



تمرین سوم

مسئله ۱. کرنل‌های PDS (۱۵ نمره)

برای کرنل‌های زیر اثبات کنید خاصیت PDS را دارند یا خیر.

• $K(x, y) = \frac{1}{1-xy}$ به ازای $\mathcal{X} = (-1, 1)$

• $K(x, y) = \log(1 + xy)$ به ازای $\mathcal{X} = \mathbb{R}_+$

• $K(x, y) = \cos(x + y)$ به ازای $\mathcal{X} = \mathbb{R}$

• $K(x, y) = \min(x, y)$ به ازای $\mathcal{X} = \mathbb{R}_+$

مسئله ۲. توابع کرنل (۱۰ نمره)

فرض کنید \mathcal{X} فضای نمونه، \mathcal{H} فضای هیلبرت و $\Phi: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{H}$ یک نگاشت باشد. تابع $k: \mathcal{X} \times \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$ را نیز تابع کرنل این فضای هیلبرت در نظر بگیرید.

نقاط آموزشی داده‌شده $S = \{(x_1, y_1), \dots, (x_m, y_m)\}$ را در نظر بگیرید و فضای برچسب‌ها را به صورت $y_i \in \{+1, -1\}$ فرض کنید. نقطه‌ی c_y را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$c_y = \frac{1}{m_y} \sum_{i: y_i = y} \Phi(x_i)$$

که در آن $m_y = |\{i : y_i = y\}|$. فرض کنید m_{+1}, m_{-1} هر دو ناصفر باشند. الگوریتم زیر را در نظر بگیرید:

$$h(x) = \begin{cases} +1 & \|\Phi(x) - c_+\| \leq \|\Phi(x) - c_-\| \\ -1 & \text{otherwise} \end{cases}$$

۱. با تعریف $\mathbf{w} = c_+ - c_-$ و $b = \frac{1}{\gamma} (\|c_-\|^2 - \|c_+\|^2)$ نشان دهید:

$$h(x) = \text{sign}(\langle \mathbf{w}, \Phi(x) \rangle + b).$$

۲. روشی برای محاسبه‌ی $h(x)$ بر مبنای تابع کرنل ارائه دهید.

مسئله‌ی ۳. کوواریانس در RKHS (۱۰ نمره)

کوواریانس میان دو متغیر $Y = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ و $X = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\text{cov}_n(X, Y) = E_n(XY) - E_n(X)E_n(Y),$$

که $E_n(U) = \frac{(\sum_{i=1}^n u_i)}{n}$. کوواریانس برای تشخیص روابط خطی میان دو متغیر X و Y مورد استفاده قرار می‌گیرد. برای گسترش آن جهت یافتن روابط غیرخطی میان X و Y ، معیار زیر را تعریف می‌کنیم:

$$C_n^K(X, Y) = \max_{f, g \in \mathcal{B}_K} \text{cov}_n(f(X), g(Y)),$$

در رابطه‌ی بالا K یک کرنل مثبت معین روی \mathbb{R} و \mathcal{B}_K توپ واحد از RKHS کرنل K است. همچنین $f(U)$ را به شکل $f(U) = (f(u_1), f(u_2), \dots, f(u_n))$ برای بردار $U = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ تعریف می‌کنیم.

۱. $C_n^K(X, Y)$ را به ازای کرنل $K(a, b) = ab$ بنویسید.

۲. به ازای یک کرنل نوعی K ، $C_n^K(X, Y)$ را بر حسب ماتریس‌های گرام X و Y بیان کنید.

مسئله‌ی ۴. تشخیص کرنل‌ها (۱۰ نمره)

• بخش ۱

فضای احتمال $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ را در نظر بگیرید. نشان دهید که تابع زیر که روی $\mathcal{F} \times \mathcal{F}$ تعریف شده، یک کرنل PDS است.

$$K(A, B) = \mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$$

• بخش ۲

S را یک مجموعه‌ی متناهی در نظر بگیرید. نشان دهید که تابع زیر که $P(A)$ در آن مجموعه توانی مجموعه‌ی A است، یک کرنل PSD است.

$$\begin{cases} K : P(S) \times P(S) \rightarrow \mathbb{R} \\ K(A, B) = 2^{|A \cap B|} \end{cases}$$

• بخش ۳

تابع زیر را روی $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ در نظر بگیرید. قصد داریم PDS بودن این کرنل را نشان دهیم.

$$K_\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \sum_{k=1}^N \min(|x_k|^\alpha, |x'_k|^\alpha)$$

Gram matrices^۱

۱. با توجه به تعریف ضرب داخلی $\langle f, g \rangle = \int_{t=-\infty}^{\infty} f(t)g(t) dt$ روی فضای توابع اندازه‌پذیر، نشان دهید که $\min(x, x')$ یک کرنل PDS است.

۲. به کمک بخش قبل، ابتدا نشان دهید که K_1 یک کرنل PDS است. سپس همین نتیجه را به صورت مشابه برای یک α دلخواه نیز به دست آورید.