



Centre national de télé-enseignement de Madagascar

# CNTEMAD

Apprendre et réussir en toute liberté

[www.cntemad.mg](http://www.cntemad.mg)

cnatemad@cnatemad.mc  
22 600 57

## LICENCE 1 EN INFORMATIQUE MODULE N°02

## ELECTRONIQUE 1

Mod 02



## **ELECTRONIQUE 1**

Avant de pouvoir passer à l'étude des circuits, il faut d'abord étudier les composants qui vont y être mis en œuvre.

Les composants... ce sont les pièces que vous allez utiliser pour faire vos montages électroniques ou de radio. Ce sont des résistances, des condensateurs, des bobines, des transformateurs, des diodes, des transistors etc. ... Mais on distingue les composants passifs et les composants actifs. Un composant passif est un composant qui ne nécessite pas d'énergie extérieure pour fonctionner : les résistances, les bobines, les transformateurs sont des composants passifs... à l'opposé des transistors, des tubes et des circuits intégrés qui sont des composants actifs. Une comparaison : un rasoir électrique est un composant "actif" alors qu'un rasoir de sûreté, (ou "Gilette") est "passif".

L'important dans ce cours est de connaître les différentes sortes de résistances, de condensateurs, de bobines, ... de savoir comment on les fabrique, de savoir quel type utiliser dans une application particulière, de comprendre leurs paramètres essentiels. Nous verrons alors dans les chapitres suivants comment mettre ces composants en œuvre.

## CHAPITRE 1

### LES RESISTANCES

#### 1.1. Généralités

On pourrait dire qu'une résistance est un composant qui fonctionne précisément comme son nom l'indique c'est-à-dire qu'elle offre une "résistance" (suivant le dictionnaire : "qualité d'un corps qui réagit contre l'action d'un autre corps") au passage du courant électrique.

On pourrait aussi considérer qu'une résistance est un composant qui a un comportement entre celui du conducteur parfait et celui de l'isolant parfait.

L'unité de mesure de résistance est l' ohm, symbolisé par la lettre grecque oméga  $\Omega$ .

Un ohm représente une résistance qui, lorsqu'on lui applique 1 volt, est traversée par un courant de 1 ampère.

Mais on utilise aussi fréquemment les unités dérivées suivantes :

- le milliohm, symbolisé par  $m\Omega$ ,  $1 m\Omega = 10^{-3}$  ohm,
- le kilohm, symbolisé par  $k\Omega$ ,  $1 k\Omega = 10^3$  ohms, et
- le mégohm, symbolisé par  $M\Omega$ ,  $1 M\Omega = 10^6$  ohms.

Il existe deux symboles pour représenter une résistance. Le rectangle avec les deux fils de connexions est officiellement reconnu chez nous.



Figure 1.1

En pratique une résistance se présente comme ci-contre, mais nous verrons qu'il existe beaucoup d'autres formes de résistances.

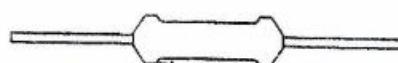


Figure 1.2

La valeur d'une résistance peut se mesurer l'aide d'un multimètre (encore appelé Volt-Ohmmètre ou VOM) en position ohmmètre.

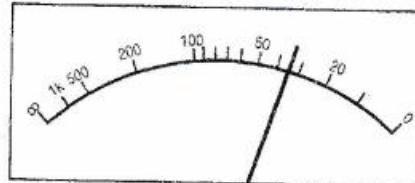
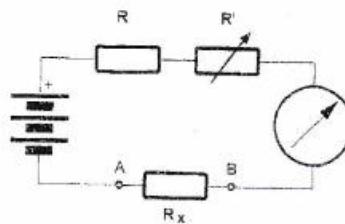


Figure 1.4

Avec un multimètre à aiguille, on utilise généralement un montage appelé "ohmmètre série", avec une pile (1,5 à 9 V en général), une résistance

1. R et une résistance R' (destiné à l'étalonnage). Il faut noter que l'échelle n'est pas linéaire. La résistance infinie est à gauche et la résistance nulle est à droite. Avant de faire la mesure il faut faire le calibrage de l'ohmmètre, en court-circuitant les deux fils et en réglant le potentiomètre de réglage pour indiquer "zéro  $\Omega$ ". Ensuite, pour faire une mesure relativement précise, il faut choisir une échelle qui donne une lecture comprise entre 1/4 et 3/4 de l'échelle
2. Avec un multimètre numérique, on utilise un générateur de courant et la mesure de résistance consiste alors à mesurer une tension aux bornes d'une résistance. En principe, il y a moins de problèmes, puisqu'il suffit de choisir la bonne gamme de mesure et de lire le résultat.

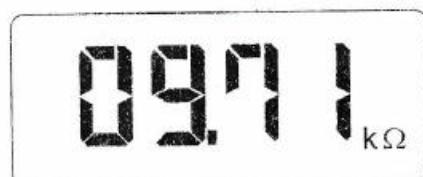
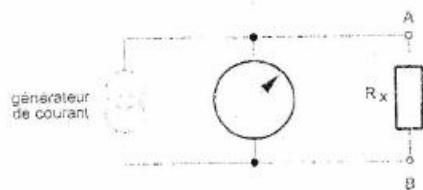


Figure 1.5

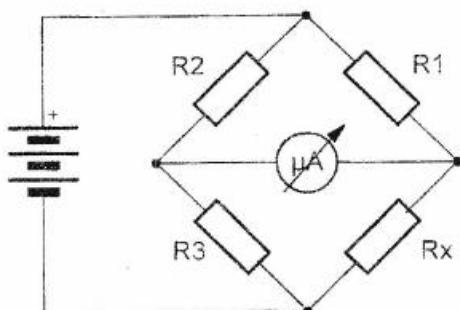
Attention:

- A l'effet de "main" : La résistance des mains de l'opérateur est de l'ordre de 0,1 à 1 MΩ (selon la peau, le degré de transpiration, etc.). Il faut donc éviter de tenir entre les doigts des résistances de plus de 10 kΩ sous peine de faire des erreurs de mesures. On peut à la limite tenir un contact fermement avec les doigts, mais pas les deux à la fois.
- Pour les mesures de très faibles résistances, il ne faut oublier que les cordons et les résistances de contacts s'élèvent à 0,3 Ω environ. Il faut donc tenir compte de cette erreur de mesure lorsqu'on mesure des résistances de moins de 10 Ω.

On peut aussi mesurer les résistances avec un pont de mesure. Le plus célèbre est le pont de Wheatstone représenté ci-dessous. Lorsque le pont est à l'équilibre, c.-à-d. lorsque le galvanomètre indique "zéro", on a

$$R_x = R_1 R_3 / R_2$$

Il est plus facile de retenir que le produit des résistances en croix est identique donc  $R_x R_2 = R_1 R_3$  mais ceci devrait en fait être classé dans le chapitre 8 où on traitera les mesures.



à l'équilibre  $R_x = R_1 R_3 / R_2$

Figure 1.6

## 1.2. Les facteurs qui déterminent la résistance

La relation de base (loi de Pouillet) qui régit les résistances est

$$R = \frac{\rho l}{s}$$

où       $\rho$  est la résistance spécifique du matériau en  $\Omega \text{ mm}^2 / \text{m}$ ,  
 $l$  est sa longueur en m  
 $s$  est sa section en  $\text{mm}^2$

La **résistance spécifique**<sup>1</sup>  $\rho$  d'un matériau est souvent exprimée en  $\Omega \text{ mm}^2/\text{m}$ , parce qu'on mesure le diamètre du fil avec un pied à coulisse en mm, qu'on en déduit la section en  $\text{mm}^2$  et que la longueur se mesure généralement en m. Toutefois, certains ouvrages utilisent des  $\mu\Omega \text{ cm}^2/\text{cm}$  ou des  $\mu\Omega \text{ cm}$ , dans ce cas on doit exprimer la section en  $\text{cm}^2$  et la longueur en cm. Ceci est un système plus "homogène", les physiciens aiment bien des "dimensions homogènes", mais c'est moins pratique car on va travailler avec des nombres où il y a beaucoup de zéro derrière la virgule .... Si on donne la résistivité en  $\mu\Omega \text{ cm}$  il faut diviser cette valeur par 100 pour obtenir la résistivité en  $\Omega \text{ mm}^2/\text{m}$ , ainsi, la résistivité du Cu est de 0,0179  $\Omega \text{ mm}^2/\text{m}$  ou 1,79  $\mu\Omega \text{ cm}$ .

$$\boxed{\text{résistance spécifique du cuivre} = 0,0179 \Omega \text{ mm}^2/\text{m} \text{ ou } 1,79 \mu\Omega \text{ cm}}$$

Ce qu'il faut surtout retenir c'est que

**la résistance est proportionnelle à la longueur, inversement proportionnelle à la section et, elle varie en fonction de la résistance spécifique**

Pour une résistance donnée, plus la tension appliquée à ses bornes est grande, plus le courant qui y circule est important et plus la puissance qui y sera dissipée sera élevée, et plus elle va chauffer (loi de Joule).

La quantité de chaleur (évaluée en calories) dégagée par une résistance est

$$Q_{th} = 0,24 R I^2$$

et la différence entre la chaleur produite et la chaleur évacuée détermine un accroissement de la température de l'élément.

Rappelons qu'une **calorie** permet d'augmenter la température de 1 gramme d'eau de 1°C.  
une **kilocalorie** permet d'augmenter la température de 1 litre d'eau de 1°C.

Pour rappel aussi, une résistance cède sa chaleur au monde extérieur

- **par conduction** : c'est un processus physique qui met en jeu des échanges d'énergies au niveau des atomes. Par exemple : si on met une barre de fer dans le feu, au bout d'un certain temps, la partie que vous tenez en main va chauffer, ceci est typiquement un échange par conduction.

<sup>1</sup> Pour information, le  $\rho$  de quelques matériaux :

cuivre	0,0179 $\Omega \text{ mm}^2 / \text{m}$
or	0,0244
argent	0,0146
aluminium	0,029
fer	0,139
carbone	35

- par convection : ce processus requiert le passage d'un fluide (un gaz ou un liquide) qui passe au-dessus de la source de chaleur. Par exemple : lorsque l'air passe sur un radiateur (ce mot est très mal choisi) de chauffage central, il chauffe cet air par convection, et,
- par rayonnement : dans ce processus, il ne requiert pas de substance pour transporter la chaleur. Par exemple lorsque vous êtes devant un feu ouvert, l'échange de chaleur se fait principalement par rayonnement.

### Application :

Le calorimètre HF : Pour mesurer des fortes puissances (c-à-d. des puissances > 1 kW), on branche l'émetteur sur une résistance de charge ( $50 \Omega$ ) autour de laquelle on fait circuler de l'eau. Le système est isolé thermiquement. Connaissant le débit, les températures d'entrée et de sortie, on peut en déduire la puissance HF :

Par définition :  $1 \text{ W/s} = 1 \text{ Joule} = 0,24 \text{ cal}$  d'où  $1 \text{ W/min} = 0,24 \times 60 = 14,4 \text{ cal}$

Comme 1 kilocalorie élève la température de 1 litre d'eau de  $1^\circ\text{C}$

d'où  $1 \text{ W/min}$  élève la température de  $0,0144$  litre d'eau de  $1^\circ\text{C}$

d'où  $P_{(\text{Watt})} = (t' - t) \times D_{(\text{l/min})} \times 1 / 0,0144$

Donc si, par exemple, au bout de 15 minutes, on a débité 276,9 litres d'eau et que la différence de  $t^\circ$  est de  $10^\circ\text{C}$ , alors  $P = 10 \times (276,9/15) \times 1/0,0144 = 12810 \text{ Watts}$

Si la puissance dissipée dans une résistance est trop forte par rapport à la dissipation maximale admise, la température de la résistance va augmenter de façon excessive, et elle pourrait même devenir rouge, fondre, et se détruire !

Il faut donc non seulement spécifier la valeur de la résistance (en calculant le circuit) mais aussi déterminer la puissance dissipée, et il faudra utiliser une résistance dont la dissipation maximum est bien supérieure à la valeur calculée. Quand on dit que la dissipation admissible doit être supérieure à la puissance dissipée, cela sous-entend un facteur de sécurité compris entre 2 x et 5 x. Si par exemple dans votre calcul vous arrivez à une dissipation de 0,0834 W, une résistance de 0,1 W chauffera très fort, tandis qu'une résistance de 0,25 W assurera une très longue vie à votre montage !

Les dissipations sont normalisées, et pour l'usage courant, on trouve des valeurs de

$1/10, 1/8, 1/4, 1/2, 1 \text{ et } 2 \text{ watts}$

mais pour des applications particulières il n'est pas rare de rencontrer des résistances dont la dissipation maximum est de l'ordre de 5, 10, 25, 50, 100, voire 250 Watts

Rappelons qu'une résistance peut apparaître sous différentes formes, et n'oublions pas qu'elle peut aussi apparaître sous des formes plus subtiles telles que la résistance d'un fil, la résistance de contact, la résistance de connexion, une résistance intégrée sur un support en céramique (film épais), une résistance intégrée sur une puce électronique ("chip"),...

Si la température de la résistance varie, on observera alors une variation de la valeur de la résistance, on dit qu'à une résistance possède un coefficient de température.

Le coefficient de température traduit la variation relative de la valeur de la résistance en fonction de la température.

Le coefficient de température des métaux est positif, c'est-à-dire que la résistance augmente lorsque la température augmente.

$$R = R_0 (1 + \alpha t)$$

$\alpha$  est le coefficient de température<sup>2</sup>. Cette loi est encore connue sous le nom de loi de Matthiessen. On peut encore la transformer en

$$t - t_0 = ((R_0 / R) - 1) \cdot (1/\alpha) + T$$

Voici quelques valeurs types de  $\alpha$ :

cuivre	+ 0,004 /°C
or	+ 0,0037
argent	+ 0,004
aluminium	+ 0,004
fer	+ 0,004
constantan	0
carbone	- 0,0007

Pour la plupart des métaux, le coefficient de température est positif. Pour quelques matériaux, le coefficient de température est négatif, c'est-à-dire que la résistance diminue lorsque la température augmente, par exemple, le carbone a un coefficient de température négatif qui se situe entre  $-25 \cdot 10^{-6}$  et  $-200 \cdot 10^{-6}$  par °C.

Ainsi, si une résistance mesure 3000 ohms à 25°C, et que son coefficient de température est de  $-80 \cdot 10^{-6} /{^\circ}\text{C}$ , alors pour une température de 75 °C, sa valeur sera de  $3000 (1 - 50 \times 80 \cdot 10^{-6}) = 3000 (1 - 4 \cdot 10^{-3}) = 2988$  ohms.

Exercices :

	Problème :	solution :
1)	L'induit d'un moteur est bobiné avec du fil de Cu et possède à 20°C une résistance de 0,2 Ω. Pendant le fonctionnement cette résistance est portée à 0,25 Ω. calculez la température.	$t - 20 = ((0,25/0,2) - 1) ((1/0,004) + 20)$ $t - 20 = 0,25 \times 270 = 67,5$ donc $t = 67,5 + 20 = 87,5$ °C
2)	Fabrication d'une résistance de 12 Ω à 20°C, avec du fil de maillechort d'un diamètre de 2 mm et dont $\rho = 0,3 \mu\Omega/\text{m}$ à 0°C et $\alpha = 0,0004$ . Quelle est la longueur du fil ?	$s = 3,14 \text{ mm}^2$ $\rho = 0,3 (1 + 0,0004 \times 20) = 0,3024 \mu\Omega/\text{m}$ $l = 12 \times 3,14 \times 10^{-6} / 0,3024 \cdot 10^{-6} = 124 \text{ m}$
3)	Un réseau est construit avec du fil de cuivre de 25 mm <sup>2</sup> . Quelle est la section du fil d'aluminium qui aurait la même résistance ?	$0,0179 \times l / 25 = 0,029 \times l / S$ donc $S = 0,029 \times 25 / 0,0179 = 40,5 \text{ mm}^2$
4)	Deux bobines ont la même résistance, mais l'une a 1 mm de diamètre, l'autre en a 2. Si la première bobine mesure 10 m, quelle est la longueur de la deuxième ?	$l / s = l' / 4 s$ donc $l' = 4 l = 4 \times 10 = 40 \text{ m}$
5)	Deux bobines ont la même résistance, mais l'une a un fil de 1 mm <sup>2</sup> , l'autre de 2 mm <sup>2</sup> . Si la première bobine mesure 10 m, quelle est la longueur de la deuxième ?	$l / s = l' / 2 s$ donc $l' = 2 l = 2 \times 10 = 20 \text{ m}$
6)	Une génératrice a une ddp de 110 V et débite 275 A qui doivent être transportés sur une distance de 200 m par des câbles en Cu ( $\rho=0,0154$ et $\alpha 0,0004$ ). On veut que la charge soit alimentée par 100 V. Quelle est la section des câbles à utiliser ?	$r = (110 - 100) / 275 = 0,036 \Omega$ $s = 0,0154 \times 200 / 0,036 = 85,5 \text{ mm}^2$

En fonction du temps, sous l'effet de l'humidité ou d'agents chimiques et atmosphériques, la valeur nominale d'une résistance peut varier, on définit ainsi la stabilité d'une résistance dans le temps.

Certaines résistances portent un nom qui désigne spécifiquement leur application, par exemple on parlera

- d'une **résistance chutrice** si la fonction principale est de créer une chute de tension (par exemple pour pouvoir utiliser un relais 6 V dans un montage alimenté en 12 V)
- d'une **résistance de saignée** ("bleeder") si elle a pour but de décharger un condensateur après la coupure de la tension d'alimentation.
- d'un **shunt**, si la résistance est en parallèle sur un ampèremètre pour en diminuer la sensibilité,
- d'une **résistance additionnelle** si elle sert à augmenter le calibre d'un voltmètre... etc.

Dans ce monde rien n'est parfait et une résistance n'échappe pas à cette loi, elle possède malheureusement de l'inductance parasite (fil de connexion et le bobinage même d'une résistance bobinée), et de la capacité parasite (capacité entre chacune des spires de la résistance, entre les fils de connexions,...). L'inductance parasite et la capacité parasite limitent généralement la plage de fréquence d'utilisation d'une résistance.

## 1.3. Codes de marquage

Il n'est pas aisés de mesurer chaque résistance que l'on devra utiliser pour réaliser un montage, il n'est pas aisés de sortir chaque fois le multimètre pour connaître la valeur de la résistance. C'est pourquoi les fabricants de résistances ont décidé de "marquer" leurs résistances avec un code.

Toutefois lors d'un dépannage, ou lorsqu'il y a un doute (lisibilité des couleurs) on n'hésitera pas à reprendre l'ohmmètre pour contrôler ...

### 1.3.1. Code des couleurs

On distingue des résistances avec 4, 5 ou 6 bandes de couleurs.

On commence par tenir la résistance horizontalement devant soi, et s'il y a un plus grand espace non marqué, on le met à droite ; c'est le cas des résistances à 4 ou 5 bandes.

Pour les résistances à 6 bandes, il est un peu plus difficile de trouver quel est le bon côté, mais on remarquera que l'espace entre les bandes n'est pas identique.

- si la résistance comporte 6 anneaux de couleurs, alors l'anneau le plus à droite indique le coefficient de température,
- l'anneau suivant indique la tolérance,
- l'anneau qui précède indique un multiplicateur (sous forme de 10 exposants quelque chose)
- les 2 ou 3 anneaux à gauche indiquent la valeur

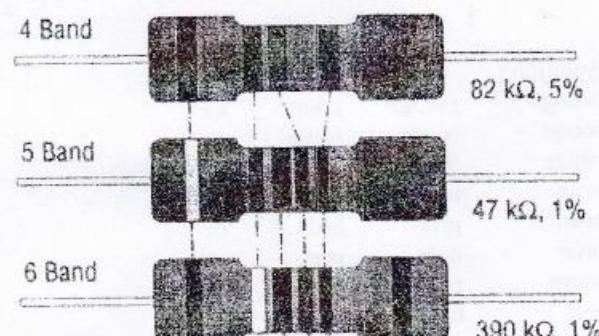


Figure 2.1.6.

	valeur	multiplicateur	tolérance	coeff. de $t^{\circ}$
(rien)			$\pm 20\%$	
argent		$\times 0,01$	$\pm 10\%$	
or		$\times 0,1$	$\pm 5\%$	
noir	0	$\times 1$		$200 \cdot 10^{-6}$
brun	1	$\times 10$	$\pm 1\%$	$100 \cdot 10^{-6}$
rouge	2	$\times 100$	$\pm 2\%$	$50 \cdot 10^{-6}$
orange	3	$\times 1k$		$15 \cdot 10^{-6}$
jaune	4	$\times 10k$		$25 \cdot 10^{-6}$
vert	5	$\times 100k$	$\pm 0,5\%$	
bleu	6	$\times 1M$	$\pm 0,25\%$	
violet	7	$\times 10M$	$\pm 0,1\%$	
gris	8			
blanc	9			

# INFORMATIQUE - L1I / ELECTRONIQUE 1 / MODULE 2

La partie grise de ce tableau doit être connue par cœur, non seulement pour les besoins habituels, mais aussi pour l'examen de radioamateur.

Voici un moyen mnémotechnique pour retenir les couleurs :

Ne Noir 0	Mangez Marron 1	Rien Rouge 2	Ou Orange 3	Jeûnez Jaune 4	Voilà Vert 5	Bien Bleu 6	Votre Violet 7	Grande Gris 8	Bêtise Blanc 9
-----------------	-----------------------	--------------------	-------------------	----------------------	--------------------	-------------------	----------------------	---------------------	----------------------

## Exercices:

Quelle est la valeur de la résistance marquée...

					Solution :
orange	orange	jaune	or		330 k 5%
brun	noir	rouge	or		1 k 5%
brun	noir	jaune	or		100 k 5%
orange	blanc	brun	or		100 5%
brun	noir	bleu	or		390 5%
jaune	violet	rouge	or		10 M 5%
rouge	rouge	or	or		4,7 k 5%
orange	orange	rouge	argent	brun	2,2 5%
bleu	gris	rouge	or		3,32 1%
rouge	violet	rouge	or		6,8 k 5%
brun	noir	noir	or		3,7 k 5%
brun	gris	rouge	or		10 5%
brun	vert	brun	or		1,8 k 5%
brun	noir	noir	brun	brun	150 5%
brun	noir	rouge	or		1 k 1%
brun	noir	rouge	or		1 k 5%

Quelles sont les couleurs d'une résistance de ...

		Solution :
330 k	5%	orange orange jaune or
2,2 k	5%	rouge rouge rouge or
3,9 k	5%	rouge rouge blanc rouge or
10 k	5%	brun noir orange or
180	5%	brun gris brun or
1 M	5%	brun noir vert or
22	5%	rouge rouge noir or
5,6 k	5%	vert bleu rouge or
3,32	1%	orange orange rouge argent brun
100	5%	brun noir brun or
18 k	5%	brun gris orange or
47 k	5%	jaune violet orange or
1100	1%	brun brun noir brun

## 1.3.2. Code à chiffres

Pour les résistances de puissance, de précision et pour les résistances CMS, le marquage se fait en clair.

Mais notons aussi qu'un code d'origine japonaise tend à s'imposer maintenant, principalement sur les schémas, mais aussi sur les composants, il consiste en 3 chiffres, les deux premiers donnent la valeur, le dernier donne le multiplicateur exprimé en  $10^x$  ;

- Exemples :    223    représente  $22 \times 10^3$  soit 22 x 1000 ohms soit 22 kilohms  
              470    représente  $47 \times 10^0$  soit 47 ohms (il y a 0 zéro !)  
              685    représente 6.800.000 ohms soit 6,8 Mohms

Sur les schémas européens on utilise un code assez semblable : une lettre représente un multiplicateur :

E = unité	K = kilo	M = méga
-----------	----------	----------

la lettre est placée comme point décimal

# INFORMATIQUE - L1I / ELECTRONIQUE 1 / MODULE 2

<u>exemples :</u>	<b>22K</b>	représente 22 000 ohms soit 22 kilohms
	<b>47E</b>	représente 47 ohms
	<b>0E1</b>	représente 0,1 ohms
	<b>5K6</b>	représente 5 600 ohms ou 5,6 kilohms
	<b>6M8</b>	représente 6 800 000 ohms ou 6,8 Mohms..

## 1.4. Tolérance et valeurs normalisées

Supposons que dans un montage donné, le calcul du circuit nous conduit une valeur de 4634,91 ohms, il est inconcevable de commander une résistance de 4634,91 ohms au marchand de composants, non seulement parce que les stocks de composants seraient gigantesques, mais aussi parce que dans la plupart des cas une telle précision n'est pas requise.

C'est ainsi que l'on a décidé de normaliser des séries de résistances, et de définir des classes de tolérances telles que

**20%, 10% , 5% , 2% , 1% , etc..**

Cela veut dire qu'une résistance marquée 4700 ohms  $\pm 10\%$  aura une valeur réelle comprise entre 4230 ohms c.-à-d.  $4700 - 10\% = 4700 - 470$  , et, 5170 ohms c.-à-d.  $4700 + 10\% = 4700 + 470$  , et probablement que dans un lot (d'un million d'exemplaires peut être ?) il y en aura une qui vaudra précisément 4634,91 ohms !

D'autre part, pour le fabricant il faut que toutes les résistances sortant de la chaîne de fabrication puissent entrer dans "la fourchette" d'une valeur normalisée, sinon il aurait un "surplus" invendable !

En termes mathématiques, si  $t$  est la tolérance, il faut donc que chaque valeur normalisée dans la série, soit égale à la précédente multipliée par  $(1 + 2t)$ .

Par exemple, si on veut faire une série à 10%, en partant de la valeur 10 ohms, nous aurons donc :

- 10  $\Omega$
- puis  $10(1 + 2 \times 0,01) = 10 \times 1,2 = 12 \Omega$
- puis  $12(1 + 2 \times 0,01) = 12 \times 1,2 = 14,4 \Omega$  , arrondissons à 15  $\Omega$
- puis  $15 \times 1,2 = 18 \Omega$  et ici il n'est pas nécessaire d'arrondir,
- puis  $18 \times 1,2 = 21,6 \Omega$ , arrondissons à 22  $\Omega$
- puis  $22 \times 1,2 \dots$  etc.

On obtient ainsi les valeurs normalisées dans la série à 10% :

**10, 12, 15, 18, 22, 27, 33, 39, 47, 56, 68, 82**

et multiples et sous-multiples, cette série est encore appelée E12 parce qu'il y a 12 valeurs par décade.

Pour la série à 5% nous avons :

**10, 11, 12, 13, 15, 16, 18, 20, 22, 24, 27, 30,  
33, 36, 39, 43, 47, 51, 56, 62, 68, 75, 82, 91**

et multiples et sous-multiples, cette série est encore appelée E24 parce qu'il y a 24 valeurs par décade.

Et enfin pour la série à 1%

100, 102, 105, 107, 110, 113, 115, 118, 121, 124,  
127, 130, 133, 137, 140, 143, 147, 150, 154, 158,  
162, 165, 169, 174, 178, 182, 187, 191, 196, 200,  
205, 210, 215, 221, 226, 232, 237, 243, 249, 255,  
261, 267, 274, 280, 287, 294, 301, 309, 316, 324,  
332, 340, 348, 357, 365, 374, 383, 392, 402, 412,  
422, 432, 442, 453, 464, 475, 487, 499, 511, 523,  
536, 549, 562, 576, 590, 604, 619, 634, 649, 655,  
681, 698, 715, 732, 750, 768, 787, 806, 825, 845,  
866, 887, 909, 931, 953, 976

et multiples et sous-multiples et encore appelée série E96.

Ne mémorisez pas la série E96, mais nous vous conseillons d'essayer de connaître la série E24, c.-à-d. celle à 5 % , car vous l'utiliserez très fréquemment ! C'est pour cette raison que nous avons mis la série E24 en gras !

## 1.5. Types de résistances

### 2.1.5.1. Les résistances fixes

- **Résistances agglomérées** : Elles sont constituées de bâtonnets de matière résistante moulée, à base de carbone. Ces résistances ont un souffle relativement élevé, une stabilité médiocre, et un coefficient de température fort variable. Si ce type de résistance fut fortement utilisé par le passé, actuellement il n'est pratiquement plus utilisé. Nous le mentionnons simplement "pour mémoire".

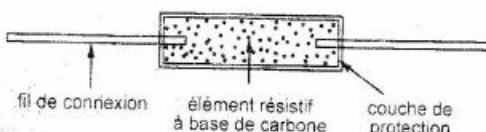


Figure 1.7

- **Résistances à couche métallique** : Sur un cylindre en matière céramique on dépose une mince couche de métal (alliages de chrome et de nickel) par vaporisation. Cette couche résistante est recouverte d'une peinture protectrice. Le contact est réalisé soit au moyen de coupelles métalliques, soit directement par les fils de connexions qui pénètrent dans le cylindre de céramique. Pour des valeurs élevées de résistance, la couche est déposée sous forme de spirale. Les fils de connexions peuvent parfois être repliés pour un montage vertical.

Les valeurs courantes vont de 1 ohm à 22 Mohms. La dissipation varie de 1/8 Watt à 3 Watts. Le coefficient de température est positif ( $0,1 \cdot 10^{-3} /{^\circ}\text{C}$ ).

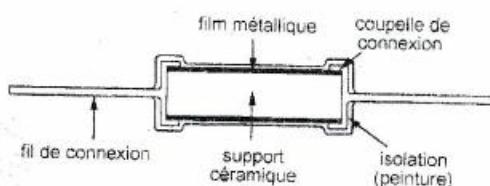


Figure 1.8.

Mais, même si la puissance n'est pas dépassée, ces résistances ont une tension limite. Soit une résistance de 1 Mohms et d'une dissipation de 1/2 Watts, on pourrait en déduire qu'on peut appliquer une tension maximale de 707 V. Ceci n'est en fait pas le cas car il y aura claquage du diélectrique (le support en céramique, la couche de peinture de protection, etc ...) pour une tension plus faible. En général la tension maximum est de 200 à 350 V.

Les résistances à couche métallique sont certainement les résistances les plus utilisées.

- **Résistances de précision :** Dans les appareils de mesures, on utilise habituellement des résistances de hautes précisions (0,01% à 1%).
- **Résistances bobinées<sup>3</sup> :** Elles sont constituées par un fil résistant enroulé sur un tube en céramique, l'enroulement est ensuite recouvert d'un ciment réfractaire ou d'un vernis vitrifié qui le protège. Parmi les alliages résistants qui peuvent être utilisés citons
  - le nickel-chrome (NiCr)
  - le nickel-fer,
  - le manganin (86%Cu-12%Mn-2%Ni) dont la résistivité est de  $43 \mu\Omega \cdot \text{cm}$
  - le constantan (54%Cu-45%Ni-1%Mn) dont la résistivité est de  $50 \mu\Omega \cdot \text{cm}$

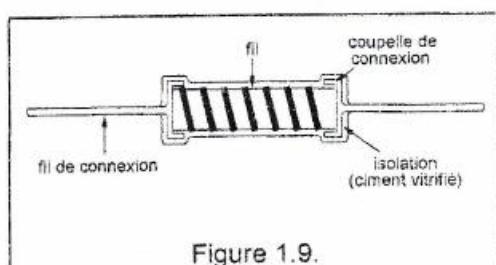


Figure 1.9.

- le zérain (88% Cu - 6% Mn - 6% Ge) dont la résistivité est de  $43 \mu\Omega \cdot \text{cm}$
- le maillechort dont la résistivité est de  $0,344 \mu\Omega \cdot \text{cm}$

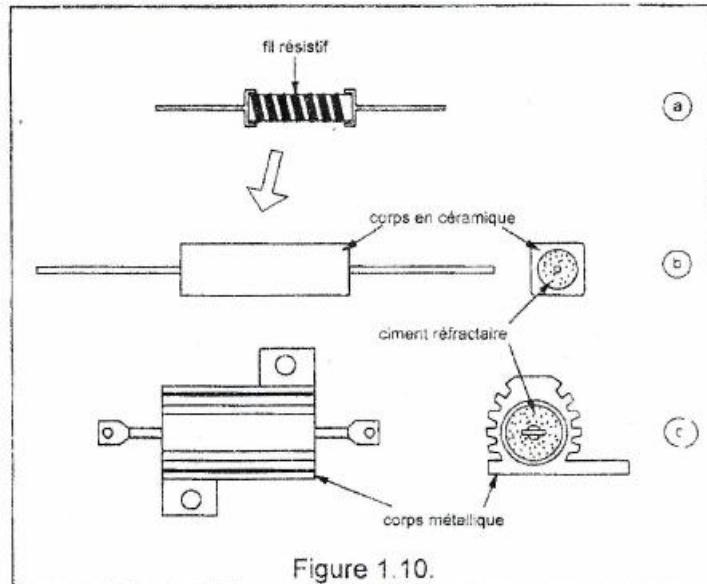


Figure 1.10.

Comparez ces résistivités à celle du cuivre qui est de  $0,0179 \Omega \cdot \text{mm}^2/\text{m}$  ou  $1,79 \mu\Omega \cdot \text{cm}$ . Ces résistances sont principalement utilisées lorsqu'il faut dissiper une puissance importante, par exemple pour les circuits électroniques de forte puissance, dans les alimentations, etc.

Les valeurs courantes vont de 0,1 à 22 kohms, la dissipation va de 1 à 250 Watts. Il existe aussi différents types de connexions : par fils à souder, par cosses à souder ou par cosses à visser.

Pour les plus basses puissances (1 à 10 W) l'aspect d'une résistance bobinée ressemble fort à la résistance à couche (film) métallique, sauf qu'elle est plus grosse, et que l'on voit nettement l'allure du bobinage dans la couche de protection qui est dans ce cas soit un vernis vitrifié soit un ciment réfractaire.

Pour des puissances plus importantes, le corps de la résistance (voir fig. a) composé d'un support cylindrique en céramique sur lequel est bobiné le fil résistif et muni de ses coupelles de connexion est noyé dans un corps en céramique et celui-ci est rempli de ciment réfractaire (Voir figure b). Le fait d'augmenter le volume et la surface de contact avec l'air permet d'augmenter la dissipation. On trouve ainsi des résistances de 5 et 10 W, avec des valeurs courantes de 0,1 à 100 kohms.

Mais on peut aussi noyer l'élément résistif (fig. a) dans un corps métallique (Voir figure c). Cette résistance peut alors être fixée sur le châssis ou sur un refroidisseur (voir théorie des refroidisseurs plus loin). On trouve ainsi des résistances de 5, 10, 25, 50 et 100 Watts et des valeurs courantes de 0,1 à 10 kohms.

La figure ci-contre représente encore une autre variante. Le fil est bobiné sur un cylindre en céramique et le tout est recouvert d'un ciment réfractaire. Les connexions se font par des languettes. Si la résistance doit pouvoir être ajustée, le fil résistif est rendu visible et on utilise un collier afin d'ajuster la résistance. Les puissances vont de 5 à 500 W.

Les résistances bobinées sont, après les résistances à couche métallique, les plus utilisées.

<sup>3</sup> En anglais wirewound

Par le fait même que la résistance est bobinée, elle présente une certaine self induction. La figure ci-contre représente une méthode de bobinage dite "en méandre" qui réduit considérablement la valeur de la self, toutefois cette méthode entraîne une capacité parasite importante.

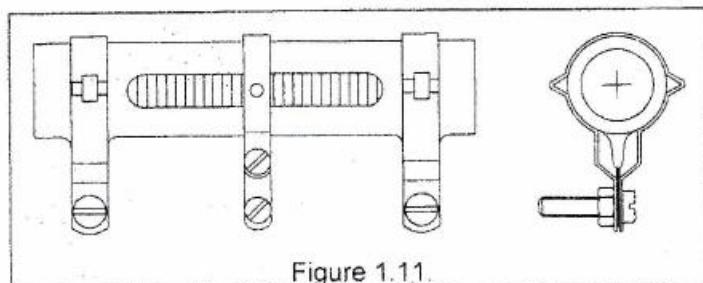


Figure 1.11.

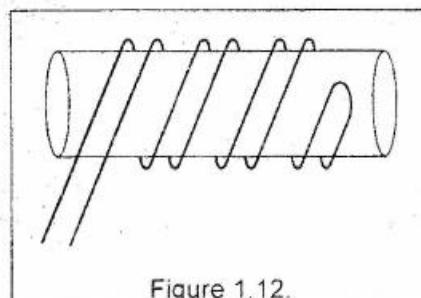


Figure 1.12.

- **Résistances en film épais** : Sur de la céramique on peut déposer par métallisation une couche de nickel-chrome pour former des résistances. La technologie des films épais offre une solution élégante pour faire des réseaux de résistance en boîtier SIL ("Single In Line package") au pas de 2,54 mm.

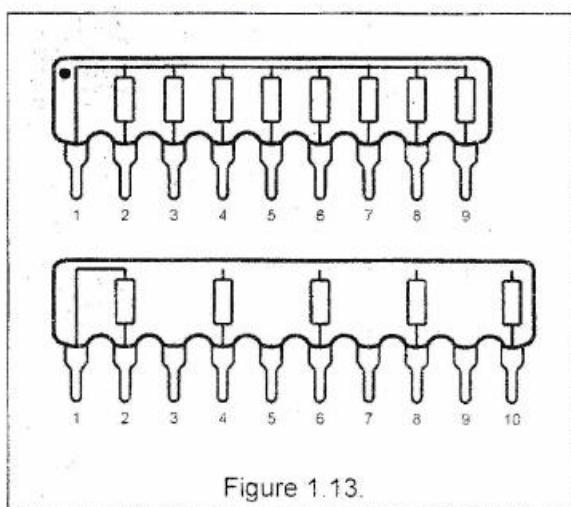


Figure 1.13.

Ces résistances, sous forme de SIL, peuvent soit

- comporter "n" résistances ayant un point commun (figure a). Le point commun est repéré par un point de couleur sur le corps du composant. Le nombre de résistances varie de 4 à 9 par SIL, par conséquent le nombre de "pattes" est aussi variable. D'autre part en informatique on utilise souvent des résistances de polarisations encore appelées "pull-up" qui servent à porter les lignes d'un bus vers un potentiel (souvent le +5 V).
- soit comporter des "n" résistances isolées les unes des autres (figure b). Ces résistances en boîtier SIL sont très intéressantes pour réaliser un convertisseur analogique/digital ou digital/analogique, car on peut obtenir une bonne précision.

Les valeurs vont de 10 ohms à 1 Mohms.

Avec cette technologie, on peut aussi réaliser des modules atténuateurs qui se présenteront sous forme d'une petite plaquette avec 3 ou 4 fils, la valeur de l'atténuation (0,1 à 25 dB), l'impédance nominale (50, 75, 150, 300 ou 600 ohms). L'avantage est que ces atténuateurs ont une très grande précision.

- **Résistances CMS :** Voir le paragraphe consacré aux "Composants à Montages de Surface" (Surface Mounted Components ou SMC).

Pour faire une résistance CMS on part d'un support en céramique, sur lequel on dépose un film métallique. Ce film est connecté à deux terminaisons.

Une résistance CMS est capable de dissiper 0,1 W et mesure 1,5 mm x 3 mm, parfois un peu moins. On trouve les valeurs de 1 ohm à 10 Mohm. La série standard est la E24 (5%). Les résistances CMS se présentent sous forme d'un petit parallélépipède avec deux côtés soudables.

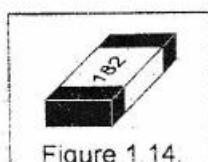


Figure 1.14.

## 1.5.2. Les résistances réglables

- Potentiomètres au graphite :** La piste du potentiomètre peut être peinte ou moulée. L'épaisseur, la largeur ou la composition de la piste, peuvent varier et modifier donc la loi de variation en fonction de l'angle.

La figure ci-contre montre les types de variations. On trouve des potentiomètres à

- variation linéaire et cette variation est repérée par la lettre A qui suit la valeur (par exemple 47 k A)
- variation logarithmique droite qui sont utilisés pour les réglages de volume audio, ils sont donc très utilisés, et ils sont repérés par une lettre B
- variation logarithmique gauche, ils sont beaucoup moins fréquents
- variation en courbe en S .

On trouve des modèles normaux ronds (angle de rotation env. 300°) ou des modèles à glissière (principalement utilisés dans les pupitres de mixage audio), des boîtiers étanches ou non, des modèles simples ou doubles (pour la stéréo), des modèles avec ou sans interrupteur, différents types de connexions (à souder normales, pour circuit imprimé, ...).

Les valeurs standard vont de 100 ohms à 4,7 Mohms.

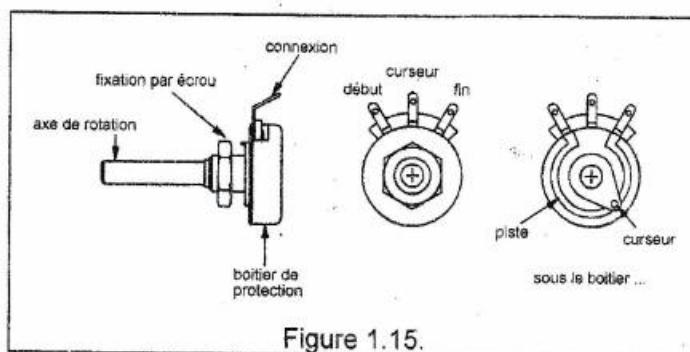


Figure 1.15.

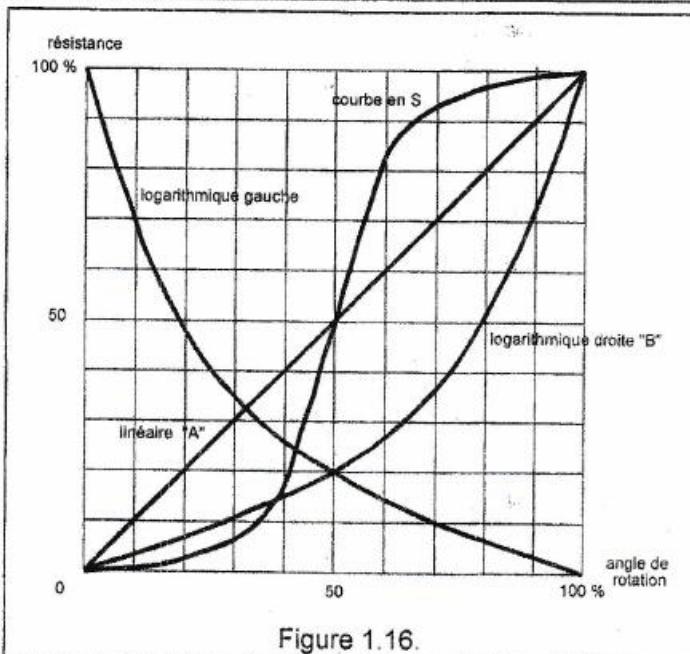


Figure 1.16.

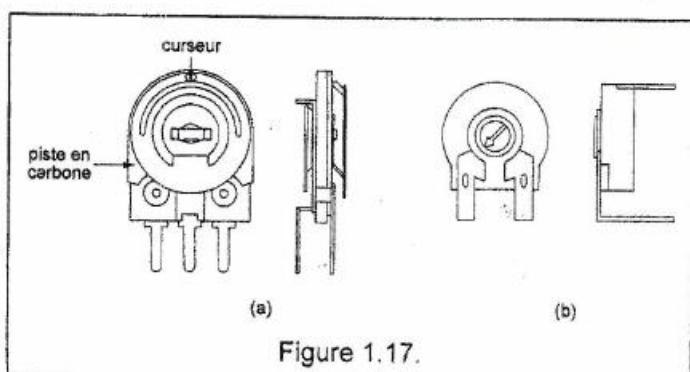


Figure 1.17.

- Potentiomètres d'ajustage à piste de carbone:** Ils sont principalement utilisés pour le réglage d'un montage en usine, en principe ils ne sont pas accessibles à l'utilisateur de l'équipement.

Il existe différents modèles, ils sont destinés soit pour un montage horizontal soit pour un montage vertical, et les connexions sont généralement au pas de 2,54 mm.

Valeurs de 100 ohms à 2,2 Mohms, dissipation de 0,1 à 0,5 Watt.

- Potentiomètres d'ajustage multitours (10 à 20 tours) :** Ils sont utilisés lorsque la précision de la position du curseur d'un potentiomètre d'ajustage normal (300° ou "1 tour") n'est plus suffisante. Ils sont également disponibles sous différents modèles : rectangulaire ou carré, pour montage vertical ou horizontal, les connexions généralement au pas de 2,54 mm. Les valeurs vont de 10 ohms à 2 Mohms, la dissipation va de 0,1 à 0,5 Watt.

## 1.5.3. Les résistances non linéaires

Il existe quelques types de résistances spéciales dont la valeur dépend d'autres paramètres ...

- **Thermistances ou résistances à coefficient de température négatif ou CTN<sup>4</sup> :**

Elles sont fabriquées avec des oxydes semi-conducteurs tels que  $\text{Fe}_2\text{O}_4$ ,  $\text{Fe}_2\text{O}_3$ , NiO ou CoO. La relation entre la résistance d'une CTN et la température de la résistance CTN est approximativement  $R = A e^{(B/T)}$  où A et B sont des constantes caractéristiques (voir figure ci contre).

Les applications principales des CTN sont :

- limitations du courant de pointe pour une alimentation, à température ambiante ( $20^\circ\text{C}$ ) la CTN va par exemple avoir une résistance de  $2 \Omega$  et elle va limiter le courant dans le circuit à  $220\text{V} \sim$  tandis que lorsqu'elle sera à température plus élevée (par exemple  $80^\circ$  à  $100^\circ\text{C}$ ) sa résistance va diminuer à  $0,01 \Omega$
- stabilisation de tension
- sonde thermométrique

On trouve des CTN sous forme :

- de disques (figure a),
- montées sur boulon, particulièrement intéressant pour la mesure de température de masse métallique (un refroidisseur de transistor par exemple) (figure b)
- de perles montées sous vide, qui sont utilisées pour la mesure de température de liquide et de gaz (figure c).

Le symbole d'une CTN est semblable à celui d'une résistance auquel on ajoute un trait oblique pour indiquer une rupture de linéarité et "-t" pour indiquer que c'est avec la **température** et de manière **négative**.

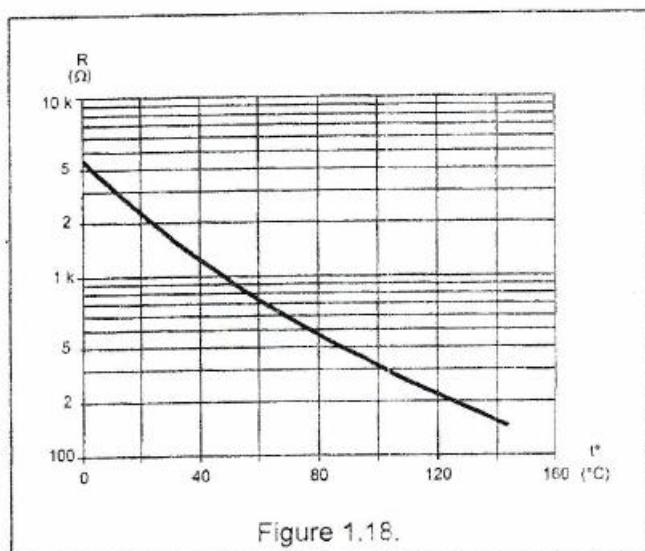


Figure 1.18.

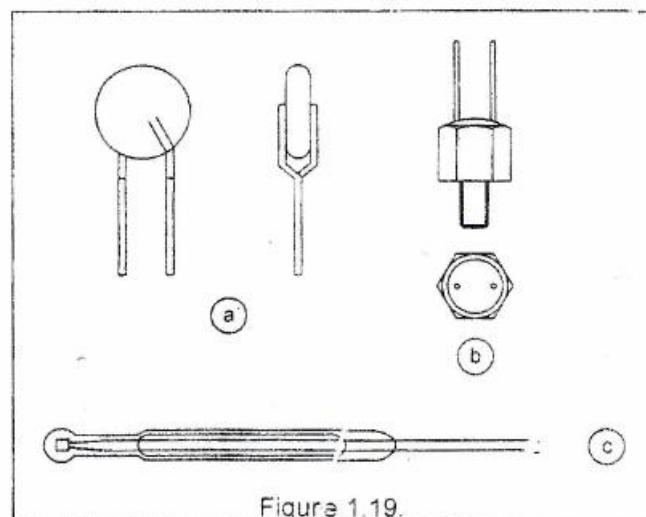


Figure 1.19.

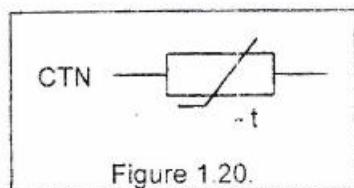


Figure 1.20.

<sup>4</sup> En anglais NTC ou thermistor

# INFORMATIQUE - L1I / ELECTRONIQUE 1 / MODULE 2

- Résistances à coefficient de température positif ou CTP :** Elles sont caractérisées par une variation très brutale de leur résistance à une température donnée. Elles peuvent être utilisées comme dispositifs de protections contre les échauffements.  
Les résistances CTP sont montées en série avec l'élément à protéger et sont disposées à l'endroit le plus critique (c-à-d "où cela chauffe").

La figure ci-contre montre également le symbole d'une résistance CTP.

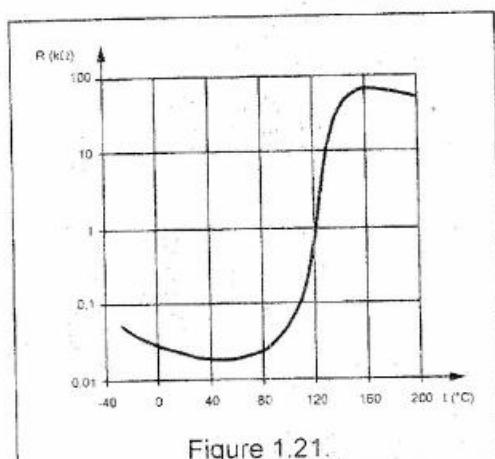


Figure 1.21.

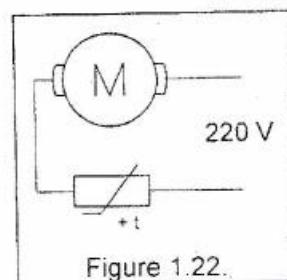


Figure 1.22.

- Varistances ou VDR ou MOV :** Elles se composent d'un agglomérat de cristaux de carbure de silicium. C'est une résistance dont la valeur dépend de la valeur de la tension électrique appliquée

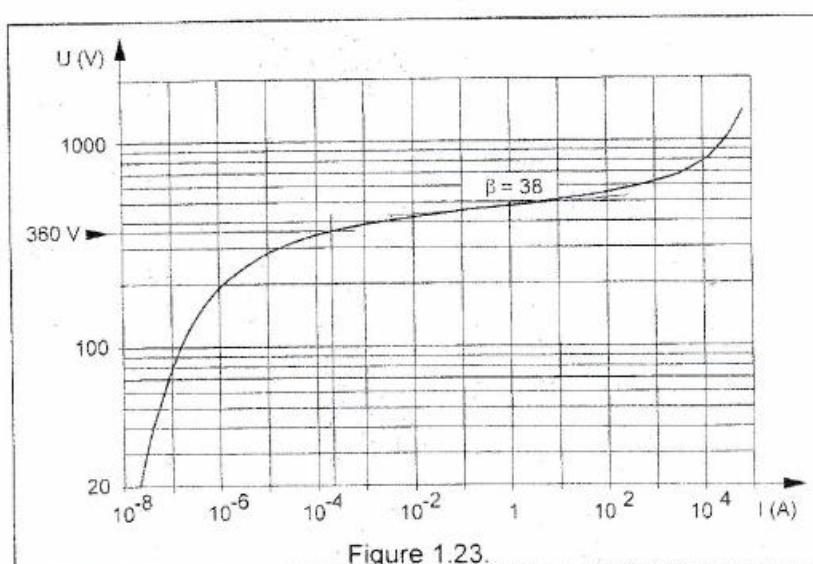


Figure 1.23.

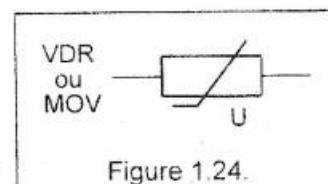


Figure 1.24.

Ce sont des résistances pour lesquelles il existe une non linéarité entre la résistance électrique et la tension appliquée.

La relation entre le courant et la tension est de la forme  $U = C I^\beta$ . Pour la partie utile de la courbe, ce coefficient  $\beta$  vaut environ 38. La loi d'Ohm<sup>5</sup> n'est donc plus d'application ici ! Elles se présentent sous formes de bâtonnets ou de disques.

Une variété de VDR est connue sous l'appellation **MOV** pour Metal Oxyde Varistor. L'application principale de cette résistance est la protection contre les surtensions. Ci-dessus la courbe d'une résistance MOV prévue pour une protection à 250 V. A la tension nominale (la tension de crête du 220 V + 10 %, soit 360 V), le courant est de l'ordre

<sup>5</sup> Pour les résistances "normales" qui répondent à la loi d'Ohm,  $\beta$  serait égal à 1 !

de 0,2 mA, tandis que pour 550 V crête (soit 400 V<sub>eff</sub>) le courant atteint 100 A ! Ce qui doit (normalement) conduire à la fusion du fusible de protection. Toutefois, si le fusible est surdimensionné, la MOV va se mettre définitivement en court-circuit, il faudra donc parfois remplacer les MOV. Il vaut mieux remplacer une MOV que d'avoir tout un équipement détruit par une surtension.

Le symbole d'une VDR ou d'une MOV est représenté ci-contre.

- **Les photos résistances ou LDR (Light Depending Resistors)** : Ce sont des résistances à base de sulfure de cadmium avec une petite fenêtre transparente et dont la valeur varie en fonction de l'éclairement habituellement de 75 à 300  $\Omega$  pour 1000 lux à quelques 10 M $\Omega$  dans l'obscurité. Elles sont utilisées pour réaliser des automates d'éclairage, des détecteurs de passage ou des détecteurs de flammes.

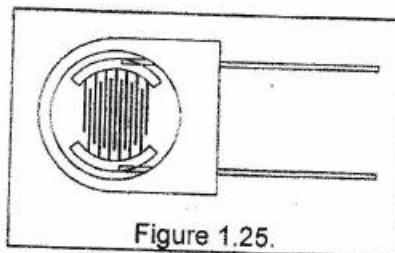


Figure 1.25.

#### 1.5.4. Les résistances spéciales

- **Les ampoules d'éclairage en tant que résistance** : Dans certains cas on peut employer des ampoules d'éclairage comme résistances, par exemple pour tester une alimentation ou pour décharger une batterie. Il ne faut toutefois pas oublier que les ampoules à filament métallique ont un très fort coefficient de température et que l'appel de courant à la mise sous tension peut atteindre jusqu'à 10 x la valeur nominale du courant. Il peut dès lors être impossible de "charger" une alimentation en test au courant maximum, puisque l'enclenchement de la lampe provoque une pointe de courant que l'alimentation détecte et qui la met en position de sécurité. Par contre, si on utilise des ampoules à filament de carbone (ces ampoules se trouvent assez difficilement !), le coefficient de température est négatif et le phénomène est juste l'inverse !
- **Antennes fictives, charges et atténuateurs** : Pendant que l'on effectue des tests sur des émetteurs, il n'est pas souhaitable que la puissance HF soit envoyée "on the air". C'est pourquoi on remplace l'antenne par une résistance de 50 ohms appelée antenne fictive ou "charge" ("dummy load").

Comme il s'agit de "résistance", nous avons classé les antennes fictives et les atténuateurs dans cette partie du cours.

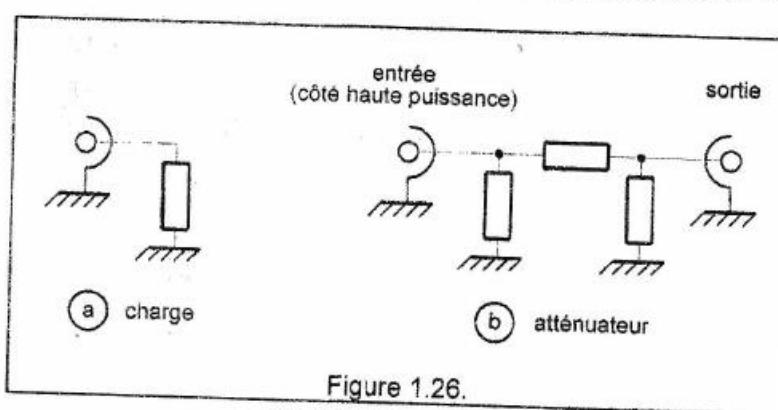


Figure 1.26.

Ces charges peuvent supporter de 5 à 1000 Watts (voire beaucoup plus pour d'autres applications). Elles sont constituées d'une résistance à faible inductance et à faible capacité parasite, elles sont terminées par une fiche coaxiale normalisée (fiche UHF, type M ou type N) (figure a) et sont munies d'un refroidisseur à ailettes afin d'évacuer la chaleur dégagée dans l'air ambiant. Pour faciliter l'évacuation de la chaleur, la résistance est parfois mise dans un bain d'huile, mais on peut aussi utiliser un ventilateur ou des moyens plus sophistiqués pour évacuer la chaleur. Sur la photo ci-contre il y a une charge de 1000 watts, avec wattmètre incorporé, et pouvant être utilisé jusqu'à 30 MHz et une autre charge pour 150 watts maximum.

Enfin une variante de la charge est l'atténuateur (figure b), selon la même technique, on réalise un atténuateur (10 à 40 dB), ceci permet de récupérer une faible partie du signal pour le transmettre à un appareil de mesure (par exemple un fréquencemètre ou un analyseur de spectre).

# INFORMATIQUE - L1I / ELECTRONIQUE 1 / MODULE 2

Un atténuateur possède donc deux fiches coaxiales, alors qu'une simple charge n'en possède qu'une.

Pour les puissances faibles (jusqu'à 2 W environ) la charge ou l'atténuateur se présente comme une fiche pour câble coaxial ou comme "transition". Pour des puissances plus élevées, la masse métallique est plus importante et la charge ou l'atténuateur est pourvu d'ailettes de refroidissement.

Certains atténuateurs sont asymétriques, c'est-à-dire qu'un seul des deux côtés est capable de supporter la puissance élevée, mais bien sûr, si on n'applique qu'une faible puissance, ils sont tout à fait réversibles et possèdent la même atténuation dans un sens que dans l'autre.

Une charge ou un atténuateur sont caractérisés par

- l'impédance nominale (très souvent 50 Ω)
- la puissance maximum
- la gamme de fréquence
- et, pour un atténuateur, l'atténuation

Citons deux fabricants d'atténuateurs et de charges :  
Narda et Bird

## 1.5.5. Résumé

Pour spécifier une résistance, il faut donner sa **valeur** (en Ω), la **tolérance** (en %) sur cette valeur, sa **dissipation** (en Watts), et son **type** selon le tableau suivant :

Résistances fixes ...			les plus utilisés
Agglomérées	"pour mémoire".		
à couche métallique	usage général	1 ohm à 22 Mohms 1/8 Watt à 3 Watts	XX
Bobinées	pour de fortes puissances mais pas pour la HF !	0,1 à 22 kohms 1 à 250 Watts	X
bobinées isolées à boîtier métallique		0,1 à 10 kohms 1 à 100 Watts.	X
en film épais	réseaux de résistances atténuateurs	4 à 9 par SIL 10 ohms à 1 Mohms.	
CMS	les résistances les utilisent actuellement !!!	1 ohm à 10 Mohm 0,1 W	XX
Potentiomètres ...			
au graphite	linéaire ("A"), logarithmique droite ("B"), logarithmique gauche, courbe en S	100 ohms à 4,7 Mohms.	X
hélicoïdaux multitours		100 ohms à 100 kohms	
d'ajustage à piste de carbone		100 ohms à 2,2 Mohms 0,1 à 0,5 Watt.	X
d'ajustage multitours (10 à 20 tours)		10 ohms à 2 Mohms 0,1 à 0,5 Watt.	X
Bobinés		de 1 ohm à 200 kohms. 2 à 500 Watts	
Rhéostats	forme de potentiomètres, mais sans 3ème connexion	0,1 ohm à 10 kohms jusque 1kW.	
Résistances spéciales ...			
thermistances ou résistances à coefficient de température négatif ou CTN	coefficient de température négatif		
varistances ou VDR	la valeur de la résistance dépend de la tension		
résistances à coefficient de température positif ou PTC	protections contre les échauffements		
les photo résistances ou LDR (Light Depending Resistors)	la valeur de la résistance dépend de l'éclairage (la lumière)		
les ampoules d'éclairage en tant que résistance			
antennes fictives, charges et atténuateurs	"dummy load"		

## CHAPITRE 2

### LES CONDENSATEURS

#### 2.1. Généralités

Un condensateur est un composant qui a la particularité de pouvoir accumuler des charges électriques. Un condensateur se compose essentiellement de deux armatures, séparées par un diélectrique, chaque armature est reliée à une connexion.

Le diélectrique est un matériau isolant qui sépare les deux armatures du condensateur, et c'est précisément la nature de ce diélectrique qui constitue un critère de classification possible des condensateurs.

Un condensateur est caractérisé par sa capacité, c'est-à-dire la propriété d'un circuit électrique d'emmager une certaine quantité d'électricité sous une certaine tension. La relation de base qui régit les condensateurs est

$$C = Q/V$$

où       $Q$  est la charge en Coulomb,  
           $V$  est la tension en Volts

L'unité de capacité est le farad, symbolisé par F. Un condensateur d'une capacité de un Farad est un condensateur qui pourrait emmagasiner une charge de 1 Coulomb sous une différence de potentiel de 1 Volt.<sup>6</sup>

Mais les capacités utilisées habituellement sont assez faibles et on utilise les sous-multiples

- le **microfarad**, symbolisé par  $\mu F$ ,  $1\mu F = 1 \times 10^{-6}$  Farad,
- le **nanofarad**, symbolisé par  $nF$ ,  $1nF = 1 \times 10^{-9}$  Farad, et,
- le **picofarad**, symbolisé par  $pF$ ,  $1pF = 1 \times 10^{-12}$  Farad.

Il existe plusieurs symboles pour représenter un condensateur. Les symboles dépendent aussi parfois du type de condensateur (voir plus loin condensateur électrolytique etc). Mais le symbole ci-contre est le plus universel.

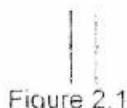


Figure 2.1

#### 2.2. Les facteurs qui déterminent la capacité

La valeur de la capacité d'un condensateur est déterminée par trois facteurs

- la capacité augmente avec la surface des électrodes (plaques)
- la capacité diminue lorsque la distance entre les électrodes (plaques) augmente
- la capacité dépend aussi de la nature de l'isolant c.-à-d. du diélectrique

<sup>6</sup> Au début de la radio (dans les années 1920-1940) on a aussi utilisé comme unité de capacité le cm : le cm est la capacité d'un condensateur à vide constitué de deux armatures de  $1 \text{ cm}^2$  et séparées de 1 cm. En fait  $1 \text{ cm} = 1.1 \text{ pF}$  ! Si dans un vieux poste de radio vous trouvez un condensateur marqué 10000 cm, cela vaut donc 11 nF, sauf s'il s'agit d'un condensateur d'accord ou arrondi, et dire que  $1 \text{ cm} \approx 1 \text{ pF}$  !

Mais ceci doit également permettre de dire que si on a deux armatures de  $100 \times 50 \text{ mm}^2$ , et espacées de 3 mm, la capacité sera égale à "à peu près"  $10 \times 5 / 0,3 = 150 \text{ pF}$  (à 10 % près évidemment !)

La relation de base qui régit les condensateurs est

$$C = \frac{\epsilon_0 \epsilon_r S}{d}$$

où      C est la capacité exprimée en Farad  
 $\epsilon_0$  est la constante diélectrique du vide =  $1 / 36 \pi 10^9 = 8,84 \cdot 10^{-12}$  F/m  
 $\epsilon_r$  est la constante diélectrique relative ( $\epsilon_r = 1$  pour l'air)  
S est la surface des armatures en m<sup>2</sup>  
d est la distance entre les armatures en m

La constante diélectrique relative  $\epsilon_r$  de quelques matériaux isolants :

	$\epsilon_r$
air	1
téflon	2,1
polyéthylène	2,3
polystyrène	2,6
papier	3
quartz	3,8
verre (pyrex)	4,8
mica	5,4
porcelaine	5,1 à 5,9
verre (à vitre)	7,6 à 8

Pratiquement tous les matériaux ont donc un  $\epsilon_r$  plus grand que 1, et toutes les valeurs se tiennent dans une fourchette de 2 à 8 environ ...

Donc si on a un condensateur à air et qu'on glisse entre les armatures une plaque de diélectrique (par exemple une plaque de verre ou un bloc de mica), la capacité va augmenter.

Ce qu'il faut surtout retenir c'est que

la capacité est proportionnelle à la surface des armatures, inversement proportionnelle à la distance entre armatures et, elle varie en fonction du diélectrique

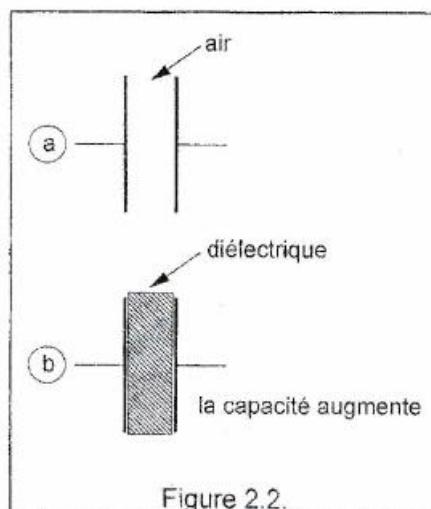


Figure 2.2.

## 2.3. L'énergie d'un condensateur

L'énergie est donnée par

$$E = \frac{1}{2} C U^2$$

$$\text{ou } E = \frac{1}{2} \frac{\epsilon S U^2}{d} = \frac{\epsilon d S U^2}{2 d^2}$$

où  $d \times S$  est le volume (V) entre les armatures et  $U^2/d^2$  est le carré du champ électrique ( $F_e$ ) d'où

$$E = \frac{1}{2} V F_e^2$$

En d'autres termes l'énergie d'un condensateur se trouve dans le diélectrique !

### Exercices :

Cachez la colonne avec les solutions et faites les exercices, puis comparez.

#### Problème :

- 1) Quelle est l'énergie dans un condensateur de  $10.000 \mu\text{F}$  chargé sous  $24 \text{ V}$  ?

#### solution :

$$E = \frac{1}{2} \times 10^{-2} \times 24^2 = 2,88 \text{ J}$$

- 2) Quelle est l'énergie dans un condensateur de  $10 \mu\text{F}$  chargé sous  $5000 \text{ V}$  ?

$$E = \frac{1}{2} \times 10^{-5} \times 5000^2 = 125 \text{ J}$$

- 3) Deux barres d'un réseau ont  $70 \times 10 \text{ mm}$ , elles sont espacées de  $35 \text{ mm}$  et ont une longueur de  $100 \text{ m}$ . La tension de service est de  $6600 \text{ V}$ . On interrompt la distribution sur le maximum de l'onde sinusoïdale. Quelle est l'énergie ?

## 2.2.4. Le courant de fuite et les pertes

Il n'existe pas non plus de condensateur parfait, le diélectrique, n'est pas un isolant parfait, il y a une fuite que l'on peut représenter par une résistance en parallèle  $R_p$ . Cette  $R_p$  est le siège d'un courant  $I_R$ , et on définit l'angle de perte ou  $\text{tg } \delta$  comme le rapport du courant dans la résistance  $I_R$  sur le courant dans le condensateur  $I_C$  :

$$\text{tg } \delta = \frac{I_R}{I_C} = \frac{1}{R C \omega}$$

$\delta$  est appelé **angle de pertes** ou **facteur de dissipation**.

Cet angle de pertes (ou ce facteur de dissipation) doit être le plus petit possible.

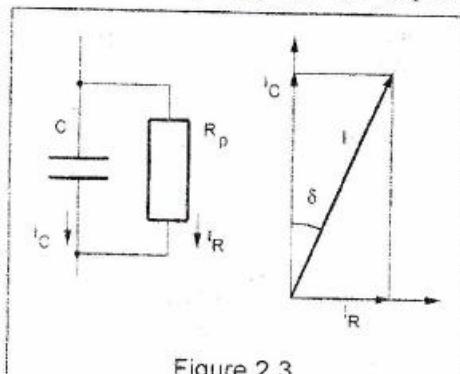


Figure 2.3.

## 2.2.5. Fonction des condensateurs

D'après le rôle joué par le condensateur dans le circuit on parle aussi de

- condensateur de **filtrage** s'il est destiné à réduire l'ondulation d'un montage redresseur (voir aussi plus loin au chapitre 3 )
- condensateur de **couplage** ou de **liaison** s'il est destiné à laisser passer le courant alternatif (généralement le signal utile qui aura été amplifié) et à bloquer le courant continu,
- condensateur de **découplage** s'il est destiné à mettre virtuellement le courant alternatif à la masse par exemple,
- condensateur d'**accord** si en parallèle avec une self ou un quartz, il détermine la fréquence de résonance du circuit,
- condensateur de **démarrage** s'il est utilisé dans un moteur et sert à créer le déphasage nécessaire à la mise en mouvement du rotor,
- condensateur d'**amélioration du facteur de puissance** s'il est utilisé dans un système électrique à fort cos φ.
- condensateur de **déparasitage** s'il sert à absorber les parasites, l'extra courant de rupture

En plus de sa capacité, une autre caractéristique d'un condensateur est sa tension d'utilisation.

## 2.6. Valeurs normalisées

Les arguments développés pour la standardisation des résistances restent encore valables ici, mais il faut toutefois remarquer que l'on se limite plus souvent à la série E12 (ou série à 10 %) tel que :

10, 12, 15, 18, 22, 27, 33, 39, 47, 56, 68, 82

avec ses multiples et sous multiples.

Par contre pour des circuits oscillants, la précision peut être beaucoup plus grande. On trouve par exemple des condensateurs céramiques destinés à réaliser des transfos à FI avec une précision de 1% et des condensateurs styroflex destinés à réaliser des filtres BF avec une précision de 0,1 % (voir § 2.2.7.5).

## 2.7. Types de condensateurs

### 2.7.1. Les condensateurs à air

Il s'agit tout simplement de deux plaques de métal séparées par de l'air! Ces condensateurs sont caractérisés par de très faibles pertes et par un courant de fuite négligeable. Ces condensateurs sont essentiellement utilisés pour réaliser des condensateurs variables (voir plus loin) ou dans quelques applications HF spéciales où on n'a pas besoin de valeur relativement faible (disons < 100 pF)

Pour des capacités de 0,1 µF les dimensions deviennent toutefois prohibitives et de plus la résistance mécanique de l'ensemble pose des problèmes.

Exercice : On veut faire un condensateur de 0,1 µF dont les plaques sont séparées de 0,1 cm. Calculez la surface des armatures?

Partant de  $C = 8,84 \times 10^{-12} \times \epsilon_r \times S / d$ , on trouve  $S = C \times d / (8,84 \times 10^{-12} \times \epsilon_r)$  donc  $S = 0,1 \times 10^{-6} \times 10^{-3} / 8,84 \times 10^{-12} = 11,3 \text{ m}^2$  soit une surface carrée de 3,36 m de côté et ceci avec un espace de 1 mm ! Bien sûr on pourrait par exemple mettre 10 plaques en parallèles, chacune espacée de 1 mm, on arriverait ainsi à 12 plaques de 1 m<sup>2</sup> ... imaginez cela pour faire un condensateur de 0,1 µF !

Remarque : si on met "n" plaques, la capacité sera égale à  $(n-1) \times$  la capacité d'un seul élément !

# INFORMATIQUE - L1I / ELECTRONIQUE 1 / MODULE 2

Un des inconvénients est la fragilité mécanique, si les plaques sont déformées et que le condensateur est soumis à une forte tension c'est à ce point que l'arc jaillira<sup>7</sup> !

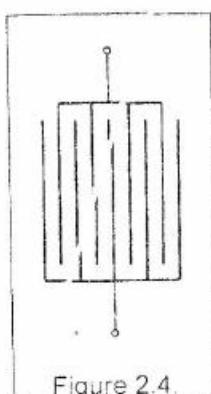


Figure 2.4.

## 2.7.2. Les condensateurs au mica<sup>8</sup>

Le mica est un minéral, c'est un silicate double d'alumine et de magnésie. Le mica est clivé en mince lameille, il est ensuite argenté. Valeur de 1.5 pF à 15 nF.

Ils sont utilisés dans les circuits d'accords où la fréquence doit être très stable. Ils sont principalement utilisés en HF.

## 2.7.3. Les condensateurs céramique

Ces condensateurs sont couramment utilisés comme condensateur de couplage, de découpage ou dans des filtres. Parmi ces condensateurs, on distingue les condensateurs tubulaires construits à partir d'un mince (0.3 mm) tube de céramique métallisé. Cette métallisation recouvre également la face interne du tube. La métallisation est coupée sur la partie externe et deux fils de connexions sont enroulés sur ce tube.

Toutefois une forme plus courante est les condensateurs disques. Un disque (de forme circulaire ou rectangulaire) est métallisé sur ses deux faces et 2 fils de connexions y sont fixés. Le tout est enrobé d'une couche de protection.

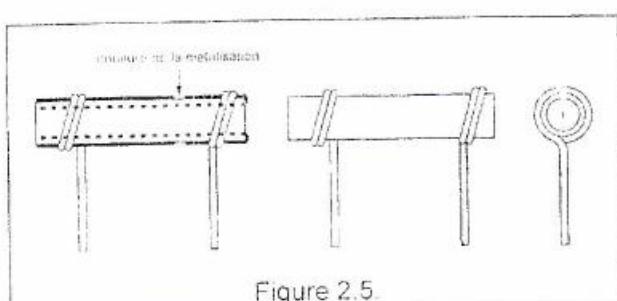


Figure 2.5.

Philips classe ses condensateurs céramiques en 2 classes :

- classe I : Ils ont une très grande résistance interne, un bon facteur Q. Ils sont utilisés dans les oscillateurs et les filtres. Les valeurs disponibles vont de 0.47 pF à 270 pF. Le corps du condensateur est gris et le trait indique la valeur du coefficient de température

<sup>7</sup> De plus, grâce à Murphy, c'est toujours dans un condensateur à air que tombera la vis, l'écrub ou la rondelle métallique !!!

<sup>8</sup> En allemand glimmer

# INFORMATIQUE - L1I / ELECTRONIQUE 1 / MODULE 2

- classe 2 : Ces condensateurs ont une perte plus importante, ils sont utilisés comme condensateurs de couplage ou de découplage. Les valeurs vont de 180 pF à 47 nF. Au-delà de 1 nF, seule la série E3 (10, 22, 47, 100,...) est employée.

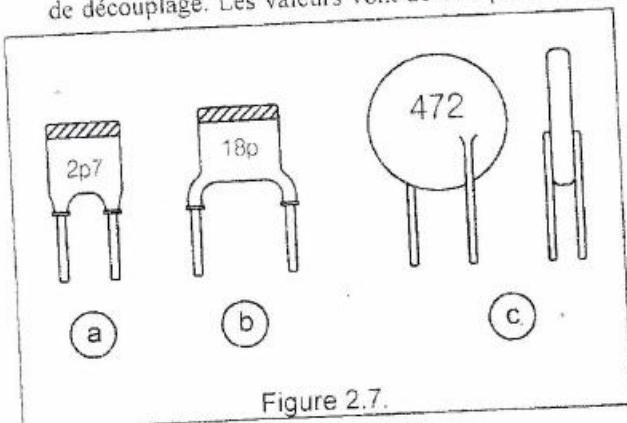


Figure 2.7.

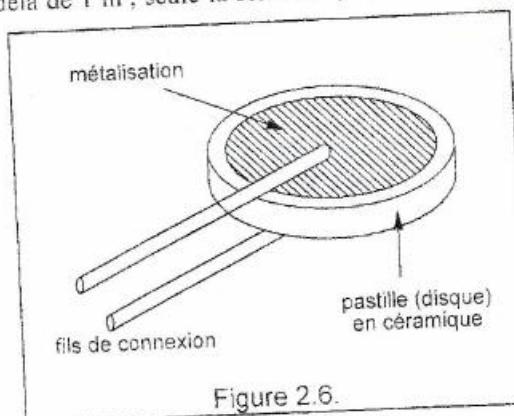


Figure 2.6.

La tension de service va de 63 à 500 V selon les modèles. Le pas de montage est de 2,54 ou 5,08 mm.

#### 2.7.4. Les condensateurs au papier

Il serait plus exact de parler de condensateur au papier imprégné, car le papier en lui-même n'est pas un très bon diélectrique, mais on dit généralement "condensateur au papier" pour simplifier. Le papier est donc imprégné de

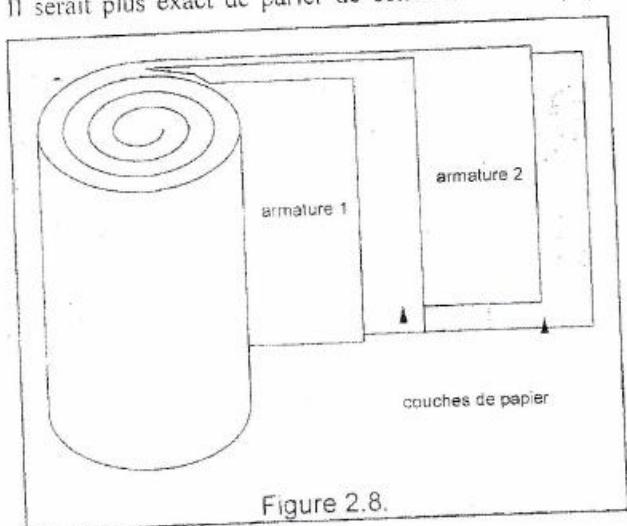


Figure 2.8.

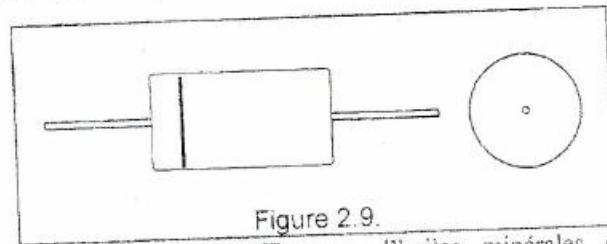


Figure 2.9.

certaines cires, de paraffine ou d'huiles minérales ou végétales.

On trouve une armature constituée d'une feuille d'aluminium de 20 µm, une feuille de papier, une deuxième armature, et une deuxième feuille de papier. Le tout est enroulé. Remarquez que les armatures dépassent légèrement et chacune d'un côté du condensateur, sur ces parties qui dépassent seront fixés les fils de connexion.

Une variante consiste à métalliser le papier par une mince couche d'Al ou de Zn. L'aspect extérieur de ces condensateurs est représenté ci-contre. Le trait indique le côté qui est relié à l'armature la plus extérieure. Dans la mesure du possible la connexion du côté trait sera mise à la masse afin d'obtenir une sorte de blindage.

Les condensateurs au papier de très forte capacité (1µF et plus) sont parfois enfermés dans des boîtiers métalliques.

On utilise parfois les lettres **MP** ("métal – papier") pour désigner ces condensateurs sur les schémas ou dans les listes de composants.

Mais ces condensateurs ne sont pratiquement plus utilisés.

## 2.7.5. Les condensateurs à film plastique métallisé

Ces condensateurs ressemblent aux condensateurs au papier, mais le diélectrique est constitué par un film plastique.

On distingue d'abord des condensateurs **styroflex** où le diélectrique est du polystyrène. Ils sont essentiellement utilisés dans les circuits d'accords, soit en basse fréquence, soit jusqu'à des fréquences de 500 kHz environ. Généralement la couche extérieure est translucide et on aperçoit juste en dessous de cette couche le début de la métallisation. Notez les sorties qui sont légèrement dissymétriques.

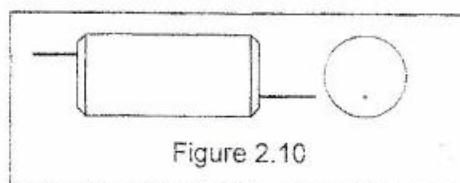


Figure 2.10

Puis viennent une série de condensateurs au polycarbonate désigné (codage DIN) par MKx. MK signifie "Metallisierte Kunststoff" ou matériau synthétique (= plastique) métallisé ou encore par FPx pour "Folie Kunststoff" c'est-à-dire feuille ou film synthétique.

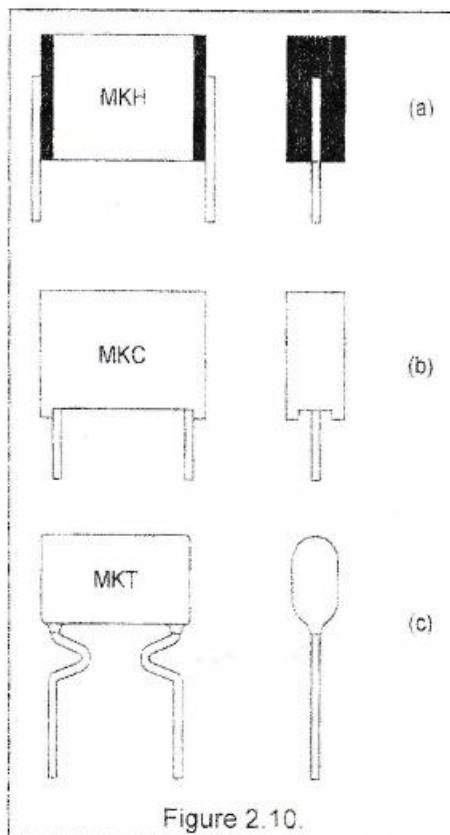


Figure 2.10.

Le x désigne plus exactement le type de diélectrique :

3ème lettre	description et usage
H = Téréphthalate de polyéthylène	Comme les condensateurs styroflex, d'apparence translucide on distingue immédiatement la couche métallisée. Les deux extrémités sont des métallisations sur lesquelles sont soudés (par point) les deux fils de connexion.

C = polycarbonate	Ces condensateurs ont une enveloppe en matière plastique, de couleur vive (différente suivant le fabricant). Utilisés essentiellement pour les couplages et découplages.
T = Téréphthalate de polyéthylène	Même diélectrique que pour les MKH, mais de fabrication différente: ces condensateurs sont protégés par une couche de peinture, et puisqu'ils sont formés par un enroulement de feuille de plastique, les bords sont arrondis.
S = polystyrol	circuit d'accord et filtres
P = polypropylène	
U = acétate de cellulose	

Tous ces condensateurs sont obtenus par enroulement de deux films plastiques métallisés. Les deux films métallisés sont enroulés avec un léger décalage latéral, afin que chacun d'eux dépasse d'un côté. Cette bordure est ensuite rabattue, puis métallisée, formant ainsi un contact avec toute la longueur du film enroulé ! Cette technique est encore appelée "shoopage".

### 2.7.6. Les condensateurs électrolytiques

On les appelle aussi condensateurs électrochimiques. Le symbole d'un condensateur électrolytique ou électrochimique est un peu particulier (voir figure ci-contre).

Les symboles des figures (a) et (b) sont les plus courants, toutefois on trouve aussi le symbole de la figure (c) dans d'anciens schémas européens et celui de la figure (d) dans d'anciens schémas américains.

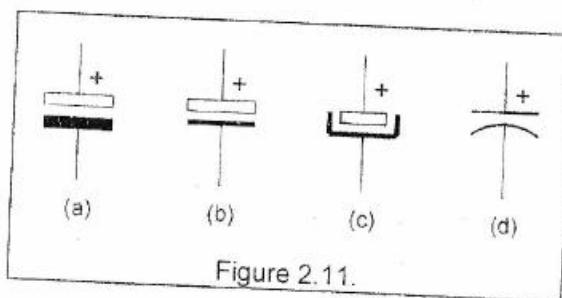


Figure 2.11.

Pour réaliser un condensateur électrolytique, on commence par préparer une **anode**, celle-ci est constituée d'une feuille d'aluminium de 20 à 40 µm, que l'on fait passer dans un bain d'acide borique, la feuille est portée à un potentiel positif par rapport à la cuve et il y a formation d'une couche d'alumine ( $\text{Al}_2\text{O}_3$ ) sur l'aluminium.

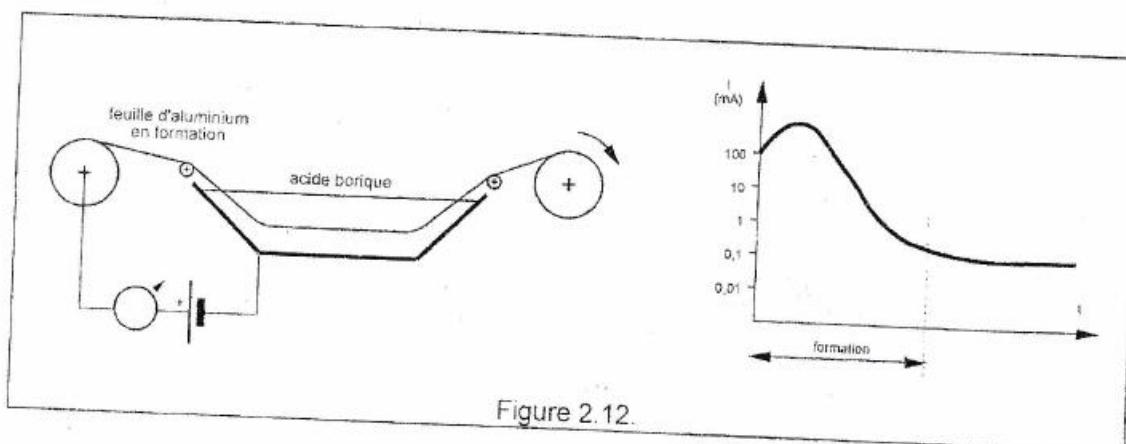


Figure 2.12.

## INFORMATIQUE - L1I / ELECTRONIQUE 1 / MODULE 2

Lorsqu'on met une simple feuille d'aluminium dans un bain d'acide borique, il faut un certain temps pour que le courant se stabilise (ordre de grandeur:  $100 \mu\text{A}$ ) on dit que l'électrode est alors formée. La longueur du bain d'acide borique et la vitesse de passage sont donc réglées pour que la feuille d'aluminium c-à-d l'anode soit correctement oxydée à la sortie.

L'anode peut être lisse ou gaufrée, cette dernière solution permet d'augmenter la capacité par unité de volume.

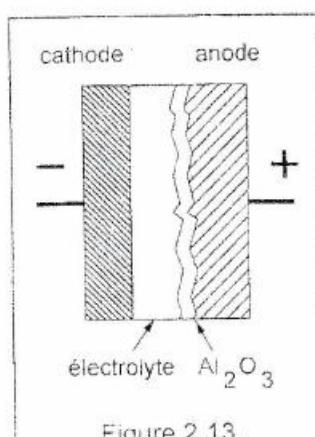


Figure 2.13.

Lorsqu'on a une anode formée, on peut alors passer à l'étape suivante:

On enroule ensuite cette anode avec une première couche de papier très absorbant, une feuille d'aluminium pur (qui constitue alors la cathode) et une deuxième couche de papier très absorbant. Le papier absorbant est imprégné d'un électrolyte (solution d'acide borique).

Le condensateur muni de ses fils de connexions est placé dans un cylindre en aluminium. Celui-ci est isolé par une feuille en plastique.

Valeurs courantes de  $1\mu\text{F}$  à  $220.000 \mu\text{F}$ . Tension de service : de 6 V à 500 V

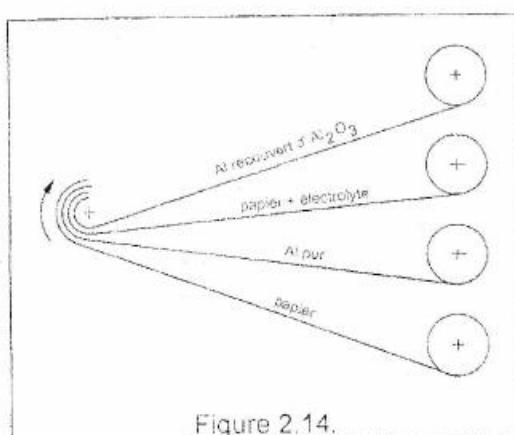


Figure 2.14.

# INFORMATIQUE - L1I / ELECTRONIQUE 1 / MODULE 2

On trouve

- des condensateurs électrolytiques à **sorties axiales** (voir fig. a) qui peuvent éventuellement être repliées à 90°. Le conteneur en aluminium est le pôle négatif. La gorge marque le côté positif.
- des condensateurs électrolytiques à **sorties radiales** (les deux sorties du même côté), le fil le plus long correspond au "+" (fig. b). Le négatif est (de plus en plus) repéré par une bande avec des flèches et des signes "-" (fig. c)
- pour les très grosses capacités (10.000  $\mu\text{F}$  et plus) le corps est gaufré de manière à permettre à l'électrolyte de se dilater (fig. d). Les bornes de connexions sont à vis (fig. e) ou à picots à soude (fig. f). La fixation peut aussi se faire par écrous (fig. g). Pour permettre à l'électrolyte de s'échapper sans faire "sauter" le condensateur, on prévoit aussi une soupape de sécurité.

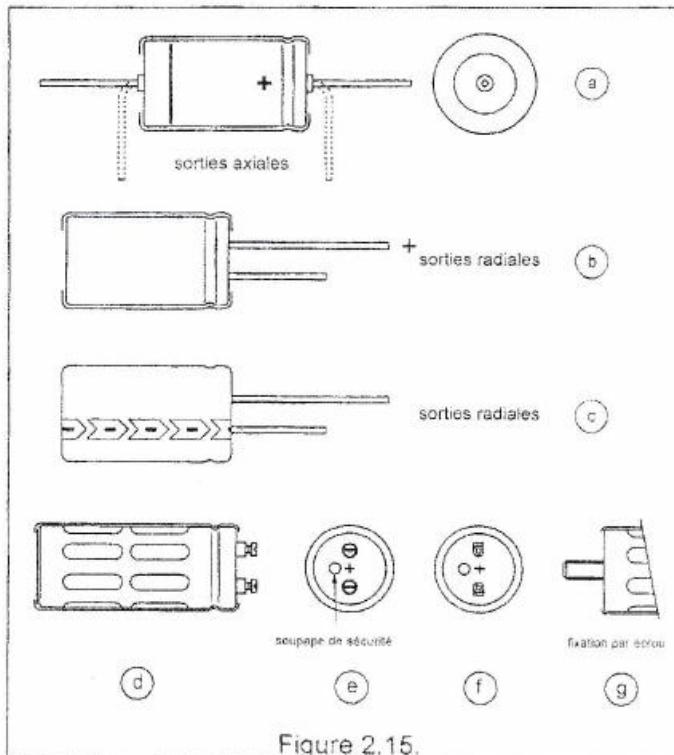


Figure 2.15.

Schéma équivalent d'un condensateur électrolytique

Le schéma équivalent d'un condensateur électrolytique est représenté ci-contre.

- $R_{fuite}$  représente le courant dans l'électrolyte
- $R_s$  représente la résistance série de la feuille d'aluminium et des connexions
- $L_s$  représente la self série de la feuille d'aluminium et des connexions. Pour le courant continu cette  $L_s$  est négligeable.

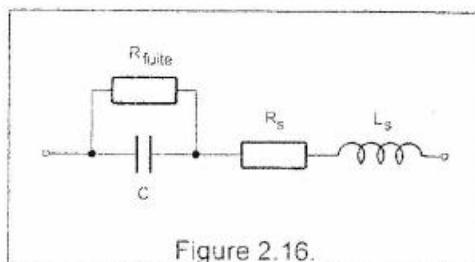


Figure 2.16.

Lorsqu'un condensateur électrolytique sera parcouru par un courant dont la plage de fréquence est relativement large, il est conseillé de placer en parallèle un second condensateur dont le comportement aux hautes fréquences est meilleur. Les condensateurs électrolytiques de filtrage sont ainsi souvent doublés d'un condensateur de 0,1  $\mu\text{F}$  céramique.

Que se passe t'il si on inverse les polarités d'un condensateur électrolytique ?

Si on inverse les polarités, la couche d'oxyde commence d'abord à se diluer dans l'électrolyte, un courant de plus en plus important prend naissance dans l'électrolyte, il y a augmentation de la température et finalement explosion du condensateur !



Condensateur électrolytique pour le courant alternatif :

Il existe cependant des condensateurs électrolytiques pour le courant alternatif (démarrage de moteurs et filtres pour haut parleur) que l'on appelle "**non polarisé**". Dans ce cas on utilise deux anodes (c-à-d deux feuilles d'aluminium oxydées) au lieu d'une seule. On trouve alors souvent les lettres "NP" sur le condensateur indiquant qu'il est non polarisé.

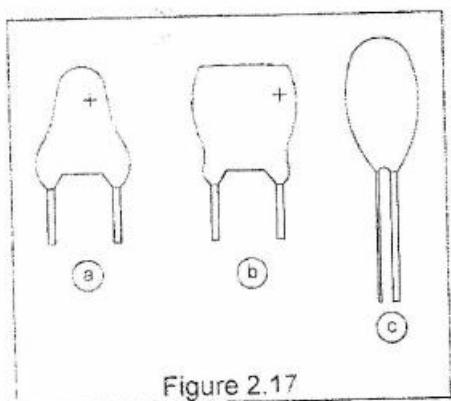


Figure 2.17

### Vieillissement des condensateurs électrolytiques:

Le problème majeur est l'évaporation de l'électrolyte, d'où une diminution de la capacité. On dit que le condensateur est "desséché". La durée de vie typique est de 15 ans à 45°C et de 2000 h (83 jours) à 105°C!

Si un condensateur électrolytique est resté longtemps sans être utilisé, le courant de fuite peut être important, et ce courant peut provoquer la surchauffe, le claquage ou même carrément l'explosion.

### 2.7.7. Les condensateurs au tantale

Il s'agit d'une sorte de condensateur électrolytique dont le diélectrique est du  $Ta_2O_5$ , qui est peu sensible aux impuretés et a un faible courant de fuite. Le symbole est le même que pour les condensateurs électrolytiques.

On trouve différentes formes, notamment en fonction de la capacité. La forme de la fig. c est appelée "goutte".

Avantages : Faible encombrement, grande stabilité et durée de vie, courant de fuite très faible,

Valeurs courantes: de 1  $\mu F$  à 100  $\mu F$ , tension de service de 6,3 V à 35 V

Tout comme pour les condensateurs électrolytiques, il faut respecter la polarité sinon c'est l'explosion



### 2.7.8. Les condensateurs variables

Pour indiquer que le condensateur est variable, le symbole du condensateur est accompagné d'une flèche. On utilise aussi les lettres CV pour désigner un condensateur variable.

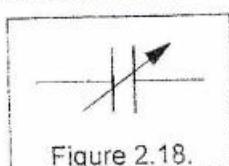


Figure 2.18.

On distingue deux façons de réaliser la variation de capacité: la variation de surface et la variation de diélectrique.

Un condensateur variable est caractérisé par

- la capacité maximum, lorsque les lames mobiles offrent un maximum de surface en regard des lames fixes,
- la capacité minimum ou capacité résiduelle, lorsque les lames mobiles offrent un minimum de surface en regard des lames fixes
- la loi de variation de la capacité en fonction de l'angle de rotation.
- la tension nominale : pour un oscillateur local variable une tension de 50 V est généralement suffisante, mais pour l'étage de sortie d'un émetteur à tubes, une tension nominale de l'ordre de 1000 V est souvent nécessaire. Cette tension est fonction de l'espacement entre les lames.

# INFORMATIQUE - L1I / ELECTRONIQUE 1 / MODULE 2

La forme des plaques va déterminer la loi de variation de la capacité en fonction de l'angle, on distingue ainsi les condensateurs variables à variation linéaire de capacité, à variation linéaire de longueur d'onde et à variation linéaire de fréquence.

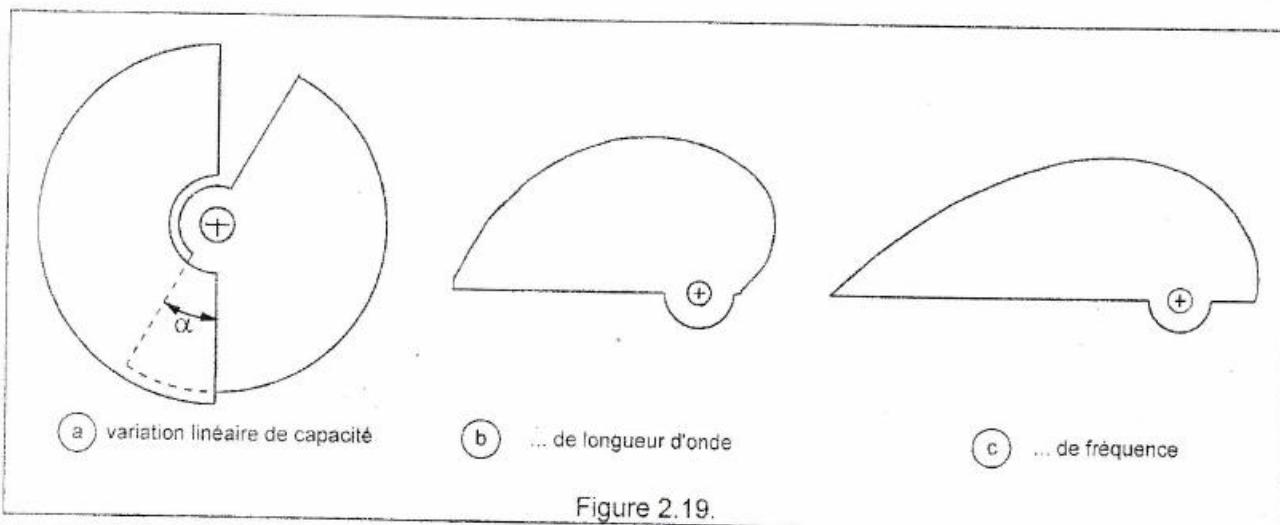


Figure 2.19.

Plus particulièrement pour les amplificateurs à tubes, et pour les coupleurs d'antenne de forte puissance, il faudra aussi tenir compte de la tension de service qui est fonction de l'espacement entre les lames.

Généralement le rapport entre la capacité résiduelle (capacité minimum) et la capacité maximum est de 1 à 10. Par conséquent comme  $f = 1 / (2 \pi \sqrt{LC})$ , le rapport entre la fréquence maximum et la fréquence minimum est de  $\sqrt{10}$  soit 3,16.

## 2.7.9. Les condensateurs ajustables

Pour indiquer que le condensateur est ajustable, le symbole du condensateur est accompagné d'un trait avec un point. Ils servent à régler les circuits accordés, les transfos à FI, etc

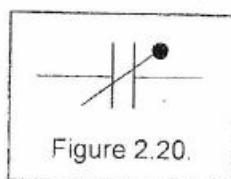


Figure 2.20.

Dans le modèle ci-contre le diélectrique est constitué de minces feuilles de polytétrafluoréthylène. Ces condensateurs sont essentiellement utilisés dans les récepteurs. Le diamètre varie de 5 à 10 mm. Les capacités nominales (maximum) varient entre 5 et 40 pF. La tension de service n'excède pas 100 V.

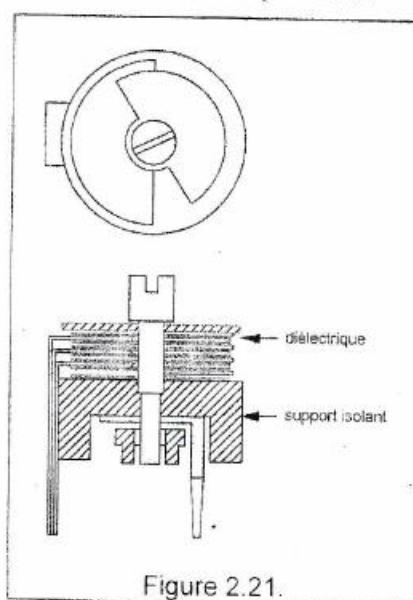


Figure 2.21.

Le modèle de condensateur ci-contre utilise la céramique comme diélectrique. Le support et le disque mobile sont métallisés sur une partie de leur surface. Ils ont une taille de 15 mm environ. Les capacités nominales varient de 10 à 100 pF. La tension de service maximum est de 500 V.

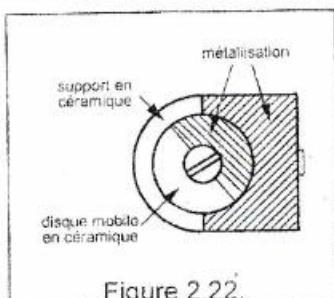


Figure 2.22.

On trouve également des condensateurs ajustables à air. Ils ressemblent fort aux condensateurs variables.

Notons la figure b où C1 augmente lorsque C2 diminue

La figure c représente un condensateur appelé condensateur "papillon" ou "butterfly" utilisé dans des montages symétriques. C1 et C2 varient de la même manière.

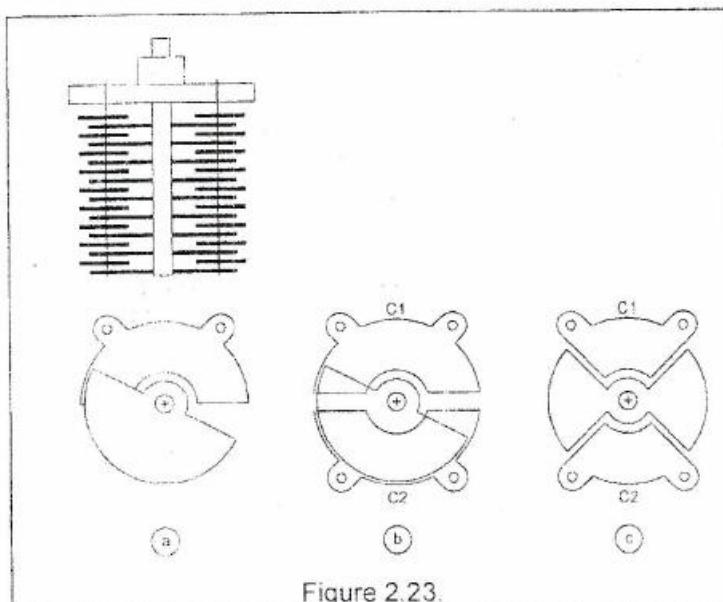


Figure 2.23.

## 2.7.10. Les condensateurs de passages

Ces condensateurs sont destinés à filtrer des signaux continus ou BF lorsqu'ils passent d'un milieu généralement quelconque vers l'intérieur d'un boîtier blindé. Ils se présentent sous forme d'un boulon que l'on fixe sur la paroi (figure a) ou sous forme d'un tube de céramique métallisé que l'on soude sur la paroi (figure b). Le choix des valeurs est assez restreint et s'étend de 100 pF à 10 nF environ. La tension de service peut atteindre plusieurs centaines de Volt, et la tolérance et le coefficient de température sont sans grande importance pour cette application.

Ici aussi, le symbole est un peu particulier (figure c). Il évoque en fait le petit tube qui fait capacité et qui passe "au travers" d'un châssis.

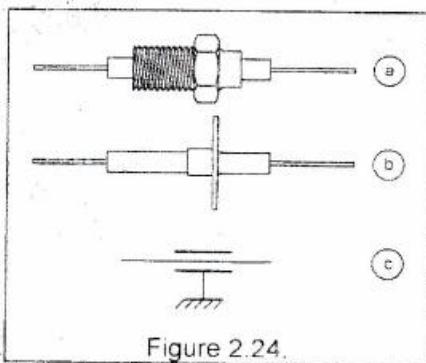


Figure 2.24.

## 2.7.11. Les condensateurs CMS

Lorsque nous avons parlé des résistances, nous avions mentionné la technologie CMS. Tous les condensateurs n'existent pas en technologie CMS, par exemple les gros condensateurs de filtrage n'ont pas besoin d'être dans cette technologie miniature, de même que les condensateurs de démarrage, les condensateurs de passage, etc ...

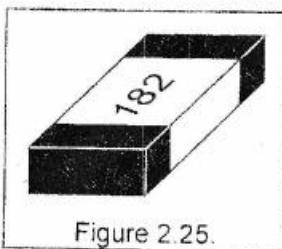


Figure 2.25.

Par contre, pour l'électronique, on trouve dans cette technologie CMS des condensateurs

électrolytique de 1 à 68  $\mu\text{F}$   
céramique De 0,47 pF à 10 nF

Les condensateurs CMS (tout comme les résistances CMS) se présentent sous forme d'un petit parallélépipède avec deux côtés soudables. Ces condensateurs peuvent être réalisés en plusieurs technologies, il existe donc des condensateurs CMS utilisant des films métallisés, d'autres sont des céramiques métallisées, ou d'autres sont des tantalés ou des électrochimiques

## 2.7.12. Résumé

Pour spécifier un condensateur, il faut donner sa **valeur** (en  $\mu\text{F}$ , en  $\text{nF}$  ou en  $\text{pF}$ ), la **tolérance** (en %) sur cette valeur, sa **tension de service** (en **Volts**) , et son **type** selon le tableau suivant :

condensateur		les plus utilisés
à air	faibles pertes et courant de fuite négligeable. condensateurs variables applications HF spéciales	
au mica	circuits d'accords où la fréquence doit être très stable	
styroflex	circuits d'accords, en basse fréquence et jusqu'à 500 kHz environ.	
céramique	2 classes: classe 1 : assez stables et précis pour oscillateurs et les filtres. classe 2 : cond. de couplage ou de découplage. Valeurs de 180 pF à 47 nF.	XX
au papier		
au papier métallisé		
film plastique métallisé	S = polystyrol pour circuit d'accord et filtres P = polypropylène C = polycarbonate pour couplage et découplage	XX
M K x	T = polytereftalate U = acétate de cellulose	
électrolytiques	Valeur de 1 $\mu\text{F}$ à 220.000 $\mu\text{F}$ . Tension de service : de 6 V à 500 V	XX
tantale		
ajustables		X
de passage		
CMS	électrolytique : de 1 à 68 $\mu\text{F}$ céramique : de 0.47 pF à 10 nF	XX

## 2.8. Le condensateur en alternatif

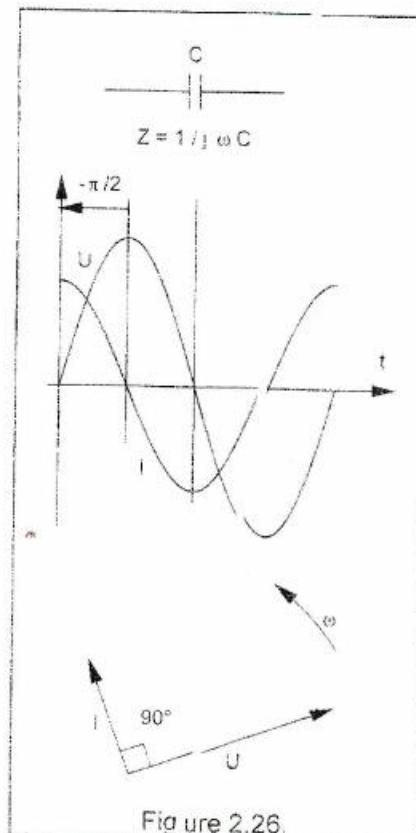
Lorsqu'un condensateur est utilisé en courant alternatif, on définit sa réactance comme le rapport entre la tension appliquée et le courant qui passe par le condensateur. La réactance d'un condensateur vaut

$$X_C = \frac{1}{\omega C}$$

avec  $\omega$  = pulsation =  $2\pi f$

Mais ce n'est pas tout, car il y a encore un déphasage entre le courant et la tension de  $\pi/2$  , on dit aussi que le courant est en avance de  $\pi/2$  et, en anglais on emploie le terme ' lagging '.

Par convention l'angle de déphasage se mesure en prenant la tension comme référence.



## CHAPITRE 3

### LES BOBINES

#### 3.1. Généralités

Les bobines sont des éléments qui sont principalement utilisés dans les circuits à courants alternatifs basse fréquence, audio fréquence ou en haute fréquence dans les émetteurs et dans les récepteurs.

Une bobine est constituée par un conducteur isolé ou non, enroulé sur un support muni ou non, d'un noyau magnétique et entouré ou non d'un blindage.

Une bobine est caractérisée par son inductance c'est-à-dire la propriété d'un circuit électrique d'engendrer une force électromotrice (f.e.m.) lorsqu'on la fait varier avec le courant qui la traverse.

L'inductance d'une bobine est en relation avec son nombre de spires, son diamètre, sa forme, sa longueur, mais la présence d'un noyau et la nature de ce noyau peuvent fortement influencer la valeur de l'inductance.

Le symbole général de la bobine est représenté ci-contre.

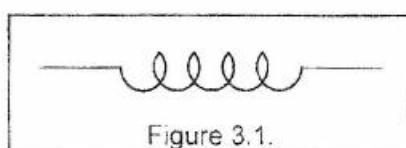


Figure 3.1.

L'unité d'inductance est le **henry**, symbolisé par **H**. Une bobine d'inductance de 1 Henry est une bobine dans laquelle une variation de 1 ampère à la seconde produirait une force électromotrice de 1 volt.

Mais les inductances utilisées habituellement sont assez faibles et on utilise les sous multiples

- le **millihenry**, symbolisé par **mH**,  $1 \text{ mH} = 10^{-3} \text{ Henry}$ ,
- le **microhenry**, symbolisé par **µH**,  $1 \text{ µH} = 10^{-6} \text{ Henry}$ , et,
- le **nanohenry**, symbolisé par **nH**,  $1 \text{ nH} = 10^{-9} \text{ Henry}$ .

#### 3.2. Les facteurs qui déterminent l'inductance

L'inductance d'une bobine détermine certaines conditions du circuit. L'une de ces conditions est l'opposition au changement de courant. L'autre est la quantité d'énergie emmagasinée sous forme de champ magnétique. La f.e.m. induite dépend aussi de l'inductance. L'inductance d'une bobine dépend de quatre facteurs :

- le nombre de tours de la bobine,
- le diamètre de la bobine
- la longueur de la bobine
- et le type de noyau ou mieux dit de la perméabilité magnétique du noyau.

Calculer l'inductance d'une bobine n'est pas une chose aisée, il existe une série de formules (empiriques) qui ont chaque fois un domaine d'application limité :

Pour une bobine à une seule couche, la formule de Nagaoka, donne la valeur de la self :

$$L_{(\mu\text{H})} = k \cdot n^2 \cdot d_{(\text{cm})} \cdot 10^{-3}$$

dans cette formule

D est le diamètre moyen en cm

k est un coefficient qui dépend du rapport d/l de la bobine et vaut  $k = (100 \times d) / (4d + 11l)$

# INFORMATIQUE - L1I / ELECTRONIQUE 1 / MODULE 2

Pour une bobine à plusieurs couches :

$$L_{(\mu\text{H})} = \frac{(0,08 \times d_{(\text{cm})}^2 \times n^2)}{(3 d_{(\text{cm})} + 9 l_{(\text{cm})} + 10 e_{(\text{cm})})}$$

avec       $d$  est le diamètre moyen en cm

$l$  est la largeur en cm

$e$  est l'épaisseur de la bobine en cm

La formule de base qui régit les inductances est

$$L = \mu_0 \mu_r S n^2 / l$$

dans laquelle     $\mu_0$  est la perméabilité du vide ou de l'air ( $\mu_0 = 1,25 \mu\text{H/m}$ )

$\mu_r$  est la perméabilité relative

$S$  est la section de la bobine

$l$  est la longueur

$n$  est le nombre de spires

Ce qu'il faut surtout retenir c'est que

## la self varie en fonction du carré du nombre de spires

Donc

- si on double le nombre de spires, la valeur de l'inductance va être multipliée par 4.
- si on supprime la moitié des spires, la valeur de l'inductance va être divisée par 4, mais ce facteur de 4 x n'est qu'approximatif, en effet en enlevant la moitié des spires ou en doublant le nombre de spires, on affecte aussi le facteur de forme de la bobine, c.-à-d. qu'on modifie la valeur diamètre/longueur.

La plupart des bobines sont réalisées sur des supports (ou mandrin), mais on peut aussi utiliser des "bobinages en l'air" c'est-à-dire sans support.

Comme les résistances, les bobines sont imparfaites : toute bobine présente en effet une résistance, celle de son fil.

Mais ce n'est pas tout : on sait aussi que deux morceaux de fils placés l'un à côté de l'autre présente une certaine capacité. Dans le cas d'une bobine les spires de celle-ci forment entre-elles des petites capacités. Toutes ces petites capacités parasites mises ensemble peuvent former une "certaine capacité" appelée de la capacité parasite de la bobine. Cette capacité parasite associée à l'inductance produit un circuit résonnant.

À la fréquence de résonance, l'impédance apparente de la bobine sera beaucoup plus grande que l'impédance théorique calculée (c.-à-d. plus grande que  $Z_L = \omega L$ ). Cette fréquence est appelée fréquence de résonance propre. Il faut toujours utiliser une bobine pour une fréquence de fonctionnement en dessous de sa fréquence de résonance propre.

Pour une fréquence supérieure à la fréquence de résonance propre, l'impédance apparente de la bobine sera beaucoup plus faible que l'impédance théorique calculée (c.-à-d. plus grande que  $Z_L = \omega L$ )

En d'autres termes la self devra être utilisée en dessous de sa fréquence de résonance propre.

Pour des self très importantes, on peut remédier à ce phénomène en bobinant la self en plusieurs paquets et en écartant ces paquets les uns des autres.

Les bobines ont aussi un coefficient de température, et comme le cuivre se dilate, la surface de la bobine a tendance à augmenter, et la self aussi, le coefficient d'une bobine constituée par du fil de Cu est donc positif !

### 3.3. Influence du noyau

Afin de régler la valeur de l'inductance, les bobines sont généralement munies d'un noyau ferrite ou d'un noyau en aluminium. Mais l'utilisation d'un noyau permet aussi d'augmenter considérablement la valeur de l'inductance.

Le symbole ci-contre représente une bobine avec un noyau en feuille d'acier

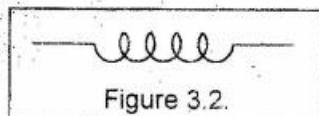


Figure 3.2.

tandis que le symbole ci-contre fer ou en ferrite

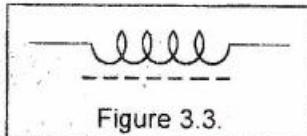


Figure 3.3.

représente une bobine avec un noyau en poudre de

#### 2.3.3.1. Les noyaux en tôle de fer

Ces noyaux sont utilisés pour les transfos et pour les selfs en courant alternatif à basse fréquence (jusque 20 kHz environ).

#### 3.3.2. Les noyaux à poudre de fer

Les noyaux en poudre de fer se caractérisent par une très bonne stabilité, ils conviennent pour les circuits d'accords. Le  $\mu$  de la poudre de fer se situe entre 2 et 75.

La firme américaine Amidon produit un large éventail de tores en poudre de fer.

Toute la série T-12 à T-520 utilise des poudres de fer. Le nombre indique le diamètre extérieur en 1/100<sup>ème</sup> de pouce, un T-200 aura un diamètre extérieur de 2" soit env. 5,08 cm.

Dans le catalogue on trouve la liste des caractéristiques des matériaux suivants :

matériau	$\mu =$	couleur	gamme de fréquence	coeff t° (ppm/°C)
#0	1,	Mg-Zn	> 200 MHz	
#1	20	Ni-Zn		280
#2	10	rouge	1 à 30 MHz	95
#3	35	gris	50 kHz à 500 kHz	370
#6	8	jaune	20 MHz à 50 MHz	35
#10	6	noir	40 MHz à 100 MHz	150
#12	3	vert-blanc	50 MHz à 100 MHz	170
#15	25	rouge-blanc		190
#17	3	vert-blanc		50
#26	75	jaune-blanc		822

En ce qui concerne les formes, on trouve :

- des noyaux possédant un pas de vis et destiné à être mis dans les mandrins en plastiques. Ces noyaux possèdent un "frein" constitué d'un tout petit morceau de feutre ou de mousse plastique et qui empêche le noyau de glisser une

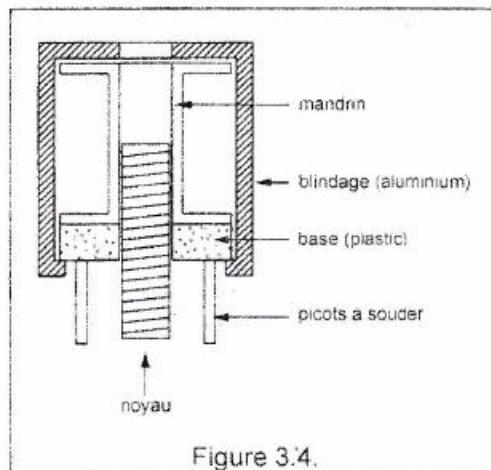


Figure 3.4.

fois qu'on aura fait l'accord. Ces noyaux sont en outre munis d'une fente pour le réglage. Pour le réglage proprement dit on devra utiliser un tournevis amagnétique (= qui possède dont un  $\mu_r$  égal à celui de l'air !) sinon le réglage sera fausse.

En réalité les noyaux sont utilisés dans un ensemble qui comporte un mandrin sur lequel on viendra bobiner le fil, et un blindage en aluminium. Les fils de la bobine sont connectés aux picots qui seront à leur tour soudé dans le circuit imprimé.

On peut se demander quelle est la plage de réglage disponible. Il est difficile de donner un chiffre exact, car l'influence du noyau dépend de sa nature (la nature du matériau ferrite), de la position dans le mandrin, de son volume, de la quantité de matière isolante présente entre le mandrin et la bobine, mais empiriquement on peut dire qu'un noyau ferrite permet d'obtenir par rapport à une fréquence moyenne une variation de fréquence d'accord de  $\pm 15\%$ . Evidemment en enfonçant le noyau (en le mettant plus au centre de la bobine...) la fréquence diminue.

- des **bâtons de ferrites** utilisés dans les antennes des récepteurs portatifs pour les OM et les OL

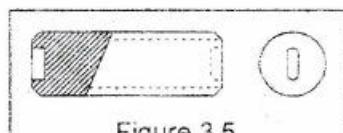


Figure 3.5.

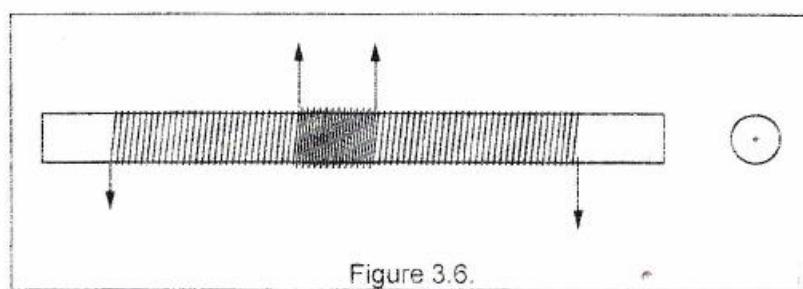


Figure 3.6.

### 3.3.3. Les nouveaux ferrites

Les ferrites sont des oxydes de la forme  $MFe_2O_4$  dans lequel M représente un métal tel que le nickel, le manganèse le zinc ou le cuivre. Les principales caractéristiques de ces ferrites sont

- le coefficient de perméabilité relative  $\mu_r$  (c.-à-d. en prenant comme référence la perméabilité de l'air ou du vide) qui vont de 60 à 15000 environ, et,
- la plage de fréquence où ils sont utilisables, au-delà de cette fréquence les pertes deviennent importantes.

# INFORMATIQUE - L1I / ELECTRONIQUE 1 / MODULE 2

Les firmes Philips/MBLE/RTC proposent ainsi dans leur catalogue les composants ferrites suivants :

matériau	$\mu =$	gamme de fréquence	utilisation
3D8	68	0,2 à 2 MHz	
3E1	2500		
3E2	> 5000		
3H1	220	1 à 700 kHz	
3H2	2300		
4C6	>100		

La firme américaine Amidon produit un large éventail de matériaux ferrites. Dans le catalogue on trouve la liste des caractéristiques des matériaux suivants :

matériau	$\mu =$	composition	gamme de fréquences	coéff. $t^o$ (% entre 20 et 70°C)	utilisation
#33	850	Mg-Zn	1 kHz à 1 MHz		bâtonnet pour antenne
#43	850	Ni-Zn	30 MHz à 400 MHz	1	tore et perles ferrites
#61	125	Ni-Zn	0,2 à 200 MHz	0,15	tore, bâtonnet, baluns à 2 trous
#63	40		15 MHz à 25 MHz	0,1	tore
#64	250	Ni-Zn	jusque 4 MHz		perle
#67	40	Ni-Zn	10 MHz à 80 MHz	0,13	
#68	20		80 MHz à 180 MHz	0,06	tore
#72	2000		0,5 MHz à 50 MHz	0,6	tore
#73	2500		0,5 MHz à 50 MHz		perle
#75	5000		1 kHz à 1 MHz	0,9	transfo, tore et perle
#77	2000		0,5 MHz à 50 MHz	0,6	tore, pot, perle

Code Amidon :

FT xx yy	Ferrit Toroid = tore ferrite	xx = diamètre en centièmes de pouce yy = matériau
FB yy zz	Ferrit Bead = perle ferrite	yy = matériau zz = numéro de la forme
R yy dd ll	Rod = bâtonnet	yy = matériau dd = diamètre ll = longueur en centièmes de pouce

Parmi les formes des matériaux ferrites, on trouve principalement :

- des **perles de ferrites** à glisser sur un fil d'alimentation par exemple et qui constituera une self de choc pour un domaine de fréquence qui va de 30 MHz à 1 GHz. On peut aussi trouver des blocs en deux parties destinés à être mis au dessus de câbles existants et déjà équipés de connecteurs, on peut aussi trouver des blocs prévus pour être mis au dessus de câbles plats (câbles en nappe). Ces perles peuvent aussi être utilisées pour bobiner un transformateur HF ou VHF.

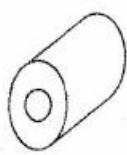


Figure 3.7.

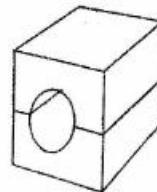


Figure 3.8.

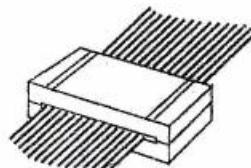
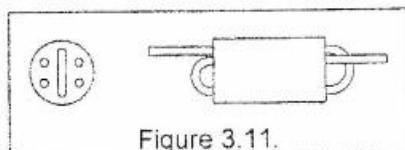
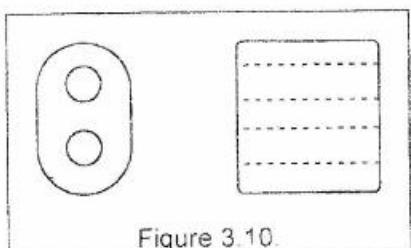


Figure 3.9.

- des noyaux à deux trous que l'on utilise principalement comme transformateur pour des fréquences allant de 100 kHz à quelques 300 MHz. Les 3 figures montrent le noyau, le bobinage et le schéma électrique qui y correspond. Cette forme de transfo présente moins de pertes que la simple perle ferrite décrite ci-dessus.

- des noyaux à 6 trous utilisés comme self de choc (ce sont les fameuses "VK200" des schémas !). On peut faire 1,5 ou 2,5 tours. L'inductance est de l'ordre de 2 à 12  $\mu\text{H}$  et ces selfs servent essentiellement de self de choc dans le domaine de 10 MHz à 1000 MHz.



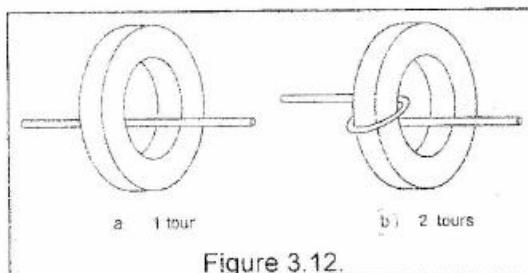
- des **tores de ferrites** qui permettent de réaliser des inductances relativement importantes sous un petit volume ou de réaliser des transformateurs. Pour déterminer l'inductance d'un tore on utilise un coefficient  $A_L$  qui est exprimé en mH par 1000 tours ou en  $\mu\text{H}$  par 100 tours. Donc on applique les formules suivantes :

$$L_{(\text{mH})} = n^2 \times A_L \times 10^{-6} \quad \text{si } A_L \text{ est en mH par 1000 tours}$$

ou

$$L_{(\mu\text{H})} = n^2 \times A_L \times 10^{-4} \quad \text{si } A_L \text{ est en } \mu\text{H} \text{ par 100 tours}$$

où  $n$  représente bien sûr le nombre de spires. Mais il faut encore bien savoir compter le nombre de spires, sur la figure a ci-contre il y a 1 spire, et sur la figure b il y a 2 spires !!



## Exercices

- On a un tore ferrite de la marque Amidon, ce tore est du type FT-50, et en matériau 43 (c'est un numéro donné par le fabricant !). Quelle est l'inductance si on fait une bobine de 10 tours ?  
Dans le catalogue Amidon, on trouve que  $A_L = 523$  en mH par 1000 tours donc  
 $L_{(\text{mH})} = A_L n^2 \times 10^{-6} = 523 \times 100 / 1000000 = 0,0523 \text{ mH} = \text{en } 52,3 \mu\text{H}$
- On a un tore Amidon du type T-50 et en matériau 6. Combien faut-il de tours pour obtenir une self de 500  $\mu\text{H}$  ?  
Dans le catalogue on trouve  $A_L = 40$  en  $\mu\text{H}$  par 100 tours.  
 $n = 100 \sqrt{500/40} = 100 \sqrt{12,5} = 100 \times 3,5 = 350 \text{ tours}$
- On veut faire une bobine dont l'impédance soit plus grande que  $50 \Omega$  sur la bande des 160 m. On dispose d'un tore T-200 avec un matériau 6 dont  $A_L = 100 \mu\text{H} / 100 \text{ spires}$ . Combien de spires faut-il bobiner ?  
 $Z = \omega L \gg 50 \Omega$  d'où  $L \gg 50 / \omega = 50 / 2 \pi 1,8 \times 10^6 = 4,4 \mu\text{H}$ , prenons 10 x supérieur donc  $L = 50 \mu\text{H}$ . Par conséquent  $n = 100 \sqrt{50/100} = 100 \sqrt{0,5} = 100 \times 3,5 = 71 \text{ tours}$

Si on rassemble les spires d'un tore sur un secteur, la self augmente. Ainsi, pour un angle de  $120^\circ$ , la self peut être plus de 3 x plus importante que si elle était répartie uniformément. On comprend dès lors que si on "déforme" la position des spires dans un circuit accordé, on ne sera plus sur la même fréquence.

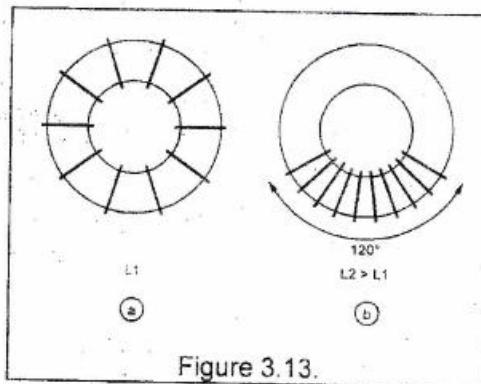


Figure 3.13.

- les pots ferrites permettent de réaliser des bobines de fortes inductances avec relativement peu de spires, avec une faible fuite. Les pots ferrites sont principalement utilisés pour les alimentations à découpage, les convertisseurs de tensions (DC-AC-DC), pour les transformateurs en audio fréquence (filtres et oscillateurs), pour les transformateurs en moyenne fréquence jusqu'à 10 MHz environ. La figure ci-contre représente un pot en ferrite.

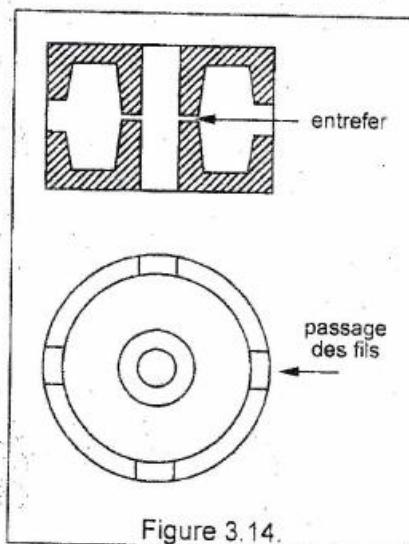


Figure 3.14.

Une armature tient les deux parties ensemble. Nous n'avons pas représenté le mandrin en plastique qui supportera le bobinage, ni le noyau qui permet de faire varier (légèrement) le  $\mu$ .

#### 3.3.4. Poudre de fer ou ferrite ?

Un petit résumé

	Poudre de fer	Ferrite
Marque Amidon : couleur exple de code	souvent gris FT , FB , R	souvent coloré T
Marque Philips : couleur exple de code	coloré	
Utilisation	circuit accordé (= précis) faible coefficient de $t^\circ$	transfo, self de choc pas très précis

#### 3.3.4. Les noyaux en aluminium et en laiton

Pour un noyau en aluminium, la variation est de l'ordre de  $\pm 8\%$ , mais contrairement aux noyaux ferrites, si on enfonce le noyau la self diminue et par conséquent la fréquence augmente.

#### 3.3.5. La saturation des noyaux

On se souviendra du cours d'électricité où on atteignait la saturation d'un noyau magnétique lorsque le bobinage était traversé par un courant important et du phénomène d'hystérésis. Il en est de même pour les bobines à noyau utilisées en électronique et en radioélectricité, toutefois lorsque les signaux manipulés sont faibles (circuits FI, oscillateurs, ...) on sera généralement bien en dessous du seuil de saturation. Mais il faudra tenir compte de ce phénomène pour les puissances élevées (étages de sortie, coupleurs d'antennes et baluns). La saturation du noyau se manifeste par un échauffement et donc aussi par des pertes.

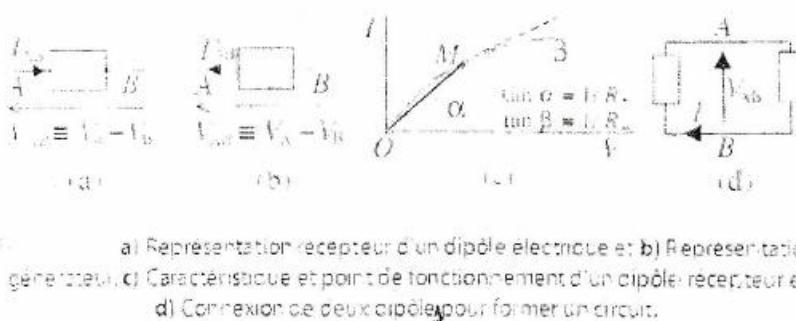
## Chapitre 4

### Dipôles

#### 4.1 DÉFINITIONS ET REPRÉSENTATIONS

Un dipôle électrique est un élément de circuit qui peut être connecté aux autres éléments par deux bornes : une entrée A et une sortie B (Fig. 4.1). Le dipôle est actif s'il contient une source d'énergie et il est passif s'il n'en contient aucune. Il est un générateur, s'il fournit de l'énergie au circuit et il est un récepteur s'il transforme l'énergie électrique en une autre forme utilisable (mécanique, chimique etc.).

Une résistance n'est pas considérée comme un récepteur proprement dit, car l'énergie qu'elle consomme n'est pas utilisable et tout dipôle a une certaine résistance. Un condensateur et une self-inductance ne sont pas des récepteurs : car ils emmagasinent l'énergie puis ils la restituent au circuit.



a) Représentation récepteur d'un dipôle électrique et b) Représentation génératrice, c) Caractéristique et point de fonctionnement d'un dipôle récepteur et d) Connexion de deux dipôles pour former un circuit.

La d.d.p. aux bornes A et B d'un dipôle est désignée par  $V_{AB} = VA - VB$  et représentée par une flèche allant de B vers A. C'est une grandeur algébrique qui est positive si l'intensité qui entre en une borne sort de l'autre dans l'approximation des régimes quasi statiques. Pour la représenter on peut utiliser l'une ou l'autre des conventions suivantes :

- Dans la convention récepteur,  $I_{AB}$  désigne le courant dans le dipôle (Fig. 4.1.a). C'est une grandeur algébrique positive si le courant circule effectivement de A vers B et négative dans le cas contraire.
- Dans la convention générateur,  $I_{AB}$  désigne le courant débité par le dipôle dans le circuit extérieur dans le sens AB (Fig. 4.1.b). C'est une grandeur algébrique égale à l'opposée de  $I_{AB}$  de la convention récepteur

$$I_{AB} = -I_{BA} \quad (4.1)$$

Quelle que soit la représentation utilisée  $V_{AB}$  et  $I_{AB}$  sont des grandeurs algébriques et le dipôle peut être effectivement un générateur ou un récepteur selon qu'il fournit ou consomme de l'énergie électrique (voir la section 4.5). Dans la suite nous utilisons le plus souvent la représentation récepteur et nous omettons l'indice (AB) pour simplifier.

Cependant, si deux dipôles sont reliés entre eux pour former un circuit et on choisit un sens de la d.d.p.  $V_{AB}$  à leurs bornes, les conventions sont nécessairement récepteur pour l'un et générateur pour l'autre (Fig. 4.1d).

L'équation caractéristique d'un dipôle est la relation qui lie la d.d.p.  $V_{AB}$  à ses bornes et l'intensité  $I_{AB}$ . Selon la nature du dipôle, cette relation peut être algébrique, différentielle ou intégrale. Dans le cas d'une résistance, une self-inductance et un condensateur, cette relation s'écrit respectivement

$$V = RI \text{ [résistance]} \quad (4.2)$$

$$V = Ldi/dt \text{ [self-inductance]} \quad (4.3)$$

$$V = Q/C \text{ [condensateur]} \quad (4.4)$$

# INFORMATIQUE - L1I / ELECTRONIQUE 1 / MODULE 2

Des relations sont valables avec les conventions de signe habituelles. Parfois le courant est alternatif ou continu mais de sens inconnu. On choisit alors un sens pour le circuit. Si on trouve que l'intensité est positive le courant est effectivement dans le sens choisi ; sinon il est dans le sens opposé. Pour écrire la d.d.p. aux bornes d'un condensateur, on désigne par  $Q$  la charge de l'une de ses armatures ; l'autre porte alors la charge  $-Q$ . Si le courant algébrique  $I$  est dirigé vers l'armature de charge  $+Q$ , la relation de conservation de la charge s'écrit  $dQ = I dt$ , c'est-à-dire

$$I = \dot{Q} \quad \text{ou} \quad Q = \int i dt \quad (4.5)$$

En revanche, si le courant est dirigé vers l'armature de charge  $-Q$ , nous devons changer le signe de  $I$  et écrire

$$I = -\dot{Q} \quad \text{et} \quad Q = - \int dt$$

Dans le cas d'une caractéristique algébrique, la courbe représentant  $I$  en fonction de  $V$  (ou l'inverse) est appelée aussi caractéristique (Fig.4.1c). Des valeurs correspondantes de  $V$  et  $I$ , définissent un point de fonctionnement. On définit la résistance statique  $R_s$  et la résistance dynamique  $R_d$  par les relations

$$R_s = V/I, \quad R_d = dV/dI \quad (4.6)$$

La résistance statique est la pente de la droite  $OM$  menée de l'origine au point de fonctionnement tandis que la résistance dynamique est la pente de la tangente à la caractéristique au point de fonctionnement.

Dans le cas d'un conducteur ohmique, la caractéristique est une ligne droite de pente  $1/R$  ; les deux résistances sont alors identiques. La Fig. 4.1c représente la caractéristique d'un dipôle presque linéaire si la d.d.p.  $V$  appliquée est faible. La résistance est alors indépendante de la d.d.p. La chaleur dégagée par effet Joule est effectivement évacuée hors du conducteur ; la température et la résistance restent constantes.

Par contre, si  $V$  est grande la chaleur dégagée n'est pas complètement évacuée ; la température et la résistance augmentent, donc la pente a diminué. En courant alternatif, la caractéristique d'un dipôle non linéaire dépend de la fréquence et de l'amplitude de la d.d.p.

Le dipôle est symétrique si on peu échanger ses bornes A et B ; il a alors le même fonctionnement dans les deux sens du courant. Dans ce cas la caractéristique est symétrique par rapport à l'origine. C'est le cas d'une résistance, par exemple. Un dipôle actif n'est jamais symétrique.

La notion de linéarité des dipôles est un peu ambiguë. Au sens strict, un dipôle est linéaire si son équation caractéristique est linéaire. Cela veut dire que, si  $V_1$  et  $V_2$  sont les d.d.p. qui correspondent aux intensités  $I_1$  et  $I_2$ , la d.d.p.  $\alpha V_1 + \beta V_2$  correspond à l'intensité  $\alpha I_1 + \beta I_2$ , où  $\alpha$  et  $\beta$  sont des constantes réelles ou complexes. On dit alors que le dipôle vérifie le principe de superposition.

Les conducteurs ohmiques, les condensateurs et les self-inductances sont linéaires et, plus généralement, c'est le cas des circuits formés en connectant de tels éléments. Ce n'est pas le cas des générateurs et des récepteurs, dont la caractéristique est une droite de la forme :

$$V = \mathcal{E} - rI \quad \text{et} \quad V' = \mathcal{E}' - r'I$$

respectivement (relation affine). Ces éléments sont linéaires au sens large du terme.

Supposons qu'un dipôle est linéaire et que les d.d.p.  $V_1$  et  $V_2$  correspondent aux intensités  $I_1$  et  $I_2$ . À l'intensité  $\underline{I} = I_1 + jI_2$  correspond la d.d.p. complexe  $\underline{V} = V_1 + jV_2$ . Il est donc possible d'analyser les dipôles pour des intensités et des d.d.p. complexes et de prendre à la fin du calcul les parties réelles ( $V_1 = \Re \underline{V}$  qui correspond à  $I_1 = \Re \underline{I}$ ). Il faut noter que cette méthode ne peut pas être utilisée pour évaluer la puissance instantanée dans un circuit, par exemple, car la puissance est quadratique en  $I$  ou  $V$ . Dans ce cas, il faut prendre les parties réelles de  $I$  et  $V$  avant de calculer la puissance.

## 4.2 RÈGLES DE KIRCHHOFF

Pour analyser l'association des dipôles et, en général, les circuits complexes, nous aurons besoin des règles de Kirchhoff :

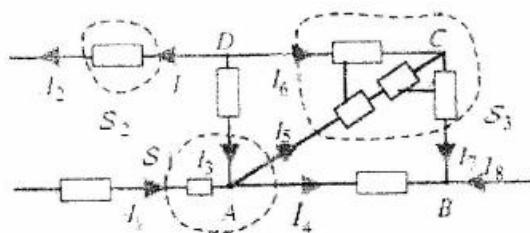


Figure 4.2 Règles de Kirchhoff dans un circuit.

### a) Règle des nœuds

La somme des intensités de courant qui arrivent en un nœud est égale à la somme des intensités de courant qui le quittent :

$$\sum_i I_i^{(\text{in})} = \sum_k I_k^{(\text{ex})} \quad (4.7)$$

Cette règle est une conséquence directe de la loi de conservation de la charge électrique, car il ne peut y avoir aucune accumulation ou disparition de charge en un point. Ainsi au nœud A dans la figure 4.2, nous avons  $I_1 + I_3 = I_4 + I_5$  et au nœud B nous avons  $I_4 + I_7 + I_8 = 0$ .

Les courants étant algébriques, au nœud B, par exemple les intensités  $I_4$ ,  $I_7$  et  $I_8$  ne peuvent pas être de même signe.

La règle des nœuds peut être généralisée aux courants entrants et sortants d'une surface fermée quelconque, même si elle contient des circuits entiers ou des éléments de circuit pourvu qu'elle contienne des éléments entiers (elle ne peut pas contenir une seule armature d'un condensateur, par exemple). C'est le cas de la surface S3 par exemple ; nous avons alors  $I_5 + I_6 = I_7$ . Si nous l'appliquons à une surface telle que S2, nous trouvons que l'intensité qui entre d'un côté sort de l'autre. L'intensité de courant est donc la même le long d'une branche, même si S2 contient un circuit complexe.

### b) Règle des mailles

La somme des chutes de potentiel aux bornes d'éléments formant une maille est nulle :

$$\sum_i V_i = 0 \quad (4.8)$$

Par exemple, dans le cas de la maille ABCD de la figure 4.2, nous avons

$$(VA - VB) + (VB - VC) + (VD - VD) + (VD - VA) = 0$$

Cette relation est une identité. Cependant l'expression (4.8) n'est pas dépourvue de sens. En effet on ne peut l'écrire que si le potentiel  $V$  existe, c'est-à-dire si le champ électrique dérive d'un potentiel et cela est une conséquence de la loi de conservation de l'énergie. En multipliant cette relation par une charge  $q$ , nous trouvons que le travail des forces électriques sur  $q$  pour décrire la maille est nul et c'est justement la condition que le champ électrique soit conservatif, c'est-à-dire il dérive d'un potentiel. Précisons que les chutes de potentiel sont algébriques, donc positives s'il s'agit effectivement d'une chute de potentiel

et négative s'il s'agit d'une augmentation de potentiel. Les tensions produites par les générateurs doivent être incluses dans l'équation (4.8) et aussi d'éventuelles forces électromotrices induites (voir la section 1.6).

Notons que les règles de Kirchhoff, qui sont liées à des lois fondamentales (conservations de la charge et de l'énergie) sont, en général, valables dans l'approximation quasi stationnaire même en régimes variables et dans le cas de dipôles non linéaires. Dans ce dernier cas, cependant, les conséquences de ces règles ne peuvent pas être facilement analysées. On fait alors recours à des méthodes d'approximation ou d'analyse numérique.

### 4.3 IMPÉDANCE

Si le générateur dans un circuit électrique est sinusoïdal de pulsation  $\omega$ , la linéarité du circuit exige que la d.d.p. entre deux points quelconques et les intensités de courant dans les diverses branches soient sinusoïdales de même pulsation. Les caractéristiques du circuit dépendent souvent de la fréquence. La théorie de Fourier permet d'écrire toute fonction comme une superposition de fonctions sinusoïdales de diverses pulsations. La linéarité permet d'analyser le circuit pour chacune des pulsations et de faire la superposition des diverses grandeurs linéaires. Nous analysons dans cette section le fonctionnement d'un dipôle en régime sinusoïdal.

#### a) Impédances réelles

Supposons que l'intensité de courant dans un dipôle soit sinusoïdale. La chute de potentiel  $V$  est alors sinusoïdale de même pulsation sans être nécessairement en phase :

$$I = I_m \cos(\omega t - \phi_I) \quad \text{et} \quad V = V_m \cos(\omega t + \phi_V) \quad (4.9)$$

Où les phases sont comprises entre  $-\pi$  et  $+\pi$  et telles que les amplitudes soient positives.

Nous définissons l'impédance réelle (ou simplement impédance)  $Z$  d'un dipôle comme le rapport de  $V_m$  à  $I_m$

$$Z = V_m/I_m \quad (4.10)$$

C'est donc une généralisation de la notion de résistance. Elle est positive et elle s'exprime en ohms ( $\Omega$ ). Les équations caractéristiques (4.2), (4.3) et (4.4) impliquent que les impédances réelles d'une résistance  $R$ , d'une self-inductance  $L$  et d'une capacité  $C$  sont respectivement

$$Z_R = R, \quad Z_L = \omega L, \quad Z_C = 1/\omega C \quad (4.11)$$

À l'exception d'une résistance pure, l'impédance n'est pas une caractéristique du seul dipôle; car elle dépend de la fréquence du courant. Dans le cas d'un courant continu ( $\omega = 0$ ), l'impédance d'une self-inductance pure est nulle et celle d'un condensateur est infinie; alors la self-inductance ne joue aucun rôle dans le circuit et le condensateur coupe le courant. À haute fréquence, l'impédance d'une selfinductance est grande et celle d'un condensateur est faible; alors la self-inductance oppose une plus grande réaction au courant tandis que le condensateur favorise sa transmission.

## b) Impédances complexes

Nous avons vu qu'il est souvent plus facile (et parfois inévitable) d'utiliser la représentation complexe plutôt que les fonctions trigonométriques ou la représentation de Fresnel. Si le dipôle est linéaire,  $I_1$  correspond à  $V_1$  et  $I_2$  correspond à  $V_2$ . L'intensité complexe  $\underline{I} = I_1 + jI_2$  correspond à  $\underline{V} = V_1 + jV_2$ . Inversement si  $\underline{I}$  correspond à  $V$ ,  $\Re e \underline{I}$  correspond à  $\Re e \underline{V}$ . Dans le cas d'un courant alternatif, supposons que

$$\underline{I} = I_m e^{j\phi} \quad \text{et} \quad \underline{V} = V_m e^{j\phi} \quad \text{où} \quad I_m = I_m e^{j\phi} \quad \text{et} \quad V_m = V_m e^{j\phi} \quad (4.12)$$

L'impédance complexe est définie par :

$$\underline{Z} = \underline{V}/\underline{I} = V_m/I_m = (V_m/I_m)e^{j(\phi_V - \phi_I)} \quad (4.13)$$

Le module de l'impédance complexe  $Z$  est donc égal à l'impédance réelle  $Z$  et la phase de  $Z$  est égale à l'avance de phase de  $V$  sur  $I$ .

$$Z = (V_m/I_m) = |\underline{Z}| \quad \text{et} \quad \phi_z = \phi_V - \phi_I \quad (4.14)$$

Dans les cas d'une résistance, une self-inductance et un condensateur, les relations (4.2), (4.3) et (4.4) donnent les d.d.p. respectivement

$$\begin{aligned} \underline{Z}_R &= R\underline{I} = R\underline{I}_m e^{j\phi}, \quad \underline{V}_R = \underline{I} \underline{Z} = j\omega L \underline{I}_m e^{j\phi}, \\ \underline{Z}_L &= \underline{Q}/C = (1/C) \int dt \underline{I} = (1/jC\omega) \underline{I}_m e^{j\phi} \end{aligned} \quad (4.15)$$

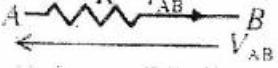
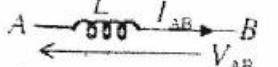
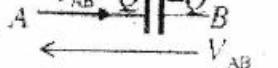
Les impédances complexes de ces éléments sont donc :

$$\underline{Z}_R = \underline{V}_R/\underline{I} = R, \quad \underline{Z}_L = \underline{V}_L/\underline{I} = j\omega L, \quad \underline{Z}_C = \underline{V}_C/\underline{I} = -j/(\omega C) \quad (4.16)$$

L'impédance d'une résistance pure est réelle tandis que celle d'une selfinductance ou d'un condensateur est imaginaire.

# INFORMATIQUE - L1I / ELECTRONIQUE 1 / MODULE 2

Tableau 4-1 Éléments de circuit.

Grandeur électrique	Symbole et représentation	Relations fondamentales
Charge électrique	$Q$	
Intensité de courant	$I$	$I(t) = dq/dt$ ou $q = \int dt i(t)$
Résistance		$V_{AB} = V_A - V_B = RI_{AB}$
Self-inductance		$V_A - V_B = L dI_{AB}/dt$ $Z = jL\omega$
Condensateur		$I_{AB} = dQ/dt$ $V_A - V_B = Q/C$ $Z = 1/jC\omega$
Force électromotrice		$V_{AB} = \mathcal{E} - I_{AB}r$ $P_s = \mathcal{E}I_{AB}$ $P_{ex} = \mathcal{E}I_{AB} - I_{AB}^2 r$

En général, l'impédance d'un dipôle est complexe, de la forme

$$\underline{Z} = R_z + jX_z \quad (4.17)$$

La partie réelle  $R_z$  est la résistance du dipôle (souvent positive) et la partie imaginaire  $X_z$  est sa réactance. On introduit aussi parfois l'admittance, égale à l'inverse de l'impédance

$$\underline{Y} = 1/\underline{Z} \quad (4.18)$$

L'impédance réelle  $Z$  et la phase  $\phi_z$  de  $\underline{Z}$  sont alors données par

$$Z = \sqrt{R_z^2 + X_z^2}, \quad \cos \phi_z = R_z/Z, \quad \sin \phi_z = X_z/Z \quad (4.19)$$

L'impédance complexe s'écrit aussi

$$\underline{Z} = Z e^{j\phi_z} \quad (4.20)$$

Notons aussi la relation  $\tan \phi_z = X_z/R_z$ ; mais cette relation ne suffit pas seule à déterminer  $\phi_z$  complètement. Cependant en pratique, comme  $R_z$  est souvent positive, la phase  $\phi_z$  est comprise entre  $-\pi/2$  et  $+\pi/2$ . Si on connaît l'intensité complexe  $I = I_m e^{j\omega t}$  et l'impédance du dipôle sous la forme (4.20), la d.d.p. complexe s'écrit

$$\underline{V} = V_m e^{-j\phi_z} = \underline{Z} I_m e^{j\omega t} = V_m e^{j(\omega t + \phi_t + \phi_z)} \text{ où } V_m = Z I_m \quad (4.21)$$

Ainsi la d.d.p.a une amplitude égale au produit de l'amplitude de l'intensité par l'impédance réelle et elle est en avance de phase de  $\phi_z$  sur l'intensité.

## 4.4 ASSOCIATION DES DIPÔLES

L'un des avantages de l'utilisation des impédances complexes est qu'elles peuvent être évaluées facilement pour des dipôles en série ou en parallèle, contrairement aux impédances réelles.

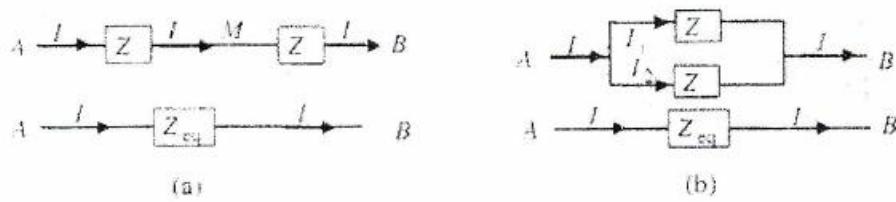


Figure 4-3 a) Montage des impédances en séries et b) montage en parallèle et impédances équivalentes

### a) Montage en série

Considérons deux dipôles d'impédances complexes  $\underline{Z}_1$  et  $\underline{Z}_2$  montés en série (Fig. 4.3a). L'intensité est la même dans ces dipôles. Si  $\underline{I}$  est l'intensité complexe, les d.d.p. aux bornes de ces dipôles sont

$$\underline{V}_{AM} = \underline{Z}_1 \underline{I}, \quad \underline{V}_{MB} = \underline{Z}_2 \underline{I}$$

Utilisant la loi d'addition des d.d.p. en série, qui est valable aussi pour les amplitudes complexes, nous trouvons

$$\underline{V}_{AB} = \underline{V}_{AM} + \underline{V}_{MB} = \underline{I}(\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2)$$

L'impédance équivalente  $\underline{Z}_{eq}$  est celle qui présente, entre ses bornes, la même d.d.p.  $\underline{V}_{AB}$  pour la même intensité  $\underline{I}$ . On a alors  $\underline{V}_{AB} = \underline{Z}_{eq} \underline{I}$ , d'où

$$\underline{Z}_{eq} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 \quad (4.22)$$

Ce résultat peut être facilement généralisé au cas de plusieurs impédances  $\underline{Z}_k$  montées en série : *l'impédance complexe équivalente est la somme algébrique de ces impédances*

$$\boxed{\underline{Z}_{eq} = \sum_k \underline{Z}_k} \quad (4.23)$$

Comme application, considérons une résistance, une self-inductance et un condensateur montés en série (Fig. 4.4a). Utilisant les relations (4.16) et la règle d'association des dipôles en série (4.23), nous trouvons pour l'impédance équivalente

$$\underline{Z}_{RLC} = \underline{Z}_R + \underline{Z}_L + \underline{Z}_C = R + j(\omega L - 1/\omega C) \quad (4.24)$$

L'impédance réelle correspondante et sa phase sont donc

$$\underline{Z}_{RLC} = \sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2} \quad (4.25)$$

$$\phi_{RLC} = \arctan \frac{\omega L - 1/\omega C}{R} \quad (-\pi/2 < \phi_{RLC} < \pi/2) \quad (4.26)$$

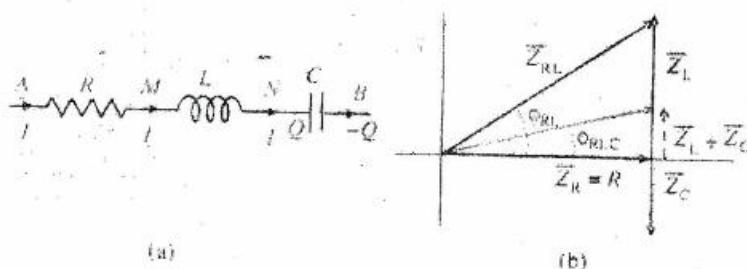


Figure 4.4 : a) Une résistance, une inductance et un condensateur en série.  
b) Diagramme de Fresnel pour les impédances. Les sommes des vecteurs  $\vec{Z}_R$  et  $\vec{Z}_C$  est  $\vec{Z}_{RL}$ . Pour avoir l'impédance totale  $Z_{RLC}$ , on fait la somme  $\vec{Z}_L + \vec{Z}_C$  puis on ajoute  $\vec{Z}_R$ . Le diagramme de Fresnel pour les tensions est obtenu en multipliant les impédances par  $I$ .

La représentation de Fresnel pour les impédances est illustrée dans la Fig. 4.4b.  $R$  est représentée par le vecteur  $\vec{Z}_R$  de longueur  $R$  et porté par l'axe de référence  $Ox$ .  $\vec{Z}_L$  a pour module  $\omega L$  et il est en avance de phase de  $\pi/2$  (dans la direction  $Oy$ ).  $\vec{Z}_C$  a pour module  $1/\omega C$  et il est en retard de phase de  $\pi/2$  (dans la direction opposée à  $Oy$ ). L'impédance  $Z_{RL}$  aux bornes de l'ensemble  $L$  et  $R$  (qui

pourrait être une bobine) est la somme vectorielle  $\vec{Z}_R + \vec{Z}_L$ . Elle est représentée par le vecteur  $\vec{Z}_{RL}$  de module  $Z_{RL}$  et qui forme avec  $Ox$  un angle  $\phi_{RL}$  donnés par

$$Z_{RL} = \sqrt{R^2 + L^2 \omega^2} \quad \text{et} \quad \phi_{RL} = \text{Arctan}(L\omega/R). \quad (4.27)$$

La d.d.p. aux bornes de la bobine est donc en avance de phase  $\phi_{RL}$  sur l'intensité.

Pour trouver l'impédance totale  $Z_{RLC}$ , il faut faire la somme des vecteurs  $\vec{Z}_R$ ,  $\vec{Z}_L$  et  $\vec{Z}_C$ . Il convient de faire d'abord la somme vectorielle  $\vec{Z}_{LC} = \vec{Z}_L + \vec{Z}_C$ . C'est un vecteur de composante  $(L\omega - 1/C\omega)$  dans la direction  $Oy$ . La somme de  $\vec{Z}_{LC}$  et  $\vec{Z}_R$  est le vecteur  $\vec{Z}_{RLC}$  représentant l'impédance équivalente. Il a pour module  $Z_{RLC}$  et il forme avec  $Ox$  un angle  $\phi_{RLC}$  justement donnés par (4.25) et (4.26).

Si l'intensité de courant est  $I = I_m \cos(\omega t - \phi_I)$ , l'intensité complexe correspondante est  $I = I_m e^{j(\omega t - \phi_I)}$ , la d.d.p. complexe entre  $A$  et  $B$  est  $V = Z_{RLC} I = Z_{RLC} I_m e^{j(\omega t - \phi_I + \phi_{RLC})}$ . Nous en déduisons que la d.d.p. réelle entre  $A$  et  $B$  est

$$V = Z_{RLC} I_m \cos(\omega t + \phi_i - \phi_{RLC}) \quad (4.28)$$

La d.d.p. a donc pour amplitude  $Z_{RLC} I_m$  et elle est en avance de phase de  $\phi_{RLC}$  sur  $I$ . C'est effectivement une avance si  $Z_L > Z_C$  (c'est-à-dire  $L\omega > 1/C\omega$ ) et un retard dans le cas contraire.

Dans le cas d'une bobine de self-inductance  $L$  et de résistance  $R$ , la d.d.p. complexe à ses bornes est  $\underline{V} = Z_{RL} \underline{I} = Z_{RL} I_m e^{j(\omega t - \phi_i + \phi_{RL})}$ . Nous en déduisons la d.d.p. réelle

$$V_{MN} = Z_{RL} I_m \cos(\omega t - \phi_i + \phi_{RL}) \quad (4.29)$$

### b) Montage en parallèle

Considérons les dipôles d'impédances complexes  $Z_k$  montés en parallèle (Fig. 4.3b). La règle des noeuds est valable pour les intensités instantanées et aussi pour les amplitudes complexes des intensités : L'intensité  $I$  du circuit principal est la somme des intensités des branches.

$$\underline{I} = \sum_k I_k \quad (4.30)$$

La d.d.p. entre les points de branchement s'écrit, en l'évaluant pour chacune des branches,

$$V_{MN} = \underline{I} \underline{Z}_1 = I_1 Z_1 = \dots \quad \text{d'où} \quad I_k = V_{MN} \underline{Z}_k \quad (4.31)$$

L'impédance complexe équivalente est celle qui, branchée entre les points  $M$  et  $N$ , correspond à la même d.d.p.  $\underline{V}_{MN}$  entre ces points pour le même courant  $\underline{I}$  principal. On a alors  $\underline{V}_{MN} = \underline{I} \underline{Z}$ . Utilisant (4.30) et (4.31), on déduit la relation

$$\boxed{\frac{1}{\underline{Z}} = \sum_k \frac{1}{\underline{Z}_k}} \quad \text{ou} \quad \boxed{\underline{Y} = \sum_k \underline{Y}_k} \quad (4.32)$$

Où  $\underline{Y}_{eq} = \frac{1}{\underline{Z}_e}$  est l'admittance équivalente et les  $\underline{Y}_k = \frac{1}{\underline{Z}_k}$  sont les admittances des branches.

- Les relations (4.23) et (4.32) s'écrivent dans le cas de résistances

$$R_{eq} = \sum_i R_i \quad [\text{résistances en série}] \quad (4.33)$$

$$1/R_{eq} = \sum_i 1/R_i \quad [\text{résistances en parallèle}] \quad (4.34)$$

- et dans le cas de condensateurs

$$1/C_{eq} = \sum_i 1/C_i \quad [\text{condensateurs en série}] \quad (4.35)$$

$$C_{eq} = \sum_i C_i \quad [\text{condensateurs en parallèle}] \quad (4.36)$$

- Dans le cas de self-inductances suffisamment éloignées l'une de l'autre pour que les coefficients d'influence magnétique soient négligeables, nous trouvons

$$L_{eq} = \sum_i L_i \quad [\text{self-inductances en série}] \quad (4.37)$$

$$1/L_{eq} = \sum_i 1/L_i \quad [\text{self-inductances en parallèle}] \quad (4.38)$$

### c) Diviseurs de tension et diviseur de courant

Supposons qu'on dispose d'une d.d.p.  $V_{AB}$  entre deux points A et B d'un circuit (Fig. 4.5a). Pour en extraire une tension  $V < V_{AB}$ , on branche entre A et B deux résistances  $R_1$  et  $R_2$  en série. L'intensité dans ces résistances est  $I = V_{AB}/(R_1 + R_2)$  et la différence de potentiel aux bornes de  $R_1$  est  $V = IR_1 = V_{AB} R_1/(R_1 + R_2)$ . En choisissant des résistances appropriées, on peut avoir toute tension inférieure à  $V_{AB}$ .

C'est le principe du diviseur de tension (rhéostats ou potentiomètres, voir la section 2.7). Pratiquement la résistance  $R_1 + R_2$  est fixe (un enroulement de fil conducteur ou un conducteur rectiligne ou circulaire) et M est un curseur qu'on déplace jusqu'à avoir la tension  $V$  désirée. En courant alternatif, on peut utiliser des impédances complexes  $Z_1$  et  $Z_2$ .

On obtient ainsi entre A et M une tension  $V_{AM} = V_{AB} Z_1 / (Z_1 + Z_2)$ , d'amplitude  $|V_{AM}| = V_{AB} |Z_1| / |Z_1 + Z_2|$  et en avance de phase sur  $V_{AB}$  donnée par  $\phi = \text{phase}(Z_1) - \text{phase}(Z_1 + Z_2)$ .

Pour avoir un diviseur de courant, on monte des résistances  $R_1$  et  $R_2$  en parallèle (Fig. 4.5b). La résistance équivalente est  $R_{eq} = R_1 R_2 / (R_1 + R_2)$ . Si  $I$  est l'intensité principale, la d.d.p. aux bornes de ces résistances est  $V = I R_{eq}$ . L'intensité dans  $R_1$  est donc

$I_1 = V/R_1 = IR_2/(R_1 + R_2)$ . En choisissant les bonnes résistances, on peut avoir toute intensité inférieure à  $I$ .

En courant alternatif, on peut utiliser des impédances complexes  $Z_1$  et  $Z_2$ . L'intensité dans  $Z_1$  est alors  $I_1 = I Z_{eq} / Z_1 = I Z_2 / (Z_1 + Z_2)$ . On peut ainsi régler l'amplitude du courant  $I_1 = I Z_2 / (Z_1 + Z_2)$  et son déphasage par rapport à  $I$ :  $\phi_1 - \phi_1 = \text{phase}(Z_2) - \text{phase}(Z_1 + Z_2)$ .

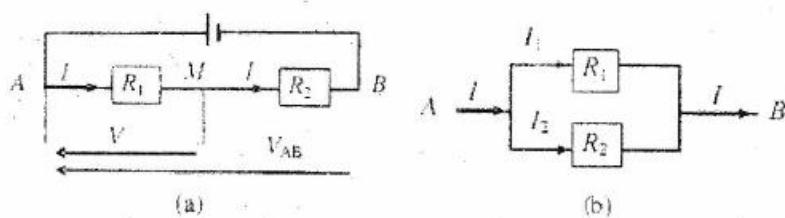


Figure 4-5 a) Diviseur de tension et b) diviseur de courant.

### 4.5 PUISSANCE ÉLECTRIQUE DANS LES DIPÔLES

En représentation récepteur, la charge qui traverse le dipôle de A vers B pendant un temps  $dt$  est  $dq = I_{AB} dt$ . L'énergie potentielle perdue par cette charge à l'intérieur du dipôle est  $dq(V_A - V_B) = V_{AB} I_{AB} dt$ . En d'autres termes, la puissance instantanée fournie par le courant électrique dans le dipôle est :

$$P_{AB} = I_{AB} V_{AB} \quad (4.39)$$

Si  $I_{AB}$  et  $V_{AB}$  sont de même signe (le courant est dans le sens de la chute de potentiel), cette puissance est effectivement positive ; ce qui veut dire que le dipôle reçoit de l'énergie électrique pour la transformer en chaleur ou en une autre forme d'énergie. Il peut aussi l'emmager sous forme électrique dans des condensateurs ou magnétique dans des self-inductances et la restituer ensuite au circuit. Par contre, si  $I_{AB}$  et  $V_{AB}$  sont de signes opposés, la puissance (4.39) est négative ; ce qui veut dire que les charges gagnent de l'énergie pour la restituer au reste du circuit. Les puissances dans une résistance, une self-inductance et un condensateur sont respectivement

$$P_R = VI = RI^2 \quad [\text{résistance}] \quad (4.40)$$

$$P_L = VI = LI dI/dt = dU_M/dt \quad \text{où} \quad U_M = \frac{1}{2}LI^2 \quad [\text{self-inductance}] \quad (4.41)$$

$$P_C = VI = VdQ/dt = dU_E/dt \quad \text{où} \quad U_E = \frac{1}{2}Q^2/C \quad [\text{condensateur}] \quad (4.42)$$

Ces relations montrent que  $P_R$  est toujours positive (la résistance consomme de l'énergie). Par contre une self-inductance reçoit de l'énergie si  $I$  augmente et un condensateur reçoit de l'énergie si  $Q$  augmente et ils la restituent au reste du circuit dans les cas contraires. Si le régime est stationnaire ( $I$  et  $Q$  constantes ou périodiques) les valeurs moyennes de  $U_E$  et  $U_M$  sont constantes ; une self-inductance pure et un condensateur ne consomment alors aucune énergie.

Considérons un dipôle d'impédance  $Z = Ze^{j\phi_z}$  transmettant une intensité  $I = I_m e^{j(\omega t + \phi_I)}$ . La d.d.p. à ses bornes est  $V = ZI = ZI_m e^{j(\omega t + \phi_I + \phi_Z)}$ . Notons que la puissance n'est pas une grandeur linéaire (en  $I$  ou  $V$ ). En effet si la f.e.m.  $\mathcal{E}$  est multipliée par un facteur  $k$ ,  $I$  et  $V$  sont multipliées par  $k$  et la puissance instantanée  $P = VI$  est multipliée par  $k^2$ . Nous devons donc évaluer la puissance en utilisant les grandeurs réelles

$$I = I_m \cos(\omega t + \phi_I) \quad \text{et} \quad V = V_m \cos(\omega t + \phi_I + \phi_z)$$

$$\text{où} \quad V_m = ZI_m \quad (4.43)$$

L'énergie fournie à ce dipôle entre  $t$  et  $t + dt$  est

$$\begin{aligned} dU &= V(t)I(t) dt = V_m I_m \cos(\omega t + \phi_I) \cos(\omega t + \phi_I + \phi_z) dt \\ &= V_m I_m [\cos \phi_z \cos^2(\omega t + \phi_I) - \frac{1}{2} \sin \phi_z \sin(2\omega t + 2\phi_I)] dt \end{aligned}$$

L'énergie totale fournie pendant une période est

$$U = \int_t^{t+T} dU = \frac{1}{2} V_m I_m T \cos \phi_z$$

La puissance moyenne fournie est donc

$$\begin{aligned} \langle P \rangle &= U/T = \frac{1}{2} V_m I_m \cos \phi_z = \frac{1}{2} Z I_m^2 \cos \phi_z \\ &= \frac{1}{2} (V_m^2/Z) \cos \phi_z \end{aligned} \quad (4.44)$$

Utilisant les valeurs efficaces  $I_{\text{eff}} = I_m/\sqrt{2}$  et  $V_{\text{eff}} = V_m\sqrt{2}$ , nous trouvons

$$\langle P \rangle = I_{\text{eff}} V_{\text{eff}} \cos \phi_z = Z I_{\text{eff}}^2 \cos \phi_z = (V_{\text{eff}}^2/Z) \cos \phi_z \quad (4.45)$$

Si nous écrivons l'impédance sous la forme  $\underline{Z} = R_z + jX_z$ , nous avons la relation  $Z \cos \phi_z = R_z$ ; la puissance s'écrit aussi

$$\langle P \rangle = R_z I_{\text{eff}}^2 = (R_z/Z^2) V_{\text{eff}}^2 \quad (4.46)$$

La puissance dissipée dans un dipôle d'impédance  $Z$  est positive ou négative selon le signe de  $\cos \phi$ . Le dipôle dissipe effectivement de l'énergie si  $\cos \phi$  est positif. Les éléments de circuit contenant des résistances sont toujours dissipatifs.

Certains dispositifs sont dissipatifs, bien qu'ils ne contiennent aucune résistance. Une antenne et un câble de transmission sont des exemples de tels dispositifs. L'énergie qui les alimente est transmise comme onde électromagnétique.

Notons aussi que la puissance instantanée s'écrit sous la forme

$$\begin{aligned} P(t) &= \mathcal{R}\text{e}(\underline{I})\mathcal{R}\text{e}(\underline{V}) = \frac{1}{4}(\underline{I} + \underline{I}^*)(\underline{V} + \underline{V}^*) \\ &= \frac{1}{4}(\underline{V}\underline{I}^* + \underline{I}\underline{V}^*) + \frac{1}{4}(\underline{V}^*\underline{I}^* + \underline{I}\underline{V}) \end{aligned}$$

Le premier terme est indépendant du temps ; il est donc égal à sa moyenne sur une période. Le second terme est une fonction périodique de pulsation  $2\omega$  ; sa moyenne sur une période est nulle. Nous pouvons donc écrire

$$\langle P \rangle = \frac{1}{4}(\underline{V}\underline{I}^* + \underline{I}\underline{V}^*) = \frac{1}{2}\mathcal{R}\text{e}(\underline{V}\underline{I}^*) = \frac{1}{2}\mathcal{R}\text{e}(\underline{I}\underline{V}^*) \quad (4.47)$$

La puissance apparente du dipôle est définie par

$$S = I_{\text{eff}} V_{\text{eff}} = Z I_{\text{eff}}^2 \quad (4.48)$$

Elle s'exprime en volt-ampère (V.A) pour la distinguer de la puissance moyenne qui s'exprime en watts (W). En général, dans le cas d'un courant non sinusoïdal, on définit le facteur de puissance par le rapport

$$\text{Facteur de puissance} = \langle P \rangle / S. \quad (4.49)$$

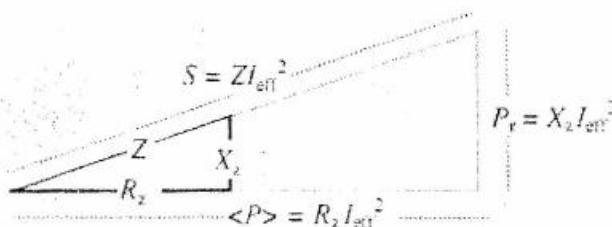


Figure 4-6 Représentation de l'impédance d'un dipôle et son triangle de puissance.

La figure (4.6) illustre la représentation complexe pour l'impédance  $Z = R_z + jX_z$  : c'est un triangle rectangle de côtés d'à l'angle droit  $R_z$  et  $X_z$  et d'hypoténuse  $Z = \sqrt{R_z^2 + X_z^2}$ . L'angle de  $R_z$  avec l'hypoténuse est la phase  $\phi_z$  de l'impédance. En multipliant les côtés par  $I_{\text{eff}}^2$ , on obtient le *triangle de puissance*. Son hypoténuse est la puissance apparente  $S = Z I_{\text{eff}}^2$  du dipôle, le côté qui correspond à  $R_z$  est la puissance moyenne  $\langle P \rangle = Z I_{\text{eff}}^2 \cos \phi_z = R_z I_{\text{eff}}^2$  et le troisième côté de longueur  $P_r = Z I_{\text{eff}}^2 \sin \phi_z = X_z I_{\text{eff}}^2$  est appelé *puissance réactive*.  $P_r$  est positive, négative ou nulle respectivement dans les cas de dipôles induc-  
tif, capacitatif et résistif.

## 4.6 GÉNÉRATEURS COMME SOURCE DE TENSION

### a) Force électromotrice

Un générateur est un dispositif qui transforme en énergie électrique une autre forme d'énergie (chimique, calorifique, mécanique etc.). À l'intérieur du générateur, des forces non électriques déplacent les charges de conduction, créant ainsi un pôle positif A et un pôle négatif B. Les piles et les accumulateurs utilisent les propriétés chimiques pour créer cette d.d.p., ce sont des générateurs chimiques. En revanche, les dynamos utilisent le phénomène d'induction dans un conducteur que des forces mécaniques déplacent dans un champ magnétique ; ce sont des générateurs à induction. Un générateur (tel qu'une pile ou un accumulateur) a des pôles (+) et (-) bien identifiés, on dit qu'il est polarisé. Un générateur à induction peut changer de polarité alternativement ; la d.d.p. à ses bornes est alors alternative.

Pour simplifier, l'analyse suivante est faite pour les générateurs de courant continu ; elle est valable pour les générateurs de courant alternatif en remplaçant les résistances par les impédances complexes et les f.e.m., les d.d.p. et les intensités par les amplitudes des grandeurs complexes correspondantes. Pour la puissance, on doit utiliser les valeurs efficaces avec le facteur de puissance approprié  $\cos \phi_z$ .

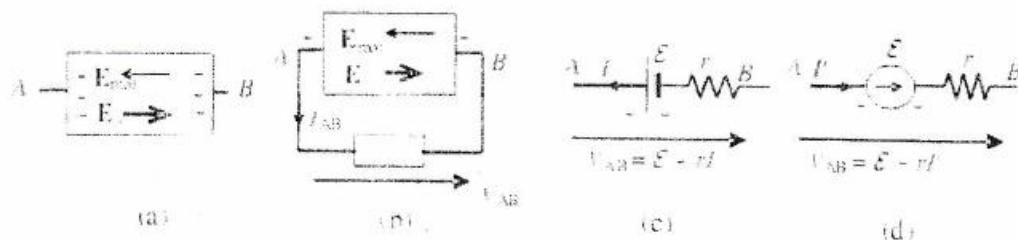


Figure 4.7 : a) Champ électrique  $E_0$  et électromoteur  $E_{\text{mot}}$  d'une source de tension qui ne débite pas (alors  $E_0 = E_{\text{mot}}$ ). b) les champs  $E$  et  $E_{\text{mot}}$  lorsque la source débite dans un circuit (alors  $E_0 < E_{\text{mot}}$ ). c) Représentation d'une source de tension (représentation générateur) et d) une autre représentation de cette source (représentation récepteur).

En considérant le générateur comme une source de tension, les forces non électriques peuvent être représentées par un champ électromoteur  $E_{\text{mot}}$  à l'intérieur du dipôle. Ce champ est dirigé de la borne négative B vers la borne positive A et il agit sur les charges avec une force qEmot (Fig. 4.7a). Les charges positives accumulées en A et les charges négatives accumulées en B produisent une d.d.p. VAB. Ce qui correspond à l'intérieur du générateur à un champ électrique  $E_0$  dirigé de A vers B qui équilibre le champ  $E_{\text{mot}}$ , lorsque le générateur ne débite pas :

$$E_{\text{mot}} = -E_0 \quad [\text{courant débité nul}] \quad (4.50)$$

La circulation de  $E_{\text{mot}}$  de B à A est la force électromotrice du générateur :

$$\mathcal{E} = \int_B^A dr \cdot E_{\text{mot}} \quad (4.51)$$

## INFORMATIQUE - L1I / ELECTRONIQUE 1 / MODULE 2

Utilisant (4.50), nous pouvons évaluer la d.d.p. entre les bornes lorsque le générateur ne débite pas

$$V(A) - V(B) = \int_B^A dr \cdot E_0 = \int_B^A dr \cdot E_{mot} = \mathcal{E} \quad [\text{courant débité nul}] \quad (4.52)$$

La d.d.p. aux bornes d'un générateur qui ne débite pas est donc égale à sa f.e.m.

b) Tension aux bornes d'un générateur débitant un courant

Supposons que le générateur est branché à un circuit et il débite un courant d'intensité  $I = I_{AB}$  dans le circuit extérieur (Fig. 4.7b). Le champ électrostatique  $E$  dans le générateur n'est plus nécessairement égal à  $E_0$ . Adoptons le modèle simple que nous avons utilisé pour étudier la conduction (section 2.2). La force totale qui agit sur une charge  $q$  à l'intérieur du générateur est :

$$F_{in} = q(E_{mot} + E) - bv$$

où  $-bv$  est la force de frottement qui est à l'origine de la résistance interne  $r$  du générateur. A l'état stationnaire, le mouvement des charges est uniforme,  $F_{in} = 0$  et la vitesse est :

$$v = (q/b)(E_{mot} + E)$$

La densité de courant à l'intérieur du générateur est alors :

$$j = nqv = (nq^2/b)(E_{mot} + E) = \sigma(E_{mot} + E) \quad (4.53)$$

où  $n$  est le nombre de porteurs de charges par unité de volume et  $\sigma$  est la conductivité interne. La loi d'Ohm s'écrit sous la même forme que dans un conducteur, mais en remplaçant  $E$  par  $(E_{mot} + E)$ , soit :

$$rI = \int_B^A dr(E_{mot} + E) = \mathcal{E} + (V_B - V_A)$$

où  $r$  est la résistance interne du générateur. La d.d.p. aux bornes du générateur lorsqu'il débite un courant  $I_{AB}$  dans le circuit extérieur est donc

$$V_{AB} = \mathcal{E} - rI_{AB} \quad (4.54)$$

En particulier, une source de tension idéale ( $r = 0$ ) a la même d.d.p. à ses bornes  $V_{AB} = \mathcal{E}$ , quelle que soit l'intensité débitée. Une source de tension réelle peut être considérée comme une source idéale montée en série avec une résistance  $r$  (Fig. 4.7 c et d).

Une pile ou un accumulateur est à une bonne approximation une source de tension. Dans ce qui précède,  $r$  représente une résistance ohmique. Elle peut ne pas l'être effectivement, même pour les piles et les accumulateurs habituels.

c) Puissance d'un générateur

Étudions maintenant l'énergétique d'une source de tension lorsqu'elle débite un courant  $I = I_{AB}$ . Pendant un temps  $\delta t$ , elle débite une charge  $\delta q = I \cdot \delta t$ . Le champ électromoteur agit sur cette charge avec une force  $\delta q E_m$ . Le travail de cette force entre les pôles B et A est

$$\delta W = \delta q \int_B^A dr \cdot E_m = \delta q \mathcal{E} = \delta t I \mathcal{E}$$

La puissance des forces non électriques est donc

$$P_{NE} = \mathcal{E} I \quad (4.55)$$

Toute cette puissance n'est pas disponible pour être utilisée dans le circuit extérieur car une partie

$$P_J = r I^2 \quad (4.56)$$

est dissipée par effet Joule par la résistance interne  $r$  du générateur. La puissance électrique fournie au circuit extérieur est donc

$$P_{ex} = \mathcal{E}I - rI^2 = I V_{AB} \quad (4.57)$$

Le rendement du générateur est le rapport de la puissance  $P_{ex}$  utilisable dans le circuit extérieur à la puissance totale non électrique  $P_{NE}$  nécessaire pour faire fonctionner le générateur :

$$\mathcal{R} = P_{ex}/P_{NE} = V_{AB}/\mathcal{E} = 1 - rI/\mathcal{E} \quad (4.58)$$

Le rendement diminue si l'intensité augmente. Il tend vers sa valeur maximale 1 si l'intensité  $I$  tend vers zéro. La puissance délivrée au circuit est maximale si  $I = \mathcal{E}/2r$ ; elle vaut alors  $\mathcal{E}^2/4r$  et le rendement est 0,5.

Le générateur, considéré comme une source de tension, est caractérisé par sa f.e.m.  $E$  et sa résistance interne  $r$ . C'est la représentation de Thévenin. Une source de tension est idéale si la d.d.p. à ses bornes ne dépend pas du courant débité. La relation (4.54) montre que sa résistance interne  $r$  doit être nulle. Un générateur réel peut être considéré comme un générateur idéal monté en série avec une résistance  $r$  (voir les figures 4.7c et d). Notons que la f.e.m. peut ne pas être localisée dans un endroit déterminé du circuit; c'est le cas d'une f.e.m. induite dans un circuit (voir la section 1.6). D'autre part, une batterie est caractérisée par la charge totale qu'elle peut débiter, exprimée en ampère-heures ( $1A - h = 3600 C$ ).

Les générateurs de tension alternative utilisent l'induction électromagnétique pour convertir l'énergie mécanique (d'origine hydraulique, thermique, éolienne, nucléaire etc.) en énergie électrique. Ils sont essentiellement constitués de bobines d'induction tournant en face d'aimants ou d'électro-aimants. Le courant induit peut être redressé pour avoir un courant continu utilisable pour recharger les batteries d'une voiture, par exemple.

## 4.7 GÉNÉRATEURS COMME SOURCE DE COURANT

Un générateur peut être considéré aussi comme un dispositif capable de débiter un courant dans un circuit, c'est-à-dire une source de courant qui sort du pôle A et rentre au pôle B. Nous caractérisons le générateur par l'intensité  $I$  qu'il débite, s'il est court-circuité, et par une résistance interne  $r'$  montée en parallèle. Les figures (4.8a et b) donnent une représentation schématique d'une telle source, les Fig.4.8c la représente lorsqu'elle est court-circuitée et la figure 4.8d lorsqu'elle débite dans un circuit extérieur représenté par un dipôle D. Dans ce dernier cas, la d.d.p.  $V_{AB}$  à ses bornes dépend du circuit extérieur. Une partie de l'intensité totale débitée  $I$  passe dans la résistance  $r'$ ; elle est donnée par  $V_{AB}/r'$ .

L'intensité qui passe dans le circuit extérieur est donc :

$$I = I - V_{AB}/r' \quad (4.59)$$

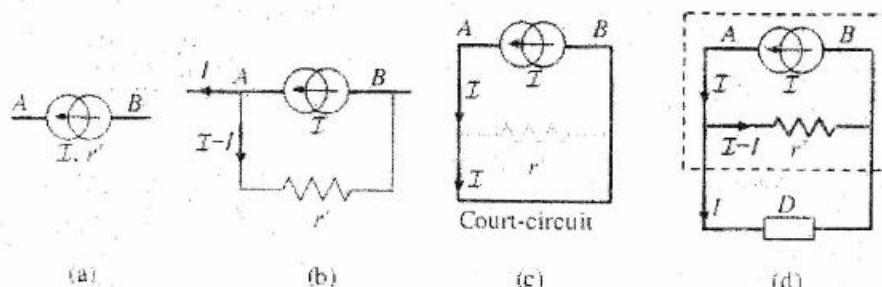


Figure 4-8 Représentation schématique d'une source de courant : a) générateur réel, b) représentation d'un générateur réel comme une source de courant idéale ( $r' = \infty$ ) et une résistance  $r'$  finie montée en parallèle, c) le générateur court-circuité et d) source de courant débitant dans un circuit extérieur représenté par un dipôle  $D$ .

La représentation du générateur comme une source de courant  $I$  et de résistance interne  $r'$  (placée en parallèle) est appelée représentation de Norton. Lorsque ce générateur débite un courant d'intensité  $I$ , l'intensité débitée dans la résistance  $r'$  est  $I - I$ ; ce qui correspond à une d.d.p.  $V_{AB} = r'(I - I)$ . Comparant avec la relation  $V_{AB} = \mathcal{E} - Ir'$  de la représentation de Thévenin, nous trouvons que les deux représentations sont équivalentes, quelle que soit l'intensité débitée, si

$$\varepsilon \equiv 1/r, \quad r' \equiv r \quad (4.60)$$

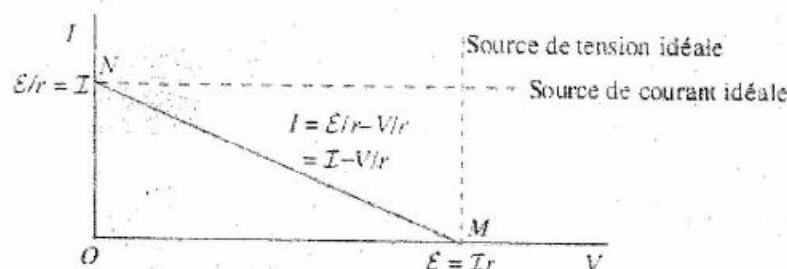


Figure 4-9 Caractéristique d'un générateur (en convention générateur, c'est-à-dire l'est le courant débité) : le point  $M$  correspond à un circuit ouvert et le point  $N$  à un court-circuit.

Ces relations permettent de passer d'une représentation du générateur à l'autre. Ce qui facilite parfois l'analyse des circuits (voir le chapitre 6).

La figure 4.9 illustre la caractéristique d'un générateur. La courbe en continu est celle d'un générateur réel ; son équation est  $I = \mathcal{E}/r - V/r$  (en représentation source de tension) et  $I = \mathcal{I} - V/r$  (en représentation source de courant). La caractéristique coupe l'axe des tensions au point de fonctionnement  $M$  tel que  $V = \mathcal{E} = \mathcal{I}r$  : ce qui correspond au générateur en circuit ouvert. Elle coupe l'axe des intensités au point de fonctionnement  $N$  tel que  $I = \mathcal{E}/r = \mathcal{I}$  : ce qui correspond au générateur court-circuité. Les lignes  $V = \mathcal{E}$  et  $I = \mathcal{I}$  sont les caractéristiques d'une source de tension idéale et d'une source de courant idéale respectivement. Ce graphique montre qu'un générateur réel ne peut pas fournir une tension supérieure à  $\mathcal{E}$  ou  $\mathcal{I}r$  ni une intensité supérieure à  $\mathcal{I}$  ou  $\mathcal{E}/r$ .

La puissance délivrée au circuit extérieur en représentation source de courant est

$$P_{ex} = I V_{AB} = I r (\mathcal{I} - I) \quad (4.61)$$

Tandis que la puissance nécessaire pour faire fonctionner le générateur est :

$$P_{Nt} = \mathcal{I} V_{AB} \quad (4.62)$$

dont une partie

$$P_j = V_{AB}(\mathcal{I} - I) \quad (4.63)$$

est dissipée dans la résistance interne  $r$ . Le rendement s'écrit donc en représentation de Norton

$$\mathcal{R} = P_{ex}/\mathcal{I} V_{AB} = I/\mathcal{E} \quad (4.64)$$

La puissance  $P_{ex}$  délivrée par une source de courant est maximale si  $I = \mathcal{I}/2$ , elle vaut alors  $1/4r\mathcal{I}^2$  et le rendement 0.5.

## 4.8 ASSOCIATION DES GÉNÉRATEURS

On peut monter des générateurs en série ou en parallèle dans le but d'augmenter soit la d.d.p., soit le courant débité.

### a) Montage en série

Si des sources de tension sont montées en série, elles débitent le même courant  $I$ . Par exemple, dans le cas du montage de la figure 4.10a, nous avons les relations

$$\begin{aligned} V_A - V_M &= \mathcal{E}_1 - Ir_1, & V_M - V_N &= \mathcal{E}_2 - Ir_2, \\ V_N - V_B &= -\mathcal{E}_3 - Iz_3 \end{aligned} \quad (4.65)$$

où  $\mathcal{E}_3$  est affectée d'un signe négatif car ce générateur est monté en opposition. Ajoutant membre à membre ces équations, nous trouvons

$$V_A - V_B = \mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_3 - I(r_1 + r_2 + r_3). \quad (4.66)$$

Ce qui veut dire qu'il est possible de remplacer les trois sources par une seule source de f.e.m.  $E_{eq}$  et de résistance interne  $r_{eq}$  données par

$$E_{eq} = \mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_3, \quad r_{eq} = r_1 + r_2 + r_3 \quad (4.67)$$

Un montage en série et dans le même sens de  $n$  sources de tension de f.e.m.  $\mathcal{E}$  et de résistance interne  $r$  est équivalent à une seule source de tension de f.e.m.  $n\mathcal{E}$  et de résistance interne  $nr$ . Ce qui permet d'avoir la f.e.m. multipliée par  $n$  sans augmenter le courant débité ; mais la résistance interne est aussi multipliée par  $n$ .

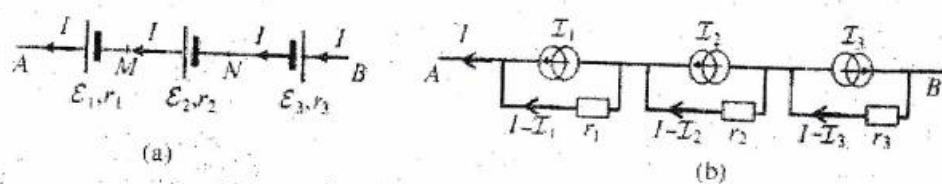


Figure 4-10 Générateur en série a) comme sources de tension et b) comme sources de courant.

Si on utilise la représentation source de courants, les courants dans les résistances internes sont illustrés dans la Fig. 4.10b. La d.d.p. entre A et B est alors  $V_A - V_B = r_1(I - I_1) + r_2(I - I_2) + r_3(I + I_3)$ . La source équivalente de courant  $I_{eq}$  et de résistance interne  $r_{eq}$  est telle que  $V_A - V_B = r_{eq}(I - I)$ . En comparant les deux expressions, nous déduisons que

$$r_{eq} = r_1 + r_2 + r_3 \quad \text{et} \quad I_{eq} = [r_1 I_1 + r_2 I_2 - r_3 I_3] / r_{eq} \quad (4.68)$$

### b) Montage en parallèle

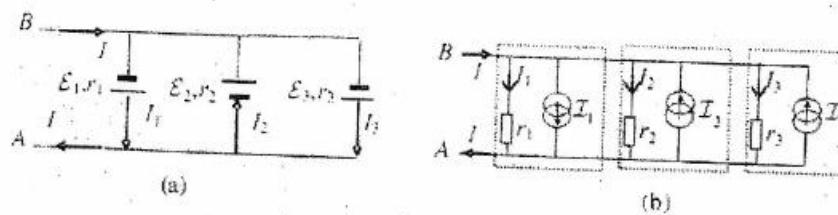


Figure 4-11 Générateurs en parallèle a) comme sources de tension et b) comme sources de courant.

Si des sources de tension sont montées en parallèle, la d.d.p. est la même à leurs bornes et les intensités  $I_i$  qu'ils débitent peuvent être différentes. Par exemple, dans le cas du montage de la figure 4.11a, l'intensité dans le circuit extérieur est donnée par la loi des nœuds

$$I = I_1 + I_2 + I_3 \quad (4.69)$$

La d.d.p. aux bornes de ces générateurs est alors

$$V_{AB} = E_1 - I_1 r_1 = -E_2 + I_2 r_2 = E_3 - I_3 r_3 \quad (4.70)$$

Il est possible de remplacer les trois sources par une seule source de f.e.m.  $\mathcal{E}$  et de résistance interne  $r$ , si celle-ci débite le même courant  $I$  dans le circuit extérieur sous la même d.d.p.  $V_{AB}$ . On doit alors avoir

$$V_{AB} = \mathcal{E}_{eq} - I r_{eq} \quad (4.71)$$

Calculant les valeurs de  $I$ ,  $I_1$ ,  $I_2$  et  $I_3$  de (4.70) et (4.71) et remplaçant dans (4.69), celle-ci est identiquement satisfaite (c'est-à-dire quelle que soit la d.d.p.  $V_{AB}$ ) si

$$\frac{\mathcal{E}_{eq}}{r_{eq}} = \frac{E_1}{r_1} - \frac{E_2}{r_2} + \frac{E_3}{r_3}, \quad \frac{1}{r_{eq}} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} \quad (4.72)$$

# INFORMATIQUE - L1I / ELECTRONIQUE 1 / MODULE 2

Ce montage de générateurs est donc équivalent à une source de tension de f.e.m.  $\varepsilon_{eq}$  et de résistance interne égale à la résistance du circuit passif (c'est-à-dire les forces excitomotrices éteintes mais les résistances internes des générateurs maintenues). Ainsi un montage en parallèle et dans le même sens de n sources de tension  $\varepsilon$  et de résistance interne  $r$  est équivalent à une seule source de tension de f.e.m.  $\varepsilon$  et de résistance interne  $r/n$ .

Si on utilise la représentation sources de courant (Fig. 4.11b), désignant par  $V \equiv VAB$  la d.d.p. aux bornes, les intensités dans les résistances internes (dans les sens choisis) sont  $I_1 = V/r_1$ ,  $I_2 = V/r_2$  et  $I_3 = V/r_3$ . Si  $I_{eq}$  est l'intensité de la source équivalente et  $r_{eq}$  est sa résistance interne, l'intensité débitée est

$$I = I_{eq} - V/r_{eq}$$

D'autre part, la loi des nœuds donne

$$I = I_1 + I_2 + I_3 = V/r_1 + V/r_2 + V/r_3.$$

En comparant les deux expressions, nous déduisons que

$$I_{eq} = I_1 + I_2 + I_3 \quad \text{et} \quad 1/r_{eq} = 1/r_1 + 1/r_2 + 1/r_3 \quad (4.73)$$

Nous retrouvons ainsi les résultats (4.72), compte tenu de la relation :

$$I = \mathcal{E}_1/r_1.$$

Un générateur est dit lié si ses caractéristiques ( $\varepsilon$  et  $r$  dans la représentation de Thevenin ou  $I$  et  $r$  dans la représentation de Norton) dépendent du circuit dans lequel il est branché. Sinon il est dit indépendant.

## EXERCICES

### Exercice 4.1

4-1 On branche un condensateur de  $0,2 \mu F$  en série avec une résistance de  $1 k\Omega$  sur un générateur de fréquence  $1 kHz$ .

En observant la d.d.p. aux bornes de la résistance sur l'écran d'un oscilloscope, on trouve qu'elle est  $V_1 = V_m \cos(\omega t)$ , où  $V_m = 4,5 V$ .

- Écrivez l'expression de l'intensité du courant et la d.d.p.  $V_2$  aux bornes du condensateur.
- Utilisant la représentation de Fresnel, écrivez l'expression de la f.e.m. du générateur.
- Refaites la même analyse en utilisant la représentation complexe.

### Solution

4-1 a)  $I = V_1/R = (V_m/R) \cos(\omega t) = I_m \cos(\omega t)$  où  $I_m = V_m/R = 4,5 mA$

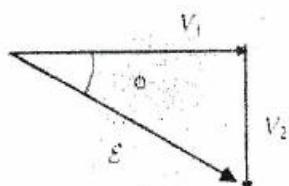
La d.d.p. aux bornes du condensateur est

$$V_2 = Q/C = (1/C) \int dt I = (I_m/C\omega) \sin(\omega t) = V_{2m} \cos(\omega t - \pi/2)$$

où  $V_{2m} = I_m/C\omega = 4,5 \times 10^{-3} / (0,2 \times 10^{-6} \times 2\pi \times 10^3) = 3,58 V$ ,  
d'où  $V_2 = 3,58 \cos(\omega t - \pi/2)$

b) La représentation de Fresnel (illustrée dans la Fig. 4.23) donne

$$\mathcal{E} = \sqrt{V_1^2 + V_2^2} = 5,75 V$$



$$\phi = \text{Arctan}(-V_2/V_1) = -0,672 \text{ rad}$$

d'où  $E = 5,75 \cos(\omega t - 0,672)$

Figure 4-23

c) Utilisant la représentation complexe, nous trouvons  $\underline{V}_1 = V_m e^{j\omega t}$ .

$$I = \underline{V}/R = I_m e^{j\omega t} \text{ où } I_m = V_m/R = 4,5/1000 \text{ A} = 4,5 \text{ mA.}$$

La d.d.p. aux bornes du condensateur est

$$\underline{V}_2 = Q/C = (1/C) \int dt \underline{I} = (I_m/jC\omega) e^{j\omega t} = V_{2m} e^{j\omega t}$$

$$\text{où } V_{2m} = I_m/jC\omega = -3,58 \text{ j}$$

$$\text{Alors } \underline{E} = \underline{V}_1 + \underline{V}_2 = (4,5 - 3,58\text{j}) e^{j\omega t} = \underline{E}_m e^{j\omega t}$$

$$\text{où } \underline{E}_m = 4,5 - 3,58 \text{ j} = |\underline{E}_m| e^{j\phi} \text{ donc } |\underline{E}_m| = \sqrt{4,5^2 + 3,58^2} = 5,75 \text{ V}$$

$$\text{et } \phi = \text{Arctan}(-3,58/4,5) = -0,672 \text{ rad}$$

Prenant la partie réelle, nous trouvons  $E = 5,75 \cos(\omega t - 0,672)$

#### Exercice 4.2

4-2 Un condensateur de  $2,0 \mu\text{F}$  est monté en série avec une résistance de  $1,5 \text{ k}\Omega$  et l'ensemble est branché sur un générateur de f.e.m.  $E = E_m \cos(\omega t)$  de valeur efficace  $10 \text{ V}$  et de fréquence  $50 \text{ Hz}$ . Déterminez l'impédance du circuit et l'intensité efficace. Écrivez les expressions de l'intensité et de la d.d.p. aux bornes du condensateur en fonction du temps.

#### Solution

**4-2** L'impédance du circuit est

$$\begin{aligned} \underline{Z} &= R + 1/jC\omega = 1500 - j/(2 \times 10^{-6} \times 2\pi \times 50) = 1500 - 1592\text{j} \\ &= Z e^{j\phi} \end{aligned}$$

$$\text{où } Z = \sqrt{1500^2 + 1591^2} = 2,187 \text{ k}\Omega$$

$$\text{et } \phi = -\text{Arctan}(1592/1500) = -0,8150 \text{ rad}$$

Le générateur a une tension efficace de  $10 \text{ V}$ , donc une amplitude  $E_m = 14,14 \text{ V}$ . L'intensité efficace est

$$I_{\text{eff}} = V_{\text{eff}}/Z = 10/2187 = 4,572 \text{ mA, donc } I_m = 6,466 \text{ mA}$$

L'intensité est en retard sur la f.e.m. de  $\phi = -0,8148 \text{ rad}$  (c'est-à-dire une avance de  $0,8150$ ). La f.e.m. est  $E = 14,142 \cos(\omega t)$ , où

$$\omega = 100\pi. \text{ L'intensité est donc } \underline{I} = I_m e^{j(\omega t - \phi)}$$

$$\text{d'où } I = 6,466 \cos(\omega t - 0,8150) \text{ mA}$$

L'impédance du condensateur est

$$\underline{Z}_C = 1/jC\omega = 1592 e^{-j\pi/2} \text{ (en } \Omega\text{)}$$

La d.d.p. complexe aux bornes du condensateur est

$$\underline{V}_C = Z_C \underline{I} = Z_C e^{-j\pi/2} I_m e^{j(\omega t - \phi)} = 10,29 e^{j(\omega t - \phi - \pi/2)}$$

La d.d.p. réelle est

$$V_C = 10,29 \cos(\omega t - \phi - \pi/2) = 10,29 \cos(\omega t - 0,7558)$$

### Exercice 4.3

4-3 L'intensité efficace dans une bobine est de 50 mA, si elle est branchée sur un générateur de 60 V et 100 Hz et de 20 mA, si elle est branchée sur un générateur de 40 V et 200 Hz. Déterminez la self-inductance et la résistance de cette bobine. Quel est le déphasage de l'intensité par rapport à la f.e.m. dans ces deux cas ?

#### Solution

**4-3** L'impédance du circuit est

$$\underline{Z} = R + jL\omega = Ze^{j\phi} \quad (0 < \phi < \pi/2)$$

$$\text{d'où} \quad Z^2 = R^2 + L^2\omega^2 = (V_{\text{eff}}/I_{\text{eff}})^2$$

Nous avons donc les deux relations

$$R^2 + L^2\omega_1^2 = (V_{\text{eff},1}/I_{\text{eff},1})^2 \quad \text{et} \quad R^2 + L^2\omega_2^2 = (V_{\text{eff},2}/I_{\text{eff},2})^2$$

Nous en déduisons que

$$L^2(\omega_2^2 - \omega_1^2) = (V_{\text{eff},2}/I_{\text{eff},2})^2 - (V_{\text{eff},1}/I_{\text{eff},1})^2$$

$$\text{c.-à-d.} \quad 4\pi^2 L^2 (200^2 - 100^2) = 2,56 \times 10^6$$

$$\text{d'où} \quad L = 1,47 \text{ H} \quad \text{et} \quad R = 767 \Omega$$

On a  $\phi = \underline{V} \cdot \underline{Z}$ . Le déphasage de  $I$  par rapport à  $V$  est

$$\phi_I - \phi_V = -\phi_Z = -\text{Arctan}(L\omega/R)$$

- Dans le premier cas

$$\phi_I = -\text{Arctan}(1,47 \times 2\pi \times 100/766) = -0,87 \text{ rad (retard)}$$

- Dans le second cas

$$\phi_I = -\text{Arctan}(1,47 \times 2\pi \times 200/766) = -1,18 \text{ rad (retard)}$$

### Exercice 4.4

**4-4** Un générateur de f.e.m.  $\underline{\mathcal{E}} = \mathcal{E}_m e^{j\omega t}$  est branché sur une bobine de self-inductance  $L$  et de résistance interne  $R$  et un condensateur de capacité  $C$  en série. Calculez l'impédance de la bobine, l'intensité débitée et la d.d.p.  $\underline{V}_b$  à ses bornes. L'amplitude de  $\underline{V}_b$  peut-elle être supérieure à  $\mathcal{E}_m$  ?

#### Solution

**4-4** L'impédance complexe totale est  $\underline{Z} = \underline{Z}_R + \underline{Z}_L + \underline{Z}_C = R + j(\omega L - 1/\omega C)$ . L'intensité débitée est

$$I_m = \frac{\mathcal{E}_m}{\underline{Z}} = \frac{\mathcal{E}_m}{R + j(L\omega - 1/C\omega)}$$

L'impédance de la bobine est  $Z_b = R + j\omega L$ . Elle est donc sous une d.d.p.

$$V_{m,b} = Z_b I_m = \frac{(R + jL\omega)}{R + j(L\omega - 1/C\omega)} \mathcal{E}_m = V_m e^{j\phi}$$

où  $V_m = \sqrt{\frac{R^2 + L^2\omega^2}{R^2 + (1/C\omega - L\omega)^2}} \mathcal{E}_m$

et  $\phi = \phi_b - \phi_z$  avec  $\phi_b = \text{Arctan}(\omega L/R)$

et  $\phi_z = \text{Arctan}(\omega L/R - 1/\omega CR)$ .

Nous pouvons écrire aussi

$$\tan \phi = \frac{R}{\omega(CR^2 + CL^2\omega^2 - L)}, \quad \text{tel que } 0 < \phi < \pi.$$

$V_m$  aux bornes de la bobine dépasse  $\mathcal{E}_m$  si  $Z_b > Z$ , c'est-à-dire  $\omega > \omega_0/\sqrt{2}$  où  $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ .

### Exercice 4.5

4-5 Déterminez la résistance R dans le circuit de la Fig. 4.17 pour que la résistance équivalente entre A et B soit justement  $R_0$ .

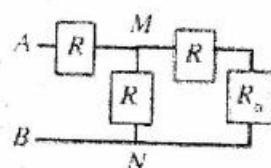


Figure 4-17

### Solution

4-5 Entre M et N nous avons deux résistances  $R$  et  $R + R_o$  en parallèle. La résistance équivalente est  $R_{MN} = R(R + R_o)/(2R + R_o)$ . Cette résistance est en série avec  $R$ . La résistance équivalente entre A et B est donc

$$\begin{aligned} R_{AB} &= R + R_{MN} = R + R(R + R_o)/(2R + R_o) \\ &= R(3R + 2R_o)/(2R + R_o) \end{aligned}$$

Elle est égale à  $R_0$  si  $R_o = \sqrt{3}R$ .

### Exercice 4.6

4-6 Déterminez les résistances équivalentes entre les points A et B puis entre les points C et D du circuit de la Fig.4.18.

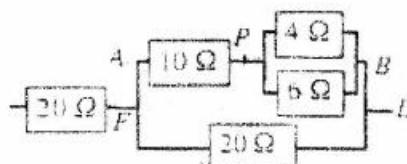


Figure 4-18

### Solution

**4-6** La résistance équivalente entre les points  $P$  et  $B$  est donnée par  $1/R_{PB} = 1/4 + 1/6$ , d'où  $R_{PB} = 2.4 \Omega$ . La résistance équivalente entre les points  $A$  et  $B$  est celle de deux résistances  $10 \Omega$  et  $2.4 \Omega$  en série, soit  $R_{AB} = 12.4 \Omega$ . La résistance équivalente entre  $F$  et  $D$  est celle de deux résistances de  $12.4 \Omega$  (de la branche  $FAPBD$ ) et  $20 \Omega$  en parallèle, soit

$$R_{FD} = 12.4 \times 20 / (12.4 + 20) = 7.65 \Omega.$$

Enfin la résistance équivalente entre  $C$  et  $D$  est celle des deux résistances de  $20 \Omega$  et  $7.65 \Omega$  en série, soit  $R_{CD} = 27.65 \Omega$ .

### Exercice 4.7

**4-7** On considère le circuit de la Fig. 4.19. Un générateur de f.e.m.  $\underline{E} = \underline{E}_m e^{j\omega t}$  est branché entre  $M$  et  $N$ . Calculez l'intensité débitée par ce générateur et l'intensité dans chacune des branches.

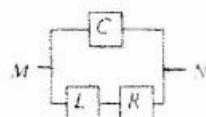


Figure 4-19

### Solution

**4-7** Les impédances des deux branches sont  $\underline{Z}_{RL} = R + j\omega L$ ,  $\underline{Z}_C = 1/jC\omega$ . L'impédance équivalente est donc, en utilisant l'équation (4.32)

$$\underline{Z} = \frac{\underline{Z}_C \underline{Z}_{RL}}{\underline{Z}_C + \underline{Z}_{RL}} = \frac{R + j\omega(L - CR^2 - C\omega^2L^2)}{(1 - CL\omega^2)^2 + (\omega CR)^2}$$

Les amplitudes complexes des intensités débitées dans les deux branches sont respectivement

$$I_m C = \frac{\underline{E}_m}{Z_C} = C \omega \underline{E}_m e^{j\pi/2}$$

$$\text{et } I_{m,RL} = \frac{\underline{E}_m}{Z_{RL}} = \frac{\underline{E}_m}{R + jL\omega} = \frac{\underline{E}_m}{\sqrt{R^2 + L^2\omega^2}} e^{-j\phi_{RL}},$$

où  $\phi_{RL}$  = phase  $Z_{RL}$  =  $\text{Arctan}(\omega L/R)$ . ( $0 < \phi < \pi/2$ ). L'intensité totale débitée est

$$\begin{aligned} I_m &= I_{m,1} + I_{m,2} = \left( \frac{1}{R + jL\omega} + jC\omega \right) \underline{E}_m = \frac{1 - LC\omega^2 + jRC\omega}{R + jL\omega} \underline{E}_m \\ &= \sqrt{\frac{(1 - LC\omega^2)^2 + R^2C^2\omega^2}{R^2 + L^2\omega^2}} \underline{E}_m e^{j\phi} \end{aligned}$$

Où  $\phi = \text{Arctan}[\frac{\omega}{R}(R^2C - L + L^2C\omega^2)]$  telle que  $-\pi/2 < \phi < \pi/2$ .

### Exercice 4.8

**4-8** Une tension  $V_{AB} = V_m \cos(\omega t)$  est branchée sur chacun des circuits de la figure 4.20. On suppose que  $V_m = 10$  V,  $\omega = 100\pi$  rad/s,  $R = 0.5 \text{ k}\Omega$ ,  $C = 1.0 \mu\text{F}$  et  $L = 0.20 \text{ H}$ . Ecrivez les expressions de l'intensité débitée et l'intensité dans chaque branche de ces circuits.

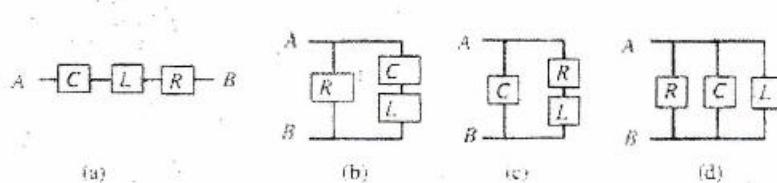


Figure 4-20

### Solution

**4-8 a)** L'impédance du circuit (a) est

$$\begin{aligned} Z_a &= R + jL\omega - j/C\omega = 500 + j(0.2 \times 100\pi - 1/1.0 \times 10^{-6} \times 100\pi) \\ &= 500 - 3120j = 3160 e^{j\phi_a}, \end{aligned}$$

où  $\phi_a = \text{Arctan}(-3120/500) = -1.412 \text{ rad}$ .

Supposant que la d.d.p. est complexe  $V = 10 e^{j\omega t}$ , l'intensité s'écrit

$$\begin{aligned} I_a &= \frac{V}{Z_a} = I_{m,a} e^{j(\omega t - \phi_a)} \\ \text{où } I_{m,a} &= V_m/Z_a = 10/3160 \text{ A} = 3.165 \text{ mA} \\ \implies I_a &= 3.165 \cos(\omega t + 1.412) \text{ (en mA)} \end{aligned}$$

**b)** L'impédance du circuit (b) est

$$\begin{aligned} Z_b &= \frac{R(Z_C + Z_L)}{R + Z_C + Z_L} = \frac{jR(L\omega - 1/C\omega)}{R + j(L\omega - 1/C\omega)} \\ &= \frac{-1.560}{0.5 - 3.120j} 10^3 = 493.7 e^{j\phi_b} \Omega \end{aligned}$$

## INFORMATIQUE - L1I / ELECTRONIQUE 1 / MODULE 2

où  $\phi_b = \text{Arctan}(3,120/0,5) - \pi/2 = -0,1589$  rad

L'intensité débitée s'écrit  $I_b = \underline{V}/\underline{Z}_b = I_{m,b} e^{j(\omega t - \phi_b)}$  où

$$I_{m,b} = V_m/Z_b = 20,26 \text{ mA} \implies I_b = 20,26 \cos(\omega t + 0,1589) \text{ mA}$$

Les intensités dans chacune des deux branches sont

$$\underline{I}_R = \underline{V}/R = I_{R,m} e^{j\omega t}$$

où  $I_{R,m} = V_m/R = 20 \text{ mA} \implies I_R = 20 \cos(\omega t) \text{ mA}$

$$\underline{I}_{CL} = \underline{V}/(\underline{Z}_C + \underline{Z}_L)$$

$$= 10 e^{j\omega t} / (-3120j) = 3,205 e^{j(\omega t + \pi/2)}$$

$$\implies I_{CL} = 3,205 \cos(\omega t + \pi/2) \text{ mA}$$

c) L'impédance du circuit (c) est

$$\underline{Z}_c = \frac{\underline{Z}_C(R + \underline{Z}_L)}{R + \underline{Z}_C + \underline{Z}_L} = \frac{(R + jL\omega)/jC\omega}{R + j(L\omega - 1/C\omega)}$$

$$= \frac{10^6(0,2 - 1,591j)}{500 - 3120,27j} = 507,6 e^{j\phi_c} \Omega$$

où

$$\phi_c = \text{Arctan}(-1,59155/0,2) - \text{Arctan}(-3120/500) = -0,0339 \text{ rad}$$

L'intensité débitée est  $I_c = \underline{V}/\underline{Z}_c = I_{m,c} e^{j(\omega t - \phi_c)}$

où  $I_{m,c} = V_m/Z_c = 19,701 \text{ mA} \implies I_c = 19,70 \cos(\omega t + 0,0339) \text{ mA}$

Les intensités dans les deux branches sont

$$\underline{I}_C = jC\omega \underline{V} = I_{C,m} e^{j(\omega t - \pi/2)}$$

où  $I_{C,m} = C\omega V_m = 1 \times 10^{-6} \times 100\pi \times 10 \text{ A} = 3,14 \text{ mA}$

$$\implies I_C = 3,1416 \cos(\omega t + \pi/2) \text{ mA}$$

$$\underline{I}_{RL} = \underline{V}/(R + \underline{Z}_L) = V_m e^{j\omega t} / (R + jL\omega) = 10 e^{j\omega t} / (500 + 62,83j)$$

= 19,84 e<sup>j(\omega t - \phi\_{RL})</sup> où  $\phi_{RL} = \text{Arctan}(62,83/500) = 0,1250 \text{ rad}$

$$\implies I_{RL} = 19,844 \cos(\omega t - 0,1250) \text{ (en mA)}$$

d) L'admittance du circuit (d) est

$$\underline{Y}_d = \frac{1}{R} + \frac{1}{\underline{Z}_C} + \frac{1}{\underline{Z}_L} = \frac{1}{R} + j(C\omega - \frac{1}{L\omega}) = (2 - 15,601j) \times 10^{-3}$$
$$\implies \underline{Z}_d = 1/\underline{Y}_d = 8,084 + 63,062j = 63,578 e^{j\phi_d}$$

où  $\phi_d = \text{Arctan } 63,062/8,084 = 1,443 \text{ rad}$

L'intensité débitée est  $I_d = \underline{V}/\underline{Z}_d = I_{m,d} e^{j(\omega t - \phi_d)}$

où  $I_{m,d} = V_m/Z_d = 157,3 \text{ mA}$

$$\implies I_d = 157,3 \cos(\omega t - 1,443) \text{ mA}$$

- L'intensité dans chacune des branches est

$$\underline{I}_R = \underline{V}/R = I_{im} e^{j\omega t} \text{ où } I_{im} = V_m/R = 10/500 A = 20 \text{ mA}$$
$$\implies I_R = 20 \cos(\omega t)$$

$$\underline{I}_L = \underline{V}/Z_L = V_m e^{j\omega t} / jL\omega = 10 e^{j\omega t} / 62,83j = 159,1 e^{j(\omega t - \pi/2)} \text{ mA}$$
$$\implies I_L = 159,1 \cos(\omega t - \pi/2) \text{ mA.}$$

$$\underline{I}_C = \underline{V}/Z_C = jC\omega V_m e^{j\omega t} = 3,1416 e^{j(\omega t + \pi/2)}$$
$$\implies I_C = 3,1416 \cos(\omega t + \pi/2) \text{ mA.}$$

## Chapitre 5

### Analyse des circuits

#### 5.1 DÉFINITIONS

- Un circuit électrique est un ensemble d'éléments conducteurs reliés par des conducteurs filiformes de résistance négligeable et alimentés par des générateurs dans le but d'avoir une fonction déterminée (transport de l'énergie, transmission des signaux et leur traitement, étude de certaines propriétés électriques etc.).
- Le but de l'analyse d'un circuit électrique est de déterminer les intensités dans les diverses branches qui forment le circuit. Une fois que les intensités sont connues, les différences de potentiel peuvent être facilement déterminées. Un graphe est un schéma des connexions du circuit (sans être nécessairement une reproduction exacte des positions réelles des éléments du circuit).
- Un nœud est un point où plus de deux conducteurs se rencontrent. Il ne s'agit pas nécessairement d'un point au sens géométrique ; des points d'un graphe représentant un circuit et reliés par des conducteurs sans impédance forment effectivement un nœud. Un nœud est donc l'ensemble des points qui ont le même potentiel à tout instant.
- Une branche est un ensemble de dipôles montés en série entre deux nœuds et une maille est un ensemble de branches constituant un contour fermé et qui ne passe qu'une seule fois par un nœud.

Si on connecte deux points A et B d'un circuit par un fil de résistance négligeable, ou plus généralement si on branche entre A et B un dipôle de très faible impédance, on forme un court-circuit (Fig. 5.1a). On impose alors aux points A et B d'être au même potentiel.

Si deux points d'un circuit ont une certaine d.d.p. fixe (s'ils sont connectés aux bornes d'un générateur, par exemple) et on les court-circuite, l'intensité de courant dans le court-circuit est très grande ; ce qu'il faut éviter.

Si on coupe une branche AB dans un circuit, l'intensité de courant dans cette branche devient nulle mais la d.d.p. VAB n'est pas nécessairement nulle (Fig. 5.1b). Si on branche entre deux points A et B un dipôle d'impédance Z (un voltmètre, par exemple), on modifie les intensités et les d.d.p. dans le circuit et cette modification est d'autant plus importante que le rapport  $Z/Z_{eq}$  est faible (Fig. 5.1c). Ici  $Z_{eq}$  est l'impédance équivalente du circuit vue des points A et B. Enfin si on insère dans une branche un dipôle d'impédance Z (un ampèremètre, par exemple), on modifie les intensités et les d.d.p. dans le circuit et cette modification est d'autant plus grande que le rapport  $Z/Z_{eq}$  est grand (Fig. 5.1d). Ici  $Z_{eq}$  est l'impédance équivalente du circuit vue des bornes du dipôle inséré.

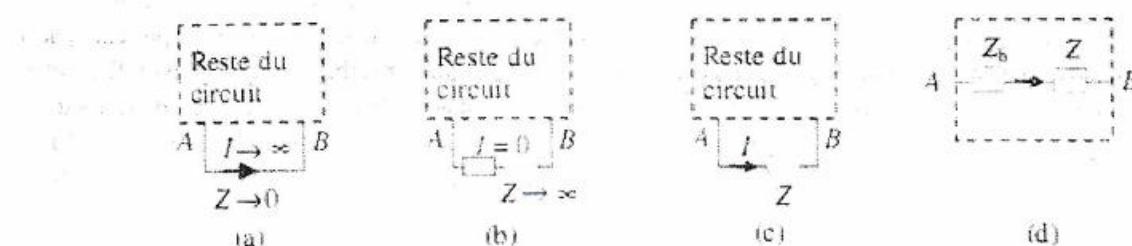


Figure 5-1 a) Court-circuit entre A et B. b) coupure entre A et B. c) branchement d'une impédance Z entre A et B et d) insertion d'une impédance Z dans une branche AB.

#### 5.2 CIRCUIT RLC FORCÉ

##### a) Équation du circuit

Considérons le circuit LCR de la Fig. 5.2a branché sur une f.e.m. harmonique

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_m \cos(\Omega t) \quad (5.1)$$

# INFORMATIQUE - L1I / ELECTRONIQUE 1 / MODULE 2

La loi de Kirchhoff permet d'écrire l'équation du circuit

$$L\dot{I} + RI + Q/C = \mathcal{E}_m \cos(\Omega t) \\ \Rightarrow L\ddot{Q} + R\dot{Q} + Q/C = \mathcal{E}_m \cos(\Omega t) \quad (5.2)$$

Dans la suite nous désignons par  $\delta = R/2L$  le coefficient d'amortissement du circuit et par  $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$  sa pulsation propre.

Dans le régime permanent, l'intensité du courant et la charge du condensateur sont des fonctions harmoniques de même pulsation; nous les écrivons sous la forme

$$Q = Q_m \cos(\Omega t - \phi_Q) \quad \text{et} \quad I = I_m \cos(\Omega t - \phi_I) \quad (5.3)$$

Avec les relations  $I_m = \Omega Q_m$  et  $\phi_I = \phi_Q - \pi/2$  (car  $I = \dot{Q}$ ).

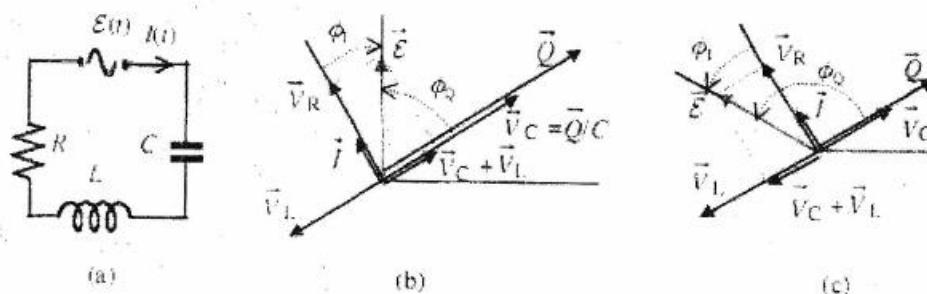


Figure 5-2 a) Circuit électrique LCR forcé, b) représentation de Fresnel dans le cas  $L\Omega < 1/C\Omega$   
c.-à-d.  $\Omega < \omega_0$  et c) représentation de Fresnel dans le cas  $L\Omega > 1/C\Omega$  (c.-à-d.  $\Omega > \omega_0$ ).

## b) Recherche de la solution par la méthode de Fresnel

Trouvons d'abord la solution de (5.2) par la méthode de Fresnel. La phase de  $I$  à l'origine est inconnue ; la direction du vecteur  $I$ , qui la représente est prise arbitrairement pour le moment (Fig. 5.2b et c).

Le terme  $RI$  est alors un vecteur  $\vec{V}_R$  de longueur  $RI$  dans la même direction. Le terme  $LI$  est représenté par un vecteur  $\vec{V}_L$  de longueur  $LI$  faisant un angle  $+\pi/2$  avec le vecteur  $I$ .  $Q$  étant la primitive de  $I$ , le terme  $Q/C$  est représenté par le vecteur  $\vec{V}_C$  de longueur  $1/\Omega C$  faisant un angle  $-\pi/2$  avec le vecteur  $I$ . Le premier membre de l'équation (5.2) est alors représenté par la somme vectorielle de ces trois vecteurs. La somme du premier et du troisième termes est le vecteur  $(\vec{V}_L + \vec{V}_C)$  de longueur  $1/\Omega L - 1/C\Omega$  en retard ou en avance de phase  $\pi/2$  sur l'intensité selon que  $(\Omega L - 1/C\Omega)$  est négatif ou positif, c'est-à-dire  $\Omega < \omega_0$  ou  $\Omega > \omega_0$  (Fig. 5.2b et c respectivement). Le premier membre de (5.2) est représenté par un vecteur  $(\vec{V}_L + \vec{V}_C + \vec{V}_R)$  de module  $|Z|$ , où  $Z = \sqrt{R^2 + (1/C\Omega - L\Omega)^2}$  est l'impédance du circuit. Nous devons donc avoir

$$I_m = \frac{\mathcal{E}_m}{Z} = \frac{\mathcal{E}_m}{\sqrt{R^2 + (1/C\Omega - L\Omega)^2}} \quad (5.4)$$

On voit aussi que  $I$  est en retard sur  $\mathcal{E}$  de  $\phi_I$ , tel que

$$\cos \phi_I = \frac{R}{Z}, \quad \sin \phi_I = \frac{L\Omega - 1/C\Omega}{Z} \quad \text{ou} \quad \phi_I = \arctan \frac{L\Omega - 1/C\Omega}{R} \quad (5.5)$$

## INFORMATIQUE - L1I / ELECTRONIQUE 1 / MODULE 2

Nous en déduisons l'amplitude de Q et son retard de phase sur  $\varepsilon$

$$Q_m = \mathcal{E}_m / \Omega Z \quad \text{et} \quad \phi_Q = \phi_l + \pi/2 \quad (0 < \phi_l < \pi) \quad (5.6)$$

Si  $\Omega < \omega_0$  (Fig. 5.2a), I est effectivement en avance sur  $\varepsilon(\phi_l < 0)$  et si  $\Omega > \omega_0$  (Fig. 5.2b), I est en retard sur  $\varepsilon(\phi_l > 0)$ . Q est toujours en retard sur  $\varepsilon(\phi_Q > 0)$ .

c) Analyse utilisant les fonctions complexes

Nous cherchons maintenant la solution de (5.2) par la méthode des fonctions complexes. Notons d'abord que c'est une équation différentielle linéaire du second ordre. Elle obéit donc au principe de superposition. Considérant une f.e.m. complexe  $\underline{\mathcal{E}} = \mathcal{E}_m e^{j\Omega t}$ , l'équation du circuit s'écrit

$$L \dot{Q} + R \dot{Q} + Q/C = \mathcal{E}_m e^{j\Omega t} \quad (5.7)$$

La solution de (5.2) est alors la partie réelle de la solution de (5.7). Celle-ci est de la forme

$$Q = Q_m e^{j\Omega t}, \quad I(t) = \dot{Q} = j\Omega Q = j\Omega Q_m e^{j\Omega t} = I_m e^{j\Omega t} \quad (5.8)$$

Substituant l'expression de Q dans l'équation (5.7) et utilisant l'impédance complexe, nous trouvons que l'équation est vérifiée si

$$Q_m = \mathcal{E}_m / j\Omega Z \quad \text{et} \quad I_m = \mathcal{E}_m / Z \quad (5.9)$$

où nous avons posé

$$Z = R + j(L\Omega - 1/C\Omega) = Z e^{j\phi_Z} \quad (5.10)$$

Z est l'impédance complexe de module et de phase

$$Z = |Z| = \sqrt{R^2 + (1/C\Omega - L\Omega)^2}, \quad \phi_Z = \text{Arctan}\{(L\Omega - 1/C\Omega)/R\} \quad (5.11)$$

Nous pouvons donc écrire

$$\begin{aligned} Q &= \frac{\mathcal{E}_m}{j\Omega Z} e^{j\Omega t} = \frac{\mathcal{E}_m}{\Omega Z} e^{j(\Omega t - \phi_Z - \pi/2)}, \\ I(t) &= \frac{\mathcal{E}_m}{Z} e^{j\Omega t} = \frac{\mathcal{E}_m}{Z} e^{j(\Omega t - \phi_Z)} \end{aligned} \quad (5.12)$$

$\phi_Z$  est donc égale au retard de phase de l'intensité I sur la f.e.m.  $\varepsilon$ ; tandis que  $\phi_Z + \pi/2$  est le retard de la charge Q sur la f.e.m.

Connaissant l'intensité et la charge, nous pouvons calculer les d.d.p. aux bornes des éléments:

$$\begin{aligned} V_R &= RI = (R/Z)\mathcal{E}_m e^{j\Omega t}, \quad V_L = Z_I I = ((L\Omega/Z)\mathcal{E}_m)e^{j\Omega t}, \\ V_C &= Z_C I = (1/jC\Omega Z)\mathcal{E}_m e^{j\Omega t} \end{aligned} \quad (5.13)$$

La solution de l'équation (5.2) est obtenue, en prenant la partie réelle des expressions précédentes. Prenant la phase de la f.e.m. nulle, c'est-à-dire  $E_m$  réelle, il suffit de remplacer simplement les fonctions exponentielles par les fonctions cosinus avec le même argument. Nous retrouvons évidemment (5.3) avec une amplitude et une phase données par (5.6).

### 5.3 RÉSONANCE DANS LE CIRCUIT RLC

Étudions les variations de l'amplitude de la charge, l'amplitude de l'intensité et le retard de phase  $\phi_I$  de l'intensité sur la f.e.m. d'excitation en fonction de la pulsation  $\Omega$ . Ces grandeurs sont données par :

$$\boxed{Q_m = \frac{E_m}{\Omega \sqrt{R^2 + (L\Omega - 1/C\Omega)^2}}} \quad \boxed{I_m = \frac{E_m}{\sqrt{R^2 + (L\Omega - 1/C\Omega)^2}}}$$
  

$$\boxed{\phi_I = \phi_Z = \text{Arctan}[(L\Omega - 1/C\Omega)/R]} \quad \text{et} \quad \boxed{\phi_Q = \phi_Z + \pi/2}$$

(5.14)

La variation de l'amplitude de la charge  $Q_m$  en fonction de  $\Omega$  est illustrée dans la Fig. 5.3a pour quelques valeurs du coefficient d'amortissement  $\delta = R/2L$ . Quel que soit  $\delta$ ,  $Q_m$  augmente de  $Q_{st} = C E_m$  pour  $\Omega = 0$ , passe par un maximum  $Q_{max} = E_m/2L\delta\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$  pour  $\Omega = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2}$  puis tend vers zéro à hautes fréquences. La Fig. 5.3b illustre la variation de l'amplitude  $I_m$  de l'intensité pour une valeur donnée de  $\delta$ . Elle augmente de 0 pour  $\Omega=0$ , passe par un maximum  $I_{max} = E_m/R = E_m/2L\delta$  pour  $\Omega=\omega_0$  puis décroît à zéro à hautes fréquences. Les maximums de  $Q(t)$  et  $I(t)$  sont d'autant plus prononcés que l'amortissement  $\delta$  est plus faible. Ils deviennent infinis si  $\delta = 0$  et le maximum de  $Q$  disparaît si  $\delta > \omega_0/\sqrt{2}$ . Le retard de phase  $\phi_I$  de l'intensité sur  $E$  est représenté dans la Fig. 5.3c.  $\phi_I$  augmente de  $-\pi/2$  pour  $\Omega=0$ , à  $\phi_I = 0$  pour  $\Omega = \omega_0$  et tend vers  $\phi_I = +\pi/2$  à haute fréquence.

Le passage de l'amplitude de l'intensité par un maximum pour  $\Omega = \omega_0$ , la pulsation du circuit libre, et le passage de l'amplitude de la charge par un maximum pour  $\Omega = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2}$ , très voisin de  $\Omega = \omega_0$  (si  $\delta \ll \omega_0$ ), est un phénomène appelé résonance.

La solution prend les formes suivantes selon les valeurs de  $\Omega$  :

- À basses fréquences ( $\Omega \ll \omega_0$ ) :

$$Q = E_m C \cos(\Omega t), \quad I(t) = E_m \Omega C \cos(\Omega t + (\pi/2)) = -E_m \Omega C \sin(\Omega t)$$

(5.15)

- Au voisinage de la résonance ( $\Omega \approx \omega_0$ ) :

$$Q = \frac{E_m}{\Omega R} \cos(\Omega t - 1/2\pi) = \frac{E_m}{\Omega R} \sin(\Omega t), \quad I(t) = \frac{E_m}{R} \cos(\Omega t) \quad (5.16)$$

- À hautes fréquences ( $\Omega \gg \omega_0$ ) :

$$Q = \frac{E_m}{L\Omega^2} \cos(\Omega t - \pi), \quad I(t) = \frac{E_m}{L\Omega} \cos(\Omega t - 1/2\pi) = \frac{E_m}{L\Omega} \sin(\Omega t)$$

(5.17)

Au voisinage de la résonance, l'intensité est en phase avec la f.e.m. d'excitation et loin de la résonance, elle est en quadrature. L'intensité du courant augmente comme pour les basses fréquences et diminue comme  $1/\Omega$  à hautes fréquences.

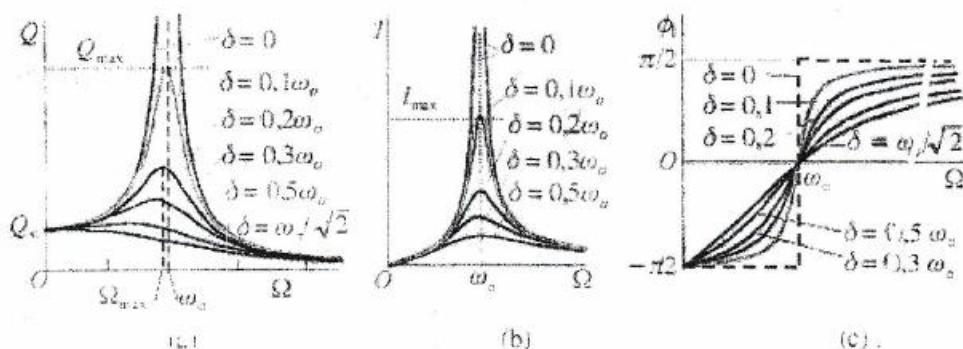


Figure 5-3 La réponse d'un circuit RLC série en fonction de la pulsation de la f.é.m. d'excitation  $\Omega$  pour quelques valeurs du coefficient d'amortissement  $\delta$ : a) variation de l'amplitude de la charge  
b) variation de l'amplitude de l'intensité et c) variation de la phase de  $i$ .

- Dans le cas idéal où  $\delta = 0$ , les courbes, qui représentent  $Q$  et  $I$  deviennent infinies pour  $\Omega = \omega_0$  et le déphasage  $\phi_i$  est discontinu en passant de  $-\pi/2$  à  $+\pi/2$ .
- Si l'amortissement augmente, les courbes de résonance deviennent de plus en plus plates et le maximum  $m$  disparaît pour  $\delta = \omega_0/\sqrt{2}$ .
- Pour une valeur finie de  $\delta$ , la résonance est caractérisée par la largeur de la résonance. Cette quantité est définie comme la largeur de la bande de pulsation telle que

$$I_m > I_{m_{\text{min}}} / \sqrt{2} \quad \text{c'est-à-dire} \quad \Omega^2 \pm 2\delta\Omega - \omega_0^2 = 0. \quad (5.18)$$

Les racines positives de cette équation sont

$$\Omega_{\pm} = \sqrt{\omega_0^2 + \delta^2} \pm \delta \quad (5.19)$$

Nous définissons le facteur de qualité par

$$\zeta = \frac{\omega_0}{\Omega_{(+)} - \Omega_{(-)}} = \frac{\omega_0}{2\delta} = \frac{L\omega_0}{R} \quad (5.20)$$

qui est le même que celui que nous avons défini dans la section 3.6 pour un circuit RLC libre, comme le nombre approximatif d'oscillations du circuit avant de revenir à l'équilibre. La largeur de la résonance peut être définie comme

$$\Gamma = \Omega_{(+)} - \Omega_{(-)} = 2\delta = R/L. \quad (5.21)$$

Dans la bande  $\omega_0 - \Gamma/2 < \Omega < \omega_0 + \Gamma/2$ , la réponse du circuit est importante. C'est la bande passante du circuit. Plus l'amortissement  $\delta$  est faible, plus le facteur de qualité est grand, le pic de la résonance est prononcé et la bande passante est étroite. Pour avoir une idée des ordres de grandeur, dans un poste récepteur de radio  $f_q$  est de l'ordre de 100, pour une cavité résonante en micro-ondes  $f_q$  est de l'ordre de  $10^4$  à  $10^5$  etc.

Notons que dans un circuit RLC, la somme algébrique des d.d.p. aux bornes de la résistance, la self-inductance et la capacité est égale à zéro à tout instant. Les amplitudes des d.d.p. aux bornes de la self-inductance et du condensateur peuvent être beaucoup plus grandes que zéro. Utilisant (5.13), nous définissons les surtensions aux bornes de ces éléments comme étant

$$\frac{V_{L,m}}{\mathcal{E}_m} = \frac{L\Omega}{Z}, \quad \frac{V_{C,m}}{\mathcal{E}_m} = \frac{1}{\Omega CZ} \quad (5.22)$$

À la résonance même,  $Z = R$  et ces surtensions prennent justement la valeur  $f_0$  du facteur de qualité.

La surtension peut provoquer la mise hors d'usage du condensateur, si le champ électrique dépasse la rigidité électrique de l'isolant qu'il contient. Aussi, à la résonance, l'intensité peut devenir très grande et provoquer un surchauffement de la résistance.

## 5.4 BILAN D'ÉNERGIE EN RÉGIME PERMANENT

Lorsqu'un circuit oscille sous l'effet de la f.e.m. d'un générateur, il peut échanger de l'énergie avec le générateur. Le circuit peut recevoir de l'énergie qu'il peut emmagasiner dans la self-inductance ou le condensateur ou dissiper par effet Joule dans la résistance. Il peut aussi restituer de l'énergie au générateur, pendant des intervalles de temps limités.

Utilisant l'équation du circuit (5.2), on peut facilement montrer que, pendant un intervalle de temps  $dt$ , l'énergie fournie par le générateur est la somme de la variation de l'énergie emmagasinée dans le condensateur et la self-inductance ( $U_{\text{em}} = \frac{1}{2} Q^2/C + \frac{1}{2} L I^2$ ) et l'énergie dissipée par effet Joule dans la résistance.

Lorsque le régime permanent est atteint, le circuit revient périodiquement au même état. Donc, en moyenne sur une période, l'énergie emmagasinée reste constante et toute la puissance fournie par le générateur est dissipée par effet Joule. En effet ces puissances s'écrivent

$$P^{(g)} = I\mathcal{E} = (\mathcal{E}_m^2/Z) \cos(\Omega t) \cos(\Omega t - \phi_i) \quad (5.23)$$

$$P^{(J)} = RI^2 = R(\mathcal{E}_m/Z)^2 \cos^2(\Omega t - \phi_i) \quad (5.24)$$

Leurs valeurs moyennes sur une période s'écrivent sous l'une des formes

$$\begin{aligned} \langle P^{(g)} \rangle &= \langle P^{(J)} \rangle = \frac{1}{2} (\mathcal{E}_m^2/Z) \cos \phi_i = \frac{1}{2} R \mathcal{E}_m^2 / Z^2 \\ &= \frac{1}{2} V_m I_m \cos \phi_i = \frac{1}{2} Z I_m^2 \cos \phi_i \end{aligned} \quad (5.25)$$

Nous pouvons aussi utiliser l'intensité efficace  $I_{\text{eff}} = I_m/\sqrt{2}$  et la f.e.m. efficace  $\mathcal{E}_{\text{eff}} = \mathcal{E}_m/\sqrt{2}$ .

Notons que la puissance moyenne fournie par le générateur peut être calculée directement en utilisant les expressions complexes (voir la section 4.5) ; nous trouvons

$$\langle P^{(g)} \rangle = \frac{1}{4} (\underline{\mathcal{E}} I^* + \underline{I} \mathcal{E}^*) = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(\underline{\mathcal{E}} I^*) = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(I \mathcal{E}^*) \quad (5.26)$$

La variation de la puissance moyenne délivrée par le générateur en fonction de la pulsation est illustrée dans la Fig. 5.4.

Elle augmente de zéro pour  $\Omega = 0$ , atteint un maximum  $P_{\max} = \frac{1}{2} \mathcal{E}_0^2/R$ , pour  $\Omega = \omega_0$  puis décroît à zéro à hautes fréquences. La courbe illustre donc le phénomène de résonance pour  $\Omega = \omega_0$ . Nous pouvons définir la largeur de la résonance comme la largeur de la bande de pulsation telle que

$$\langle P \rangle = \frac{1}{2} P_{\max} \quad (5.27)$$

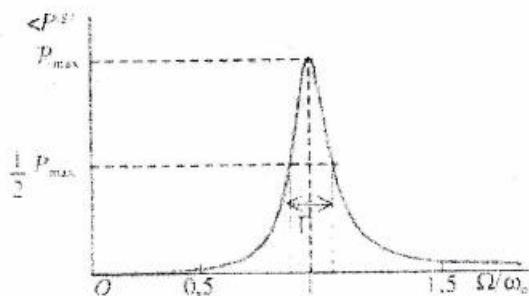


Figure 5-4: Variation de la puissance moyenne absorbée. La valeur maximale est  $P_{\max} = \frac{1}{2} \mathcal{E}_0^2 / R$ . La bande passante est définie par la condition  $< P^2 > > \frac{1}{2} P_{\max}$ .

Nous trouvons la même équation (5.18) et la même largeur de bande passante (5.21).

La puissance instantanée fournie au circuit est

$$P(t) = I(t)\mathcal{E}(t) = I_m \mathcal{E}_m \cos(\Omega t) \cos(\Omega t - \phi_z) \quad (5.28)$$

Elle oscille donc entre  $-I_m \mathcal{E}_m$  et  $I_m \mathcal{E}_m$ . Le produit  $I_m \mathcal{E}_m$  est la puissance apparente. Bien que la moyenne  $\langle P \rangle$  soit positive, à certains moments  $P(t)$  est négative ; le générateur restitue alors de l'énergie au générateur.

## 5.5 APPLICATION DES RÈGLES DE KIRCHHOFF

Rappelons d'abord les deux règles de Kirchhoff (voir le chapitre 4) :

- Règle des nœuds : La somme des intensités de courant qui arrivent en un nœud est égale à la somme des intensités de courant qui le quittent :  $\sum_i I_i^{(in)} = \sum_k I_k^{(ex)}$  (5.29)
- Règle des mailles : La somme des chutes de potentiel aux bornes d'éléments formant une maille est nulle :  $\sum_i V_i = 0$  (5.30)

### a) Équations des mailles et détermination des intensités dans les branches

On peut étudier un circuit, en déterminant d'abord les intensités dans les diverses branches. Pour cela on commence par choisir les amplitudes  $A_i$  des intensités à déterminer. On réduit leur nombre en utilisant la règle des nœuds (5.29). Leur nombre  $N$  est le même que celui des mailles indépendantes. Une maille n'est pas indépendante des autres si elle est obtenue en juxtaposant d'autres mailles qui ont des branches communes. Chaque branche du circuit est alors au moins dans l'une des mailles indépendantes. Il est évident que, si les générateurs ont des f.e.m.  $\mathcal{E}^{(p)}$  ( $p = 1, 2, \dots$ ) harmoniques et de même pulsation  $\omega$ , les intensités dans les diverses branches sont harmoniques de même pulsation,  $I_i = A_i e^{j\omega t}$  et il en est de même pour les d.d.p. Substituant ces expressions dans les équations des mailles, celles-ci deviennent  $N$  équations algébriques linéaires, pour déterminer les  $N$  amplitudes complexes  $A_i$  ( $i=1, 2, \dots, N$ ). Les coefficients dans ces équations sont des combinaisons linéaires des impédances complexes des divers dipôles  $Z_d = R_d + j(\omega L_d - 1/\omega C_d)$ .

Pour écrire correctement l'équation d'une maille, on procède de la façon suivante :

On choisit d'abord un sens de parcours de la maille. La chute de potentiel aux bornes d'un dipôle passif est  $\pm Z_d I_d$  selon que l'intensité  $I_d$  qui le parcourt est dans le sens de la maille ou non. La chute de potentiel aux bornes d'un générateur ( $p$ ) est  $\pm \mathcal{E}^{(p)}$  selon qu'on rencontre en premier le pôle positif ou le pôle négatif en parcourant la maille. L'équation de la maille est alors une équation algébrique dont le premier membre est une combinaison linéaire des intensités dans ses diverses branches et le second membre est la somme des forces électromotrices qu'elle contient, chacune affectée du signe (+) si elle tend à produire un courant dans le sens de la maille et du signe (-) dans le cas contraire.

$$\underline{I}_1 \underline{Z}_1 - \underline{\mathcal{E}}_1 + \underline{\mathcal{E}}_3 + \underline{Z}_3(\underline{I}_1 + \underline{I}_2) = 0,$$

$$\underline{I}_2 \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3(\underline{I}_1 + \underline{I}_2) + \underline{\mathcal{E}}_3 - \underline{\mathcal{E}}_2 = 0$$

ou bien

$$\underline{I}_1(\underline{Z}_1 + \underline{Z}_3) + \underline{I}_2(\underline{Z}_3) = (\underline{\mathcal{E}}_1 - \underline{\mathcal{E}}_3),$$

$$\underline{I}_1(\underline{Z}_3) + \underline{I}_2(\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3) = (\underline{\mathcal{E}}_2 - \underline{\mathcal{E}}_3)$$

La solution de ces équations est

$$\begin{aligned} \underline{I}_1 &= [\underline{\mathcal{E}}_1(\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3) - \underline{\mathcal{E}}_2\underline{Z}_3 - \underline{\mathcal{E}}_3\underline{Z}_2]/\Delta, \\ \underline{I}_2 &= [-\underline{\mathcal{E}}_1\underline{Z}_3 + \underline{\mathcal{E}}_2(\underline{Z}_1 + \underline{Z}_3) - \underline{\mathcal{E}}_3\underline{Z}_1]/\Delta, \\ \implies \underline{I}_3 &= [\underline{\mathcal{E}}_1\underline{Z}_2 + \underline{\mathcal{E}}_2\underline{Z}_1 - \underline{\mathcal{E}}_3(\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2)]/\Delta, \end{aligned} \quad (5.31)$$

où  $\Delta = \underline{Z}_1\underline{Z}_2 + \underline{Z}_1\underline{Z}_3 + \underline{Z}_2\underline{Z}_3$ .

Connaissant les intensités, nous pouvons évaluer les différences de potentiel ; nous trouvons par exemple

$$V_A - V_B = \underline{I}_3 \underline{Z}_3 - \underline{\mathcal{E}}_3 = -[\underline{\mathcal{E}}_1 \underline{Z}_2 \underline{Z}_3 + \underline{\mathcal{E}}_2 \underline{Z}_1 \underline{Z}_3 + \underline{\mathcal{E}}_3 \underline{Z}_1 \underline{Z}_2]/\Delta. \quad (5.32)$$

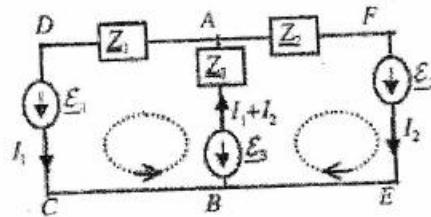


Figure 5.5 Circuit à analyser.

Pour vérifier ce résultat, prenons la limite  $\underline{Z}_3 \rightarrow \infty$ , nous trouvons  $\underline{I}_1 = -\underline{I}_2 = (\underline{\mathcal{E}}_1 - \underline{\mathcal{E}}_2)/(\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2)$ .

Ce résultat correspond à une seule maille, obtenue en supprimant la branche AB ; car une impédance infinie est équivalente à l'absence de la branche.

### b) Equation des nœuds et détermination des tensions aux nœuds

Nous pouvons déterminer directement les tensions aux nœuds de la façon suivante. Le potentiel étant défini à une constante près, nous pouvons déterminer seulement les différences de potentiel. On choisit donc un nœud de référence auquel  $V=0$  (si l'un des nœuds est relié à la masse, on le prend comme référence). Il nous reste  $n - 1$  potentiels inconnus  $V_i$ . On exprime les intensités dans les diverses branches en fonction des  $V_i$  et on écrit la règle des nœuds de Kirchhoff. Ce qui nous donne  $n - 1$  équations indépendantes pour déterminer les  $V_i$  et, par suite, les intensités dans les branches.

Considérons le circuit de la Fig 5.5. Prenons B comme point de référence ( $V_B = 0$ ). Le seul potentiel à déterminer est  $V_A$ . Les expressions des intensités en fonction de  $V$  sont :

$$\underline{I}_{ADCB} = (V_A + \underline{\mathcal{E}}_1)/\underline{Z}_1, \quad \underline{I}_{BA} = -(V_A + \underline{\mathcal{E}}_3)/\underline{Z}_3 \quad \text{et} \quad \underline{I}_{AFEB} = (V_A + \underline{\mathcal{E}}_2)/\underline{Z}_2$$

Écrivons l'équation des nœuds en B (ou en A), nous trouvons

$$I_{ADCB} + I_{AFEB} = I_{BA}$$

$$\text{d'où } V_A = -[\underline{\mathcal{E}}_1 Z_2 Z_3 - \underline{\mathcal{E}}_2 Z_1 Z_3 - \underline{\mathcal{E}}_3 Z_1 Z_2] / \Delta. \quad (5.33)$$

### c) Théorème de Millman

Une autre propriété des circuits, connue sous le nom de théorème de Millman, est parfois utile. Si des branches  $A_i N (i = 1, 2, 3, \dots)$  d'un circuit se rencontrent en un nœud N (Figure 5.6a) et on connaît les potentiels  $V_i$  aux points  $A_i$ , ce théorème permet de déterminer le potentiel  $V_N$ .

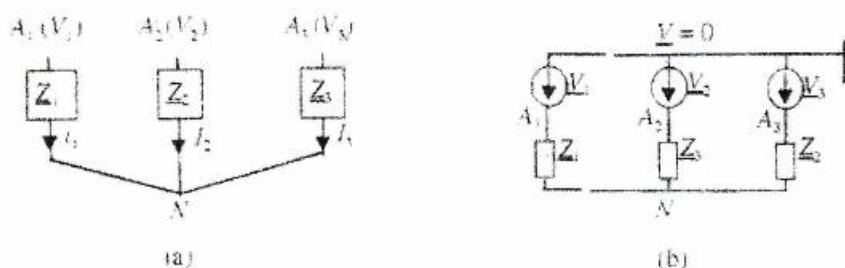


Figure 5-6 a) Théorème de Millman en absence de générateurs, b) son interprétation.

Si le circuit ne comporte pas de générateurs ou de récepteurs, nous avons les relations  $\underline{V}_i - \underline{V}_N = \underline{Z}_i I_i$ . Nous en déduisons que  $I_i = \underline{Y}_i (\underline{V}_i - \underline{V}_N)$ , où  $\underline{Y}_i = 1/\underline{Z}_i$  est l'admittance de la branche (i). Substituant ces expressions dans l'équation des nœuds  $\sum_i I_i = 0$ , nous en déduisons que

$$\underline{V}_N = (\sum_i \underline{V}_i \underline{Y}_i) / (\sum_i \underline{Y}_i) \quad (5.34)$$

Si les branches contiennent des générateurs de f.e.m. si, nous devons les ajouter aux  $V_i$ , chacune affectée du signe (+) ou (-) selon qu'en allant de N à  $A_i$ , on rencontre en premier le pôle positif ou le pôle négatif.

On peut interpréter ce résultat en imaginant que les potentiels  $V_i$  sont produits par des générateurs branchés entre la masse ( $V=0$ ) et les points  $A_i$  (Fig. 5.6b). Ce qui est équivalent à trois sources de tension montées en parallèle et branchées entre le point N et la masse. La relation (5.34) n'est autre que la f.e.m. équivalente (voir équation (4.72) en remplaçant les résistances par des impédances complètes).

## 5.6 ANALYSE UTILISANT LA SUPERPOSITION

Si les dipôles qui forment un circuit sont linéaires, les règles de Kirchhoff étant linéaires, la solution du système des n équations linéaires du circuit obéit au principe de superposition suivant :

Dans un circuit C contenant des générateurs indépendants (1), (2), ... l'intensité li dans chaque branche (i) est la superposition des intensités  $I^{(1)}$ ,  $I^{(2)}$ , ... dans les circuits  $C^{(1)}$ ,  $C^{(2)}$ , ... obtenus en éteignant tous les générateurs sauf un seul, les impédances internes des générateurs étant maintenues dans le circuit. Ce principe de superposition est valable aussi pour les d.d.p.

Éteindre une source de tension (considérée comme une source idéale et une impédance interne  $Z^0$  en série) revient à court-circuiter la source idéale (mettre  $\epsilon = 0$ ) et laisser  $Z^0$ . De même, éteindre une source de courant (considérée comme une source idéale  $I$  et une impédance interne  $Z^0$  en parallèle) revient à couper la branche de la source idéale et laisser la branche  $Z^0$ . Ce principe est valable si les générateurs sont indépendants (ou autonomes). Cela veut dire que les caractéristiques ( $\epsilon$  et  $r$  ou  $I$  et  $r$ ) de chacun ne dépendent pas des autres ou des courants qu'il débite.

Par exemple, un transistor peut être considéré comme une source de courant  $I$  de sortie qui dépend fortement du courant d'entrée; il n'est pas donc autonome; on dit aussi qu'il est contrôlé, lié ou dépendant.

Pour analyser le circuit, on commence par remplacer les f.e.m. réelles par des f.e.m. complexes et réduire le nombre des générateurs, en remplaçant les générateurs en série ou en parallèle par les générateurs idéaux équivalents. Considérons le circuit  $C^{(p)}$ , obtenu en éteignant tous les générateurs sauf  $\underline{\epsilon}^{(p)}$  (en conservant les impédances internes). L'évaluation des intensités correspondantes  $I_i^{(p)}$  dans les diverses branches est facilitée par les règles d'association des impédances. Enfin on ajoute pour chaque branche (i) les intensités  $I_i^{(1)}, I_i^{(2)}, \dots$  produites par tous les générateurs  $\underline{\epsilon}^{(p)}$  pris individuellement.

Comme application, considérons le circuit de la Fig. 5.5. Conservant seulement l'une des f.e.m., on obtient les trois circuits de la Fig. 5.7. Dans chacun, les courants sont produits par un seul générateur dans des impédances montées en parallèle. Dans le cas du premier circuit, par exemple  $Z_2$  et  $Z_3$  sont en parallèle, leur résistance équivalente est  $Z_{eq} = Z_2 Z_3 / (Z_2 + Z_3)$ ; d'où les intensités dues au générateur  $\underline{\epsilon}_1$ :

$$I_1^{(1)} = \underline{\epsilon}_1 / (Z_{eq} - Z_1) = \underline{\epsilon}_1 (Z_2 + Z_3) / \Delta,$$

$$I_2^{(1)} = -(Z_{eq}/Z_2) I_1^{(1)} = \underline{\epsilon}_1 Z_3 / \Delta$$

Nous évaluons de la même façon les courants  $I_1^{(2)}$  et  $I_2^{(2)}$  dus au générateur  $\underline{\epsilon}_2$  dans le cas du second circuit de la Fig. 5.7 et les courants  $I_1^{(3)}$  et  $I_2^{(3)}$  dus au générateur  $\underline{\epsilon}_3$  dans le cas du troisième circuit. Ajoutant ces intensités partielles, nous retrouvons les intensités  $I_1 = I_1^{(1)} + I_1^{(2)} + I_1^{(3)}$  etc.

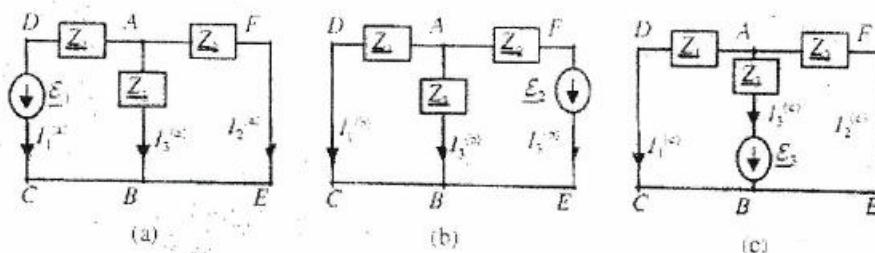


Figure 5-7 Utilisation du principe de superposition.

Le principe de superposition est valable même si les générateurs sont harmoniques de pulsations différentes  $\omega_1, \omega_2, \dots$ . Les intensités et les tensions sont alors des superpositions de fonctions harmoniques de pulsations  $\omega_1, \omega_2, \dots$ . Si le circuit est alimenté par un générateur non harmonique, la théorie de Fourier permet d'écrire sa f.e.m. comme une superposition de f.e.m. harmoniques de pulsations  $\omega_i$ . Les intensités et les tensions sont alors des superpositions de fonctions harmoniques de ces pulsations  $\omega_i$ . Comme les impédances dépendent de la pulsation, les intensités et les tensions n'ont pas la même forme que la f.e.m. du générateur.

## 5.7 THÉORÈMES DE THÉVENIN ET DE NORTON

Le principe de superposition a pour conséquence une propriété connue sous le nom de *théorème de Thévenin*:

*Supposons que la d.d.p. entre deux points A et B d'un circuit (1) est  $V_{AB}$  et que le circuit passif (c'est-à-dire les forces électromotrices éteintes en conservant les impédances internes des générateurs) a une impédance équivalente  $Z_{AB}$  entre A et B. Les d.d.p. et les intensités dans un circuit (2) branché entre A et B sont les mêmes que si le circuit (2) était branché sur un générateur de f.e.m.  $\epsilon_{Th} = V_{AB}$  et d'impédance interne égale à  $Z_{AB}$ .*

## INFORMATIQUE - L11 / ELECTRONIQUE 1 / MODULE 2

Pour établir ce théorème, considérons le circuit (1) dont l'impédance passive est  $Z_{AB}$  et tel que la d.d.p. entre deux points A et B est  $V_{AB}$  (Fig. 5.8a). Branchons entre A et B une impédance  $Z_2$  et un générateur idéal de f.e.m.  $\epsilon_2 = V_{AB}$  en opposition, c'est-à-dire créant entre A et B la même d.d.p.  $V_{AB}$  (Fig. 5.8b). Il est évident que l'intensité de courant dans le circuit (2), ainsi branché, est nulle et que la d.d.p. entre A et B reste  $V_{AB}$ . Inversons maintenant le générateur du circuit (2) et supprimons toutes les f.e.m. du circuit (1) en maintenant leurs impédances internes, pour avoir un circuit (1) passif (Fig. 5.8c). L'intensité débitée par  $\epsilon_2$  est alors  $I_{AB} = \epsilon_2 / (Z_{AB} + Z_2)$ .

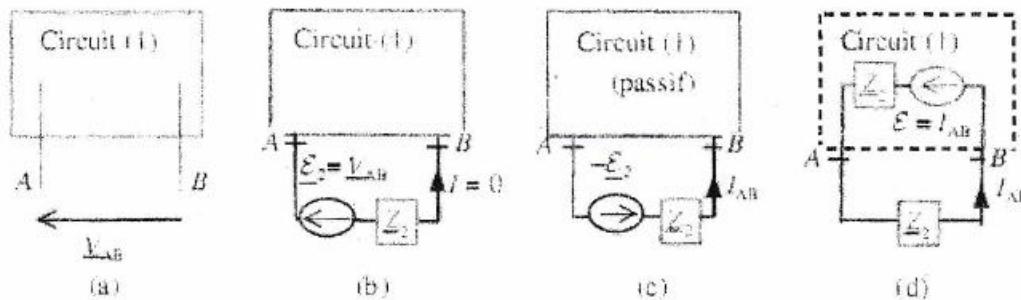


Figure 5.8 Théorème de Thévenin.

Faisons maintenant la superposition des deux circuits (5.8b) et (5.8c), nous trouvons le circuit de la Fig. 5.8d, avec le circuit (1) possédant toutes ses f.e.m. et le circuit (2) sans la f.e.m.  $\epsilon_2$  mais avec l'impédance  $Z_2$ . D'après le principe de superposition, la nouvelle intensité de courant dans le circuit (2) est la superposition des intensités des circuits (b) et (c). Nous trouvons donc

$$I_{AB} = \frac{V_{AB}}{Z_{AB} + Z_2},$$

exactement comme si nous avions un générateur de f.e.m. de Thévenin  $\epsilon_{TH} = V_{AB}$  et d'impédance interne  $Z_{AB}$ .

Tout générateur peut être considéré comme une source de tension  $\epsilon$  ou une source de courant  $I$  (telle que  $\epsilon = Ir$ ). Nous en déduisons le **théorème de Norton** :

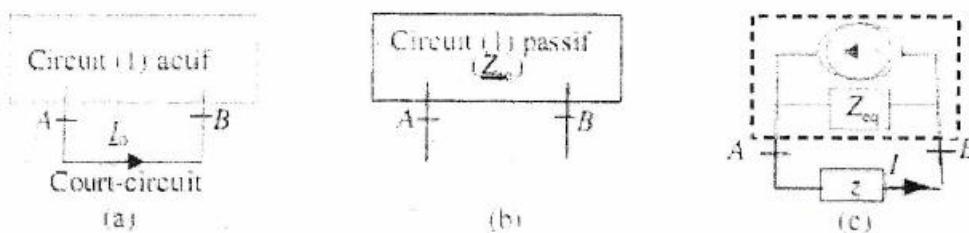


Figure 5.9 Théorème de Norton. a) Intensité de court-circuit, b) le circuit passif et  $Z_{eq}$  vu de A et B et c) Le circuit (1) débitant dans un autre circuit est équivalent à une source de courant  $I_Nor = -I_0$  et de résistance interne  $Z_{eq}$ .

*Si un circuit (2) est branché entre deux points A et B d'un circuit (1), les d.d.p. et les intensités dans le circuit (2) sont les mêmes que si le circuit (1) était remplacé par une source de courant d'intensité  $I_{Nor}$  égale à l'intensité débitée par le circuit (1) s'il était court-circuité entre A et B et d'impédance interne  $Z_{AB}$  égale à l'impédance passive équivalente du circuit (1) entre A et B.*

Appliquons les théorèmes de Thévenin et de Norton pour déterminer l'intensité de courant  $I_1$  dans le circuit de la Fig. 5.5. Débranchons par la pensée la branche ADCB, qui transporte ce courant. Le circuit ouvert (1) restant (Fig. 5.10a) peut être considéré comme une source de Thévenin de f.e.m.  $\underline{\mathcal{E}}_{Th} = \underline{V}'_{AB}$  et d'impédance interne  $Z_{AB}$  égale à l'impédance équivalente à  $Z_2$  et  $Z_3$  montées en parallèle (Fig. 5.10b), soit  $Z_{AB} = Z_2 Z_3 / (Z_2 + Z_3)$ . L'intensité dans cette maille est  $I' = (\underline{\mathcal{E}}_3 - \underline{\mathcal{E}}_2) / (Z_2 + Z_3)$

La d.d.p. entre A et B est alors :

$$\underline{V}'_{AB} = Z_3 I' - \underline{\mathcal{E}}_3 = -(\underline{\mathcal{E}}_3 Z_2 - \underline{\mathcal{E}}_2 Z_3) / (Z_2 + Z_3)$$

Utilisant le théorème de Thévenin, si on branche le tronçon (2) entre A et B, l'intensité  $I_1$  est la même que celle du circuit 5.10c, soit

$$I_1 = \frac{\underline{V}'_{AB} + \underline{\mathcal{E}}_1}{Z_{eq} + Z_1} = \frac{1}{\Delta} [\underline{\mathcal{E}}_1 (Z_2 + Z_3) - \underline{\mathcal{E}}_2 Z_3 - \underline{\mathcal{E}}_3 Z_2]$$

où  $\Delta = Z_1 Z_2 + Z_1 Z_3 + Z_2 Z_3$

Nous retrouvons donc le même résultat (5.31).

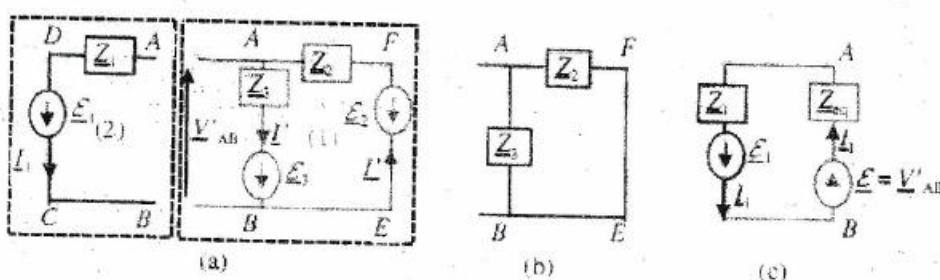


Figure 5-10 Utilisation du théorème de Thévenin.

Pour utiliser le théorème de Norton, nous séparons par la pensée la branche DC, qui transporte le courant  $I_1$  à déterminer. Le reste du circuit peut être considéré comme une source de Norton d'intensité  $I$  égale au courant de court-circuit entre N et M (Fig. 5.11a) et d'impédance

interne égale à l'impédance équivalente  $Z_{NM} = Z_2 Z_3 / (Z_2 + Z_3)$  du circuit passif vu des points M et N (Fig. 5.11b). Dans le circuit court-circuité (Fig. 5.11a), considérant les mailles ABMN et FEMN, nous trouvons les intensités  $I_{AB} = \underline{\mathcal{E}}_3 / Z_3$  et  $I_{FE} = \underline{\mathcal{E}}_2 / Z_2$  d'où  $I = I_{NM} = -\underline{\mathcal{E}}_3 / Z_3 - \underline{\mathcal{E}}_2 / Z_2$ . Le circuit initial de la Fig. 5.5 est donc équivalent au circuit de la Fig. 5.11c. L'intensité dans BA est  $I_{BA} = I_1 - I$ . La loi des mailles pour ABCD donne  $\underline{\mathcal{E}}_1 = I_1 Z_1 + Z_{NM}(I_1 - I)$ . Nous en déduisons le résultat (5.31) pour  $I_1$ .

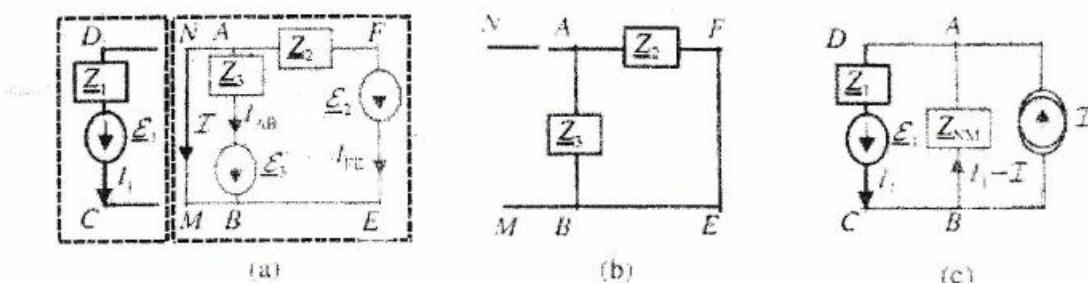


Figure 5-11 Utilisation du théorème de Norton.

## 5.8 COURANTS DE MAILLES ET RÉCIPROCITÉ

Pour analyser un circuit on peut utiliser ce qu'on appelle courants des mailles. Considérons, par exemple, le circuit de la figure 5.12 qui a trois mailles indépendantes. Orientons ces mailles dans le même sens et associons à chaque maille ( $m$ ) (où  $m = 1,2,3$ ) un « courant de maille » d'intensité  $i^{(m)}$ . L'intensité dans une branche de la maille ( $m$ ), qui n'est pas commune avec d'autres mailles, est alors  $i(m)$ . Dans la branche commune aux mailles  $m$  et  $m'$ , l'intensité est la différence des intensités  $i^{(m)}$  et  $i^{(m')}$ . Écrivant la règle de Kirchhoff pour les trois mailles, nous trouvons les équations

$$Z_3(\hat{t}^{(1)} - \mathcal{E}_1) + Z_4(\hat{t}^{(1)} - \hat{t}^{(3)}) + \mathcal{E}_3 + Z_5(\hat{t}^{(1)} - \hat{t}^{(2)}) = 0,$$

c'est-a-dire

$$\begin{aligned} (\underline{Z}_1 + \underline{Z}_4 - \underline{Z}_3) \underline{i}^{(1)} - \underline{Z}_5 \underline{i}^{(2)} - \underline{Z}_6 \underline{i}^{(3)} &= \underline{\mathcal{E}}_1 - \underline{\mathcal{E}}_3, \\ -\underline{Z}_4 \underline{i}^{(1)} + (\underline{Z}_2 - \underline{Z}_5) \underline{i}^{(2)} &= \underline{\mathcal{E}}_2, \\ -\underline{Z}_{12} \underline{i}^{(1)} + (\underline{Z}_3 - \underline{Z}_4) \underline{i}^{(3)} &= \underline{\mathcal{E}}_3 \end{aligned} \quad (5.35)$$

Dans l'équation de la maille (m), nous remarquons que le coefficient de l'intensité  $i^{(m)}$  de cette maille est la somme des impédances de cette maille tandis que le coefficient de l'intensité  $i^{(l)}$

( $i$  différent de  $m$ ) est égal à l'opposé de l'impédance de la branche commune aux mailles ( $i_m$ ) et ( $i$ ). Au second membre de l'équation de la maille ( $m$ ) nous trouvons les f.e.m. de cette maille avec un signe (+) si la f.e.m. produit un courant dans le même sens que  $i^{(m)}$  et un signe (-) si elle produit un courant de sens opposé. Ce qui est remarquable dans ces équations est que la matrice  $[M]$  des coefficients est symétrique.

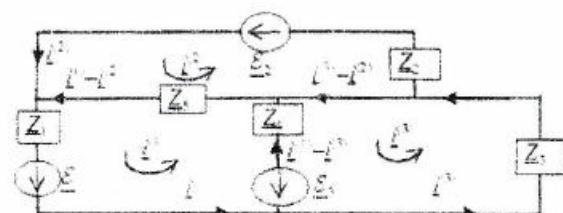


Figure 3-12

# INFORMATIQUE – L1I / ELECTRONIQUE 1 / MODULE 2

Dans le cas d'une seule f.e.m. dans la maille (1) ( $\underline{\mathcal{E}}_1 = \underline{\mathcal{E}}$  et  $\underline{\mathcal{E}}_2 = \underline{\mathcal{E}}_3 = 0$ ), la solution s'écrit :

$$\underline{i}^{(1)} = \underline{\mathcal{E}} \underline{\mu}_{11} / \det[\underline{M}], \quad \underline{i}^{(2)} = -\underline{\mathcal{E}} \underline{\mu}_{12} / \det[\underline{M}] \text{ et } \underline{i}^{(3)} = \underline{\mathcal{E}} \underline{\mu}_{13} / \det[\underline{M}], \quad (5.36)$$

où  $\underline{\mu}_{ij}$  est le mineur de l'élément  $M_{ij}$  dans la matrice des coefficients

(c'est-à-dire que le déterminant obtenu en supprimant la ligne i et la colonne j).

Supposons maintenant que la même f.e.m. soit placée dans la maille (2) ( $\underline{\mathcal{E}}_2 = \underline{\mathcal{E}}$  et  $\underline{\mathcal{E}}_1 = \underline{\mathcal{E}}_3 = 0$ ) ; la solution s'écrit :

$$\underline{i}'_1 = -\underline{\mathcal{E}} \underline{\mu}_{21} / \det[\underline{M}], \quad \underline{i}'_2 = \underline{\mathcal{E}} \underline{\mu}_{22} / \det[\underline{M}] \text{ et } \underline{i}'_3 = -\underline{\mathcal{E}} \underline{\mu}_{23} / \det[\underline{M}], \quad (5.37)$$

Puisque la matrice  $[M]$  est symétrique, les mineurs  $\mu_{12}$  et  $\mu_{21}$  sont égaux, donc  $i_2 = i'_1$ . Nous obtenons ainsi la règle de réciprocité suivante :

Si une f.e.m.  $\underline{\mathcal{E}}$ , placée dans la branche j d'un circuit, produit une intensité de courant  $i_k$  dans une branche k, la même f.e.m.  $\underline{\mathcal{E}}$ , placée dans la branche k, produit dans la branche j la même intensité ( $i'_j = i_k$ ).

Notons que la f.e.m. doit être placée dans le même sens dans l'une ou l'autre des deux branches et les intensités sont algébriques dans les sens choisis pour les mailles.

On peut définir la f.e.m.  $e_m$  de la maille (m) comme la somme des f.e.m. de cette maille, chacune affectée du signe (+) si elle tend à produire un courant dans le sens choisi pour la maille et du signe (-) dans le cas contraire. On peut alors grouper les n intensités  $i_i$  dans une matrice colonne I et les n f.e.m. de mailles  $e_m$  en une matrice colonne e. Les n équations du circuit prennent alors la forme matricielle

$$[\underline{M}] \underline{I} = \underline{e} \text{ où } \underline{I} = \begin{pmatrix} \underline{i}_1 \\ \underline{i}_2 \\ \dots \\ \underline{i}_n \end{pmatrix}, \quad \underline{e} = \begin{pmatrix} \underline{e}_1 \\ \underline{e}_2 \\ \dots \\ \underline{e}_n \end{pmatrix} \text{ et } [\underline{M}] = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} & \dots & M_{1n} \\ M_{21} & M_{22} & \dots & M_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ M_{n1} & M_{n2} & \dots & M_{nn} \end{pmatrix} \quad (5.38)$$

## 5.9 DUALITÉ

Considérons un circuit RLC série alimenté par une source de tension  $\underline{\mathcal{E}}$  et un circuit formé par une résistance  $R'$ , un condensateur de capacité  $C'$  et une self-inductance  $L'$  montés en parallèle et alimentés par une source de courant  $I'$  (Figures 5.13 a et b respectivement).

L'équation du premier circuit pour  $I$  et du second pour  $V' \equiv V(AI)$  sont :

$$L \dot{I} + RI + (1/C) \int_0^t dt I = \underline{\mathcal{E}}(t) - \underline{\mathcal{E}}(0) \quad (5.39)$$

$$C' \dot{V}' + (1/R') V' + (1/L') \int_0^t dt V' = \underline{I}'(t) - \underline{I}'(0) \quad (5.40)$$

On voit que l'une de ces équations se transforme en l'autre en changeant  $I$  en  $V'$ ,  $L$  en  $C'$ ,  $C$  en  $L'$ ,  $R$  en  $G' = 1/R'$  ( $G$  étant la conductance) ou inversement ; ce qui correspond à changer une impédance complexe en admittance (inverse d'une impédance) et à changer  $\underline{\mathcal{E}}(t)$  en  $\underline{I}'(t)$  et inversement. On dit que l'un des circuits est le dual de l'autre.

# INFORMATIQUE - L1I / ELECTRONIQUE 1 / MODULE 2

Cette dualité peut être généralisée aux circuits complexes et elle peut être utile dans l'analyse de certains circuits. Le circuit et son dual ont des topologies différentes : les dipôles en série de l'un correspondent à des dipôles en parallèle de l'autre, les mailles de l'un correspondent à des nœuds de l'autre (mais avec un nœud supplémentaire) et le circuit ouvert de l'un correspondent à un court-circuit de l'autre.

La figure 5.13c illustre comment déterminer le dual (b) d'un circuit (a) simple. Cette construction peut être généralisée aux circuits (a) complexes de la façon suivante : On commence par réduire les impédances et les sources dans chaque branche de (a) à un seul dipôle équivalent. On place un point  $A_i$  à l'intérieur de chaque maille indépendante (i) du circuit (a) et un point supplémentaire  $A_o$  à l'extérieur. Ces points seront les nœuds du circuit dual (b). On joint les paires de nœuds (i) et (j) en passant par le dipôle du circuit (a) qui est commun aux mailles (i) et (j) correspondantes. On joint le nœud  $A_o$  aux autres nœuds  $A_j$  en passant par le dipôle  $Z_j$  si celui-ci n'est pas commun à la maille (j) et une autre. Puis on remplace chaque dipôle par son dual.

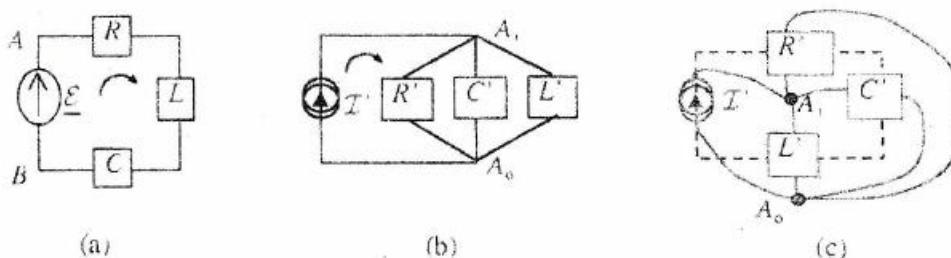


Figure 5.13 a) Circuit RLC série, b) son dual et c) détermination du circuit (b) dual du circuit (a)

Comme application, considérons le circuit de la figure 5.12 comprenant trois mailles indépendantes. Associant les impédances et les sources de chacune des branches en un seul dipôle, on obtient le circuit de la figure 5.14a. Plaçons des points  $A_0$ ,  $A_1$ ,  $A_2$  et  $A_3$  comme dans la figure 5.14b et joignons-les ; nous obtenons le circuit de la figure 5.14c, où les  $Z'_p$  sont les duales des  $Z_p$ . Supposons que  $V = 0$  en  $A_0$  et désignons par  $V'_1$ ,  $V'_2$  et  $V'_3$  les potentiels en  $A_1$ ,  $A_2$  et  $A_3$ . Remplaçant les sources de courant par les sources de tension équivalentes, nous trouvons les équations des nœuds de ce circuit :

$$\begin{aligned} -V'_1/Z'_5 + V'_2(1/Z'_2 + 1/Z'_5) &= \mathcal{J}'_2 \\ -V'_1/Z'_4 + V'_3(1/Z'_3 + 1/Z'_4) &= \mathcal{J}'_3 \\ V'_1/Z'_1 + V'_2/Z'_2 + V'_3/Z'_3 &= \mathcal{J}'_1 + \mathcal{J}'_2 \end{aligned} \quad (5.41)$$

Ces équations sont semblables aux équations (5.35) ou à leurs combinaisons linéaires.

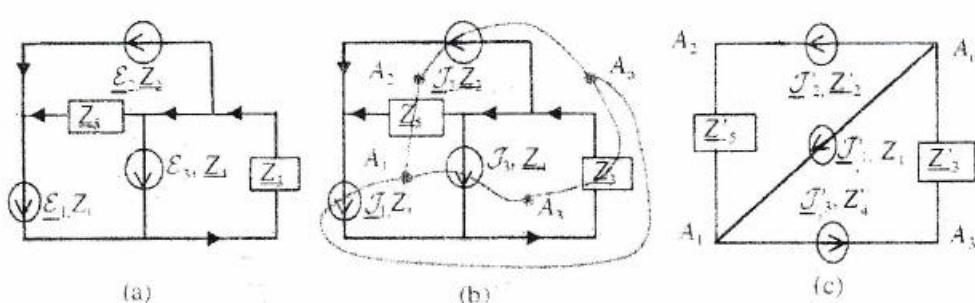


Figure 5.14 a) Le circuit de la figure 5.12, b) détermination de son dual et c) le graphe du circuit idéal.

## POINTS-CLÉS

- La recherche de la solution pour un oscillateur forcé en utilisant les fonctions trigonométriques est longue, la méthode de la représentation de Fresnel est rapide dans certains cas. La méthode des fonctions complexes est conseillée, surtout pour analyser les circuits électriques complexes.
- La pulsation de résonance dépend de la façon dont on la définit. L'amplitude de l'intensité du courant et la puissance moyenne fournie par le générateur ont des maximums pour une pulsation d'excitation  $\Omega = \omega_0$ . Par contre l'amplitude de la charge du condensateur a un maximum pour  $\Omega = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2}$ . Pour  $\Omega = \omega_0$ , l'impédance du circuit est égale à R et l'intensité du courant est en phase avec la f.e.m.
- La réponse d'un circuit à une f.e.m. E quelconque peut être étudiée en faisant l'analyse de Fourier de cette f.e.m. La réponse est alors la somme des oscillations produites par les forces harmoniques qui constituent la f.e.m. E ; les plus importantes sont celles qui sont proches de la pulsation propre de l'oscillateur.
- Pour analyser un circuit, commencez par le simplifier en remplaçant les impédances  $Z_k$  en série par l'impédance équivalente ( $Z_{eq} = \Sigma Z_k$ ) et les impédances  $Z_k$  en parallèle par l'impédance équivalente ( $Y_{eq} = \Sigma Y_k$  où  $Y_k = 1/Z_k$  et  $Y_{eq} = 1/Z_{eq}$  sont les admittances). Certaines impédances peuvent être ni en série ni en parallèle. Choisissez ensuite des mailles indépendantes en profitant des symétries, s'il y en a ; elles vous permettent de contrôler les résultats. Appliquez ensuite les règles de Kirchhoff par l'une des méthodes, que nous avons discutées, pour avoir les équations des intensités ou des potentiels. Les théorèmes de Thévenin et de Norton peuvent parfois être utiles. Si vous pouvez établir que deux nœuds sont au même potentiel, une branche qui les connecte ne transporte aucun courant. Il n'y a aucun courant dans une branche qui n'aboutit pas à un nœud. Vérifier les résultats en considérant des limites  $Z \rightarrow 0$  ou  $Z \rightarrow \infty$ . Cette dernière limite est équivalente à la suppression de la branche d'impédance Z.
- Si un circuit comporte n nœuds, le nombre de potentiels de nœuds à déterminer est  $n - 1$ , car le potentiel est défini à une constante additive près. On peut affecter un potentiel 0 à un point particulier du circuit ; d'habitude pris à la masse ou au pôle négatif de l'un des générateurs dans le circuit

## EXERCICES CORRIGÉS

### Exercice 5.1

5-1 On monte en série une bobine de self-inductance L et de résistance interne R et un condensateur de capacité C et on les branche sur une tension  $V = V_m \cos(\omega t)$ .

- Écrivez l'équation de l'intensité. Tracez le diagramme de Fresnel pour ce circuit et en déduire l'expression de l'intensité I et des d.d.p. VC et Vb aux bornes du condensateur et de la bobine.
- Retrouvez ces résultats à l'aide de l'analyse complexe. c) Supposant que  $L = 5H$ ,  $R = 100\Omega$ ,  $C = 1\mu F$ ,  $V_m = 20V$  et une fréquence de 50 Hz, calculez l'impédance du circuit et écrivez les expressions de I, VC et Vb.
- Quel est le facteur de puissance ? Quelle est la puissance moyenne fournie par le générateur ?

### Solution

5-1 a) L'équation du circuit LCR série (figure 5.22a) est :

$$LI + RI + (1/C) \int dt I = V.$$

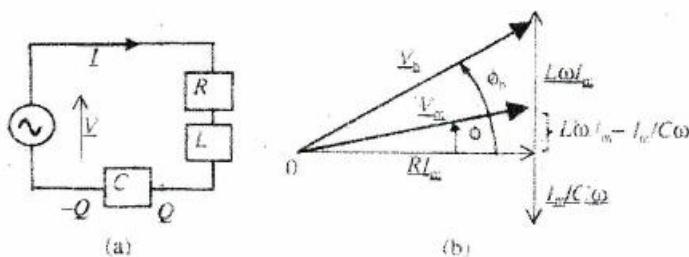


Figure 5-22

Écrivant  $I = I_m \cos(\omega t - \phi)$ , la représentation de Fresnel est illustrée dans la figure 5.22b. Nous en déduisons que  $V_m^2 = RI_m^2 + (L\omega I_m - I_m/C\omega)^2$  : alors l'amplitude de l'intensité et son retard de phase sur la tension sont

$$I_m = V_m/Z \text{ où } Z = \sqrt{R^2 + (L\omega - 1/C\omega)^2}$$

$$\text{et } \phi = \text{Arctan}[(L\omega - 1/C\omega)/R]$$

$Z$  est l'impédance du circuit. Les d.d.p.  $V_C$  et  $V_b$  aux bornes du condensateur et de la bobine sont représentées par les vecteurs MN de longueur  $I_m/C\omega$  et en retard de  $\pi/2$  sur I et OP de longeur  $I_m\sqrt{R^2 + L^2\omega^2}$  et en avance de  $\phi_b = \text{Arctan}(L\omega/R)$  sur I ( $0 < \phi_b < \pi/2$ ). Nous avons donc

$$V_C = (I_m/C\omega)\cos(\omega t - \phi - \pi/2)$$

$$\text{et } V_b = I_m\sqrt{R^2 + L^2\omega^2} \cos(\omega t - \phi + \phi_b)$$

b) Supposons que la tension est complexe  $\underline{V} = V_m e^{j\omega t}$  et l'intensité est  $\underline{I} = I_m e^{j\omega t}$ . L'équation du circuit donne

$$[j\omega L + R - j/C\omega]I_m = V_m \implies I_m = V_m/Z,$$

$$\text{où } Z = R + j(L\omega - 1/C\omega) \equiv Ze^{j\phi}$$

$$Z = |Z| = \sqrt{R^2 + (L\omega - 1/C\omega)^2}$$

$$\text{et } \phi = \text{phase}(Z) = \text{Arctan}[(L\omega - 1/C\omega)/R].$$

L'intensité est donc

$$\underline{I} = \underline{V}_m/Z e^{j\omega t} = (V_m/Z)e^{j(\omega t - \phi)} \implies I = (V_m/Z) \cos(\omega t - \phi)$$

$Z$  est l'impédance complexe totale du circuit. Les impédances complexes aux bornes du condensateur et de la bobine sont respectivement

$$Z_C = 1/jC\omega = (1/C\omega)e^{-j\pi/2}$$

$$\text{et } Z_b = R + jL\omega = \sqrt{R^2 + L^2\omega^2}e^{j\phi_b}$$

où  $\phi_b = \text{Arctan}(L\omega/R)$ . Les d.d.p. aux bornes du condensateur et de la bobine sont respectivement

$$\underline{V}_C = Z_C \underline{I} = (1/C\omega)e^{j(\omega t - \phi - \pi/2)} \implies V_C = (1/C\omega) \cos(\omega t - \phi - \pi/2)$$

$$\underline{V}_b = Z_b \underline{I} = I_m \sqrt{R^2 + L^2\omega^2} e^{j(\omega t - \phi + \phi_b)}$$

$$\implies V_b = I_m \sqrt{R^2 + L^2\omega^2} \cos(\omega t - \phi + \phi_b).$$

c) Utilisant les données numériques, nous trouvons  $\omega = 100\pi$  et

$$Z = \sqrt{100^2 + (5 \times 100\pi - 1/1 \times 10^{-6} \times 100\pi)^2} = 1615 \Omega$$

$$\tan \phi = -16,123 \Rightarrow \phi = -1,509 \text{ rad}$$

$$\tan \phi_b = L\omega/R = 15,71 \Rightarrow \phi_b = 1,507 \text{ rad}$$

$$I_m = 20/1615 = 12,38 \text{ mA} \Rightarrow I = 12,38 \cos(100\pi t + 1,509) \text{ mA}$$

Les d.d.p. aux bornes du condensateur et de la bobine sont

$$V_C = [12,38 \times 10^{-3}/1 \times 10^{-6} \times 100\pi] \cos(100\pi t + 1,509 - \pi/2) \\ = 39,41 \cos(100\pi t - 0,06195) \text{ volts}$$

$$V_b = 12,38 \times 10^{-3} \sqrt{100^2 + 5^2 \times 100^2 \pi^2} \\ \cos(\omega t + 1,509 + 1,507) \\ = 19,49 \cos(100\pi t + 3,016) \text{ volts}$$

d) Le facteur de puissance est  $\cos \phi = 0,0619$

- La puissance instantanée fournie par le générateur est

$$P = VI = V_m I_m \cos(\omega t) [\cos \omega t \cos \phi + \sin \omega t \sin \phi]$$

La puissance moyenne sur une période est

$$\langle P \rangle = \frac{1}{2} V_m I_m \cos \phi = \frac{1}{2} \times 20 \times 12,381 \times 10^{-3} \times 0,0619 \\ = 7,66 \times 10^{-3} \text{ W}$$

## Exercice 5.2

5-2 On considère le circuit de la Fig. 5.15 où un générateur de f.e.m.  $\epsilon = \epsilon_m \cos(\Omega t)$  est branché sur un condensateur C monté en parallèle avec une bobine de résistance R et de self-inductance L.

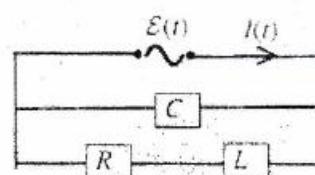


Figure 5-15

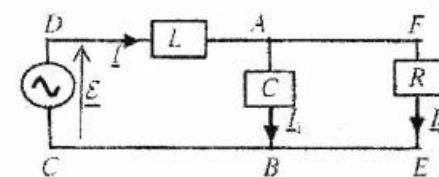


Figure 5-16

Calculez l'intensité et la puissance moyenne débitées par le générateur. Supposant que R est faible, montrez que l'intensité passe par un minimum (antirésonance) pour une pulsation d'excitation proche de  $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ .

# INFORMATIQUE - L1I / ELECTRONIQUE 1 / MODULE 2

## Solution

5-2 L'impédance du condensateur est  $Z_C = 1/jC$  et celle de l'abobine est  $Z_{RL} = R + j\Omega L$ . L'impédance équivalente des deux branches est donnée par la relation

$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{Z_C} + \frac{1}{Z_{RL}} = jC\Omega + \frac{1}{R + j\Omega L} \implies Z = \frac{R + j\Omega L}{1 - LC\Omega^2 + jRC\Omega}$$

L'impédance réelle équivalente est

$$Z = |Z| = \sqrt{\frac{R^2 + L^2\Omega^2}{(1 - LC\Omega^2)^2 + (RC\Omega)^2}}$$

L'amplitude complexe de l'intensité de courant est

$$I_m = \frac{\mathcal{E}_m}{Z} = \frac{\mathcal{E}_m}{Z} \frac{1 - LC\Omega^2 + jRC\Omega}{R + jL\Omega} = \frac{\mathcal{E}_m}{Z} \frac{R + j\Omega(L^2C\Omega^2 + R^2C - L)}{R^2 + L^2\Omega^2}$$

On peut l'écrire aussi sous la forme  $I_m = I_m e^{-j\phi_Z}$ .

Posant  $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$  et  $\delta = R/2L$ , l'amplitude et la phase de  $I_m$  s'écrivent

$$I_m = \mathcal{E}_m C \sqrt{\frac{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\delta^2\Omega^2}{\Omega^2 + 4\delta^2}}, \quad \phi_Z = \text{Arctan}\left(\frac{\Omega}{2\delta\omega_0^2}(\omega_0^2 - \Omega^2 - 4\delta^2)\right)$$

Le facteur de puissance est

$$\cos \phi_Z = R / \sqrt{R^2 + \Omega^2(L^2C\Omega^2 + R^2C - L)^2}.$$

La puissance moyenne débitée par le générateur est

$$\langle P_{(ex)} \rangle = \frac{1}{2} \mathcal{E}_m I_m \cos \phi_Z = \frac{1}{2} \frac{R \mathcal{E}_m^2}{R^2 + L^2\Omega^2}$$

L'intensité a un minimum si  $Z^2$  a un maximum ; pour cela il faut que

$$\frac{\partial Z^2}{\partial \Omega^2} = \frac{-L^2C^2\Omega^4 - 2L^2C^2R^2\Omega^2 + L^2 + 2LCR^2 - R^4C^2}{[(1 - LC\Omega^2)^2 + (RC\Omega)^2]^2} = 0$$

c'est-à-dire  $\Omega^2 = \omega_0^2[(1 + 2CR^2/L)^{1/2} - R^2C/L] \approx \omega_0^2$ . Alors

$Z_{\max} = L/CR = f_q^2 R$  où  $f_q$  est le facteur de qualité du circuit.

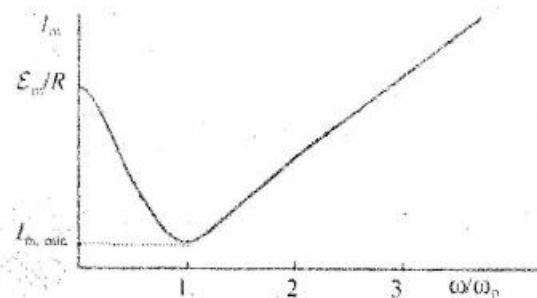


Figure 5-23 Antirésonance

L'amplitude de l'intensité est alors minimale  $I_{m, \min} = \mathcal{E}_m/Z = \mathcal{E}_m CR/L$  et sa phase  $\varphi_Z$  est nulle. Les oscillations dans le circuit LCR sont maintenues avec un courant  $I$  très faible. La figure 5.23 illustre la variation de  $I_m$  en fonction de  $\Omega/\omega_0$ . Nous avons là une antirésonance dans un circuit bouchon.

### Exercice 5.3

5-3 On considère une maille triangulaire (figure 5.17a). Écrivez les expressions des impédances de la figure 5.17b pour que les deux circuits soient équivalents, c'est-à-dire  $\underline{L}_1, \underline{L}_2, \underline{L}_3, \underline{V}_1, \underline{V}_2$  et  $\underline{V}_3$  dans le circuit (b) sont les mêmes que dans le circuit (a).

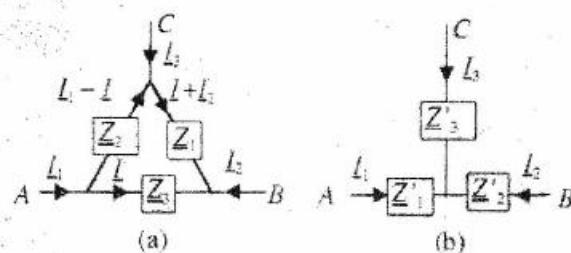


Figure 5-17 Équivalence d'une maille triangulaire et un nœud.

### Solution

5-3 La loi des nœuds n'exige que  $I_3 = -I_1 - I_2$ . Choisissons les courants dans la maille comme dans la figure 5.17a. Les courants externes et les d.d.p. dans les deux circuits sont les mêmes si

$$\begin{aligned} \underline{V}_A - \underline{V}_B &= \underline{I}_1 \underline{Z}_3 = \underline{I}_1 \underline{Z}_1 - \underline{I}_2 \underline{Z}_2, \\ \underline{V}_A - \underline{V}_C &= (\underline{I}_1 - \underline{I}_2) \underline{Z}_2 = \underline{I}_1 \underline{Z}_1 + (\underline{I}_1 + \underline{I}_2) \underline{Z}_3', \\ \underline{V}_B - \underline{V}_C &= (\underline{I}_1 + \underline{I}_2) \underline{Z}_1 = \underline{I}_2 \underline{Z}_2 + (\underline{I}_1 + \underline{I}_2) \underline{Z}_3' \end{aligned}$$

Ces relations sont satisfaites quelles que soient  $\underline{I}_1$  et  $\underline{I}_2$  si

$$\begin{aligned} \underline{I} &= \underline{I}_1 \underline{Z}_1 / \underline{Z}_3 - \underline{I}_2 \underline{Z}_2 / \underline{Z}_1, & \underline{Z}_1 \underline{Z}_3 - \underline{Z}_2 \underline{Z}_1 &= \underline{Z}_1' \underline{Z}_3 + \underline{Z}_3' \underline{Z}_1, \\ \underline{Z}_1' \underline{Z}_1 &= \underline{Z}_3' \underline{Z}_3, \\ \underline{Z}_2' \underline{Z}_2 &= \underline{Z}_3' \underline{Z}_3, & \underline{Z}_1 \underline{Z}_3 - \underline{Z}_1' \underline{Z}_2' &= \underline{Z}_1' \underline{Z}_3 + \underline{Z}_3' \underline{Z}_1 \end{aligned}$$

# INFORMATIQUE - L1I / ELECTRONIQUE 1 / MODULE 2

Ce qui donne les relations

$$\underline{Z}'_1 = \underline{Z}_2 \underline{Z}_3 / S, \quad \underline{Z}'_2 = \underline{Z}_1 \underline{Z}_3 / S \quad \text{et} \quad \underline{Z}'_3 = \underline{Z}_1 \underline{Z}_2 / S$$

$$\text{où } \underline{S} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3$$

Les relations inverses sont

$$R_1 = \Delta / \underline{Z}'_1, \quad R_2 = \Delta / \underline{Z}'_2 \quad \text{et} \quad R_3 = \Delta / \underline{Z}'_3$$

$$\text{où } \Delta = \underline{Z}_1 \underline{Z}'_2 + \underline{Z}'_1 \underline{Z}_3 + \underline{Z}_2 \underline{Z}'_3$$

## Exercice 5.4

5-4 Calculez les intensités dans les diverses branches du circuit de la fig. 5.18, comportant une source de courant et deux sources de tension.

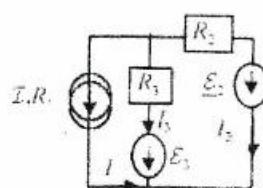


Figure 5-18

## Solution

5-7 Le circuit de la Fig. 5.18 est équivalent au circuit de la Fig. 5.25, où la résistance interne de la source de courant est branchée en parallèle à une source de courant idéale. Choisissant les intensités indépendantes  $I_1$  et  $I_2$  comme dans la figure, nous avons  $I_3 = -I_1 - I_2$  les équations des mailles ABEF et ABCD s'écrivent

$$(J - I_1)R_1 - (I_1 + I_2)R_3 - E_3 = 0,$$

$$I_2R_2 - E_2 + (I_1 + I_2)R_3 + E_3 = 0$$

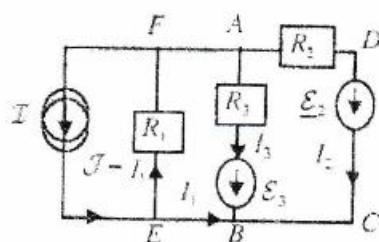


Figure 5-25 Circuit équivalent

$$\text{ou bien } I_1(R_1 + R_3) + I_2R_3 = JR_1 - E_3, \quad I_1R_3 + I_2(R_2 + R_3) = E_2 - E_3$$

Nous trouvons donc les mêmes équations que pour le circuit de la figure 5.5. C'est un résultat à prévoir car une source de courant  $J$  de résistance interne  $R_1$  est équivalente à une source de même résistance interne et de f.e.m.  $E = JR$ .