

炉温曲线的优化模型

摘要

炉温曲线在集成电路板的焊接过程中起着重要作用。本文对炉温曲线的变化过程进行研究，建立了炉内温度模型和电路板温度变化模型，并在此基础上研究了炉温曲线的优化设置，得到了不同情况下的优化方案。

针对问题一，分析回焊炉结构及传热特点，将三维模型简化为一维模型，研究稳定状态下的传热过程。通过确定温区边界以及对温度上升过程用 logistic 曲线进行平滑处理后得到**炉内温度场分布模型**；利用热力学公式，推导出**电路板温度变化模型**，将电路板加热过程的连续时间轴分为步长为 Δt 的**离散时间节点**，列出节点温度迭代方程。上述两个模型的未知参数用题中所给炉温曲线数据进行**拟合**。之后将第一题中的数据代入模型进行求解，得到小温区 3、6、7 中点及小温区 8 结束处焊接区域中心的温度分别为 130.98、171.01、190.36、222.82 °C。

针对问题二，建立以最大传送带过炉速度为优化目标的优化模型，通过**遍历**传送带的过炉速度，将各传送带过炉速度和题目中各温区设定温度代入问题一中的模型。将制程界限作为**约束条件**，求解得到满足约束条件的过炉速度，并从中找出最大过炉速度为 78cm/min。

针对问题三，求炉温曲线超过 217°C 到峰值温度所覆盖的面积最小，可以调节各温区温度和传送带速度。考虑到对全部解进行搜索的复杂度，本文采用**模拟退火算法**求解，以炉温曲线超过 217°C 时到峰值温度所覆盖的最小面积为优化目标，自定义合适的退火参数，利用 Matlab 编写程序，最终算出最小面积为 461.1547，此时其余参数如下

小温区 1~5	小温区 6	小温区 7	小温区 8~9	传送带速度
183°C	188°C	231°C	265°C	95cm/min

针对问题四，根据对炉温曲线的分析，本文采取 $\min z = |t_1 - t_2|$ (t_1 、 t_2 分别表示相同温度下以峰值温度为中心线左右两侧超过 217 °C 时间) 为**对称性评价指标**。运用**暴力搜索算法**，Matlab 编程进行求解得到对称性最优评价指标为 $z = 34$ ，在对称性最优解中再寻找超过 217°C 到峰值温度所覆盖的面积最小的解，最终得到以下最优解。

对称指标 z	面积 S	温区 1-5 的温度 T_1	温区 6 的温度 T_2	温区 7 的温度 T_3	温区 8、9 的温度 T_4	传送带速度 v
34	463.633	169	191	225	268	90

关键词：炉温曲线；参数拟合；模拟退火；暴力搜索

一 问题重述

1.1 问题背景

回焊炉通过高温可以让 PCB 板上的锡膏融化后再冷却，最终让电子元件与集成电路板稳定焊接。在这个过程，回焊炉中各温区的设定温度和产品在其中处理的时间，对产品质量有巨大影响。为提高集成电路板的质量，需要合理确定回焊炉各个温区的温度和传送带的过炉速度。为实现设计目的，需要根据 PCB 板在经过回焊炉中各温区后的温度变化，建立炉温曲线模型，并应用该模型求解合理的回焊炉各个温区设定温度、传送带的过炉速度和对应的最优炉温曲线。

1.2 求解问题

- 根据传送带过炉速度（78 cm/min）和各温区的设定温度（小温区 1~5 为 173°C、小温区 6 为 198°C、小温区 7 为 230°C、小温区 8~9 为 257°C），给出焊接区域中心的温度变化状况，求出小温区 3、6、7 中点和小温区 8 结束处焊接区域中心的温度并画出对应的炉温曲线，并将每隔 0.5s 后焊接区域中心温度存放在 result.csv 中。
- 根据提供的各温区的设定温度（小温区 1~5 设定温度为 182°C、小温区 6 设定温度为 203°C、小温区 7 设定温度为 237°C、小温区 8~9 设定温度为 257°C），确定允许通过的最大传送带过炉速度。
- 根据焊接区域中心温度超过 217°C 的时间不宜过长、峰值温度不宜过高、尽可能减小炉温曲线超过 217°C 到峰值温度所覆盖面积这些要求，确定最优炉温曲线、各个温区的设定温度和传送带的过炉速度，并给出其对应的超过 217°C 到峰值温度所覆盖面积。
- 根据除满足制程界限后尽可能使超过 217°C 以峰值温度为中心线的两侧的炉温曲线相对称，联系问题三，给出此时对应的最优炉温曲线、各温区的设定温度和传送带的过炉速度，并给出相应参数。

二 问题分析

2.1 问题一的分析

问题一已给定传送带过炉速度、各温区的设定温度，求解炉温曲线。则需要建立炉内温度和电路板受热的物理模型，根据题中所给炉温曲线数据，拟合出模型方程的具体参数，求解出具体的模型，之后将第一问数据代入模型求解即可。根据题意，本文首先将电路板加热过程的连续时间轴分为步长为 Δt 的离散时间节点，列出节点温度迭代方程；然后通过不同温区温度在回焊炉内建立一维温度场模型，对温区的边界和升温趋势进行处理，得到温区边界方程。由附件所提供炉温曲线数据，对上述两个方程进行拟合，得

到模型方程的具体参数。将第一问的温区温度数据和传送带速度代入已解出的模型，即可解得各个区域焊接中心的温度，并绘制出炉温曲线。

2.2 问题二的分析

问题二已给定传送带过炉速度、各温区的设定温度。通过遍历传送带过炉速度，根据问题一所建立模型可解得各时间节点对应炉温曲线。优化目标为条件允许的最大传送带过炉速度，根据题中的制程范围得到约束条件，找出符合条件的最大传送带过炉速度，即得到问题二的解。

2.3 问题三的分析

问题三求解炉温曲线超过 217°C 到峰值温度所覆盖的面积最小时所对应的炉温曲线，属于优化问题。考虑到用对全部解进行分步长遍历搜索的计算量比较大，可采用模拟退火算法求得较优解。对炉温曲线超过 217°C 的部分进行积分，可求得面积。确认约束条件和退火参数后进行模拟退火，可求出炉温曲线超过 217°C 到峰值温度所覆盖的最小面积并得到对应的炉温曲线、各温区设定温度等参数。

2.4 问题四的分析

问题四在问题三的基础上再优化，使得让以峰值温度为中心线的两侧超过 217°C 的炉温曲线尽量对称。首先确定对称性标准，找到优化指标，再根据制程范围，通过暴力搜索算法得到对称性最优解，结合问题三，可进一步给出最优炉温曲线。

三 模型假设

1. 假设回焊炉内部能量没有损耗；
2. 忽略热辐射交换的能量；
3. 假设回焊炉内温度场为一维温度场，不考虑其余热源和传热过程；
4. 不考虑因回焊炉密封问题的散热和外材质散热；
5. 假设传送带在运动过程中不会扰动炉内空气，不改变炉内温度分布情况；
6. 假定电路板放入回焊炉内时，回焊炉内温度已经达到稳定。

四 符号说明

符号	说明
T_n	第 n 个时间节点的温度；
$T_H(x)$	x 位置空气温度；
Δx	相邻时间节点之间的距离；
$T_i(i=1,2,3,4,5)$	小温区 1~5、小温区 6、小温区 7、小温区 8~9、小温区 10~11 的温度
v	传送带的过炉速度；
Q	流入节点的净热流量；
Q_c	对流热量；
Q_k	传导热量；
Q_r	辐射热量；
S	节点总面积；
$S(i)$	第 i 种方案所求区域的面积；
ΔT	温度差；
x_L, x_R	温区左右边界长度

五 模型的建立与求解

5.1 问题一模型的建立与求解

5.1.1 确定电路板温度方程

1. 计算 $Biot$ 数

通过计算 $Biot$ 数 Bi 判断电路板各区域温度是否一致， $Biot$ 数是指内部热阻相对外部热阻的比率，反映了问题温度场的分布规律，若其明显小于 0.1 则表示内部温度梯度很小。可表示为^[5]。

$$Bi = \frac{H \times Z}{2 \times K} \quad (1)$$

式中 H 为上下两面对流换热系数, 表示单位时间单位面积物体通过对流和附近空气进行交换的热量; Z 为电路板厚度; K 为热传导系数, 用以度量物体传热的能力。在本问题的背景下, 一般可以认为^[5]。

$$\begin{cases} H = 50W / m^2 \cdot K \\ K = 0.31W / m^2 \cdot K \\ Z = 0.15mm \end{cases} \quad (2)$$

通过计算, 得到 $Bi = 0.0121 \ll 0.1$, 说明电路板的内部温度梯度很小。对于本题而言, 可认定该电路板各部分温度均匀。

2. 电路板温度方程

本文假设将电路板的连续时间轴分为步长为 Δt 的离散时间节点, 相邻时间节点之间距离 $\Delta x = v\Delta t$, 把电路板对应区域的所有热量分配在这一节点上, 对每一节点的热量变化进行分析, 每个节点的热量可通过上一节点的热量迭代求出。

可得:

$$T_{n+1} = T_n + \frac{Q}{C} \times \Delta t \quad (3)$$

式中 T_n 为第 n 个节点的热量; Q 是流入节点的热流量; C 是节点的热容量。

5.1.2 确定流入节点的净热流量

在回焊炉对集成电路板的焊接过程中, 传递的热量 Q 主要由热对流 Q_c 、热传导 Q_k 、热辐射 Q_r 组成, 表示为

$$Q = Q_c + Q_k + Q_r \quad (4)$$

1. 计算电路板表面与空气进行热对流时的热量 Q_c

电路板表面与空气进行热对流时热量可用牛顿冷却定律得出,

$$Q_c = (T_H(x) - T_n) \times H(x) \times S \quad (5)$$

式中 Q_c 表示电路板表面与空气进行热对流时热量; $T_H(x)$ 表示 x 位置对应的环境温度; T_t 为 x 位置电路板温度; $H(x)$ 表示 x 位置对应的对流换热常数; S 为整个节点的面积。

2. 计算总传导热量 Q_k

热传导可由一维傅里叶方程表示为

$$q = -KS \frac{dT}{dX} \quad (6)$$

式中 q 表示热流量，指的是单位时间内由导热、对流、辐射方式所传递的热量； K 表示热导率，是物体导热的量度； S 表示整个节点的面积； $\frac{dT}{dX}$ 为热流方向上的温度梯度。

对（6）式进行积分，得到稳态热传导路径为 l 时的温度差，即

$$T_1 - T_2 = \frac{q\Delta x}{KS} \quad (7)$$

对（7）式进行变换，可得，

$$\frac{T_1 - T_2}{q} = \frac{\Delta x}{KS} \quad (8)$$

定义热阻

$$R = \frac{T_1 - T_2}{q} \quad (9)$$

联合（8）（9）式，得传导方式下热阻的计算公式

$$R = \frac{\Delta x}{KS} \quad (10)$$

式中 Δx 为热传导路径长度， K 表示材料热导率， S 为整个节点的面积。

总传导热量 Q_k 是相邻节点的热量变化总和，所以

$$Q_k = (T_{n-1} - T_n)R_n + (T_{n+1} - T_n)R_n \quad (11)$$

式中 R_n 表示第 n 个节点所对应的热阻。

3. 计算热辐射

辐射热量可通过 *Stephan-Boltzmann* 定律计算

$$E = \varepsilon \sigma T^4 \quad (12)$$

式中 ε 表示灰体辐射发射率， $\sigma = 6.67 \times 10^{-8}$ 为黑体辐射常数。

可列方程

$$Q_r = (T_H(x)^4 - T_n^4) \times \varepsilon_H(x) \times \sigma \quad (13)$$

式中 $\varepsilon_H(x)$ 表示 x 处加热板平均有效发射率， σ 表示节点处辐射吸收常数，即

$$\sigma = \varepsilon_E \times S_p \times \zeta \quad (14)$$

式中 ε_E 表示电子元件在节点上的平均发射率， S_p 表示平面面积， ζ 是 *Stephan-Boltzmann* 常数。

根据 *Stephan-Boltzmann* 定律, 物体对外辐射的总能力与其绝对温度的四次方成正比, 当物体处于低温时, 热辐射可以忽略不计。所以在回焊炉的焊接过程中, 传递的热量主要为热对流和热传导过程中传递的热量, 忽略了热辐射的热量变化^[4]。

综上, 可确定流入节点的净热流量

$$\begin{cases} Q = Q_c + Q_k \\ Q_c = (T_H(x) - T_n) \times H(x) \times S \\ Q_k = (T_{n-1} - T_n)R_n + (T_{n+1} - T_n)R_n \end{cases} \quad (15)$$

5.1.3 简化电路板温度方程

将 (15) 式代入 (3) 式得

$$T_{n+1} = T_n + \frac{(T_H(x) - T_n) \times H(x) \times S + (T_{n-1} - T_n)R_n + (T_{n+1} - T_n)R_n}{C} \times \Delta t \quad (16)$$

对 (16) 式进行变形, 得

$$T_{n+1} = T_n + \frac{(T_H(x) - T_n) \times H(x) \times S}{C} \times \Delta t + \frac{(T_{n-1} + T_{n+1} - 2T_n)R_n}{C} \Delta t \quad (17)$$

其中 $H(x)$ 、 S 、 C 、 R_n 、 Δt 为常数,

则设

$$a = \frac{H(x) \times S}{C} \times \Delta t, \quad b = \frac{R_n}{C} \times \Delta t \quad (18)$$

原方程变为

$$T_{n+1} = T_n + a(T_H(x) - T_n) + b(T_{n-1} + T_{n+1} - 2T_n) \quad (19)$$

在题目所给的初始条件下计算, $(T_H(x) - T_n)$ 的范围约在 0~150 内, $(T_{n-1} + T_{n+1} - 2T_n)$ 的范围基本在 0~1 之间。足够说明在本题范围内, 有 $(T_H(x) - T_n) \gg (T_{n-1} + T_{n+1} - 2T_n)$, 之后计算 b 的大小

$$\begin{cases} b = \frac{R_n}{C} \times \Delta t \\ R_n = \frac{\Delta x}{KS} \\ \Delta x = v \Delta t \\ C = 210 \\ K = 51 \\ S = 1.6 \times 10^{-5} \end{cases} \quad (20)$$

(通过查阅资料^[6], 得到在一般情况下, 锡膏的热容量 $C = 210J / (kg \cdot ^\circ C)$, 锡膏的热导率 $K = 51W / m \cdot K$, 炉温曲线测定的焊点面积 $S = 16mm^2$ 。

根据计算, b 约为 0.0017, 则 $b(T_{n-1} + T_{n+1} - 2T_n)$ 与 $a(T_H(x) - T_n)$ 相比非常小, 所以原方程中的 $b(T_{n-1} + T_{n+1} - 2T_n)$ 可忽略不计, 原方程相当于

$$T_{n+1} = T_n + a(T_H(x) - T_n) \quad (21)$$

即最终方程可简化为

$$T_{n+1} = T_n + a(T_H(x) - T_n) \quad (22)$$

其中 $a = \frac{H(x) \times S}{C} \times \Delta t$, 为常数。可通过数据拟合得到具体数值。

5.1.4 回焊炉内一维温度场模型的建立

在回焊炉焊接过程中的温度变化, 实际上是三维空间的温度扩散, 考虑到小温区在炉内均匀分布, 回焊炉的横截面温度大致相同。将回焊炉内空气的温度分布简化为只与回焊炉长度有关的一维温度场。

本文假设同温的相邻小温区之间间隙温度与两侧小温区温度相同。(不考虑因回焊炉密封问题的散热和外材质散热, 两个温度相同区域之间夹的区域也会逐渐升温直至与两侧温度相同)

1. 温度上升过程的平滑处理

假设在相邻温区之间的温度变化为线性变化, 发现得出的炉温曲线以及炉温曲线的斜率如下(代码见附录二)

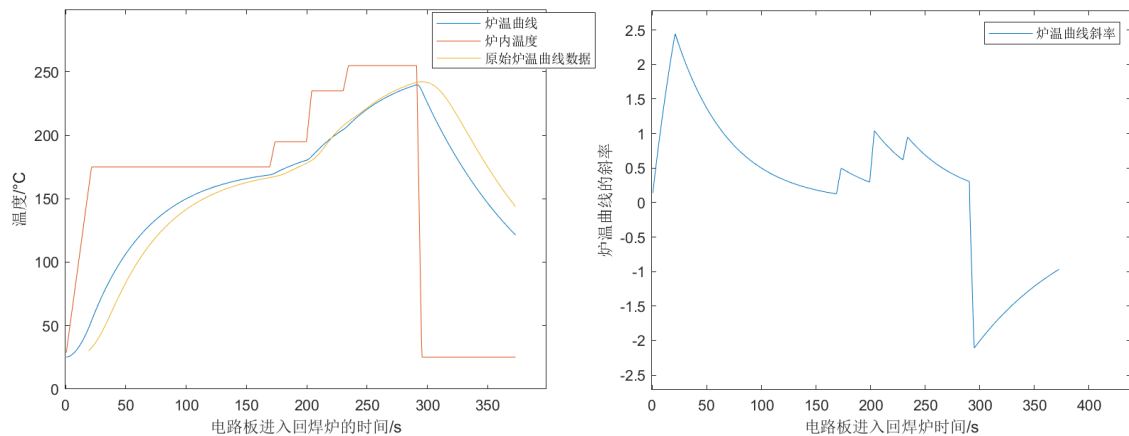


图1. 温区之间温度线性变化结果

显然由左图可以看出炉温曲线与原始数据偏差较大, 不能准确描述升/降温区域的温度变化。而且由右图, 炉温曲线的斜率变化较为陡峭, 并不符合物理规律。考虑到温度变化是一个平滑的过程, 故需要对温度变化的梯度处进行平滑处理。

根据物理规律，当相邻温区温差越大时，温度上升越快。但是在相邻不同温度的温区之间，温度上升的过程中，温差 ΔT 逐渐减小，又阻碍了温度上升的速率。因此，可以认为两温区间的升温速率基本呈现先增大后减小的趋势，发现此特征符合 logistic 曲线的性质，采用 logistic 曲线描述温度变化过程误差不会太大，故本文用 logistic 曲线描述升/降温度区域的温度变化趋势。

2.确定温区边界

本文所指温区边界为本温区的边缘中受相邻温区影响的区域。

温度上升需要一定空间，其空间长度与相邻温区温差成正比，则此空间长度 x 可定义为

$$x = \alpha \Delta T \quad (23)$$

式中 α 为常数， ΔT 为相邻温区的温差。

分别设小温区 1~5、小温区 6、小温区 7、小温区 8~9、小温区 10~11 的温度为 $T_i (i=1,2,3,4,5)$ ，则某个温区左，右侧边界长度 x_L, x_R 可定义为

$$\begin{cases} x_L = \frac{\alpha(T_i - T_{i-1}) - 5}{2} \\ x_R = \frac{\alpha(T_{i+1} - T_i) - 5}{2} \end{cases} \quad (24)$$

式中 5 表示两温区间隔 5cm，2 表示升温空间平均分配给两个相邻温区。如下图

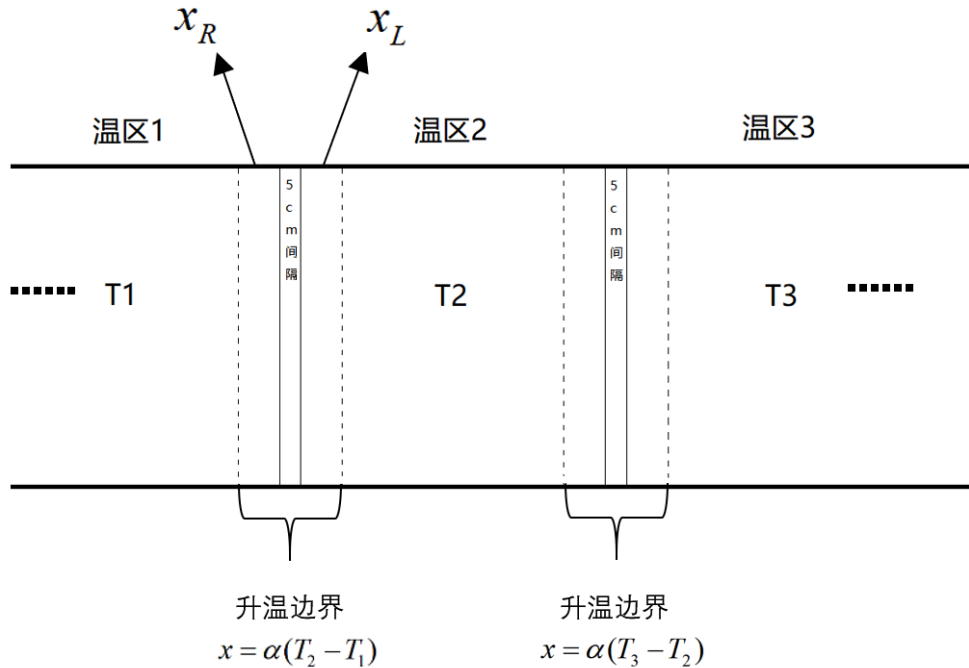


图2. 温区边界示意图

α 的具体值和温区边界的确定可通过题中炉温曲线数据拟合得到。

5.1.5 模型的求解

确定方程参数：

$$T_{n+1} = T_n + a(T_H(x) - T_n) \quad (25)$$

$$\begin{cases} x_L = \frac{\alpha(T_i - T_{i-1}) - 5}{2} \\ x_R = \frac{\alpha(T_{i+1} - T_i) - 5}{2} \end{cases} \quad (26)$$

将传送带过炉速度（78 cm/min）和各温区的设定温度（小温区 1~5 为 173°C、小温区 6 为 198°C、小温区 7 为 230°C、小温区 8~9 为 257°C）通过 Matlab 进行数据拟合（见附录 2），得到

$$\begin{cases} \alpha = 0.4 \\ a = 0.01 \end{cases} \quad (27)$$

得到图像

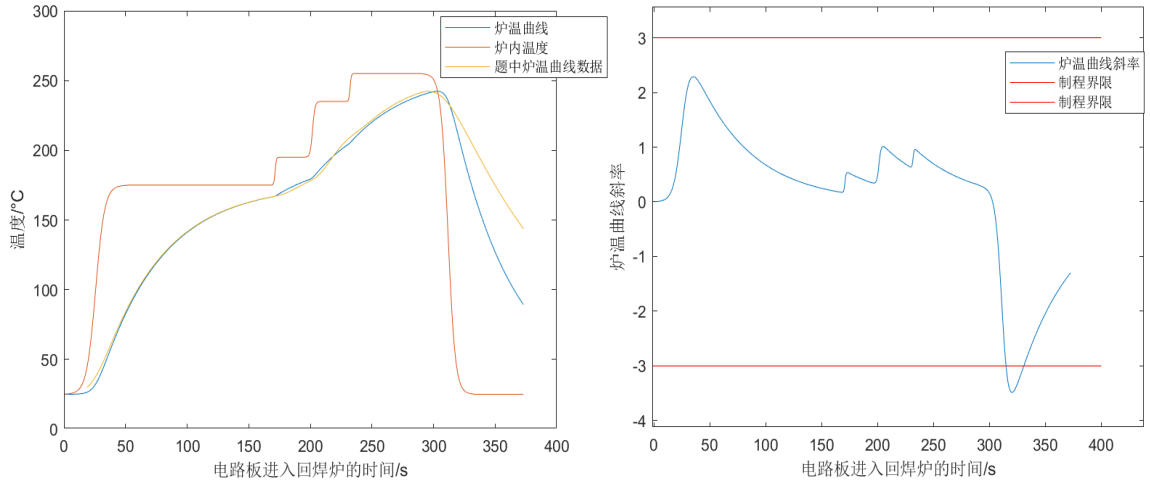


图3. 初步拟合图像

由两图可以看出确定温度边界并对温度变化平滑处理之后图像消除了陡峭，温度变化更为平缓，符合物理规律。

由左图可以发现温度上升阶段拟合效果较好，温度下降阶段拟合效果不理想（且右图可以看出其斜率有<-3 的情况）。因此引入 a_1 、 a_2 ，其中 a_1 表示温度上升阶段 a 的取值， a_2 表示温度下降阶段 a 的取值，将 a_1 、 a_2 代入原方程，通过拟合，发现拟合效果较好。如下图

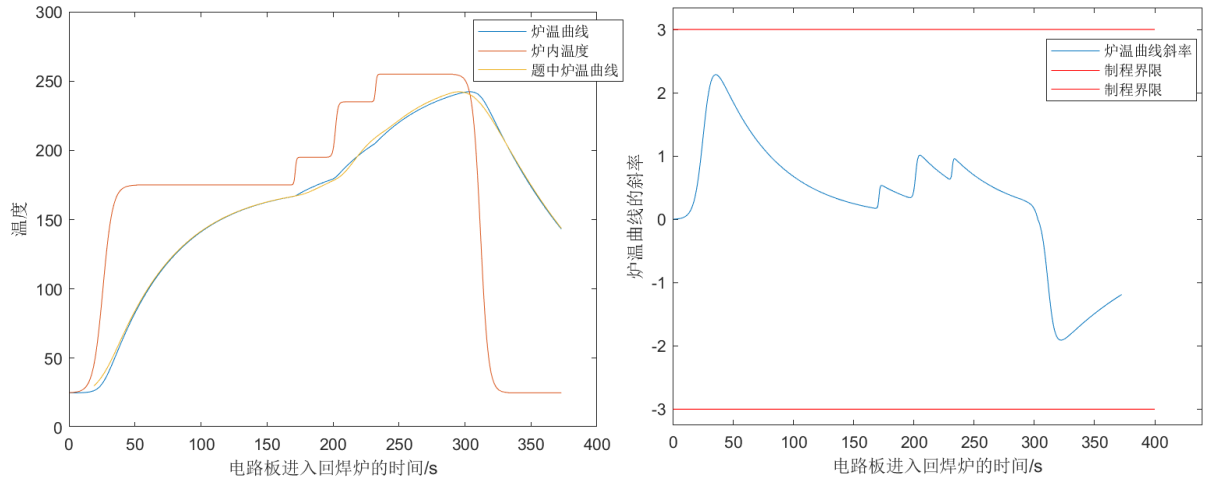


图4. 最终拟合结果

显然引入 a_1 、 a_2 将温度上升和下降阶段分开表示可使模型更加接近实际数据，且由图炉温曲线斜率也均在制程界限以内。故本文采用拟合精度更好的 a_1 、 a_2 两个参数来描述电路板热量变化，拟合具体参数如下

$$\begin{cases} \alpha=0.4 \\ a = \begin{cases} a_1 = 0.01(\text{温度上升时}) \\ a_2 = 0.005(\text{温度下降时}) \end{cases} \end{cases} \quad (28)$$

则最终方程为

$$\begin{cases} x_L = \frac{0.4(T_i - T_{i-1}) - 5}{2} \\ x_R = \frac{0.4(T_{i+1} - T_i) - 5}{2} \end{cases} \quad (29)$$

$$T_{n+1} = \begin{cases} T_n + 0.01(T_H(x) - T_n) & , \text{温度上升时} \\ T_n + 0.005(T_H(x) - T_n) & , \text{温度下降时} \end{cases} \quad (30)$$

用此模型在编程求解问题上，得到了输入各温区温度可以求解出炉内各点的温度函数（见附录七 wendu.m）和输入各温区温度和传送带速度得到炉温曲线数据的函数（见附录七 luwenqvxian.m）

5.1.6 问题一的求解

将传送带的过炉速度（78 cm/min），各温区温度的设定值（173°C（小温区 1~5）、198°C（小温区 6）、230°C（小温区 7）和 257°C（小温区 8~9））代入模型方程，得到炉温曲线数据，以此来求解通过所求各区域时中心焊点的温度。

传送带的过炉速度，

$$v = 78 \text{ cm/min} = 1.3 \text{ cm/s} \quad (31)$$

从起点到 n 区中点的距离，

$$x_m = 25 + (30.5 + 5) \times (n - 1) + 30.5 \div 2 \quad (32)$$

从起点到 n 区终点的距离，

$$x_f = 25 + (30.5 + 5) \times (n - 1) + 30.5 \div 2 \quad (33)$$

从起点到 n 区中点的时间，

$$t_m = \frac{x_m}{v} \quad (34)$$

从起点到 n 区终点的时间，

$$t_f = \frac{x_f}{v} \quad (35)$$

取时间最接近 t s 时的节点的温度

同理，温区 6 的焊接中心温度为 171.0069°C ，温区 7 的焊接中心温度为 190.3570°C ，温区 8 的焊接结束处温度为 222.8165°C 。

得下表

表1. 各温区对应焊接区域中心温度

温区	3	6	7	8
到达时间 (s)	85.5769	167.5000	194.8000	233.8462
中心温度 ($^{\circ}\text{C}$)	130.9758	171.0069	190.3570	222.8165

该题对应的炉温曲线如下图：（图中标注点为最高温度点，代码见附录三）

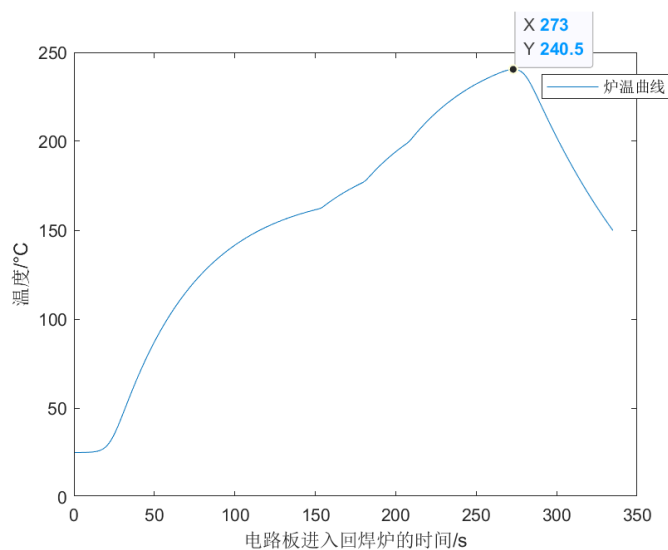


图5. 炉温曲线图

每隔 0.5s 焊接区域中心温度已经存于 result.csv 中。（见支撑材料，附录八）

5.2 问题二模型的建立与求解

5.2.1 问题二模型的建立

由问题一所建立模型可知

$$T_{n+1} = \begin{cases} T_n + 0.01(T_H(x) - T_n) & , \text{温度上升时} \\ T_n + 0.005(T_H(x) - T_n) & , \text{温度上升时} \end{cases} \quad (36)$$

$$\begin{cases} x_L = \frac{0.4(T_i - T_{i-1}) - 5}{2} \\ x_R = \frac{0.4(T_{i+1} - T_i) - 5}{2} \end{cases} \quad (37)$$

各温区的设定温度分别为 182°C（小温区 1~5）、203°C（小温区 6）、237°C（小温区 7）、254°C（小温区 8~9），将其代入方程。

假设炉温曲线的斜率绝对值的最大值为 k ，温度上升过程中在 150°C~190°C 的时间为 t_k ，温度大于 217°C 的时间为 t_b ，峰值温度为 T_m 。

优化目标为最大传送带过炉速度

$$\max v \quad (38)$$

根据题中制程界限可知约束条件为

$$\begin{cases} 0 \leq |k| \leq 3 \\ 60 \leq t_k \leq 120 \\ 40 \leq t_b \leq 90 \\ 240 \leq T_m \leq 250 \end{cases} \quad (39)$$

5.2.2 问题二模型的求解

以步长 1 从 65 到 100 对传送带的过炉速度 v 进行遍历，得到表格（见附录 1）

要从中挑选出满足约束条件（39）传送带过炉速度，挑选依据如下图（代码见附录四）

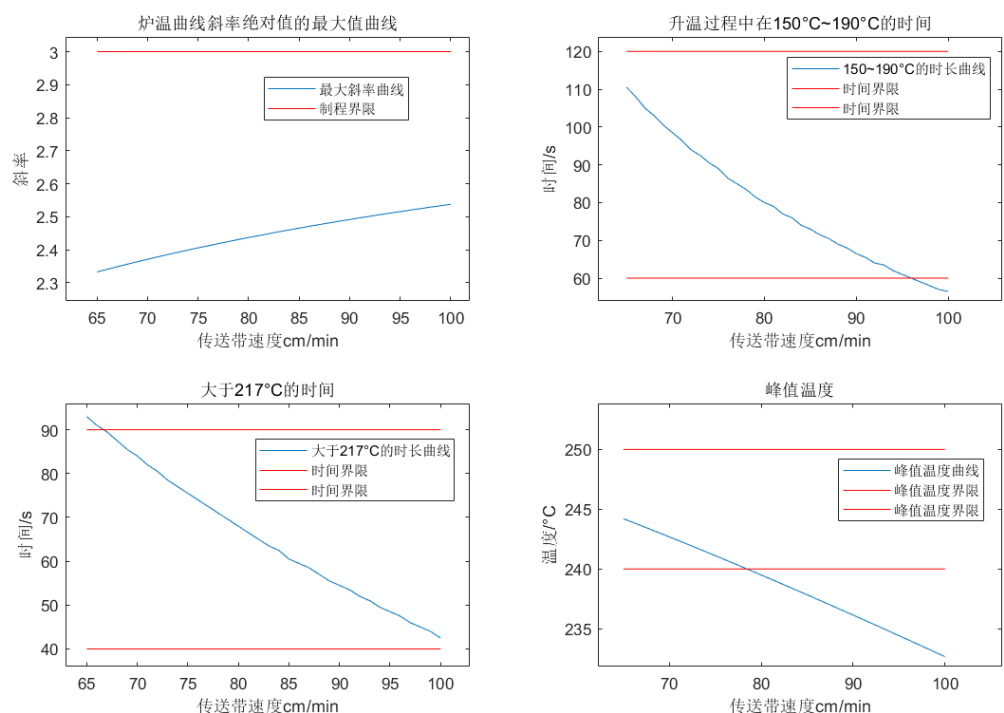


图6. 传送带过炉速度对应数据

由图中可以看出炉温曲线的斜率均满足制程界限，并且受约束最大的是峰值温度，只有 v 在大约 80 以下才能满足制程界限，其次有较小影响的是大于 217°C 的时间和升温过程中在 $150\sim 190^{\circ}\text{C}$ 的时间。据此挑选出满足约束的传送带速度见下表

表2. 传送带的过炉速度及对应各指标

传送带速度 v (cm/min)	最大斜率 $ k $	在 $150^{\circ}\text{C}\sim 190^{\circ}\text{C}$ 的时间 t_k (s)	温度大于 217°C 的时间 t_b (s)	峰值温度 T_m ($^{\circ}\text{C}$)
67	2.348	105	89.5	243.602
68	2.356	103	87.5	243.298
69	2.364	100.5	85.5	242.992
70	2.371	98.5	84	242.681
71	2.378	96.5	82	242.373
72	2.385	94	80.5	242.061
73	2.392	92.5	78.5	241.748
74	2.399	90.5	77	241.430
75	2.406	89	75.5	241.113
76	2.412	86.5	74	240.792
77	2.418	85	72.5	240.471
78	2.425	83.5	71	240.147

结合优化目标

$$\max v \quad (40)$$

由表可知，在该条件下允许的最大传送带过炉速度为 $78\text{cm}/\text{min}$ 。

5.3 问题三模型的建立和求解

5.3.1 问题三模型的建立

本题求解目标为炉温曲线超过 217°C 到峰值温度所覆盖的面积，将面积尽可能小作为优化目标，考虑到对全部解进行分步长遍历搜索的计算量较大，为了减小计算量并得到一个较优解，本文采用模拟退火算法求解^[2]。

模拟退火算法起源于晶体冷却的过程，当固体被加热至一定温度后，让其在无外界影响的条件下冷却。进行升温的过程中，此时固体内部粒子内能增大，趋于无序化；在冷却的过程中，粒子内能减小，趋于有序，最终在常温时达到稳定状态，此时内能减为最小。运用固体退火算法解决优化问题，提供初始解和控制参数初值，对初始解重复进行“产生新解→与旧解比较→接受或舍弃”的过程，并逐步降低温度，算法结束时的解记为近似最优解。通过初始化初始温度 T_0 、降温速度 v_c 、接受原则、终止条件 e 、降温次数 L 等参数解决优化问题。

假设在 i 状态下面积为 $S(i)$ ，那么当材料在温度 T 时从状态 i 进入到状态 j 时遵循以下规律：

$$\begin{cases} \text{如果 } S(j) \leq S(i), \text{ 则接受新解} \\ \text{如果 } S(j) > S(i), \text{ 则新解以概率 } e^{\frac{S(i)-S(j)}{KT}} \text{ 被接受} \end{cases}$$

K 为玻尔兹曼常数， T 为材料温度。

本题同样有制程界限的约束条件 (39)，在每一次产生新解的过程中要重新对新解进行判断，满足约束条件就进行退火过程，否则重新产生新解，直到产生满足约束条件的解，再作为新解进行退火过程。

设定初始温度、降温速度等退火参数，通过 Matlab 进行模拟退火，最终可求得炉温曲线超过 217°C 到峰值温度所覆盖的面积的最小值和对应的炉温曲线。

5.3.2 问题三模型的求解

设定退火参数为

$$\begin{cases} T_0 = 1 \\ v_c = 0.999 \\ e = 0.1^{30} \\ L = 20000 \end{cases} \quad (41)$$

约束条件为

$$\begin{cases} 0 \leq |k| \leq 3 \\ 60 \leq t_k \leq 120 \\ 40 \leq t_b \leq 90 \\ 240 \leq T_m \leq 250 \end{cases} \quad (42)$$

设第一次到达 217℃时时间为 t_1 ，到达峰值的时间为 t_2 ，设炉温曲线的函数关系式为 $f(x)$ ，对曲线进行积分，则相应的面积为

$$\int_{t_1}^{t_2} (f(x) - 271) dx \quad (43)$$

优化目标为

$$\min \int_{t_1}^{t_2} (f(x) - 271) dx \quad (44)$$

接受原则

对于某一个温度 T_i 和该优化问题的一个解 i ，可以生成 j ，接受 j 作为下一个新解 $(i+1)$ 的概率为

$$P = \begin{cases} 1, & S(j) < S(i) \\ e^{-\frac{S(j)-S(i)}{T_i}}, & \text{其他} \end{cases} \quad (45)$$

通过 Matlab 编定程序，运行代码（代码见附录五），步骤如下

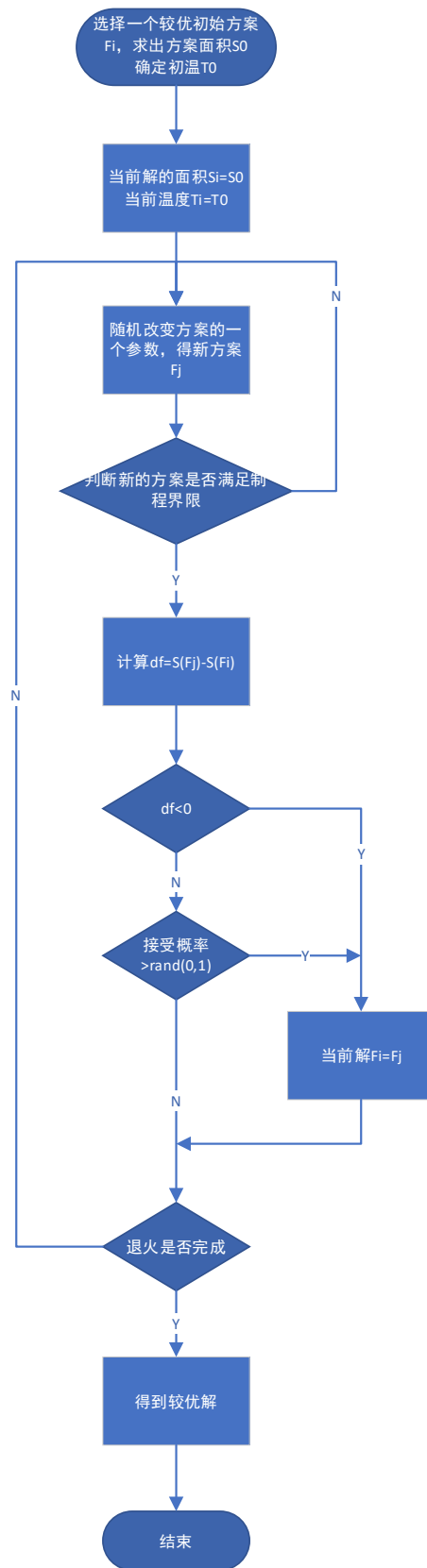


图7. 模拟退火算法流程图

解得最小面积为 461.1547，炉温曲线如下图（标注处为交点温度峰值点坐标，阴影部分为所求面积区域）

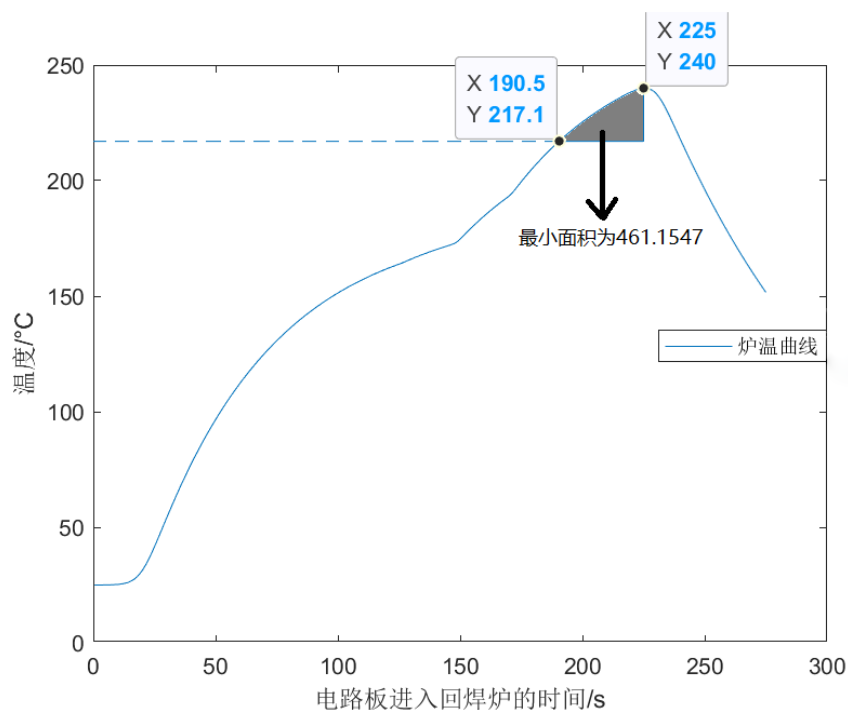


图8. 最小面积下的炉温曲线图

各温区设定温度见下表

表3. 各温区设定温度表

小温区 1~5	小温区 6	小温区 7	小温区 8~9
183° C	188° C	231° C	265° C

传送带过炉速度为 $v = 95 \text{ cm/min}$

5.4 问题四模型的建立与求解

5.4.1 问题四模型的建立

1. 制程界限

由题目知制程界限为

$$\begin{cases} 0 \leq |k| \leq 3 \\ 60 \leq t_k \leq 120 \\ 40 \leq t_b \leq 90 \\ 240 \leq T_m \leq 250 \end{cases} \quad (46)$$

2. 确定对称性评价指标

如图为温度变化过程中炉温曲线斜率变化, 由图可知, 在温度上升和下降的过程中, 炉温曲线斜率无较大变化, 本文认为问题中对称性可用同一温度下不同时间与峰值温度时间之差的绝对值作为评价指标,

如图，对称指标可表示为

$$z = |t_1 - t_2| \quad (47)$$

z 值越小，表示以峰值温度为中心线的两侧超过 217°C 的炉温曲线对称性越好。

即优化目标为

$$\min z = |t_1 - t_2| \quad (48)$$

约束条件为

$$\begin{cases} 0 \leq |k| \leq 3 \\ 60 \leq t_k \leq 120 \\ 40 \leq t_b \leq 90 \\ 240 \leq T_m \leq 250 \end{cases} \quad (49)$$

5.4.2 问题四的求解

以对称指标最小为求解目标，在满足约束条件的情况下，采用暴力搜索算法求解，编写 Matlab 程序（见附录六）得最优解对称评价指标 $z=34$ ，有 46 种情况（见附录一）由于本程序时间步长采取 0.5s ，精度不足以区分求得 46 种情况的最优解，故认为求得的 46 种情况在对称性方面均为最优解。题目要求结合问题三寻找问题的最优解，则考虑在这 46 个解中求出炉温曲线超过 217°C 到峰值温度所覆盖的面积最小的一组解作为本问题的最优解。

结合问题三，用 Matlab 在上述解中找到炉温曲线超过 217°C 到峰值温度所覆盖的面积最小的解（程序见附录六），最终结果如下表

表4. 炉温曲线超过 217°C 到峰值温度所覆盖面积最小对应参数

对 称 指 标 z	面积 S	温 区 1-5 的温度 T_1	温区 6 的 温度 T_2	温区 7 的 温度 T_3	温区 8、9 的温度 T_4	传 送 带 速 度 v
34	463.633	169	191	225	268	90

炉温曲线如下图

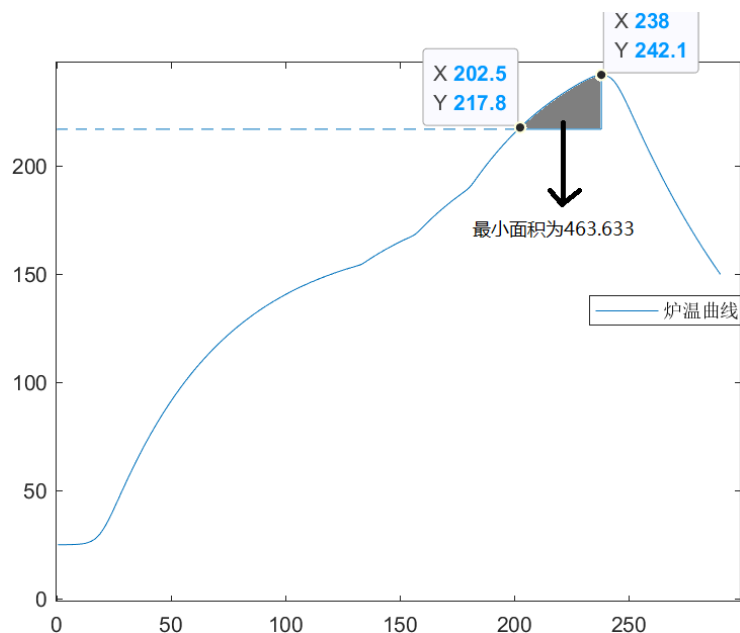


图9. 问题四最优炉温曲线

六 模型评价

1. 合理处理了不同温区之间间隙的温度，使模型与真实情况更加符合。
2. 使用了模拟退火算法，在提高代码运行效率的同时，也得到了较优解。
3. 将炉内温度、炉温曲线斜率变化都进行了可视化处理，更加直观。
4. 将炉温曲线的上升部分与下降部分分别进行处理，提高了模型的精度。

七 模型的改进与推广

模型的改进：

在确定炉内温度曲线时，本文采用了logistic曲线对温度变化曲线进行了平滑处理，存在一定误差，对此，可以利用热力学公式对每个温区以及间隙进行离散化处理得到更加准确的温度变化曲线，进一步提高模型精度。

通过计算，发现由热辐射、热传导对炉温曲线变化造成的影响极其微小，故本文选择了忽略二者带来的影响，为进一步提高模型的精度，可以将二者的影响纳入考虑范围，以得到更为精准的炉温曲线。

模型的推广：

1. 在电子元器件的生产过程中可能会使用到多种窑炉，本文建立的模型同样也能对窑炉的温度曲线进行处理。
2. 在金属热处理工艺中，需要对工件进行冷却处理，本文建立的模型也能够应用于确定工件冷却曲线。

参考文献

- [1] 姜启源、谢金星等、谢金星等.数学模型（第五版）.北京：高等教育出版社，2018 年 5 月
- [2] 司守奎、孙兆亮.数学建模算法与应用.北京：国防工业出版社，2015 年 1 月
- [3] 韩中庚.数学建模方法及应用（第三版）.北京：高等教育出版社，2017 年 12 月
- [4] 龚雨兵. 再流焊炉温曲线优化研究[J]. 热加工工艺, 2013, 42(015):187-190.
- [5] 王艳, 周德俭. 再流焊工艺仿真模型研究[C]// 2003 中国电子制造技术论坛暨展会暨第七届 SMT,SMD 技术研讨会论文集. 2003.
- [6] 刘泽光, 陈登权, 罗锡明,等. 金锡钎料性能及应用[J]. 电子与封装, 2004(02):27-29+43.

附录

附录 1: 对称性评价最优的 46 种情况

对称性评价最优的 46 种情况					
z	T_1	T_2	T_3	T_4	ν
34	169	185	229	265	90
34	169	186	229	265	90
34	169	187	228	265	90
34	169	188	227	265	90
34	169	189	227	265	90
34	169	190	226	265	90
34	169	191	225	265	90
34	169	192	225	265	90
34	170	185	228	265	90
34	170	185	229	265	90
34	170	186	228	265	90
34	170	187	227	265	90
34	170	188	226	265	90
34	170	188	227	265	90
34	170	189	226	265	90
34	170	190	225	265	90
34	170	191	225	265	90
34	171	185	227	265	90
34	171	185	228	265	90
34	171	186	227	265	90
34	171	187	226	265	90
34	171	187	230	265	91
34	171	188	226	265	90

34	171	189	225	265	90
34	171	190	225	265	90
34	171	190	228	265	91
34	171	195	225	265	91
34	172	185	227	265	90
34	172	186	226	265	90
34	172	187	225	265	90
34	172	187	226	265	90
34	172	187	229	265	91
34	172	188	225	265	90
34	172	192	226	265	91
34	173	185	226	265	90
34	173	186	225	265	90
34	173	187	225	265	90
34	173	189	227	265	91
34	173	192	225	265	91
34	174	185	225	265	90
34	174	186	228	265	91
34	174	189	226	265	91
34	175	186	227	265	91
34	176	188	225	265	91
34	177	185	226	265	91
34	178	185	225	265	91
附录二：nihe.m					
<pre> 1. clc;clear; 2. 3. x=xlsread('附件.xlsx','A1:A710'); 4. y=xlsread('附件.xlsx','B1:B710'); 5. 6. result = luwenqvxian(175,195,235,255,70); </pre>					

```

7. for i=1:length(result)-1
8.     y_(i)=(result(i+1,2)-result(i,2))/0.5;
9.     x_(i)=result(i,1);
10. end
11. plot(result(:,1),result(:,2));
12. hold on;
13. plot(result(:,1),result(:,3));
14. hold on;
15. plot(x,y);
16. figure('name','温度随时间变化的斜率曲线');
17. plot(x_,y_);
18. line([0,400],[3,3],'Color','red');
19. line([0,400],[-3,-3],'Color','red');
20.
21. function T=wendu(T1,T2,T3,T4,L) %平滑处理，边界处理后的温度场
22. L1=(T1-25)/2.5;
23. L2=(T2-T1)/2.5;
24. L3=(T3-T2)/2.5;
25. L4=(T4-T3)/2.5;
26. L5=(T4-25)/2.5;
27. %各个温区的温度，10 和 11 保持 25 度
28. if L<=L1 %炉前区
29.     T=logistic(25,T1,L1,L)+25; % (T1-25)/25*L+25;
30. elseif L>L1 && L< 197.5-(L2-5)/2 %1
31.     T=T1;
32. elseif L>=197.5-(L2-5)/2 && L<202.5+(L2-5)/2 %1,2 之间
33.     T=logistic(T1,T2,L2,L-(197.5-(L2-5)/2))+T1;
34. elseif L>=202.5+(L2-5)/2 && L<233-(L3-5)/2 %2
35.     T=T2;
36. elseif L>=233-(L3-5)/2 && L<238+(L3-5)/2 %2,3 之间
37.     T=logistic(T2,T3,L3,L-(233-(L3-5)/2))+T2;
38. elseif L>=238+(L3-5)/2 && L<268.5-(L4-5)/2 %3
39.     T=T3;
40. elseif L>=268.5-(L4-5)/2 && L<273.5+(L4-5)/2 %3,4 之间的温度
41.     T=logistic(T3,T4,L4,L-(268.5-(L4-5)/2))+T3;
42. elseif L>=273.5+(L4-5)/2 && L<339.5 %4
43.     T=T4;
44. elseif L>=339.5 && L<344.5+(L5-5)/2 %4,5 之间
45.     T=logistic(T4,25,(L5-5)/2+5,L-339.5)+25;
46. else
47.     T=25;
48. end

```



```

49. end
50.
51. % function T=wendu(T1,T2,T3,T4,L)    %线性变化温度场
52. %     if L<=25                        %炉前区
53. %         T=(T1-25)/25*L+25;
54. %     elseif L>25 && L< 197.5        %1
55. %         T=T1;
56. %     elseif L>197.5 && L<202.5      %1,2 之间
57. %         T=T1+(T2-T1)/5*(L-197.5);
58. %     elseif L>202.5 && L<233        %2
59. %         T=T2;
60. %     elseif L>233 && L<238          %2,3 之间
61. %         T=(L-233)*(T3-T2)/5+T2;
62. %     elseif L>=238 && L<268.5      %3
63. %         T=235;
64. %     elseif L>268.5 && L<273.5     %3,4 之间的温度
65. %         T=(L-268.5)/5*(T4-T3)+T3;
66. %     elseif L>273.5 && L<339.5     %4
67. %         T=255;
68. %     elseif L>=339.5 && L<344.5    %4,5 之间
69. %         T=(5-(L-339.5))/5*(T4-25)+25;
70. %     elseif L>=344.5 && L<410.5
71. %         T=25;
72. %     else
73. %         T=25;
74. %     end
75. % end
76.
77. function result=luwenqvxian(T1,T2,T3,T4,speed)
78. %1,2,3 列为时间, pcb 温度, 回流焊炉温度
79. t=435.5/speed*60;
80. T0=25;
81. T_t=25;
82. for i=0.5:0.5:t
83.     L=i*speed/60;
84.     T=wendu(T1,T2,T3,T4,L);
85.     deilt_T=(T-T0);
86. %     T0=0.01*deilt_T+T0;
87.     if deilt_T>0
88.         T0=0.01*deilt_T+T0;        %k*deilt_T
89.     elseif deilt_T<0
90.         T0=0.005*deilt_T+T0;      %调整 0.01 和 0.005 拟合

```

```

91.     end
92.     result(round(i*2),:)= [i,T0,T];
93. end
94. end

```

附录三：yiti.m（第一题程序）

```

1. clc;clear;
2.
3. result = luwenqvxian(173,198,230,257,78);
4. for i=1:length(result)-1
5.     y_(i)=(result(i+1,2)-result(i,2))/0.5;
6.     x_(i)=result(i,1);
7. end
8. plot(result(:,1),result(:,2));
9. hold on;
10. %plot(result(:,1),result(:,3));
11.
12. figure('name','温度随时间变化的斜率曲线');
13. plot(x_,y_);
14. line([0,400],[3,3],'Color','red');
15. line([0,400],[-3,-3],'Color','red');

```

附录四：erti.m（第二题程序）

```

1. clc;clear;
2.
3. for s=65:100
4.     %温度斜率最大值，150~190 时间，大于 217 度的时间，峰值温度
5.     result = luwenqvxian(182,203,237,254,s);
6.     shujv(s,1)=0; shujv(s,2)=0; shujv(s,3)=0; shujv(s,4)=0;
7.     for i=1:length(result)-1
8.         if abs((result(i+1,2)-result(i,2))/0.5)>shujv(s,1)
9.             shujv(s,1)=abs((result(i+1,2)-result(i,2))/0.5);
10.        end
11.        if result(i,2)>150 && result(i,2)<190 && result(i,2)>result(i-1,2)
12.            shujv(s,2)=shujv(s,2)+0.5;
13.        end
14.        if result(i,2)>217
15.            shujv(s,3)=shujv(s,3)+0.5;
16.        end

```

```

17.         if result(i,2)>shujv(s,4)
18.             shujv(s,4) = result(i,2);
19.         end
20.     end
21. end
22. x=65:100;
23.
24. subplot(2,2,1);
25. plot(x,shujv(65:100,1));
26. line([65,100],[3,3], 'Color', 'red');
27.
28. subplot(2,2,2);
29. plot(x,shujv(65:100,2));
30. line([65,100],[60,60], 'Color', 'red');line([65,100],[120,120], 'Color', 'red');
31.
32. subplot(2,2,3);
33. plot(x,shujv(65:100,3));
34. line([65,100],[40,40], 'Color', 'red');line([65,100],[90,90], 'Color', 'red');
35.
36. subplot(2,2,4);
37. plot(x,shujv(65:100,4));
38. line([65,100],[240,240], 'Color', 'red');line([65,100],[250,250], 'Color', 'red');

```

附录五：santi.m（第三题程序）

```

1. clc, clear
2. %降温速度较慢，运行需要几分钟
3. T_1=(165:185); T_2=(185:205); T_3=(225:245); T_4=(245:265); speed_=(65:100);
4. T1=175; T2=195; T3=235; T4=255; speed=75;
5.
6. %退火参数%
7. TF=0.1^30; %终止条件%
8. L=20000; %迭代次数%
9. V=0.999; %降温速率%
10. TS=1; %初始温度%
11. for k=1:L %开始退火%
12. %初始化%
13. T1_new=T1; T2_new=T2; T3_new=T3; T4_new=T4; speed_new=speed;
14. %产生新解%
15. while(1)
16.     a=rand;

```

```

17.     if a<0.2
18.         T1_new = T_1(floor(rand*21)+1);
19.     elseif a<0.4
20.         T2_new = T_2(floor(rand*21)+1);
21.     elseif a<0.6
22.         T3_new = T_3(floor(rand*21)+1);
23.     elseif a<0.8
24.         T4_new = T_4(floor(rand*21)+1);
25.     elseif a<1
26.         speed_new = speed_(floor(rand*36)+1);
27.     end
28.     if yueshu(T1_new,T2_new,T3_new,T4_new,speed_new)==1
29.         break;
30.     end
31. end
32.     %计算代价函数值的增量%
33.     df=mianji(luwenqvxian(T1_new,T2_new,T3_new,T4_new,speed_new))-
        mianji(luwenqvxian(T1,T2,T3,T4,speed));
34.     if df<0 %接受准则%
35.         T1=T1_new; T2=T2_new; T3=T3_new; T4=T4_new; speed=speed_new;
36.     elseif exp(-df/TS)>rand %接受概率%
37.         T1=T1_new; T2=T2_new; T3=T3_new; T4=T4_new; speed=speed_new;
38.     end
39.     TS=TS*V;
40.     if TS<TF
41.         break;
42.     end
43. end
44. mianji(luwenqvxian(T1,T2,T3,T4,speed))

```

附录六：siti.m（第四题程序）

```

1. clc;clear;
2. %暴力搜索算法，运行需要近一小时
3. L_min=100;
4. a=0
5. for T1=165:185
6.     for T2=185:205
7.         for T3=225:245
8.             for T4=245:265
9.                 for speed=65:100

```

```

10.         result = luwenqvxian(T1,T2,T3,T4,speed);
11.         L=duichen(result);
12.         if L<=L_min && yueshu(T1,T2,T3,T4,speed)==1
13.             L_min=L;
14.             a=a+1;
15.             x(a,:)=[L,T1,T2,T3,T4,speed];
16.             L,T1,T2,T3,T4,speed
17.         end
18.     end
19. end
20. end
21. end
22. end
23.
24. mianji_min=5000;
25. for i=41:86
26.     if mianji(luwenqvxian(x(i,2),x(i,3),x(i,4),x(i,5),x(i,6)))<mianji_min
27.         mianji_min=mianji(luwenqvxian(x(i,2),x(i,3),x(i,4),x(i,5),x(i,6)));
28.         x(i,2),x(i,3),x(i,4),x(i,5),x(i,6)
29.     end
30. end
31.
32.
33. function value=duichen(result)
34. [max_,max_n] = max(result(:,2));
35. m=result(:,2)>217;
36. for i=1:length(result)
37.     if m(i)==1
38.         left_n=i;
39.         break;
40.     end
41. end
42. for i=length(result):-1:1
43.     if m(i)==1
44.         right_n=i;
45.         break;
46.     end
47. end
48. value=abs((right_n-max_n)-(max_n-left_n));
49. end

```

附录七：程序调用的函数

1.logistic.m

```
1. function wd=logistic(T_min,T_max,long,L_zhanbi)
2. x=14*(L_zhanbi/long)-7;
3. y=1/(1+exp(-x));
4. wd=y*(T_max-T_min);
5. if T_max<T_min
6.     y=1/(1+exp(x));
7.     wd=y*(T_min-T_max);
8. end
9. end
```

2.wendu.m

```
1. function T=wendu(T1,T2,T3,T4,L)
2. L1=(T1-25)/2.5;
3. L2=(T2-T1)/2.5;
4. L3=(T3-T2)/2.5;
5. L4=(T4-T3)/2.5;
6. L5=(T4-25)/2.5;
7. %各个温区的温度, 10 和 11 保持 25 度
8. if L<=L1 %炉前区
9.     T=logistic(25,T1,L1,L)+25; % (T1-25)/25*L+25;
10. elseif L>L1 && L< 197.5-(L2-5)/2 %1
11.     T=T1;
12. elseif L>=197.5-(L2-5)/2 && L<202.5+(L2-5)/2 %1,2 之间
13.     T=logistic(T1,T2,L2,L-(197.5-(L2-5)/2))+T1; %T1+(T2-T1)/5*(L-197.5);
14. elseif L>=202.5+(L2-5)/2 && L<233-(L3-5)/2 %2
15.     T=T2;
16. elseif L>=233-(L3-5)/2 && L<238+(L3-5)/2 %2,3 之间
17.     T=logistic(T2,T3,L3,L-(233-(L3-5)/2))+T2; %(L-233)*(T3-T2)/5+T2;
18. elseif L>=238+(L3-5)/2 && L<268.5-(L4-5)/2 %3
19.     T=T3;
20. elseif L>=268.5-(L4-5)/2 && L<273.5+(L4-5)/2 %3,4 之间的温度
21.     T=logistic(T3,T4,L4,L-(268.5-(L4-5)/2))+T3; %(L-268.5)/5*(T4-T3)+T3;
22. elseif L>=273.5+(L4-5)/2 && L<339.5 %4
23.     T=T4;
```

```

24.     elseif L>=339.5 && L<344.5+(L5-5)/2    %4,5 之间,,,4 不设置缓冲缓冲, 5
25.         T=logistic(T4,25,(L5-5)/2+5,L-339.5)+25;          %(71-(L-
           339.5))/71*(T4-25)+25;
26.     else
27.         T=25;
28.     end
29. end

```

3.luwenqvxian.m

```

1. function result=luwenqvxian(T1,T2,T3,T4,speed)
2. %1,2,3 列为时间, pcb 温度, 回流焊炉温度
3. t=435.5/speed*60;
4. T0=25;
5. T_t=25;
6. for i=0.5:0.5:t
7.     L=i*speed/60;
8.     T=wendu(T1,T2,T3,T4,L);
9.     deilt_T=(T-T0);
10.    if deilt_T>0
11.        T0=0.01*deilt_T+T0;        %k*deilt_T
12.    elseif deilt_T<0
13.        T0=0.005*deilt_T+T0;
14.    end
15.    result(round(i*2),:)= [i,T0,T];
16. end
17. end

```

4.mianji.m

```

1. function S=mianji(result)
2.     temp=find(result(:,2)>217);
3.     T_min=temp(1);
4.     [value,T_max]=max(result(:,2));
5.     x(T_min:T_max,1)=result(T_min:T_max,1);
6.     x(T_min:T_max,2)=result(T_min:T_max,2);
7.     x(T_max+1:T_max+(T_max-T_min)+1,2)=217;
8.     x(T_max+1:T_max+(T_max-T_min)+1,1)=result(T_max:-1:T_min,1);
9.     S = polyarea(x(T_min:T_max+(T_max-T_min)+1,1),x(T_min:T_max+(T_max-
           T_min)+1,2));
10.    plot(x(T_min:T_max+(T_max-T_min)+1,1),x(T_min:T_max+(T_max-T_min)+1,2));

```

11. end

5.yueshu.m

```
1. function a=yueshu(T1,T2,T3,T4,speed)
2. result=luwenqvxian(T1,T2,T3,T4,speed);
3. a1=1;a2=0;a3=0;a4=0;
4. shujv2=0; shujv3=0; shujv4=0;
5. for i1=1:length(result)-1
6.     y=(result(i1+1,2)-result(i1,2))/0.5;
7.     if abs(y)>3
8.         a1=0;
9.     end
10.    if result(i1,2)>150 && result(i1,2)<190 && result(i1,2)>result(i1-1,2)
11.        shujv2=shujv2+0.5;
12.    end
13.    if result(i1,2)>217
14.        shujv3=shujv3+0.5;
15.    end
16.    if result(i1,2)>shujv4
17.        shujv4 = result(i1,2);
18.    end
19. end
20. if shujv2>60 && shujv2<120
21.     a2=1;
22. end
23. if shujv3>40 && shujv3<90
24.     a3=1;
25. end
26. if shujv4>240 && shujv4<250
27.     a4=1;
28. end
29. if a1+a2+a3+a4==4
30.     a=1;
31. else
32.     a=0;
33. end
34. end
```

附录八：result.csv

时间(s)	温度(摄氏度)
0	25

0.5	25.00157
1	25.00339
1.5	25.00549
2	25.00793
2.5	25.01076
3	25.01403
3.5	25.01784
4	25.02226
4.5	25.02741
5	25.03338
5.5	25.04033
6	25.04842
6.5	25.05782
7	25.06876
7.5	25.08149
8	25.0963
8.5	25.11352
9	25.13355
9.5	25.15683
10	25.1839
10.5	25.21535
11	25.25186
11.5	25.29425
12	25.3434
12.5	25.40037
13	25.46633
13.5	25.54262
14	25.63075
14.5	25.73241
15	25.84948
15.5	25.98406
16	26.13842
16.5	26.31506
17	26.51664
17.5	26.74599
18	27.00606
18.5	27.29986
19	27.63042
19.5	28.00068
20	28.41341
20.5	28.87113
21	29.37599
21.5	29.92966
22	30.53327
22.5	31.18733

23	31.8917
23.5	32.64556
24	33.44745
24.5	34.29534
25	35.18663
25.5	36.11835
26	37.08716
26.5	38.08955
27	39.12185
27.5	40.18043
28	41.26169
28.5	42.36216
29	43.47856
29.5	44.60784
30	45.74716
30.5	46.89393
31	48.04584
31.5	49.20078
32	50.35691
32.5	51.51258
33	52.66637
33.5	53.81701
34	54.96342
34.5	56.10467
35	57.23995
35.5	58.36858
36	59.48998
36.5	60.60367
37	61.70924
37.5	62.80634
38	63.8947
38.5	64.9741
39	66.04435
39.5	67.10532
40	68.1569
40.5	69.199
41	70.23159
41.5	71.25461
42	72.26807
42.5	73.27197
43	74.26631
43.5	75.25112
44	76.22645
44.5	77.19233
45	78.14882

45.5	79.09596
46	80.035
46.5	80.96465
47	81.88501
47.5	82.79616
48	83.6982
48.5	84.59121
49	85.4753
49.5	86.35055
50	87.21704
50.5	88.07487
51	88.92412
51.5	89.76488
52	90.59723
52.5	91.42126
53	92.23705
53.5	93.04468
54	93.84423
54.5	94.63579
55	95.41943
55.5	96.19524
56	96.96328
56.5	97.72365
57	98.47642
57.5	99.22165
58	99.95943
58.5	100.6898
59	101.4129
59.5	102.1288
60	102.8375
60.5	103.5391
61	104.2338
61.5	104.9214
62	105.6022
62.5	106.2762
63	106.9434
63.5	107.604
64	108.2579
64.5	108.9054
65	109.5463
65.5	110.1809
66	110.809
66.5	111.431
67	112.0466
67.5	112.6562

68	113.2596
68.5	113.857
69	114.4484
69.5	115.034
70	115.6136
70.5	116.1875
71	116.7556
71.5	117.3181
72	117.8749
72.5	118.4261
73	118.9719
73.5	119.5121
74	120.047
74.5	120.5766
75	121.1008
75.5	121.6198
76	122.1336
76.5	122.6422
77	123.1458
77.5	123.6444
78	124.1379
78.5	124.6265
79	125.1103
79.5	125.5892
80	126.0633
80.5	126.5327
81	126.9973
81.5	127.4574
82	127.9128
82.5	128.3637
83	128.81
83.5	129.2519
84	129.6894
84.5	130.1225
85	130.5513
85.5	130.9758
86	131.396
86.5	131.812
87	132.2239
87.5	132.6317
88	133.0354
88.5	133.435
89	133.8307
89.5	134.2224
90	134.6101

90.5	134.994
91	135.3741
91.5	135.7504
92	136.1228
92.5	136.4916
93	136.8567
93.5	137.2181
94	137.576
94.5	137.9302
95	138.2809
95.5	138.6281
96	138.9718
96.5	139.3121
97	139.649
97.5	139.9825
98	140.3127
98.5	140.6395
99	140.9631
99.5	141.2835
100	141.6007
100.5	141.9147
101	142.2255
101.5	142.5333
102	142.8379
102.5	143.1395
103	143.4381
103.5	143.7338
104	144.0264
104.5	144.3162
105	144.603
105.5	144.887
106	145.1681
106.5	145.4464
107	145.722
107.5	145.9947
108	146.2648
108.5	146.5321
109	146.7968
109.5	147.0589
110	147.3183
110.5	147.5751
111	147.8293
111.5	148.081
112	148.3302
112.5	148.5769

113	148.8212
113.5	149.0629
114	149.3023
114.5	149.5393
115	149.7739
115.5	150.0062
116	150.2361
116.5	150.4637
117	150.6891
117.5	150.9122
118	151.1331
118.5	151.3518
119	151.5682
119.5	151.7826
120	151.9947
120.5	152.2048
121	152.4127
121.5	152.6186
122	152.8224
122.5	153.0242
123	153.224
123.5	153.4217
124	153.6175
124.5	153.8113
125	154.0032
125.5	154.1932
126	154.3812
126.5	154.5674
127	154.7518
127.5	154.9342
128	155.1149
128.5	155.2938
129	155.4708
129.5	155.6461
130	155.8196
130.5	155.9914
131	156.1615
131.5	156.3299
132	156.4966
132.5	156.6617
133	156.825
133.5	156.9868
134	157.1469
134.5	157.3054
135	157.4624

135.5	157.6178
136	157.7716
136.5	157.9239
137	158.0746
137.5	158.2239
138	158.3717
138.5	158.5179
139	158.6628
139.5	158.8061
140	158.9481
140.5	159.0886
141	159.2277
141.5	159.3654
142	159.5018
142.5	159.6368
143	159.7704
143.5	159.9027
144	160.0337
144.5	160.1633
145	160.2917
145.5	160.4188
146	160.5446
146.5	160.6691
147	160.7924
147.5	160.9145
148	161.0354
148.5	161.155
149	161.2735
149.5	161.3907
150	161.5071
150.5	161.6225
151	161.7377
151.5	161.8538
152	161.9736
152.5	162.1038
153	162.2569
153.5	162.4512
154	162.6991
154.5	162.9937
155	163.3165
155.5	163.6516
156	163.9902
156.5	164.3284
157	164.6643
157.5	164.9973

158	165.3273
158.5	165.6541
159	165.9775
159.5	166.2977
160	166.6148
160.5	166.9286
161	167.2393
161.5	167.5469
162	167.8515
162.5	168.153
163	168.4514
163.5	168.7469
164	169.0394
164.5	169.3291
165	169.6158
165.5	169.8996
166	170.1806
166.5	170.4588
167	170.7342
167.5	171.0069
168	171.2768
168.5	171.544
169	171.8086
169.5	172.0705
170	172.3298
170.5	172.5865
171	172.8406
171.5	173.0922
172	173.3413
172.5	173.5879
173	173.832
173.5	174.0737
174	174.313
174.5	174.5498
175	174.7843
175.5	175.0165
176	175.2463
176.5	175.4743
177	175.7004
177.5	175.9252
178	176.1495
178.5	176.3752
179	176.6057
179.5	176.8475
180	177.111

180.5	177.4104
181	177.7589
181.5	178.1599
182	178.6044
182.5	179.0772
183	179.5649
183.5	180.0582
184	180.5521
184.5	181.0439
185	181.5321
185.5	182.0161
186	182.4956
186.5	182.9707
187	183.441
187.5	183.9066
188	184.3675
188.5	184.8238
189	185.2756
189.5	185.7228
190	186.1656
190.5	186.6039
191	187.0379
191.5	187.4675
192	187.8928
192.5	188.3139
193	188.7308
193.5	189.1435
194	189.552
194.5	189.9565
195	190.357
195.5	190.7534
196	191.1458
196.5	191.5344
197	191.919
197.5	192.2999
198	192.6769
198.5	193.0501
199	193.4196
199.5	193.7854
200	194.1475
200.5	194.5061
201	194.861
201.5	195.2124
202	195.5603
202.5	195.9047

203	196.2456
203.5	196.5832
204	196.9173
204.5	197.2485
205	197.5768
205.5	197.9029
206	198.228
206.5	198.5553
207	198.8909
207.5	199.2466
208	199.6392
208.5	200.0821
209	200.5737
209.5	201.098
210	201.6382
210.5	202.1834
211	202.7279
211.5	203.269
212	203.8056
212.5	204.3372
213	204.8639
213.5	205.3852
214	205.9014
214.5	206.4124
215	206.9182
215.5	207.4191
216	207.9149
216.5	208.4057
217	208.8917
217.5	209.3727
218	209.849
218.5	210.3205
219	210.7873
219.5	211.2494
220	211.7069
220.5	212.1599
221	212.6083
221.5	213.0522
222	213.4917
222.5	213.9268
223	214.3575
223.5	214.7839
224	215.2061
224.5	215.624
225	216.0378

225.5	216.4474
226	216.8529
226.5	217.2544
227	217.6519
227.5	218.0453
228	218.4349
228.5	218.8205
229	219.2023
229.5	219.5803
230	219.9545
230.5	220.325
231	220.6917
231.5	221.0548
232	221.4142
232.5	221.7701
233	222.1224
233.5	222.4712
234	222.8165
234.5	223.1583
235	223.4967
235.5	223.8317
236	224.1634
236.5	224.4918
237	224.8169
237.5	225.1387
238	225.4573
238.5	225.7727
239	226.085
239.5	226.3942
240	226.7002
240.5	227.0032
241	227.3032
241.5	227.6002
242	227.8942
242.5	228.1852
243	228.4734
243.5	228.7586
244	229.041
244.5	229.3206
245	229.5974
245.5	229.8715
246	230.1427
246.5	230.4113
247	230.6772
247.5	230.9404

248	231.201
248.5	231.459
249	231.7144
249.5	231.9673
250	232.2176
250.5	232.4654
251	232.7108
251.5	232.9537
252	233.1941
252.5	233.4322
253	233.6679
253.5	233.9012
254	234.1322
254.5	234.3609
255	234.5872
255.5	234.8114
256	235.0333
256.5	235.2529
257	235.4704
257.5	235.6857
258	235.8988
258.5	236.1099
259	236.3188
259.5	236.5256
260	236.7303
260.5	236.933
261	237.1337
261.5	237.3299
262	237.5237
262.5	237.715
263	237.9037
263.5	238.0896
264	238.2726
264.5	238.4525
265	238.6292
265.5	238.8023
266	238.9715
266.5	239.1364
267	239.2966
267.5	239.4514
268	239.6001
268.5	239.742
269	239.876
269.5	240.0009
270	240.1153

270.5	240.2176
271	240.3057
271.5	240.3772
272	240.4295
272.5	240.4593
273	240.4629
273.5	240.4496
274	240.4186
274.5	240.3671
275	240.2922
275.5	240.1905
276	240.0585
276.5	239.8925
277	239.6888
277.5	239.4439
278	239.1545
278.5	238.8177
279	238.4313
279.5	237.9938
280	237.5047
280.5	236.9643
281	236.3737
281.5	235.7352
282	235.0515
282.5	234.3259
283	233.5624
283.5	232.7647
284	231.9369
284.5	231.0831
285	230.2069
285.5	229.3118
286	228.4011
286.5	227.4777
287	226.544
287.5	225.6024
288	224.6549
288.5	223.703
289	222.7483
289.5	221.7919
290	220.835
290.5	219.8783
291	218.9227
291.5	217.9687
292	217.0168
292.5	216.0676

293	215.1212
293.5	214.1781
294	213.2384
294.5	212.3024
295	211.3701
295.5	210.4418
296	209.5176
296.5	208.5975
297	207.6815
297.5	206.7698
298	205.8624
298.5	204.9592
299	204.0594
299.5	203.1641
300	202.2733
300.5	201.3869
301	200.505
301.5	199.6275
302	198.7543
302.5	197.8856
303	197.0211
303.5	196.161
304	195.3052
304.5	194.4537
305	193.6064
305.5	192.7634
306	191.9246
306.5	191.09
307	190.2595
307.5	189.4332
308	188.611
308.5	187.793
309	186.979
309.5	186.1691
310	185.3633
310.5	184.5615
311	183.7637
311.5	182.9698
312	182.18
312.5	181.3941
313	180.6121
313.5	179.8341
314	179.0599
314.5	178.2896
315	177.5231

315.5	176.7605
316	176.0017
316.5	175.2467
317	174.4955
317.5	173.748
318	173.0043
318.5	172.2642
319	171.5279
319.5	170.7953
320	170.0663
320.5	169.341
321	168.6193
321.5	167.9012
322	167.1867
322.5	166.4757
323	165.7684
323.5	165.0645
324	164.3642
324.5	163.6674
325	162.974
325.5	162.2842
326	161.5977
326.5	160.9148
327	160.2352
327.5	159.559
328	158.8862
328.5	158.2168
329	157.5507
329.5	156.8879
330	156.2285
330.5	155.5724
331	154.9195
331.5	154.2699
332	153.6235
332.5	152.9804
333	152.3405
333.5	151.7038
334	151.0703
334.5	150.44
335	149.8128