1

هر متحرک تنها دارای حرکت L و R است و sequence ای از این حرکات دارد . برای آنکه پس از N گام ، دو متحرک در یک نقطه ملاقات داشته باشند باید تعداد R ها (بنابراین L ها) برای هر دو یکسان باشد . به عنوان مثال

$$\begin{cases} \text{متحرک 1} & RRLLR \\ \text{متحرک 2} & RRRLL \end{cases}$$

تعداد R ها را k می نامیم . به ازای هر k احتمال اینکه دو متحرک در یک نقطه ملاقات داشته باشند برابر $\left(\binom{n}{k}\frac{1}{2^n}\right)^2$ است

بنابراین داریم:

$$\text{احتمال ملاقات 2 متحرک پس از N گام} = \sum_{k=0}^{N}\left(\binom{n}{k}\frac{1}{2^n}\right)^2 = \frac{1}{2^{2n}}\sum_{k=0}^{N}\binom{n}{k}^2 = \frac{1}{2^{2n}}\binom{2n}{n}$$

2

$A = \{(2,1) \dots (2,6)\}$ $\quad B = \{(1,6)(2,5)(3,4)(4,3)(5,2)(6,1)\}$ $\quad C = \{(1,3) \dots (6,3)\}$

$p(A) = \frac{1}{6}$ $\quad p(B) = \frac{1}{6}$ $\quad p(C) = \frac{1}{6}$

a) $p(A \cap B) = \frac{1}{36} = p(A)\,p(B) \longrightarrow$ صحیح

b) $p(A \cap C) = \frac{1}{36} = p(A)\,p(C) \longrightarrow$ صحیح

c) $p(B \cap C) = \frac{1}{36} = p(B)\,p(C) \longrightarrow$ صحیح

d) $p(A \cap B \cap C) = 0 \neq p(A)\,p(B)\,p(C) \longrightarrow$ غلط $\quad$ pairwise independence $\neq$ independence

---

3

$p(B=0 \mid A=1) = 0.2 \longrightarrow p(B=1 \mid A=1) = 0.8$

$p(B=1 \mid A=0) = 0.3 \longrightarrow p(B=0 \mid A=0) = 0.7$

$A=x$ یعنی آلیس x را ارسال کند

$B=x$ یعنی باب x را دریافت کند

a) $$p(B=1) \overset{\text{احتمال کل}}{=\!=} \underbrace{p(B=1 \mid A=0)}_{0.3}\underbrace{p(A=0)}_{0.5} + \underbrace{p(B=1 \mid A=1)}_{0.8}\underbrace{p(A=1)}_{0.5} = 0.15 + 0.4 = \boxed{0.55}$$

b) $$p(A=0 \mid B=0) \overset{\text{بیز}}{=\!=} \frac{p(B=0 \mid A=0)\;p(A=0)}{\underbrace{p(B=0)}_{1-p(B=1)}} = \frac{0.7 \times 0.5}{1-0.55} = \frac{0.35}{0.45} \simeq \boxed{0.778}$$

4

تعداد حالاتی که کلمه "اول" زودتر ساخته شود معادل تعداد حالاتی است که یکی از حروف کلمه "تمرین" ، آخرین حرف برداشته شده باشد

$$\_\ \_\ \_\ \_\ \_\ \_\ \_\ \underset{\text{ت م ر ی ن}}{\_} \longrightarrow$$ احتمال اینکه کلمه "اول" زودتر ساخته شود $= \dfrac{\binom{5}{1} \times 7!}{8!} = \dfrac{5}{8}$

5

تعداد خط های امیرحسین را T_A ، تعداد خط های پویا را T_p می نامیم

خواسته سوال $p(T_A \geq T_p)$ است که برابر است با $1-p(T_A < T_p)$ بنابراین $p(T_A < T_p)$ را به دست می آوریم

مسئله را به دو بخش تقسیم می کنیم . فرض می کنیم امیرحسین و پویا هر دو n سکه انداخته اند و پویا سکه آخرش مانده است . تنها 3 حالت زیر را داریم :

1. تعداد خط های امیرحسین بیشتر است ← احتمال این رویداد را p می نامیم
2. تعداد خط های پویا بیشتر است ← با توجه به اینکه هر دو نفر n پرتاب fair مستقل داشته اند ، احتمال این رویداد نیز برابر p است
3. تعداد خط های دو نفر یکسان است ← با توجه به اینکه اجتماع این 3 رویداد تمام حالات را افراز می کند پس باید جمع احتمالات آن‌ها 1 شود پس احتمال این رویداد $1-2p$ است

- اگر حالت اول رخ داده باشد ، پویا با پرتاب آخرش نمی تواند رویداد $T_A < T_p$ را رقم بزند
- اگر حالت دوم رخ داده باشد ، صرف نظر از پرتاب آخر پویا رویداد $T_A < T_p$ رقم خورده است
- اگر حالت سوم رخ داده باشد ، باید پرتاب آخر پویا خط بیاید تا رویداد $T_A < T_p$ رقم بخورد

$$\longrightarrow p(T_A < T_p) \overset{\text{احتمال کل}}{=} \underbrace{p(T_A < T_p \mid \text{حالت 1})}_{0} \underbrace{p(\text{حالت 1})}_{p} + \underbrace{p(T_A < T_p \mid \text{حالت 2})}_{1} \underbrace{p(\text{حالت 2})}_{p} + \underbrace{p(T_A < T_p \mid \text{حالت 3})}_{\frac{1}{2}} \underbrace{p(\text{حالت 3})}_{1-2p}$$

$$= p + \frac{1}{2} - p = \frac{1}{2}$$

$$\longrightarrow \text{خواسته سوال} = p(T_A \geq T_p) = 1 - \frac{1}{2} = \boxed{\frac{1}{2}}$$

6

a

تعداد حالاتی که $n-m$ آنتن سالم و m آنتن معیوب را به صورت خطی کنار هم بچینیم به طوری که هیچ 2 آنتن معیوب کنار هم قرار نگیرند :

اگر آنتن ها را متمایز درنظر بگیریم — چیدن آنتن های معیوب بین آنتن های سالم

$$\longrightarrow \binom{n-m+1}{m}(n-m)!\,m! \longrightarrow \boxed{\text{احتمال فعال بودن سیستم} = \frac{\binom{n-m+1}{m}(n-m)!\,m!}{n!}}$$

اگر آنتن ها را مشابه در نظر بگیریم — ،،

$$\longrightarrow \binom{n-m+1}{m} \longrightarrow \text{احتمال فعال بودن سیستم} = \frac{\binom{n-m+1}{m}}{\frac{n!}{(n-m)!\,m!}}$$

⊛ بنابراین چون در نهایت احتمال را حساب می کنیم می توانیم آنتن های سالم را باهم و آنتن های معیوب را نیز باهم مشابه بگیریم و تفاوتی ندارد

b

⊛ این مسئله را می توان با چیدن آنتن های معیوب بین آنتن های سالم حل کرد.

$n-m$ آنتن سالم مشابه را در $m+1$ مکان متمایز (بین و اطراف آنتن های معیوب) می چینیم به طوریکه در هر $m-1$ مکانی که بین آنتن های خراب وجود دارد، حداقل دو آنتن سالم قرار گیرد. ...

به طور کلی برای توزیع n شیء مشابه در k مکان متمایز داشتیم :

$$\binom{n+k-1}{k-1} \qquad x_1+\dots+x_k = n, \quad \forall x_i \geq 0$$

بنابراین برای مسئله آنتن ها داریم :

$$\left.\begin{aligned} &x_1+\dots+x_{m+1} = n-m \\ &x_1,\ x_{m+1} \geq 0 \\ &x_2,\dots,x_m \geq 2 \end{aligned}\right\} \longrightarrow \begin{aligned} &x_1+\dots+x_{m+1} = n-m-2(m-1) \\ &\forall x_i \geq 0 \end{aligned} \longrightarrow \binom{n-3m+2+m+\cancel{1}-\cancel{1}}{m} = \binom{n-2m+2}{m}$$

$$\text{احتمال فعال بودن سیستم} = \frac{\binom{n-2m+2}{m}}{\frac{n!}{(n-m)!\,m!}} = \frac{\binom{n-2m+2}{m}(n-m)!\,m!}{n!}$$

$\boxed{7}$

طبق صورت مسئله، آزمایش زمانی به پایان می‌رسد که r توپ قرمز دیده باشیم و بنابراین همواره آخرین توپ قرمز است.

بنابراین آزمایش را به دو بخش تقسیم می‌کنیم، $\underbrace{\text{احتمال اینکه در } k-1 \text{ برداشت اول } r-1 \text{ توپ قرمز مشاهده شود}}_{A}$، $\underbrace{\text{احتمال اینکه برداشت آخر توپ قرمز باشد}}_{B}$

برای به دست آوردن $p(A)$ از شمارش استفاده می‌کنیم. $r-1$ توپ قرمز باید مشاهده شود و $k-r$ توپ آبی. پس داریم:

$$p(A) = \frac{\binom{n}{r-1}\binom{m}{k-r}}{\binom{n+m}{k-1}}$$

$\binom{n}{r-1}\binom{m}{k-r}$ ← تعداد کل حالاتی که $r-1$ توپ قرمز و $k-r$ توپ آبی برداشته شود

$\binom{n+m}{k-1}$ ← تعداد کل حالاتی که صرف نظر از رنگ می‌توان $k-1$ توپ برداشت

برای برداشت آخر $n-(r-1)$ توپ قرمز باقی مانده و صرف نظر از رنگ نیز $n+m-(k-1)$ توپ داریم. پس:

$$p(B) = \frac{n-r+1}{n+m-k+1}$$

$$\longrightarrow \text{جواب نهایی} = p(A)\,p(B) = \frac{\binom{n}{r-1}\binom{m}{k-r}}{\binom{n+m}{k-1}} \times \frac{n-r+1}{n+m-k+1}$$

$\boxed{8}$

⊛ فرض می‌کنیم منظور از باز بودن کلید، عبور دادن سیگنال باشد.

مسیرهای زیر از ورودی به خروجی وجود دارند که احتمال عبور از هر یک از آنها را حساب می‌کنیم:

- $ABD \longrightarrow p(ABD) = \frac{1}{2}\times\frac{1}{7}\times\frac{1}{6}\times\frac{1}{3} = \frac{1}{252}$
- $ACD \longrightarrow p(ACD) = \frac{1}{2}\times\frac{1}{8}\times\frac{1}{8}\times\frac{1}{3} = \frac{1}{384}$
- $ABCD \longrightarrow p(ABCD) = \frac{1}{2}\times\frac{1}{7}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{8}\times\frac{1}{3} = \frac{1}{672}$
- $ACBD \longrightarrow p(ACBD) = \frac{1}{2}\times\frac{1}{8}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{6}\times\frac{1}{3} = \frac{1}{576}$

$$p(\text{انتقال سیگنال}) = p(ABD \cup ACD \cup ABCD \cup ACBD) \leqslant \frac{1}{252}+\frac{1}{384}+\frac{1}{672}+\frac{1}{576}$$

union bound

$\boxed{9}$

رویداد دختر بودن تمام فرزندان خانواده را G می نامیم

$\boxed{a}$

$A =$ خانواده حداقل یک دختر دارد

$$p(G|A) = \frac{P(G,A)}{P(A)} \overset{A \subseteq G}{=\!=\!=} \frac{P(G)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{2^n}}{1-\underbrace{\frac{1}{2^n}}_{\text{هیچ دختری نداشته باشد}}} = \frac{1}{2^n-1}$$

$\boxed{b}$

$B =$ فرزند مشاهده شده دختر است

$$p(G|B) = \frac{P(G,B)}{P(B)} \overset{B \subseteq G}{=\!=\!=} \frac{P(G)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{2^n}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2^{n-1}}$$

مشاهده‌ی B با A در بخش قبل متفاوت است. احتمال اینکه یکی از فرزندان را به صورت رندم بررسی کنیم و دختر باشد، کمتر از احتمال آن است که حداقل یک دختر داشته باشیم و بنابراین با داشتن فرض B به احتمال بیشتری G رخ می دهد تا با داشتن فرض A

$\boxed{c}$

می دانیم که حداقل یک دختر به نام مریم داریم. این رویداد را C می نامیم.

کار کردن با $\bar{C}$ بسیار راحت تر از C است پس سعی می کنیم $p(G|C)$ را به نحوی بازنویسی کنیم که C ها به $\bar{C}$ تبدیل شوند

$$p(\bar{C}) = \left(p(\bar{M})\right)^n \overset{\text{احتمال کل}}{=\!=\!=} \Big(\underbrace{p(\bar{M}|\text{فرزند دختر باشد})}_{1-\beta}\, \underbrace{p(\text{فرزند دختر باشد})}_{\frac{1}{2}} + \underbrace{p(\bar{M}|\text{فرزند پسر باشد})}_{1}\, \underbrace{p(\text{فرزند پسر باشد})}_{\frac{1}{2}}\Big)^n$$

⊛ رویدادی که اسم یک فرزند مریم باشد را M می نامیم

$$= \left(\frac{2-\beta}{2}\right)^n \longrightarrow p(C) = 1-\left(\frac{2-\beta}{2}\right)^n$$

$$p(G,C) = \underbrace{p(G)}_{\frac{1}{2^n}} - \underbrace{p(G,\bar{C})}_{\left(\frac{1-\beta}{2}\right)^n} = \frac{1}{2^n} - \left(\frac{1-\beta}{2}\right)^n$$

همه فرزندان دختر باشند و نام هیچکدام مریم نباشد

$$\longrightarrow p(G|C) = \frac{p(G,C)}{p(C)} = \frac{\frac{1}{2^n} - \left(\frac{1-\beta}{2}\right)^n}{1-\left(\frac{2-\beta}{2}\right)^n} = \frac{1-(1-\beta)^n}{2^n-(2-\beta)^n}$$

- source 1
- source 2