TABLE DES MATIERES

I. Introduction à la recherche opérationnelle

1. Quelques exemples de modèles mathématiques

Un premier problème

Exemple (Achat de billets d'avion)

- Un homme d'affaires doit effectuer 5 voyages entre Fayetteville à Denver (DEN), en partant le lundi de FYV et revenant le mercredi de DEN à FYV.
- Billet aller-retour : $400.
- Réduction de 20% si un week-end est inclus.
- Aller simple : 75% du prix aller-retour.

Question

Comment acheter les billets pour les 5 semaines (à prix minimum) ?

Aide à la décision

1. Quelles sont les alternatives possibles ?
2. Quelles sont les restrictions à cette décision ?
3. Quel est l'objectif utilisé pour évaluer les alternatives ?

Restrictions

FYV-DEN le lundi et DEN-FYV le mercredi de la même semaine.

Evaluation des alternatives

Alternatives

- Acheter 5 FYV-DEN-FYV normaux. 5x$400=$2000
- Acheter un FYV-DEN, 4 DEN-FYV-DEN comprenant un weekend et un DEN-FYV. 0 .75x$400+4x0.8x$400+0.75x$400=$1880
- Acheter un FYV-DEN-FYV pour le lundi de la première semaine et le mercredi de la dernière semaine, et 4 DEN-FYV-DEN comprenant un week-end pour les autres voyages. 5x0.8x400$1600

La troisième alternative est la meilleure.

Modèle de recherche opérationnelle

Ingrédients principaux

- Alternatives (variables, inconnues du problème).
- Restrictions (contraintes).
- Fonction objectif à optimiser (minimiser ou maximiser).

Définition **(Solution admissible)**.

Une solution admissible est un ensemble de valeurs données aux variables qui satisfait toutes les contraintes.

Définition **(Solution optimale)**.

Une solution optimale est une solution admissible qui optimise la fonction objectif.

Définition **(Modèle de recherche opérationnelle)**.

Maximiser ou minimiser (fonction objectif) Sujet à {contraintes}

Variables : continues (réelles), entières, booléennes (0/1),…

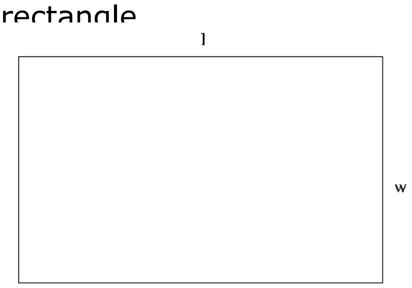
Objectif : linéaire/ non-linéaire, concave/ convexe,…

Contraintes : linéaire/ non-linéaire, concave/ convexe, égalités/ inégalités,…

Paramètres: connus avec certitude (modèles déterministes)/ incertains (modèles stochastiques)

Exemple 2. (Maximisation de la surface d’un rectangle).

Supposons que l’on veut plier un fil de fer de longueur L en rectangle de manière à maximiser la surface du rectangle



Formulation

$$\max A = lw$$

$$s.t.\ l + w = \frac{L}{2}$$

Solution

- $A = \left(\frac{L}{2} - w\right) w = \frac{Lw}{2} - w^2$
- $\frac{dA}{dw} = \frac{L}{2} - 2w = 0$
- Solution optimale : $w = l = \frac{L}{4}$

Méthodes de résolution

- Dans l'exemple, solution analytique au problème.
- La plupart des problèmes pratiques sont trop grands ou trop complexes pour être résolus analytiquement.

Méthodes itératives

Déplacement de solution en solution pour atteindre l'optimum (méthodes exactes) ou une « bonne » solution (heuristiques).

- Importance des algorithmes et des solutions informatiques.

2. Tour d'horizon des techniques de recherche opérationnelle

Recherche opérationnelle

La recherche opérationnelle est une technique d'aide à la décision.

Etapes pratiques

1. Définition du problème
2. Construction d'un modèle
3. Solution du modèle
4. Validation du modèle
5. Implémentation de la solution

Méthodologie

- Les étapes les plus importantes sont la définition du problème (suppose un dialogue avec le décideur) et la construction du modèle (prendre conscience des hypothèses simplificatrices et de leur impact).
- La phase de validation doit permettre de remettre en cause la validité du modèle.
- Une approche globale nécessite donc un aller-retour constant entre le modèle et les attentes du décideur.

Techniques principales

- Programmation linéaire
- Programmation en nombres entiers
- Optimisation dans les réseaux
- Programmation non linéaire
- Optimisation multi-critères
- Programmation dynamique
- Modèles stochastiques

Simulation

II. Application de la programmation linéaire

1. Définition, exemples et méthode de résolution

1.1. Notion de bases

Programmation linéaire

Définition **(Programmation linéaire)**.

Modèle mathématique dans lequel la fonction objectif et les contraintes sont linéaires en les variables.

Applications

Optimisation de l'usage de ressources limitées dans les domaines militaire, industriel, agricole, économique, …

Existence d'algorithmes très efficaces pour résoudre des problèmes de très grande taille (simplexe, points intérieurs)

1.2. Exemples de modèles linéaires

Exemple **(Production de peinture)**.

Une société produit de la peinture d'intérieur et d'extérieur à partir de deux produits de base M1 et M2.

Données

	Quantité utilisée par tonne		*Quantité disponible par jour*
	Extérieure	$\int$ *érieure*	
$M1$	6	4	24
$M2$	1	2	6
Profit par tonne	5	4	

Contraintes supplémentaires

- Demande maximum en peinture d'intérieur : 2 tonnes/jour.

- La production en peinture d'intérieur ne dépasse que d'une tonne celle d'extérieur.

Formulation (Production de peinture)

Alternatives (variables, inconnues du problème)

$$x_1 = tonnes\ de\ peinture\ d'ext\acute{e}rieur\ produites\ par\ jour$$

$$x_2 = tonnes\ de\ peinture\ d' \int \acute{e}rieur\ produites\ par\ jour$$

Fonction objectif à optimiser

$$\max z = 5x_1 + 4x_2$$

Restrictions (contraintes)

$$6x_1 + 4x_2 \leq 24$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 6$$

$$x_2 \leq 2$$

$$x_2 - x_1 \leq 1$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Solutions et méthodes de résolution

- Solution admissible : satisfait toutes les contraintes

$$x_1 = 3,\ x_2 = 1 \left(\Longrightarrow z = 19\right)$$

- Nous voulons trouver la solution (admissible) optimale.
- Infinité de solutions admissibles !

Méthodes pour trouver l'optimum

- Méthode graphique
- Simplexe
- (Ellipsoïde, points intérieurs)

Exemple

- On désire déterminer la composition, à coût minimal, d'un aliment pour bétail qui est obtenu en mélangeant au plus trois produits bruts : orge et arachide.

- La quantité nécessaire par portion est de 400g.
- L'aliment ainsi fabriqué devra comporter au moins 30% de protéines et au plus 5% de fibres.

Données

	Quantité par gramme d'aliment		Coût (EUR/kg)
Aliment	Protéines	Fibres	
Orge	0.09	0.02	1.5
Arachide	0.60	0.06	4.5

Formulation

Variables

$$x_1 = grammes\, d'\, orge\ par\ portion$$

$$x_2 = grammes\, d'\, arachide\ par\ portion$$

Objectif

$$min\ z = 0.0015\, x_1 + 0.0045\, x_2$$

Contraintes

Quantité totale : $x_1 + x_2 \geq 400$

Protéines : $0.09\, x_1 + 0.6\, x_2 \geq 0.3\left(x_1 + x_2\right)$

Fibres : $0.02\, x_1 + 0.06\, x_2 \leq 0.05\left(x_1 + x_2\right)$

Non-négativité : $x_1, x_2 \geq 0$

1.3. Forme standard et forme canonique d'un programme linéaire

Forme standard

Définition **(Forme standard)**

Un programme linéaire est sous forme standard lorsque toutes ses contraintes sont des égalités et toutes ses variables sont non-négatives.

Représentation matricielle :

$$max\, c^T x$$

$$s.c.\, Ax = b$$

$$x \geq 0$$

n variables, m Contraintes, $m < n, c, x \in R^n, b \in R^m, A \in R^{n+m}$

Forme canonique

Définition **(Forme canonique)**

Un programme linéaire est sous forme canonique lorsque toutes ses contraintes sont des inégalités et toutes ses variables sont non- négatives.

Représentation matricielle

$$max\, c^T x$$

$$s.t.\, Ax \leq b$$

$$x \geq 0$$

n variables, m Contraintes, $m < n, c, x \in R^n, b \in R^m, A \in R^{n+m}$

Théorème **(Equivalence des formes standard et canonique)**

Tout programme linéaire peut s'écrire sous forme standard et sous forme canonique.

Démonstration

- Une contrainte d'inégalité $a^T x \leq b$ peut être transformée en égalité par l'introduction d'une variable d'écart :

$$a^T x + s \leq b,$$

$$s \geq 0.$$

- Une contrainte d'égalité $a^T x = b$ peut être remplacée par deux inégalités :

$$a^T x \leq b$$

$$-a^T x \leq -b$$

- $a^T x \geq b \Leftrightarrow -a^T x \leq -b$
- $min\, c^T x = -max - c^T x$
- Variable de x non restreinte : substitution par deux variables (partie positive et négative)

$$x = x^{+¿-x^{-¿¿}}¿$$

$$x^{+¿,x^{-¿\geq 0¿}}¿$$

Il existe toujours une solution optimale telle que $x^{+¿=0¿}$ou $x^{-¿=0¿}$

Forme standard du problème de production de peinture

$$max\, z = 5x_1 + 4x_2$$

$$s.c. 6x_1 + 4x_2 \leq 24$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 6$$

$$x_2 \leq 2$$

$$x_2 - x_1 \leq 1$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Forme standard

$$\begin{array}{llllllll}
max\, z = ¿¿ & 5x_1 & +4x_2 & & & & & \\
s.c. & 6x_1 & +4x_2 & +s_1 & & & & ¿24 \\
 & x_1 & +2x_2 & & +s_2 & & & ¿6 \\
 & & x_2 & & & +s_3 & & ¿2 \\
 & -x_1 & +x_2 & & & & s_4 & ¿1 \\
 & x_1, & x_2, & s_1, & s_2, & s_3, & s_4, & \geq 0
\end{array}$$

Forme matricielle

$$\max c^T x$$

$$s.c.\ Ax = b$$

$$x \geq 0$$

$$c = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ s_1 \\ s_2 \\ s_3 \\ s_4 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 24 \\ 6 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Variables pouvant prendre des valeurs négatives

Exemple **(Vente de hamburgers)**

- Un fast-food vend des hamburgers et des cheeseburgers. Un hamburger utilise $125\,g$ de viande alors qu'un cheeseburger n'en utilise que $100\,g$.

- Le fast-food démarre chaque journée avec $10\,kg$ de viande mais peut commander de la viande supplémentaire avec un coût additionnel de $2\,EUR$ par kg pour la livraison.

- Le profit est de $0.02\,EUR$ pour un hamburger et $0.015\,EUR$ pour un cheeseburger.

- La demande ne dépasse pas 900 sandwiches/jour, et les surplus de viande sont donnés au Restos du Cœur.

  Combien le fast-food doit-il produire de sandwiches de chaque type par jour ?

Variables

$x_1 = ¿$ Nombre de hamburgers/jour
$x_2 = ¿$ Nombre de cheeseburgers/jour

Contraintes

- Commande de viande supplémentaire

$$125\,x_1 + 100\,x_2 + x_3 = 10000,\ x_3 \text{ non restreint}$$

- Le coût pour la viande supplémentaire apparaît seulement si $x_3 < 0$

- Substitution de x_3 par 2 variables non-négatives :

$$x_3 = x_3^{+¿ - x_3^{-¿, x_3^{+¿, x_3^{-¿ \geq 0 ¿} ¿} ¿} ¿}$$

$$125\,x_1+100\,x_2+x_3^{+¿-x_3^{-¿=10000¿}}¿$$

- Borne supérieure sur les ventes : $x_1+x_2\leq 900$.

Modèle complet

$$max\,z=0.02\,x_1+0.015\,x_2-0.002\,x_3^{-¿}¿$$

$$s.c.\,125\,x_1+100\,x_2+x_3^{+¿-x_3^{-¿=1000¿}}¿$$

$$x_1+x_2\leq 900$$

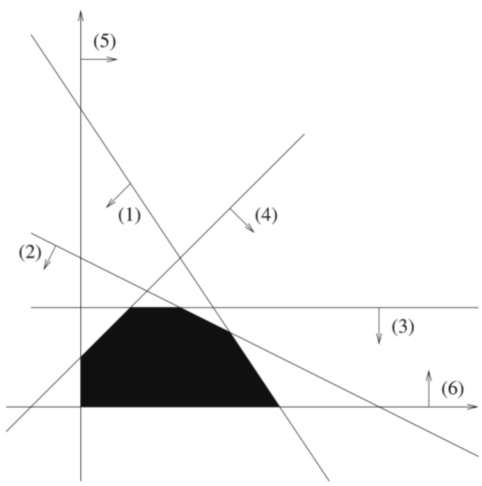
$$x_1,x_2,x_3^{+¿,x_3^{-¿\geq 0¿}}¿$$

Remarque : Il existe une solution optimale telle que $x_3^{+¿=0¿}$ ou $x_3^{-¿=0¿}$.

1.4. Résolution de programmes linéaires

1.4.1. Résolution graphique

Représentation graphique



Production de peinture

$$max\, z = 5x_1 + 4x_2$$

Sous les contraintes :

$$6x_1 + 4x_2 \leq 24 \quad (1)$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 6 \quad (2)$$

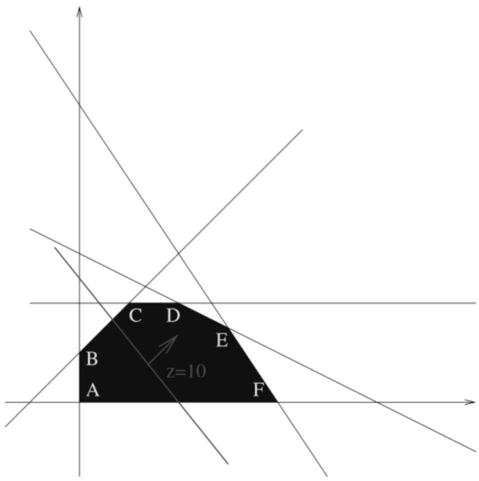
$$x_2 \leq 2 \quad (3)$$

$$x_2 - x_1 \leq 1 \quad (4)$$

$$x_1 \geq 0 \quad (5)$$

$$x_2 \geq 0 \quad (6)$$

Géométrie des solutions



Ensemble des solutions admissibles

Polyèdre (ABCDEF)

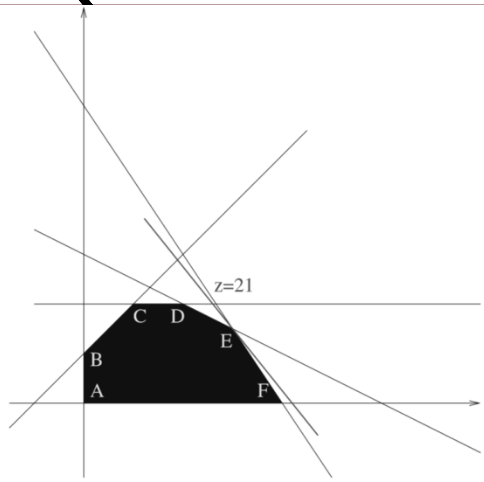
Courbes de niveaux de l'objectif

Ensemble de solutions ayant un profit (valeur de l'objectif) donné : intersection entre une droite et le polyèdre.

Amélioration de la solution

Recherche d'une direction dans laquelle le profit z augmente.

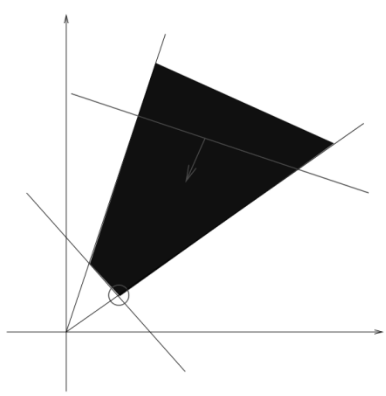
Résolution graphique (Production de peinture)



Recherche de la solution optimale

- La droite mobile doit garder une intersection avec l'ensemble des solutions admissibles.
- Solution optimale : $x_1=3$, $x_2=1.5$ (E)
- La solution optimale est un sommet du polyèdre.
- Cette observation est la base de l'algorithme du simplexe.

Résolution graphique (Diet problème)



Diet problème

$$min\, z = 0.0015\, x_1 + 0.0045\, x_2$$

Sous les contraintes

$$x_2 + x_1 \geq 400$$

$$0.21\, x_1 - 0.30\, x_2 \leq 0$$

$$0.03\, x_1 - 0.01\, x_2 \geq 0$$

$$x_1 \geq 0$$

$$x_2 \geq 0$$

Solution optimale

$$x_1 = \frac{4000}{17} \simeq 235.3\,;\, x_2 = \frac{2800}{17} \simeq 164.7\,;\, z = \frac{186}{170} \simeq 1.094$$

1.4.2. La méthode du simplexe

Idées de base

- Solution optimale : sommet (point extrême).
- Idée fondamentale du simplexe : déplacement de sommet en sommet adjacent de manière à améliorer la fonction objectif.
- Transformation des inégalités en égalités : forme standard du programme linéaire-système de m équations à n inconnues $(m<n)$.
- Identification algébrique des sommets : correspondance avec les vases d'un système d'équations.

Solution de base

- Système de m équations linéaires à n inconnues $(m<n)$: infinité de solutions.
- Si on fixe à zéro $n-m$ variables : système de m équations à m inconnues possédant une solution unique (si la matrice est inversible). C'est une solution de base.

Définition **(Solution de base)**

Une solution de base d'un programme linéaire est la solution unique du système de m équations à m inconnues obtenu en fixant à zéro $n-m$ variables (pourvu que la matrice du système soit inversible).

Les variables fixées à zéro sont appelées variables hors base et les autres variables en base.

Exemple **(Production de peinture)**.

Prenons $B=\{s_1, s_2, s_3, s_4\}$.

$$z=0+5x_1+4x_2$$

$$s_1=24-6x_1-4x_2$$

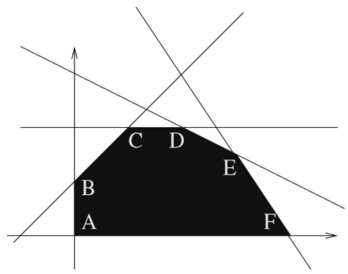
$$s_2=6-x_1-2x_2$$

$$s_3=2-x_2$$

$$s_4=1+x_1-x_2$$

Si $x_1=x_2=0$, alors $s_1=24$, $s_2=6$, $s_3=2$, $s_4=1$. Toutes ces valeurs sont non-négatives et la solution est réalisable.

Géométrie des solutions de base



- Prenons $B=\{s_1, s_2, s_3, s_4\} \Rightarrow x_1=x_2=0, s_1=24, s_2=6, s_3=2, s_4=1$
- Cette solution de base réalisable correspond au sommet $(0,0)$.

Base	Solution	Objectif	Sommet

$\{s_1, s_2, s_3, s_4\}$	(0,0)	0	A
$\{x_1, s_2, s_3, s_4\}$	(4,0)	20	F
$\{s_1, x_1, s_3, s_4\}$	(6,0)	-	Non réalisable
$\{x_1, x_2, s_3, s_4\}$	(3,1.5)	21	E

Théorème : Toute solution de base réalisable correspond à un sommet du polyèdre.

Déterminant de la solution de base optimale

- Nombre maximum de solution de base : $\dfrac{n!}{m!(n-m)!}$
- Algorithme «bête et méchant » : énumération de toutes les bases.
- Méthode du simplexe : partir d'une solution de base admissible et passer à une solution de base voisine qui améliore la valeur de l'objectif.
- Solution voisine : changement d'une variable en base.
- 3 étapes :
  1. Détermination de la variable entrante
  2. Détermination de la variable sortante
  3. Pivotage.

<u>L'algorithme du simplexe</u>

<u>Variable entrante</u>

$$z = 0 + 5x_1 + 4x_2$$

$$s_1 = 24 - 6x_1 - 4x_2$$

$$s_2 = 6 - x_1 - 2x_2$$

$$s_3 = 2 - x_2$$

$$s_4 = 1 + x_1 - x_2$$

- Si x_1 (ou x_2) augmente (entre en base), la valeur de la fonction objectif z augmente.
- Quelle est la valeur maximale de x_1?
- Contraintes : les autres variables doivent rester positives.

Variable sortante

$$s_1=24-6x_1\geq 0 \rightarrow x_1\leq 4$$

$$s_2=6-x_1\geq 0 \rightarrow x_1\leq 6 \qquad \Rightarrow x_1\leq 4$$

$$s_3=2\geq 0 \rightarrow 2\geq 0\, toujours\,!$$

$$s_4=1+x_1\geq 0 \rightarrow x_1-1\, toujours\,!$$

Pivotage

- Si $x_1=4$, alors $s_1=0$
- x_1 entre en base, s_1 sort de la base.
- Substitution :

$$x_1=4-\frac{1}{6}s_1-\frac{2}{3}x_2$$

- Nouveau système

$$z=20-\frac{5}{6}s_1+\frac{2}{3}x_2$$

$$x_1=4-\frac{1}{6}s_1-\frac{2}{3}x_2$$

$$s_2=2+\frac{1}{6}s_1-\frac{4}{3}x_2$$

$$s_3=2-x_2$$

$$s_4=5-\frac{1}{6}s_1-\frac{5}{3}x_2$$

Equation du simplexe

- $B=¿$indices des variables en base, $N=¿$indices des variables hors bases
- Notations :

$$z=\bar{z}+\sum_{k\in N}\overline{c_k}x_k$$

$$x_l=\overline{x_l}+\sum_{k\in N}\overline{a}_{lk}x_k l\in B$$

- c_k: profit marginal ou coût réduit.

Règles de pivotage

Variable entrante

Choisir la variable k hors base avec le profit marginal maximum $(max\, z)$ ou le réduit minimum$(min\, z)$.

$$max\, z\rightarrow k=arg\max_{i\in N}\overline{c_i}$$

$$min\, z\rightarrow k=arg\min_{i\in N}\overline{c_i}$$

Si $\overline{c_k}\le 0(max)$ ou $\overline{c_k}\ge 0(min)$ pour tout $k\in N$, solution optimale, STOP.

$$z=0+5x_1+4x_2$$

$$s_1=24-6x_1-4x_2$$

$$s_2=6-x_1-2x_2$$

$$s_3=2-x_2$$

$$s_4=1+x_1-x_2$$

Variable sortante

Choisir la variable l en base telle que

$$l=arg\max_{j\in B:\overline{a_{jk}}>0}\frac{\overline{b_j}}{\overline{a_{jk}}}$$

Si $\overline{a_{lk}}\le 0$ pour tout $l\in B$, problème non borné, STOP.

$$z=0+5x_1+4x_2$$

$$s_1=24-6x_1-4x_2$$

$$s_2=6-x_1-2x_2$$

$$s_3 = 2 - x_2$$

$$s_4 = 1 + x_1 - x_2$$

Pivotage

$$\overline{a_{ij}}' = \begin{cases} \dfrac{\overline{a_{lj}}}{\overline{a_{lk}}} & i = l \\ \overline{a_{ij}} - \dfrac{\overline{a_{ik}}\,\overline{a_{lj}}}{\overline{a_{lk}}} & i \neq l \end{cases}$$

$$\overline{b_i}' = \begin{cases} \dfrac{\overline{b_l}}{\overline{a_{lk}}} & i = l \\ \overline{b_i} - \dfrac{\overline{a_{ik}}\,\overline{b_l}}{\overline{a_{lk}}} & i \neq l \end{cases}$$

$z = 0 + 5x_1 + 4x_2$	$z = 20 - \frac{5}{6}s_1 + \frac{2}{3}x_2$	$z = 21 - \frac{3}{4}s_1 - \frac{1}{2}s_2$
$s_1 = 24 - 6x_1 - 4x_2$	$x_1 = 4 - \frac{1}{6}s_1 - \frac{2}{3}x_2$	$x_1 = 3 - \frac{1}{4}s_1 + \frac{1}{2}s_2$
$s_2 = 6 - x_1 - 2x_2$	$s_2 = 2 + \frac{1}{6}s_1 - \frac{4}{3}x_2$	$x_2 = \frac{3}{2} + \frac{1}{8}s_1 - \frac{3}{4}s_2$
$s_3 = 2 - x_2$	$s_3 = 2 - x_2$	$s_3 = \frac{1}{2} - \frac{1}{8}s_1 + \frac{3}{4}s_2$
$s_4 = 1 + x_1 - x_2$	$s_4 = 5 - \frac{1}{6}s_1 - \frac{5}{3}x_2$	$s_4 = \frac{5}{2} - \frac{3}{8}s_1 + \frac{5}{4}s_2$

<u>Présentation en tableau</u>

<u>Présentation compacte pour effectuer les calculs sans répéter les systèmes d'équations.</u>

- <u>Itération 1</u>

$Var.\,en\,base$	z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	$Solution$
z	-1	5	4	0	0	0	0	0
s_1	0	6	4	1	0	0	0	24

s_2	0	1	2	0	1	0	0	6
s_3	0	0	1	0	0	1	0	2
s_4	0	-1	1	0	0	0	1	1

- Itération 2

Var . en base	z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	*Solution*
z	-1	0	$2/3$	$-5/6$	0	0	0	-20
x_1	0	1	$2/3$	$1/6$	0	0	0	4
s_2	0	0	$4/3$	$-1/6$	1	0	0	2
s_3	0	0	1	0	0	1	0	2
s_4	0	0	$5/3$	$1/6$	0	0	1	5

- Itération 3

Var . en base	z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	*Solution*
z	-1	0	0	$-3/4$	$-1/2$	0	0	-21
s_1	0	1	0	$1/4$	$-1/2$	0	0	3
s_2	0	0	1	$-1/8$	$3/4$	0	0	$3/2$
s_3	0	0	0	$1/8$	$-3/4$	1	0	$1/2$
s_4	0	0	0	$3/8$	$-5/4$	0	1	$5/2$

1.4.3. La méthode des deux phases

Solution initiale artificielle

- Une solution de base admissible n'est pas toujours a priori.
- Certains problèmes n'admettent pas de solution admissible, donc il est impossible de trouver une base de départ.
- La méthode des deux phases va permettre de déterminer une base admissible ou prouver que le problème est impossible.

Exemple **(méthode des 2 phases)**

$$min\, z = 4x_1 + x_2$$

$$s.c.\, 3x_1 + x_2 = 3$$

$$4x_1 + 3x_2 \geq 6$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 4$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Introduction des variables d'écart

$$min\, z = 4x_1 + x_2$$

$$s.c.\, 3x_1 + x_2 = 3$$

$$4x_1 + 3x_2 - x_3 = 6$$

$$x_1 + 2x_2 + x_4 = 4$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

- Pas de base admissible « triviale ».
- On voudrait voir apparaître une matrice identité.
- Introduction de variables artificielles.

Introduction des variables artificielles.

$$min\, z = 4x_1 + x_2$$

$$min\, r = R_1 + R_2$$

$$min\, r = -7x_1 - 4x_2 + x_3 + 9$$

$$s.c.\, 3x_1 + x_2 + R_1 = 3$$

$$4x_1 + 3x_2 - x_3 + R_2 = 6$$

$$x_1+2x_2+x_4=4$$

$$x_1, x_2, x_3, R_1, R_2, x_4 \geq 0$$

- R_1, R_2 et x_4 peuvent être utilisées comme base de départ admissible.
- Base pour le système de départ si $R_1=R_2=0$ (hors base)
- Réécrire l'objectif en fonction des variables hors base !

1.4.4. Cas particuliers

Solutions optimales multiples

- Si la fonction objectif est parallèle à une contrainte active pour la solution optimale, la même valeur de l'objectif peut être prise par plusieurs solutions admissibles.
- Il y a une infinité de solutions optimales dans ce cas (toutes les combinaisons convexes de sommets optimaux).
- Cela se traduit par un profit marginal nul pour une ou plusieurs variables hors base.

Exemple **(solutions optimales multiples)**.

$$max\, z=2x_1+4x_2$$

$$s.c.\, x_1+2x_2 \leq 5$$

$$x_1+x_2 \leq 4$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Var. en base	z	x_1	x_2	s_1	s_2	Solution
z	-1	2	4	0	0	0
s_1	0	1	2	1	0	5
s_2	0	1	1	0	1	4
z	-1	0	0	-2	0	-10
x_2	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{5}{2}$
s_2	0	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$
z	-1	0	0	-2	0	-10
x_2	0	0	1	1	-1	1
x_1	0	1	0	-1	2	3

Solution

$$x_1 = 0\alpha + 3(1-\alpha) = 3 - 3\alpha$$

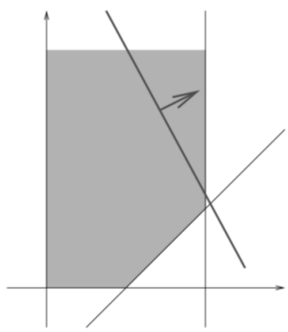
$$x_2 = \frac{5}{2}\alpha + 1(1-\alpha) = 1 + \frac{3}{2}\alpha \ (0 \leq \alpha \leq 1)$$

Problèmes non bornés

- Certains problèmes sont non bornés dans une direction donnée.
- Si cette direction est une direction de la fonction objectif, celle-ci peut prendre une valeur arbitrairement grande !

Exemple **(Problèmes non bornés)**

$$\begin{array}{llll} \max z = ¿¿ & 2x_1 & +x_2 & \\ s.c. & x_1 & -x_2 & \leq 1 \\ & 2x_1 & & \leq 4 \\ & x_1, & x_2 & \geq 0 \end{array}$$



Var. en base	z	x_1	x_2	s_1	s_2	Solution
z	-1	2	1	0	0	0
s_1	0	1	-1	1	0	1
s_2	0	2	0	0	1	4

- Tous les coefficients (sauf le profit marginal) dans la colonne de x_2 sont négatifs ou nuls.
- Cela signifie que toutes les contraintes de non-négativité sont satisfaites quelle que soit la valeur de x_2
- L'objectif peut donc augmenter indéfiniment

Problèmes impossibles

- Le système de contraintes peut n'avoir aucune solution
- Généralement, provient d'une mauvaise formulation du problème

Exemple **(Problèmes impossibles)**

$$\begin{array}{llll} \max z = ¿¿ & 3x_1 & +2x_2 & \\ s.c. & 2x_1 & +x_2 & \leq 2 \\ & 3x_1 & +4x_2 & \geq 4 \\ & x_1, & x_2 & \geq 0 \end{array}$$

2. Dualité

2.1 Le problème dual

Problème primal et problème dual

- Problème primal

$$\begin{array}{ll} \max & c^T x \\ s.c. & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{array}$$

n variables, m contraintes, $m<n, c, x \in R^m, A \in R^{m\times n}$

- Problème dual

$$\begin{array}{ll} \min & b^T y \\ s.c. & A^T y \geq c \\ & (y\, non\, restreint) \end{array}$$

n variables, m contraintes, $m<n, c, x \in R^m, A \in R^{m\times n}$

Exemple (Problème primal et dual – forme standard)

- Problème primal :

$$\begin{array}{llll} max\, z = ¿¿ & 2x_1 & +x_2 & \\ s.c. & 2x_1 & +x_2 & ¿5(y_1) \\ & 3x_1 & -x_2 & ¿6(y_2) \\ & x_1, & x_2 & \geq 0 \end{array}$$

- Problème dual

$$\begin{array}{llll} min\, z = ¿¿ & 5y_1 & +6y_2 & \\ s.c. & 2y_1 & +3y_2 & \geq 1(x_1) \\ & y_1 & -y_2 & \geq 1(x_2) \end{array}$$

Propriétés et règles de construction du dual

Théorème : le problème dual du problème est le problème primal

Règles de construction

Problème max	Problème min
Contrainte	Variable
$\leq$	≥ 0
=	non restreinte
Variable	Contrainte
≥ 0	$\geq$
non restreinte	=

Exemple (Problème primal et dual – forme générale)

Problème primal :

$$\begin{array}{lllll} max\, z = ¿¿ & 5x_1 & +12x_2 & +4x_3 & \\ s.c. & x_1 & -x_2 & +x_3 & \leq 10(y_1) \\ & 2x_1 & -x_2 & +x_3 & ¿8(y_2) \\ & x_1, & x_2, & x_3 & \geq 0 \end{array}$$

Problème dual :

$$\begin{array}{llll}
\min w = ¿¿ & 10y_1 & +8y_2 & \\
s.c. & y_1 & +2y_2 & \geq 5(x_1) \\
 & 2y_1 & -y_2 & \geq 12(x_2) \\
 & y_1 & +3y_2 & \geq 4(x_3) \\
 & y_1 & & \geq 0
\end{array}$$

2.2 Relation primal/dual

Théorème (Dualité faible)

Considérons la paire primale-duale :

$$\begin{array}{ll}
\max & c^T x \\
s.c. & Ax = b \\
 & x \geq 0
\end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
\min & b^T y \\
s.c. & A^T y \geq c \\
 & (y \text{ non restreint})
\end{array}$$

- Si x est une solution admissible du primal et y une solution admissible du dual, alors

$$c^T x \leq b^T y$$

- S'il y a égalité, alors $x$est une solution optimale du primal et y une solution optimale du dual

Théorème (Dualité forte) : Considérons la paire primale- duale :

$$\begin{array}{ll}
\max & c^T x \\
s.c. & Ax = b
\end{array}$$

$$x \geq 0$$

$$\begin{array}{ll} min & b^T y \\ s.c. & A^T y \geq c \\ & (y \, non \, restreint) \end{array}$$

- Si le primal et le dual admettent tous les deux une solution admissible, ils ont tous deux une solution finie et la même valeur objectif optimale
- Si le primal (dual) est non borné, le dual (primal) n'admet pas de solution admissible

Théorème (Complémentarité) : Considérons la paire primale – duale :

$$\begin{array}{ll} max & c^T x \\ s.c. & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} min & b^T y \\ s.c. & A^T y \geq c \\ & (y \, non \, restreint) \end{array}$$

Si x est une solution optimale du primal et y une solution optimale du dual, alors

$x_i(a_i^T y - c_i) = 0$ où a_i est la i-ème colonne de A.

En d'autres termes :

$$x_i > 0 \Rightarrow a_i^T y = c_i$$

$$a_i^T y > c_i \Rightarrow x_i = 0$$

Exemple (Résolution du dual par les règles de complémentarité)

Primal (P)

$$\begin{array}{llllll} max\, z = ¿¿ & 5x_1 & +12x_2 & +4x_3 & & : \\ s.c. & x_1 & -x_2 & +x_3 & \leq 10 (y_1) & \\ & 2x_1 & -x_2 & +x_3 & ¿\, 8 (y_2) & \\ & x_1, & x_2, & x_3 & \geq 0 & \end{array}$$

Dual (D):

$$\begin{array}{llll}
min\, w = ¿¿ & 10\,y_1 & +8\,y_2 & \\
s.c. & y_1 & +2\,y_2 & \geq 5\,(x_1) \\
 & 2\,y_1 & -y_2 & \geq 12\,(x_2) \\
 & y_1 & +3\,y_2 & \geq 4\,(x_3) \\
 & y_1 & & \geq 0
\end{array}$$

<u>Solution optimale de</u> (P)

$$(x_1, x_2, x_3) = \left(\frac{26}{5}, \frac{12}{5}, 0\right)$$

$$z = \frac{274}{5}$$

2.3 <u>Interprétation économique de la dualité</u>

- La forme canonique d'un programme linéaire peut être interprétée comme un problème d'allocation de ressources
- Paire primale-duale :

$$\begin{array}{ll}
max & c^T x \\
s.c. & Ax = b \\
 & x \geq 0
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ll}
min & b^T y \\
s.c. & A^T y \geq c \\
 & y \geq 0
\end{array}$$

- Données :

c_j: Profit par unité d'activité j

b_i: Disponibilité de la ressource i

a_{ij}: Consommation de la ressource i par unité d'activité j

- Variables :

x_j: Niveau de l'activité j

y_i: Valeur d'une unité de la ressource i

Interprétation de la dualité forte

Le profit maximal est atteint si les ressources ont été exploitées complètement, i.e. jusqu’à épuisement de leur valeur.

III. PROGRAMMATION EN NOMBRES ENTIERS ET OPTIMISATION COMBINATOIRE

1. Définitions et exemples

Programmation en nombres entiers

- Programmes linéaires dans lesquels certaines (ou toutes) variables sont restreintes à des valeurs entières

- Si et seulement une partie des variables doivent être entières, on parle de programme mixte (MILP)

- Optimisation combinatoire : choix d'une solution optimale parmi un ensemble fini d'alternatives. Peut généralement se formuler comme des programmes en nombres entiers

- Problèmes très difficiles en pratique, mais solveurs de plus en plus performants

Exemple **(Sélection de projets)**.

5 projets doivent être évalués sur 3 ans. Etant donné le coût de chaque projet pour chaque année de profit obtenu par l'exécution d'un projet, décider quels projets exécutés sans dépasser le budget disponible pour chaque année.

	Coût par année			Profit
Projet	1	2	3	
1	5	1	8	20
2	4	7	10	40
3	3	9	2	20
4	7	4	1	15
5	8	6	10	30
Budget	25	25	25	

Variables

$$x_j = \begin{cases} 1\, si \leq projet\ j\, est\, sélectionné\ , \\ 0\, sinon \end{cases}$$

Formulation

$max\, z = ¿¿$	$20\,x_1$	$+40\,x_2$	$+20\,x_3$	$+15\,x_4$	$+30\,x_5$	
$s.c.$	$5\,x_1$	$+4\,x_2$	$+3\,x_3$	$+7\,x_4$	$+8\,x_5$	≤ 25
	x_1	$+7\,x_2$	$+9\,x_3$	$+4\,x_4$	$+6\,x_5$	≤ 25
	$8\,x_1$	$+10\,x_2$	$+2\,x_3$	$+x_4$	$+10\,x_5$	≤ 25
	$x_1,$	$x_2,$	$x_3,$	$x_4,$	x_5	$\in \{0,1\}$

Exemple(Problème avec coûts fixes)

- 3 compagnies de téléphone offrent des tarifs différents pour les communications longue distance

Compagnie	*Abonnement*	*Prix/minute*
1	16	0.25
2	25	0.21
3	18	0.22

- Trouver le plan d'abonnement optimal pour 200 minutes de communication/mois.

Variables

$$x_i : minutes\ de\ communication\ avec\ la\ compagnie\ i$$

$$y_i = \begin{cases} 1\, si\ un\ abonnement\ est\ pris\ auprès\ de\ la\ compagnie\ i \\ 0\, sinon \end{cases}$$

Formulation

$$min\, z = 0.25\,x_1 + 0.21\,x_2 + 0.22\,x_3 + 16\,y_1 + 25\,y_2 + 18\,y_3$$

$$
\begin{array}{lllll}
s.c. & x_1 & +x_2 & +x_3 & ¿200 \\
 & x_1 & & & \leq 200\, y_1 \\
 & & x_2 & & \leq 200\, y_2 \\
 & & & x_3 & \leq 200\, y_3 \\
 & x_1, & x_2, & x_3 & \geq 0 \\
 & y_1, & y_2, & y_3 & \in \{0,1\}
\end{array}
$$

Exemple de **(Voyageur commerce)**

- Un représentant doit visiter n villes une et une seule fois, et revenir à sa ville de départ, en minimisant le coût total du trajet
- Le problème revient à trouver un tour de coût minimum passant une et une seule fois par chacun des nœuds d'un graphe. Le coût d'utilisation de l'arc (i, j) est c_{ij}

Variables

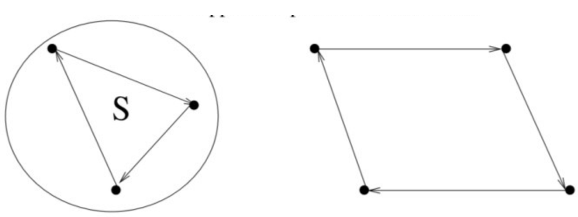
$$x_{ij} = \begin{cases} 1\; si\, l'\, arc\,(i, j)\, appartient\, au\, tour\, optimal \\ 0\; sinon \end{cases}$$

Contraintes

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1,\ i = 1, \ldots, n$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1,\ j = 1, \ldots, n$$

Problème : apparition possible de sous- tours



$$\sum_{i,j \in S} x_{ij} \leq |S| - 1,\ \varnothing \neq S \neq \{1, \ldots, n\}$$

Formulation

$$min\, z = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij}\, x_{ij}$$

$s.c$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1\,;\, i = 1, \ldots, n$$

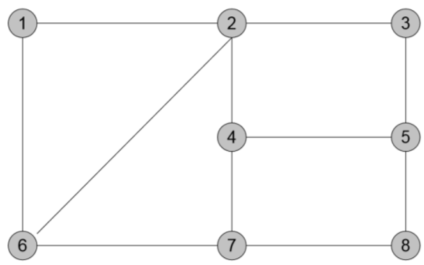
$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1\,;\, j = 1, \ldots, n$$

$$\sum_{i,j \in S} x_{ij} \leq |S| - 1\,;\, \emptyset \neq S \neq \{1, \ldots, n\}$$

$$x_{ij} \in \{0,1\}\,;\, i = 1, \ldots, n,\, j = 1, \ldots, n$$

Exemple (Problème de couverture)

Le département de sécurité d'un campus veut installer des téléphones d'urgence. Chaque rue doit être servie par un téléphone, le but étant de minimiser le nombre de téléphones à installer (installation aux carrefours).



Formulation

$$
\begin{array}{llllllllll}
min\, z = ¿ & x_1 & +x_2 & +x_3 & +x_4 & +x_5 & +x_6 & +x_7 & +x_8 & \\
s.c. & x_1 & +x_2 & & & & & & & \geq 1 \\
 & & x_2 & +x_3 & & & & & & \geq 1 \\
 & & & & x_4 & +x_5 & & & & \geq 1 \\
 & & & & & & x_6 & +x_7 & & \geq 1 \\
 & & & & & & & x_7 & +x_8 & \geq 1
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ccccccccc}
x_1 & & & & & +x_6 & & & \geq 1 \\
& x_2 & & & & +x_6 & & & \geq 1 \\
& x_2 & & +x_4 & & & & & \geq 1 \\
& & & x_4 & & & +x_7 & & \geq 1 \\
& & x_3 & & +x_5 & & & & \geq 1 \\
& & & & x_5 & & & +x_8 & \geq 1 \\
x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & x_5, & x_6, & x_7, & x_8, & \in \{0,1\}
\end{array}
$$

Contraintes disjonctives

- Dans un programme linéaire, toutes les contraintes doivent être satisfaites simultanément
- Parfois, il est nécessaire de modéliser le fait qu'une contrainte parmi un ensemble doit être satisfaite. Si les contraintes de l'ensemble sont mutuellement incompatibles, on parle de contraintes disjonctives.

Exemple (contraintes disjonctives)

- Une machine est utilisée pour 3 tâches différentes. Pour chaque tâches i, une durée p_i et une date limite d_i sont données, ainsi qu'une par jour de retard.

Tâche	Durée	Limite	Pénalité
1	5	25	19
2	20	22	12
3	15	35	34

- Comment arranger les tâches sur la machine pour minimiser la pénalité totale ?
- Variables : x_i: temps de fin de la tâche $i\left(x_i \geq p_i\right)$
- Deux tâches i et j ne peuvent être exécutées simultanément, donc

$$x_i \geq x_j + p_i \, ou \, x_j \geq x_i + p_j$$

- Pour introduire ces contraintes disjonctives, nous faisons appel à des variables binaires auxiliaires :

$$y_{ij} = \begin{cases} 1 \, si \, i \, précède \, j \\ 0 \, si \, j \, précède \, i \end{cases}$$

$$x_i - x_j + M \, y_{ij} \geq p_i$$

$$x_j - x_i + M \left(1 - y¿¿ij\right) \geq p_j ¿$$

- Contrainte de date limite : introduction d'une variable d'écart non restreinte

$$x_i + s_i^{+¿ - s_i^{-¿ = d_i ¿}}¿$$

$$s_i^{+¿, s_i^{-¿ \geq 0 ¿}}¿$$

Objectif : $min \, z = 19 s_1^{-¿+12 s_2^{-¿+34 s_3^{-¿}¿}}¿$

<u>Formulation :</u>

$$\begin{array}{lllllllll}
min \, z = ¿¿ & & & & 19 s_1^{-¿¿} & +12 s_2^{-¿¿} & +34 s_3^{-¿¿} & & \\
s.c. & x_1 & -x_2 & & +M \, y_{12} & & & \geq 5 \\
 & -x_1 & +x_2 & & -M \, y_{12} & & & \geq 20 - M \\
 & x_1 & & -x_3 & & +M \, y_{13} & & \geq 5 \\
 & -x_1 & & +x_3 & & -M \, y_{12} & & \geq 15 - M \\
 & & x_2 & -x_3 & & & +M \, y_{23} & \geq 20 \\
 & & -x_2 & +x_3 & & & -M \, y_{23} & \geq 15 - M \\
 & x_1 & & & +s_1^{+¿ - s_1^{-¿¿}} & & & ¿25 \\
 & & x_2 & & & +s_2^{+¿ - s_2^{-¿¿}} & & ¿22 \\
 & & & x_3 & & & +s_3^{+¿ - s_3^{-¿¿}} & ¿35
\end{array}$$

$$x_1, \quad x_2, \quad x_3, \quad s_1^{+}, s_1^{-}, \quad s_2^{+}, s_2^{-}, \quad s_3^{+}, s_3^{-} \quad \geq 0$$

$$x_1 \geq 5$$

$$x_2 \geq 20$$

$$x_3 \geq 15$$

$$y_{12}, \quad y_{13}, \quad y_{23} \quad \in \{0,1\}$$

2. <u>Complexité des problèmes et efficacité des algorithmes</u>

<u>Problèmes faciles et difficiles</u>

- La théorie de la complexité s'attache à classifier les problèmes selon leur difficulté
- Un problème est facile s'il existe un algorithme efficace pour le résoudre
- Exemples de problèmes « faciles » : programmation linéaire, affectation, plus courts chemins,…
- Un problème est difficile s'il appartient à la classe des problèmes $NP-complets$, pour lesquels il est peu probable de trouver un jour un algorithme efficace
- Exemple de problèmes « difficiles » : programmes en nombres entiers, voyageur de commerce,…

<u>Algorithmes efficaces et explosion combinatoire</u>

- L'efficacité d'un algorithme est mesurée par l'ordre de grandeur du nombre d'opérations élémentaires qu'il effectue en fonction de la taille des données
- Un algorithme sera efficace si le nombre d'opérations élémentaires est polynomial (i.e. borné supérieurement par un polynôme) en taille de problème

n	$\ln n+1$	n	n^2	n^3	2^n
1	1.000	1	1	1	2
2	1.301	2	4	8	4

3	1.477	3	9	27	8
5	1.699	5	25	125	32
10	2.000	10	100	1000	1024
20	2.301	20	400	8000	1048576
50	2.699	50	2500	125000	1.12×10^{15}
100	3.000	100	10000	1000000	1.27×10^{30}

- Autre perspective : supposons que trois ordinateurs M_1, M_2 et M_3 effectuent respectivement 10000,20000 et 40000 opérations par seconde.
- Quelle taille maximum de problème $n$peut-on résoudre en une minute par des algorithmes effectuant respectivement $n, n^2, n^3 et\, 2^n$ opérations ?

Ordinateur	n	n^2	n^3	2^n
M_1	600000	775	84	19
M_2	1200000	1095	106	20
M_3	2400000	1549	134	21

3. **Problème polynomiaux**

3.1 **Le problème d'affectation**

Le problème d'affectation

- Exemple de problème combinatoire pour lequel il existe un algorithme efficace
- La meilleure personne pour chaque tâche
- n personnes doivent effectuer n tâches
- Un coût c_{ij} est associé à l'affectation de la personne i à la tâche j

Formulation du problème d'affectation

$$\min z = ¿ \quad \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

$$s.c. \quad \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 \qquad i=1,\ldots,n$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1 \qquad j=1,\ldots,n$$

$$x_{ij} \in \{0,1\} \qquad i=1,\ldots,n, j=1,\ldots,n$$

- Propriété : la relaxation linéaire du problème est toujours entière
- Algorithme : **méthode hongroise**

Exemple : **(problème d'affectation).**

Un père propose 3 travaux à ses enfants : tondre la pelouse, peindre le garage et laver la voiture. Il demande à chaque enfant combien il voudrait être payé pour chaque travail.

	Tondre	Peindre	Laver
John	15	10	9
Karen	9	15	10
Terri	10	12	8

Méthode hongroise

- Sélectionner le prix minimum dans chaque ligne

	Tondre	Peindre	Laver	
John	15	10	9	9
Karen	9	15	10	9
Terri	10	12	8	8

- Soustraire ce prix de chaque ligne et sélectionner le prix minimum dans chaque colonne

	Tondre	Peindre	Laver	
John	6	1	0	9
Karen	0	6	1	9
Terri	2	4	0	8
	0	1	0	

- Soustraire ce prix de chaque colonne

	Tondre	Peindre	Laver	
John	6	**0**	0	9
Karen	**0**	5	1	9
Terri	2	3	**0**	8
	0	1	0	

- Les « 0 »en gras donnent une affectation admissible optimale
- L'optimalité est assurée par la valeur des variables duales (en rouge)
- Nombre d'opérations : $O\left(n^2\right)$
- Il arrive que les valeurs nulles du tableau ne permettent pas de trouver de solution admissible

1	4	6	3
9	7	10	9
4	5	11	7
8	7	8	5

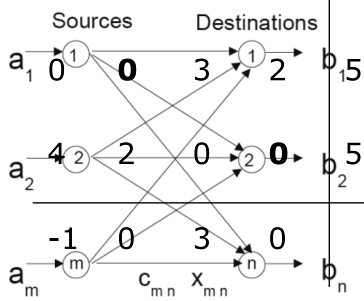
0	3	2	2	1
2	0	0	2	7
0	1	4	3	4
3	2	0	0	5
0	0	3	0	

- Sélectionner un nombre minimum de lignes et colonnes couvrant tous les 0

0	3	2	2	1
2	0	0	2	7
0	1	4	3	4
3	2	0	0	5
0	0	3	0	

- Sélectionner le plus petit élément non couvert, le soustraire à tous les éléments non couverts et l'ajouter aux intersections.

0	2	1	1	2
3	0	**0**	2	7
0	**0**	3	2	5
4	2	0	**0**	5
-1	0	3	0	



- Répéter jusqu'à trouver une solution admissible

3.2 **Modèle de transport**

- Un produit doit être transporté des sources (usines) vers des destinations (dépôts, clients)
- Objectif : déterminer la quantité envoyée de chaque source à chaque destination en minimisant les coûts de transport. Les coûts sont proportionnels aux quantités transportées
- Contraintes d'offre limitée aux sources et de demande à satisfaire aux destinations.

Exemple **(modèle de transport)**

- Une firme automobile a trois usines à Los Angeles, Détroit et New Orleans, et deux centres de distribution à Denver et Miami
- Les capacités des trois usines sont de 1000, 1500 et 1200 respectivement, et les demandes aux centres de distribution sont de 2300 et 1400 voitures.
- Coûts :

	Denver	Miami
Los Angeles	80	215
Détroit	100	108
New Orléans	102	68

Formulation :

$$
\begin{array}{rcccccccl}
\min z = & 80x_{11} & +215x_{12} & +100x_{21} & +108x_{22} & +102x_{31} & +68x_{32} & & \\
\text{s.c.} & & & & & & & & \\
(Los\ Angeles) & x_{11} & +x_{12} & & & & & = & 1000 \\
(Detroit) & & & x_{21} & +x_{22} & & & = & 1500 \\
(New\ Orleans) & & & & & x_{31} & +x_{32} & = & 1200 \\
(Denver) & x_{11} & & +x_{21} & & +x_{31} & & = & 2300 \\
(Miami) & & x_{12} & & +x_{22} & & +x_{32} & = & 1400 \\
 & x_{11}, & x_{12}, & x_{21}, & x_{22}, & x_{31}, & x_{32} & \geq & 0
\end{array}
$$

Représentation tableau

	Denver	Miami	Offre
Los Angeles	80 *1000*	215	1000
Detroit	100 *1300*	108 *200*	1500
New Orleans	102	68 *1200*	1200
Demande	2300	1400	

Problèmes non balancés

- Si l'offre n'est p   as égale à la demande : modèle non balancé.
- Introduction d'une source ou destination artificielle.

	Denver	Miami	Offre
Los Angeles	80 *1000*	215	1000
Detroit	100 *1300*	108	1300

Variantes

Le modèle de transport n’est pas limité au transport des produits entre des sources et destinations géographiques

Exemple **(Modèle de production)**

- Une société fabrique des sacs à dos, pour lesquels la demande arrive de mars à juin et est de 100, 200, 300 unités, respectivement
- La production pour ces mois est de 50, 180, 280 et 270, respectivement
- La demande peut être satisfaite
  1- Par la production du mois courant (4000 Ariary/sac) :
  2- Par la production d’un mois précédent (+500Ariary/ sac/ mois pour le stockage) ;
  3- Par la production d’un mois suivant (+2000 Ariary/ sac/ mois de pénalité de retard)

Correspondances avec le modèle de transport

Transport	Production - stocks
Source i	Période de production i
Destination j	Période de demande j
Offre à la source i	Capacité de production à la période i
Demande à la destination j	Demande pour la période j
Coût de transport de i à j	Coût unitaire (production + stock + pénalité) pour une production en période i pour la période j

4. Méthodes de Branch-and-Bound

4.1 Branch-and-Bound pour les problèmes en nombres entiers

- Les méthodes de branch-and-bound sont des méthodes basées sur une énumération « intelligente » des solutions admissibles d'un problèmes d'optimisation combinatoire

- Idée : prouver l'optimalité d'une solution en partitionnant l'espace des solutions

- « *diviser pour régner* »

- Application à la programmation linéaire en nombre entiers : utilise toute la puissance de la programmation linéaire pour déterminer des bonnes bornes

- On appelle relaxation linéaire d'un programme linéaire en nombres entiers le programme linéaire obtenu en supprimant les contraintes d'intégralité sur les variables

Programme en nombre entiers

$$(P)\, max\, c^T x$$

$$s.c.\, Ax \leq b$$

$$x = 0, entier.$$

Relaxation linéaire

$$(LP)\, max\, c^T x$$

$$s.c.\, Ax \leq b$$

$$x = 0$$

Propriété de la relaxation linéaire

- La valeur de la solution optimale de LP est une borne supérieure sur la valeur de la solution optimale de P

- La valeur d'une solution admissible de P fournit une borne inférieure sur la valeur de la solution optimale de P

- Si la solution optimale de LP est entière (donc admissible pour P), elle est également la solution optimale de P

Branchement

- La solution de LP n'est pas entière, soit x_i une variable prenant une valeur fractionnaire $x_i^{¿}$ dans la solution optimale de LP

- Le problème peut être divisé en deux sous-problèmes en imposant

$$x_i \leq \lfloor x_i^{¿} \rfloor \, ou \, x_i \geq \lfloor x_i^{¿} \rfloor + 1$$

Où $\lfloor x_i^{¿} \rfloor$ est le plus grand entier inférieur à $x_i^{¿}$

- La solution optimale de P est la meilleure des solutions optimales des deux problèmes

$$(P_1) \max c^T x$$

$$s.c. \, Ax \leq b$$

$$x_i \leq \lfloor x_i^{¿} \rfloor$$

$$x \geq 0, entier$$

$$(P_2) \max c^T x$$

$$s.c. \, Ax \leq b$$

$$x_i \leq \lfloor x_i^{¿} \rfloor + 1$$

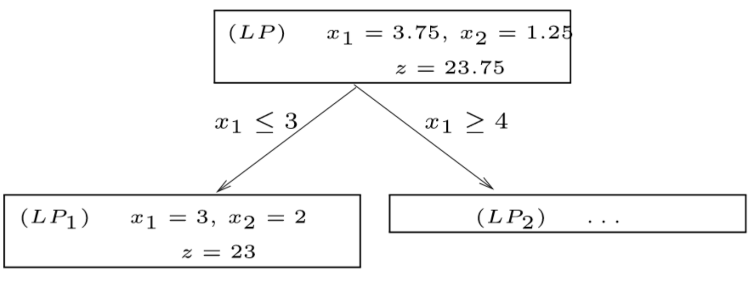
$$x \geq 0, entier$$

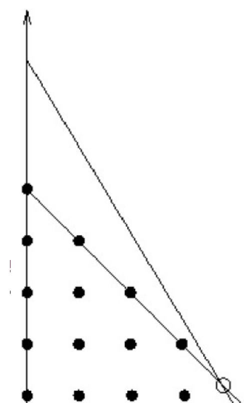
Exemple **(Branch-and-bound)**

$\max z = ¿¿$	$5x_1$	$+4x_2$	
$s.c.$	x_1	$+x_2$	≤ 5
	$10x_1$	$+6x_2$	≤ 45
	$x_1,$	x_2	$\geq 0, entiers$

$$(LP) \, x_1 = 3{,}75, x_2 = 1{,}25$$

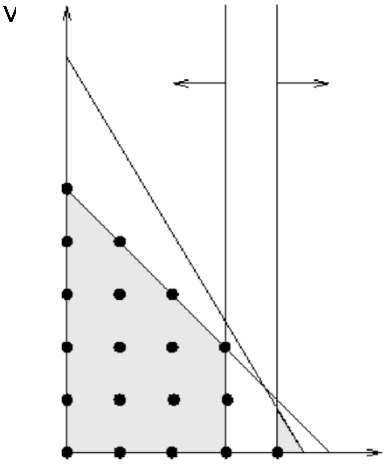
$$z = 23{,}75$$





- La solution de LP_1est une solution admissible de P et donc $z=23$ est une borne inférieure sur la valeur de la solution optimale de P

- Le nœud correspondant peut être éliminé vu qu'une solution entière optimale satisfaisant $x_1 \leq 3$ a été trouv



- La valeur de la solution de $LP, z=23{,}75$ est une borne supérieure sur la valeur de la solution optimale de P

- Vu que tous les coefficients sont entiers, on peut en déduire que la valeur de la solution optimale de P est inférieure ou égale à 23.

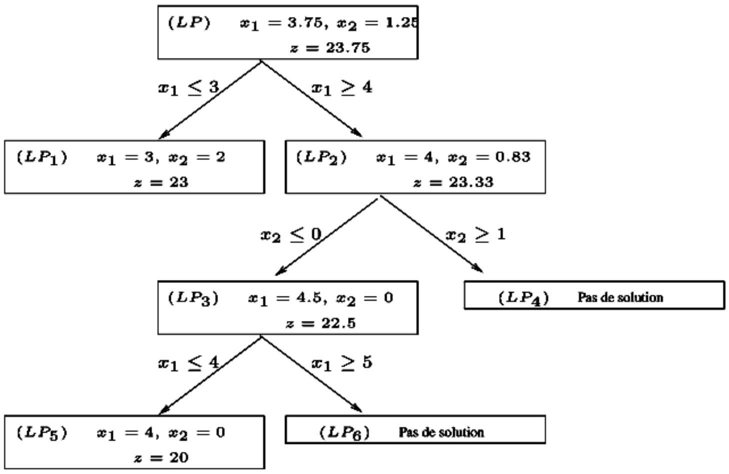
- La solution de P_1 est donc optimale pour P.

Règles de branchement

- Il n'y a pas de règle générale pour le choix de la variable de branchement et de la branche à examiner en premier.

- Ce choix peut avoir un impact important sur le nombre de nœuds à examiner dans l'arbre de branch-and-bound.

- Exemple : branchement d'abord du côté ≥ .



4.2 Branch-and-bound pour le voyageur de commerce

Formulation (rappel)

$$\min z = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

$$\text{s.c.} \quad \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 \quad i = 1, \ldots, n$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1 \quad j = 1, \ldots, n$$

$$\sum_{i, j \in S} x_{ij} \leq |S| - 1 \quad \emptyset \neq S \neq \{1, \ldots, n\}$$

$$x_{ij} \in \{0,1\} \quad i = 1, \ldots, n;\ j = 1, \ldots, n$$

- Si on retire les contraintes d'élimination de sous-tours, on obtient le problème d'affectation.
- Cette relaxation a une solution entière qui peut être obtenue par exemple avec la méthode hongroise.
- Le branchement est effectué de manière à éliminer les sous-tours.
- La valeur de la solution optimale du problème d'affectation (AP) est une borne inférieure sur la valeur de la solution optimale du TSP.
- Le coût d'un tour fournit une borne supérieure sur la valeur de la solution optimale.

- Si la solution optimale de AP est un tour (i.e. sans sous-tour), elle est également la solution optimale du TSP.
- Si un sous-tour apparaît :

$$x_{i_1 i_2} \text{¿} x_{i_2 i_3} = x_{i_3 i_4} = \ldots = x_{i_{k-1} i_k} = x_{i_k i_1} = 1$$

- Dans une solution admissible, un de ces arcs doit être absent, donc

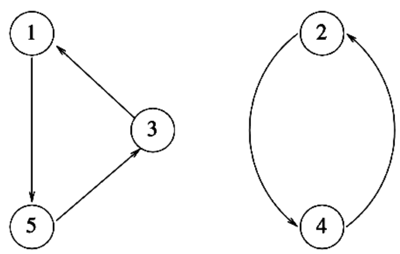
$$x_{i_1 i_2} = 0 \; ou \; x_{i_2 i_3} = 0 \; ou \ldots ou \; x_{i_{k-1} i_k} = 0 \; ou \; x_{i_k i_1} = 0$$

- Chacune de ces conditions va correspondre à une branche de l'arbre de branch-and-bound.

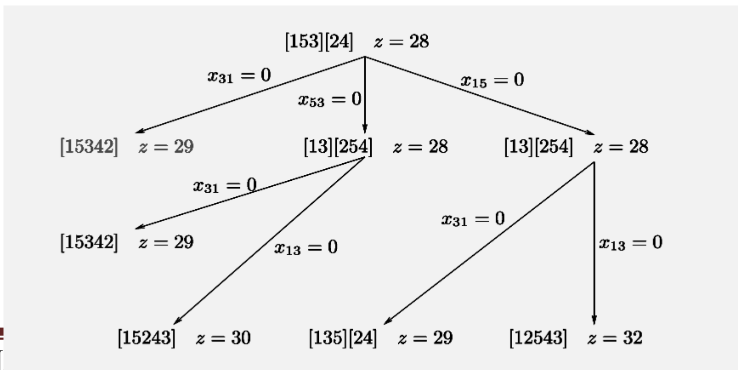
Exemple **(voyageur de commerce)**.

	1	2	3	4	5
1	∞	8	2	10	3
2	9	∞	20	9	7
3	6	40	∞	7	5
4	8	4	2	∞	5
5	9	10	6	9	∞

Solution du problème d'affectation



[153][24] $z = 28$



4.3 Branch-and-bound pour les contraintes disjonctives

- On peut utiliser une approche classique pour les problèmes en nombres entiers en introduisant des variables supplémentaires (voir formulation en début de partie).

- On peut également prendre comme relaxation le problème sans les contraintes disjonctives, et brancher sur les contraintes non satisfaites.

Exemple (contraintes disjonctives)

- Une machine est utilisée pour 3 tâches différentes. Pour chaque tâches i, une durée p_i et une date limite d_i sont données, ainsi qu'une pénalité par jour de retard.

âche	Durée	Limite	Pénalité
1	5	25	19
2	20	22	12
3	15	35	34

- Comment arranger les tâches sur la machine pour minimiser la pénalité totale ?

Relaxation du problème

$$\begin{array}{llllllll}
\min\ z = & & & & 19s_1^- & +12s_2^- & +34s_3^- & \\
\text{s.c.} & x_1 & & & +s_1^+ - s_1^- & & & = 25 \\
& & x_2 & & & +s_2^+ - s_2^- & & = 22 \\
& & & x_3 & & & +s_3^+ - s_3^- & = 35 \\
& x_1, x_2, x_3, & & & s_1^+,\ s_1^-, & s_2^+,\ s_2^-, & s_3^+,\ s_3^- & \geq 0 \\
& x_1 & & & & & & \geq 5 \\
& & x_2 & & & & & \geq 20 \\
& & & x_3 & & & & \geq 15
\end{array}$$

- Branchement sur $x_i \geq x_j + p_i \ ou\ x_j \geq x_i + p_j$

- Solution de la relaxation : ordonnancement « au plus tôt ».

Nœud 0

Nœuds à Relaxation : 0 Borne sup. : $+\infty$.

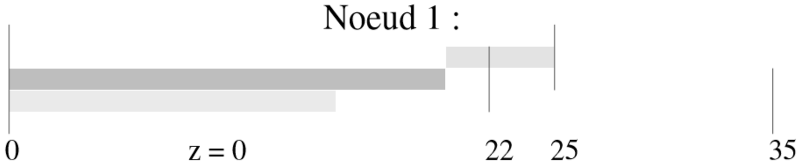
$$1 : x_1 - x_2 \geq 5$$

$$2 : x_2 - x_1 \geq 20$$

Nœud 1

$$1 : \quad x_1 - x_2 \geq 5$$

Noeud 1 :



Relaxation : 0 Borne sup. : $+\infty$.

Nœuds à examiner :

$$2 : x_2 - x_1 \geq 20$$

$$3 : x_1 - x_2 \geq 5$$

$$x_2 - x_3 \geq 20$$

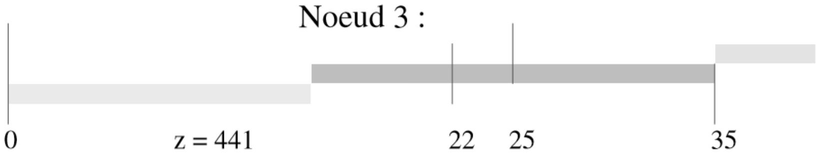
$$4 : x_3 - x_2 \geq 15$$

Nœud 3

$$3 : x_1 - x_2 \geq 5$$

$$x_2 - x_3 \geq 20$$

Noeud 3 :



Relaxation : 441 Borne sup. : 441

Nœuds à examiner :

$$2 : x_2 - x_1 \geq 20$$

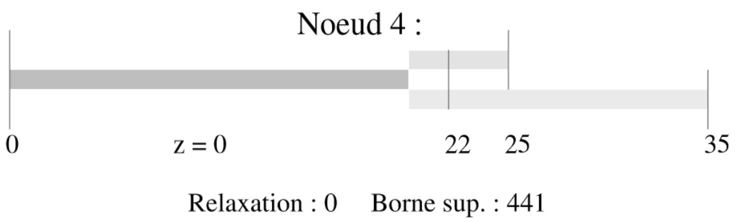
$$4 : x_1 - x_2 \geq 5$$

$$x_3 - x_2 \geq 15$$

Nœud 4

$$4 : x_1 - x_2 \geq 5$$

$$x_3 - x_2 \geq 15$$



Nœuds à examiner :

$$2 : x_2 - x_1 \geq 20$$

$$5 : x_1 - x_2 \geq 5$$

$$x_3 - x_2 \geq 15$$

$$x_1 - x_3 \geq 5$$

$$6 : x_1 - x_2 \geq 5$$

$$x_3 - x_2 \geq 15$$

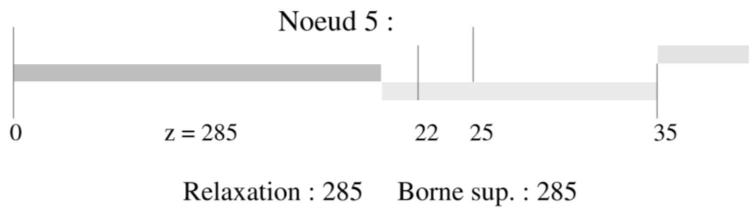
$$x_3 - x_1 \geq 15$$

Nœud 5

$$x_1 - x_2 \geq 5$$

$$x_3 - x_2 \geq 15$$

$$x_1 - x_3 \geq 5$$



$$2 : x_2 - x_1 \geq 20$$

$$6 : x_1 - x_2 \geq 5$$

$$x_3 - x_2 \geq 15$$

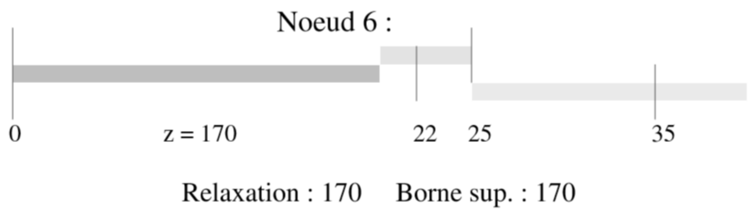
$$x_3 - x_1 \geq 15$$

<u>Nœud 6</u>

$$6 : x_1 - x_2 \geq 5$$

$$x_3 - x_2 \geq 15$$

$$x_3 - x_1 \geq 15$$

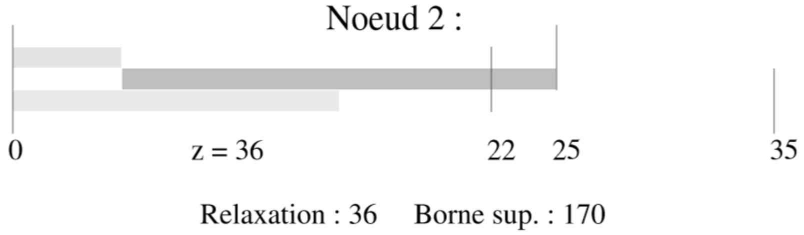


<u>Nœuds à</u>

$$2 : x_2 - x_1 \geq 20$$

<u>Nœud 2</u>

$$2 : x_2 - x_1 \geq 20$$



Nœuds à examiner :

$$7: x_2 - x_1 \geq 20$$

$$x_2 - x_3 \geq 20$$

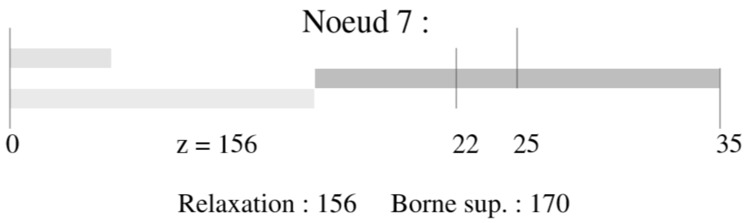
$$8: x_2 - x_1 \geq 20$$

$$x_3 - x_2 \geq 15$$

Nœud 7

$$7: x_2 - x_1 \geq 20$$

$$x_2 - x_3 \geq 20$$



Nœuds à examiner :

$$8: x_2 - x_1 \geq 20$$

$$x_3 - x_2 \geq 15$$

$$9: x_2 - x_1 \geq 20$$

$$x_2 - x_3 \geq 20$$

$$x_1 - x_3 \geq 5$$

$$10: x_2 - x_1 \geq 20$$

$$x_2 - x_3 \geq 20$$

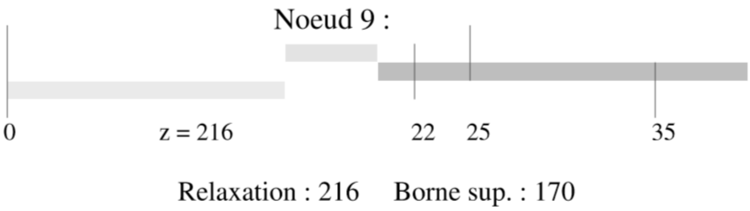
$$x_3 - x_1 \geq 15$$

Nœud 9

$$9: x_2 - x_1 \geq 20$$

$$x_2 - x_3 \geq 20$$

$$x_1 - x_3 \geq 5$$



Nœuds à examiner :

$$8: x_2 - x_1 \geq 20$$

$$x_3 - x_2 \geq 15$$

$$10: x_2 - x_1 \geq 20$$

$$x_2 - x_3 \geq 20$$

$$x_3 - x_1 \geq 15$$

Nœud 10

$$10: x_2 - x_1 \geq 20$$

$$x_2 - x_3 \geq 20$$

$$x_3 - x_1 \geq 15$$

Noeud 10 :

Relaxation : 216 Borne sup. : 170

Nœuds à examiner :

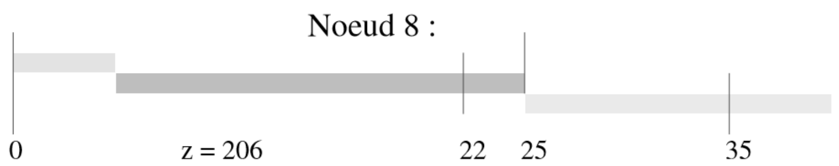
$$8: x_2 - x_1 \geq 20$$

$$x_3 - x_2 \geq 15$$

Nœud 8

$$8: x_2 - x_1 \geq 20$$

$$x_3 - x_2 \geq 15$$



Relaxation : 206 Borne sup. : 170

Solution optimale : 170 Ordre des tâches : 2, 1, 3 (nœud 6)

5. Méthodes heuristiques

5.1 Introduction

- La plupart des problèmes pratiques sont NP-complets.
- Nécessité de trouver des « bonnes » solutions rapidement.
- Heuristiques ou algorithmes d'approximation.

Raisons de choisir une heuristique

- Une solution doit être trouvée rapidement (secondes/ minutes).
- Instance trop grande ou compliquée : impossible à formuler comme un problème en nombres entiers de taille raisonnable.
- Impossibilité pour Branch-and-Bound de trouver une (bonne) solution admissible.

- Pour certaines classes de problèmes : trouver des solutions admissibles est facile (structure du problème) mai une approche généraliste de programmation en nombres entiers n'est pas efficace.

Questions à se poser….

- Doit-on accepter n'importe quelle solution, ou doit-on se demander a posteriori à quelle distance de l'optimalité on se trouve ?
- Peut-on garantir a priori que l'heuristique va produire une solution à $\in$ (ou α%) de l'optimal ?
- Peut- on dire a priori que, pour la classe de problèmes considérée, l'heuristique va produire en moyenne une solution à α% de l'optimal ?

Contexte général

Problème d'optimisation combinatoire

$$\min F(x)$$

$$s.c. x \in X$$

Avec F une fonction à valeurs réelles définie sur X,

X l'ensemble des solutions admissibles.

Hypothèse

X de trop grande taille pour permettre l'énumération.

5.2 Heuristiques de construction

- Objectif : construire une (bonne) solution admissible.
- Se baser sur la structure du problème pour générer une solution.
- Généralement : méthodes gloutonnes. Construire la solution en ajoutant élément, choix définitifs (pas de retour en arrière).
- Défaut : méthodes « aveugles », un mauvais choix fait en cours de construction ne peut pas être « défait ».
- Exemples :
  - Problème de transport (coin nord-ouest, moindres coûts, VAM)
  - Voyageur de commerce (plus proche voisin, meilleure insertion)
  - Heuristique gloutonne pour le problème de sac-à-dos.

Voyageur de commerce : plus proche voisin

- Partir d'un sommet quelconque, par exemple le sommet 1
- Tant qu'il reste des sommets libres , faire :
    - Connecter le dernier sommet atteint au sommet libre le plus proche
- Relier le dernier sommet au sommet 1

<u>Exemple</u> (voyageur de commerce).

	1	2	3	4	5
1	∞	8	2	10	3
2	9	∞	20	9	7
3	6	40	∞	7	5
4	8	4	2	∞	5
5	9	10	6	9	∞

Tour : $1 \rightarrow 3 \rightarrow 5 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1$

Coût : 29

<u>Remarque</u> : si démarrage du nœud 2 :

Tour :$2 \rightarrow 5 \rightarrow 3 \rightarrow 1 \rightarrow 4 \rightarrow 2$

Coût : 33

<u>Voyageur de commerce</u> : meilleure insertion

- Partir d'un cycle μ réduit à une boucle sur le sommet 1 (par exemple)
- Tant qu'il y a des sommets libres, faire :
    - Pour tous les sommets libres j, chercher la position d'insertion entre 2 sommets i, k du cycle μ minimisant $M = c_{ij} + c_{jk} - c_{ik}$
    - Insérer le sommet qui minimise l'accroissement du coût

<u>Exemple</u> (voyageur de commerce).

	1	2	3	4	5
1	∞	8	2	10	3
2	9	∞	20	9	7
3	6	40	∞	7	5
4	8	4	2	∞	5
5	9	10	6	9	∞

1. $1 \to 1, k=3, M=8$
2. $1 \to 3 \to 1, k=5, M=7$
3. $1 \to 5 \to 3 \to 1, k=4, M=5$
4. $1 \to 5 \to 4 \to 3 \to 1, k=2, M=10$
5. $1 \to 5 \to 2 \to 4 \to 3 \to 1$,coût : 30

Le problème de sac-à-dos

- Le problème de sac-à-dos revient à décider quels objets mettre dans un contenant ayant une capacité donnée W de manière à maximiser le profit total des objets chosis.
- Chaque objet a un profit $p_i \geq 0$ et un poids $w_i \geq 0$.

Problème de sac-à-dos

$$z = max \sum_{j=1}^{n} p_j x_j$$

$$s.c. \sum_{j=1}^{n} w_j x_j \leq W$$

$$x_j \in \{0,1\} \; j=1,\ldots,n$$

Heuristique gloutonne pour le problème de sac-à-dos
Idée de base : les objets les plus intéréssants sont ceux qui ont un petit poids pour un grand profit, i.e. un rapport $\frac{p_i}{w_i}$ grand.

Heuristique gloutonne pour le problème de sac-à-dos

1. Ordonner les objets par ordre décroissant de $\frac{p_i}{w_i} \to$ ordre $i_1, \ldots, i_n$.
2. $S = \varnothing$
3. Pour $t=1,\ldots,,n$ faire :

Si $w(S)+w_{¿} \leq W$, $alors\, S \coloneqq S \cup \{i_t\}$.

Analyse de l'heuristique

Résolution de la relaxation linéaire

1. Ordonner les objets par ordre décroissant de $\frac{p_i}{w_i} \rightarrow$ ordre $i_1, \ldots, i_n$
2. $S = \varnothing, t = 1$.
3. Tant que $w(S)+w_{¿} \leq W$:

   $S \coloneqq S \cup \{i_t\}$.
4. Compléter la capacité avec la fraction nécéssaire de l'objet i_t.

- Soit S la solution de l'heuristique gloutonne, z_{LP} la valeur de la relaxation linéaire et $p_0 = max_{i=1,\ldots,n} p_i$.
- Considérons $\bar{z} = max\{p(S), p_0\}$
- $\bar{z} = max\{p(S), p_0\} \geq \frac{p(S)+p_0}{2} \geq \frac{z_{LP}}{2} \geq \frac{z_{OPT}}{2}$

5.3 Recherche locale

- Heuristique de construction : utiles pour trouver une première solution admissible, mais souvent de mauvaise qualité.
- Idée : essayer d'améliorer cette solution en tenant compte de la structure du problème.
- Etant donné une solution, définition d'une notion de voisinage de cette solution.
- Méthode de descente : recherche du meilleur voisin jusqu'au moment où aucune amélioration n'est possible.
- Pour toute solution $x \in X$, on définit $V(x) \subseteq X$ comme étant l'ensemble des solutions voisines de x ($x \notin V(x)$).

Algorithme de descente

Initialisation : $x_0 \in X$ solution initiale.

Etape n: soit $x_n \in X$ la solution courante ;

Sélectionner $x^{¿} \in V(x_n)$;

Si F($x^{¿}¿ \leq F(x_n)$:

$x_{n+1} \coloneqq x^{¿}$; passer à l'étape $n+1$.

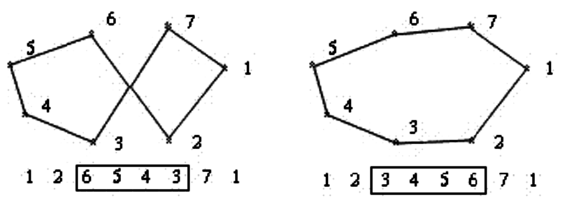
Sinon x_n meilleure solution trouvée ; stop.

En général (si pas trop long), choix du meilleur élément du voisinage.

Voyageur de commerce : k-opt

Voisins d'un tour : tous les tours qui peuvent s'obtenir en retirant k arêtes et en reconnectant de la meilleure manière possible.

Exemple (2-opt).



5.4 Méta-heuristiques

- Inconvénient principal des algorithmes de descente : s'arrête, le plus souvent, dans un optimum local et non dans un optimum global.

- Idée générale des méta-heuristiques : autoriser une détérioration temporaire de l'objectif, permettant ainsi de quitter des minimums locaux tout en maintenant en général une « pression » favorisant les solutions qui améliorent l'objectif.

Caractéristiques des méta-heuristiques

- Plus simples et plus rapides à mettre en œuvre quand l'exigence de qualité de la solution n'est pas trop importante ;

- Plus souples dans les problèmes réels (contraintes non formulées dès le départ) ;

- S'adaptent plus facilement à des contraintes additionnelles venant du terrain ;

- Fournissent des solutions et des bornes qui peuvent être utiles dans des méthodes exactes.

Le recuit simulé (simulated annealing)

Idée de base provient de l'opération de recuit (annealing), courante en sidérurgie et dans l'industrie du verre.

Recuit en sidérurgie

Après avoir subi des déformations au métal, on réchauffe celui-ci à une certaine température, de manière à faire disparaître les tensions internes causées par les déformations, puis on laisse refroidir lentement.

L'énergie fournie par le réchauffement permet aux atomes de se déplacer légèrement et le refroidissement lent fige.

<u>Application au recuit simulé à l'optimisation</u>

- Modification de l'heuristique de descente :
- Au lieu de ne permettre que des mouvements (des changements de solution courante) qui diminuent l'énergie (la fonction objective), on autorise des augmentations, même importantes, de l'énergie au début de l'exécution de l'algorithme ;
- Puis, à mesure que le temps passe, on autorise ces augmentations de plus en plus rarement (la température baisse).
- Finalement, le système « gèle » dans un état d'énergie minimale.

<u>Recuit simulé</u>

<u>Initialisation</u> : $x_0 \in X$ solution initiale, $\widehat{F} := F(x_0)$.

<u>Etape</u> n: soit $x_n \in X$ la solution courante ;

Tirer au sort une solution $x^{¿} \in V(x_n)$;

si $F(x^{¿}) \leq F(x¿¿n) : x_{n+1} := x^{¿}¿$;

si $F(x^{¿}) < \widehat{F} : \widehat{F} := F(x^{¿})$

sinon, tirer un nombre q au hasard entre 0 et 1 ;

si $q \leq p : x_{n+1} := x^{¿}$;

sinon : $x_{n+1} := x_n$;

si la règle d'arrêt n'est pas satisfaite, passer à l'étape $n+1$;

sinon, stop.

<u>Paramètre de recuit simulé</u>

- La probabilité p est généralement une fonction $p(T, \Delta F)$ dépendant d'un paramètre T (température), et de la dégradation de l'objectif $\Delta F = F(x^{¿}) - F(x_n)$ résultant du remplacement de x_n par $x^{¿}$ comme solution courante.
- Analogie avec les systèmes physiques (distribution de Boltzmann) :

$$p(T,\Delta F)=e^{\frac{-\Delta F}{T}}$$

- Evolution de la température : diminue toutes les L itérations.

  $T_k=\alpha T_{k-1}=\alpha^k T_0$

- T_0 choisi par simulation de sorte qu'au début de l'exécution de l'algorithme, des solutions moins bonnes que la solution courante soient aisément acceptées. En général, on fixe un taux d'acceptation initial moyen des solutions plus mauvais que la solution courante.

- Exemple : taux fixé à 50%, évaluer par simulation la détérioration moyenne ¿ΔF>¿ de F (en prenant d'une solution initiale fixe).

  $T_0=¿\Delta F>\frac{¿}{\ln 2}(\Rightarrow p=0.5)¿$

- La longueur L du <u>palier de température</u> doit être déterminée en tenant compte de la taille des voisinages ; elle devrait augmenter avec la taille du problème.

- En pratique, la détermination de L est expérimentale.

- Le paramètre de décroissance géométrique de la température α est fixé, le plus souvent, aux alentours de 0.9 ou 0.95.

- Critère d'arrêt : nombre maximal d'itérations ou système est « gelé » : e.g. si la fonction F a diminué de moins de 0.1% pendant cent paliers consécutifs.

<u>Quelques observations sur le recuit simulé</u>

- Voyageur de commerce : pas concurrentiel par rapport à d'autres approches.

- En général : améliore les solutions d'une descente pure, mais très coûteux en temps calcul.

- Résultat théorique : sous certaines conditions, converge avec probabilité 1 vers une solution optimale.

- Résultat asymptotique (nombre d'itérations tendant à l'infini), peu de pertinence en pratique.

<u>Recherche tabou</u>

- Emprunte certains de ses concepts à l'intelligence artificielle (notion et utilisation de mémoire).

- Variante de la recherche locale.

- Partant de la solution courante x_n à l'étape n, on calcule la meilleure solution $x^{¿}$ dans un sous-voisinage $V^{¿}$ de $V(x_n)$. Cette solution devient la nouvelle solution courante x_{n+1}, <u>qu'elle soit meilleure ou moins bonne que la précédente.</u>

- Caractère non monotone pour éviter de rester coincé dans des minimums locaux.

- MAIS nécessité d'un mécanisme qui évite le cyclage.

<u>Listes tabou</u>

Pour éviter le cyclage, on définit une ou plusieurs listes, les <u>listes tabou,</u> qui gardent en mémoire les dernières solutions rencontrées ou des caractéristiques de celles-ci.

Le sous-voisinage $V^{¿}$de $V(x_n)$ exclut dès lors les solutions rencontrées récemment ou les solutions ayant des caractéristiques communes avec celles-ci.

Exemple (voyageur de commerce)

- Ville : $\{A, B, C, D, E\}$

- Voisinage : 2-échange (échange de deux villes dans l'ordre des visites)

- Liste tabou : positions échangées dans le cycle.

- Solutions visitées ;

$$x_n = (A, B, C, D, E)$$

$$x_{n+1} = (A, D, C, B, E) \quad \text{((2,4) devient tabou)}$$

$$x_{n+2} = (B, D, C, A, E) \quad \text{((1,4) devient tabou)}$$

$$x_{n+3} = (B, C, D, A, E) \quad \text{((2,3) devient tabou)}$$

$$x_{n+4} = (B, C, D, E, A) \quad \text{((4,5) devient tabou)}$$

- $x_{n+4} \equiv x_n$ mais OK si x_{n+5} peut être $\neq x_{n+1}$

- Si la liste est de longueur 4, les solutions

$$(B, E, D, C, A), (E, C, D, B, A), (B, D, C, E, A), (B, C, D, A, E)$$

Sont exclues pour x_{n+5}

Critère d’aspiration

Puisque les listes tabou écartent des solutions non rencontrées, on peut envisager de négliger le statut tabou de certaines solutions si un avantage suffisant en résulte.

Ceci est implémenté à l’aide de critères d’aspiration. Par exemple, on acceptera pour x_{n+1} une solution $x^{¿}$ tabou si $x^{¿}$ donne à la fonction objectif F une valeur meilleure que toutes celles obtenues jusqu’à présent.

Recherche tabou

Initialisation : $x_0 \in X$ solution initiale, $\hat{F} \coloneqq F(x_0), k=$ longueur de la liste tabou…

Etape n: soit $x_n \in X$ la solution courante ; sélectionner, dans un sous voisinage $V^{¿}$ de $V(x_n)$, la meilleure solution $x^{¿} \in$ qui soit :

Non tabou ou

Tabou, mais satisfaisant un critère d’aspiration ;

$x_{n+1} \coloneqq x^{¿}$;

Si $F(x^{¿}) < \hat{F} : \hat{F} \coloneqq F(x^{¿})$

Mettre à jour la liste tabou ;

Si la règle d’arrêt n’est pas satisfaite,

Passer à l’étape $n+1$;

Sinon, stop.

Stratégies avancées de la recherche tabou

- Succession de phases d’intensification et de phases de diversification de la recherche.
- Pénalités ou bonifications introduites dans la fonction objectif pour favoriser ou défavoriser certains types de solutions.
- Adaptation de l’ensemble des solutions candidates $V^{¿}$.
- Oscillation stratégique.

5.5 Algorithmes génétiques

- Conçus par Holland (1975) comme u modèle de système adaptif complexe capable de simuler, notamment, l’évolution des espèces.

- Presque immédiatement après, appliqués à l'optimisation de fonctions de variables réelles. Par la suite, très nombreux problèmes d'optimisation combinatoire ont été traités.

- Se distinguent du recuit et de la recherche tabou par le fait qu'ils traitent et font évoluer une population de solutions.

- Au cours d'une itération, les solutions de la population courante interagissent pour fournir la génération suivante (métaphore de la reproduction sexuée).

Description d'un algorithme génétique de base

- Les solutions sont codées de manière appropriée. Un codage élémentaire pour un problème de programmation mathématique en variables binaires est un vecteur x de 0 et de 1, où chaque composante $x_j\, j=1,\ldots,N$ représente la valeur prise par une variable.

- Pour le problème du voyageur de commerce, un codage plus usuel sera une liste ordonnée des noms (ou label) des N villes.

- Un vecteur codant une solution est souvent appelé chromosome et ses coordonnées ou sites sont appelés gènes.

- Le choix d'un codage approprié est très important pour l'efficacité des opérateurs qui seront appliqués pour faire évoluer les solutions.

- Population initiale de solutions $X^{(0)}$ (taille constante au cours de l'évolution).

- Fonction d'évaluation des solutions : en général, croissante avec la qualité de la solution (fitness function, mesurant la « santé » de l'individu solution)

- Dans un problème de maximisation (respectivement, de minimisation), ce peut être la fonction objectif (respectivement, l'opposé de la fonction objectif).

- Pour des raisons d'efficacité de l'algorithme, on peut être amené à choisir la fonction d'évaluation de manière plus sophistiquée, mais elle sera toujours croissante (respectivement, décroissante) en la valeur de l'objectif dans un problème de maximisation (respectivement, minimisation).

Algorithme génétique

Initialisation : $X^{(0)} \subset X$, population initiale.

Etape n: $X^{(n)} \subset X$, population courante ;

- Sélectionner dans $X^{(n)}$ un ensemble de paires de solutions de haute qualité ;

- Appliquer à chacune de paires de solutions sélectionnées un opérateur de croisement qui produit une ou plusieurs solutions enfants ;

- Remplacer une partie de $X^{(n)}$ formée de solutions de basse qualité par des solutions « enfants » de haute qualité ;

- Appliquer un opérateur de mutation aux solutions ainsi obtenues ; solutions éventuellement mutées si la règle d'arrêt n'est pas satisfaite,

  Passer à l'étape $n+1$;

  Sinon, stop.

Sélection

- La sélection – aussi bien celle des individus de « haute qualité » que celle des individus de « basse qualité » - comporte généralement un aspect aléatoire.

- Chaque individu x_i se voit attribuer une probabilité p_i d'être choisi d'autant plus grande que son évaluation est haute (basse, dans le cas d'une sélection de « mauvais » individus).

- On tire un nombre $r$au hasard (uniformément) entre 0 et 1. L'individu k est choisi tel que :

$$\sum_{i=1}^{k-1} p_i < r < \sum_{i=1}^{k} p_i$$

- La procédure est itérée jusqu'à ce que l'on ait choisi un nombre fixé d'individus.

Croisement

Soit deux solutions x et y sélectionnées parmi les solutions de haute qualité. Un opérateur de croisement (crossover) fabrique une ou deux nouvelles solutions x', y'en combinant x et y.

Exemple (Two-point crossover)

- x et y vecteurs 0-1 ;

- Sélectionner aléatoirement deux positions dans les vecteurs et permuter les séquences de 0 et de l figurant entre ces deux positions dans les deux vecteurs.

- Pour les vecteurs

$$x = 01101100$$

$$y = 1100101O$$

Si les positions « après 2 » et « après 5 » sont choisies, on obtient :

$x' = 01$	001	100
$y' = 11$	101	$01O$

Mutation

- Une mutation est une perturbation d' introduite pour modifier une solution individuelle, par exemple la transformation d'un 0 en un 1 inversement dans un vecteur binaire.
- En général, l'opérateur de mutation est appliqué parcimonieusement : on décide de « muter » une solution avec une probabilité assez faible (de l'ordre de quelques centièmes, tout au plus).
- Un but possible de la mutation est introduire un élément de diversification, d'innovation comme dans la théorie darwinienne de l'évolution des espèces.

Remarques finales

- La recherche tabou peut être très efficace, mais implémentation et ajustement des paramètres difficiles, forts dépendants de la structure du problème.
- Les algorithmes génétiques sont efficaces si la structure du problème est bien exploitée.
- Méthodes hybrides très efficaces (exemple : recherche locale utilisée comme opérateur de mutation).

IV. EXERCICES

S1) Ecrivez le problème PL suivant sous forme standard avec des M.d.D. non négatifs:

$$\text{Max } z = 2x_1 + 3x_2 + 5x_3$$

$$\text{s.c.} \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 \geq -5 & (1) \\ -6x_1 + 7x_2 - 9x_3 \leq 4 & (2) \\ x_1 + x_2 + 4x_3 = 10 & (3) \\ x_1,\ x_2 \geq 0 & \\ x_3 \text{ sans restriction} & \end{cases}$$

Formulez son dual.

S2) Considérons l'ensemble de contraintes suivant:

$$x_1 + 7x_2 + 3x_3 + 7x_4 \leq 46$$

$$3x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 \leq 8$$

$$2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 \leq 10$$

Résolvez par la méthode du simplexe le problème obtenu lorsque la fonction objectif est donnée par:

a) $\max z = 2x_1 + x_2 - 3x_3 + 5x_4$

b) $\max z = -2x_1 + 6x_2 + 3x_3 - 2x_4$

c) $\max z = 3x_1 - x_2 + 3x_3 + 4x_4$

d) $\min z = 5x_1 - \quad + \quad +$

$4x_2 \quad 6x_3 \quad 8x_4$

e) min z = $3x_1 \; + \quad - \quad +4x$

$6x_2 \quad 2x_3 \quad {}_4$

S3) Résolvez le problème suivant par la méthode du simplexe

$$\max z = 5x_1 + 4x_2 + 3x_3$$

s.c. $2\,x_1 + 3\,x_2 + x_3 \leq 5$

$4\,x_1 + x_2 + 2\,x_3 \leq 11$

$3\,x_1 + 4\,x_2 + 2\,x_3 \leq 8$

$x_1,\ x_2,\ x_3 \geq 0$

S4) Résolvez le problème suivant par simple inspection, puis par la méthode du simplexe

$$\max z = 5\,x_1 - 6\,x_2 + 3\,x_3 - 5\,x_4 + 12\,x_5$$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 6x_4 + 3x_5 \leq 90 \\ x_j \geq 0 \end{cases}$$

s.c.

S5) Résolvez le problème suivant par la méthode du simplexe :

On doit organiser un pont aérien pour transporter 1600 personnes et 90 tonnes de bagages. Les avions disponibles sont de deux types: 12 du type A et 9 du type B. Le type A peut transporter, à pleine charge, 200 personnes et 6 tonnes de bagages. Le type B, 100 personnes et 6 tonnes de bagages. La location d'un avion du type A coûte 800.000 F; la location d'un avion du type B coûte 200.000 F.

S6) Les dictionnaires ci-dessous ont été obtenus après exécution de quelques itérations de la méthode du simplexe sur différents problèmes. Quelles conclusions pouvez-vous tirer sur base de l'information contenue dans ces dictionnaires?

Les conclusions possibles sont par exemple:

. la solution courante est optimale, et vaut ...;

. le problème est non borné parce que ...;

. le problème est non réalisable parce que ...;

. la solution courante n'est pas optimale; dans ce cas, calculez la solution optimale.

a) min z

$$\text{s.c.}\begin{cases} z - x_1 \qquad\qquad - 5x_5 = 12 \\ 3x_1 + x_2 + 5x_4 = 3 \\ x_1 + x_3 + x_4 - 4x_5 = 6 \\ -4x_1 - x_5 + x_6 = 4 \\ x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5,\ x_6 \ \geq\ 0 \end{cases}$$

b) max z

$$\text{s.c.}\begin{cases} z + x_1 - x_4 - 2x_5 = 20 \\ 3x_1 + x_2 - 5x_4 = 3 \\ x_1 + x_3 + 2x_4 - x_5 = 6 \\ -4x_1 - 2x_5 + x_6 = 4 \\ x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5,\ x_6 \ \geq\ 0 \end{cases}$$

c) max z

$$\text{s.c.}\quad \begin{cases} z \quad - 5x_2 \quad + 3x_5 = 12 \\ 2x_2 + x_3 - 2x_5 = 4 \\ x_1 - x_2 - 3x_5 = 2 \\ x_2 + x_4 - x_5 = 3 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{cases}$$

DS1) Suite de l'exercice S6a).

Quel est le coût réduit de chacune des variables du problème?

DS2) Suite de l'exercice S3).

a) Si le coefficient de la variable x_2 dans la fonction objectif augmentait de 2 unités, quel serait l'effet produit sur la solution optimale et la valeur optimale du problème? Et si cette augmentation était de 4 unités?

b) Quel est le coût réduit de chacune des variables du problème?

c) Quel est le prix dual de chacune des contraintes d'inégalité du problème?

DS3) Considérons le programme linéaire suivant, exprimé sous forme standard:

$$\min z = 2x_1 + x_2$$

$$\text{s.c.}\quad \begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_3 = 3 \\ 4x_1 + 3x_2 - x_4 = 6 \\ x_1 + 2x_2 + x_5 = 3 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{cases}$$

a) Calculer le dictionnaire associé à la base B définie par les variables de base x_1, x_2, x_5 .

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 3/5 & -1/5 & 0 \\ -4/5 & 3/5 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

b) La solution de base associée à B est-elle réalisable et optimale?

DS4) Soit le problème (P):

$$\max z = 2x_1 + 4x_2 + 4x_3 - 3x_4$$

$$\text{s.c.} \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ x_1 + 4x_2 + x_4 = 8 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{cases}$$

La base optimale de (P) est

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$$

et son inverse

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1/4 \\ 1 & -1/4 \end{bmatrix}$$

a) Formulez le problème dual de (P).

b) Sur base des informations fournies (et donc, sans utiliser la méthode du simplexe ni la méthode graphique), calculez la solution optimale de (P) et celle de son dual. Expliquez la méthode que vous utilisez.

c) Si la fonction objectif de (P) est remplacée par

$$\max z = 3x_1 + 4x_2 + 4x_3 - 3x_4 ,$$

la base B donnée ci-dessus reste-t-elle optimale? Justifiez votre réponse.

DS5) Soit le problème suivant (P):

$$\max z = 100x_1 + 50x_2 + 25\, x_3$$

$$\text{s.c.}\quad \begin{cases} 5x_1 + x_2 + x_3 + s_1 = 25 & (1) \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + s_2 = 25 & (2) \\ x_1 + x_2 + x_3 + s_3 = 10 & (3) \\ x_1 + x_2 + 5x_3 + s_4 = 50 & (4) \\ x,\ s \geq 0 \end{cases}$$

La base optimale de (P) est

$$B = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{avec } B^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 5 & 0 \\ 1 & 4 & -9 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 4 \end{pmatrix}$$

a) Ecrivez le dual de (P)

b) Quelle est la solution optimale du programme (P) et celle de son dual?

c) Dans quel intervalle peut varier le membre de droite de la contrainte (2) sans affecter l’optimalité de B ?

DS6) Soit le problème de programmation linéaire

$$\max z = 60x_1 + 30x_2 + 20x_3$$

$$\text{s.c.}\begin{cases} 8x_1 + 6x_2 + x_3 \leq 48 & (1) \\ 4x_1 + 2x_2 + 1{,}5x_3 \leq 20 & (2) \\ 2x_1 + 1{,}5x_2 + 0{,}5x_3 \leq 8 & (3) \\ x_1,\ x_2,\ x_3 \geq 0 \end{cases}$$

La résolution de ce problème par la méthode du simplexe permet de calculer la base optimale

$$B = \begin{pmatrix} 8 & 1 & 1 \\ 4 & 1{,}5 & 0 \\ 2 & 0{,}5 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et son inverse } B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -0{,}5 & 1{,}5 \\ 0 & 2 & -4 \\ 1 & 2 & -8 \end{pmatrix}$$

a) Calculez la solution optimale et la valeur optimale du problème.

b) Calculez et interprétez le prix dual de la contrainte (2).

DS7) Soit le problème de programmation linéaire

$\max z = 30\, x_1 + 20x_2$

$$\text{s.c.}\begin{cases} 5x_1 + 4x_2 \leq 400 & (1) \\ x_1 \leq 60 & (2) \\ x_2 \leq 75 & (3) \\ x_1,\ x_2,\ \geq 0 \end{cases}$$

a) Résolvez le problème graphiquement.

b) Sur base de a), déterminez la base optimale B.

c) Pourrait-on déduire les prix duaux sur base de cette information?

DS8) Soit le problème de programmation linéaire (P):

$$\min \; z = 500x_1 + 500x_2 + 500x_3 + 300x_4 + 425x_5$$

$$\text{s.c.} \begin{cases} x_1 + x_2 + x_4 \geq 150 \\ 2x_2 + 4x_3 + x_4 + 3x_5 \geq 80 \\ x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5 \geq 0 \end{cases}$$

A l'optimum de (P), on a $x_1 = x_2 = x_3 = x_5 = 0$

a) Trouvez la solution optimale et la matrice de base optimale pour (P).

b) A partir de la matrice de base, calculez la valeur optimale des variables duales.

c) Ecrivez le problème dual de (P).

DS9) Soit le problème de programmation linéaire

$$\max \; z = 4x_1 + 5x_2 + 6x_3$$

$$\text{s.c.} \begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 \leq 11 \\ x_1,\ x_2,\ x_3 \geq 0 \end{cases}$$

a) Formulez le dual et résolvez-le (par inspection)

b) Utilisez a) et le théorème de dualité forte pour résoudre le primal.

DS10) Soit le problème de programmation linéaire:

$\min z = 2x_1 + 3x_2$

$$\text{s.c.} \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \leq 30 \\ x_1 + 2x_2 \geq 10 \\ x_1 - x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2, \geq 0 \end{cases}$$

Son dual s'écrit

$\max\ w = 30y_1 + 10y_2$

$$\text{s.c.} \begin{cases} 2y_1 + y_2 + y_3 \leq 2 \\ 3y_1 + 2y_2 - y_3 \leq 3 \\ y_1 \leq 0 \\ y_2, y_3 \geq 0 \end{cases}$$

Déterminez si les solutions suivantes sont réalisables et optimales:

a) ($x_1 = 10, x_2 = 10/3; y_1 = 0, y_2 = 1, y_3 = 1$)

b) ($x_1 = 20, x_2 = 10; y_1 = 1, y_2 = 4, y_3 = 0$)

c) ($x_1 = 10/3, x_2 = 10/3; y_1 = 0, y_2 = 5/3, y_3 = 1/3$)

DS11) Considérons le programme linéaire suivant

$\max\ z = 5x_1 + 2x_2 + 3x_3$

$$\text{s.c.}\begin{cases} x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 30 \\ x_1 - 5x_2 - 6x_3 \leq 40 \\ x_1,\ x_2,\ x_3 \geq 0 \end{cases}$$

La solution optimale est donnée par le dictionnaire final

max z

$$s.c.\begin{cases} z + 23x_2 + 7x_3 = 150 \\ x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 30 \\ - 10x_2 - 8x_3 + s_2 = 10 \\ x,\ s \geq 0 \end{cases}$$

a) Ecrivez le problème dual associé.

b) Déterminez la matrice de base optimale B. Déduisez-en la solution optimale du dual.

c) Dans quel intervalle peut varier c_1 (idem c_2, c_3) sans affecter l'optimalité de la solution?

d) Dans quel intervalle peut varier b_1 (idem b_2) sans affecter l'optimalité de la base B?

e) Déterminez les prix duaux.

DS12) Considérons le problème de l'exercice DS11.

a) Supposons que le M. de D. des contraintes devienne ($30 + \theta$, $40 - \theta$), où θ est un paramètre non négatif. Déterminez les valeurs de θ pour lesquelles la base B reste optimale.

b) Pour chacune des fonctions objectif suivantes, trouvez la nouvelle solution optimale en utilisant la procédure d'analyse de sensibilité.

i) $\max z = 12x_1 + 5x_2 + 2x_3$

ii) $\min z = 2x_2 - 5x_3$

DS13) Voici la formulation d'un petit problème de transport impliquant 3 entrepôts et 2 clients:

$\min z = 3x_{11} + 2x_{12} + 4x_{21} + x_{22} + 2x_{31} + 3x_{32}$

$$\text{s.c}\begin{cases} x_{11} + x_{12} \leq 60 \\ x_{21} + x_{22} \leq 50 \\ x_{31} + x_{32} \leq 50 \\ x_{11} + x_{21} + x_{31} = 90 \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} = 60 \\ x_{11},\ x_{121},\ x_{21}, x_{22},\ x_{31},\ x_{32} \geq 0 \end{cases}$$

(remarquez que le problème est non équilibré).

Ce problème a été mis sous forme standard en introduisant des variables d'écart s_1 , s_2 et s_3 dans les trois premières contraintes, puis résolu par un logiciel utilisant la méthode du simplexe. Voici quelques informations sur la solution optimale:

- les variables en base à l'optimum sont x_{11}, x_{12}, x_{22}, x_{31} et s_1;
- le coût réduit de x_{21} et celui de x_{32} sont égaux à 2;
- les prix duaux des contraintes sont donnés par $(y_1, y_2, y_3, y_4, y_5) = (0, -1, -1, 3, 2)$.

a) Mettez le problème sous forme standard (comme suggéré ci-dessus) et formulez son problème dual.

b) Utilisez l'information donnée plus haut pour calculer la solution optimale du problème et le coût de transport correspondant.

c) Si le coût unitaire de transport entre l'entrepôt 2 et le client 1 diminuait de 1 unité (passant ainsi de 4 à 3), quelle serait l'incidence de ce changement sur la solution optimale et la valeur optimale calculées précédemment?

d) Le gestionnaire du troisième entrepôt s'aperçoit qu'il a commis une erreur en évaluant ses stocks: il possède en fait 55 unités en stock. En supposant que la base optimale ne soit pas affectée, quel sera l'effet de cette correction sur le coût de transport optimal?

SOLUTIONS DES EXERCICES

S2) d) Solution optimale: $(z^*, x^*, s^*)=(-40/3, 0, 10/3, 0, 0, 68/3, 34/3, 0)$.

S3) Solution optimale: $(z^*, x^*, s^*)=(13, 2, 0, 1, 0, 1, 0)$.

S4) Solution optimale: $(z^*, x^*, s^*)=(450, 90, 0, 0, 0, 0, 0)$.

S5) Solution optimale: $(z^*, x^*, s^*)=(4600, 7/2, 9, 0, 22, 17/2, 0)$.

S6) a) Il existe une infinité de solutions optimales; b) Dictionnaire non optimal; c) Dictionnaire non optimal.

DS1) Coût réduit de $x_1=1$, de $x_5=5$; les autres sont nuls.

DS2) a) i)Pas de changement; ii) x_2 peut entrer en base. Nouvelle solution optimale:

$(z^*, x^*, s^*)=(14, 0, 1, 2, 0, 6, 0)$; b) Coût réduit de $x_2=3$; c) Prix duaux=1, 0, 1 resp.

DS3) b) Oui.

DS4) b) $x^*=(0, 2, 2, 0)$, $y^*=(4, 0)$; c) Oui.

DS5) b) $(x^*, s^*)=(15/4, 25/4, 0, 0, 35/4, 0, 40)$, $y^*=(25/2, 0, 75/2, 0)$; c) $[65/4, +\infty[$.

DS6) a) $(z^*, x^*)=(280, 2, 0, 8, 24, 0, 0)$; b) $y_2^*=10$.

DS7) b) $x_B=(x_1, x_2, s_3)$; c) $y^*=(5, 5, 0)$.

DS8) a) $x_4^*=150$, $s_1^*=0$, $s_2^*=0$; b) $y^*=(300,0)$.

DS9) a) $y^*=4/3$; b) $x_1^*=11/3$.

DS10) a) Réalisables; b) Pas réalisables; c) Réalisables et optimales.

DS11) b) $y^*=(5, 0)$; c) $c_1\in[3/2, +\infty[$, $c_2\in]-\infty, 25]$, $c_3\in]-\infty,10]$; d) $b_1\in[0, 40]$, $b_2\in[30, +\infty[$.

DS12) a) $\theta\in[0,5]$; b) i) La solution optimale est inchangée; ii) Faire entrer x_3 en base.

DS13) b) $z^*=290$, $x_B^*=(40, 10, 50, 50, 10)$; c) Pas de changement; d) Valeur optimale: 285.