 1}} 3\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=3V_{x^2+y^2+z^2\le 1}=4\pi$$

□

T7.

Proof. WLOG, we assume $|\boldsymbol{n}|=|\boldsymbol{c}|=1$, then

$$\iint_S \cos(\theta(\boldsymbol{c},\boldsymbol{n}))\,\mathrm{d}S=\iint_S \boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}S$$

which is a 2^{nd} form integration on S by definition. Therefore, if we let vector field

$$\boldsymbol{c}=A\boldsymbol{i}+B\boldsymbol{j}+C\boldsymbol{k}$$

where A,B,C are the constant functions. Therefore,

$$\iint_S \cos(\theta(\boldsymbol{c},\boldsymbol{n}))\,\mathrm{d}S=\iint_S \boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}S=\iint_S A\mathrm{d}y\wedge \mathrm{d}z+B\mathrm{d}z\wedge \mathrm{d}x+C\mathrm{d}x\wedge \mathrm{d}y$$

then we can use *Gauss' formula*, we have

$$\iint_S A\mathrm{d}y\wedge \mathrm{d}z+B\mathrm{d}z\wedge \mathrm{d}x+C\mathrm{d}x\wedge \mathrm{d}y=\iiint_V 0\,\mathrm{d}x\wedge \mathrm{d}y\wedge \mathrm{d}z=0$$

□

说明：此答案部分主要来自龚羿扬（上海科技大学），其中 **习题 11.7 P249** 中的部分答案来自：余启帆（中国科学技术大学）.

如有错误，敬请批评指正.