Chap 9

多变量函数的微分学

Chap 9 — 1

多变量函数及其连续性

9.1.2 平面上的点集

一、邻域 设$M_0 \in \mathbf{R}^2$, $r > 0$, 集合

距离

$$B(M_0, r) = \{M \mid \rho(M, M_0) < r\}$$

称为M_0的r **圆邻域**(有时记为$B_r(M_0)$)

$$S(M_0, r) = \{M(x, y) \mid |x - x_0| < r, |y - y_0| < r\}$$

称为M_0的r **方邻域.**

试一试 去心邻域$B_(M_0, r)$的定义？

定义 设$E \subset \mathbf{R}^2$, 若$\exists R > 0$, 使$E \subset B(O, R)$, 则称E为**有界集**, 否则称为**无界集**. E的**直径**定义为

$$\operatorname{diam}(E) = \sup_{M', M'' \in E} \{\rho(M', M'')\}$$

二、内点, 外点和边界点

定义 设$M \in \mathbf{R}^2, E \subset \mathbf{R}^2$

1° 若$\exists r>0$, 使得 $B(M,r)\subset E$, 则称M是E的**内点**.

E全体内点的集合称为E的**核**, 记为E°. →内部

外部 $(E^c)^\circ$

2° 若$\exists r>0$, 使$B(M,r)\cap E=\varnothing$, 则称M是E的**外点**.

余集

3° 若$\forall r>0$, $B(M,r)\cap E\neq\varnothing$且$B(M,r)\cap E^c\neq\varnothing$

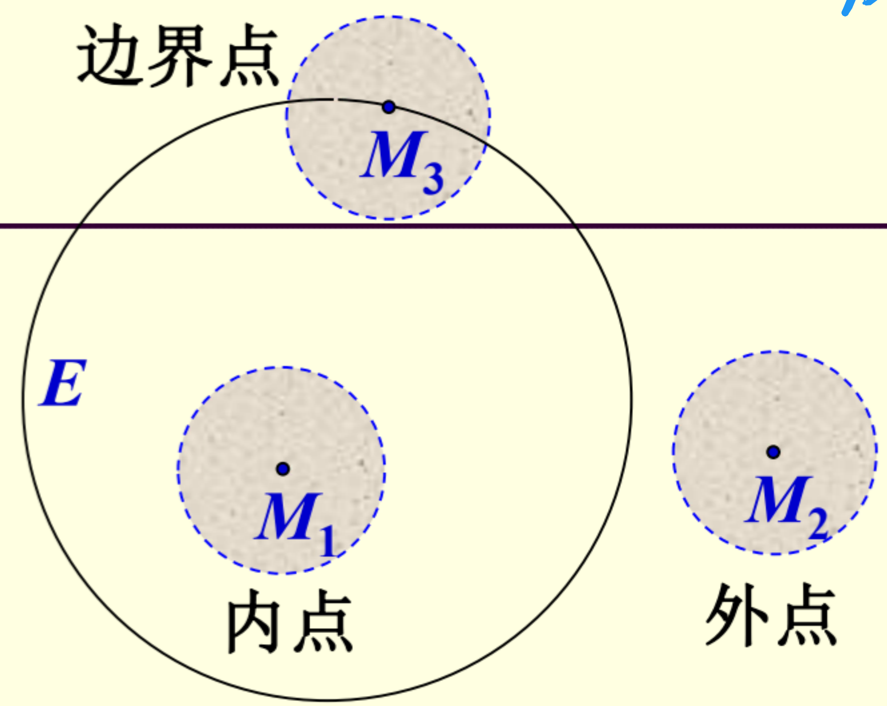
则称M是E的**边界点**, 边界点的集合称为**边界**, 记为∂E.

边界点 可能 $\in E$

也可能 $\notin E$

例 设 $E=\{(x,y)\mid x\in\mathbb{Q},y\in\mathbb{Q}\}$

$E^\circ=\phi \quad \partial E=\mathbb{R}^2 \quad (E^c)^\circ=\phi$



结论 $$E^\circ\cup\partial E\cup(E^c)^\circ=\mathbb{R}^2$$

试一试 $\mathbf{R}^n$中上述名词的定义？

三、孤立点与聚点

定义 设$M \in \mathbf{R}^2, E \subset \mathbf{R}^2$, 若$\forall r > 0, B_(M,r) \cap E \neq \varnothing$,

则称M是E的**聚点**. 聚点的集合称为**导集**, 记为E'.

定义 设$M \in \mathbf{R}^2, E \subset \mathbf{R}^2$, 若$\exists r > 0, B(M,r) \cap E = \{M\}$,

则称M是E的**孤立点**.

内点、一定是聚点、

外点、一定不是聚点、

边界点 $\longrightarrow \begin{cases} \text{孤立点、} \\ \text{聚点、} \end{cases}$

四、平面点列的极限

定义 设$\{M_n\}\subset \mathbf{R}^2$, 其中 $M_n(x_n, y_n)$, 若存在 $M_0(x_0, y_0)$

使得 $$\lim_{n\to\infty}\rho(M_n, M_0)=0$$

则称$\{M_n\}$收敛于M_0, 记为$\lim\limits_{n\to\infty} M_n = M_0$

结论 1° 若$\{M_n\}$收敛, 则其极限点必唯一.

$$2^\circ \lim_{n\to\infty} M_n = M_0 \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \text{且} \lim_{n\to\infty} y_n = y_0.$$

$|x_n - x_0|$

定理 平面有界点列必有收敛子列. $|y_n - y_0| \le \rho(M_n, M_0) \le |x_n - x_0| + |y_n - y_0|$

设$\{M_n(x_n,y_n)\}$有界 则$\{x_n\}$有界 据B-W Th.

$\exists\{x_{n_k}\}\subset\{x_n\}$使$\lim\limits_{k\to\infty}x_{n_k}=x_0$ $\{y_{n_k}\}$有界. $\exists\{y_{n_{k_i}}\}$

$\lim\limits_{i\to\infty}y_{n_{k_i}}=y_0$

又由归并性. $\lim\limits_{i\to\infty}x_{n_{k_i}}=x_0$. 故$M_{n_{k_i}}\to(x_0,y_0)$ #

取两次子列

五、开集与闭集

定义 设$E\subset\mathbf{R}^2$, 若E中的点都是E的内点, 即$E=E^{\circ}$,

则称E为**开集**.

边界点不在E中

定义 设$E\subset\mathbf{R}^2$, 若E的余集为开集, 则称E为**闭集**.

E与其导集E'的并集称E的**闭包**, 记为 $\overline{E}$

性质1 两个开集并和交仍为开集;

两个闭集并和交仍为闭集.

证(1)设E和F为开集 并 $\forall M \in (E\cup F)$ 则M必存在E or F

不妨 $M \in E$. E开, $\exists r_0 > 0$ 使 $B(M, r_0) \subset E$

$\therefore B(M, r_0) \subset (E\cup F)$ 即M是 $E\cup F$ 内点. $\rightarrow E\cup F$ 开

交 $\forall M \in (E\cap F)$

$M\in E, M\in F$. $\exists r_1 > 0 \quad B(M, r_1) \subset E$ $\exists r_2 > 0 \quad B(M, r_2) \subset F$ let $r = \min\{r_1, r_2\}$

$B(M, r) \subset (E\cap F)$

(2) 设 I J 闭集 并: $\forall M \in (I\cup J)^c = I^c \cap J^c$ I^c J^c 开集

$\therefore (I\cup J)^c$ 开集 (1)

$\therefore I\cup J$ 为闭集

交: $\forall M \in (I\cap J)^c = I^c \cup J^c$

两个 → 无穷: 各有一半成立

开集仅交成立

闭集仅并成立 (worning: 未验证)

性质2 E 为开集 $\Leftrightarrow \partial E \cap E = \varnothing$ 边界点不在E上

$\Rightarrow$ 边界点不属于E　　$\Leftarrow$ E的点都是内点 → 开集

定理 下面3条等价

1° E 为闭集　　2° $\partial E \subset E$　　3° $E = \overline{E}$

定义 设 $E \subset \mathbf{R}^2$, 若 $\forall P, Q \in E$, 都存在包含于 E 中的**连续曲线**连接 P, Q, 则称 E 是(**道路**)**连通的**.

连通开集称为**开区域**, 开区域的闭包称为**闭区域**

注意不是连通闭集

闭集称.

$1^\circ \Rightarrow 2^\circ$：$\partial(E^c) \cap E^c = \phi$

$\underset{\text{由定义显然}}{\underset{\partial E}{\parallel}}$　　$\therefore \partial E \subset E$

$2^\circ \Rightarrow 3^\circ$　$\partial E \subset E$

E' 包含内点，非孤立之边界点

$E' \subset E \cup \partial E = E$

$\bar{E} = E \cup E' = E$

$3^\circ \Rightarrow 1^\circ$　则 $E^c = (\bar{E})^c$　聚点 $\not\subset (\bar{E})^c = E^c$　$\therefore$ 余集中无 E 的聚点

从而 E^c 不含 E 的边界点　$\therefore E^c \cap \partial(E^c) = \phi$

故 E^c 开集 $\rightarrow$ E 闭集

9.1.2 多变量函数

定义 设$D \subset \mathbf{R}^n$, 映射

$$f: D \to \mathbb{R},$$
$$\boldsymbol{x} \mapsto f(\boldsymbol{x})$$

称为n元函数, 记为 $u = f(\boldsymbol{x})$, 其中D称为定义域.

值域 $f(D) = \{u \mid u = f(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{x} \in D\}$

等高(值)线 $L_c = \{(x, y) \mid f(x, y) = c, c \in f(D)\}$

例1 考察函数 $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$

定义 设$D \subset \mathbf{R}^n$, 映射

$$\boldsymbol{f}: D \to \mathbb{R}^m,$$
$$\boldsymbol{x} \mapsto \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$$

称为**m维n元向量值函数**, 记为 $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$

- 坐标形式

$$\boldsymbol{f}: (x_1, x_2, \cdots, x_n) \to (y_1, y_2, \cdots, y_m)$$

其中$\boldsymbol{f}$的分量

$$y_1 = f_1(x_1, x_2, \cdots, x_n), \cdots, y_m = f_m(x_1, x_2, \cdots, x_n)$$

9.1.3 多变量函数的极限

定义 设$D \subset \mathbf{R}^2$, f在D上定义, $M_0\ (x_0, y_0)$为D的聚点.

若$\exists\ a \in \mathbf{R}$ 使得 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall M \in B\_(M_0, \delta) \cap D$:

$$|f(M) - a| < \varepsilon$$

二维情形 B_ 不一定在D中
和一维略有区别

则称当$M \to M_0$时 $f(M)$的(二重)极限为a, 记为

$$\boxed{\lim_{M \to M_0} f(M) = a}$$

- 坐标形式

$$\boxed{\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = a \quad 或 \quad \lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x,y) = a}$$

注意

$$M(x,y) \in B\_(M_0,\delta)$$

$$\Leftrightarrow \quad 0 < \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} < \delta$$

$$\Leftrightarrow \quad |x-x_0|,|y-y_0| < \delta_1, (x,y) \neq (x_0,y_0)$$

问题 $\quad \xleftrightarrow{?} \quad 0 < |x-x_0|,|y-y_0| < \delta_1$

➢ 与单变量函数相似点

1. 当$(x, y) \to (x_0, y_0)$时, $f(x,y)$ 的变化趋势.

2. 有类似的性质和运算法则.

➢ 与单变量函数区别

路径极限

平面上$M \to M_0$有无穷多方向, 且采取的路径也是任意的, 既可取直线, 也可取曲线. 无论沿何种方向或何种路径, 只要$\rho(M, M_0)$充分小, 就有

$$|f(M) - a| < \varepsilon.$$

例2 证明 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy^2}{x^2+y^2}=0.$

例3 判断 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ 的存在性.

例4 判断

$$f(x,y)=\frac{x^2y}{x^4+y^2}$$

在(0,0)点极限的存在性.

$\forall \varepsilon>0$, 取 $\delta=\varepsilon$, $\forall\, 0<\sqrt{x^2+y^2}<\delta$

eg2. $\left|\frac{xy^2}{x^2+y^2}-0\right| = |x|\frac{y^2}{x^2+y^2} \le |x| \le \sqrt{x^2+y^2} < \varepsilon$

eg3. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x=y}} \frac{xy}{x^2+y^2} = \frac{1}{2}$

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y=0}} \frac{xy}{x^2+y^2} = 0$ $\therefore$ 極限不存在

eg4. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y=kx}} \frac{x^2y}{x^4+y^2} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{kx^3}{x^4+k^2x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{kx}{x^2+k^2} = 0 \quad (k\in\mathbb{R})$

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y=x^2}} \frac{x^2y}{x^4+y^2} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x^4}{2x^4} = \frac{1}{2}$

■ 累次极限

定义 设 $I \times J \subset \mathbf{R}^2$, x_0, y_0分别为I, J的聚点. 固定$x \in I$ $(x \neq x_0)$. 若存在**首次极限** $\varphi(x) = \lim\limits_{y \to y_0} f(x, y)$, 且

$$\lim_{x \to x_0} \varphi(x) = a$$

则称$f(x, y)$在(x_0, y_0)处先y后x的**累次(二次)极限**为a,记为

$$\boxed{\lim_{x \to x_0} \lim_{y \to y_0} f(x, y) = a}$$

试一试 先x后y的累次极限的定义?

例6 考察

$$f(x,y)=\begin{cases} x\sin\dfrac{1}{y}+y\sin\dfrac{1}{x}, & xy\neq 0,\\ 0, & xy=0 \end{cases}$$

在(0,0)处二重极限和累次极限的存在性.

思考 若

$$f(x,y)=\begin{cases} y\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0 \end{cases}$$

结论如何?

取 $\delta=\frac{\varepsilon}{2}$ 当 $\sqrt{x^2+y^2}<\delta$

eg6. 二重: $|f(x,y)-0|\le|x|+|y|\le 2\sqrt{x^2+y^2}<\varepsilon$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0$$

累次 当固定 $x\neq 0$

$\lim\limits_{y\to 0} x\sin\frac{1}{y}+y\sin\frac{1}{x}$ 显然无极限

eg6': 2重: 取 $\delta=\varepsilon$ 当 $\sqrt{x^2+y^2}<\delta$

$|f(x,y)-0|\le|y|<\sqrt{x^2+y^2}<\varepsilon$ $\lim\limits_{(x,y)\to 0} y\sin\frac{1}{x}=0$

累次. 固定 $x\neq 0$. 先y后x存在

$\lim\limits_{y\to 0} y\sin\frac{1}{x}=0$. $\lim\limits_{x\to 0} 0=0$

固定 $y\neq 0$.

先x后y不存在.

$\lim\limits_{x\to 0} y\sin\frac{1}{x}$ 不存在.

eg7. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y=kx}} \frac{y}{x}=k$ (与k有关) 故无二重极限

又 $\forall x\neq 0$. $\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)=0$ $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)=0$

$\forall y\neq 0$ $\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)=\infty$ 无极限

例7 考察

$$f(x,y)=\frac{y}{x} \quad (x\neq 0)$$

在(0,0)处二重极限和累次极限的存在性.

问题 二重极限与累次极限的关系?

$|f(x)-a|<\varepsilon$

想一想 向量值函数极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=a$ 的定义?

命题

若 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=A$ 且存在自变极限 $\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)=\varphi(x)$ 存在

则 $\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)=A$

9.1.4 多变量函数的连续性

定义 设 $f:B(M_0, r)\to\mathbf{R}$. 若

$$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,\forall M\in B(M_0,\delta):\ |f(M)-f(M_0)|<\varepsilon$$

或者 $$\lim_{M\to M_0} f(M)=f(M_0)$$

则称 $f(M)$ 在 M_0 连续.

- D 上的连续函数类 $C(D)$ 的定义?

例8 证明 $f(x,y)=\sin\sqrt{x^2+y^2}$ 在 $\mathbf{R}^2$ 上连续.

eg 8. 取定 $(x_0, y_0) \in R^2$

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta = \varepsilon$

$\forall \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < \delta$

$|f(x,y) - f(x_0, y_0)| = |\sin\sqrt{x^2+y^2} - \sin\sqrt{x_0^2+y_0^2}| \leq |\sqrt{x^2+y^2} - \sqrt{x_0^2+y_0^2}|$

$\leq \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < \varepsilon$

命题 若 $f(x,y)$在(x_0,y_0)连续, 则 $f(x,y_0)$在$x=x_0$处连续,

$f(x_0,y)$在$y=y_0$处连续.   二元连续 → 一元连续

问题 若 $f(x,y)$满足: $f(x,y_0)$在$x=x_0$处连续, $f(x_0,y)$

在$y=y_0$处连续, 是否有 $f(x,y)$在(x_0,y_0)连续?

不能

例9 考察 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ 在(0, 0)处情况.

f(x,y)无二重极限
不连续

f(x,0) 在x=0连续
f(0,y) 在y=0连续

■ 一致连续性

定义 设 $D\subset \mathbf{R}^2, f: D\to\mathbf{R}$. 若

$$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,\forall M',M''\in D,\rho(M',M'')<\delta:$$

$$|f(M')-f(M'')|<\varepsilon$$

则称 f 在 D 上一致连续, 记为 $f\in U.C.(D)$

结论 f 在 D 上不一致连续的肯定叙述:

$$\exists\varepsilon_0>0,\exists\{M_n'\},\{M_n''\}\subset D:\lim_{n\to\infty}\rho(M_n',M_n'')=0$$

$$|f(M_n')-f(M_n'')|\geq\varepsilon_0$$

注意 $y=\sin(x^2)$ 不 u.c

例10 说明 $f(x,y)=\sin xy$ 在 $\mathbf{R}^2$ 不一致连续.

■ 多变量连续函数的性质

- 与单变量连续函数类似, 有局部有界性, 局部保号性, 四则运算, 复合运算等等.
- 连通有界闭集上的多变量连续函数还有:

定理 设 $D\subset\mathbf{R}^2$ 为连通有界闭集, $f\in C(D)$, 则 f 在 D 上有

康托定理

● 有界性 ● 最值性 ● 一致连续性 D无需连通 须紧

● 介值性 ● 零值性 (思考：额外条件?)

eg10、取 $\varepsilon_0=1$ $M_n'\left(\sqrt{2n\pi+\frac{\pi}{2}}, \sqrt{2n\pi+\frac{\pi}{2}}\right)$ $M_n''\left(\sqrt{2n\pi}, \sqrt{2n\pi}\right)$

$\rho(M_n', M_n'') \to 0$.

但 $|f(M_n') - f(M_n'')| = 1$