$\boxed{1.a}$

$A$ یک ماتریس nilpoint است پس $k \geq 0$ ای وجود دارد که $A^k = 0$

حال ماتریس $A'$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$A' = \sum_{i=0}^{k-1} (-1)^i A^i = I - A + A^2 - \cdots + (-1)^{k-1} A^{k-1}$$

$$\longrightarrow (I+A)A' = I \cancel{- A} \cancel{+ A^2} - \cdots \cancel{+ (-1)^{k-1} A^{k-1}} \cancel{+ A} \cancel{- A^2} \cancel{+ A^3} - \cdots + (-1)^{k-1} A^k = I + (-1)^{k-1} A^k$$

$$\xrightarrow{A^k = 0} (I + A) A' = I$$

بنابراین با توجه به اینکه $A+I$ ماتریس مربعی است و $A'$ وارون راست آن است پس $A'$ وارون آن است و نشان دادیم که $I+A$ وارون‌پذیر است

$\boxed{1.b}$

$v^T u \neq -1$

ادعا می‌کنیم که معکوس ماتریس $I + uv^T$ برابر $I - \frac{uv^T}{1 + v^T u}$ است. برای اثبات اینکه ادعا درست است کافی است

این دو مقدار را به هر ترتیبی در هم ضرب کرده و نشان دهیم که حاصل برابر $I$ می‌شود

زیرا در ماتریس های مربعی $XY = I$ معادل $YX = I$ است

$$\left(I + uv^T\right)\left(I - \frac{uv^T}{1 + v^T u}\right) = I - \frac{uv^T}{1 + v^T u} + uv^T - \frac{(uv^T)^2}{1 + v^T u}$$

$$= \frac{1}{1 + v^T u}\left( (1 + v^T u) I \underbrace{- uv^T + (1 + v^T u) uv^T}_{(v^T u)\, uv^T} - (uv^T)^2 \right)$$

$$\overset{\circledast}{=} \frac{1}{1 + v^T u}\left( (1 + v^T u) I + 0 \right) = I$$

$\circledast$

$$(uv^T)^2 = (uv^T)(uv^T) = u\underbrace{(v^T u)}_{\text{عدد}} v^T = (v^T u)(uv^T)$$

بنابراین نشان دادیم که اگر $v^T u \neq -1$ آنگاه $\left(I + uv^T\right)^{-1} = I - \frac{uv^T}{1 + v^T u}$

## 1.c

مشابه قبل کافی است این دو ماتریس را به هر ترتیبی در هم ضرب کنیم و نشان دهیم که حاصل برابر I می‌شود

$$(A+uv^T)\left(A^{-1}-\frac{A^{-1}uv^TA^{-1}}{1+v^TA^{-1}u}\right) = I - \frac{uv^TA^{-1}}{1+v^TA^{-1}u} + uv^TA^{-1} - \frac{(uv^TA^{-1})^2}{1+v^TA^{-1}u}$$

$$= I + uv^TA^{-1} - \frac{u\cancel{(1+v^TA^{-1}u)}v^TA^{-1}}{\cancel{1+v^TA^{-1}u}} = I + \cancel{uv^TA^{-1}} - \cancel{uv^TA^{-1}} = I$$

بنابراین نشان دادیم که اگر $v^TA^{-1}u \neq -1$ آنگاه $(A+uv^T)^{-1} = A^{-1} - \dfrac{A^{-1}uv^TA^{-1}}{1+v^TA^{-1}u}$

---

## 2.a

$$A_{n\times n} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & \cdots & n+1 \\ 3 & 4 & \cdots & n+2 \\ 4 & 5 & \cdots & n+3 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n+1 & n+2 & \cdots & n+n \end{bmatrix}_{n\times n}$$

از row operation ها اگر مضربی از یک ردیف را با ردیفی جمع کنیم دترمینان تغییری نمی‌کند. و اگر ردیفی را در یک عدد ضرب کنیم دترمینان نیز در آن ضرب می‌شود.

می‌دانیم که در $A_{n\times n}$ هر ردیف از میانگین ردیف های بالایی و پایینی اش به دست می‌آید، پس به ازای $n\geq 3$ این ردیف ها را می‌توان توسط row operation های ذکر شده به صفر تبدیل کرد و می‌دانیم که اگر ردیف یا ستونی تمام صفر باشد دترمینان صفر می‌شود

(به بیان دیگر می‌توان گفت که ردیف های وابسته خطی داریم ⟵ دترمینان $= 0$)

## 2.b

$$B_{n\times n} = \begin{bmatrix} 2^2 & 3^2 & \cdots & (n+1)^2 \\ 3^2 & 4^2 & \cdots & (n+2)^2 \\ 4^2 & 5^2 & \cdots & (n+3)^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (n+1)^2 & (n+2)^2 & \cdots & (n+n)^2 \end{bmatrix}_{n\times n} \xrightarrow[\text{بالایی اش می‌کنیم}]{\text{هر سطر را منهای سطر}} \begin{bmatrix} 2^2 & 3^2 & \cdots & (n+1)^2 \\ 5 & 7 & \cdots & 2n+3 \\ 7 & 9 & \cdots & 2n+5 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 2n+1 & 2n+3 & \cdots & 4n-1 \end{bmatrix}_{n\times n}$$

$$\xrightarrow[\text{سطر بالایی اش می‌کنیم}]{\text{بار دیگر هر سطر را منهای}} \begin{bmatrix} 2^2 & 3^2 & \cdots & (n+1)^2 \\ 1 & -2 & \cdots & 2-n^2 \\ 2 & 2 & \cdots & 2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 2 & 2 & \cdots & 2 \end{bmatrix}_{n\times n}$$

مشاهده می‌شود که پس از 2 بار انجام این row operation از سطر سوم به بعد همه سطرها $2 \dots 2$ می‌شوند و بنابراین برای $n\geq 4$ سطرهای وابسته خطی داریم ⟵ دترمینان $= 0$

$\boxed{4}$

اندازه بزرگترین submatrix ماتریس $A$ را که وارون پذیر باشد determinant rank $(A)$ می نامند

ابتدا ثابت می کنیم determinant rank$(A)=2 \longrightarrow$ rank$(A)=2$

بزرگترین submatrix ماتریس $A$ که وارون پذیر باشد را $C_{2\times 2}$ می نامیم. می دانیم که تمام سطر و ستون های $C$ مستقل خطی اند تا وارون پذیر شود.
حال اگر بخواهیم از $C$ به $A$ برسیم باید به سطر و ستون های $C$ اضافه کنیم و میدانیم که این کار استقلال خطی سطر و ستون های قبلی را خراب نمی کند
زیرا اگر دو بردار مستقل خطی داشته باشیم، حتی اگر المان های یکسانی نیز به آن ها اضافه کنیم همچنان مستقل خطی می مانند.
بنابراین $A$ نیز حداقل ۲ سطر و ستون مستقل خطی دارد $\longrightarrow$ rank$(A) \geq 2$
همچنین با برهان خلف می توان ثابت کرد که rank$(A) \leq 2$ زیرا می دانیم ۲ بزرگترین عدد ممکن است به طوری که $C_{2\times 2}$ وارون پذیر باشد و اگر rank$(A)$ بیشتر از ۲ باشد یعنی تعداد سطر و ستون های مستقل خطی $A$ بیشتر بوده و بنابراین $C_{2\times 2}$ بزرگترین submatrix وارون پذیر نخواهد بود که مخالف فرض است $\longrightarrow$ rank$(A)=2$

حال اثبات می کنیم rank$(A)=2 \longrightarrow$ determinant rank$(A)=2$

طبق فرض می دانیم که $A_{m\times n}$ دارای ۲ سطر و ستون مستقل خطی است. ابتدا ستون های وابسته خطی $A$ را دور می ریزیم تا به $A'_{m\times 2}$ برسیم.
می دانیم که col rank$(A')=2$ پس باید row rank$(A')=2$ پس سطرهای وابسته خطی $A'$ را نیز دور می ریزیم تا به $A''_{2\times 2}$ برسیم.
حال چون row rank$(A'')=2$ پس rank$(A'')=2$ و بر اثر حذف های صورت گرفته rank ماتریس ثابت ماند.
بنابراین نشان دادیم submatrix ای از $A$ با ابعاد $2\times 2$ داریم که وارون پذیر است و تنها باید نشان دهیم که این submatrix بزرگترین submatrix است
طبق برهان خلف فرض کنید submatrix بزرگتری به نام $C'_{r\times r}$ داریم که وارون پذیر است. مطابق قبل $A$ که $C'$ را شامل می شود نیز باید حداقل به اندازه $C'$ سطر و ستون های مستقل داشته باشد $\longrightarrow$ rank$(A) > 2$ که بر خلاف فرض اولیه است

بنابراین نشان دادیم که submatrix ای از $A$ با ابعاد $2\times 2$ داریم که وارون پذیر است و ۲ بزرگترین عدد ممکن است

$\boxed{5}$

می دانیم $I_m + AB$ وارون پذیر است $\longleftarrow C = (I_m + AB)^{-1}$

ادعا می کنیم که $I_n - BCA$ وارون ماتریس $I_n + BA$ است. از آن جا که ماتریس $n \times n$ است کافی است به هر ترتیبی این دو ماتریس را در هم ضرب کنیم و نشان دهیم که حاصل برابر $I_n$ می شود

$$(I_n + BA)(I_n - BCA) = I_n \underbrace{- BCA} + BA \underbrace{- BABCA} = I_n + BA - B\underbrace{(I_m + AB)}_{C^{-1}}CA$$

$$= I_n + \cancel{BA} - \cancel{BA} = I_n$$

بنابراین نشان دادیم $(I_n + BA)^{-1} = I_n - BCA$ پس ماتریس $I_n + BA$ وارون پذیر است

$\boxed{6.a}$

از آن جا که $range(T)$ دارای بعد متناهی است پس می توان پایه ای به صورت $r_1 \dots r_n$ برای آن در نظر گرفت.

واضح است که $r_i$ ها معادل $T(v_i)$ هایی اند به صورتی که $v_i \in V$.

از آن جا که تمام اعضای $V$ توسط $T$ به $range(T)$ مپ می شوند و $T(v_1) \dots T(v_n)$ پایه ی $range(T)$ است:

$$\forall v \in V; \quad T(v) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i T(v_i) = \sum_{i=1}^{n} T(\alpha_i v_i) \longrightarrow T\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i - v\right) = 0$$

پس $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i - v \in Null(T)$ و از آن جایی که $Null(T)$ دارای بعد متناهی است پس می توان پایه‌ای به صورت $b_1 \dots b_m$ برای آن در نظر گرفت

$$\longrightarrow \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i - v = \sum_{i=1}^{m} \beta_i b_i \longrightarrow v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i - \sum_{i=1}^{m} \beta_i b_i$$

از آن جایی که $v$ عضوی دلخواه از $V$ بود پس نشان دادیم که توسط پایه های $v_1 \dots v_n$ ، $b_1 \dots b_m$ می توان $V$ را span کرد

پس $V$ دارای بعد متناهی است

$\boxed{6.b}$

$V$ دارای بعد متناهی است واز آن جاکه $Null(T)$ زیرفضایی از $V$ است پس آن هم دارای بعد متناهی است .

برای $V$ و $Null(T)$ پایه های زیر را درنظر می گیریم

$$\text{basis for } Null(T) = B_n = \{V_1 \cdots V_n\}$$

$$\text{basis for } V = B_V = \{V_1 \cdots V_n, V_{n+1} \cdots V_m\}$$

حال ادعامی کنیم $B_r = \{T(V_{n+1}) \cdots T(V_m)\}$ یک پایه برای $range(T)$ است .

ابتدا ثابت می کنیم $B_r$ تمام $range(T)$ را span می کند

$$\forall r \in range(T) \quad \exists V \in V \quad T(V) = r$$

$$\longrightarrow r = T(V) = T\left(\sum_{i=1}^{m} \alpha_i V_i\right) = \overbrace{\cancel{T\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i V_i\right)}}^{0} + T\left(\sum_{i=n+1}^{m} \alpha_i V_i\right) = \sum_{i=n+1}^{m} \alpha_i T(V_i)$$

$V_1 \cdots V_n \in Null(T)$

بنابراین نشان دادیم $B_r$ هر $r \in range(T)$ و بنابراین $range(T)$ را span می کند (I)

حال نشان می دهیم $B_r$ مستقل خطی است .

$$\sum_{i=n+1}^{m} \beta_i T(V_i) = 0 \longrightarrow T\left(\sum_{i=n+1}^{m} \beta_i V_i\right) = 0 \longrightarrow \sum_{i=n+1}^{m} \beta_i V_i \in Null(T)$$

$$\longrightarrow \sum_{i=n+1}^{m} \beta_i V_i = \sum_{i=1}^{n} \beta_i V_i \longrightarrow \sum_{i=1}^{m} \beta_i V_i = 0$$

از آنجا که $B_V$ یک پایه است پس اعضای آن مستقل خطی بوده و بنابراین $\beta_1 = \cdots = \beta_m = 0$

بنابراین نشان دادیم که $\beta_{n+1} = \cdots = \beta_m = 0 \longrightarrow$ $B_r$ مستقل خطی است (II)

$\xrightarrow{\text{I, II}}$ $B_r$ is a basis for $range(T)$ , $range(T)$ is finite dimensional

$$\left.\begin{aligned} \dim(V) &= m \\ \dim(Null(T)) &= n \\ \dim(range(T)) &= m-n \end{aligned}\right\} \longrightarrow \dim(V) = \dim(Null(T)) + \dim(range(T))$$

Fundamental theorem of linear transformations

$\boxed{6.c}$

ابتدا ثابت می‌کنیم : تبدیل خطی $T \in L(V,W)$ وجود دارد که $Null(T) = U$ $\longrightarrow$ $\dim(V) \leqslant \dim(W) + \dim(U)$

Fundamental theorem of linear transformations : $\dim(V) = \dim(\overbrace{Null(T)}^{U}) + \dim(\overbrace{range(T)}^{\subseteq W})$

$$\longrightarrow \dim(V) \leqslant \dim(U) + \dim(W)$$

حال ثابت می‌کنیم : $\dim(V) \leqslant \dim(W) + \dim(U)$ $\longrightarrow$ تبدیل خطی $T \in L(V,W)$ وجود دارد که $Null(T) = U$

برای $U$ پایه زیر را در نظر گرفته و با extend کردن آن برای $V$ نیز پایه زیر را داریم :

basis for $U = \{V_1 \cdots V_k\}$

basis for $V = \{V_1 \cdots V_k, V_{k+1} \cdots V_n\}$ $\xrightarrow{\text{طبق فرض}} n \leqslant m + k \longrightarrow m \geqslant n - k$ ⊛

basis for $W = \{w_1 \cdots w_m\}$

حال یک تبدیل خطی به صورت زیر تعریف می‌کنیم

- $T(V_i) = 0 \quad 1 \leqslant i \leqslant k$
- $T(V_j) = w_{j-k} \quad k+1 \leqslant j \leqslant n$

باتوجه به اینکه $T$ را برای تمام پایه های $V$ تعریف کردیم، تکلیف تمام اعضای $V$ مشخص است

وضمناً طوری $T$ را تعریف کردیم که واضح است $U \subseteq Null(T)$. حال نشان می‌دهیم که به غیر از $U$ عضو دیگری در $Null(T)$ وجود ندارد

فرض می‌کنیم عضو $V$ را داریم که عضو $Null(T)$ است اما عضو $U$ نیست

$$V = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i V_i = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i V_i + \sum_{i=k+1}^{n} \alpha_i V_i \xrightarrow{T} T(V) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \underbrace{T(V_i)}_{0} + \sum_{i=k+1}^{n} \alpha_i \underbrace{T(V_i)}_{w_{i-k}} = 0$$

$\longrightarrow T(V) = \sum_{i=k+1}^{n} \alpha_i w_{i-k} = 0 \longrightarrow$ ترکیب خطی از $w_1 \cdots w_{n-k}$ برابر صفر شده است. طبق ⊛ این لیست بخشی از پایه تعریف شده برای $W$ است که مستقل خطی اند $\longrightarrow \alpha_{k+1} = \cdots = \alpha_n = 0$

$\longrightarrow V = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i V_i \longrightarrow$ $V$ را بر اساس پایه های $U$ نوشتیم $\longrightarrow V \in U \searrow$ فرض خلف باطل است وعضوی خارج از $U$ نداریم که $T$ آن $0$ شود $\longrightarrow U = Null(T)$

$\boxed{6.d}$

ادعا می‌کنیم $U$ ای که در $V = Null(T) \oplus U$ صدق کند تمام شرایط ذکر شده را دارد

می دانیم که اگر $V$ فضای برداری با بعد متناهی باشد و $V_1$ زیرفضای آن باشد ، آنگاه می توانیم زیرفضای دیگری مانند $V_2$ پیدا کنیم به طوری که $V = V_1 \oplus V_2$

حال با توجه به اینکه $Null(T)$ زیرفضای $V$ است پس می توانیم زیرفضای دیگری مانند $U$ پیدا کنیم که $V = Null(T) \oplus U$

طبق تعریف ارائه شده می دانیم که $Null(T) \cap U = \{0\}$ زیرا اگر اشتراک دیگری مانند $a$ هم داشته باشند آنگاه داریم :

$$0 \in Null(T) + a \in U = a \in V$$

$$0 \in U + a \in Null(T) = a \in V$$

که تعریف direct sum را نقض می کند

حال تنها باید نشان دهیم که $range(T) = \{T(u) : u \in U\}$ . طبق تعریف می دانیم که $\{T(u) : u \in U\} \subseteq range(T)$ زیرا $U$ زیرفضایی از $V$ است

بنابراین کافی است نشان دهیم $range(T) \subseteq \{T(u) : u \in U\}$

$$\left.\begin{array}{l} \forall r \in range(T) \ \exists v \in V \ \ T(v) = r \\ \exists\, w \in Null(T) \\ \exists\, u \in U \end{array}\right\} \xrightarrow[sum]{direct} v = w + u \longrightarrow T(w+u) = \overset{0}{\cancel{T(w)}} + T(u) = r$$

یعنی به ازای هر عضو $range(T)$ عضوی از $U$ وجود دارد که $T(u) = r$

بنابراین ثابت کردیم که $rang(T) \subseteq \{T(u) : u \in U\}$

بنابراین نشان دادیم $U$ ای وجود دارد که $Null(T) \cap U = \{0\}$ و $range(T) = \{T(u) : u \in U\}$

## 7.a

$$\underbrace{\begin{bmatrix} I_n & I_n \\ 0 & I_n \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}}_{X} \begin{bmatrix} I_n & -B \\ I_n & A \end{bmatrix}}_{X'} = \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_n & -B \\ I_n & A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A+B & -AB+BA \\ B & BA \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\underline{\underline{AB=BA}}} \underbrace{\begin{bmatrix} A+B & 0 \\ B & AB \end{bmatrix}}_{Y}$$

$$X \text{ is diagonal} \longrightarrow \operatorname{rank}(X) = \operatorname{rank}(A) + \operatorname{rank}(B)$$

* ضمناً می دانیم که $\operatorname{rank}(AB) \leqslant \min\left(\operatorname{rank}(A), \operatorname{rank}(B)\right)$

یعنی ضرب کردن ماتریس $X$ در ماتریس های دیگه فقط می تواند

رنک را کمتر می تواند بکند

$$\boxed{\operatorname{rank}(X') \leqslant \operatorname{rank}(A) + \operatorname{rank}(B)}$$

برای $Y$ نیز داریم

$$\boxed{\operatorname{rank}(Y) \geqslant \operatorname{rank}(A+B) + \operatorname{rank}(AB)}$$

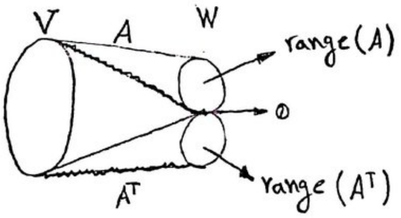
$$\xrightarrow{X'=Y} \operatorname{rank}(A+B) + \operatorname{rank}(AB) \leqslant \operatorname{rank}(A) + \operatorname{rank}(B)$$

اگر B نبود تساوی برقرار می شد اما B می تواند ستون های وابسته در A+B
را مستقل کند (اضافه کردن مقدار در ادامه‌ی ستون های مستقل خطی به هیچ وجه نمی تواند آنها را وابسته کند پس B تنها می تواند رنک را افزایش دهد یا تغییری ایجاد نکند)

$\boxed{7.b}$

$$\forall x \in V \quad \langle A^T x , A x \rangle = (A^T x)^T A x = x^T \underbrace{A^2}_{0} x = 0$$

پس $Ax$ و $A^T x$ مکمل متعامد هستند ← اشتراک آنها تنها $\{0\}$ است




$$\dim(\mathrm{range}(A)) + \dim(\mathrm{range}(A^T)) = \dim(W)$$

$$\dim(\underbrace{\mathrm{range}(A) + \mathrm{range}(A^T)}_{\mathrm{range}(A+A^T)}) = \dim(w)$$

$$\rightarrow \dim(\mathrm{range}(A+A^T)) = \dim(\mathrm{range}(A)) + \dim(\mathrm{range}(A^T))$$

$$\rightarrow \mathrm{rank}(A+A^T) = \mathrm{rank}(A) + \mathrm{rank}(A^T) = 2\,\mathrm{rank}(A)$$

$\boxed{7.c}$ sylvester's rank theorem : $\text{rank}(AB) \geqslant \text{rank}(A) + \text{rank}(B) - n$

for $A_{m \times n}$ , $B_{n \times k}$

با استفاده از قضیه‌ی رو به رو

$$\text{rank}(\underbrace{AB}C) \geqslant \text{rank}(\underbrace{AB}) + \text{rank}(C) - n \geqslant \text{rank}(A) + \text{rank}(B) - n + \text{rank}(C) - n$$

$$\xrightarrow{ABC = 0} 0 \geqslant \text{rank}(A) + \text{rank}(B) + \text{rank}(C) - 2n$$

$$\longrightarrow \text{rank}(A) + \text{rank}(B) + \text{rank}(C) \leqslant 2n$$

اثبات این قضیه در پاسخ سوال 7.e آمده است

$\boxed{7.d}$

ابتدا ثابت می کنیم $\text{nullity}(A) = \text{nullity}(B)$

$$\forall v \in \text{Null}(B) \quad ABv = 0 = 2Av + 3\cancel{\overset{0}{Bv}} \longrightarrow Av = 0 \longrightarrow v \in \text{Null}(A) \longrightarrow \overbrace{\text{Null}(B) \subseteq \text{Null}(A)}^{\text{nullity}(B) \leq \text{nullity}(A)} \quad \text{I}$$

$$\forall v' \in \text{Null}(A^T) \quad B^TA^Tv' = 0 = \cancel{2\overset{0}{A^Tv'}} + 3B^Tv' \longrightarrow B^Tv' = 0 \longrightarrow v' \in \text{Null}(B^T) \longrightarrow \underbrace{\text{Null}(A^T) \subseteq \text{Null}(B^T)}$$

$$\text{II} \quad \text{nullity}(A) \leq \text{nullity}(B) \xleftarrow[\text{تغییر نمی کند}]{\text{رنک و رنج بر اثر ترانهاده کردن}} \text{nullity}(A^T) \leq \text{nullity}(B^T)$$

$$\xrightarrow{\text{I}, \text{II}} \text{nullity}(A) = \text{nullity}(B)$$

$$\begin{array}{l} \dim(V) = \text{nullity}(A) + \text{range}(A) \\ \quad \| \qquad\qquad\quad \| \\ \dim(V) = \text{nullity}(B) + \text{range}(B) \end{array} \longrightarrow \text{range}(A) = \text{range}(B) \longrightarrow \text{rank}(A) = \text{rank}(B)$$

$\boxed{7.e}$

اثبات sylvester's rank theorem

$$\xrightarrow[\text{کرده و سپس } +2k \text{ می‌کنیم}]{\text{طرفین نامعادله را در ۱- ضرب}} \underbrace{(k - \overbrace{\text{rank } A}^{\dim(\text{range}(A))})}_{\text{nullity}(A)} + \underbrace{(k - \text{rank}(B))}_{\text{nullity}(B)} \geq \underbrace{k - \text{rank}(AB)}_{\text{nullity}(AB)}$$

واضح است که $Null(B) \subseteq Null(AB)$ پس

$$\text{basis for } Null(B) = \{b_1 \cdots b_m\} \longrightarrow \text{nullity}(B) = m \quad \text{(I)}$$

$$\text{basis for } Null(AB) = \{b_1 \cdots b_m, b_{m+1} \cdots b_n\} \longrightarrow \text{nullity}(AB) = n \quad \text{(II)}$$

حال نشان می‌دهیم $B(b_{m+1}) \cdots B(b_n)$ مستقل خطی اند

$$\sum_{i=m+1}^{n} \alpha_i B(b_i) = 0 \longrightarrow B\Big(\underbrace{\sum_{i=m+1}^{n} \alpha_i b_i}_{\in Null(B)}\Big) = 0 \longrightarrow \sum_{i=m+1}^{n} \alpha_i b_i = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i b_i$$

$$\longrightarrow \sum_{i=1}^{n} \alpha_i b_i = 0 \xrightarrow[\text{is basis}]{b_1 \cdots b_n} \alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0 \longrightarrow$$ مستقل خطی اند $B(b_{m+1}) \cdots B(b_n)$

پس A باید فضایی با بُعد حداقل n-m را به صفر ببرد $\longrightarrow \text{nullity}(A) \geq n-m \quad \text{(III)}$

$$\xrightarrow{\text{(I)(II)(III)}} \text{nullity}(A) + \text{nullity}(B) \geq \text{nullity}(AB)$$

$\boxed{8}$

ماتریس $I - uu^*$ را $A$ می‌نامیم

پایه ای برای فضای $\mathbb{C}^n$ تعریف می‌کنیم به این صورت که عضو اول آن $u$ بوده و سپس آن را توسط $V_2$ تا $V_n$ که هر کدام آن ها بر قبلی ها عمود دند و مستقل خطی هم هستند extend می‌کنیم. بنابراین داریم $B = \{u, V_2 \cdots V_n\}$

$$Au = u - u\overbrace{u^*u}^{1} = 0 \xrightarrow[\text{to } B]{\text{change of basis}} [A]_B [u]_B = [0]_B = 0 \quad ⊛$$

$$AV = V - u\overbrace{u^*V}^{0} = V \xrightarrow[\text{to } B]{\text{change of basis}} [A]_B [V]_B = [V]_B \quad ⊛⊛$$

$\forall V$ V is orthogonal to u

حال برای به دست آوردن مقدار ماتریس $[A]_B$ داریم:

$$[A]_B = \Big[ [a_{i1}]_B \, [a_{i2}]_B \cdots [a_{in}]_B \Big]$$

$$\longrightarrow [A]_B [u]_B = [A]_B \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = [a_{i1}]_B \overset{⊛}{=} 0$$ ستون اول ماتریس $[A]_B$

$$\longrightarrow [A]_B [V_1]_B = [A]_B \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = [a_{i2}] \overset{⊛⊛}{=} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$ ستون دوم ماتریس $[A]_B$

به همین صورت اگر ادامه دهیم داریم:

$$\text{rank}([A]_B) = n-1 \longleftarrow \text{ستون مستقل خطی } n-1 \longleftarrow [A]_B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}_{n \times n}$$

از آن جا که change of basis رنک را تغییر نمی‌دهد پس $\text{rank}(A) = n-1$

در برخی سوال ها با علی بابابیک همفکری داشتم