

# Chap 12 — 3

## 收斂性定理

### 12.3.1 Dirichlet收敛定理

**定义** 设 $f:[a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ , 若可将 $[a, b]$ 分为有限个子区间, 使 $f$ 在每个子区间内部连续可微, 端点有单侧极限, 及拟单侧导数, 则称 $f$ 在 $[a, b]$ 上分段可微.

**定理** 设 $f$ 以 $2\pi$ 为周期, 在 $[-\pi, \pi]$ 上分段可微, 则其Fourier级数收敛, 且

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) = \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}$$

证明 记

$$S(x) = \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}$$

$f$  的F氏级数的部分和函数

$$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

称为 $f$  的 $n$ 阶**Fourier多项式**. 下面证明:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = S(x)$$

第一步

Dirichlet积分

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+u) \frac{\sin \frac{2n+1}{2} u}{2 \sin \frac{u}{2}} du$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} [f(x+u) + f(x-u)] \frac{\sin \frac{2n+1}{2} u}{2 \sin \frac{u}{2}} du$$

def ||

$D_n(u)$

Dirichlet积分核

## 简单事实

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} D_n(u) du = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \left( \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos ku \right) du = 1$$

## 第二步

$$S_n(x) - S(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} [f(x+u) + f(x-u) - 2S(x)] D_n(u) du$$

$$\stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \varphi(u, x) \frac{\sin \left( n + \frac{1}{2} \right) u}{2 \sin \frac{1}{2} u} du$$

第三步 (Riemann) 设  $g$  在  $[0, \pi]$  上可积且平方可积, 则

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^\pi g(u) \sin\left(n + \frac{1}{2}\right) u du = 0$$

第四步

$$g(u) = \frac{\varphi(u, x)}{2 \sin \frac{u}{2}} = \frac{f(x+u) + f(x-u) - 2S(x)}{2 \sin \frac{u}{2}}$$

在  $[0, \pi]$  上可积且平方可积.

**推论** 设 $f$ 连续并满足定理条件, 又 $f'$ 可积且平方可积,

则其F氏级数在 $\mathbf{R}$ 上一致收敛, 且

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) = f(x)$$

### 12.3.2 平方平均收敛定理

**定理** 设 $f \in R[-\pi, \pi]$ , 则 $\{S_n(x)\}$ 平方平均收敛于 $f$ , 即

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - S_n\| = 0$$

**例1** 写出  $f(x) = x^2$  ( $x \in [-\pi, \pi]$ ) 的F氏级数的和函数在  $[-\pi, \pi]$  上的表达式.

$$x^2 \sim \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos nx = x^2 \quad (-\pi \leq x \leq \pi)$$

**例2** 写出  $f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi < x < 0, \\ x, & 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$  的F氏级数的和函数在  $[-\pi, \pi]$  上的表达式.

$$f(x) \sim \frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{(-1)^n - 1}{n^2 \pi} \cos nx + \frac{(-1)^{n-1}}{n} \sin nx \right\} = \begin{cases} 0, & -\pi < x < 0, \\ x, & 0 \leq x < \pi, \\ \frac{\pi}{2}, & x = \pm\pi. \end{cases}$$

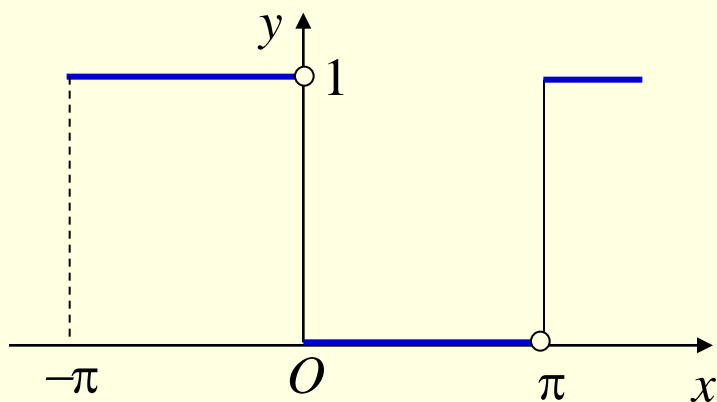


**例3** 求  $f(x) = \begin{cases} 1, & -\pi \leq x < 0, \\ 0, & 0 \leq x < \pi \end{cases}$  的F氏级数, 并写出和函数.

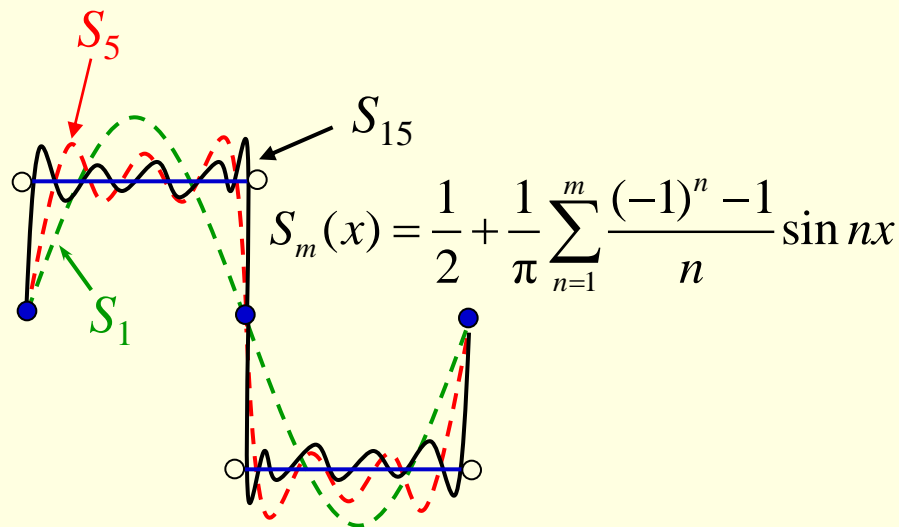
$$f(x) \sim \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n - 1}{n} \sin nx$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{2}{\pi} \left( \sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \dots \right)$$

$$S(x) = \begin{cases} 1, & -\pi < x < 0, \\ \frac{1}{2}, & x = 0, \pm\pi, \\ 0, & 0 < x < \pi. \end{cases}$$



电工学方波



正弦波叠加

时域图像

频域图像

