Chap 13 —4

含参变量反常积分

定义 设$f(x,u)$在$[a,+\infty)\times[\alpha,\beta]$定义, 若对$\forall u\in[\alpha,\beta]$:

$\int_a^{+\infty} f(x,u)\mathrm{d}x$收敛, 则称之为**含参变量无穷积分**, 记为

$$\varphi(u)=\int_a^{+\infty} f(x,u)\mathrm{d}x,\quad u\in[\alpha,\beta]$$

- **说明** $\int_a^{+\infty} f(x,u)\mathrm{d}x$ 收敛, 即对$\forall u\in[\alpha,\beta]$:

$$\lim_{A\to+\infty}\int_a^{A} f(x,u)\mathrm{d}x=\int_a^{+\infty} f(x,u)\mathrm{d}x$$

或 $\forall\varepsilon>0,\ \exists X>a,\ \forall A>X$:

$$\left|\int_a^{A} f(x,u)\mathrm{d}x-\int_a^{+\infty} f(x,u)\mathrm{d}x\right|=\left|\int_A^{+\infty} f(x,u)\mathrm{d}x\right|<\varepsilon$$

13.4.1 一致收敛性

定义 对 $\int_a^{+\infty} f(x,u)\mathrm{d}x$，若

$$\boxed{\begin{gathered}\forall \varepsilon > 0,\ \exists X > a,\ \forall A > X,\ \forall u \in [\alpha, \beta],\ \text{有} \\ \left|\int_A^{+\infty} f(x,u)\mathrm{d}x\right| < \varepsilon\end{gathered}}$$

则称 $\int_a^{+\infty} f(x,u)\mathrm{d}x$ 在 $[\alpha, \beta]$ 上一致收敛.

- 一致收敛 $\Rightarrow$ 收敛

定理 $\int_a^{+\infty} f(x,u)\mathrm{d}u$ 在 $[\alpha, \beta]$ 上一致收敛的充要条件是:

$$\lim_{A\to+\infty} \beta(A) = 0$$

其中 $\beta(A) = \sup\limits_{u\in[\alpha,\beta]} \left|\int_A^{+\infty} f(x,u)\mathrm{d}x\right|$

⊗ $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛 $\overset{\text{Cauchy}}{\Longleftrightarrow}$ $\forall \varepsilon>0, \exists A>a, \forall A'', A'>A, \left|\int_{A'}^{A''} f(x)dx\right| < \varepsilon$

定理(Cauchy准则) $\int_a^{+\infty} f(x,u)\mathrm{d}x$ 在 $[\alpha, \beta]$ 上一致收敛

$$\boxed{\Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon>0, \exists X>a, \forall A', A''>X, \forall u\in[\alpha,\beta]: \quad \left|\int_{A'}^{A''} f(x,u)\mathrm{d}x\right| < \varepsilon}$$

定理(Weierstrass-判别法) 设存在 $p(x) \geq 0$使得

(1) $\forall x \in [a, +\infty), \forall u \in [\alpha, \beta]: |f(x,u)| \leq p(x)$

(2) $\int_a^{+\infty} p(x)\mathrm{d}x$ 收敛

则 $\int_a^{+\infty} f(x,u)\mathrm{d}x$ 在$[\alpha, \beta]$上一致收敛.

$\leq \frac{1}{1+x^2}$

例1 判断 $\int_0^{+\infty} \frac{\sin ux}{1+x^2}\mathrm{d}x$ $(u \in \mathbf{R})$的一致收敛性.

$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x \Big|_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2}$ 收敛

例2 设$\alpha > 0$, 证明:

(1) $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-(\alpha+u^2)x} \sin x \mathrm{d}x$ 关于u在$u \geq 0$上一致收敛;

(2) $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-(\alpha+u^2)x} \sin x \mathrm{d}u$ 关于x 在$x \geq 0$上一致收敛.

例3 证明 $\int_a^{+\infty} u\mathrm{e}^{-ux} \mathrm{d}x$ 在$u \geq 0$上不一致收敛.

eg2.(1) $\left|e^{-(\alpha+u^2)x}\sin x\right| \le \frac{1}{e^{(\alpha+u^2)x}} \le \frac{1}{e^{\alpha x}}$ 且 $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} = \frac{1}{\alpha}$ 收

(2) $\left|e^{-(\alpha+u^2)x}\sin x\right| \overset{\text{when } x\ge 0}{\le} \frac{x}{e^{(\alpha+u^2)x}} \le \frac{x}{e^{u^2 x}} \le \frac{x}{u^2 x}$

$\int_1^{+\infty}\frac{du}{u^2}=1$ 故 $\int_1^{+\infty} e^{-(\alpha+u^2)x}\sin x\,du$ 在 $[0,+\infty)$ u.c

从而 $\int_0^{+\infty} \sim$ u.c.

eg3. $\int_A^{+\infty} u e^{-ux}dx = \begin{cases} 0, & u=0 \\ -e^{-ux}\Big|_A^{+\infty} = e^{-uA} & u>0. \end{cases}$

知 $\beta(A) = \sup\int_A^{+\infty} u e^{-ux}dx = 1 \ne 0$. 非 u.c.

定理(A-D判别法)

设 $f(x,u)$, $g(x,u)$满足下列两组条件之一:

则 $\int_a^{+\infty} f(x,u)g(x,u)\mathrm{d}x$ 在$[\alpha,\beta]$上一致收敛.

(Abel) $\forall u\in[\alpha,\beta]$, $g(x,u)$关于x单调, 且一致有界,

$\int_a^{+\infty} f(x,u)\mathrm{d}x$ 关于u在$[\alpha,\beta]$上一致收敛;

(Dirichlet) $\forall u\in[\alpha,\beta]$, $g(x,u)$关于x单调, 且一致趋于0 $(x\to+\infty)$, $\int_a^{A} f(x,u)\mathrm{d}x$ 一致有界.

例4 设 $\alpha > 0$, 证明积分

$f(x,\beta)=\sin\beta x \quad g(x,\beta)=\frac{x}{\alpha^2+x^2}$

$$\int_0^{+\infty}\frac{x\sin\beta x}{\alpha^2+x^2}\,\mathrm{d}x$$

$g=\frac{1}{\frac{\alpha^2}{x}+x}$ 关于 $x\geq 0$ 单调且 $\rightrightarrows 0$

在 $\beta \geq \beta_0 > 0$ 上一致收敛.

又 $\left|\int_0^A \sin\beta x\,dx\right| = \frac{|1-\cos\beta A|}{\beta} \leq \frac{2}{\beta} \leq \frac{2}{\beta_0}$

一致有界 A-D 原积分在 $[\beta_0,+\infty)$ 上 u.c.

例5 证明积分 $\int_0^{+\infty} e^{-ux}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$ 在 $u \geq 0$ 上一致收敛.

$f(x,u)=\frac{\sin x}{x}$, $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}$ 条件收敛 → 一致收敛

$g(x,u)=e^{-ux}$, 关于 $x\downarrow$. $0<e^{-ux}\leq 1$ 一致有界

13.4.2 含参反常积分的性质

设 $\varphi(u)=\int_a^{+\infty} f(x,u)\mathrm{d}x, \quad u\in[\alpha,\beta].$

任取一严格递增$\{A_n\}$, 满足$A_0=a$ 且 $A_n\to+\infty(n\to\infty)$

令 $w_n(u)=\int_{A_{n-1}}^{A_n} f(x,u)\mathrm{d}x$, 则有

$$\boxed{\int_a^{+\infty} f(x,u)\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{A_{n-1}}^{A_n} f(x,u)\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty} w_n(u)}$$

引理 设 $\int_a^{+\infty} f(x,u)\mathrm{d}x$ 在$[\alpha,\beta]$上一致收敛, 则

$\sum_{n=1}^{+\infty} w_n(u)$在$[\alpha,\beta]$上一致收敛.

$\left|\sum_{k=n+1}^{m} w_k(x)\right|=\left|\int_{A_n}^{A_m} f(x,u)dx\right|<\varepsilon$

定理(连续性) 设$f(x,u)\in C[a,+\infty)\times[\alpha,\beta]$, 且

内闭

$\varphi(u)=\int_a^{+\infty}f(x,u)\mathrm{d}x$ 在$[\alpha,\beta]$上一致收敛, 则$\varphi(u)\in C[\alpha,\beta]$

➢ **积分号下取极限**

$$\boxed{\lim_{u\to u_0}\int_a^{+\infty}f(x,u)\mathrm{d}x=\int_a^{+\infty}f(x,u_0)\mathrm{d}x=\int_a^{+\infty}\lim_{u\to u_0}f(x,u)\mathrm{d}x}$$

定理(交换积分次序) 设$f(x,u)\in C[a,+\infty)\times[\alpha,\beta]$, 且

$\varphi(u)=\int_a^{+\infty}f(x,u)\mathrm{d}x$ 在$[\alpha,\beta]$上一致收敛, 则

$$\boxed{\int_\alpha^\beta\mathrm{d}u\int_a^{+\infty}f(x,u)\mathrm{d}x=\int_a^{+\infty}\mathrm{d}x\int_\alpha^\beta f(x,u)\mathrm{d}u}$$

证：

取 $\{A_n\}$ 满足 $A_0=a \uparrow \to +\infty$. 令 $w_k=\int_{A_{k-1}}^{A_k}\sim$

$f(x,u)\in C[\ ]\times[\ ]$. $w_k(u)\in C[\alpha,\beta]$.

又 $\sum_{n=1}^{\infty} w_n(u)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上 u.c. 故 $\varphi(u)=\sum_{n=1}^{\infty} w_n(u)\in C[\alpha,\beta]$

函项积分定理.

证：$$\int_\alpha^\beta \varphi(u)du=\int_\alpha^\beta\left(\sum_{n=1}^{\infty} w_n(u)\right)du=\sum_{n=1}^{\infty}\int_\alpha^\beta w_n(u)du$$

含参定积分换序 (13.3)

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\int_\alpha^\beta du\int_{A_{n-1}}^{A_n} f(x,u)dx=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{A_{n-1}}^{A_n}dx\int_\alpha^\beta f(x,u)du$$

$$=\int_a^{+\infty}dx\int_\alpha^\beta f(x,u)du$$

定理(可导性) 设

(1) $f(x,u), f'_u(x,u) \in C[a,+\infty)\times[\alpha,\beta]$;

(2) $\int_a^{+\infty} f(x,u)\mathrm{d}x$ 在$[\alpha,\beta]$上收敛;

(3) $\int_a^{+\infty} f'_u(x,u)\mathrm{d}x$ 在$[\alpha,\beta]$上内闭一致收敛,

则$\varphi(u)=\int_a^{+\infty} f(x,u)\mathrm{d}x \in C^{(1)}[\alpha,\beta]$, 且

$$\boxed{\varphi'(u)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\int_a^{+\infty} f(x,u)\mathrm{d}x=\int_a^{+\infty}\frac{\partial f(x,u)}{\partial u}\mathrm{d}x}$$

➢ 积分号下求导数

设 $g(u)=\int_a^{+\infty} f'_u(x,u)\,dx$ 下证 $\varphi'(u)=g(u)$

则 $\int_\alpha^u g(t)dt = \int_\alpha^u dt\int_a^{+\infty} f'_t(x,t)\,dx \overset{一致收敛}{=} \int_a^{+\infty} dx\int_\alpha^u f'(x,t)dt$

$= \int_a^{+\infty}[f(x,u)-f(x,\alpha)]\,dx$

$\overset{(12)}{=} \varphi(u)-\varphi(\alpha)$

g 连续 $\to \varphi(u)$ 可导

两侧求导 $g(u)=\varphi'(u)$

连续性,可导性 当 α 或 β 开时 收敛 → 内闭一致收敛

例6 计算 $I=\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-ax}-\mathrm{e}^{-bx}}{x}\mathrm{d}x\quad(0<a<b)$

例7 计算 $I(\beta)=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\cos 2\beta x\mathrm{d}x$

eg 6 解 $\lim\limits_{x\to 0^+} \overset{罗)}{=} \lim \dfrac{-a e^{-ax}+b e^{-bx}}{1} \Rightarrow b-a$ $x=0$非瑕点

像2中求右端

$$\frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x} = -\frac{e^{-ux}}{x}\Bigg|_{u=a}^{u=b} = \int_a^b e^{-ux}\,du$$

$$I = \int_0^{+\infty} dx \int_a^b e^{-ux}\,du = \int_a^b du \int_0^{+\infty} e^{-ux}\,dx$$

$$\overset{(\triangle)}{=} \int_a^b du \left.\frac{-e^{-ux}}{u}\right|_{x=0}^{x=+\infty} = \int_a^b \frac{du}{u} = \ln\frac{b}{a}$$

一致收敛?

△: ① $e^{-ux} \in C([0,+\infty)\times[a,b])$ ② $\forall u\in[a,b]$ $0<e^{-ux} \le e^{-ax}$ 收敛

eg7. $I'(\beta) \overset{(\triangle)}{=} -\int_0^{+\infty} 2x e^{-x^2} \sin 2\beta x\,dx$ (2对β求导)

$$= \int_0^{+\infty} \sin 2\beta x \, d e^{-x^2}$$

$$= \sin 2\beta x\, e^{-x^2}\Big|_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} e^{-x^2}\cdot 2\beta\cos 2\beta x\,dx$$

(the first term is marked 0)

$$= -2\beta I(\beta)$$

$\dfrac{dI}{d\beta} = -2\beta I$ $\quad \dfrac{dI}{I} = -2\beta\, d\beta$ $\quad \ln I + C = -\beta^2$ $\quad I = Ae^{-\beta^2}$

$I(0) = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2} \to C = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$. $\quad I(\beta) = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-\beta^2}$

Δ: (1) 一致收敛: $\forall \beta \in R$ $|e^{-x^2}\cos 2\beta x| \le e^{-x^2}$

且 $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx$ 收敛 故 $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\cos 2\beta x\,dx$ (绝对收敛)

(2) $f(x,\beta) = e^{-x^2}\cos 2\beta x \in C[0,+\infty)\times R$

$f'_\beta(x,\beta) = -2xe^{-x^2}\sin 2\beta x \in C[0,+\infty)\times R$

(3) 又 $\forall \beta \in R$ $|f'_\beta(x,\beta)| \le 2xe^{-x^2}$ 且 $\int_0^{+\infty} 2xe^{-x^2}dx = 1$

$\xRightarrow{W判别法} \int_0^{+\infty} f'_\beta(x,\beta)dx$ 在 R 上 u.c.

13.4.3 几个重要的积分

一. Dirichlet积分

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} \mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}}$$

例8 设 $I(u) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-ux} \frac{\sin x}{x} \mathrm{d}x$

收敛因子

证明 (1) $I(u) \in C[0,+\infty)$;

(2) $I'(u) = -\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-ux} \sin x \mathrm{d}x \quad (u > 0)$

eg8. (1) 由 $f(x,u)=\begin{cases} e^{-ux}\dfrac{\sin x}{x} & x>0 \\ 1 \ (\text{极限}) & x=0 \end{cases}$ 则 $f(x,u)\in C([0,+\infty)\times[0,+\infty))$

由例5 知 $I(u)\in C[0,+\infty)$

(2) 首先 $I(u)$ 的导数 $f'_u(x,u)=-e^{-ux}\sin x\in C([0,+\infty)\times(0,+\infty))$

最后 $\forall[a,b]\subset(0,+\infty)$ 则 $a>0$. $\forall u\in[a,b]$:

$$|f'_u(x,u)|\le e^{-ux}\le e^{-ax} \text{ 且 } \int_0^{+\infty}e^{-ax}dx=\frac{1}{a}$$

W 判别法. 在 $[a,b]$ u.c.

∴ 在 $(0,+\infty)$ 内闭 u.c.

注 $I'(u)=-\int_0^{+\infty}e^{-ux}\sin x\,dx=\dfrac{e^{-ux}(u\sin x+\cos x)}{1+u^2}\Big|_0^{+\infty}=-\dfrac{1}{1+u^2}$

$I(u)=-\arctan u+C$

$|I(u)|\le\int_0^{+\infty}\left|e^{-ux}\frac{\sin x}{x}\right|dx\le\int_0^{+\infty}e^{-ux}dx=\frac{1}{u}\xrightarrow{(u\to+\infty)}0$

因此 $C=\frac{\pi}{2}$ 从而 $I(u)=\frac{\pi}{2}-\arctan u \quad (u>0)$

因此 $I=I(0)=\lim\limits_{u\to0^+}I(u)=\lim\limits_{u\to0^+}\left(\frac{\pi}{2}-\arctan u\right)=\frac{\pi}{2}$.

二. Laplace积分

$$I(\beta)=\int_0^{+\infty}\frac{\cos\beta x}{\alpha^2+x^2}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2\alpha}\mathrm{e}^{-\alpha\beta}\quad(\alpha>0,\beta\geq 0)$$

$$J(\beta)=\int_0^{+\infty}\frac{x\sin\beta x}{\alpha^2+x^2}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\mathrm{e}^{-\alpha\beta}\quad(\alpha>0,\beta>0)$$

三. Fresnel积分

$$\int_0^{+\infty}\sin x^2\mathrm{d}x=\sqrt{\frac{\pi}{8}}=\int_0^{+\infty}\cos x^2\mathrm{d}x$$

$$I'(\beta) \triangleq -\int_0^{+\infty}\frac{x\sin\beta x}{\alpha^2+x^2}dx = -J(\beta)$$

由于 $\beta>0$，有 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin\beta x}{x}dx \xlongequal{t=\beta x} \int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}dt = \frac{\pi}{2}$

$$I'(\beta)+\frac{\pi}{2} = \int_0^{+\infty}\frac{\sin\beta x}{x} - \frac{x\sin\beta x}{\alpha^2+x^2} = \int_0^{+\infty}\frac{\alpha^2\sin\beta x}{x(\alpha^2+x^2)}dx$$

再导

$$I''(\beta) \overset{*}{=} \left(I'(\beta)+\frac{\pi}{2}\right)' = \alpha^2\int_0^{+\infty}\frac{x\cos\beta x}{x(\alpha^2+x^2)} = \alpha^2 I(\beta)$$

$I''-\alpha^2 I=0$ 特征方程 $r^2-\alpha^2=0$ $r=\pm\alpha$

$$I(\beta)=C_1e^{\alpha\beta}+C_2e^{-\alpha\beta}$$

由于 $|I(\beta)| \le \int_0^{+\infty}\frac{|\cos\beta x|}{\alpha^2+x^2}dx \le \int_0^{+\infty}\frac{dx}{\alpha^2+x^2}$ 有界

故 $C_1=0$（否则 $I(\beta)$ 无界）

令 $\beta=0$ $I(0)=\cdots=\frac{\pi}{2\alpha}$

故 $I(\beta)=\frac{\pi}{2\alpha}e^{-\alpha\beta}$ $J(\beta)=$ ~

(2) 成立 理由 $f(x,\beta)=\frac{\cos\beta x}{\alpha^2+x^2}\in C(\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+)$

且由 $|f(x,\beta)|\le\frac{1}{\alpha^2+x^2}$ 且 $\int_0^{+\infty}\frac{dx}{\alpha^2+x^2}$ 收敛故 $\int_0^{+\infty}\frac{\cos\beta x}{\alpha^2+x^2}dx$ 收敛

最后 由 eg4 知 $\int_0^{+\infty}f'_\beta(x,\beta)dx$ 在 $[0,+\infty)$ 内闭 U.C.

例 13.3.16 计算积分 P318. 4.(1)

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(a^2\sin^2x+b^2\cos^2x)\,dx$$

令 $I(y)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(a^2\sin^2x+y^2\cos^2x)\,dx \quad a\le y\le b$

$$I'(y)=2y\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2x}{a^2\sin^2x+y^2\cos^2x}\,dx$$

解: 令 $I_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2x}{a^2\sin^2x+b^2\cos^2x}$ $\quad I_2=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2x}{a^2\sin^2x+b^2\cos^2x}\,dx$

$$I_1+I_2=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{a^2\sin^2x+b^2\cos^2x}=\frac{1}{a}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d(a\tan x)}{b^2+a^2\tan^2x}$$

$$=\frac{1}{ab}\arctan\frac{a\tan x}{b}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{2ab}$$

$b^2I_1+a^2I_2=\frac{\pi}{2}$ $\quad I_1=\frac{\pi}{2b(a+b)}$

$$I'(y)=2y\frac{\pi}{2y(a+y)}=\frac{\pi}{a+y}$$

$$I(b)=I(a)+\int_a^b I'(y)\,dy=\pi\ln a+\int_a^b\frac{\pi}{a+y}\,dy$$

$$=\pi\ln\frac{a+b}{2}$$

P331. 6. 7(2,4,5)