

# Chap 10—3

三重积分

### 10.3.1 三重积分的概念和性质

一. 定义 设 $f(x, y, z)$ 在**可求积**有界闭域 $\Omega \subset [a, b] \times [c, d] \times [e, h]$ ( $:=V$ )定义. 令 $f(x, y, z) = 0, (x, y, z) \in V \setminus \Omega$ . 若对 $V$ 的**长方体分割** $V_{ijk}$ 及 $\forall (\xi_i, \eta_j, \zeta_k) \in V_{ijk}$ , 总有

$$\lim_{|T| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n f(\xi_i, \eta_j, \zeta_k) \Delta V_{ijk} = I,$$

其中  $\Delta V_{ijk} = \text{Vol}(V_{ijk})$ ,  $|T| = \max_{1 \leq i \leq l, 1 \leq j \leq m, 1 \leq k \leq n} \text{diam}\{V_{ijk}\}$ ,

则称 $f(x, y, z)$ 在 $\Omega$ 上**可积**,  $I$ 称为 $f$ 在 $\Omega$ 上的**三重积分**,  
记为  $\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dV$ ,  $dV$ 称为**体积元素**.

**物理意义** 设 $\rho(x, y, z)$ 是占有空间区域 $\Omega$ 的物体的体密度函数, 则该物体的质量

$$m = \iiint_{\Omega} \rho(x, y, z) dV.$$

**二. 性质** 类似二重积分, 有线性、可加性、单调性和中值定理, 还有

$$\iiint_{\Omega} 1 dV = V_{\Omega} \quad (\text{Vol}(\Omega))$$

### 10.3.2 三重积分的累次积分

在直角坐标下, 由于  $dV = dx dy dz$ , 因此有

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dV = \iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz.$$

**定理** 设  $f(x, y, z)$  在  $[a, b] \times [c, d] \times [e, h]$  可积.

(1) 若  $\forall (x, y) \in [a, b] \times [c, d]$ , 存在首次积分

$$\mu(x, y) = \int_e^h f(x, y, z) dz, \text{ 则}$$

$$\iiint_{[a,b]\times[c,d]\times[e,h]} f(x, y, z) dV = \iint_{[a,b]\times[c,d]} dx dy \int_e^h f(x, y, z) dz$$

(2) 若  $\forall z \in [e, h]$ , 存在二重积分

$$\mu(z) = \iint_{[a,b] \times [c,d]} f(x, y, z) dx dy, \text{ 则}$$

$$\iiint_{[a,b] \times [c,d] \times [e,h]} f(x, y, z) dV = \int_e^h dz \iint_{[a,b] \times [c,d]} f(x, y, z) dx dy$$

例1 计算积分  $\iiint_{[0,1]^3} x^2 y e^{xyz} dx dy dz.$

$$e - \frac{5}{2}$$

## 一. 柱线法(坐标面投影法)

设 $\Omega$ 是以曲面 $z = z_1(x, y)$ 为底, 曲面 $z = z_2(x, y)$ 为顶, 而侧面是母线平行 $z$ 轴的柱面所围成区域. 又 $\Omega$ 在 $xy$ 上的投影区域为 $D$ , 则 $\Omega$ 可表示为

**xy型正则区域**

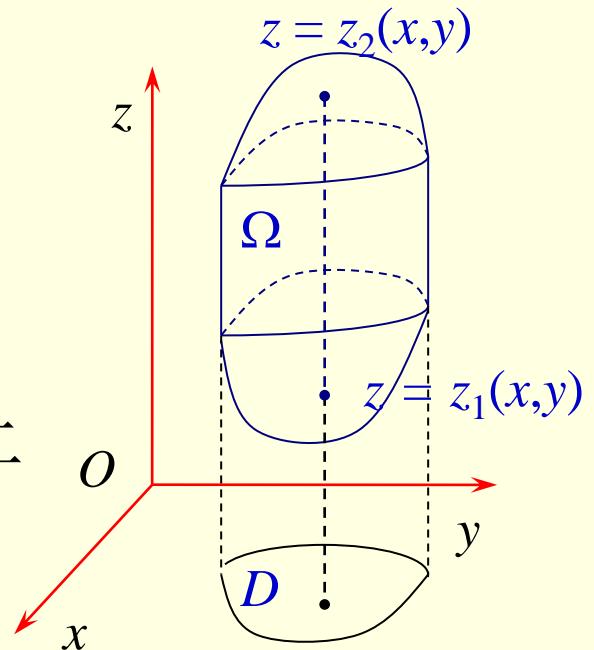
$$\{(x, y, z) \mid z_1(x, y) \leq z \leq z_2(x, y), (x, y) \in D\}$$

从质量角度求三重积分, 将 $f(x, y, z)$ 视为密度函数,

数, 则 $\forall (x, y) \in D$ ,

$$\mu(x, y) = \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz$$

是 $\Omega$ 内由 $z_1(x, y)$ 到 $z_2(x, y)$ 的线段上所分布的质量, 故物体总质量为



$$\iint_D \mu(x, y) dx dy = \iint_D \left( \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz \right) dx dy$$

从而(设  $D = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b, y_1(x) \leq y \leq y_2(x)\}$ )

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz &= \iint_D \left( \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz \right) dx dy \\ &\stackrel{\text{def}}{=} \iint_D dx dy \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz \\ &= \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz \end{aligned}$$

先 $z$ 再 $y$ 后 $x$   
三次积分

**例2** 计算积分  $\iiint_{\Omega} y \cos(x+z) dx dy dz$ , 其中  $\Omega$  由抛物柱

面  $y = \sqrt{x}$  及平面  $y = 0, z = 0$  和  $x + z = \frac{\pi}{2}$  围成.

$$\frac{\pi^2}{16} - \frac{1}{2}$$

## 二. 截面法(坐标轴投影法)

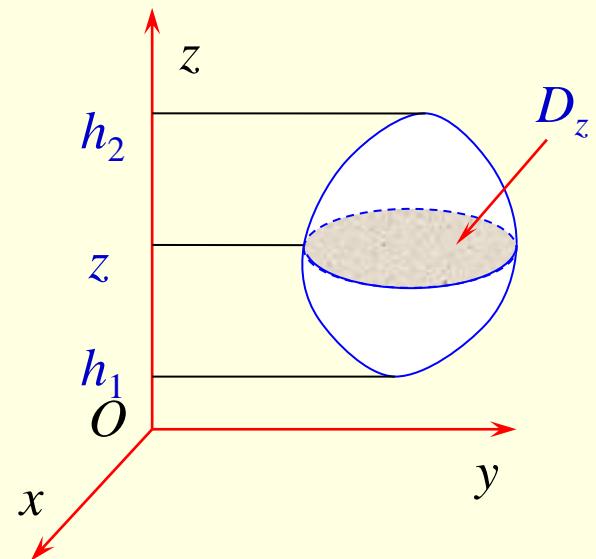
设区域 $\Omega$ 在 $z$ 轴上投影区间为 $[h_1, h_2]$ , 即 $\Omega$ 介于平面 $z = h_1$ 与 $z = h_2$ 之间, 过 $z$ 处且垂直 $z$ 轴的平面截 $\Omega$ 得截面区域 $D_z$ , 则 $\Omega$ 可表示为 z型空间区域

$$\Omega = \{(x, y, z) \mid h_1 \leq z \leq h_2, (x, y) \in D_z\}$$

从质量角度考虑, 对 $z \in [h_1, h_2]$ ,

$$\mu(z) = \iint_{D_z} f(x, y, z) dx dy$$

是物体在截面 $D_z$ 上分布的质量,



所以物体总质量为

$$\int_{h_1}^{h_2} \mu(z) dz = \int_{h_1}^{h_2} \left( \iint_{D_z} f(x, y, z) dx dy \right) dz$$

从而

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz &= \int_{h_1}^{h_2} \left( \iint_{D_z} f(x, y, z) dx dy \right) dz \\ &\stackrel{\text{def}}{=} \int_{h_1}^{h_2} dz \iint_{D_z} f(x, y, z) dx dy \end{aligned}$$

---

**例3** 计算  $I = \iiint_{\Omega} (x + z^2) dx dy dz$ , 其中  $\Omega$  由旋转抛物面

$z = x^2 + y^2$  与平面  $z = 2$  围成. (注意对称性) 4π

**例4** 设物体位于  $\Omega: z \geq \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{3}}$ ,  $x^2 + y^2 + (z - 2)^2 \leq 4$ ,

其密度为  $|z|$ , 求此物体的质量.

21π

### 10.3.3 三重积分的换元

#### 一. 变量代换

设变换  $T: \begin{cases} x = x(u, v, w) \\ y = y(u, v, w) \\ z = z(u, v, w) \end{cases}$  有连续偏导数, 且满足

$$J = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} = \begin{vmatrix} x_u & x_v & x_w \\ y_u & y_v & y_w \\ z_u & z_v & z_w \end{vmatrix} \neq 0, \quad \text{又 } f(x, y, z) \in C(\Omega), \text{ 则}$$

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{\Omega'} f(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)) |J| du dv dw.$$

其中  $T$  将  $\Omega'$  变为  $\Omega$ .

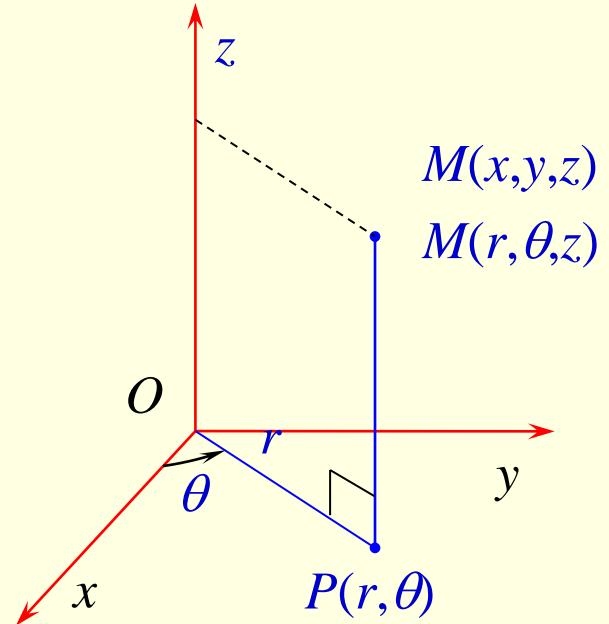
## 二. 柱面坐标系

此坐标系实乃 $x, y$ 坐标转变为极坐标, 其变换公式为

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \\ z = z \end{cases}$$

由  $\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, z)} = \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta & 0 \\ \sin \theta & r \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r,$

得到柱面坐标积分公式

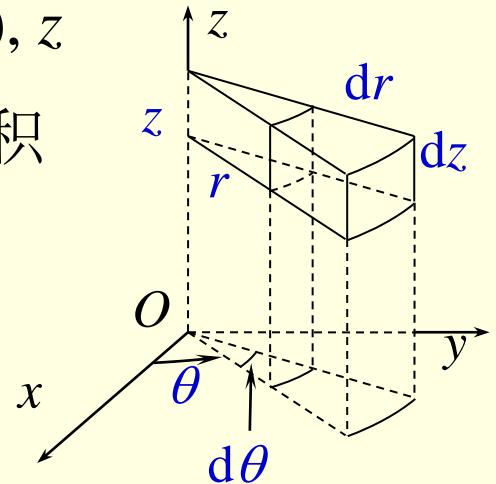


$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dV = \iiint_{\Omega'} f(r \cos \theta, r \sin \theta, z) r dr d\theta dz$$

其中 $\Omega'$ 是 $\Omega$ 在柱面坐标系下的表示形式.

## 体积微元几何意义

用  $r = \text{常数}$ (圆柱面),  $\theta = \text{常数}$ (半平面),  $z = \text{常数}$ (平面)的曲面分割  $\Omega$ , 小区域的体积近似等于长方体的体积, 故为  $rd\theta dz$



注意 在具体计算时, 通常用柱线法或截面法得到  $D$ (或  $D_z$ ) 的二重积分, 再转化为极坐标.

**例5** 计算  $I = \iiint_{\Omega} (x+z) dV$ , 其中  $\Omega$  是空间域

$$z \geq \sqrt{x^2 + y^2}, \quad z \leq \sqrt{1 - (x^2 + y^2)}.$$

$$\frac{\pi}{8}$$

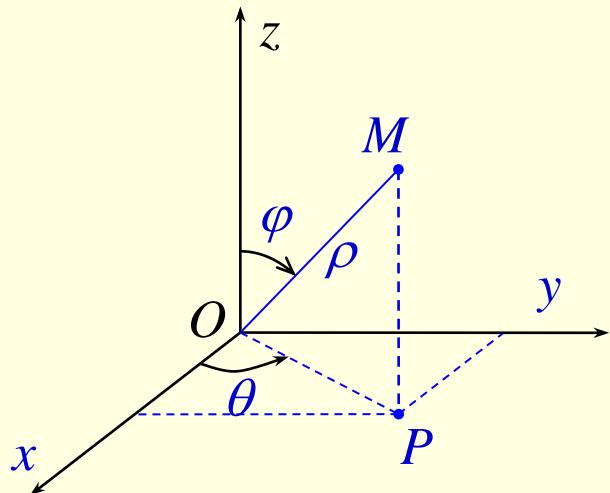
**例6** 计算  $I = \iiint_{\Omega} (x+y)^2 dV$ , 其中  $\Omega$  是由曲线  $\begin{cases} y^2 = 2z \\ x = 0 \end{cases}$

绕  $z$  轴旋转得到的曲面与平面  $z = 2, z = 8$  所围成的区域.

$$336\pi$$

### 三. 球面坐标系

设  $M(x,y,z)$  是空间一点, 引进球面坐标  $(\rho, \varphi, \theta)$



$$\rho = |\overrightarrow{OM}| \in [0, +\infty)$$

$$\varphi = (\overrightarrow{OM}, Oz) \in [0, \pi]$$

$\theta$ :  $\overrightarrow{OP}$  对  $Ox$  轴的倾角  $\in [0, 2\pi]$   
(或  $[-\pi, \pi]$ )

坐标变换关系式

$$\begin{cases} x = \rho \sin \varphi \cos \theta \\ y = \rho \sin \varphi \sin \theta \\ z = \rho \cos \varphi \end{cases}$$

由于Jacobi行列式

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\rho, \varphi, \theta)} = \begin{vmatrix} \sin \varphi \cos \theta & \rho \cos \varphi \cos \theta & -\rho \sin \varphi \sin \theta \\ \sin \varphi \sin \theta & \rho \cos \varphi \sin \theta & \rho \sin \varphi \cos \theta \\ \cos \varphi & -\rho \sin \varphi & 0 \end{vmatrix} = \rho^2 \sin \varphi$$

导出

$$\begin{aligned} & \iiint_{\Omega} f(x, y, z) dV \\ &= \iiint_{\Omega'} f(\rho \sin \varphi \cos \theta, \rho \sin \varphi \sin \theta, \rho \cos \varphi) \rho^2 \sin \varphi d\rho d\varphi d\theta \end{aligned}$$

其中  $\Omega'$  是  $\Omega$  在球面坐标系下的表示形式.

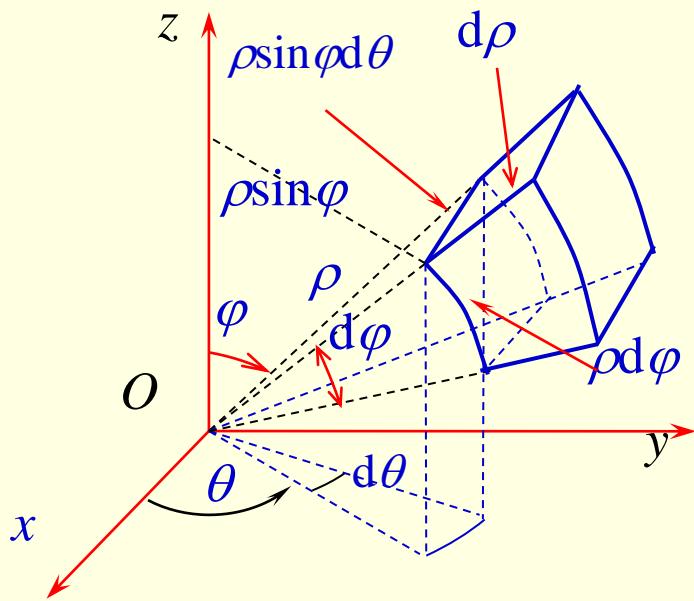
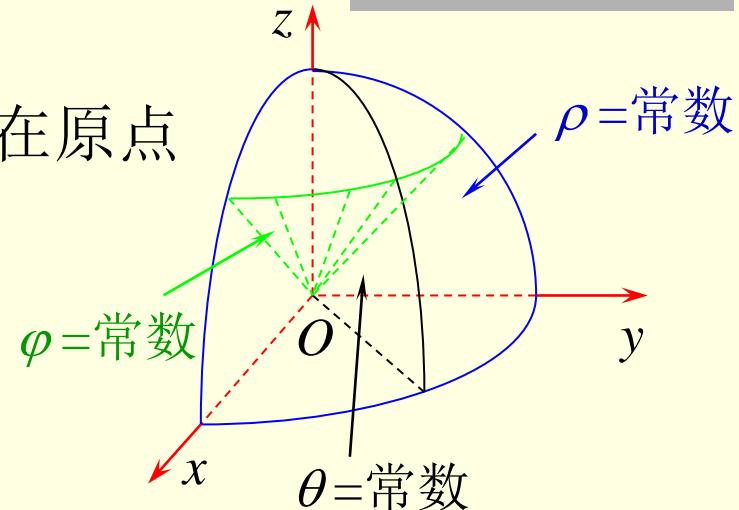
## ◆ 使用球面坐标时

$\rho = \text{常数(球面)}$

$\varphi = \text{常数(半圆锥面)} \rightarrow \text{顶点}$

$\theta = \text{常数(半平面)} \rightarrow \text{过} z \text{轴}$

球心  
在原点



## ◆ 体积微元几何意义

用上面三类曲面分割  $\Omega$ , 所得小区域近似视为长方体, 故体积

$$dV = \rho^2 \sin \varphi d\rho d\varphi d\theta$$

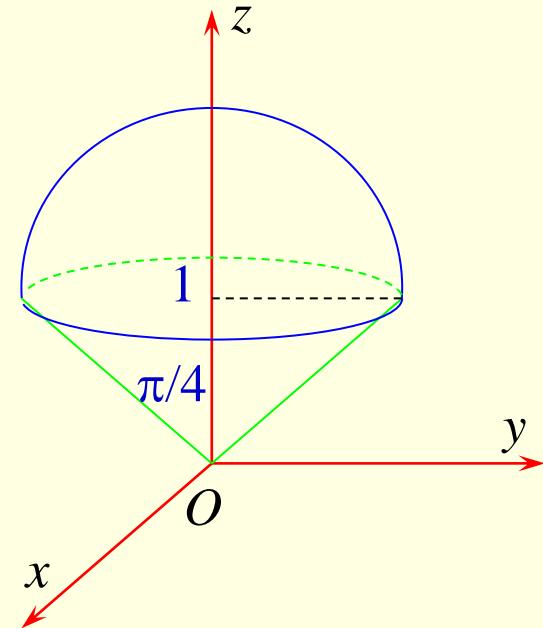
● 积分区域边界曲面方程或被积函数含  $x^2 + y^2 + z^2$ ,

可考虑用球面坐标

例7 计算  $I = \iiint_{\Omega} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dV$ , 其中

$\Omega$ 是由球面  $x^2 + y^2 + z^2 = 2z$  与锥面

$z = \sqrt{x^2 + y^2}$  围成含  $z$  轴部分区域.



$$\frac{(8-\sqrt{2})\pi}{5}$$

例8 求立体  $\Omega$ :  $\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{z}{c}\right)^{\frac{2}{3}} \leq 1$  的体积.

$$\frac{4}{35} \pi abc$$

**例9** 函数  $f(u)$  在  $U(0)$  可导, 且  $f(0) = 0$ , 求极限

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{t^4} \iiint_{\Omega_t} f(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}) dx dy dz,$$

其中  $\Omega_t$  是  $x^2 + y^2 + z^2 \leq t^2$ .

$$\pi f'(0)$$

**例10** 求位于  $\Omega: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1$ , 而密度函数为

$\mu = 1 + z^2$  的物体的质量.

$$\frac{4\pi abc}{3} + \frac{4\pi abc^3}{15}$$

### 10.3.4 重积分的物理应用

一. 质心 空间质点  $m_i(x_i, y_i, z_i)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , 其质心

$$x_0 = \frac{\sum_{i=1}^n x_i m_i}{\sum_{i=1}^n m_i} \quad y_0 = \frac{\sum_{i=1}^n y_i m_i}{\sum_{i=1}^n m_i} \quad z_0 = \frac{\sum_{i=1}^n z_i m_i}{\sum_{i=1}^n m_i}$$

物体  $\Omega$  可分成  $n$  小块  $V_i$ , 其质量  $\rho(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta V_i$ , **质心** 为

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n \xi_i \rho(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta V_i}{\sum_{i=1}^n \rho(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta V_i} \rightarrow x_G = \frac{\iiint_{\Omega} x \rho(x, y, z) dV}{\iiint_{\Omega} \rho(x, y, z) dV}$$

类似可得 $y_G, z_G$ . 当 $\rho = 1$ 时, 得其**形心**坐标

---

$$x_G = \frac{1}{V(\Omega)} \iiint_{\Omega} x dV$$

$y_G, z_G$  可类似得到, 其中 $V(\Omega)$ 表示物体的体积.

**想一想** 面密度为 $\mu(x, y)$ 的薄板 $D$ 的**质心(形心)**?

**例11** 设球体  $x^2 + y^2 + z^2 \leq 2az$  中任一点的密度与该点到原点的距离成正比, 求此物体的质心.

$$\left( 0, 0, \frac{8}{7}a \right)$$

## 二. 转动惯量

把物体 $\Omega$  视为位于 $(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$ , 质量为 $\rho(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta V_i$  的质点系 $V_i (i = 1, 2, \dots, n)$ , 该质点系对 $x$ 轴**转动惯量**

$$\sum_{i=1}^n (\eta_i^2 + \zeta_i^2) \rho(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta V_i$$

↓

$$I_x \stackrel{\text{def}}{=} \iiint_{\Omega} (y^2 + z^2) \rho(x, y, z) dV$$

类似可得对 $y$ 轴和 $z$ 轴, 以及对原点 $O$ 的转动惯量

$$I_O = \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2 + z^2) \rho(x, y, z) dV$$

想一想 面密度为 $\mu(x, y)$ 的薄板D的转动惯量?

例12 求底半径为 $R$ , 高为 $l$ 的均匀圆柱体对其轴线的转动惯量.

$$\frac{1}{2}MR^2$$

例13 求半径为 $R$ , 质量为 $M$ 的均匀球体绕其直径的转动惯量.

$$\frac{2}{5}MR^2$$

# Chap 10—4

$n$ 重积分

想一想  $n$  元函数  $f(x)$  在  $n$  维立体上重积分的定义?

定理 设  $f$  在  $\Omega = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_n, b_n]$  上连续, 则

$$\int_{\Omega} f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \cdots dx_n$$

$$= \int_{a_1}^{b_1} dx_1 \int_{[a_2, b_2] \times \cdots \times [a_n, b_n]} f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_2 \cdots dx_n$$

$$= \int_{[a_1, b_1] \times \cdots \times [a_{n-1}, b_{n-1}]} dx_1 \cdots dx_{n-1} \int_{a_n}^{b_n} f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_n$$

## 例1 求 $\mathbf{R}^n$ 中的几何体( $n$ 维单纯形)

$$T_n = \left\{ (x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_1 + x_2 + \dots + x_n \leq h, x_i \geq 0 (i = 1, 2, \dots, n) \right\}$$

的体积 $V_n$ .

练习 设 $\Omega = [0, 1] \times [0, 1] \times \dots \times [0, 1] \subset \mathbf{R}^n$ , 求

$$(1) \int_{\Omega} (x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2) dx_1 dx_2 \dots dx_n$$

$$(2) \int_{\Omega} (x_1 + x_2 + \dots + x_n)^2 dx_1 dx_2 \dots dx_n$$

## 例2 求4维球体

---

$$B_4 = \left\{ (x_1, x_2, x_3, x_4) \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 \leq R^2 \right\}$$

的体积  $V_4$ .

## 思考题 求 $n$ 维球体

$$B_n = \left\{ (x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 \leq R^2 \right\}$$

的体积  $V_n$ .