CENTRE NATIONAL DE TÉLÉ-ENSEIGNEMENT DE MADAGASCAR (CNTEMAD)

EXAMEN – DEUXIÈME SESSION

Année Universitaire : **2019-2020**
Mention : **I**
Niveau : **M1**
Date (demi-journée) : **MERCREDI** (MATIN)
Durée : **03:00**

M1 I

Mathématiques appliquées à la communication et à l'informatique

---

Exercice I

Application des processus de naissance et de mort : cas d'un processus de naissance pure. C'est un processus pour lequel la probabilité conditionnelle de naissance entre t et $t+dt$ vaut λdt.
Soit K la variable aléatoire correspondant au nombre de naissances entre 0 et t :

$$P[K(t+dt)=k+1/K(t)=k]=\lambda dt$$

1- Ecrire les équations différentielles permettant d'étudier la famille de fonctions (P_k), où :

$$P_k(t)=P[K(t)=k]$$

2- Démontrer que l'on obtient

$$P_k(t)=\frac{(\lambda t)^k}{k!}e^{-\lambda t}$$

3- Calculer $E[K(t)]$ et $E[K(t)(K(t)-1)]$. En déduire $Var[K(t)]$.
4- Calculer la fonction de répartition du temps séparant deux arrivées. En déduire sa densité de probabilité. Donner son espérance mathématique.

Exercice II

On considère la fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ donnée par : $f(x)=\dfrac{3x-1}{x-2}$.

a) Montrer qu'il existe un réel et un seul, noté a, n'ayant pas d'image par f.

b) Montrer qu'il existe un réel et un seul, noté b, n'ayant pas d'antécédent par f.

c) Montrer que la restriction g de f à $\mathbb{R}\setminus\{a\}$ au départ et à $\mathbb{R}\setminus\{b\}$ à l'arrivée est bijective, et préciser l'application réciproque g^{-1} de g.