1

$$\|A\|_2 = \max_{\|x\|_2=1} \|Ax\|_2 = \max_{\|x\|_2=1} \|U\Sigma V^T x\|_2$$

$$= \max_{\|x\|_2=1} \sqrt{(U\Sigma V^T x)^* (U\Sigma V^T x)} = \max_{\|x\|_2=1} \sqrt{x^* V \Sigma^T \cancel{U^*} \cancel{U} \Sigma V^T x}$$

$$\|V^T x\|_2 = x^T \cancel{V} \cancel{V^T} x = \|x\|_2 = 1$$

$$= \max_{\|V^T x\|_2=1} \|\Sigma V^T x\|_2$$

می‌دانیم $\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sigma_2 \end{bmatrix}$ و وقتی در بردار $V^T x$ ضرب شود که نورم آن ثابت است و سپس نورم گرفته شود، به نحوی انگار جمع وزن دار σ_i ها حساب می‌شود. بیشینه کردن این مقدار زمانی اتفاق می‌افتد که تمام وزن را به بزرگترین σ_i بدهیم. پس داریم:

$$\|A\|_2 = \max \left\| \underbrace{\begin{bmatrix} \sigma_{max} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \ddots \end{bmatrix}}_{\Sigma} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}}_{V^T x} \right\|_2 = \max(\sigma_1 \cdots \sigma_n)$$

از آنجا که $\sigma_i = \sqrt{\lambda_i(A^*A)}$ پس داریم

$$\|A\|_2 = \sqrt{\lambda_{max}(A^*A)}$$

2

طبق تعریف بردار ویژه، داریم $AV = \lambda V$ بنابراین واضح است که λV در $range(A)$ قرار دارد. چون $\lambda \neq 0$ پس می‌توان نوشت $A\frac{V}{\lambda} = V$ پس عضوی از فضای برداری اول $\left(\frac{V}{\lambda}\right)$ پیدا کردیم که A آنرا به فضای دوم می‌برد و در فضای دوم V می‌شود

پس V در رنج A که همان فضای ستونی A است قرار دارد

3

Σ یک ماتریس قطری است که اعضای قطر آن رادیکال eigen value های A^*A هستند

$$A^*A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(1-\lambda) - 1 = \lambda^2 - 3\lambda + 1 \longrightarrow \lambda = \frac{3 \pm \sqrt{9-4}}{2}$$

$$\longrightarrow \sigma_1 = \sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}} = \frac{\sqrt{6+2\sqrt{5}}}{2} = \frac{\sqrt{5+2\sqrt{5}+1}}{2} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$$

$$\sigma_2 = \sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}} = \frac{\sqrt{6-2\sqrt{5}}}{2} = \frac{\sqrt{5-2\sqrt{5}+1}}{2} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

$$\longrightarrow \Sigma = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{5}+1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{5}-1}{2} \end{bmatrix}$$

$\boxed{4.a}$

برای اینکه AA^+ یک orthogonal projection باشد، باید 2 مورد زیر را اثبات کنیم (طبق تعریف)

منظور از Σ ماتریس zero pad شده است که در فرم کلی svd داریم

$$\Sigma = \begin{bmatrix} S & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

① $(AA^+)^2 = AA^+$

اثبات $\longrightarrow (AA^+)^2 = U\Sigma \underbrace{V^TV}_{I} \Sigma^+ \underbrace{U^TU}_{I} \Sigma \underbrace{V^TV}_{I} \Sigma^+U^T = U\Sigma\underbrace{\Sigma^+\Sigma}_{I}\Sigma^+U^T = \underbrace{U\Sigma V^T}_{A}\underbrace{V\Sigma^+U^T}_{A^+}$ ✓

② $(AA^+)^T = AA^+$

اثبات $\longrightarrow A = U\Sigma V^T \longrightarrow A^+ = \underbrace{\left(V\Sigma^T\underbrace{U^TU}_{I}\Sigma V^T\right)^{-1}}_{V\Sigma^{-1}\Sigma^{-1}V^T} V\Sigma^TU^T = V\underbrace{(\Sigma^T\Sigma)^{-1}\Sigma^T}_{\Sigma^+}U^T = V\Sigma^+U^T$

$$\longrightarrow (AA^+)^T = \left(U\Sigma\overbrace{V^TV}^{I}\Sigma^+U^T\right)^T = U\underbrace{(\Sigma\Sigma^+)^T}_{\Sigma\Sigma^+}U^T = \underbrace{U\Sigma V^T}_{A}\underbrace{V\Sigma^+U^T}_{A^+} = AA^+ \checkmark$$

③ همچنین باید ثابت کنیم $\text{col space}(AA^+) = \text{col space}(A)$

$\forall y \in \text{col space}(A) \longrightarrow \exists x \quad y = Ax$

حال باید نشان دهیم z ای وجود دارد که $AA^+z = y$. در بخش (ج) ثابت کردیم که $AA^+A = A$. پس داریم:

$$\xrightarrow{z = Ax} AA^+z = \underbrace{AA^+A}_{A}x = y \longrightarrow \text{col space}(A) \subseteq \text{col space}(AA^+)$$

همچنین می دانیم به ازای هر A, B $\text{col space}(AB) \subseteq \text{col space}(A)$ زیرا

$$\text{col space}(AB) = \text{col space}\left(\begin{bmatrix} | & & | \\ Ab_1 & \cdots & Ab_n \\ | & & | \end{bmatrix}\right) = \sum_{i=1}^{n}\alpha_i Ab_i = A\sum_{i=1}^{n}\alpha_i b_i$$

$\subseteq$

$\text{col space}(A) = Ax$ (هر x)

زیرا ممکن است ستون های B مستقل خطی نباشند و به اندازه x قدرت span نداشته باشند

$\text{col space}(AA^+) \subseteq \text{col space}(A)$

پس هر AA^+y یک orthogonal proj از y در $\text{col space}(A)$ است

$\boxed{4.c}$

در بخش الف نشان دادیم که $A^+ = V\Sigma^+U^T$ پس داریم

$$AA^+A = U\Sigma \underbrace{V^T V}_{I}\Sigma^+ \underbrace{U^T U}_{I}\Sigma V^T$$

$$= U\Sigma \underbrace{\Sigma^+\Sigma}_{\underbrace{(\Sigma\Sigma)^{-1}\Sigma\Sigma}_{I}} V^T = U\Sigma V^T = A$$

$$A^+AA^+ = V\Sigma^+ \underbrace{U^T U}_{I}\Sigma \underbrace{V^T V}_{I}\Sigma^+U^T = V\underbrace{\Sigma^+\Sigma}_{I}\Sigma^+U^T = V\Sigma^+U^T = A^+$$

در برخی سوال‌ها با علی بابایگ همفکری داشتم