$\boxed{1.a}$

می دانیم که باید $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\,dx = 1$ پس داریم:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\,dx = \underbrace{\int_{-\infty}^{-1} c e^{\lambda(x+1)}\,dx}_{\frac{c}{\lambda}} + \underbrace{\int_{-1}^{1} b\,dx}_{2b} + \underbrace{\int_{1}^{\infty} a e^{-\lambda(x-1)}\,dx}_{\frac{a}{\lambda}} = 1$$

$$\rightarrow a + c + 2b\lambda = \lambda \rightarrow \boxed{a+c = \lambda(1-2b)}$$

$\boxed{1.b}$

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(x)\,dx = \begin{cases} \frac{c}{\lambda} + 2b + \int_{1}^{x} a e^{-\lambda(x-1)}\,dx & x > 1 \\ \frac{c}{\lambda} + \int_{-1}^{x} b\,dx & -1 \leq x \leq 1 \\ \int_{-\infty}^{x} c e^{\lambda(x+1)}\,dx & x < -1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{c}{\lambda} + 2b - \frac{a}{\lambda} e^{-\lambda(x-1)} + \frac{a}{\lambda} & x > 1 \\ \frac{c}{\lambda} + b(x+1) & -1 \leq x \leq 1 \\ \frac{c}{\lambda} e^{\lambda(x+1)} & x < -1 \end{cases}$$

پیوسته ✓

صعودی ✓

$\lim_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$ ✓ $\lim_{x \to \infty} F_X(x) = 1$ ✓

$\boxed{2}$ می توان مسئله را به صورت گام به گام در نظر گرفت. به این صورت که در ابتدا n نخ داریم و در هر مرحله 2 سر را انتخاب کرده و به هم گره می زنیم. حال می توان هر مرحله را معادل یک Bernoulli trial دانست که اگر یک حلقه جدید ایجاد شود برنده شده ایم و اگر ایجاد نشود باخته ایم. ابتدا پارامتر (p) این توزیع برنولی را برای هر مرحله به دست می آوریم.

$X_1 \;\cdots\; X_n \qquad X_i \sim \text{Bern}(p_i)$

$X_1 \hookrightarrow$ مرحله 1 ، $X_n \hookrightarrow$ مرحله n

- در هر مرحله باید 2 سر انتخاب کنیم، به ازای هر سری که ابتدا انتخاب کنیم تنها یک سر دیگر وجود دارد که گره زدن این دو حلقه جدید ایجاد می کند
- در هر مرحله که دو سر انتخاب کنیم، 2 تا از تعداد کل سر ها کم می شود

بنابراین در مرحله اول احتمال ایجاد شدن حلقه جدید $\frac{1}{2n-1}$ است و به همین ترتیب در مرحله دوم $\frac{1}{2n-2-1} = \frac{1}{2n-3}$ و در مرحله آخر نیز 1 است.

اگر تعداد کل حلقه ها را L بنامیم واضح است که $L = X_1 + \dots + X_n$. همچنین می دانیم که امید ریاضی متغیر تصادفی برنولی برابر p آن است. پس داریم:

$$\mathbb{E}[L] = \mathbb{E}[X_1 + \dots + X_n] = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}[X_i] = \sum_{i=1}^{n} p_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2i-1} = H_{2n} - \frac{H_n}{2}$$

که $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$ جمله n ام سری هارمونیک است و می توان آنرا به صورت مقابل تخمین زد تا به فرم بسته برسیم:

$$H_n \simeq \ln n + \gamma \longrightarrow H_{2n} - \frac{H_n}{2} = \ln 2n + \gamma - \frac{1}{2}(\ln n + \gamma)$$

$$= \frac{1}{2}(\ln 4n + \gamma)$$

$\boxed{3.1}$

می دانیم که باید $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{A}{n\times 3^{n}} = 1$ شود.

این سری حالت خاصی از تابع polylogarithm است که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$Li_{s}(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^{k}}{k^{s}} \qquad |z|<1$$

$$Li_{1}\left(\tfrac{1}{3}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k\times 3^{k}} = \text{مطلوب ما}$$

برای حالت خاصی که $s=1$ باشد داریم که: $Li_{1}(z) = -\ln(1-z)$

این برابری را می توان توسط بسط تیلور در نقطه ۰ اثبات کرد:

$$-\ln(1-z) \overset{taylor}{=\!=} 0 + z + \frac{1}{2}z^{2} + \frac{1}{3}z^{3} + \frac{1}{4}z^{4} + \dots = Li_{1}(z)$$

بنابراین:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{A}{n\times 3^{n}} = A\left(-\ln\left(1-\tfrac{1}{3}\right)\right) = -A\ln\frac{2}{3} = 1 \longrightarrow A = \frac{-1}{\ln\frac{2}{3}} = \boxed{\frac{1}{\ln\frac{3}{2}}}$$

$$\mathbb{E}[T] = \sum_{n=1}^{\infty} n\, p(T=n) = \sum_{n=1}^{\infty} n\,\frac{A}{n\times 3^{n}} = A\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^{n}} = A\left(\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}}\right) = \boxed{\frac{A}{2}} = \frac{1}{2\ln\frac{3}{2}}$$

$$\mathbb{E}[T^{2}] = \sum_{n=1}^{\infty} n^{2}\, p(T=n) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{2}\,\frac{A}{n\times 3^{n}} = A\sum_{n=1}^{\infty} n\left(\tfrac{1}{3}\right)^{n} \overset{\circledast}{=\!=} \frac{3}{4}A = \frac{3}{4\ln\frac{3}{2}}$$

$$\longrightarrow Var[T] = \mathbb{E}[T^{2}] - \mathbb{E}^{2}[T] = \frac{3}{4}A - \frac{A^{2}}{4} = \boxed{\frac{3A - A^{2}}{4}}$$

$\forall x : |x|<1$ $\circledast$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n x^{n} = x\sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} =\!= \frac{x}{(1-x)^{2}} \longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} n\left(\tfrac{1}{3}\right)^{n} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{4}{9}} = \frac{3}{4}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^{n} \overset{\text{سری}}{\underset{\text{هندسی}}{=\!=}} \frac{x}{1-x} \xrightarrow{\frac{d}{dx}} \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^{2}}$$

$\boxed{3.2}$

می دانیم که باید $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c}{n!} = 1$ شود.

اگر بسط تیلور تابع e^{x} در نقطه ۰ را بنویسیم داریم:

$$e^{x} = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^{2} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^{n}$$

$$\xrightarrow{x=1} e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \circledast \longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} = e-1 \longrightarrow \boxed{c = \frac{1}{e-1}}$$

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{n=1}^{\infty} n\, p(X=n) = \sum_{n=1}^{\infty} n \frac{c}{n!} = c \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} \overset{\circledast}{=\!=} \boxed{ce} = \frac{e}{e-1}$$

$$\mathbb{E}[X^{2}] = \sum_{n=1}^{\infty} n^{2} p(X=n) = c \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n-1)!} = c \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1+1}{(n-1)!} = c \underbrace{\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-2)!}}_{\circledast\; e} + c \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!}}_{\circledast\; e}$$

$$= 2ce = \frac{2e}{e-1}$$

$$\longrightarrow \mathrm{Var}[X] = \mathbb{E}[X^{2}] - \mathbb{E}^{2}[X] = \boxed{2ce - (ce)^{2}} = \frac{2e}{e-1} - \left(\frac{e}{e-1}\right)^{2}$$

$\boxed{4.a}$

$$H \sim \mathcal{N}(170, 10)$$

$$p(H>174) = 1 - p(H \leqslant 174) \overset{\text{standardization}}{=} 1 - p\Big(\underbrace{\frac{H-170}{\sqrt{10}}}_{Z} \leqslant \frac{174-170}{\sqrt{10}}\Big) = 1 - F_Z\left(\frac{4}{\sqrt{10}}\right) = 1 - \underbrace{\Phi\Big(\overbrace{\tfrac{4}{\sqrt{10}}}^{1.2649}\Big)}_{0.897} = 0.103$$

$\boxed{4.b}$

$$p(H<180 \mid H \geqslant 160) = \frac{p(160 \leqslant H < 180)}{p(H \geqslant 160)} = \frac{F_H(180) - F_H(160)}{1 - F_H(160)}$$

$$= \frac{\Phi(\sqrt{10}) - \Phi(-\sqrt{10})}{1 - \Phi(-\sqrt{10})} = \frac{0.9992 - 0.00079}{0.99921} = \frac{0.99841}{0.99921} = 0.99919$$

$\boxed{4.c}$

$$H_1, \dots, H_5 \overset{iid}{\sim} \mathcal{N}(170, 10)$$

⊛ طبق بخش $\boxed{4.a}$ می دانیم که $p(H_i > 174)$ چقدر است. آنرا p' می نامیم.

احتمال اینکه از بین یک گروه 5 نفره ، حداقل نصف آن ها قد بیش از 174 داشته باشند برابر است با

$$p\left(\text{دقیقاً 3 نفر قد بیش از 174 داشته باشند}\right) = \binom{5}{3} p'^3 (1-p')^2 \simeq 0.008$$

$$+$$

$$p\left(\text{دقیقاً 4 نفر قد بیش از 174 داشته باشند}\right) = \binom{5}{4} p'^4 (1-p')^1 \simeq 0.00045$$

$$+$$

$$p\left(\text{دقیقاً 5 نفر قد بیش از 174 داشته باشند}\right) = p'^5 \simeq 1.16 \times 10^{-5}$$

⊛ دقت شود که حالات باهم اشتراکی ندارند
بنابراین جمعشان جواب سوال است

5

$$X, Y \overset{iid}{\sim} \text{poisson}(2) \longrightarrow p_X(k) = p_Y(k) = \frac{2^k}{k!} e^{-2} \qquad k \in [0, \infty)$$

$$Z = \min(X, Y)$$

$$p(Z \leqslant 1) = 1 - p(Z > 1) = 1 - p(X > 1, Y > 1) \overset{iid}{=} 1 - \overbrace{p(X>1)}^{1-p(X\leqslant 1)} \overbrace{p(Y>1)}^{1-p(Y\leqslant 1)} \quad \text{I}$$

$$p(X \leqslant 1) = p(Y \leqslant 1) = \sum_{k=0}^{1} \frac{2^k}{k!} e^{-2} = e^{-2} + 2e^{-2} = 3e^{-2} \quad \text{II}$$

$$\xrightarrow{\text{I}\,\text{II}} p(Z \leqslant 1) = 1 - (1 - 3e^{-2})^2$$

6

⊛ در این سوال از توزیع هندسی با ساپورت $\{1, 2, 3, \dots\}$ استفاده می‌کنیم. داریم:

$$p(X \geqslant x) = \sum_{i=x}^{\infty} (1-p)^{i-1} p \overset{\text{سری هندسی}}{=\!=} \frac{(1-p)^{x-1} p}{1-(1-p)} = (1-p)^{x-1} \quad ⊛$$

ابتدا اثبات می‌کنیم اگر X از توزیع هندسی پیروی کند $\longrightarrow$ X بی‌حافظه است

طبق تعریف بی‌حافظه بودن

$$\forall m, n \in \mathbb{N} \cup \{0\} \quad p\left(X > n+m \mid X > n\right) = \frac{p(X > n+m,\, X > n)}{p(X > n)} = \frac{p(X > n+m)}{p(X > n)}$$

$$\overset{⊛}{=} \frac{(1-p)^{n+m}}{(1-p)^{n}} = (1-p)^m = p(X \geqslant m-1) = p(X > m)$$

بنابراین تعریف بی‌حافظه بودن برقرار شد و اثبات کردیم که X بی‌حافظه است

حال اثبات می‌کنیم اگر X متغیر تصادفی گسسته و بی‌حافظه باشد $\longrightarrow$ X از توزیع هندسی پیروی می‌کند

⊛ طبق تعریف m و n بزرگتر مساوی 0 هستند پس X بزرگتر از 0 است $\longrightarrow$ support $= \{1, 2, 3, \dots\}$ ⊛⊛

$$p(X = k+1 \mid X > k) = 1 - p\left(X > k+1 \mid X > k\right) \overset{X \text{ is}}{\underset{\text{memoryless}}{=\!=}} 1 - p(X > 1) = p(X \leqslant 1) \overset{⊛⊛}{=} p(X = 1)$$

این مقدار را p' می‌نامیم و

می‌خواهیم با استقرا ثابت کنیم که $p(X=k) = p'(1-p')^{k-1}$

حالت پایه: طبق فرمولی که می‌خواهیم اثبات کنیم $p(X=1) = p'$ که همان تعریف خودمان از p' است

رسیدن از مرحله k به $k+1$

$$\underbrace{p(X = k+1 \mid X > k)}_{p(X=1)} \underbrace{p(X > k)}_{1 - p(X \leqslant k)} = \underbrace{p(X = k+1,\, X > k)}_{p(X=k+1)}$$

$$\rightarrow p(X = k+1) = \underbrace{p(X=1)}_{p'} \Big[1 - \sum_{i=1}^{k} \underbrace{p(X=i)}_{p'(1-p')^{i-1}} \Big] \overset{\text{سری}}{\underset{\text{هندسی}}{=\!=}} p' \left[1 - \frac{\cancel{p'}(1-(1-p')^k)}{\cancel{1-(1-p')}}\right]$$

فرض استقرا

$$= p'(1-p')^k$$

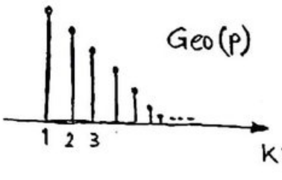
همان pmf توزیع هندسی با پارامتر p'

بنابراین نشان دادیم که اگر X یک متغیر تصادفی گسسته و بی‌حافظه باشد، حتماً از توزیع هندسی با پارامتر $p(X=1)$ پیروی می‌کند

7

اگر به ترتیب به هر فرودگاه عددی نسبت دهیم (فرودگاه اول عدد 1 ، فرودگاه دوم عدد 2 و ...) و فرض کنیم بی نهایت فرودگاه داریم،
همچنین احتمال گم شدن چمدان در هر فرودگاه را معادل احتمال برنده شدن در Bernoulli trial در نظر بگیریم آنگاه مسئله معادل یک توزیع هندسی
با پارامتر p می‌شود زیرا هرجا که چمدان گم شود دیگر نمی‌تواند در ادامه باز هم گم شود!

حال سوال آن است که اگر بدانیم چمدان در یکی از 3 فرودگاه اول گم شده است، احتمال گم شدن در هر فرودگاه چقدر است؟ ← conditional distribution



احتمال گم شدن در فرودگاه K ام $= p_X(k) = (1-p)^{k-1} p$

$$p(1 \leqslant X \leqslant 3) = 1 - p(X \geqslant 4) = 1 - \frac{(1-p)^3 p}{1-(1-p)} = 1 - (1-p)^3$$ ضرب بهنجارش

$$p(X=1 \mid 1 \leqslant X \leqslant 3) = \frac{p(X=1)}{p(1 \leqslant X \leqslant 3)} = \frac{1}{1-(1-p)^3} p$$

$$p(X=2 \mid 1 \leqslant X \leqslant 3) = \frac{p(X=2)}{p(1 \leqslant X \leqslant 3)} = \frac{1}{1-(1-p)^3} (1-p) p$$

$$p(X=3 \mid 1 \leqslant X \leqslant 3) = \frac{p(X=3)}{p(1 \leqslant X \leqslant 3)} = \frac{1}{1-(1-p)^3} (1-p)^2 p$$

8

متغیر تصادفی Q را معادل نمره هر سوال در نظر می‌گیریم و داریم $Q = Q_1 + Q_2$ که Q_1 یک متغیر تصادفی معادل نمره گرفته شده از سوال است
و Q_2 متغیر تصادفی معادل bonus گرفته شده است.

$$Q_1 \sim Bern(p)$$

$$Q_2 \sim Bern\left((1-p)^{n-1} p\right)$$ در کلاس n نفره باید n-1 نفر جواب اشتباه بدهند تا یک نفر بونس بگیرد

$$\mathbb{E}\left[\text{میانگین نمره کلاس}\right] = \mathbb{E}\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} kQ\right] = k\,\mathbb{E}\left[Q_1 + Q_2\right] = k\left(\mathbb{E}[Q_1] + \mathbb{E}[Q_2]\right)$$

$$= k\left(p + (1-p)^{n-1} p\right)$$

$\boxed{9.a}$

⊛ چون در قسمت $\boxed{9.b}$ خواسته شده $f_X(x)$ را حساب کنیم فرض می‌کنیم که $F_X(x)$ پیوسته است (در غیر این صورت $f_X(x)$ نخواهیم داشت)

برای $Q(x)$ فرم کلی ax^3+bx^2+cx+d را در نظر می‌گیریم و 4 معادله و 4 مجهول داریم

$$P(X<0) = F_X(0) = \frac{1}{27} \longrightarrow Q(0) = \frac{1}{27} \longrightarrow d = \frac{1}{27}$$

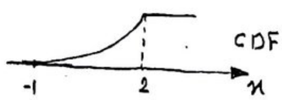
$$P(X \leq 1) = F_X(1) = \frac{8}{27} \longrightarrow Q(1) = \frac{8}{27} \longrightarrow a+b+c = \frac{7}{27}$$

$F_X(x)$ پیوسته است

$$\begin{cases} F_X(-1) = 0 \longrightarrow Q(-1) = 0 \longrightarrow a-b+c = \frac{1}{27} \\ F_X(2) = 1 \longrightarrow Q(2) = 1 \longrightarrow 4a+2b+c = \frac{13}{27} \end{cases}$$

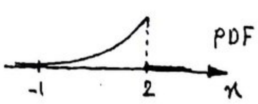
$$\Longrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{27} \\ b = \frac{3}{27} \\ c = \frac{3}{27} \\ d = \frac{1}{27} \end{cases}$$

$$\longrightarrow Q(x) = \frac{1}{27}x^3 + \frac{3}{27}x^2 + \frac{3}{27}x + \frac{1}{27}$$



$\boxed{9.b}$

$$f_X(x) = \frac{d}{dx}F_X(x) = \begin{cases} 0 & x<-1 \\ \frac{1}{9}x^2 + \frac{2}{9}x + \frac{1}{9} & -1 \leq x \leq 2 \\ 0 & x>2 \end{cases}$$



- source 1
- source 2
- source 3