Chap 8

空间解析几何

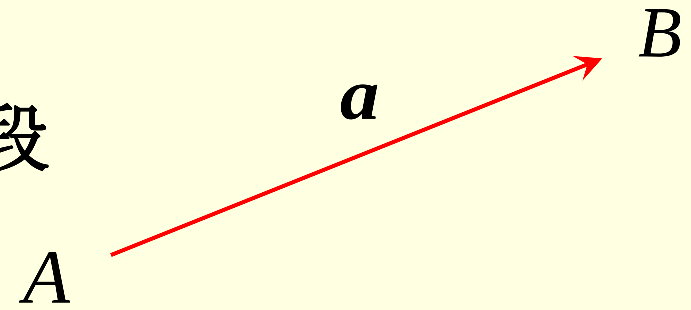
Chap 8 — 1

向量与坐标系

8.1.1 向量的概念

不仅有数值大小、而且有方向的量称为**向量**

在几何上，可用既有长度又有方向的线段(有向线段)来表示



起点A, 终点B的有向线段

其长度表示向量大小、

方向表示向量方向

记为$\overrightarrow{AB}$, 或小写字母表示，如 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{i}$

表示向量的有向线段的大小称为向量的长度

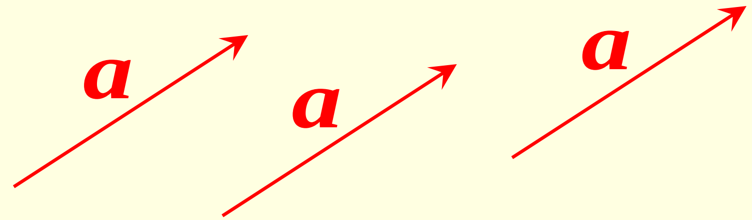
或模，记为$|\boldsymbol{a}|$

模为1的向量称为单位向量, 模为零的向量称为零向量，记为 $\mathbf{0}$ ，零向量的方向规定为任意的，可据情况任意指定

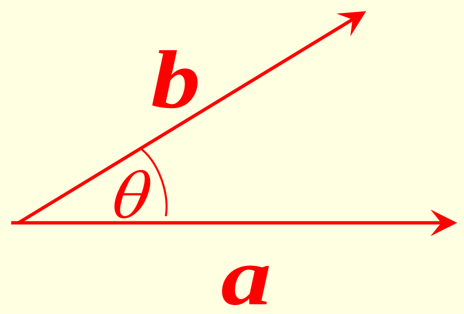
与$\boldsymbol{a}$ 大小相等方向相反的向量称为 $\boldsymbol{a}$ 的负向量, 记为 $-\boldsymbol{a}$

若向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的大小和方向均相同，则称 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 相等，记为 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$

向量相等的定义意味着：向量在平移下保持不变



将向量 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$ 平移到同一起点，表示它们的有向线段间的夹角 $\theta\ (0 \le \theta \le \pi)$ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角

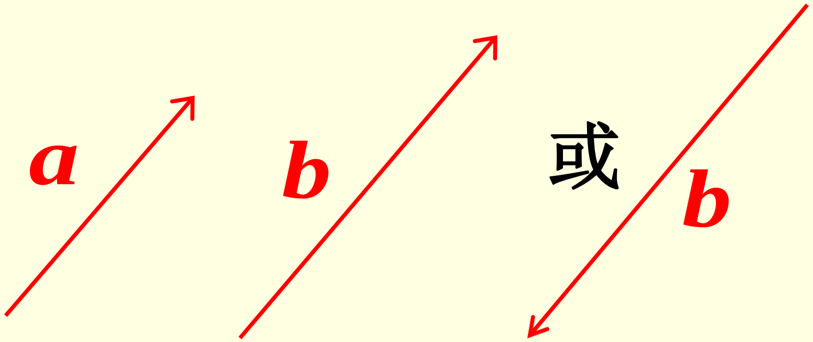


记为 $\theta(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$

零向量与任一向量的夹角规定为任意的可据需要取0到π之间的任何值

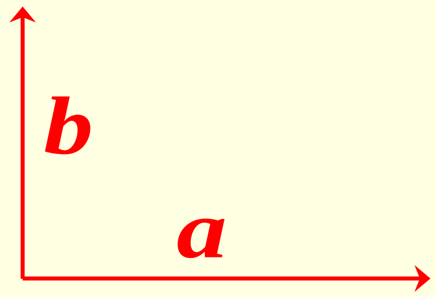
$\theta(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=0,\pi$，称向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 共线(或平行），

记为 $\boldsymbol{a} // \boldsymbol{b}$



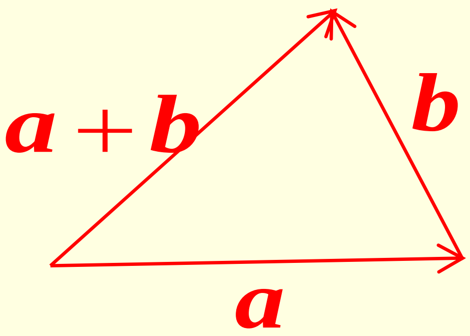
$\theta(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=\frac{\pi}{2}$，称向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 正交(或垂直)

记为 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$

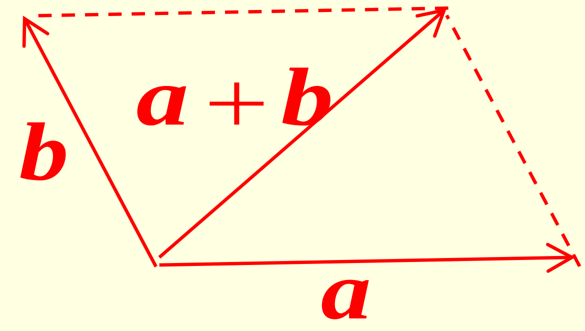


8.1.2 向量的线性运算

■ 向量的加法



三角形法则



平行四边形法则

向量加法运算律:

(1) $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$ （交换律）

(2) $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$ （结合律）

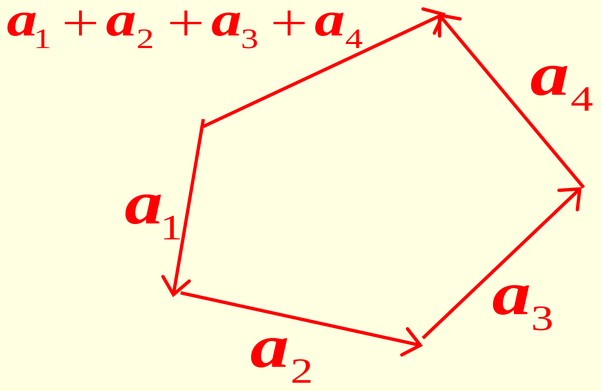
(3) $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{0}=\boldsymbol{a}$

(4) $\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})=\boldsymbol{0}$

由加法的结合律，我们可以写出

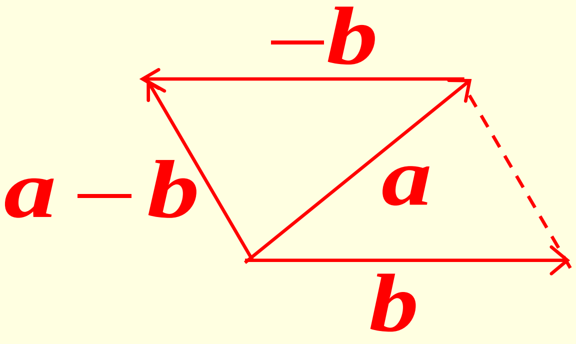
向量连加形式

$$\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\cdots+\boldsymbol{a}_n$$



■ 向量的减法

$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b})$$



加减法的三角不等式 $|\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b}|\le|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$

向量式运算时，可以进行“移项”

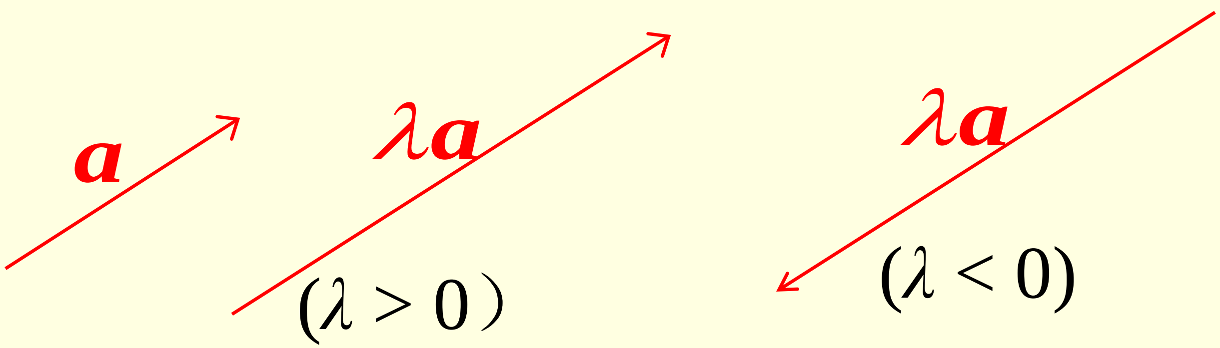
$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{b} \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{c}=\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$$

■ 向量的数乘

实数λ与向量 $\boldsymbol{a}$ 的数乘运算，结果定义为一个向量，记为 $\lambda\boldsymbol{a}$

$$|\lambda\boldsymbol{a}| = |\lambda| \cdot |\boldsymbol{a}|,$$

$\lambda > 0$, $\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 同向；$\lambda < 0$, $\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 反向；



数乘的运算律

(1) $1\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}$

(2) $\lambda(\mu\boldsymbol{a})=(\lambda\mu)\boldsymbol{a}=\mu(\lambda\boldsymbol{a})$ （结合律）

(3) $(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$ （对数的分配律）

(4) $\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$（对向量的分配律）

简单事实： 若 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$

$\frac{1}{|\boldsymbol{a}|}\boldsymbol{a}$ 是与 $\boldsymbol{a}$ 同向的单位向量（单位化）

记为 $\boldsymbol{e}_a$， 显然 $\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\boldsymbol{e}_a$

命题

(1) 若$\boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{0}$

$$\boldsymbol{a} // \boldsymbol{b} \xleftrightarrow{\text{充分必要条件}} \boxed{\text{存在唯一实数}\lambda,\text{使 } \boldsymbol{a} = \lambda \boldsymbol{b}}$$

(2) 若$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$不共线

$$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}\text{共面} \xleftrightarrow{\text{充分必要条件}} \boxed{\text{存在唯一实数组 }\lambda, \mu,\text{ 使 } \boldsymbol{c} = \lambda \boldsymbol{a} + \mu \boldsymbol{b}}$$

8.1.3 向量的点乘和叉乘

定义 向量$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$的点乘是一个数，定义为

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$$

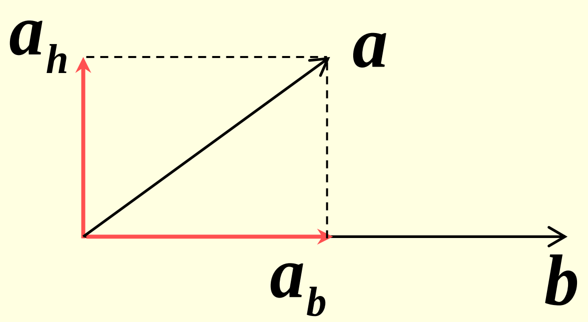
当$\boldsymbol{b}\neq \boldsymbol{0}$时, 记 $\boldsymbol{a}$在$\boldsymbol{b}$上的投影向量为$\boldsymbol{a}_b$,

$$\text{其中}\boldsymbol{a}_b\text{ 的方向: }\begin{cases}\text{与}\boldsymbol{b}\text{一致，} & \theta(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) < \dfrac{\pi}{2}\\ \text{与}\boldsymbol{b}\text{相反，} & \theta(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) > \dfrac{\pi}{2}\end{cases}$$

➢ $\boldsymbol{a}$在$\boldsymbol{b}$上的投影, 即$\boldsymbol{a}_b$的有向长度 $|\boldsymbol{a}|\cos\theta$.

结论

$$\boldsymbol{a}_b = (|\boldsymbol{a}|\cos\theta)\boldsymbol{e}_b = (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{e}_b)\boldsymbol{e}_b$$



显然

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_b + \boldsymbol{a}_h$$

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) = \boldsymbol{a}_b\cdot\boldsymbol{b}$$

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})_c = \boldsymbol{a}_c + \boldsymbol{b}_c$$

点乘运算律

(1) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$ （交换律）

(2) $(\lambda\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}=\lambda(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})$ （结合律）

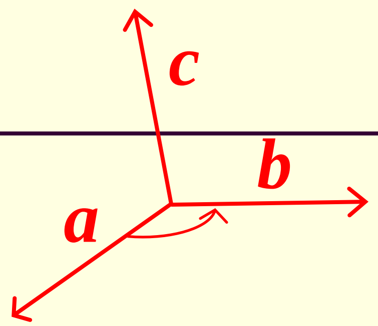
(3) $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$ （分配律）

用内积表示模和夹角

$$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}}$$

$$\cos\theta(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|} \qquad (\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b} \xleftrightarrow{\text{充分必要条件}} \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0)$$

右手系



定义 $\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的**叉乘** $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$是一个向量:

其方向与 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 均正交, 且 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 构成右手系

$$|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\theta(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$$

$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 为邻边的平行四边形面积

结论 $$\boldsymbol{a}//\boldsymbol{b} \xleftrightarrow{\text{充分必要条件}} \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$$

叉乘运算律

(1) $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}$ 反交换律

(2) $(\lambda\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{b}=\lambda(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}\times(\lambda\boldsymbol{b})$ （数）结合律

(3) $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$ 分配律

定义 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$的**混合积** 定义为: $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}$

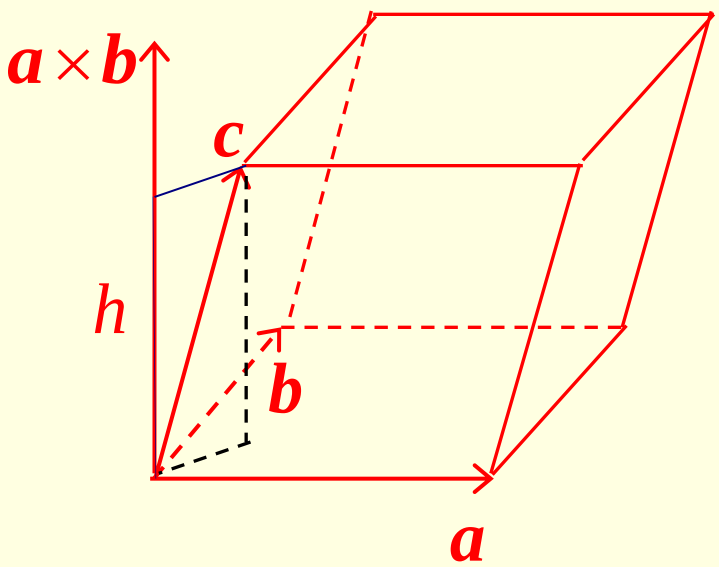
根据内积定义

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}||\boldsymbol{c}|\cos\theta(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})$$

■ 混合积的几何意义

由于 $|\boldsymbol{c}||\cos\theta(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})| = |\boldsymbol{c}_{\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}}|$

$$\Rightarrow \quad |(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}| = |\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}||\boldsymbol{c}_{\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}}|$$



$|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}|$ 是以 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 为同顶点三条棱的平行六面体的体积

几个结论

(1) $\boldsymbol{a}, \ \boldsymbol{b}, \ \boldsymbol{c}$ 成右手系， $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}>0$

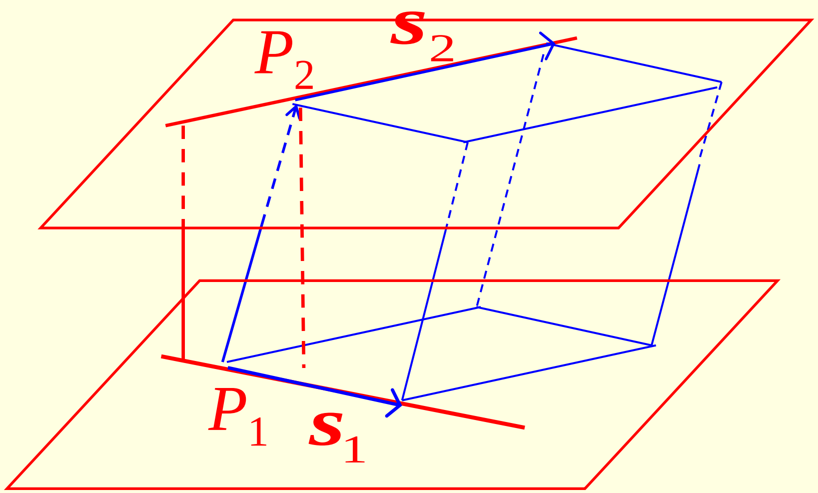
$\boldsymbol{a}, \ \boldsymbol{b}, \ \boldsymbol{c}$ 成左手系， $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}<0$

(2) $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 共面 $\xleftrightarrow{\text{充分必要条件}}$ $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=0$

(3) $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}=\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$

$=\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}$

例1 设 l_1与l_2是异面直线, l_1过点P_1, 方向与向量 $\boldsymbol{s}_1$ 平行，l_2过点P_2，方向与向量 $\boldsymbol{s}_2$ 平行，试求 l_1与l_2之间的距离.



$$d = \frac{|(\boldsymbol{s}_1 \times \boldsymbol{s}_2) \cdot \overrightarrow{P_1P_2}|}{|\boldsymbol{s}_1 \times \boldsymbol{s}_2|}$$

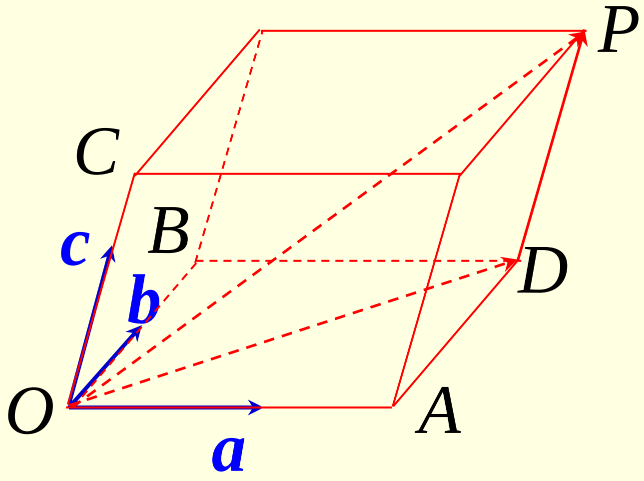
8.1.4 向量的坐标表示

定理 设向量组$\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}\}$不共面, V是向量空间 , 则对任意$\boldsymbol{x} \in V$, 存在唯一实数组 x_1, x_2, x_3， 使得

$$\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{a} + x_2\boldsymbol{b} + x_3\boldsymbol{c}$$

线性组合

系数(x_1, x_2, x_3)称为$\boldsymbol{x}$在**基**$\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}\}$下的**坐标**.



8.1.5 空间坐标系

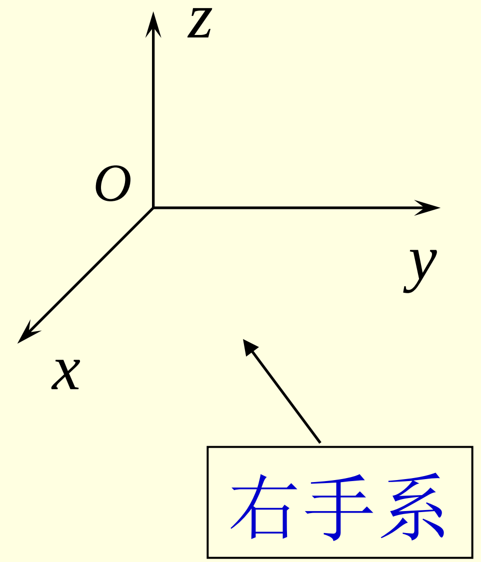
将空间的点与数联系, 把几何问题转化为代数问题, 需要建立坐标系.

坐标系: $Oxyz$, 原点: O

坐标轴: Ox轴, Oy轴, Oz轴.

坐标面: xOy面, yOz面, zOx面.

卦限: 八卦限(I, II, …, VIII).



■ 点的坐标

$\boxed{\text{点 } M} \xleftrightarrow{\text{一一对应}} \boxed{\text{坐标 } (x, y, z)}$

➢ 两点间距离公式

$M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ 间的距离

$$\boxed{d = |\overrightarrow{M_1M_2}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}}$$

$$\text{向量}\,\mathbf{v} \longleftrightarrow \text{定位向量}\,\overrightarrow{OP} \longleftrightarrow \boldsymbol{P}\text{点} \longleftrightarrow \boldsymbol{P}\text{点的坐标}$$

一一对应

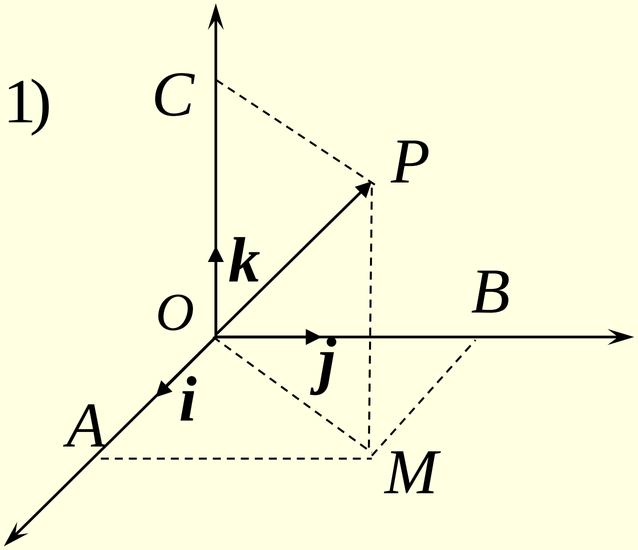
三维行向量： $\mathbf{v}=(a,b,c)$ 三维列向量： $\mathbf{v}=\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$

模： $|\mathbf{v}|=|\overrightarrow{OP}|=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$

坐标向量 与x轴、y轴、z轴正向相同的单位向量

记为$\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$

$$\boldsymbol{i}=(1,0,0),\quad \boldsymbol{j}=(0,1,0),\quad \boldsymbol{k}=(0,0,1)$$



若 $P(a,b,c)$，则有

$$\boxed{\boldsymbol{v}=\overrightarrow{OP}=a\boldsymbol{i}+b\boldsymbol{j}+c\boldsymbol{k}}$$

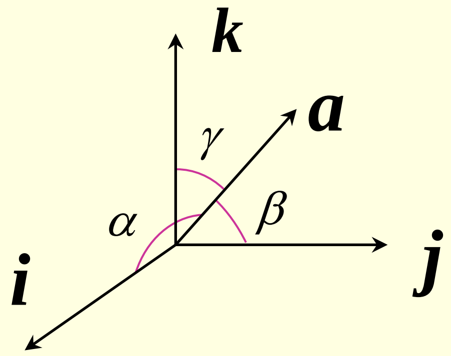
向量方向的表示

- 方向角

$$\alpha = \theta(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{i}) \quad \beta = \theta(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{j}) \quad \gamma = \theta(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{k})$$

- 方向余弦

$$\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$$



■ 向量线性运算的坐标表示

设 $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,a_3)$, $\boldsymbol{b}=(b_1,b_2,b_3)$, $\lambda\in\mathbb{R}$, 则

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(a_1\boldsymbol{i}+a_2\boldsymbol{j}+a_3\boldsymbol{k})+(b_1\boldsymbol{i}+b_2\boldsymbol{j}+b_3\boldsymbol{k})$$

$$=(a_1+b_1)\boldsymbol{i}+(a_2+b_2)\boldsymbol{j}+(a_3+b_3)\boldsymbol{k}$$

故 $$\boxed{\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(a_1+b_1,a_2+b_2,a_3+b_3)}$$

类似有

$$\boxed{\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(a_1-b_1,a_2-b_2,a_3-b_3)}$$

$$\boxed{\lambda\boldsymbol{a}=(\lambda a_1,\lambda a_2,\lambda a_3)}$$

由数乘向量的坐标表示导出

$$\boldsymbol{a} /\!/ \boldsymbol{b} \xleftrightarrow{\text{充分必要条件}} \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3}$$

例2 设 $\boldsymbol{a} = (1, -1, 2)$, $\boldsymbol{b} = (1, 0, 2)$, 又 $\boldsymbol{c} = 2\boldsymbol{a} - 3\boldsymbol{b}$. 试用 $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ 表示向量 $\boldsymbol{c}$, 并求与 $\boldsymbol{c}$ 同方向的单位向量.

例3 设 $M_1(x_1,y_1,z_1)$, $M_2(x_2,y_2,z_2)$ 是空间两点,

点M位于过 M_1,M_2 的直线上且使 $\overrightarrow{M_1M}=\lambda\overrightarrow{MM_2}$,

求点 M 的坐标.

定比分点公式: $\boxed{x=\dfrac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\ y=\dfrac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda},\ z=\dfrac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}}$

■ 向量点乘的坐标表示

若 $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,a_3),\boldsymbol{b}=(b_1,b_2,b_3)$ ，则有

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$$

特别地 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{i}=a_1,\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{j}=a_2,\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{k}=a_3$

➢夹角余弦的坐标表示

$$\boxed{\cos\theta(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=\frac{a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\cdot\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}}}$$

➢ 方向余弦的表示

$$\cos\alpha = \frac{a_1}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}, \quad \cos\beta = \frac{a_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}},$$

$$\cos\gamma = \frac{a_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}$$

故 $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$

将 $\boldsymbol{a}$ 单位化后, 三个坐标就是其方向余弦

例4 设向量 $\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{i}-2\sqrt{2}\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k}, \boldsymbol{b}=3\boldsymbol{i}-12\boldsymbol{j}+4\boldsymbol{k}.$

求 $\boldsymbol{a}$ 的模，方向余弦和 $\boldsymbol{b}_{\boldsymbol{a}}$

例5 设$\boldsymbol{a}$与起点置于同一点的向量 $\boldsymbol{b}=(-2,-1,2)$ 和 $\boldsymbol{c}=(7,-4,-4)$ 的角平分线平行, 且 $|\boldsymbol{a}|=6\sqrt{6}$, 求 $\boldsymbol{a}$

■ 向量外积的坐标表示

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\left(\begin{vmatrix}a_2 & a_3\\ b_2 & b_3\end{vmatrix},\begin{vmatrix}a_3 & a_1\\ b_3 & b_1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{vmatrix}\right)$$

或者

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{vmatrix}$$

■ 向量混合积的坐标表示

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\begin{vmatrix}a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{vmatrix}$$

例6 求以同一起点的平面向量 $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2)$, $\boldsymbol{b}=(b_1,b_2)$ 为邻边的平行四边形的面积.

例7 求与向量 $\boldsymbol{a}=(1,0,-2)$, $\boldsymbol{b}=(1,3,-4)$ 均正交的单位向量 $\boldsymbol{c}$,并求以 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 为同顶点三条棱的平行六面体的体积.