Chap13 — 3

含参变量的定积分

13.3.1 含参变量的定积分及其性质

定义 设$f(x, u)$在$[a, b]\times[\alpha, \beta]$上定义, 且$\forall u\in[\alpha, \beta]$, $f(x, u)$关于x在$[a, b]$上可积, 则称

$$\varphi(u)=\int_a^b f(x,u)\mathrm{d}x$$

为**含参变量的定积分**, u称为**参变量**.

定理(连续性) 设$f(x,u)$在$I=[a,b]\times[\alpha,\beta]$上连续，则

$$\varphi(u)=\int_a^b f(x,u)\mathrm{d}x$$

在$[\alpha,\beta]$上连续.

- **积分号下取极限**

$$\boxed{\lim_{u\to u_0}\int_a^b f(x,u)\mathrm{d}x=\int_a^b f(x,u_0)\mathrm{d}x=\int_a^b \lim_{u\to u_0} f(x,u)\mathrm{d}x}$$

例1 计算极限 $\lim\limits_{u\to 0^+}\int_0^1 \dfrac{\mathrm{d}x}{1+x^2\cos xu}$

定理(交换积分次序) 设 $f(x, u) \in C[a, b]\times[\alpha, \beta]$, 则

$$\int_\alpha^\beta \left(\int_a^b f(x,u)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}u = \int_a^b \left(\int_\alpha^\beta f(x,u)\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}x$$

或

$$\int_\alpha^\beta \mathrm{d}u\int_a^b f(x,u)\mathrm{d}x = \int_a^b \mathrm{d}x\int_\alpha^\beta f(x,u)\mathrm{d}u$$

例2 计算积分

$$I = \int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x}\mathrm{d}x$$

其中 $0 < a < b$.

➢ 常用积分变换式 $(0 < a < b)$

$$\frac{\sin bx - \sin ax}{x} = \int_a^b \cos xy \,\mathrm{d}y$$

$$\frac{\arctan bx - \arctan ax}{x} = \int_a^b \frac{1}{1+(xy)^2}\,\mathrm{d}y$$

$$\frac{\mathrm{e}^{bx} - \mathrm{e}^{ax}}{x} = \int_a^b \mathrm{e}^{xy}\,\mathrm{d}y$$

例3 计算 $\int_0^1 \left(\int_\pi^{2\pi} \frac{y \sin xy}{y - \sin y}\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x$

定理(可导性) 设$f(x,u), f'_u(x,u)\in C[a,b]\times[\alpha,\beta]$, 则

$\varphi(u)\in C^{(1)}[\alpha,\beta]$, 且

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\int_a^b f(x,u)\mathrm{d}x=\int_a^b\frac{\partial f}{\partial u}(x,u)\mathrm{d}x}$$

- **积分号下求导数**

例4 计算导数 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\int_0^1 \mathrm{e}^{-ux^2}\mathrm{d}x$

13.3.2 积分限含参变量的定积分

$$\psi(u)=\int_{a(u)}^{b(u)} f(x,u)\mathrm{d}x$$

定理(连续性) 设$f(x, u)$在$I=[a, b]\times[\alpha, \beta]$上连续, 又

$a(u), b(u)$在$[\alpha, \beta]$上连续, 且 $a\le a(u), b(u)\le b$, 则

$$\psi(u)=\int_{a(u)}^{b(u)} f(x,u)\mathrm{d}x$$

在$[\alpha, \beta]$上连续.

定理(可导性) 设$f(x,u), f'_u(x,u) \in C[a,b]\times[\alpha,\beta]$, 又

$a(u), b(u)$在$[\alpha,\beta]$上可导, 且 $a \le a(u), b(u) \le b$, 则

$$\psi(u) = \int_{a(u)}^{b(u)} f(x,u)\mathrm{d}x$$

在$[\alpha,\beta]$上可导, 且

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\int_{a(u)}^{b(u)} f(x,u)\mathrm{d}x = \int_{a(u)}^{b(u)} f'_u(x,u)\mathrm{d}x + f(b(u),u)b'(u) - f(a(u),u)a'(u)}$$

例5 计算导数 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\displaystyle\int_{u}^{u^2} \frac{\sin ux}{x}\mathrm{d}x$