$\boxed{\text{PROCESSUS DE POISSON}}$

Corrigés des exercices du polycopié

---

15 Les arrivées d'autobus à une station forment un processus de Poisson d'intensité λ. Chaque autobus s'arrête un temps fixe τ à la station. Un passager qui arrive à un instant θ monte dans le bus si celui-ci est là, attend pendant un temps τ', puis, si l'autobus n'est pas arrivé pendant le temps τ', quitte la station et s'en va à pied.

Déterminer la probabilité que le passager prenne l'autobus.

Le passager rentrera à pied si, quand il arrive, il n'y a pas d'autobus, c'est-à-dire si le dernier autobus est arrivé avant l'instant $\theta - \tau$ et si, à l'instant $\theta + \tau'$, il n'y a toujours pas d'autobus ; il y a donc aucune arrivée entre $\theta - \tau$ et $\theta + \tau'$.

Or $P([N_{\theta+\tau'} - N_{\theta-\tau} = 0]) = P([N_{\theta+\tau'-(\theta-\tau)} = 0]) = P([N_{\tau+\tau'} = 0]) = e^{-\lambda(\tau+\tau')}$ et la probabilité que le passager prenne l'autobus est donc $\boxed{1 - e^{-\lambda(\tau+\tau')}}$.

---

16 Sur une route à sens unique, l'écoulement des voitures peut être décrit par un processus de Poisson d'intensité $\lambda = \frac{1}{6}s^{-1}$. Un piéton qui veut traverser la route a besoin d'un intervalle d'au moins $4s$ entre 2 voitures successives. Calculer :

a) la probabilité pour qu'il doive attendre ;
b) la durée moyenne des intervalles qui lui permettent de traverser la route ;
c) le nombre moyen de voitures qu'il voit passer avant de pouvoir traverser la route.

Le piéton arrive au bord de la route à un instant θ. On note U la v.a.r. qui sépare θ de la prochaine arrivée de voiture. On a vu en cours que U suit la loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$.

a) Le piéton ayant besoin d'au moins 4s pour traverser, il devra attendre si $U \leq 4$.

Or $P([U \leq 4]) = \displaystyle\int_0^4 \lambda e^{-\lambda u}\, du = \left[-e^{-\lambda u}\right]_0^4 = 1 - e^{-4\lambda}$. Comme $\lambda = 1/6$, $P([U \leq 4]) = 1 - e^{-4/6}$.

La probabilité pour qu'il doive attendre est donc $\boxed{1 - e^{-2/3} \approx 0,487}$.

b) On cherche $\mathbb{E}^{[U>4]}(U)$ c'est-à-dire $\int u f_U^{[U>4]}(u)\, du$. On a

$$\begin{aligned} F_U^{[U>4]}(u) &= P^{[U>4]}([U \leq u]) = \frac{P([U \leq u] \cap [U > 4])}{P([U > 4])} \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } u \leq 4 \\ \frac{P([4<U\leq u])}{P([U>4])} = \frac{F_U(u) - F_U(4)}{P([U>4])} & \text{si } u > 4 \end{cases} \end{aligned}$$

et donc $f_U^{[U>4]}(u) = \dfrac{f_U(u)}{P([U > 4])}\, \mathbb{1}_{]4,+\infty[}(u) = \lambda\, e^{-\lambda(u-4)}\, \mathbb{1}_{]4,+\infty[}(u)$ puis

$$\begin{aligned} \mathbb{E}^{[U>4]}(U) &= \int_4^{+\infty} \lambda u\, e^{-\lambda(u-4)}\, du \underset{v=u-4}{=} \int_0^{+\infty} \lambda(v+4)\, e^{-\lambda v}\, dv \\ &= \int_0^{+\infty} v\lambda\, e^{-\lambda v}\, dv + 4\int_0^{+\infty} \lambda\, e^{-\lambda v}\, dv = \frac{1}{\lambda} + 4 \end{aligned}$$

car $\int_0^{+\infty} v\lambda\, e^{-\lambda v}\, dv$ est l'espérance d'une v.a.r. de loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$ et $\int_0^{+\infty} \lambda\, e^{-\lambda v}\, dv$ l'intégrale de sa densité.

Ainsi, $\boxed{\text{il faut en moyenne } 6+4=10\text{s pour que le piéton puisse traverser}}$.

c) Soit N le nombre moyen de voitures que voit passer le piéton avant de pouvoir traverser la route. On a

• $[N=0]=[U>4]$, où U est le temps entre l'arrivée du piéton et la prochaine voiture ;

• $[N=1]=[U\leq 4]\cap[U_1>4]$ où U_1 est le temps entre la première et la deuxième voiture qui se présentent après l'arrivée du piéton.

• Plus généralement, $[N=k]=[U\leq 4]\cap[U_1\leq 4]\cdots\cap[U_{k-1}\leq 4]\cap[U_k>4]$ où U_k est le temps entre la k-ième et la $(k+1)$-ième voiture qui se présentent après l'arrivée du piéton.

Les v.a.r. U, $U_1,\cdots,U_k$ étant toutes indépendantes et de même loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$ on a

$$P([N=0])=P([U>4])=e^{-4\lambda}$$

et

$$\begin{aligned} P([N=k]) &= P([U\leq 4])P([U_1\leq 4])\cdots P([U_{k-1}\leq 4])P([U_k>4]) \\ &= e^{-4\lambda}(1-e^{-4\lambda})^k = e^{-2/3}(1-e^{-2/3})^k \end{aligned}$$

(valable aussi pour $k=0$). On reconnait la loi géométrique $\mathcal{G}(e^{-2/3})$ sur $\mathbb{N}$.

$$G_N(s)=\sum_{k=0}^{+\infty} s^k\, P([N=k]) = e^{-2/3}\sum_{k=0}^{+\infty}(s(1-e^{-2/3}))^k$$

soit $G_N(s)=\dfrac{e^{-2/3}}{1-s(1-e^{-2/3})}$ et $G_N'(s)=\dfrac{e^{-2/3}(1-e^{-2/3})}{(1-s(1-e^{-2/3}))^2}$.

On a alors $\mathbb{E}(N)=G_N'(1)=\dfrac{1-e^{-2/3}}{e^{-2/3}}=e^{2/3}-1\approx 0,948$.

$\boxed{\text{Le piéton voit donc passer en moyenne 1 voiture avant de traverser}}$.

$\boxed{\textbf{17}}$ Un radar est placé sur une route où il passe en moyenne 5 véhicules en excès de vitesse par heure. On admet que ces véhicules forment un Processus de Poisson.

a) Déterminer la probabilité qu'1 voiture ait été prise dans le premier 1/4 d'heure sachant que 2 ont été prises en 1 heure.

b) On suppose ici que le radar ne peut pas tomber en panne mais qu'il ne détecte que 80% des véhicules en excès de vitesse. Déterminer la loi du nombre de véhicules détectés par le radar après 100 heures de fonctionnement et le nombre moyen de ces véhicules.

c) On suppose ici que le nombre de personnes dans les véhicules varie de 1 à 5 avec les probabilités respectives 0,4 ; 0,3 ; 0,1 ; 0,1 ; 0,1. Déterminer la fonction génératrice du nombre de personnes retardées par l'incident après 100 heures et le nombre moyen de ces personnes.

d) On suppose ici que la durée de fonctionnement du radar suit une loi exponentielle de moyenne 100 heures. Déterminer la loi du nombre de véhicules détectés par le radar et le nombre moyen de ces véhicules.

---

a) En utilisant successivement les propriétés d'un processus de Poisson (indépendance des accroissements, stationnarité, et N_t de loi $\mathcal{P}(\lambda t)$), il vient :

$$\begin{aligned} P([N_{1/4}=1]/[N_1=2]) &= \frac{P([N_{1/4}=1]\cap[N_1=2])}{P([N_1=2])} = \frac{P([N_{1/4}=1]\cap[N_1-N_{1/4}=1])}{P([N_1=2])} \\ &= \frac{P([N_{1/4}=1])P([N_1-N_{1/4}=1])}{P([N_1=2])} = \frac{P([N_{1/4}=1])P([N_{3/4}=1])}{P([N_1=2])} \\ &= \frac{e^{-\frac{\lambda}{4}}\ \frac{\lambda}{4}\times e^{-\frac{3\lambda}{4}}\ \frac{3\lambda}{4}}{e^{-\lambda}\ \frac{\lambda^2}{2!}} = \frac{3\times 2}{4\times 4} = \frac{3}{8}. \end{aligned}$$

b) Le processus de Poisson des véhicules en excès de vitesse se décompose en deux processus de Poisson indépendants, celui des véhicules détectés ayant pour intensité λp où $p=0,8$ et $\lambda=5$, soit $\lambda p=4$. Ainsi, le nombre de véhicules en excés de vitesse détectés par le radar après 100 heures de fonctionnement suit la $\boxed{\text{loi de Poisson } \mathcal{P}(400)\text{, de moyenne } 400}$.

c) Si X_t désigne le nombre de personnes retardées jusqu'à l'instant t, on a $X_t = Y_1+\cdots+Y_{N_t}$ où Y_i désigne le nombre de passagers du i-ième véhicule arrêté. On sait alors que

$$\boxed{G_{X_t}(s) = e^{\lambda t(G_Y(s)-1)} \text{ avec } G_Y(s) = \sum s^k P(Y=k) = 0,4s+0,3s^2+0,1(s^3+s^4+s^5)}$$

et $\mathbb{E}(X_{100}) = G'_{X_{100}}(1) = 100\lambda G'_Y(1)$, avec $G'_Y(1) = 0,4+0,6+0,1(3+4+5) = 2,2$. Ainsi, en moyenne,

$$\boxed{\text{1100 personnes auront été retardées par l'incident après 100 heures}}.$$

d) Si T désigne la durée de fonctionnement du radar, $f_T(t) = \frac{1}{100}e^{-\frac{t}{100}}\mathbb{1}_{]0,+\infty[}(t)$ et

$$\begin{aligned} P([X=n]) &= \int P([X=n]/(T=t))f_T(t)dt = \int P([N_t=n])f_T(t)dt \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t}\ \frac{(\lambda t)^n}{n!}\ \frac{1}{100}e^{-\frac{t}{100}}\ dt = \frac{\lambda^n}{100n!}\int_0^{+\infty} t^n\ e^{-\left(\lambda+\frac{1}{100}\right)t}\ dt \end{aligned}$$

et en posant $u = \left(\lambda+\frac{1}{100}\right)t$, on a $\int_0^{+\infty} t^n\ e^{-\left(\lambda+\frac{1}{100}\right)t}\ dt = \frac{\Gamma(n+1)}{\left(\lambda+\frac{1}{100}\right)^{n+1}} = \frac{100^{n+1}\ n!}{(100\lambda+1)^{n+1}}$ donc $P([X=n]) = \frac{(100\lambda)^n}{(100\lambda+1)^{n+1}} = \frac{1}{100\lambda+1}\left(\frac{100\lambda}{100\lambda+1}\right)^n$ et, $\boxed{X \text{ suit la loi géométrique } \mathcal{G}_0\left(\frac{1}{100\lambda+1}\right)}$, donc

$$\mathbb{E}(X) = \left(\frac{100\lambda}{100\lambda+1}\right)/\left(\frac{1}{100\lambda+1}\right) = 100\lambda.$$

Avec $\lambda=5$, $\boxed{\text{le radar détecte en moyenne 500 véhicules}}$.

$\boxed{\textbf{18}}$ Au football, on suppose que les buts sont marqués suivant un processus de Poisson (N_t) de paramètre λ. On s'intéresse ici seulement aux parties qui se sont terminées avec 2 buts marqués. La durée d'une partie est une constante notée T ; les instants des buts sont des variables aléatoire notées S_1 et S_2.

a) Quelle est la probabilité qu'à la mi-temps il y ait eu exactement 2 buts ? 1 but ? aucun but ?

b) Justifier que $P^{[N_T=2]}([S_1 \leq s] \cap [S_2 \leq t]) = P^{[N_T=2]}([N_s \geq 1] \cap [N_t = 2])$ pour $0 < s < t < T$. Montrer alors, en utilisant l'indépendance des accroissements (et en distinguant 2 cas, selon que 2 buts sont marqués à l'instant s ou non), que :

$$P^{[N_T=2]}([S_1 \leq s] \cap [S_2 \leq t]) = \frac{2st - s^2}{T^2} \text{ pour } 0 < s < t < T.$$

En déduire les lois de S_1 et de S_2 lorsque $N_T = 2$. Quels sont les temps moyens pour marquer chacun des 2 buts ?

---

a) D'après le cours, pour $s \leq t$, $P_{N_s}^{[N_t=n]} = \mathcal{B}\left(n, \frac{s}{t}\right)$. Ici $t = T$, $s = \frac{T}{2}$ et $n = 2$ donc $P^{[N_T=2]}([N_{T/2} = k]) = C_2^k \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(\frac{1}{2}\right)^{2-k} = \frac{1}{4} C_2^k$ avec $C_2^0 = C_2^2 = 1$ et $C_2^1 = 2$.

Ainsi, la probabilité qu'à la mi-temps il y ait eu exactement 2 buts ou aucun est $\frac{1}{4}$; pour 1 but, c'est $\frac{1}{2}$.

b) $[S_i \leq t] = [N_t \geq i]$ (le i-ième événement a eu lieu avant ou à t). On a donc $[S_1 \leq s] \cap [S_2 \leq t] = [N_s \geq 1] \cap [N_t \geq 2]$.
Mais, pour $t \leq T$, $[N_t \geq 2] \cap [N_T = 2] = [N_t = 2] \cap [N_T = 2]$ car $N_t \leq N_T$. On a donc bien $\boxed{P^{[N_T=2]}([S_1 \leq s] \cap [S_2 \leq t]) = P^{[N_T=2]}([N_s \geq 1] \cap [N_t = 2]) = p}$ pour $0 < s < t < T$.
$p = p_1 + p_2$ avec $p_1 = P^{[N_T=2]}([N_s = 1] \cap [N_t = 2])$ et $p_2 = P^{[N_T=2]}([N_s = 2] \cap [N_t = 2])$.

$$\begin{aligned} p_1 &= \frac{P([N_s = 1] \cap [N_t - N_s = 1] \cap [N_T - N_t = 0])}{P([N_T = 2])} \\ &= \frac{P([N_s = 1])P([N_{t-s} = 1])P([N_{T-t} = 0])}{P([N_T = 2])} \\ &= \frac{e^{-\lambda s}\lambda s \times e^{-\lambda(t-s)}\lambda(t-s) \times e^{-\lambda(T-t)}}{e^{-\lambda T}\frac{(\lambda T)^2}{2}} = \frac{2s(t-s)}{T^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_2 &= \frac{P([N_s = 2] \cap [N_t - N_s = 0] \cap [N_T - N_t = 0])}{P([N_T = 2])} \\ &= \frac{P([N_s = 2])P([N_{t-s} = 0])P([N_{T-t} = 0])}{P([N_T = 2])} \\ &= \frac{e^{-\lambda s}\frac{(\lambda s)^2}{2} \times e^{-\lambda(t-s)} \times e^{-\lambda(T-t)}}{e^{-\lambda T}\frac{(\lambda T)^2}{2}} = \frac{s^2}{T^2}. \end{aligned}$$

On a donc $p = \frac{2st-2s^2+s^2}{T^2}$, soit $\boxed{P^{[N_T=2]}([S_1 \leq s] \cap [S_2 \leq t]) = \frac{2st-s^2}{T^2} \text{ si } 0 < s < t < T}$.

On a alors, en dérivant, $f_{S_1,S_2}^{[N_T=2]}(s,t) = \frac{2}{T^2}\mathbb{1}_{(0<s<t<T)}$ (on retrouve le résultat III.3 du cours p32). Puis

$$f_{S_1}^{[N_T=2]}(s) = \int f_{S_1,S_2}^{[N_T=2]}(s,t)\,dt = \frac{2}{T^2}(T-s)\mathbb{1}_{]0,T[}(s)$$

$$\text{et} \quad f_{S_2}^{[N_T=2]}(t) = \int f_{S_1,S_2}^{[N_T=2]}(s,t)\,ds = \frac{2t}{T^2}\mathbb{1}_{]0,T[}(t).$$

Alors $\mathbb{E}^{[N_T=2]}(S_1) = \frac{2}{T^2}\int_0^T s(T-s)ds = \frac{2}{T^2}\left[\frac{Ts^2}{2} - \frac{s^3}{3}\right]_0^T = \frac{T}{3}$;

$\mathbb{E}^{[N_T=2]}(S_2) = \frac{2}{T^2}\int_0^T t^2 dt = \frac{2}{T^2}\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^T = \frac{2T}{3}$. On a donc un temps moyen de $\frac{T}{3}$ pour le premier but et de $\frac{2T}{3}$ pour le deuxième.

---

19 On considère un appareil de comptage, qui dénombre les voitures sur une route, de flux poissonien d'intensité λ. L'appareil peut tomber en panne à l'instant T, où T est une variable aléatoire de loi Gamma $\gamma(1, a)$.

Soit X le nombre de véhicules enregistrés par l'appareil jusqu'à ce qu'il tombe en panne. Déterminer la loi et l'espérance de X.

$$P([X = n]) = \int P([X = n]/[T = t]) f_T(t) dt$$

avec $P([X = n]/[T = t]) = P([X_t = n])$ (*i.e.* $P_X^{[T=t]} = P_{X_t}$) car, à l'instant t où l'appareil tombe en panne, il a enregistré n passages. On sait que $P([X_t = n]) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!}$ et $f_T(t) = \frac{1}{\Gamma(a)} e^{-t} t^{a-1} \mathbb{1}_{]0,+\infty[}(t)$. Donc :

$$\begin{aligned} P([X = n]) &= \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!} \frac{1}{\Gamma(a)} e^{-t} t^{a-1} dt = \frac{\lambda^n}{n!\Gamma(a)} \int_0^{+\infty} e^{-(\lambda+1)t} t^{a+n-1} dt \\ &= \frac{\lambda^n}{n!\Gamma(a)} \int_0^{+\infty} e^{-v} \frac{v^{a+n-1}}{(\lambda+1)^{a+n}} dt = \frac{\lambda^n}{(\lambda+1)^{n+a}} \frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a) n!} \end{aligned}$$

La loi de X étant peu sympathique, pour calculer $\mathbb{E}(X)$, il est préférable de passer par $\mathbb{E}^{(T=t)}(X) = \mathbb{E}(X_t) = \lambda t$. On a alors $\mathbb{E}^T(X) = \lambda T$ et $\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}\left(\mathbb{E}^T(X)\right) = \lambda \mathbb{E}(T) = \lambda a$.

---

20 Un automobiliste qui crève monte la roue de secours et remet la roue crevée dans sa voiture sans la faire réparer : s'il crève à nouveau, il fait appel à un dépanneur qui lui vend alors 2 roues d'un coup. Les crevaisons arrivent suivant un processus de Poisson au rythme moyen de 1 par an.

a) Déterminer les lois du nombre de crevaisons et de dépannages effectués jusqu'à t.

b) Si le dépannage coute 100 euro, 1 roue 100 euro et 2 roues 150 euro (la deuxième à moitié prix) a-t-il raison de procéder ainsi sur une durée de 1 an ? 2, 3, 4 ans ? (Comparer les coûts moyens des 2 stratégies).
(*On négligera les durées des dépannages, démontages et montages*).

---

a) Soit N_t le nombre de crevaisons jusqu'à l'instant t et M_t le nombre de dépannages jusqu'à l'instant t. (N_t) est un processus de Poisson d'intensité $\lambda = 1\text{an}^{-1}$ donc N_t suit la loi de Poisson de paramètre t. Ainsi, on a $\boxed{P([N_t = n]) = e^{-t} \frac{t^n}{n!} \text{ et } \mathbb{E}(N_t) = t}$.
$[M_t = m] = [N_t = 2m] \cup [N_t = 2m+1]$ (car le $m^{\text{ième}}$ dépannage a eu lieu, mais pas le $(m+1)^{\text{ième}}$). On a donc $\boxed{P([M_t = m]) = e^{-t} \left[\frac{t^{2m}}{(2m)!} + \frac{t^{2m+1}}{(2m+1)!}\right]}$.
Pour trouver l'espérance, on détermine la fonction génératrice

$$G_{M_t}(s) = \sum_{m=0}^{+\infty} s^m P([M_t = m]).$$

Pour $s > 0$, $G_{M_t}(s) = e^{-t} \left[\sum_{m=0}^{+\infty} \frac{t^{2m}}{(2m)!} s^m + \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{t^{2m+1}}{(2m+1)!} s^m\right] = e^{-t} \left[\sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(t\sqrt{s})^{2m}}{(2m)!} + \frac{1}{\sqrt{s}} \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(t\sqrt{s})^{2m+1}}{(2m+1)!}\right]$, soit $G_{M_t}(s) = e^{-t} \left[\text{ch}(t\sqrt{s}) + \frac{1}{\sqrt{s}} \text{sh}(t\sqrt{s})\right]$ et $G'_{M_t}(s) = e^{-t} \left[\frac{t}{2\sqrt{s}} \text{sh}(t\sqrt{s}) - \frac{1}{2s^{\frac{3}{2}}} \text{sh}(t\sqrt{s}) + \frac{t}{2s} \text{ch}(t\sqrt{s})\right]$.

On a alors
$$\mathbb{E}(M_t) = G'_{M_t}(1) = \frac{e^{-t}}{2}\left[t(\text{sh}t + \text{ch}t) - \text{sh}t\right] = \frac{e^{-t}}{2}\left[te^t - \frac{e^t - e^{-t}}{2}\right]$$
soit finalement $\boxed{\mathbb{E}(M_t) = \frac{t}{2} - \frac{1}{4}(1 - e^{-2t})}$.

b) Dans le cas du dépannage, il faut payer $100 + 150 = 250$ euro par dépannage donc le coût moyen est $125t - 62,50 + 62,50e^{-2t}$. Si on n'attend pas le dépannage, il faut payer 100 euro à chaque crevaison, et le coût moyen est alors de $100t$. La différence est donc $D_t = 25t - 62,50 + 62,50e^{-2t}$. On trouve $D_1 \approx -29$, $D_2 \approx -11,25$, $D_3 \approx 12,75$, $D_4 \approx 37,50$: les 2 premières années, l'option du dépannage est la meilleure mais sur une durée plus longue ($t \geq 3$), il vaut mieux racheter au fur et à mesure des crevaisons.

$\boxed{\textbf{21}}$ Sur la plage de Bandol, un bateau amateur propose des virées de durée $\alpha = 30$mn en bouée sauteuse à un prix défiant toute concurrence. Des touristes se présentent suivant un processus de Poisson d'intensité $\lambda = 1h^{-1}$: si le bateau n'est pas à quai, ignorant son existence, ils vont ailleurs. Soit $\pi(t)$ la probabilité que tous les touristes soient pris jusqu'à l'instant t.

a) Montrer que, pour $t \in [0, \alpha[$, $\pi(t) = e^{-\lambda t}(1 + \lambda t)$.

b) Montrer que, si $t \geq \alpha$, $\pi'(t) = -\lambda\left[\pi(t) - \pi(t-\alpha)e^{-\lambda\alpha}\right]$ et en déduire par récurrence sur n que $\pi(t) = e^{-\lambda t}\left[1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda^k}{k!}(t - (k-1)\alpha)^k\right]$ pour $t \in [(n-1)\alpha, n\alpha[$.

c) *A.N.* : Si le bateau commence à $10h$, quelle est la probabilité qu'il n'ait raté personne à $10h40$? à $11h20$?

---

a) Si N_t est le nombre de touristes qui se sont présentés jusqu'à l'instant t, avec $t \leq \alpha$, $\pi(t) = P([N_t \leq 1])$ car, si un premier client arrive à l'instant γ, il finit sa virée à $\gamma + \alpha \geq \gamma + t \geq t$ et un client qui arrive sur $]\gamma, t]$ rate le bateau.
On a donc $\pi(t) = P([N_t = 0]) + P([N_t = 1])$, soit $\boxed{\text{pour } t \in [0, \alpha[,\ \pi(t) = e^{-\lambda t}(1 + \lambda t)}$.

b) $\pi(t+h)$ est la probabilité que tout le monde soit pris jusqu'à l'instant $t+h$ et on a 2 alternatives :
- personne entre t et $t + h$ et tout le monde pris jusqu'à t :
- un client entre t et $t+h$; mais alors le bateau était libre donc il n'y avait eu personne pendant la durée α précédente et tous les clients avant avaient été pris.

On a donc $\pi(t + h) = P([N_{t+h} - N_t = 0])\pi(t) + P([N_{t+h} - N_t = 1])e^{-\lambda\alpha}\pi(t - \alpha) + o(h)$, soit $\pi(t + h) = \pi(t)(1 - \lambda h + o(h)) + (\lambda h + o(h))e^{-\lambda\alpha}\pi(t - \alpha) + o(h)$ et, en faisant $h \to 0$ dans $\frac{\pi(t+h)-\pi(t)}{h}$, on obtient, $\boxed{\text{si } t \geq \alpha,\ \pi'(t) = -\lambda\left[\pi(t) - \pi(t-\alpha)e^{-\lambda\alpha}\right]}$.
- D'après a), la formule annoncée est vraie pour $n = 1$.
- Si elle est vraie pour n, on doit résoudre $\pi'(t) + \lambda\pi(t) = \lambda\pi(t - \alpha)e^{-\lambda\alpha}$ sur $[n\alpha, (n + 1)\alpha[$: $\pi(t) = C(t)e^{-\lambda t}$, et, par la méthode de variation de la constante, $C'(t) = \lambda\pi(t - \alpha)e^{-\lambda(\alpha-t)}$ avec, comme $t - \alpha \in [(n - 1)\alpha, n\alpha[$, $\pi(t - \alpha) = e^{-\lambda(t-\alpha)}\left[1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda^k}{k!}(t - \alpha - (k - 1)\alpha)^k\right]$, ce qui donne $C'(t) = \lambda\left[1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda^k}{k!}(t - k\alpha)^k\right]$, d'où $\pi(t) = e^{-\lambda t}\left[\lambda t + \sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda^{k+1}}{(k+1)!}(t - k\alpha)^{k+1} + c_n\right]$. On obtient la constante d'intégration c_n par continuité de π en $n\alpha$: $c_n = 1$ et on a bien

$$\boxed{\pi(t) = e^{-\lambda t}\left[1+\sum_{k=1}^{n+1}\frac{\lambda^k}{k!}(t-(k-1)\alpha)^k\right] \text{ pour } t\in[n\alpha,(n+1)\alpha[}.$$

c) *A.N.* : $\alpha = \frac{1}{2}h$, $40mn = \frac{2}{3}h \in [\frac{1}{2}, 1[$ et $1h20 = \frac{4}{3}h \in [2\times\frac{1}{2}, 3\times\frac{1}{2}[$. On a donc $\pi(\frac{2}{3}) = e^{-\frac{2}{3}}[1+\frac{2}{3}+\frac{1}{2}(\frac{2}{3}-\frac{1}{2})^2] = e^{-\frac{2}{3}}\frac{121}{72} \approx 0,86$ et $\pi(\frac{4}{3}) = e^{-\frac{4}{3}}[1+\frac{4}{3}+\frac{1}{2}(\frac{4}{3}-\frac{1}{2})^2+\frac{1}{6}(\frac{4}{3}-1)^3] = e^{-\frac{4}{3}}\frac{1741}{648} \approx 0,71$. Donc, la probabilité que tous les touristes soient pris jusqu'à $10h40$ est d'environ $0,86$ et jusqu'à $11h20$, c'est environ $0,71$.

---

22 Les hommes (resp. les femmes) se présentent à l'entrée d'une grande surface suivant un processus de Poisson d'intensité 2/mn (resp. 4/mn)

a) Quelle est la probabilité qu'au moins 3 hommes entrent pendant un intervalle de 2mn ?

b) Quelle est la probabilité qu'au moins 2 hommes soient entrés lorsque la troisième femme se présente ? (*On utilisera les probabilités totales continues et, sans la redémontrer, l'égalité* $\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t}t^k\,dt = \frac{k!}{\lambda^{k+1}}$).

c) Si 12 personnes se sont présentées pendant 2mn, quelle est la probabilité que 4 soient des hommes ?

---

a) On cherche $P([N_2^{(1)} \geq 3])$ et c'est :

$$\begin{aligned} 1 - P([N_2^{(1)}=0]) - P([N_2^{(1)}=1]) - P([N_2^{(1)}=2]) &= 1 - e^{-2\lambda_1}\left(1+2\lambda_1+\frac{(2\lambda_1)^2}{2!}\right) \\ &= 1 - e^{-4}(1+4+8) = 1 - 13e^{-4} \approx 0,762 \end{aligned}$$

$\boxed{\text{La probabilité qu'au moins 3 hommes entrent durant 2 mn est d'environ 0,76}}$.

b) On pose $N = N^{(1)}_{S_3^{(2)}}$ où $S_3^{(2)}$ désigne l'instant d'arrivée de la 3-ième femme.

On cherche $P([N\geq 2]) = 1 - P([N=0]) - P([N=1])$ avec

$$P([N=k]) = \int P([N=k]/[S_3^{(2)}=t])f_{S_3^{(2)}}(t)\,dt = \int_0^{+\infty} P([N_t^{(1)}=k])\frac{\lambda_2^3}{\Gamma(3)}e^{-\lambda_2 t}\,t^2\,dt$$

car $S_3^{(2)}$ suit la loi Gamma $G(3,\lambda_2)$. Comme $N_t^{(1)}$ suit la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda_1 t)$, on a alors :

$$P([N=k]) = \int_0^{+\infty} e^{-(\lambda_1+\lambda_2)t}\frac{\lambda_1^k\lambda_2^3}{k!2!}t^{k+2}\,dt = \frac{\lambda_1^k\lambda_2^3}{k!2!}\frac{(k+2)!}{(\lambda_1+\lambda_2)^{k+3}}.$$

Ainsi $P([N\geq 2]) = 1 - \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^3 - 3\frac{\lambda_1\lambda_2^3}{(\lambda_1+\lambda_2)^4} = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^3 - \left(\frac{2}{3}\right)^3 = 1 - \frac{16}{27} = \frac{11}{27} \approx 0,407$ donc la probabilité qu'au moins 2 hommes soient entrés lorsque la troisième femme se présente est $\boxed{P([N\geq 2]) \approx 0,407}$.

c) Ici $t=2$, $\lambda_1 t = 4$ et $\lambda_2 t = 8$. En utilisant l'indépendance de $N_2^{(1)}$ et de $N_2^{(2)}$, et en posant $N_t = N_t^{(1)} + N_t^{(2)}$, (N_t) est le processus des personnes qui sont entrées jusqu'à t et on a :

$$\begin{aligned} P([N_2^{(1)}=4]/[N_2=12]) &= \frac{P([N_2^{(1)}=4]\cap[N_2=12])}{P([N_2=12])} = \frac{P([N_2^{(1)}=4]\cap[N_2^{(2)}=8])}{P([N_2=12])} \\ &= \frac{P([N_2^{(1)}=4])P([N_2^{(2)}=8])}{P([N_2=12])} = \frac{e^{-4}\,\frac{4^4}{4!}\;e^{-8}\,\frac{8^8}{8!}}{e^{-12}\,\frac{12^{12}}{12!}} = C_{12}^4\frac{2^8}{3^{12}} \end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{P([N_4^{(1)}=4]/[N_{12}=12]) = C_{12}^4\frac{2^8}{3^{12}} \approx 0,238}$.
