تمرین تئوری ۲ جبر خطی

نویسنده:

سید احسان حسن بیگی - ۴۰۲۲۱۱۷۲۳

پرسش ۱

برای اثبات استقلال خطی بردار های ذکر شده باید نشان دهیم که تنها جواب معادله زیر آن است که $\beta_1 \dots \beta_4$ همگی صفر شوند

$$\beta_1(V_1-V_2)+\beta_2(V_2-V_3)+\beta_3(V_3-V_4)+\beta_4V_4=0$$

$$\rightarrow \beta_1V_1+(\beta_2-\beta_1)V_2+(\beta_3-\beta_2)V_3+(\beta_4-\beta_3)V_4=0$$

می دانیم که $V_1 \dots V_4$ بردار های مستقل خطی اند

پس تنها جواب معادله آن است که تمام ضرایب صفر شوند $\longrightarrow$ $\beta_1=\beta_2=\beta_3=\beta_4$

$$\beta_1=0$$

نشان دادیم که $\beta_1 \dots \beta_4$ همگی باید صفر شوند و بنابراین
بردار های مذکور مستقل خطی اند

پرسش ۲

ابتدا اثبات می‌کنیم که اگر $\beta_1 \dots \beta_{m-1}$ به ازای تمام مقادیر $k_1 \dots k_{m-1}$ مستقل خطی باشند آنگاه $\alpha_1 \dots \alpha_m$ مستقل خطی خواهند بود.

می‌دانیم که β_i ها مستقل خطی اند پس باید در معادله زیر $c_1 = \dots = c_{m-1} = 0$

$$\sum_{i=1}^{m-1} c_i \beta_i = 0 \longrightarrow \sum_{i=1}^{m-1} c_i \left(\alpha_i + k_i \alpha_m \right) = 0$$

$$\longrightarrow \sum_{i=1}^{m-1} c_i \alpha_i + \left(\sum_{i=1}^{m-1} c_i k_i \right) \alpha_m = 0 \quad \circledast$$

$$c_1 = \dots = c_{m-1} = 0$$

برهان خلف: فرض می‌کنیم α_i ها وابسته خطی باشند. بنابراین در معادله زیر حداقل دو c'_i وجود دارد که مخالف صفر باشند

$$\sum_{i=1}^{m} c'_i \alpha_i = 0 \longrightarrow \sum_{i=1}^{m-1} c'_i \alpha_i + c'_m \alpha_m = 0$$

$\circledast$ اگر فقط یک c'_i مخالف صفر باشد باید بردار صفر داشته باشیم که خلاف فرض سوال است

با توجه به اینکه $\underbrace{k_i \text{ ها می‌توانند هر مقداری داشته باشند}}_{\mathrm{I}}$ و اینکه $\underbrace{\text{حداقل دو } c'_i \text{ مخالف صفر وجود دارد}}_{\mathrm{II}}$ ادعا می‌کنیم که c'_m را می‌توان به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$c'_m = \sum_{i=1}^{m-1} c'_i k_i$$

با توجه به I و II با انتخاب مقادیر مختلف برای k_i می‌توان تمام مقادیر حقیقی را برای c'_m پوشش داد (حتی 0)

حال معادله را به ازای فرم جدید c'_m بازنویسی می‌کنیم:

$$\sum_{i=1}^{m} c'_i \alpha_i = 0 \longrightarrow \sum_{i=1}^{m-1} c'_i \alpha_i + \overbrace{\left(\sum_{i=1}^{m-1} c'_i k_i \right)}^{c'_m} \alpha_m = 0$$

مشاهده می‌شود که دقیقاً به $\circledast$ رسیدیم $\longleftarrow$ $c'_1 = \dots = c'_{m-1} = 0$ $\longleftarrow$ فرض خلف باطل است و $\alpha_1 \dots \alpha_m$ مستقل خطی اند

برای جهت دیگر باید نشان دهیم که تنها جواب معادله زیر آن است که $c_1 \dots c_{m-1}$ همگی صفر شوند

$$\sum_{i=1}^{m-1} c_i \beta_i = 0 \longrightarrow \sum_{i=1}^{m-1} c_i \left(\alpha_i + k_i \alpha_m \right) = 0$$

$$\longrightarrow \sum_{K=1}^{m-1} c_i \alpha_i + \left(\sum_{i=1}^{m-1} c_i k_i \right) \alpha_m = 0$$

* می دانیم که حداقل دو c_i باید مخالف صفر باشند وگرنه همگی صفر می شوند و از همان اول اثبات می شود که β_i ها مستقل اند پس مشابه قبل می توان گفت که عبارت $\sum_{i=1}^{m-1} c_i k_i$ تمامی مقادیر حقیقی را پوشش می دهد $\longleftarrow$ این عبارت را نیز یک ضریب به نام c_m می نامیم

$c_1 = \dots = c_{m-1} = c_m = 0 \longleftarrow$ به فرم مربوط به استقلال α_i ها رسیدیم $\longleftarrow$

$\beta_1 \dots \beta_{m-1}$ مستقل خطی اند

پرسش ۳

$\boxed{3.a}$

$$\left.\begin{array}{l}\forall x = (x_1, x_2) \in C \\ \mathbb{0} = (-1, -1)\end{array}\right\} \longrightarrow x + \mathbb{0} = (x_1 - 1 + 1,\ x_2 - 1 + 1) = x \ \checkmark$$

$\boxed{3.b}$

$$\left.\begin{array}{l}\forall u = (u_1, u_2) \\ \forall V = (V_1, V_2) \\ \forall \alpha \in \mathbb{R}\end{array}\right\} \longrightarrow \begin{aligned} \alpha(u + V) &= \alpha\,(u_1 + V_1 + 1,\ u_2 + V_2 + 1) \\ &= (\alpha u_1 + \alpha V_1 + \alpha + \alpha - 1,\ \alpha u_2 + \alpha V_2 + \alpha + \alpha - 1) \\ &= (\alpha u_1 + \alpha - 1,\ \alpha u_2 + \alpha - 1) + (\alpha V_1 + \alpha - 1,\ \alpha V_2 + \alpha - 1) \\ &= \alpha u + \alpha V \ \checkmark \end{aligned}$$

فیلد

پرسش ۴

$\boxed{4.a}$

v' و w' را طبق مرحله اول گرام اشمیت به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\begin{aligned} v' &= v - (v\cdot u)u \\ w' &= w - (w\cdot u)u \end{aligned} \xrightarrow[\text{شوارتز}]{\text{کوشی}} |v'\cdot w'|^2 \leq \|v'\|^2 \|w'\|^2$$

$$v'\cdot w' = v\cdot w - (w\cdot u)\,u\cdot v - \cancel{(v\cdot u)\,u\cdot w} + \cancel{(w\cdot u)(v\cdot u)\overbrace{u\cdot u}^{1}} = v\cdot w - (w\cdot u)(u\cdot v)$$

$$\longrightarrow |v'\cdot w'|^2 = (v\cdot w)^2 + (w\cdot u)^2(u\cdot v)^2 - 2(v\cdot w)(w\cdot u)(u\cdot v) \quad \mathrm{I}$$

$$\|v'\|^2 = v'\cdot v' = \overbrace{v\cdot v}^{1} - 2(v\cdot u)\,u\cdot v + (v\cdot u)^2\,\overbrace{u\cdot u}^{1} = 1 - (v\cdot u)^2$$

$$\|w'\|^2 = w'\cdot w' = \text{-------------} = 1 - (w\cdot u)^2$$

$$\longrightarrow \|v'\|^2\|w'\|^2 = 1 - (w\cdot u)^2 - (v\cdot u)^2 + (v\cdot u)^2(w\cdot u)^2 \quad \mathrm{II}$$

$$\mathrm{II}, \mathrm{I} \xrightarrow[\text{در کوشی شوارتز}]{\text{جاگذاری}} \mathrm{I} \leq \mathrm{II} \longrightarrow (v\cdot w)^2 - 2(v\cdot w)(w\cdot u)(u\cdot v) \leq 1 - (w\cdot u)^2 - (v\cdot u)^2$$

$$\longrightarrow 2(u\cdot v)(u\cdot w)(v\cdot w) \geq (u\cdot v)^2 + (u\cdot w)^2 + (v\cdot w)^2 - 1$$

$\boxed{4.b}$ می دانیم که در نامساوی کوشی شوارتز تساوی برقرار می شود اگر و تنها اگر بردارهایی که در هم ضرب داخلی کردیم وابسته خطی باشند (یعنی V' و W')

ابتدا نشان می دهیم اگر W' و V' وابسته خطی باشند آنگاه u, V, W وابسته خطی اند

چون V', W' وابسته خطی اند پس میدانیم در معادله زیر حداقل یکی از c_1 یا c_2 غیر صفر است

$$c_1 V' + c_2 W' = 0 \longrightarrow c_1 V - c_1 (V \cdot u) u + c_2 W - c_2 (W \cdot u) u = 0$$

$$\longrightarrow c_1 V + c_2 W + \underbrace{\left(-c_1 (V \cdot u) - c_2 (W \cdot u)\right)}_{c_3} u = 0$$

بنابراین باتوجه به اینکه می دانستیم حداقل یکی از c_1 یا c_2 غیر صفر است توانستیم مثالی ارائه دهیم که ترکیب خطی V, W, u صفر شده است و حداقل یک ضریب غیر صفر داریم $\longrightarrow$ V, W, u وابسته خطی اند

حال نشان می دهیم اگر u, V, W وابسته خطی باشند آنگاه V' و W' وابسته خطی اند

$$c_1 V' + c_2 W' = 0 \xrightarrow{\text{مشابه قبل}} c_1 V + c_2 W + \left(-c_1 (V \cdot u) - c_2 (W \cdot u)\right) u = 0$$

از آنجا که می دانیم u, V, W وابسته خطی اند پس هرجا ترکیب خطی آنها صفر شود حداقل یکی از ضرایب می تواند غیر صفر باشد ادعا می کنیم که از این 3 ضریب حداقل c_1 یا c_2 غیر صفر اند. دلیل آن است که اگر اینطور نباشد هر سه ضریب صفر خواهند شد که مخالف فرض وابستگی u, V, W است $\longrightarrow$ حداقل یکی از c_1 یا c_2 غیر صفر است $\longrightarrow$ V', W' وابسته خطی اند

پرسش ۵

$U_1 \dots U_m$ زیرفضاهایی از V هستند و $W = U_1 \oplus \dots \oplus U_m$

با توجه به اینکه بُعد V محدود است، پس بعد U_i ها نیز محدود است و برای هر یک basis داریم. برای $U_1 \dots U_m$ basis های $B_1 \dots B_m$ را در نظر می‌گیریم و $B = B_1 \cup \dots \cup B_m$

با توجه به فرض صورت سوال هر $w \in W$ را می‌توان به صورت $w = \sum_{i=1}^{m} u_i \;;\; u_i \in U_i$ نوشت و همچنین می‌دانیم که هر u_i نیز از ترکیب خطی اعضای پایه B_i به دست می‌آید ← هر عضو فضای W را می‌توان توسط اعضای B نوشت ← B فضای W را span می‌کند

حال می‌خواهیم نشان دهیم که B مستقل خطی هم هست. بنابراین باید ترکیب خطی اعضای آن را برابر صفر قرار دهیم.
اگر اعضای B را براساس اینکه هر عضو از کدام B_i آمده دسته‌بندی کنیم، با توجه به خاصیت direct sum می‌دانیم که هر دسته باید صفر شوند (زیرا یکی از حالاتی که 0 ساخته می‌شود، جمع کردن m تا صفر است و اگر بخواهد direct sum باشد باید تنها یک حالت داشته باشیم پس حالت دیگری برای 0 شدن نداریم)

حال با توجه به اینکه ترکیب خطی اعضای هر B_i برابر صفر شد و ضمناً هر B_i پایه است (مستقل خطی است) پس طبق تعریف استقلال خطی باید ضرایب اعضایش صفر شود ← تمامی ضرایب اعضای B صفر شد ← B مستقل خطی است

بنابراین با اثبات 2 خاصیت ذکر شده می‌دانیم که B یک پایه برای W است

$$\left.\begin{aligned} |B| &= \sum_{i=1}^{m} |B_i| \\ |B| &= \dim(W) \\ |B_i| &= \dim(U_i) \end{aligned}\right\} \longrightarrow \dim(W) = \boxed{\dim(U_1 \oplus \dots \oplus U_m) = \dim(U_1) + \dots + \dim(U_m)}$$

پرسش ۶

$\boxed{6.a}$

W و U نیز دارای بعد متناهی اند . برای W ، U پایه ها را بصورت زیر نامگذاری می کنیم

$$\text{Basis}(U) = \{u_1 \cdots u_q , v_1 \cdots v_p\}$$

$$\text{Basis}(W) = \{w_1 \cdots w_r , v_1 \cdots v_p\}$$

$$\text{Basis}(U \cap W) = \{v_1 \cdots v_p\}$$

حال می خواهیم ثابت کنیم مجموعه $\{u_1 \cdots u_q , w_1 \cdots w_r , v_1 \cdots v_p\} = Z$ یک پایه برای $U+W$ است

اعضای $U+W$ از جمع اعضای U و W ایجاد می شوند و می دانیم که اعضای U و W نیز از ترکیب خطی اعضای پایه هایشان ایجاد می شود

پس اعضای $U+W$ همگی از ترکیب خطی اعضای Z ایجاد خواهند شد $\longrightarrow$ Z فضای $U+W$ را span می کند

برای اثبات استقلال خطی Z باید نشان دهیم جواب معادله زیر آن است که تمام α_i ها و β_i ها و γ_i ها صفر شوند :

$$\sum_{i=1}^{q} \alpha_i u_i + \sum_{i=1}^{r} \beta_i w_i + \sum_{i=1}^{p} \gamma_i v_i = 0 \longrightarrow \underbrace{\sum_{i=1}^{q} \alpha_i u_i + \sum_{i=1}^{p} \gamma_i v_i}_{\in U} = \underbrace{-\sum_{i=1}^{r} \beta_i w_i}_{\in W} = x$$

از آن جاکه x هم عضو U است وهم عضو W پس $x \in U \cap W$ وبنابراین می توان آن را با ترکیب خطی $\text{Basis}(U \cap W)$ نشان داد

$$x = \sum_{i=1}^{p} c_i v_i = -\sum_{i=1}^{r} \beta_i w_i \longrightarrow \sum_{i=1}^{p} c_i v_i + \sum_{i=1}^{r} \beta_i w_i = 0$$

عبارت فوق ترکیب خطی اعضای $\text{Basis}(W)$ است که مستقل خطی اند $\longrightarrow$ $c_1 = \cdots = c_p = \beta_1 = \cdots = \beta_r = 0$

حال باتوجه به اینکه β_i ها تماماً صفر شدند داریم

$$\sum_{i=1}^{q} \alpha_i u_i + \sum_{i=1}^{p} \gamma_i v_i = 0$$

عبارت فوق ترکیب خطی اعضای $\text{Basis}(U)$ است که مستقل خطی اند $\longrightarrow$ $\alpha_1 = \cdots = \alpha_q = \gamma_1 = \cdots = \gamma_p = 0$

بنابراین نشان دادیم که تمام α_i ها و β_i ها و γ_i ها صفر اند $\longrightarrow$ Z مستقل خطی است

بنابراین نشان دادیم که Z یک پایه برای $W+U$ است

$$\text{Basis}(U+W) = \{u_1 \cdots u_q , w_1 \cdots w_r , v_1 \cdots v_p\}$$

$$\boxed{\underbrace{\dim(U \cap W)}_{p} = \underbrace{\dim(U)}_{q+p} + \underbrace{\dim(W)}_{r+p} - \underbrace{\dim(U+W)}_{q+r+p}}$$

6.b

طبق قضیه صفحه 19 اسلاید 8، اگر S زیرفضایی از V باشد و مستقل خطی باشد، اگر S نتواند برداری مانند $u \in V$ را span کند، $S \cup u$ مجموعه ای وابسته خطی خواهد بود.

یعنی هر پایه ای از زیرفضای فضای برداری V می تواند مرحله به مرحله extend شود تا پایه ای برای کل V شود

می خواهیم نشان دهیم که هر زیرفضای حداقل $n-k$ بعدی را می توان به صورت اشتراک k تا hyperplane دانست

طبق قضیه ای که گفته شد یک پایه از زیرفضای $n-k$ بعدی را در نظر می گیریم. به صورت مرحله به مرحله آن را extend می کنیم تا تمام V را span کند. یعنی k بردار جدید پایه به آن اضافه شود و n بعدی شود.

حال هر کدام از این k بردار جدید را که از آن حذف کنیم یک hyperplane به دست می آید (یعنی k تا hyperplane)

و ضمناً تمام این hyperplane ها حداقل در زیرفضای $n-k$ بعدی اشتراک دارند زیرا فقط از k بردار جدید حذف کردیم.

پرسش ۷

ابتدا نشان می دهیم $V_1 \cdots V_n$ مستقل خطی اند.

برهان خلف: فرض می کنیم $V_1 \cdots V_n$ وابسته خطی اند پس ضرایب c_i در معادله زیر وجود دارد که تمام صفر نباشد

$$\sum_{i=1}^{n} c_i V_i = 0 \longrightarrow \sum_{i=1}^{n} c_i (V_i - e_i) + \sum_{i=1}^{n} c_i e_i = 0$$

$$\longrightarrow \left\| \sum_{i=1}^{n} c_i (V_i - e_i) \right\|^2 = \underbrace{\left\| \sum_{i=1}^{n} c_i e_i \right\|^2}_{\sum_{i=1}^{n} |c_i|^2} \quad \text{I}$$

$\longleftarrow$ e_i ها orthonormal هستند پس داریم

از طرف دیگر داریم که

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} c_i (V_i - e_i) \right\| \leq \sum_{i=1}^{n} |c_i| \underbrace{\| V_i - e_i \|}_{< \frac{1}{\sqrt{n}}} < \sum_{i=1}^{n} |c_i| \frac{1}{\sqrt{n}} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |c_i|^2 \times \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n}}_{1}}$$

کوشی شوارتز

$$\longrightarrow \left\| \sum_{i=1}^{n} c_i (V_i - e_i) \right\|^2 < \sum_{i=1}^{n} |c_i|^2 \quad \text{II}$$

مشاهده می شود که I و II باهم تناقض دارند $\longrightarrow$ فرض خلف باطل است و $V_1 \cdots V_n$ مستقل خطی اند $\Big\{$ $V_1 \cdots V_n$ برای V پایه هستند

$\circledast$ $e_1 \cdots e_n$ پایه های V اند $\longrightarrow$ $\dim(V) = n$

⁎با علی بابابیگ برای برخی سوال ها همفکری کردم