تمرین تئوری ۱ جبر خطی

نویسنده:

سید احسان حسن بیگی - ۴۰۲۲۱۱۷۲۳

پرسش ۱

آ)

$$\xrightarrow[\text{addition}]{\text{vector}} \quad \left.\begin{array}{l} \forall x = (a, 3a+1) \in U \\ \forall y = (a', 3a'+1) \in U \end{array}\right\} \rightarrow x+y = (a+a', \ 3(a+a')+2) \notin U \quad \boxed{\text{فضای برداری نیست}}$$

ب)

$$\xrightarrow[\text{scalar addition}]{\text{distribution over}} \quad \left.\begin{array}{l} \forall x = (a, b) \in U \\ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \ \text{(فیلد)} \end{array}\right\} \rightarrow (\alpha+\beta)x = ((\alpha+\beta)a, b) \quad \neq \quad \boxed{\text{فضای برداری نیست}}$$

$$\alpha x + \beta x = (\alpha a, b) + (\beta a, b) = ((\alpha+\beta)a, 2b)$$

ج)

$$\xrightarrow[\text{addition}]{\text{commutative}} \quad \left.\begin{array}{l} \forall x = (a, b) \in U \\ \forall y = (a', b') \in U \end{array}\right\} \rightarrow \begin{array}{l} x \oplus y = x - y = (a-a', b-b') \\ y \oplus x = y - x = (a'-a, b'-b) \end{array} \rightarrow x \oplus y \neq y \oplus x \quad \boxed{\text{فضای برداری نیست}}$$

د)

$$\xrightarrow[\text{addition}]{\text{vector}} \quad \left.\begin{array}{l} \forall x = (a_1, a_2, a_3) \in U \\ \forall y = (b_1, b_2, b_3) \in U \end{array}\right\} \rightarrow x \oplus y = (\underbrace{a_1+b_1+5}_{\in \mathbb{R}}, \underbrace{a_2+b_2-7}_{\in \mathbb{R}}, \underbrace{a_3+b_3+1}_{\in \mathbb{R}}) \in U \ \checkmark$$

$$\xrightarrow[\text{multiplication}]{\text{scalar}} \quad \left.\begin{array}{l} \forall x = (a_1, a_2, a_3) \in U \\ \forall \alpha \in \mathbb{R} \ \text{(فیلد)} \end{array}\right\} \rightarrow \alpha x = (\underbrace{\alpha a_1 + 5(\alpha-1)}_{\in \mathbb{R}}, \underbrace{\alpha a_2 - 7(\alpha-1)}_{\in \mathbb{R}}, \underbrace{\alpha a_3 + (\alpha-1)}_{\in \mathbb{R}}) \in U \ \checkmark$$

$$\xrightarrow[\text{addition}]{\text{commutative}} \left.\begin{array}{l} \forall x = (a_1, a_2, a_3) \in U \\ \forall y = (b_1, b_2, b_3) \in U \end{array}\right\} \rightarrow x \oplus y = (a_1+b_1+5,\ a_2+b_2-7,\ a_3+b_3+1) = y \oplus x \ \checkmark$$

$$\xrightarrow[\text{addition}]{\text{associative}} \left.\begin{array}{l} \forall x = (a_1, a_2, a_3) \in U \\ \forall y = (b_1, b_2, b_3) \in U \\ \forall z = (c_1, c_2, c_3) \in U \end{array}\right\} \rightarrow \begin{array}{l} (x \oplus y) \oplus z = (a_1+b_1+c_1+10,\ a_2+b_2+c_2-14,\ a_3+b_3+c_3+2) \\ \qquad = x \oplus (y \oplus z) \ \checkmark \end{array}$$

$$\xrightarrow[\text{identity}]{\text{additive}} \left.\begin{array}{l} \forall x = (a_1, a_2, a_3) \in U \\ \exists\, 0 = (-5, 7, -1) \in U \end{array}\right\} \rightarrow x \oplus 0 = (a_1, a_2, a_3) = x \ \checkmark$$

$$\xrightarrow[\text{inverse}]{\text{additive}} \left.\begin{array}{l} \forall x = (a_1, a_2, a_3) \in U \\ \exists -x = (-a_1-10,\ -a_2+14,\ -a_3-2) \in U \end{array}\right\} \rightarrow x \oplus (-x) = (-5, 7, -1) = 0 \ \checkmark$$

$$\xrightarrow[\text{scalar multiplication}]{\text{associative}} \left.\begin{array}{l} \forall x = (a_1, a_2, a_3) \in U \\ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}_{\text{فیلد}} \end{array}\right\} \rightarrow \begin{array}{l} \alpha(\beta x) = (\alpha\beta a_1+5\alpha\beta-5,\ \alpha\beta a_1-7\alpha\beta+7,\ \alpha\beta a_1+\alpha\beta-1) \\ \quad = (\alpha\beta a_1+5(\alpha\beta-1),\ \alpha\beta a_1-7(\alpha\beta-1),\ \alpha\beta a_1+(\alpha\beta-1)) \\ \quad = (\alpha\beta) x \ \checkmark \end{array}$$

$$\xrightarrow[\text{scalar addition}]{\text{distribution over}} \left.\begin{array}{l} \forall x = (a_1, a_2, a_3) \in U \\ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}_{\text{فیلد}} \end{array}\right\} \rightarrow \begin{array}{l} (\alpha+\beta) x = ((\alpha+\beta)a_1+5(\alpha+\beta-1),\ (\alpha+\beta)a_2-7(\alpha+\beta-1),\ (\alpha+\beta)a_3-(\alpha+\beta-1)) \\ \quad = (\alpha a_1+5(\alpha-1)+\beta a_1+5(\beta-1)+5, \quad = \alpha x + \beta x \ \checkmark \\ \qquad \alpha a_2-7(\alpha-1)+\beta a_2-7(\beta-1)-7, \\ \qquad \alpha a_3+(\alpha-1)+\beta a_3+(\beta-1)+1) \end{array}$$

$$\xrightarrow[\text{vector addition}]{\text{distribution over}} \left.\begin{array}{l} \forall x = (a_1, a_2, a_3) \in U \\ \forall y = (b_1, b_2, b_3) \in U \\ \forall \alpha \in \mathbb{R}_{\text{فیلد}} \end{array}\right\} \begin{array}{l} \alpha(x+y) = (\alpha a_1+\alpha b_1+10\alpha-5,\ \alpha a_2+\alpha b_2-14\alpha+7,\ \alpha a_3+\alpha b_3+2\alpha-1) \\ \quad = (\alpha a_1+5(\alpha-1)+\alpha b_1+5(\alpha-1)+5, \quad = \alpha x + \alpha y \ \checkmark \\ \qquad \alpha a_2-7(\alpha-1)+\alpha b_2-7(\alpha-1)-7, \\ \qquad \alpha a_3+(\alpha-1)+\alpha b_3+(\alpha-1)+1) \end{array}$$

$$\xrightarrow[\text{identity}]{\text{scalar}} \left.\begin{array}{l} \forall x = (a_1, a_2, a_3) \in U \\ 1 \in \mathbb{R}_{\text{فیلد}} \end{array}\right\} \rightarrow 1x = (a_1+5(0),\ a_2-7(0),\ a_3+(0)) = x \ \checkmark$$

$$\boxed{\text{فضای برداری است}}$$

پرسش ۲

آ) $W = \{(0, a, b, 0) \in \mathbb{R}^4 : a, b \in \mathbb{R}\}$

$U = \{(x, x, y, y) \in \mathbb{R}^4 : x, y \in \mathbb{R}\}$

$\rightarrow U + W = (x, a+x, b+y, y) = \mathbb{R}^4 = U \oplus W$

هر عضو $U \oplus W$ را می‌توان به صورت یکتا به عضو u و w که از جمع آنها ایجاد شده، شکست.

هر عضوی که باشد المان اول و آخر آن x و y را تعیین می‌کند و سپس با داشتن x و y مقادیر a و b به دست می‌آیند

هیچ کدام از المان ها شرط خاصی نسبت به یکدیگر ندارند و تمام فضای $\mathbb{R}^4$ را پوشش می دهند

ب) $W = \{(0, 0, a, b, c) \in \mathbb{R}^5 : a, b, c \in \mathbb{R}\}$

$U = \{(x, y, x+y, x-y, 2x) \in \mathbb{R}^5 : x, y \in \mathbb{R}\}$

$\rightarrow U + W = (x, y, x+y+a, x-y+b, 2x+c) = \mathbb{R}^5 = U \oplus W$

هر عضو $U \oplus W$ را می‌توان به صورت یکتا به عضو u و w که از جمع آنها ایجاد شده است، شکست.

هر عضوی که باشد، المان اول و دوم آن x و y را تعیین می‌کنند و سپس با داشتن x, y مقادیر a, b, c به دست می‌آیند

هیچ کدام از المان ها شرط خاصی نسبت به یکدیگر ندارند و تمام فضای $\mathbb{R}^5$ را پوشش می دهند

پرسش ۳

(آ) S زیرمجموعه ای از تمام دنباله های نامتناهی از اعداد حقیقی است . پس کافی است تنها 3 شرط زیر چک شود :

$$\xrightarrow{\text{Zero vector}} \underset{(0,\dots)}{a_n = 0} \rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 0 \rightarrow a_n \in S \quad \checkmark$$

$$\xrightarrow{\text{Vector addition}} \left.\begin{array}{l} \forall a_n \in S \rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0 \\ \forall b_n \in S \rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0 \end{array}\right\} \rightarrow \lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = 0 \rightarrow a_n + b_n \in S \quad \checkmark$$

$$\xrightarrow[\text{multiplication}]{\text{scalar}} \left.\begin{array}{l} \forall a_n \in S \rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0 \\ \forall k \in R \end{array}\right\} \rightarrow \lim_{n\to\infty} k a_n = 0 \rightarrow k a_n \in S \quad \checkmark$$

(ب) S زیرمجموعه‌ای از تمام توابع از بازه $[0,1]$ به R است . پس کافی است تنها 3 شرط زیر چک شود :

$$\xrightarrow{\text{Zero vector}} \underset{0 \leqslant t \leqslant 1}{f(t) = 0} \rightarrow \int_0^1 f(t)\,dt = 0 \rightarrow f(t) \in S \quad \checkmark$$

$$\xrightarrow[\text{addition}]{\text{vector}} \left.\begin{array}{l} \forall f(t) \in S \rightarrow \int_0^1 f(t)\,dt = 0 \\ \forall g(t) \in S \rightarrow \int_0^1 g(t)\,dt = 0 \end{array}\right\} \xrightarrow{+} \int_0^1 f(t) + g(t)\ dt = 0 \rightarrow f(t) + g(t) \in S \quad \checkmark$$

$$\xrightarrow[\text{multiplication}]{\text{scalar}} \left.\begin{array}{l} \forall f(t) \in S \rightarrow \int_0^1 f(t)\,dt = 0 \\ \forall k \in R \end{array}\right\} \xrightarrow{\times} \int_0^1 k f(t)\,dt = 0 \rightarrow k f(t) \in S \quad \checkmark$$

پرسش ۴

پرسش ۵

$$[A \mid I] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 6 & 6 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

elementry row operation	elementry matrix	result matrix
(e1) $r1 \leftarrow r1/6$	$E_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{6} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\left[\begin{array}{ccc\|ccc} 1 & 1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$
(e2) $r2 \leftarrow r2 + r1$	$E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\left[\begin{array}{ccc\|ccc} 1 & 1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$
(e3) $r3 \leftarrow r3 + r1$	$E_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\left[\begin{array}{ccc\|ccc} 1 & 1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} & 0 & 1 \end{array}\right]$
(e4) $r3 \leftarrow r3 - 2 * r2$	$E_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$	$\left[\begin{array}{ccc\|ccc} 1 & 1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} & -2 & 1 \end{array}\right]$
(e5) $r3 \leftarrow r3 * 3$	$E_5 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$	$\left[\begin{array}{ccc\|ccc} 1 & 1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -6 & 3 \end{array}\right]$
(e6) $r1 \leftarrow r1 - r2$	$E_6 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\left[\begin{array}{ccc\|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -6 & 3 \end{array}\right]$
(e7) $r2 \leftarrow r2 + \frac{1}{3} r3$	$E_7 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\left[\begin{array}{ccc\|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -6 & 3 \end{array}\right]$

$$E_7 \times \cdots \times E_1 = A^{-1} = B$$

⊛ row operation های یکسانی بررویِ A و I انجام دادیم که می‌توان مجموعه این row operation ها را به صورت ضرب یک ماتریس در هردوی A و I (از چپ) دانست. از آنجا که این ماتریس باعث شده $A \to I$ پس معادل A^{-1} است و از آن جا که بخش دوم ماتریس augmented ابتدا I بوده است پس مقدار A^{-1} را در بخش دوم داریم. بنابراین

$A^{-1} = B =$ بخش دوم ماتریس augmented

پرسش ۶

آ

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 7 & -1 & 11 \\ 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 4 & -2 & 10 \end{array}\right] \xrightarrow{r1 \leftarrow r1/3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{7}{3} & \frac{-1}{3} & \frac{11}{3} \\ 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 4 & -2 & 10 \end{array}\right] \xrightarrow[r3 \leftarrow r3-2r1]{r2 \leftarrow r2-r1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{7}{3} & \frac{-1}{3} & \frac{11}{3} \\ 0 & \frac{-1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & -\frac{2}{3} & \frac{-4}{3} & \frac{8}{3} \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[r3 \leftarrow 3r3]{r2 \leftarrow -3r2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{7}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{11}{3} \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & -4 & 8 \end{array}\right] \xrightarrow{r3 \leftarrow r3+2r2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{7}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{11}{3} \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 12 \end{array}\right] \rightarrow$$ تناقض ← هیچ جوابی وجود ندارد

ب

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 1 & -7 \\ 2 & 1 & -4 & 0 \\ 1 & 1 & -3 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{r1 \leftarrow r1/3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{7}{3} \\ 2 & 1 & -4 & 0 \\ 1 & 1 & -3 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[r3 \leftarrow r3-r1]{r2 \leftarrow r2-2r1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{7}{3} \\ 0 & \frac{7}{3} & \frac{-14}{3} & \frac{14}{3} \\ 0 & \frac{5}{3} & \frac{-10}{3} & \frac{10}{3} \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[r3 \leftarrow r3 \times 3]{r2 \leftarrow r2 * \frac{3}{7}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{7}{3} \\ 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 5 & -10 & 10 \end{array}\right] \xrightarrow{r3 \leftarrow r3-5r2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{7}{3} \\ 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{r1 \leftarrow r1+\frac{2}{3}r2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\begin{aligned} x_1 - x_3 &= -1 \\ x_2 - 2x_3 &= 2 \\ x_3 &= x_3 \end{aligned} \longrightarrow \begin{bmatrix} x_3 - 1 \\ 2x_3 + 2 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ج

$$
\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 6 & 15 & -12 \\ 4 & 7 & -13 & -10 \\ 3 & 6 & -12 & -9 \end{array}\right]
\xrightarrow{r1 \leftarrow r1/2}
\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & \frac{15}{2} & -6 \\ 4 & 7 & -13 & -10 \\ 3 & 6 & -12 & -9 \end{array}\right]
\xrightarrow[r3 \leftarrow r3 - 3r1]{r2 \leftarrow r2 - 4r1}
\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & \frac{15}{2} & -6 \\ 0 & -5 & -43 & 14 \\ 0 & -3 & \frac{-69}{2} & 9 \end{array}\right]
$$

$$
\xrightarrow[r3 \leftarrow r3 + 3r2]{r2 \leftarrow r2 \times \frac{-1}{5}}
\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & \frac{15}{2} & -6 \\ 0 & 1 & \frac{43}{5} & \frac{-14}{5} \\ 0 & 0 & \frac{-87}{10} & \frac{3}{5} \end{array}\right]
\xrightarrow{r3 \leftarrow r3 \times \frac{-10}{87}}
\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & \frac{15}{2} & -6 \\ 0 & 1 & \frac{43}{5} & \frac{-14}{5} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-2}{29} \end{array}\right]
$$

$$
\xrightarrow{r2 \leftarrow r2 - \frac{43}{5} r3}
\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & \frac{15}{2} & -6 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{-64}{29} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-2}{29} \end{array}\right]
\xrightarrow{r1 \leftarrow r1 - \frac{15}{2} r3}
\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 0 & \frac{-159}{29} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{-64}{29} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-2}{29} \end{array}\right]
$$

$$
\xrightarrow{r1 \leftarrow r1 - 3r_2}
\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{33}{29} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{-64}{29} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-2}{29} \end{array}\right]
\longrightarrow x_1 = \frac{33}{29}, \quad x_2 = \frac{-64}{29}, \quad x_3 = \frac{-2}{29}
$$

*با علی بابابیگ برای برخی سوال ها همفکری کردم