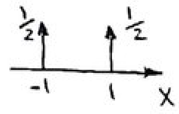
چون X دلخواه است نمی‌توان به طور مستقیم برای آن مارکو نوشت و باید به صورتی آنرا مثبت کنیم.

1.a

$$\mathbb{P}(X \geq a) = \mathbb{P}\left(e^{tX} \geq e^{ta}\right) \overset{\text{markov}}{\leq} \frac{\mathbb{E}\left[e^{tX}\right]}{e^{ta}} = e^{-ta} M_X(t) \qquad \forall t \geq 0,\ \forall a \geq 0$$

1.b

متغیر تصادفی امتیاز بازیکن را X می‌نامیم



$$M_X(t) = \mathbb{E}\left[e^{tX}\right] = \sum_{x=-1,1} e^{tx} p_X(x)$$

$$= \frac{1}{2}e^{-t} + \frac{1}{2}e^{t}$$

امتیاز کل بازیکن بعد n بازی را Z_n می‌نامیم و داریم:

$$\xrightarrow{Z_n = X_1 + \cdots + X_n} p_Z(z) \longleftrightarrow \overbrace{\Big(\underbrace{\tfrac{1}{2}e^{-t} + \tfrac{1}{2}e^{t}}_{\leq e^{\frac{t^2}{2}}\ *}\Big)^n}^{M_Z(t)} \longrightarrow M_Z(t) \leq e^{\frac{nt^2}{2}}$$

$$*\quad e^{t} + e^{-t} \overset{\text{تیلور}}{=} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{t^i}{i!} + \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-t)^i}{i!} = 2\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k}}{(2k)!} \leq 2\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k}}{2^k k!} \overset{\text{تیلور}}{=} 2e^{\frac{t^2}{2}}$$

1.c

$$\left.\begin{aligned} &\mathbb{P}(Z \geq a) \leq e^{-ta} M_Z(t) \\ &M_Z(t) \leq e^{\frac{nt^2}{2}} \end{aligned}\right\} \longrightarrow \mathbb{P}(Z \geq a) \leq e^{\frac{nt^2 - 2ta}{2}} \qquad \forall t \geq 0$$

$$\xrightarrow[n=100]{a=60} \mathbb{P}(Z \geq 60) \leq e^{50t^2 - 60t} \qquad \forall t \geq 0$$

این نامساوی به ازای هر t مثبت برقرار است پس می‌توانیم t را به نحوی انتخاب کنیم که باند tight تری داشته باشیم

$$\frac{d}{dt} e^{50t^2 - 60t} = (100t - 60)\, e^{50t^2 - 60t} = 0 \longrightarrow t^* = 0.6$$

$$\longrightarrow \mathbb{P}(Z \geq 60) \leq e^{-18}$$

$\boxed{2}$

$$\hat{\theta} = \underset{\theta}{\operatorname{argmax}} \prod_{i=1}^{10} p(X_i) = \underset{\theta}{\operatorname{argmax}} \sum_{i=1}^{10} \lg p(X_i)$$

$$= \underset{\theta}{\operatorname{argmax}} \; 2\lg\frac{2\theta}{3} + 3\lg\frac{\theta}{3} + 3\lg\frac{2-2\theta}{3} + 2\lg\frac{1-\theta}{3}$$

$$\xrightarrow{\frac{d}{d\theta}} \underbrace{2\,\frac{\frac{2}{3}}{\frac{2\theta}{3}}}_{\frac{2}{\theta}} + \underbrace{3\,\frac{\frac{1}{3}}{\frac{\theta}{3}}}_{\frac{3}{\theta}} + \underbrace{3\,\frac{\frac{-2}{3}}{\frac{2-2\theta}{3}}}_{\frac{3}{\theta-1}} + \underbrace{2\,\frac{\frac{-1}{3}}{\frac{1-\theta}{3}}}_{\frac{2}{\theta-1}} = 0 \longrightarrow \frac{5}{\theta} + \frac{5}{\theta-1} = 0 \longrightarrow \hat{\theta} = \frac{1}{2}$$

$\boxed{3}$

طبق تعریفی که در کلاس مطرح شد می دانیم $\hat{\theta}$ is consistent $\longleftrightarrow \lim_{n\to\infty} MSE(\hat{\theta}) = 0$

بنابراین با توجه به اینکه $MSE(\hat{\theta}) = Bias(\hat{\theta})^2 + Var(\hat{\theta})$ اگر نشان دهیم وقتی $n\to\infty$ جفت بایاس و واریانس صفر می‌شوند، اثبات می‌شود که $\hat{\theta}$ تخمینگر consistent است.

$$Bias(\bar{X}) = E\left[\frac{X_1+\cdots+X_n}{n}\right] - \overbrace{E[X_i]}^{p} = \frac{n}{n}E[X_i] - E[X_i] = 0$$

$$Var(\bar{X}) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} Var(X_i) = \frac{1}{n^2} \times n \times p(1-p) = \frac{p(1-p)}{n} \longrightarrow \lim_{n\to\infty} Var(\bar{X}) = 0$$

بنابراین $\bar{X}$ یک تخمینگر consistent است.

$\boxed{4}$

طبق فرض صورت سوال تمامی پرتاب ها از هم مستقل اند پس احتمال joint پرتاب ها برابر ضرب احتمال هر پرتاب می‌شود:

$$\hat{\theta} = \underset{\theta}{\operatorname{argmax}} \prod_{i=1}^{4} p(X_i) = \underset{\theta}{\operatorname{argmax}} \; (1-\theta)^3\theta \longrightarrow \frac{d}{d\theta}(1-\theta)^3\theta = (1-\theta)^3 - 3(1-\theta)^2\theta = 0$$

$$\longrightarrow \hat{\theta} = \frac{1}{4}$$

5.a

X , W گاوسی و مستقل هستند پس برای جمع آنها یعنی Y داریم: $Y \sim \mathcal{N}(0,2)$

- f_X , f_Y گاوسی هستند
- $f_{Y|X=x} = f_{W+x}$ گاوسی است
- $f_{X|Y=y} = f_{y-W}$ گاوسی است

$$\longrightarrow X,Y \sim J.G. \longrightarrow f_{X|Y=y} \sim \mathcal{N}\left(\mu_x + \frac{r\sigma_x}{\sigma_y}(y-\mu_y),\ (1-r^2)\sigma_x^2\right)$$

$$\longrightarrow MMSE \longrightarrow \mathbb{E}[X \mid Y=y] = \underbrace{\mu_x}_{0} + \underbrace{r}_{\frac{1}{\sqrt{2}}\,*} \underbrace{\frac{\sigma_x}{\sigma_y}}_{\frac{1}{\sqrt{2}}} (y - \underbrace{\mu_y}_{0}) = \boxed{\frac{1}{2}y}$$

$$\longrightarrow \hat{X}_m = \frac{1}{2}Y$$

$$cov(X,Y) = \underbrace{\mathbb{E}[XY]}_{\underbrace{\mathbb{E}[X^2]}_{1} + \underbrace{\mathbb{E}[XW]}_{\underbrace{\mathbb{E}[X]\,\mathbb{E}[W]}_{0}}} - \underbrace{\mathbb{E}[X]\,\mathbb{E}[Y]}_{0} = 1$$

$$\longrightarrow r = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \sigma_y} = \frac{1}{1 \times \sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad *$$

5.b

$$MSE = \mathbb{E}\left[\left(X - \frac{1}{2}Y\right)^2\right] = \underbrace{\mathbb{E}[X^2]}_{1} + \frac{1}{4}\underbrace{\mathbb{E}[Y^2]}_{2} - \underbrace{\mathbb{E}[XY]}_{1} = \boxed{\frac{1}{2}}$$

5.c

$$\mathbb{E}[\hat{X}_m^2] + \underbrace{\mathbb{E}[\tilde{X}^2]}_{MSE} = \frac{1}{4}\underbrace{\mathbb{E}[Y^2]}_{2} + \frac{1}{2} = 1 = \mathbb{E}[X^2] \quad \checkmark$$

6

$X_i \sim \mathrm{Bern}(p)$

$$\hat{p} = \frac{X_1 + \dots + X_n}{n} \longrightarrow \mathrm{Var}(\hat{p}) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} \overbrace{\mathrm{var}(X_i)}^{p(1-p)} = \frac{p(1-p)}{n} \longrightarrow \mathrm{std}(\hat{p}) = \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$$

$$\mathrm{std}(\hat{p}) < \frac{1}{100} \longrightarrow \frac{p(1-p)}{n} < 10^{-4} \longrightarrow n > 10^4 p(1-p)$$

$$p \in \left[\frac{1}{10}, \frac{2}{10}\right] \longrightarrow \frac{9}{100} \leqslant p(1-p) \leqslant \frac{16}{100} \longrightarrow$$

در بدترین حالت $10^4 p(1-p)$ برابر 1600 می‌شود

حداقل باید 1601 بار آزمایش را انجام دهیم تا مطمئن شویم همیشه انحراف معیار تخمین‌گر کمتر از $\frac{1}{100}$ است

8

تخمین‌گر میانگین نمونه را $\hat{\theta}_1$ می‌نامیم

تخمین‌گر میانه نمونه را $\hat{\theta}_2$ می‌نامیم

⊛ ضمناً می‌دانیم که f_X چگالی احتمال توزیع لاپلاس است

$$\mathrm{Var}\left(\hat{\theta}_1(X_1, \dots, X_n)\right) = \mathrm{var}\left(\frac{X_1 + \dots + X_n}{n}\right) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\mathrm{var}[X_i]}_{\frac{2}{\lambda^2}} = \frac{2}{n\lambda^2}$$

واریانس لاپلاس

برای sample median می‌دانیم که اگر f_X در نقطه میانه پیوسته و غیرصفر باشد، به ازای n بزرگ، توزیع مربوط به sample median تقریباً دارای واریانس $\frac{1}{4n f_X(\tilde{m})^2}$ خواهد بود. ($\tilde{m}$ نقطه میانه است)

$$\mathrm{Var}\left(\hat{\theta}_2(X_1, \dots, X_n)\right) = \underbrace{\mathrm{Var}(X_{med})}_{\approx \frac{1}{4n f_X(\tilde{m})^2}} \overset{\tilde{m} = \mu}{=\!=} \frac{1}{4n\left(\frac{\lambda}{2}\right)^2} = \frac{1}{n\lambda^2}$$

بنابراین مشاهده می‌شود که $\hat{\theta}_2$ واریانس‌اش تقریباً نصف $\hat{\theta}_1$ است پس میانه بهتر است

7.a

$$\text{Bias}(\bar{X}-\bar{Y}) = \mathbb{E}\left[\frac{X_1+\cdots+X_n}{n} - \frac{Y_1+\cdots+Y_m}{m}\right] - (\mu_1-\mu_2)$$

$$= \frac{n}{n}\underbrace{\mathbb{E}[X]}_{\mu_1} - \frac{m}{m}\underbrace{\mathbb{E}[Y]}_{\mu_2} - \mu_1 + \mu_2 = 0 \longrightarrow$$

بنابراین $\bar{X}-\bar{Y}$ یک تخمینگر unbiased برای $\mu_1-\mu_2$ است

محاسبه $\bar{X}-\bar{Y}$ برای داده ها

$$\bar{X} = \frac{219.8}{27} = 8.14$$

$$\bar{Y} = \frac{171.5}{20} = 8.57$$

$$\bar{X}-\bar{Y} = -0.43$$

7.b

$$\text{Var}(\bar{X}-\bar{Y}) \overset{\perp\!\!\!\perp}{=} \text{Var}(\bar{X}) + \text{Var}(\bar{Y}) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\underbrace{\text{Var}(X_i)}_{\sigma_1^2} + \frac{1}{m^2}\sum_{i=1}^{m}\underbrace{\text{Var}(Y_i)}_{\sigma_2^2}$$

$$= \frac{\sigma_1^2}{n} + \frac{\sigma_2^2}{m} \longrightarrow \text{std}(\bar{X}-\bar{Y}) = \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n} + \frac{\sigma_2^2}{m}}$$

تخمین σ_1^2 توسط داده ها (unbiased نسخه) $= \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2 = 2.75 = \hat{\sigma}_1^2$

تخمین σ_2^2 توسط داده ها (unbiased نسخه) $= \frac{1}{m-1}\sum_{i=1}^{m}(Y_i-\bar{Y})^2 = 4.43 = \hat{\sigma}_2^2$

$$\text{std}(\bar{X}-\bar{Y}) \approx \sqrt{\frac{2.75}{27} + \frac{4.43}{20}} = 0.57$$

7.c

$$\hat{\sigma}_1 = \sqrt{2.75} \approx 1.66$$

$$\hat{\sigma}_2 = \sqrt{4.43} \approx 2.1$$

$$\longrightarrow \frac{\hat{\sigma}_1}{\hat{\sigma}_2} = \frac{1.66}{2.1} \approx 0.79$$

7.d

$$\text{Var}(X-Y) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y) = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 \overset{\text{تخمین}}{\approx} \hat{\sigma}_1^2 + \hat{\sigma}_2^2 \approx 7.18$$

- source 1
- source 2