1

تابع $g(x)=x^2$ در بازه $[0,\infty)$ یک به یک است پس داریم:

$$f(Y=y,\, X\geq 0) = \sum_{\underbrace{x\in g^{-1}(y)}_{\sqrt{y}}} \frac{f_X(x)\,u(x)}{|g'(x)|} = \frac{f_X(x)\,u(x)}{|g'(x)|}$$

$$g'(x) = 2x$$
$$x=\sqrt{y}$$

$$\longrightarrow f(Y=y,\, X\geq 0) = \frac{f_X(\sqrt{y})}{2\sqrt{y}}\,u(y)$$

$$f(X\geq 0) = 1 - f(X<0) = 1 - F_X(0)$$

$$\longrightarrow f_Y(y \mid X\geq 0) = \frac{f(Y=y,\, X\geq 0)}{f(X\geq 0)} = \frac{f_X(\sqrt{y})}{2\sqrt{y}}\,u(y)\cdot\frac{1}{1-F_X(0)}$$

2

$$A+B+C = X$$

$$f_X(x) \longleftrightarrow M_A(t)\times M_B(t)\times M_C(t) = (1-2t)^{-10} = M_X(t)$$

$$M'_X(t) = 20\,(1-2t)^{-11}$$
$$M''_X(t) = 440\,(1-2t)^{-12}$$
$$M'''_X(t) = 10560\,(1-2t)^{-13} \quad \circledast$$

$$\longrightarrow E[X^3] = \underset{X}{\text{گشتاور سوم}} = \left.\frac{d^3 M_X(t)}{dt^3}\right|_{t=0} \overset{\circledast}{=} 10560$$

3

طبق صورت سوال:

بیمار سنگ کوچک داشته باشد ← $S=0$

〃 〃 بزرگ 〃 ← $S=1$

درمان A تجویز شده باشد ← $T=0$

〃 〃 B 〃 ← $T=1$

درمان موفقیت آمیز نباشد ← $M=0$

〃 〃 باشد ← $M=1$

$$p(M=1 \mid S=0, T=0) = 0.93$$
$$p(M=1 \mid S=0, T=1) = 0.87$$
$$p(M=1 \mid S=1, T=0) = 0.73$$
$$p(M=1 \mid S=1, T=1) = 0.68$$

$$p(S=0) = 0.6$$

$$p(T=0 \mid S=0) = 0.2$$
$$p(T=0 \mid S=1) = 0.8$$

$$\longrightarrow p(T=0) = \overbrace{p(T=0 \mid S=0)}^{0.2}\,\overbrace{p(S=0)}^{0.6} + \overbrace{p(T=0 \mid S=1)}^{0.8}\,\overbrace{p(S=1)}^{0.4} = 0.44$$

$\boxed{3.a}$

$$p(M=1 \mid T=0) = \underbrace{p(M=1 \mid S=0, T=0)}_{0.93} \underbrace{p(S=0 \mid T=0)}_{\frac{0.2 \times 0.6}{0.44}} + \underbrace{p(M=1 \mid S=1, T=0)}_{0.73} \underbrace{p(S=1 \mid T=0)}_{\frac{0.8 \times 0.4}{0.44}}$$

$$\simeq 0.78$$

$\boxed{3.b}$

$$p(M=1 \mid T=1) = \underbrace{p(M=1 \mid S=0, T=1)}_{0.87} \underbrace{p(S=0 \mid T=1)}_{\frac{0.8 \times 0.6}{0.56}} + \underbrace{p(M=1 \mid S=1, T=1)}_{0.68} \underbrace{p(S=1 \mid T=1)}_{\frac{0.2 \times 0.4}{0.56}}$$

$$\simeq 0.84$$

$\boxed{3.c}$

طبق 2 بخش قبل به نظر می‌رسد درمان B بهتر است. اما احتمال های موفقیت به دست آمده براساس آن است که پزشکان بسته به اینکه بیمار سنگ کوچک دارد یا بزرگ، درمان A یا B را تجویز می‌کنند. اگر بخواهیم در حالت کلی ببینیم که کدام درمان بهتر است باید احتمال موفقیت به شرط هر درمان را در حالتی حساب کنیم که فقط همان درمان تجویز شود یعنی:

$$p(M=1 \mid T=0) = 0.93 \times \frac{1 \times 0.6}{1} + 0.73 \times \frac{1 \times 0.4}{1} = 0.85$$

$$p(M=1 \mid T=1) = 0.87 \times \frac{1 \times 0.6}{1} + 0.68 \times \frac{1 \times 0.4}{1} \simeq 0.79$$

بنابراین به طور کلی درمان A بهتر است

اگر دخالت دکتر ها را حذف کنیم

$\boxed{4.a}$ $\forall x \quad \mathrm{var}\left[Y \mid X=x\right] = \mathbb{E}\left[\left(Y - \mathbb{E}[Y \mid X=x]\right)^2 \mid X=x\right]$

$$= \mathbb{E}\left[Y^2 + \mathbb{E}[Y \mid X=x]^2 - 2Y\,\mathbb{E}[Y \mid X=x] \;\middle|\; X=x\right]$$

$$= \mathbb{E}\left[Y^2 \mid X=x\right] + \mathbb{E}\left[\underbrace{\mathbb{E}[Y \mid X=x]^2}_{g^2(x)} \mid X=x\right] - 2\,\mathbb{E}\left[Y\,\underbrace{\mathbb{E}[Y \mid X=x]}_{g(x)} \mid X=x\right]$$

چون $g(x)$ ها randomness ای ندارند از $\mathbb{E}$ خارج می‌شوند :

$$= \mathbb{E}\left[Y^2 \mid X=x\right] + \mathbb{E}\left[Y \mid X=x\right]^2 - 2\,\mathbb{E}\left[Y \mid X=x\right]\mathbb{E}\left[Y \mid X=x\right]$$

$$= \mathbb{E}\left[Y^2 \mid X=x\right] - \mathbb{E}\left[Y \mid X=x\right]^2$$

$$\longrightarrow \mathrm{var}\left[Y \mid X\right] = \mathbb{E}\left[Y^2 \mid X\right] - \mathbb{E}\left[Y \mid X\right]^2$$

$\boxed{4.b}$

$$\xrightarrow{\text{طبق } 4.a} \mathrm{Var}[X \mid Z] = \mathbb{E}[X^2 \mid Z] - \mathbb{E}[X \mid Z]^2 \xrightarrow{\mathbb{E}} \mathbb{E}\left[\mathrm{var}[X \mid Z]\right] = \underbrace{\mathbb{E}\left[\mathbb{E}[X^2 \mid Z]\right]}_{\mathbb{E}[X^2]} - \mathbb{E}\left[\mathbb{E}[X \mid Z]^2\right] \quad \mathrm{I}$$

طبق total expectation

$$\mathrm{Var}\left[\mathbb{E}[X \mid Z]\right] = \mathbb{E}\left[\mathbb{E}[X \mid Z]^2\right] - \underbrace{\mathbb{E}\left[\mathbb{E}[X \mid Z]\right]^2}_{\mathbb{E}[X]^2} \quad \mathrm{II}$$

طبق total expectation

$$\xrightarrow{\mathrm{I} + \mathrm{II}} \mathrm{Var}\left[\mathbb{E}[X \mid Z]\right] + \mathbb{E}\left[\mathrm{Var}[X \mid Z]\right] = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2 = \mathrm{Var}[X]$$

ابتدا ثابت می‌کنیم :

$$\circledast\quad \mathbb{E}[X|Y] = \mathbb{E}\big[\mathbb{E}[X|Y,Z]\,\big|\,Y\big]$$

4.c

$$\forall y \quad \mathbb{E}[X|Y=y] = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f_{X|Y}(x|y)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} x \frac{\int_{-\infty}^{\infty} f_{XYZ}(x,y,z)\, dz}{f_Y(y)}\, dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x \frac{\int_{-\infty}^{\infty} f_{X|Y,Z}(x|y,z)\, f_{YZ}(y,z)\, dz}{f_Y(y)}\, dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\frac{f_{YZ}(y,z)}{f_Y(y)}}_{f_{Z|Y}(z|y)} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} x\, f_{X|Y,Z}(x|y,z)\, dx}_{\mathbb{E}[X|Y,z]}\, dz = \mathbb{E}\big[\mathbb{E}[X|Y,Z]\,\big|\,Y=y\big]$$

حال به اثبات صورت سوال می‌پردازیم :

$$\mathrm{Var}\big[\mathbb{E}[X|Z,Y]\,\big|\,Y\big] = \mathbb{E}\big[\mathbb{E}[X|Z,Y]^2\,\big|\,Y\big] - \underbrace{\mathbb{E}\big[\mathbb{E}[X|Y,Z]\,\big|\,Y\big]^2}_{\circledast\ \mathbb{E}[X|Y]^2} \quad \mathrm{I}$$

$$\mathbb{E}\big[\mathrm{Var}[X|Z,Y]\,\big|\,Y\big] = \mathbb{E}\big[\mathbb{E}[X^2|Z,Y] - \mathbb{E}[X|Z,Y]^2\,\big|\,Y\big]$$

$$= \underbrace{\mathbb{E}[X^2|Y]}_{\circledast} - \mathbb{E}\big[\mathbb{E}[X|Z,Y]^2\,\big|\,Y\big] \quad \mathrm{II}$$

$$\xrightarrow{\mathrm{I}+\mathrm{II}} \mathrm{Var}\big[\mathbb{E}[X|Z,Y]\,\big|\,Y\big] + \mathbb{E}\big[\mathrm{Var}[X|Z,Y]\,\big|\,Y\big]$$

$$= \mathbb{E}[X^2|Y] - \mathbb{E}[X|Y]^2 = \mathrm{Var}[X|Y]$$

5

μ_4 برای متغیر تصادفی X برابر با m_4 برای $X-\mu$ است. پس MGF را برای $X-\mu$ به دست می‌آوریم:

$$M_{X-\mu}(t) = \mathbb{E}_X\left[e^{t(X-\mu)}\right] = e^{-t\mu}\underbrace{\mathbb{E}_X\left[e^{tX}\right]}_{M_X(t)} = e^{\frac{1}{2}\sigma^2 t^2}$$

$$M'_{X-\mu}(t) = \sigma^2 t\, e^{\frac{1}{2}\sigma^2 t^2}$$

$$M''_{X-\mu}(t) = \left(\sigma^2 + \sigma^4 t^2\right) e^{\frac{1}{2}\sigma^2 t^2}$$

$$M'''_{X-\mu}(t) = \left(\sigma^6 t^3 + 3\sigma^4 t\right) e^{\frac{1}{2}\sigma^2 t^2}$$

$$M''''_{X-\mu}(t) = \left(\sigma^8 t^4 + 6\sigma^6 t^2 + 3\sigma^4\right) e^{\frac{1}{2}\sigma^2 t^2} \longrightarrow M''''_{X-\mu}(t)\Big|_{t=0} = 3\sigma^4$$

$$\longrightarrow \mathrm{kurt}(X) = \frac{M''''_{X-\mu}(t)\big|_{t=0}}{(\sigma^2)^2} = \frac{3\sigma^4}{\sigma^4} = 3$$

6

متغیر تصادفی S را معادل طول قسمت کوتاه‌تر تعریف می‌کنیم. واضح است که S نیز از توزیع یکنواخت پیروی می‌کند و داریم $S \sim U(0,\frac{l}{2})$. بنابراین R را می‌توان به صورت $R = \frac{l-S}{S}$ نوشت.

با توجه به اینکه S از توزیع یکنواخت پیروی می‌کند داریم:

$$P(S \leq s) = \frac{2s}{l} \qquad 0 \leq s \leq \frac{l}{2} \quad (*)$$

$$P(R \leq r) = P\left(\frac{l-S}{S} \leq r\right) = P\left(S \geq \frac{l}{1+r}\right) = 1 - P\left(S < \frac{l}{1+r}\right) \overset{(*)}{=} 1 - \frac{2}{1+r} = \boxed{\frac{r-1}{r+1} \qquad r \in [1,\infty)}$$

$$r \geq 1 \longrightarrow 0 \leq \frac{l}{1+r} \leq \frac{l}{2}$$

$$f_R(r) = \frac{dF_R(r)}{dr} = \frac{r+1-r+1}{(r+1)^2} = \frac{2}{(r+1)^2} \qquad r \in [1,\infty)$$

$\boxed{7.a,\ 7.b}$

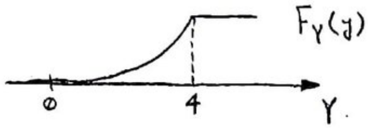
تابع $g(x)=x^2$ در بازه $[0,2]$ یک به یک است پس داریم:

$$f_Y(y) = \frac{f_X(x)}{|g'(x)|} = \frac{f_X(\sqrt{y})}{2\sqrt{y}} = \begin{cases} \frac{5y^2}{32\times 2\sqrt{y}} & 0<y\leqslant 4 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} = \begin{cases} \frac{5}{64}y^{\frac{3}{2}} & 0\leqslant y\leqslant 4 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$g'(x) = 2x$$
$$x = \sqrt{y}$$

در بازه $[0,4]$: $F_Y(y) = \int_0^y \frac{5}{64}y^{\frac{3}{2}}\,dy = \frac{5}{64}\left(\frac{2}{5}y^{\frac{5}{2}}\right)\Big|_0^y = \frac{5}{64}\times\frac{2}{5}y^{\frac{5}{2}} = \frac{1}{32}y^{\frac{5}{2}}$

$$\longrightarrow F_Y(y) = \begin{cases} 1 & y>4 \\ \frac{1}{32}y^{\frac{5}{2}} & 0<y\leqslant 4 \\ 0 & y\leqslant 0 \end{cases}$$



$\boxed{7.c}$

$$\mathbb{E}[Y] = \int_{-\infty}^{\infty} y f_Y(y)\,dy = \int_0^4 \frac{5}{64}y^{\frac{5}{2}}\,dy = \frac{5}{64}\left(\frac{2}{7}y^{\frac{7}{2}}\right)\Big|_0^4 = \frac{5}{32\times 7}\times 2^7 = \frac{20}{7}$$

$$\mathbb{E}[Y^2] = \int_{-\infty}^{\infty} y^2 f_Y(y)\,dy = \int_0^4 \frac{5}{64}y^{\frac{7}{2}}\,dy = \frac{5}{64}\left(\frac{2}{9}y^{\frac{9}{2}}\right)\Big|_0^4 = \frac{5}{32\times 9}\times 2^9 = \frac{80}{9}$$

$$\longrightarrow \operatorname{Var}[Y] = \mathbb{E}[Y^2] - \mathbb{E}[Y]^2 = \frac{80}{9} - \frac{400}{49} = \frac{3920-3600}{441} = \frac{320}{441}$$

- source 1
- source 2