Centre national de télé-enseignement de Madagascar

CNTEMAD

Apprendre et réussir en toute liberté

www.cntemad.mg

cntemad@cntemad.mg
22 600 57

LICENCE 1 EN INFORMATIQUE

MODULE 6

MATHEMATIQUES APPLIQUÉES À L'INFORMATIQUE 1

L1 - Mod 06

MATHEMATIQUES II

3.
MATHEMATIQUES II

TABLE DES MATIERES

Conseils généraux

Le contenu de ce cours, détaillé dans les pages précédentes, représente environ les deux tiers du programme de Mathématiques du Brevet de Technicien Supérieur Informatique de Gestion.

Nous avons en effet choisi d'alléger le travail de la seconde année dont la durée est réduite par la date de l'examen (mars, généralement). Il faut donc fournir un effort parti- culier pour bien assimiler les notions essentielles que vous rencontrerez (ou reverrez, pour certaines) au fil des quatorze séquences qui couvrent presque tout le programme d'Analyse, et le programme de Statistique descriptive dans sa totalité. Mais cela sup- pose que vous abordiez ce cours avec un bon niveau de Terminale, surtout en Analyse. Chaque séquence comporte une étude de cours et des exercices " autocorrectifs " (c'est-à-dire dont les corrigés vous sont donnés). Les énoncés des cinq devoirs à envoyer à la correction sont regroupés dans le **fascicule de devoirs** que vous avez reçu séparément.

I. Etude du cours

Cette préparation s'appuie sur des manuels dont vous trouverez les références dans le fascicule de devoirs. Les parties du cours qui se réfèrent à ces manuels mettent en évi- dence les points les plus importants, les règles les plus fréquemment utilisées. Vous y trouverez éventuellement des compléments indispensables, ou un point de vue plus proche de votre programme sur telle ou telle notion.

Travaillez avec **papier et crayon :** recopiez les définitions, formules, théorèmes sur un **fichier** afin de faciliter vos révisions pour l'examen.

II. Exercices d'application

Les livres recommandés comportent quelques exercices corrigés. Le présent cours vous en fournira une série supplémentaire, à la fin de chaque séquence.

La recherche de ces exercices doit mobiliser une partie importante de vos efforts mais elle n'est à entreprendre, bien sûr, qu'après avoir très soigneusement et complète- ment étudié le cours. Elle vous servira à vérifier si les connaissances correspondantes sont acquises, ou pas. Il faut donc chercher dans un premier temps tous ces exercices **sans faire appel à vos documents.**

Ne regardez la solution qu'après avoir terminé, ou si vous êtes bloqué(e) en cours de résolution. Dans ce dernier cas, ou si vous constatez que vous vous êtes trompé(e), il faut reprendre la partie du cours que vous n'avez pas bien assimilée, puir refaire le même exercice quelques jours plus tard pour vous assurer que, cette fois, vous connaissez la démarche à suivre face à un problème de cette sorte.

III. Devoirs

Les conseils généraux concernant la rédaction d'un devoir se trouvent en tête de fascicule de devoirs. Ceux qui se sont inscrits à ce cours pour 10 mois (donc par module, et non pour l'année scolaire en classe complète) y trouveront aussi des conseils pour déterminer leur **rythme de travail.**

Bon courage !

CHAPITRE PRELIMINAIRE 1

THEORIE DES ENSEMBLES ET LES APPLICATIONS

A - Théorie des ensembles

I. Qu'est-ce qu'un ensemble ?

1) Notion d'ensemble

Des exemples permettront de cerner suffisamment cette notion. En fait, il s'agit de regroupements d'éléments auxquels on est déjà habitué ; mais ces regroupements doivent être bien définis et précisés :

- les Français nés le 1er juillet 1966,
- les entiers de 1 à moins de 10,
- Pierre, Jacques, Rémy et André,
- les objets qui se trouvent sur mon bureau le 14 février 1980,
- les entiers relatifs,
- les différents services d'une entreprise précise, à une date donnée,
- les classes statistiques.

...

forment des ensembles. Notons des précisions : il faut que l'on sache si 10 appartient ou non à l'ensemble cité le deuxième ; dans le 4ème exemple la date est nécessaire. Une entreprise peut changer de nom, ou changer l'organisation de ses services.

Dans un ensemble les éléments doivent être distincts. On doit toujours pouvoir dire si un élément appartient ou non à l'ensemble.

2) Définition d'un ensemble en extension

Définir un ensemble par extensions, c'est indiquer entre deux accolades chacun des éléments de l'ensemble ; par exemple :

A = $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

B = { Pierre, Jacques, Rémy, André }

$\mathbb{Z} = \{\ldots, -n, \ldots, -1, 0, 1, 2, \ldots, n, \ldots\}$

Le dernier ensemble comporte un nombre infini d'éléments : dans la réalité, il n'existe que des ensembles finis, mais il est commode, conceptuellement de supposer qu'ils se prolongent indéfiniment. Il suffit au mathématicien que des ensembles soient bien **définis**, c'est-à-dire qu'on puisse toujours dire si un élément appartient à l'ensemble ou non.

3) *Définition d'un ensemble en compréhension*

La présentation d'un ensemble en compréhension est facile à voir à partir d'exemples :

$\mathbf{N}$ = { x | x est un entier positif ou nul }

Le symbole "|" peut se lire : " sachant que ". Ici : $\mathbf{N}$ est l'ensemble des éléments x sachant que (ou "tels que") x est un entier positif ou nul.

A = { x | x est un entier de 1 à moins de 10 }

$\mathbf{Q}$ = { x | x est un nombre rationnel }

Grâce à la définition en compréhension, il est possible de définir un ensemble, c'est-à-dire de déterminer si un élément lui appartient ou non, même si l'on ne peut en faire l'inventaire. L'ensemble est **défini** même s'il est infini ou partiellement connu.

Q est l'ensemble des nombres rationnels, c'est-à-dire celui des nombres que l'on peut écrire sous forme de fractions positives ou négatives.

4) *Appartenance à un ensemble*

Pour indiquer cette appartenance, on emploie **un symbole d'appartenance :**

$2 \in \mathbf{N}$ se lit "2 appartient à $\mathbf{N}$, ou "2 est un élément de $\mathbf{N}$".

Autre exemple :
Pierre $\in$ B

On emploie également le symbole contraire : $\notin$

Antoine $\notin$ **B** se lit : "Antoine n'appartient pas à **B**".

5) *Egalité de deux ensembles*

On dit que deux ensembles sont égaux, s'ils sont absolument identiques, c'est-à-dire s'ils ont les mêmes éléments :

$E = F$ si $\{ a \in E \Rightarrow a \in F$ et si $b \in F \Rightarrow b \in E \}$

$\Rightarrow$ se lit "implique" ou "entraîne" (voir plus loin une explication plus détaillée).
La condition, inscrite dans la formule ci-dessus entre accolades, signifie que tout élément a de E est un élément de F, et que tout élément b de F est un élément de E.

Un ensemble ne peut jamais être égal à un élément. L'ensemble singulier ou singleton (ne comportant qu'un élément) { 1 } n'est pas l'élément 1 :

$1 \in \{1\}$ mais $1 \neq \{1\}$

Il suffit, pour réaliser ce dont il s'agit d'assimiler les ensembles (notés par des accolades) à des "boîtes". Une boîte contenant un 1 n'est pas assimilable à "1" seul. Le signe "=" peut être employé uniquement entre deux "objets" de même nature (deux nombres, deux ensembles, etc.).

6) Ensemble vide

Si l'on considère les ensembles :

E = { x I x est un mois de 32 jours }

F = { y I y est un homme dont la barbe pousse bleue }

Ces ensembles sont parfaitement définis, mais ils ne contiennent aucun élément. On dit que ce sont des représentations du même **ensemble vide** que l'on note Ø.

Il ne faut pas confondre l'ensemble vide et un ensemble qui ne contient aucun élément. (cf. une boîte vide).

Il n'existe qu'un **seul ensemble vide.**

7) Cardinal d'un ensemble

On appelle "cardinal" d'un ensemble fini le nombre d'éléments de cet ensemble. Si l'on reprend les premiers ensembles définis au § 2 :

Card. A = 9 Card. A s'écrit parfois | A |

Card. B = 4

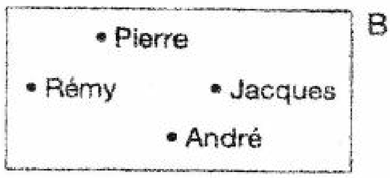
En aucun cas, un ensemble ne doit être identifié au nombre des éléments de cet ensemble !

II. Parties d'un ensemble-Lien avec la logique

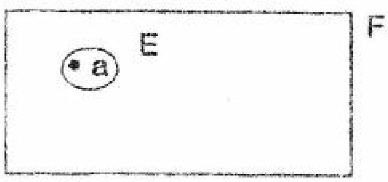
1) Diagramme de Venn

Il est commode d'utiliser des images pour représenter les ensembles ; le diagramme de Venn ou d'Euler-Venn est la première de ces images que nous rencontrerons.

Dans les diagrammes de Venn, les ensembles sont représentés soit par des cercles, soit par des «patates» ou «patatoïdes» ; leurs éléments sont figurés par des points à l'intérieur de ces figures. L'ensemble B est représenté comme suit :



2) Inclusion. Parties d'un ensemble ou sous-ensembles



On dit que l'ensemble E est inclus dans l'ensemble F, si chaque élément de E appartient à F :

Si $a \in E \Rightarrow a \in F$ alors $E \subset F$

(on lit : E «est inclus dans» F).

Si «a appartient à E» implique «a appartient à F» (ceci doit être vrai pour tout élément de E), alors E est inclus dans F.

L'ensemble E est dit alors partie de F, ou sous-ensemble de F.

Exemples :

• Sous-ensembles de l'ensemble F des prix de détail pratiqués à Paris à une date précise :

E = { x I x est le prix du pain à Paris à cette date }

G = { y I y est un prix alimentaire à Paris à cette date }

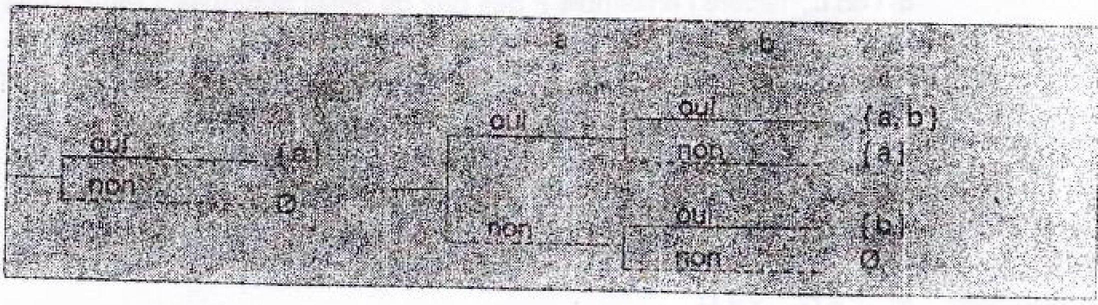
• Les classes statistiques sont des sous-ensembles de l'ensemble des observations.

Si l'on a à la fois : $E \subset F$ et $F \subset E$, les ensembles E et F sont égaux, car tout élément de E est un élement de F, et tout élément de F est un élément de E.

3) Ensemble des parties d'un ensemble donné

Il est souvent utile (particulièrement en informatique) de connaître tous les sous-ensembles (toutes les parties) d'un ensemble donné E. Les sous-ensembles sont, par définition, les éléments de l'ensemble des parties E.

Un moyen d'énumérer les parties d'un ensemble sans en oublier aucune est la présentation dénommée **arbre des possibilités.** La convention est : «oui», l'élément figure dans les sous-ensembles ; «non», il n'y figure pas. (Fig 1 et 2). On désigne par $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties :



$\mathcal{P}(E) = \{\{a\}, \emptyset\}$ $\mathcal{P}(E) = \{\{a, b\} ; \{a\} ; \{b\} ; \emptyset\}$

Fig. 1. Ensemble à un élément, a. **Fig. 2.** Ensemble à 2 éléments, a et b.

D'une façon générale, un ensemble à n éléments comprend 2^n parties.

La réalisation de cet arbre est une création logique :
l'élément vérifie ou non la proposition : «appartenir au sous-ensemble considéré». Ceci est plus visible si l'on utilise, à la place de l'arbre, des «tables de vérité» ; ces tables portent 1 quand un élément appartient au sous-ensemble (réponse «oui» à la proposition) et 0 quand il ne lui appartient pas (réponse «non» à la proposition). Les parties de l'ensemble {a, b} sont alors représentée selon la table suivante :

E	ø	{a}	{b}	{a, b}
a	0	1	0	1
b	0	0	1	1

De même, la table de vérité suivante :

F	A
a	0
b	1
c	1

représente le sous-ensemble : A = { b, c } de l'ensemble F = { a, b, c }

Une **partition** d'un ensemble E est une décomposition de E en sous-ensembles telle que tout élément de E appartient à un, et à un seul, sous-ensemble de la partition. C'est donc un découpage de E, tel qu'il n'y ait ni oubli, ni double emploi.

4) Complémentaire d'un sous-ensemble

Si l'on considère l'ensemble F des prix de détail pratiqués à Paris à une date précise. l'ensemble G des prix alimentaires pratiqués à Paris à cette date en est un sous-ensemble. On peut définir aussi l'ensemble des prix «non alimentaires» au même lieu et à la même date ; c'est un deuxième sous-ensemble H tel que G et H réalisent une partition de F. On note :

$H = \complement_F G = \overline{G}$

On lit : «complémentaire de G dans F», F est le «référentiel» ou «ensemble de référence».

Si $x \in \overline{G}$, $x \notin G$

L'ensemble complémentaire de G dans F est l'ensemble des éléments de F qui ne sont pas dans G. Autrement dit :

$$\text{Si } x \in F \quad \begin{cases} \text{soit} & x \in G \\ \text{soit} & x \notin G \quad \text{c'est-à-dire : } x \in \overline{G}. \end{cases}$$

Exemple : Soit A, ensemble des entiers de 1 à moins de 10, le référentiel et soit D un sous-ensemble de A, celui des nombres impairs :

D = {1, 3, 5, 7, 9}

On a : $\complement_A D$ = {2, 4, 6, 8}, ensemble des nombres pairs de 1 à moins de 10.

Cet exemple permet de faire le lien de la notion de complémentaire avec la logique.
L'ensemble D est l'ensemble des éléments de A qui vérifient la proposition p : «être un nombre impair».
L'ensemble $\complement_A D$ comprend uniquement les éléments de A qui ne vérifient pas la proposition p. On dit souvent qu'ils vérifient la proposition «non-p» (notée $\neg$ p). Ici la proposition $\neg$ p est «être un nombre pair».

Nous voyons ainsi apparaître la négation d'une proposition est vérifiée, ou elle ne l'est pas. Pour un ensemble et son complémentaire, il faut regarder chaque élément : s'il vérifie la proposition p, il appartient à D, s'il ne la vérifie pas, il appartient à D.

A	D	$\complement_A D$
1	1	0
2	0	1
3	1	0
4	0	1
5	1	0
6	0	1
7	1	0
8	0	1
9	1	0

C'est ce qu'indique la **table de vérité** ci-avant.

Il y a ainsi analogie entre la théorie des ensembles et la logique : un élément appartient à un ensemble ou ne lui appartient pas ; une proposition est vraie ou fausse.

Signalons : $\complement_F H = \complement_F(\complement_F G) = G$

$\complement_F F = \varnothing$

$\complement_F \varnothing = F$

III. Quantificateurs - Implication logique

Ce sont des instruments logiques.

1) Quantificateur universel

Pour connaître l'ensemble A des prix qui ont monté entre le 3 novembre 1984 et le 3 novembre 1985, il faut connaître **tous** les prix, et n'oublier aucun (ce qui est d'ailleurs difficile pratiquement !).

Le signe utilisé en mathématiques pour désigner tous les éléments est le «quantificateur universel» :

$\forall x \in A, p.$ [1]

(1) signifie : «quel que soit x», appartenant à A, la proposition p est vérifiée (ici par exemple : les prix montent, en supposant qu'ils aient tous monté). C'est une manière rapide d'écrire quelque chose de très précis : dans A aucun prix n'a stagné ou baissé.

2) Quantificateur existentiel

$\exists x \in A, \neg p$

On lit : «Il existe» x appartenant à A tel que la proposition p ne soit pas vérifiée.

Ici encore on écrit rapidement «il y a un prix au moins qui n'a pas monté».

3) Implication logique

$p \Rightarrow q$

se lit «**si p est vérifiée, alors q**», ou «la proposition p entraîne la proposition q» ou plus simplement «p implique (entraîne) q».

Exemples :

J'ai été reçu au certificat d'Etudes

$\Rightarrow$ je me suis présenté au certificat d'Etudes.

4) Implication réciproque

L'implication réciproque de :

$p \Rightarrow q$

est $q \Rightarrow p$

L'implication : «un nombre terminé par 0 est divisible par 10» soit : «un nombre est terminé par 0 ⇒ ce nombre est divisible par 10» a une réciproque exacte :

Un nombre est divisible par 10 ⇒ ce nombre est terminé par 0, car l'ensemble des nombres terminés par 0 et l'ensemble des nombres divisibles par 10 sont égaux.

5) Equivalence logique

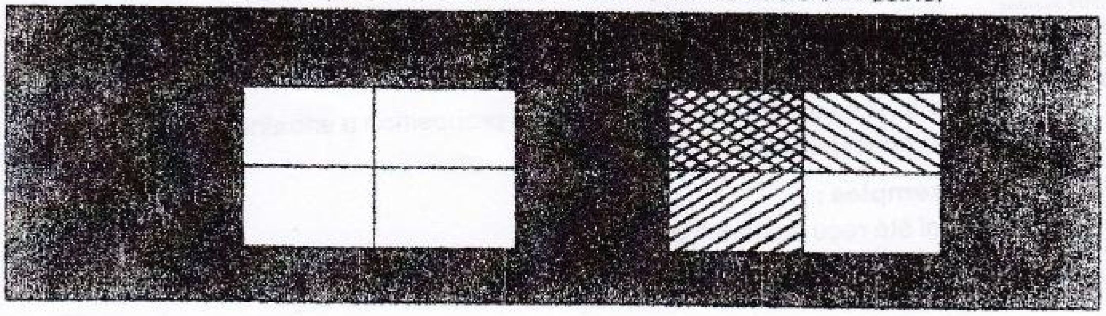
Si l'on a à la fois :
$p \Rightarrow q$ et $q \Rightarrow p$
on écrit :
$p \Leftrightarrow q$
On a dit que p et q sont logiquement équivalents.

Exemples :
- Un nombre est divisible par 10 ⇔ un nombre est terminé par 0
- Un objet est violet ⇔ un objet est de la première couleur visible de l'arc-en-ciel.

IV. Opérations sur les ensembles

1) Diagramme de Caroll

Il représente l'ensemble par un grand rectangle, et ses sous-ensembles complémentaires par des rectangles plus petits. On peut présenter ainsi sur la figure ci-dessous l'ensemble E du personnel d'une usine, en mettant en évidence d'une part les ouvriers et les cadres, d'autre part le personnel de l'atelier A et celui du reste de l'usine.



2) L'intersection

L'intersection est une opération sur des parties d'un ensemble (le référentiel). Elle consiste à prendre les éléments communs à deux sous-ensembles.
Il y a des ouvriers qui sont dans l'atelier A : donc les ouvriers de l'atelier A sont les éléments de l'intersection de l'ensemble 0 des ouvriers et de l'ensemble A des personnes de

l'atelier A. Sur le diagramme de Caroll, cette intersection se trouve doublement hachurée. Elle se note :

$\boxed{O \cap A}$

On lit : «O inter A». Cela signifie :
$a \in O \cap A \Leftrightarrow a \in O$ **et** $a \in A$.
Un élément de l'intersection appartient à la fois aux deux sous-ensembles.

L'équivalent logique de l'intersection est la **conjonction.** La conjonction se note par un signe qui ressemble à celui de l'intersection :
$p \wedge q$
signifie que p et q sont vérifiées en même temps.
(Ici, a vérifie à la fois «être un ouvrier» et «travailler dans l'atelier A».)

Quand l'intersection de 2 ensembles est vide, ces deux ensembles sont **disjoints.** Dans notre exemple, on aura : $0 \cap C = \varnothing$

On a : $\left.\begin{array}{l} A \cap \complement_E A = \varnothing \\ A \cap \varnothing = \varnothing \end{array}\right\}$ de façon générale

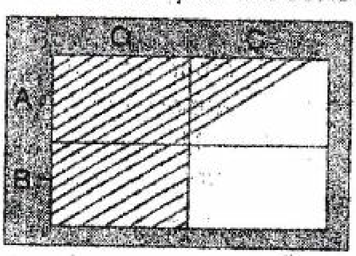
3) La réunion

Cette opération consiste à prendre les éléments qui appartiennent soit à l'une soit à l'autre des 2 parties.

Dans notre exemple :

$\boxed{A \cup 0}$

On lit : A «union» 0.
C'est l'ensemble du personnel de l'atelier A et des ouvriers de toute l'usine.
Sur le diagramme de Caroll ci-dessous, l'ensemble réunion est hachuré. Les ouvriers de l'atelier A ne doivent être comptés qu'une seule fois :
- il s'agit de réunir des éléments et non de les additionner
- on doit compter une seule fois l'intersection des deux sous-ensembles.



La réunion peut se traduire logiquement par :
$b \in A \cup C \Rightarrow b \in A$ **ou** $b \in C$

Comme pour l'intersection on a des propriétés analogues :

$A \cup A = A$

$A \cup \emptyset = A$

$A \cup \complement_E A = E$

4) Relation entre les cardinaux.

Etant donnés deux sous-ensembles A et B d'un même référentiel R, entre les cardinaux de ces sous-ensembles est réalisée la relation ;

$$\boxed{\text{Car}(A \cup B) = \text{Card } A + \text{Card } B - \text{Card } (A \cap B)}$$

5) Lois de Morgan

Ces lois concernent les complémentaires de la réunion et de l'intersection.

Première loi :

$$\boxed{\complement_E(A \cup B) = \overline{A} \cap \overline{B}}$$

la seconde loi s'écrit :

$$\boxed{\complement_E(A \cap B) = \overline{A} \cup \overline{B}}$$

6) Définition de l'algèbre de Boole

Par ces dernières propriétés, nous avons amorcé une «algèbre», sur les éléments de l'ensemble $\mathcal{P}(E)$ des parties de E, avec trois opérations : la complémentation, l'intersection et la réunion : c'est **l'algèbre de Boole.**

B - Les applications

I. Définition d'un produit cartésien d'ensembles

Etant donnés l'ensemble P des articles en vente sur le marché à une date précise et l'ensemble Q des quantités possibles de ces articles, on appelle **Produit cartésien de P et Q,** noté P x Q l'ensemble des couples (p,q) qui repréntent toutes les associations possibles entre un article et une quantité. Pour simplifier, supposons que P ne comprenne que deux articles : tomates et pommes de terre, et Q ne contienne que trois quantités : 1 kg, 2kg, 3 kg. Le produit cartésien P x Q est alors formé de 6 comptes :

- (tomates, 1 kg) (tomates, 2 kg) (tomates, 3 kg)
- (pommes de terre, 1 kg) (pommes de terre, 2 kg) (pommes de terre, 3 kg)

qui représentent les différents achats, possibles pour une ménagère. Les éléments du produit sont les six couples.

1) Représentations graphiques

Il existe plusieurs représentations graphiques d'un produit cartésien de deux ensembles :

- un Diagramme Sagittal (Fig. 1). Chaque flèche symbolise un couple.
- une Grille. Chaque point d'intersection symbolise un couple
- une représentation cartésienne (Tableau 1).

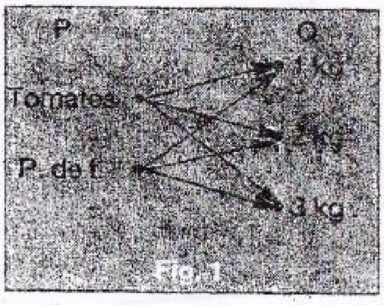


Fig. 1

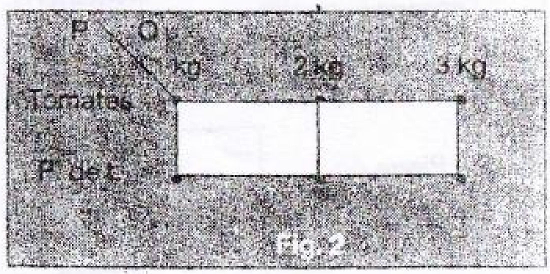


Fig. 2

Tableau 1

P \ Q	1 kg	2 kg	3 kg
Tomates			
P. de t.			

2) Cardinal d'un ensemble produit

Etant donnés, deux ensembles P et Q ayant un nombre fini d'éléments :

$\boxed{\text{Card}(P \times Q) = \text{Card } P \times \text{Card } Q}$

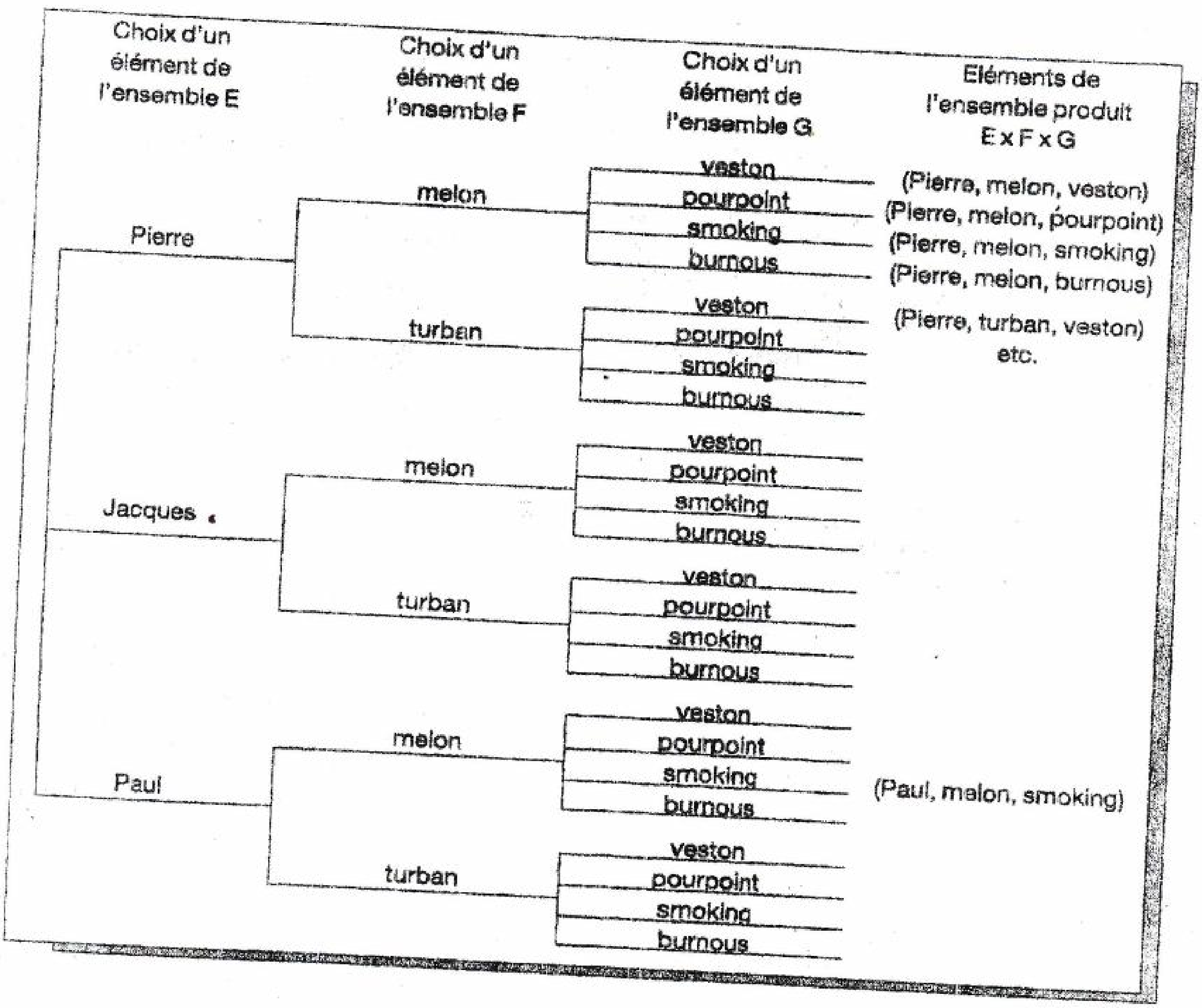
Ce résultat se déduit facilement des représentations graphiques. Par exemple sur la figure 2, on voit facilement que le cardinal de P x Q est 2 x 3, c'est-à-dire 6.

3) Généralisation à plus de deux ensembles

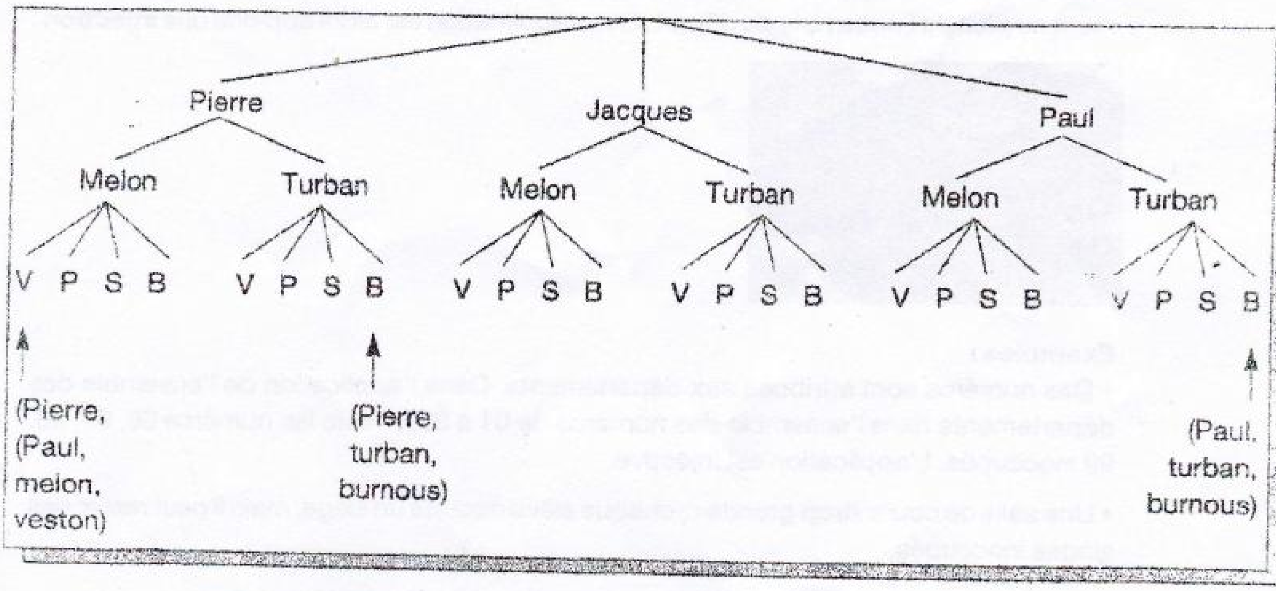
Par exemple, on peut considérer un ensemble E de personnes, un ensemble F de chapeaux et un ensemble G de vêtements. Le produit des trois ensembles est un ensemble de «triplets» comprenant une personne, un chapeau, un vêtement (dans l'ordre). Il est important de savoir dresser l'inventaire de ces triplets (et éventuellement des n-uplets d'un produit de n ensembles). L'arbre ci-après est une méthode pour dresser cet inventaire sans en oublier aucun. On choisit d'abord une personne, élément de E : Pierre, Jacques ou Paul.

Ensuite, à l'intérieur de ce choix, on opte pour un chapeau, élément de F : melon ou turban.

A l'intérieur de ce nouveau choix, reste à prendre un vêtement, c'est-à-dire un élément de l'ensemble G : veston, pourpoint, smoking, burnous. Cette nouvelle branche est répétée 6 fois. On obtient 24 piets.



Cet arbre peut aussi, pour plus de commodité d'écriture, être présenté dans l'autre sens :

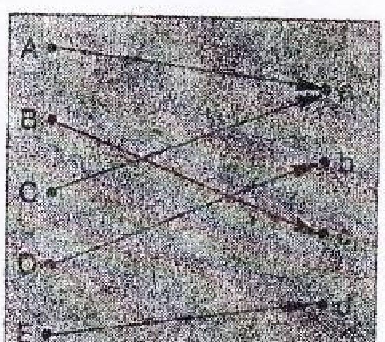


Le produit des ensembles est l'ensemble des éventualités possibles. Si l'on a affaire à des ensembles d'éventualités, on peut énumérer toutes les décisions possibles (d'où l'utilité des arbres, particulièrement en informatique).

II. Les applications

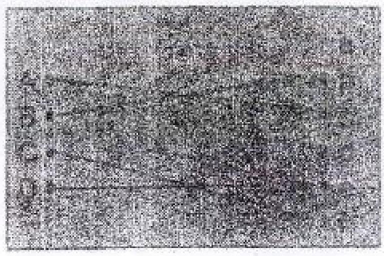
1) Application surjective

Une application est **surjective** si tout élément de **l'ensemble d'arrivée** est image d'un élément au moins de l'ensemble de départ. On dit aussi que cette application est une **surjection :**



2) *Application injective*

Une application est injective si tout élément de l'ensemble d'arrivée est l'image d'un élément au plus de l'ensemble de départ. Cette application est alors appelée une **injection** :

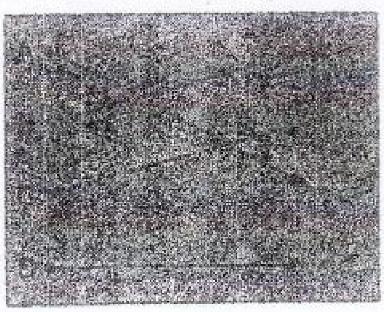


Exemples :

- Des numéros sont attribués aux départements. Dans l'application de l'ensemble des départements dans l'ensemble des numéros de 01 à 99, il reste les numéros 96, 97, 98, 99 inoccupés. L'application est injective.
- Une salle de cours «trop grande» ; chaque élève occupe un siège, mais il peut rester des sièges inoccupés.

3) *Application bijective*

Une application est bijective si elle est à la fois injective et surjective. On dit alors qu'elle est une **bijection** :



Exemples :

- les tables statistiques ou financières font **apparaître des relations** entre nombres à chaque nombre donné, la table fait correspondre **un nombre et un seul**.
- l'application $y = ax + b$, pour x et y **éléments de $\mathbb{R}$**.

ENONCE DES EXERCICES

EXERCICE 1

On désigne par A et B deux ensembles :

A = { x I x est un article vendu hors de France }

B = { y I y est un article fabriqué par la machine M }

le référentiel R étant l'ensemble des articles produits par une entreprise E.

Que signifient : $A \cup B$

$A \cup \overline{B}$

$\overline{A}$?

EXERCICE 2

Sur 100 étudiants (référentiel R), on considère les ensembles A de ceux qui étudient l'anglais, I de ceux qui étudient l'italien, E de ceux qui étudient l'espagnol.

Sur ces 100 édudiants :

55 étudient l'anglais,
9 l'anglais et l'espagnol,
7 l'anglais et l'italien,
8 l'italien et l'espagnol,
6 l'anglais et l'espagnol, mais pas l'italien,
80 l'anglais ou l'espagnol,
12 l'italien seul.

1) Combien d'étudiants travaillent les trois langues ?

2) Combien y en a -t-il qui étudient l'espagnol ?

3) Combien travaillent l'italien ?

4) Combien n'étudient aucune langue ?

EXERCICE 3

On considère l'ensemble A défini en compréhension par :

A = { x I x est une lettre de l'alphabet }

et les trois sous-ensembles :

S = { y I y est une lettre du mot statistique }

M = { z I z est une lettre du mot mathématiques }

E = { w I w est une lettre du mot économie }

1) Ecrire ces trois sous-ensembles en rangeant les lettres par ordre alphabétique, et donner leur cardinal.

2) Calculer :

$C_A M$, $S \cap M$, $S \cup M$, $M \cup E$, $S \cap E$, $E \cap C_A M$.

Que peut-on dire des résultats trouvés pour $S \cap M$ et $S \cup M$.

MATHEMATIQUES II

CORRIGÉS DES EXERCICES

EXERCICE 1

Si A = { x | x est un article vendu hors de France }
B = { y | y est un article fabriqué par la machine M }

Donner la «signification» implique : traduire en langage concret les ensembles indiqués par des symboles.

1) $A \cup B$: $z_1 \in (A \cup B)$ est un article vendu hors de France, et/ou fabriqué par la machine M.

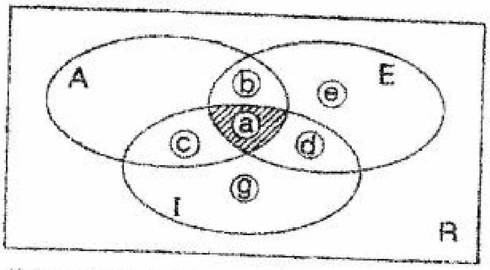
2) $A \cup \overline{B}$: $z_2 \in (A \cup \overline{B})$ est un article vendu hors de France et/ou non fabriqué par la machine M.
(S'il n'est pas fabriqué par la machine M il peut être vendu en France).

3) $\overline{A}$: $z_3 \in \overline{A}$ est un article qui n'est pas vendu hors de France. En première approximation, on peut supposer qu'il est vendu en France (mais on excepte alors les articles non vendus qui peuvent exister).

EXERCICE 2

Les propositions de l'hypothèse peuvent s'écrire (entre parenthèses, lettre correspondant à la figure) :

55	étudient l'anglais :	Card A = 55
9	étudient l'anglais **et** l'espagnol :	Card $(A \cap E) = 9$
7	étudient l'anglais **et** l'italien :	Card $(A \cap I) = 7$
8	l'anglais **et** l'espagnol :	Card $(I \cap E) = 8$
6	l'anglais **et** l'espagnol, mais pas l'italien :	Card $((A \cap E) \cap \overline{I}) = 6$ (b)
80	l'anglais **ou** l'espagnol :	Card $((A \cup E) = 80$
12	l'italien seul :	Card $(I \cap (\overline{A} \cup \overline{E})) = 12$ (g)



1) Les 3 langues : on cherche à calculer Card $(A \cap E \cap I)$
On peut calculer le nombre de ces étudiants en prenant parmi ceux qui étudient l'anglais et l'espagnol, mais qui ne sont pas les 6 qui n'étudient pas l'italien (diagramme d'Euler sur la figure : surfaces marquées a et b)

$$\text{Card}(A \cap E \cap I) = \text{Card}(A \cap E) - \text{Card}[A \cap E) \cap \overline{I}]$$
$$= 9 - 6 = 3$$

3 élèves étudient l'anglais, l'espagnol et l'italien.

2) L'espagnol : on cherche à calculer Card E.
Rappelons que pour deux sous-ensembles A et E d'un même référentiel, on a :
$\text{Card}(A \cup E) = \text{Card } A + \text{Card } E - \text{Card}(A \cap E)$.

Nous connaissons Card $(A \cup E)$, Card A et Card $(A \cap E)$

$$\begin{aligned}\text{Card } E &= \text{Card}(A \cup E) - \text{Card } A + \text{Card}(A \cap E)\\ &= 80 - 55 + 9 = 34\end{aligned}$$

34 élèves étudient l'espagnol

3) L'italien : ceux qui étudient l'italien étudient : soit cette langue seule (surface g, du diagramme de Venn), leur nombre est 12 d'après l'énoncé, soit l'italien et l'anglais, soit l'italien et l'espagnol (surfaces c, a, d, sur la figure). Il faut donc calculer :

$$\begin{aligned}\text{Card}[(A \cap I) \cup (E \cap I)] &= \text{Card}(A \cap I) + \text{Card}(E \cap I) - \text{Card}[(A \cap I) \cap (E \cap I)]\\ &= \text{Card}(A \cap I) + \text{Card}(E \cap I) - \text{Card}(A \cap E \cap I)\\ &= 7 + 8 - 3 = 12\end{aligned}$$

d'où Card I $= 12 + 12 = 24$
24 élèves étudient l'italien.

4) Aucune langue, c'est-à-dire
Card $(\bar{A} \cap \bar{E} \cap \bar{I})$

ou encore :
Card $C_R(A \cup E \cup I)$
Calculons d'abord Card $(A \cup E \cup I)$:

$$\begin{aligned}\text{Card}(A \cup E \cup I) &= \text{Card } A + \text{Card } E + \text{Card } I - \text{Card}(A \cap E) - \text{Card}(A \cap I) -\\ &\quad - \text{Card}(E \cap I) + \text{Card}(A \cap E \cap I)\\ &= 55 + 34 + 24 - 9 - 7 - 8 + 3\\ \text{Card}(A \cup E \cup I) &= 113 - 24 + 3 = 92\end{aligned}$$

Or :

$$\begin{aligned}\text{Card } C_R(A \cup E \cup I) &= \text{Card } R - \text{Card}(A \cup E \cup I)\\ &= 100 - 92 = 8\end{aligned}$$

8 élèves n'étudient aucune langue.

EXERCICE 3

1) $S = \{x \mid x \text{ est une lettre du mot statistique}\}$
Un ensemble est formé déléments distincts. On peut procéder de la manière suivante pour éliminer les répétitions :
s t a ... i ... que
t s t i
d'où, après classement des éléments par ordre alphabétique,

$$\boxed{S = \{a, e, i, q, s, t, u\}}$$

et

$\boxed{\text{Card } S \ = \ 7}$

de la même manière :

$\boxed{M \ = \ \{a, e, h, i, m, q, s, t, u\}}$

et

$\boxed{\text{Card } M \ = \ 9}$

$\boxed{E \ = \ \{c, e, i, m, n, o\}}$

et

$\boxed{\text{Card } E \ = \ 6}$

2) $C_A M \ = \ \{x \mid x$ est une lettre de l'alphabet qui n'est pas dans $M\}$

a) $\boxed{C_A M \ = \ \{b, c, d, f, g, j, k, l, n, 0, p, r, v, w, x, y, z\}}$

b) $S \cap M \ = \ \{y \mid y$ est une lettre qui appartient à la fois à S et à $M\}$

D'après le 1) :

$$\begin{array}{lclccccccccc}
S & = & \{ & a, & e, & & i, & & q, & s, & t, & u\} \\
 & & & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
M & = & \{ & a, & e, & h, & i, & m, & q, & s, & t, & u\}
\end{array}$$

et $\boxed{S \cap M \ = \ \{a, e, i, q, s, t, u\}}$

c) $S \cap m \ = \ \{z \mid z$ est une lettre qui appartient à S ou à $M\}$

En reprenant les expressions de S et de M ci-dessus, il vient :

$\boxed{S \cap M \ = \ \{a, e, h, i, m, q, s, t, u\}}$

d) $M \cup E \ = \ \{t \mid t$ est une lettre qui appartient à M ou à $E\}$

D'après le 1), il vient :

$\boxed{M \cup E \ = \ \{a, c, e, h, i, m, n, o, q, s, t, u\}}$

e) $S \cap E$ est l'ensemble des lettres qui appartiennent à la fois à S et à E.

Or ;

$$\begin{array}{lclcccccc}
S & = & \{a, & e, & i, & q, & s, & t, & u\} \\
 & & & \downarrow & \downarrow & & & & \\
E & = & \{c, & e, & i, & m, & n & o\} &
\end{array}$$

d'où $\boxed{S \cap E \ = \ \{e, i\}}$

f) $E \cap \overline{M}$ est l'ensemble des lettres qui appartiennent à E et n'appartiennent pas à M.
En utilisant les expressions de $\overline{M}$ et de E déjà trouvées :

$$\boxed{E \cap \overline{M} = \{c, n, o\}}$$

On remarque que :
$S \cup M = M$
et que
$S \cap M = S$
Il en résulte que tout élément de S est dans M :
S est inclus dans M.

CHAPITRE PRELIMINAIRE 2

ALGEBRE DE BOOLE CIRCUIT LOGIQUE

I. Introduction

L'algèbre de Boole a été définie vers **1850** par Boole, mathématicien et logicien anglais. D'après cette algèbre, une proposition logique peut être vraie ou fausse. Presque cent ans plus tard, en 1938, Sharon a appliqué cette algèbre à l'analyse des circuits de communication : un courant passe ou ne passe pas. **Toute la technologie des circuits logiques** repose sur cette analyse dont il est indispensable de comprendre les fondements mathématiques.

Dans ce chapitre, nous présenterons le problème d'un point de vue mathématique, avant de l'appliquer aux circuits logiques, présentation plus technique mais s'appuyant sur un certain nombre de théorèmes à connaître.

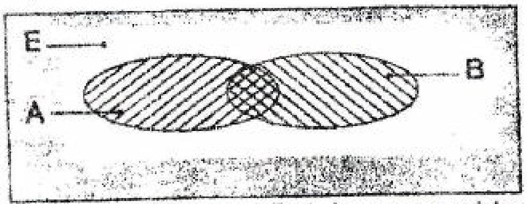
II. Notions d'algèbre de Boole

1) *Généralités*

L'algèbre de Boole concerne des **relations entre parties** ou sous-ensembles d'un ensemble référentiel. Cette algèbre a été édifiée à partir de **deux opérations logiques : la somme et le produit.**

a) La somme logique

Notée " + ", elle correspond à l'union ou encore la réunion de deux ensembles dans la représentation d'Euler-Venn (figure 2.1).



Soient un référentiel E et deux ensembles A et B ; la réunion des ensembles A et B notée A + B est constituée des éléments appartenant à A, de ceux appartenant à B et éventuellement de ceux appartenant à A et B.

Sur la figure 2.1, A + B est constituée de toute la partie hachurée soit une seule fois, soit deux fois. On dit alors qu'un élément **appartient à A + B** s'il appartient **soit à A soit à B, soit aux deux.** Il s'agit de l'opérateur **OU.**

b) Le produit logique

Noté par un point " . ", il correspond à l'intersection de deux ensembles dans le diagramme d'Euler-Venn. L'intersection des ensembles A et B, notée A.B (également AB) est constituée des **éléments communs aux deux ensembles**. Sur la figure 2.1, A. B est constituée de la partie hachurée deux fois. On dit alors qu'un élément appartient à A. B s'il appartient **à A et à B.** Il s'agit de **l'opérateur ET.** Si A et B n'ont pas d'élément commun, on dit que l'intersection est vide.

Exemple :

Soit une classe de trente élèves dont quatorze filles et seize garçons. Cette classe comprend dix élèves ayant un bac C, douze élèves ayant un bac D et huit ayant un bac B.

Soit E: le référentiel, c'est-à-dire la classe

G : l'ensemble des garçons

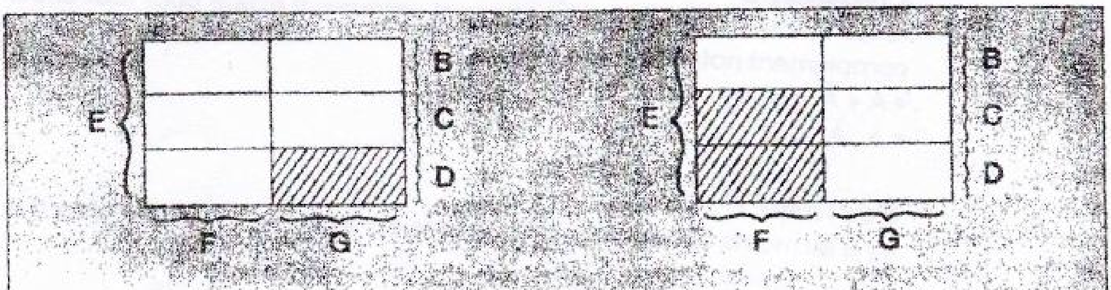
F : l'ensemble des filles

C : l'ensemble des bacs C

B : l'ensemble des bacs B

D : l'ensemble des bacs D

Si nous nous intéressons aux garçons de la classe ayant un bac D, nous le noterons G. D (figure 2.2). Mais si nous ne nous intéressons qu'aux filles ayant un bac C ou un bac D, nous le noterons (C + D) . F (figure 2.3).



2) Les postulats

En 1904, un certain Hungligton montre que six postulats indépendants sont nécessaires pour édifier cette algèbre à partir de deux opérateurs : somme et produit.

Postulat 1

Si deux ensembles A et B font partie du référentiel E, alors :

- $A + B$ appartient à E,
- $A . B$ appartient à E.

Postulat 2

- Il existe toujours un élément 0 tel que $A + 0 \Leftrightarrow A$ (et nous noterons $A + 0 = A$) pour tout élément de E.
- Il éxiste toujours un élément 1 tel que $A . 1 = A$ pour tout élément de E.
- 0 est élément neutre pour la somme logique. 1 est élément neutre pour le produit logique. Ils sont uniques.

Postulat 3

A et B appartenant à E

- La somme logique est commutative : $A + B = B + A$.
- Le produit logique est commutatif : $A . B = B . A$.

Postulat 4

A, B, C appartenant à E

- La somme logique est distributive par rapport au produit logique

$A + (B . C) = (A + B) . (A + C)$

- Le produit logique est distributif par rapport à la somme logique

$A . (B + C) = (A . B) + (A . C)$

Postulat 5

Si les éléments 0 et 1 existent et sont uniques, il existe pour tout ensemble A de E un complément noté $\overline{A}$ de E tel que

- $A + \overline{A} = 1$
- $A . \overline{A} = 0$.

Postulat 6

Il y a au moins deux éléments différents dans E, ce sont les éléments 0 et 1.

Postulat 7 : dualité

Cette notion est une conséquence des postulats. On constate que les opérations somme logique et produit logique jouent le même rôle l'un vis-à-vis de l'autre.

Ainsi, à toute propriété P correspond une propriété P* dite **duale. Cette propriété duale est obtenue à partir de P en permutant les signes opératoires et les éléments neutres.**

Exemple :

Dans le postulat 4 on a : $A + (B \cdot C) = (A + B) \cdot (A + C)$
la propriété duale est : $A \cdot (B + C) = (A \cdot B) + (A \cdot C)$
La dualité permet de montrer certaines règles :

Exemple :

d'après le postulat 2 on a : $A = A + 0$
dualité : $A = A \cdot 1$

3) Théorèmes de " De Morgan "

Premier théorème

Considérons l'expression : $\bar{a} \cdot \bar{b} \cdot (a + b)$
d'après le postulat 4

$$\bar{a} \cdot \bar{b} \cdot (a + b) = \bar{a} \cdot \bar{b} \cdot a + \bar{a} \cdot \bar{b} \cdot b$$
$$= \bar{a} \cdot a \cdot \bar{b} + \bar{a} \cdot \bar{b} \cdot b \text{ (or } \bar{a} \cdot a = 0 \text{ et } \bar{b} \cdot b = 0)$$
$$= 0$$

(1) nous donne $A \cdot B = 0$

donc **$\bar{a} \cdot \bar{b} \cdot (a + b) = 0$** (1)

Considérons maintenant l'expression : $\bar{a} \cdot \bar{b} + (a + b)$
d'après le postulat 4

$$\bar{a} \cdot \bar{b} + (a + b) = (\bar{a} + a + b) \cdot (\bar{b} + a + b)$$
$$= (\bar{a} + a + b) \cdot (\bar{b} + b + a)$$
$$= (1 + b) \cdot (1 + a)$$
$$= 1$$

(2) nous donne $A + B = 1$

donc **$\bar{a} \cdot \bar{b} + (a + b) = 1$** (2)

si on pose $A = \bar{a} \cdot \bar{b}$
$B = a + b$

En application du postulat 5, on voit que A est le complément de B ou bien que B est le complément de A.

On a donc $\bar{B} = A$ et par conséquent : $\overline{a + b} = \bar{a} \cdot \bar{b}$

Le complément d'une somme est égal au produit des compléments
soit $\overline{a + b} = \bar{a} \cdot \bar{b}$

Deuxième théorème

Considérons l'expression : $a \cdot b \cdot (\bar{a} + \bar{b})$

$$a \cdot b \cdot (\bar{a} + \bar{b}) = a \cdot b \cdot \bar{a} + a \cdot b \cdot \bar{b}$$
$$= 0$$

(1) nous donne $A \cdot B = 0$

donc **$a \cdot b \cdot (\bar{a} + \bar{b}) = 0$** (1)

Considérons l'expression : $a \,.\, b + (\bar{a} + \bar{b})$

$a \,.\, b + (\bar{a} + \bar{b}) \;=\; (a + \bar{a} + \bar{b}) \,.\, (b + \bar{a} + \bar{b})$

$\qquad\qquad\qquad = \; 1$

(2) *nous donne* $A + B = 1$

donc $\quad \mathbf{a \,.\, b + (\bar{a} + \bar{b}) \;=\; 1}$ (2)

Si on pose $\quad A \;=\; a \,.\, b,\; B \;=\; \bar{a} + \bar{b}$.

Là encore, A est le complément de B, on peut donc conclure que :

$\overline{a \,.\, b} = \bar{a} + \bar{b}$

Le complément d'un produit est égal à la somme des compléments
soit $\quad \overline{a \,.\, b} \;=\; \bar{a} + \bar{b}$

On aurait pu trouver le résultat beaucoup plus rapidement en appliquant la dualité sur le résultat du premier théorème.

Exemple :

Soit l'expression : $\quad H \;=\; \bar{a}\,[(b + \bar{c}) \,.\, \bar{e}] \,.\, (b + d)$, on pose $\quad x = \bar{a}\,; \quad y = b + \bar{c}\,;$

$z = \bar{e}\,; \qquad t = b + d$

On peut écrire l'expression comme suit :

$H \;=\; x \,.\, y \,.\, z \,.\, t$

$\bar{H} \;=\; \bar{x} + \bar{y} + \bar{z} + \bar{t}$

$\quad\; = \; a + \overline{b + \bar{c}} + e + \overline{b + d}$

$\quad\; = \; a + \bar{b} \,.\, c + e + \bar{b} \,.\, \bar{d}$

On constate que **pour passer d'une expression à son complément, il suffit de permuter les signes opératoires et de prendre la négation de chaque variable.**

4) Résumé des principales expressions

$a + 0 \;=\; a$	**Commutativité**	
$a \,.\, 0 \;=\; 0$	$a + b \;=\; b + a$	
$a + 1 \;=\; 1$	$a \,.\, b \;=\; b \,.\, a$	**Loi d'absorption**
$a \,.\, 1 \;=\; a$	**Associativité**	$a + (a \,.\, b) \;=\; a$
$a + a \;=\; a$	$(a + b) + c \;=\; a + (b + c)$	$a + (\bar{a} \,.\, b) \;=\; a + b$
$a \,.\, a \;=\; a$	$(a \,.\, b) \,.\, c \;=\; a \,.\, (b \,.\, c)$	$a \,.\, (a + b) \;=\; a$
$a + \bar{a} \;=\; 1$	**Distributivité**	$a \,.\, (\bar{a} + b) \;=\; a \,.\, b$
$a \,.\, \bar{a} \;=\; 0$	$(a + b) \,.\, c \;=\; (a \,.\, c) + (b \,.\, c)$	
	$(a \,.\, b) + c \;=\; (a + c) \,.\, (b + c)$	

5) Fonctions booléennes : minterms maxterms

a) Définitions

On appelle **variable logique** une variable dont la valeur **appartient à l'ensemble {0,1}**.
On appelle **fonction booléenne de n variables** définies dans un référentiel E et on note f (a_n, a_{n-1}, ..., a_1) ou plus simplement f, **toute partie de ce référentiel** qui peut être exprimée par la **combinaison de ces variables** au moyen des **opérations somme logique, produit logique et complémentation.**

Exemple :

$f = \bar{a} . b + c . (d + b)$ est une fonction booléenne des quatre variables a, b, c, d.

On appelle **minterm** et l'on désigne par **m** l'un quelconque des **produits logiques** des n variables indépendantes ou de leurs négations.

Exemple :

$m = \bar{a} . b . \bar{c} . d$ est un minterm dans le cas des quatre variables a, b, c, d.

On appelle maxterm et l'on désigne par M l'une quelconque des sommes logiques des n variables indépendantes ou de leurs négations.

Exemple :

$M = \bar{a} + b + \bar{c}$ est un maxterm dans le cas d'une fonction à trois variable a, b, c.

La table de vérité d'une fonction booléenne à n variables est une autre forme de représentation de la **fonction.** Elle doit traduire **tous les cas possibles.** Chaque ligne correspond à un cas et le résultat, c'est-à-dire la valeur de la fonction, est indiqué dans la dernière colonne. Pour une fonction à n variables, il y a 2n cas possibles, par conséquent 2n lignes dans la table de vérité.

Exemple :

f (a, b) = a + b ; sa table de vérité est :

a	b	f
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

b) Forme canonique d'une fonction

On appelle **forme canonique d'une fonction booléenne** de n variables **la représentation de cette fonction** soit par **une somme de minterms de n variables** (et on parle alors de forme canonique **disjonctive**), soit par un produit logique de maxterms de n variables et on parle alors de forme canonique conjonctive). La forme canonique disjonctive d'une fonction booléenne se déduit immédiatement de sa table de vérité en faisant la somme logique des minterms pour lesquels la fonction a la valeur 1.

Pour trouver la forme canonique conjonctive d'une fonction f à partir de la forme canonique disjonctive, il faut trouver f qui est la somme des minterms qui ne figurent pas dans la forme canonique disjonctive, puis complémenter le résultat.
Pour trouver la forme canonique disjonctive d'une fonction f à partir de la forme canonique conjonctive, il faut trouver f qui est le produit des maxterms qui ne figurent pas dans la forme canonique conjonctive, puis complémenter le résultat.

Exemple :

$f(a, b, c) = \bar{a}.b.c + a.\bar{b}.\bar{c} + a.b.\bar{c} + \bar{a}\bar{b}\bar{c}$ (forme canonique disjonctive)
$f(a, b, c) = \bar{a}.\bar{b}.c + a.b.\bar{c} + a.\bar{b}.c + a.b.c.$
$f(a, b, c) = (a+b+c).(a+\bar{b}+c).(\bar{a}+b+\bar{c}).(\bar{a}+\bar{b}+\bar{c})$ (forme canonique conjonctive)

c) Fonctions booléennes incomplètement définies

Quand on étudie un problème, son énoncé entraîne un certain nombre de conditions pour les variables. Il se peut que certaines autres conditions pour ces variables ne puissent jamais se produire pour des raisons d'impossibilités matérielles.

Dans ce dernier cas, pour élaborer la fonction booléenne, on peut supposer que ces dernières conditions existent ou non. Cela permet parfois des simplifications et d'être sûr que le résultat sera correct puisque ces conditions supplémentaires introduites ne peuvent jamais se produire.

Ces conditions, que l'on appellera conditions indifférentes (ou disponibles) sont représentées dans la table de vérité par la lettre S.

Exemple :
Soit un compteur modulo 10.
Le nombre donné par le compteur est représenté en binaire par quatre variables a, b, c, d.
On veut définir la fonction f qui sera égale à 1 si le nombre dans le compteur est divisible par trois ou nul.

Les derniers cas sont impossibles car ils correspondent à des nombres supérieurs à 9.

Table de vérité de f :

a	b	c	d	f
0	0	0	0	1
0	0	0	1	0
0	0	1	0	0
0	0	1	1	1
0	1	0	0	0
0	1	0	1	0
0	1	1	0	1
0	1	1	1	0
1	0	0	0	0
1	0	0	1	1
1	0	1	0	s
1	0	1	1	s
1	1	0	0	s
1	1	0	1	s
1	1	1	0	s
1	1	1	1	s

Forme canonique disjonctive de f :

$$f = \bar a.\bar b.\bar c.\bar d + \bar a.\bar b.c.d + \bar a.b.c.\bar d + a.\bar b.\bar c.d$$
$$+ s(a.\bar b.c.\bar d + a.\bar b.c.d. + a.b.\bar c.\bar d + a.b.\bar c.d + a.b.c.\bar d$$
$$+ a.b.c.d)$$

Quand une **fonction** présente des **conditions indifférentes,** on dit que la fonction est **incomplète** ou incomplètement définie. Cette fonction représente alors simultanément plusieurs fonctions.

Exemple :

Dans le cas précédent, la fonction f sera vérifiée par l'une des expressions suivantes :

$f_1 = \bar a.\bar b.\bar c.\bar d + \bar a.\bar b.c.d + \bar a.b.c.\bar d + a.\bar b.\bar c.d$

$f_2 = \bar a.\bar b.\bar c.\bar d + \bar a.\bar b.c.d + \bar a.b.c.\bar d + a.\bar b.\bar c.d + a.\bar b.c.\bar d$

$f_3 = \bar a.\bar b.\bar c.\bar d + \bar a.\bar b.c.d + \bar a.b.c.\bar d + a.\bar b.\bar c.d + a.\bar b.c.d$

$f_4 = \bar a.\bar b.\bar c.\bar d + \bar a.\bar b.c.d + \bar a.b.c.\bar d + a.\bar b.\bar c.d + a.\bar b.c.\bar d + a.\bar b.c.d$

etc

6) Simplification d'une fonction logique

La transcription, en algèbre de Boole, d'un problème conduit le plus souvent à des fonctions relativement compliquées. Une fonction booléenne étant amenée à être câblée, il faudra **trouver sa forme la plus simple** pour réaliser le schéma logique correspondant.

a) Méthode algébrique

Lorsque la fonction initiale est peu compliquée, on peut la simplifier en utilisant les règles de calcul usuelles de l'algèbre de Boole.

Exemple :

$$F = ab\bar c + a\bar b c + abc + \bar a bc$$
$$= ab(c+\bar c) + ac(b+\bar b) + bc(a+\bar a)$$
$$= ab + ac + bc$$

On peut également utiliser le fait que le nombre de minterms et le nombre de maxterm est 2^n lorsque la fonction a n variables. Si l'expression, dans l'une des formes canoniques, contient un nombre de termes voisin de 2^n, il est avantageux d'écrire la relation en utilisant l'autre forme canonique.

Exemple :

$f = ab\bar c + a\bar b c + abc + \bar a bc + \bar a\bar b c + a\bar b\bar c$ fonction à trois variables exprimée à l'aide de six termes (avec 3 variables, une fonction booléenne a au maximum 8 termes ; $8 = 2^3$) sous sa forme disjonctive.

$\bar f = \bar a\bar b\bar c + \bar a b\bar c$

donc $f = (a+b+c).(a+\bar b+c)$ (forme conjonctive)

Cette méthode présente des inconvénients :

- lorsque le nombre de variables est supérieur à trois elle devient difficile à utiliser ;
- on n'est jamais tout à fait sûr d'obtenir l'expression minimale ;
- elle fait appel à l'intuition et à l'habitude.

Pour ces raisons, lorsque le nombre de variables est supérieur à trois, on utilise une autre méthode : la méthode de Karnaugh.

b) Simplification des fonctions booléennes à l'aide des diagrammes de Karnaugh

• Définition :

La table de Karnaugh est une représentation de la fonction logique. Elle est plus parlante que la table de vérité et permet la simplification des fonctions.

Dans la table de vérité, le nombre de variable n détermine le nombre de lignes (2^n). Dans le diagramme de Karnaugh, le nombre de variables n détermine le nombre de cases (2^n), car il s'agit d'un tableau à double entrée.

Exemple :

Y = $a.\overline{b}$ (fonction à deux variables)

Dans le cas d'une fonction à deux variables, on représentera une variable en ligne et l'autre en colonne. Chaque variable peut prendre deux valeurs, vraie ou fausse.

Table de vérité

a	b	Y
0	0	0
0	1	0
1	0	1
1	1	0

Diagramme de Karnaugh

Y	$\overline{a}$	a
$\overline{b}$	0	1
b	0	0

Règle :

Les cases d'un **diagramme de Karnaugh ne peuvent pas être placées** dans un ordre quelconque. Il est **nécessaire** que le **passage d'une case à la case adjacente** (case ayant un côté commun) **se traduise par le changement d'état d'une seule variable.**

Cette règle se comprend mieux sur un exemple d'une fonction à trois variables.

Dans ce cas, on représentera le produit logique de deux variables en colonne et une variable en ligne.

Exemple :

F (a, b, c) une fonction à trois variables a, b et c :

Diagramme de Karnaugh

case (3) : $\bar{a}.\bar{b}.c$

case (4) : $a.\bar{b}.c$

	$a.b$	$\bar{a}.b$	$\bar{a}.\bar{b}$	$a.\bar{b}$
c	(1)	(2)	(3)	(4)
$\bar{c}$	(5)	(6)	(7)	(8)

Le passage de la case (3) à (4) est obtenu de la façon suivante :
" a " a remplacé " $\bar{a}$ " ce qui signifie que la variable a passé de l'état 0 à l'état 1

case (2) : a. b. c

case (3) : a. b. c

	$a.b$	$\bar{a}.b$	$a.\bar{b}$	$\bar{a}.\bar{b}$
c	(1)	(2)	(3)	(4)
$\bar{c}$	(5)	(6)	(7)	(8)

Ce diagramme n'est pas un diagramme de Karnaugh. En effet, pour passer de la case (2) à la case (3), deux variables changent d'état : la variable a et la variable b.

D'une façon générale, dans un diagramme de Karnaugh, le passage de l'expression correspondant à une case à celle de la case adjacente, se fait en remplaçant dans la première une variable (et une seule) par la variable complémentée.

• Marquage d'une fonction dans le diagramme de Karnaugh :

Une fonction de n variables étant mise sous sa forme canonique disjonctive, elle se représente, comme nous l'avons vu, par la somme de produits de n variables (minterms). A chaque terme de la somme correspond une case du diagramme. Il suffira de marquer d'un 1 chaque case du diagramme qui correspond à un minterm de la forme canonique disjonctive de la fonction.

Exemple : $F = \bar{a}.b.\bar{c} + a.b.\bar{c} + a.\bar{b}.c$

	$a.b$	$\bar{a}.b$	$\bar{a}.\bar{b}$	$a.\bar{b}$
c				1
$\bar{c}$	1	1		

• Simplification d'une fonction à 2 variables

Exemples :

$Y = \bar{a}.\bar{b} + \bar{a}.b + a.b$

	$\bar{a}$	a
$\bar{b}$	1	
b	1	1

Si au lieu de représenter Y, nous avions voulu représenter $\overline{Y}$, il aurait suffit de remplacer les cases vides par des 1, et les 1 par des cases vides. On aurait obtenu :

$\overline{Y}$	$\overline{a}$	a
$\overline{b}$		1
b		0

$\overline{Y} = a.\overline{b}$

Sachant que $\overline{Y} = a.\overline{b}$, il doit être possible de retrouver Y de façon algébrique en appliquant la complémentation car $Y = \overline{\overline{Y}}$

d'où $Y = \overline{\overline{Y}} = \overline{a.\overline{b}}$

$Y = \overline{a} + b$ (application du théorème de De Morgan)

On vient donc de trouver une forme simplifiée de Y :

$Y = \overline{a} + b$ est plus simple que $Y = \overline{a}.\overline{b} + \overline{a}.b + a.b$

Cette simplification peut être obtenue rapidement à partir du diagramme de Karnaugh de la fonction Y, en appliquant la règle suivante :

Règle :

Lorsque deux cases adjacentes contiennent chacune un 1 dans leur représentation, une simplification peut s'effectuer par rapport à la forme canonique de la fonction.

Y	$\overline{a}$	a
$\overline{b}$	1	
b	1	1

$Y = \overline{a}.\overline{b} + \overline{a}.b + a.b$

$Y = \overline{a}.\overline{b} + \overline{a}.b + \overline{a}.b + a.b$

(ceci est possible car x + x = x) voir paragraphe 2-4

$Y = \overline{a}.\underbrace{(\overline{b} + b)}_{1} + b.\underbrace{(\overline{a} + a)}_{1}$

$Y = \overline{a} + b$

On regroupe :

- d'une part, les cases d'expression $\overline{a}.\overline{b}$ et $\overline{a}.b$ puisqu'elles sont adjacentes et contiennent chacune en 1.
- d'autre part, les cases d'expression $\overline{a}.b$ et a.b pour les mêmes raisons.

Le regroupement de cases dans le but de la simplification d'une fonction ne peut se faire que pour un nombre de cases adjacentes égal à une puissance de 2.
Dans le cas précédent, il n'a donc pas été possible de faire un seul regroupement.
Par contre, une même case peut être utilisée pour plusieurs regroupements.
Chaque regroupement correspond à un produit logique dans lequel on ne prend en considération que les variables communes aux cases regroupées.

Exemple :

Y	$\bar{a}$	a
$\bar{b}$	1	
b	1	

$Y = \bar{a}$

Ici, la simplification s'effectue en un seul regroupement. La variable commune est $\bar{a}$.
Il faut faire autant de regroupements que nécessaire de façon à ce que toutes les cases marquées d'un 1 soient prises en compte.
La fonction simplifiée est exprimée par la somme logique des regroupements.

Exemple :

Y	$\bar{a}$	a
$\bar{b}$	1	
b		1

$Y = \bar{a}.\bar{b} + a.b$

Ici, aucun regroupement n'est effectué car il n'y a pas de cases adjacentes.

- **Simplification d'une fonction à 3 variables**

Exemples :

Y	a.b	$\bar{a}$.b	$\bar{a}.\bar{b}$	a.$\bar{b}$
c		1	1	
$\bar{c}$		1	1	

$Y = \bar{a}.b.c + \bar{a}.b.\bar{c} + \bar{a}.\bar{b}.c + \bar{a}.\bar{b}.\bar{c}$

Dans cet exemple on observe que quatre cases marquées d'un 1 sont adjacentes, on peut donc les regrouper. La seule variable commune à ces quatre cases est la variable $\bar{a}$, ainsi on obtient $Y = \bar{a}$. Autrement dit, le regroupement est constitué des deux colonnes $\bar{a}$.b. et $\bar{a}.\bar{b}$. dans lesquelles la variable $\bar{a}$ est commune.

De la même manière :

Y	a.b	$\bar{a}$.b	$\bar{a}.\bar{b}$	a.$\bar{b}$
c			1	1
$\bar{c}$			1	1

$Y = \bar{a}.\bar{b}.c + \bar{a}.\bar{b}.\bar{c} + a.\bar{b}.c + a.\bar{b}.\bar{c}$

Y est représentée par quatre cases marquées d'un 1 et adjacentes pour lesquelles la variable $\bar{b}$ est commune : $Y = \bar{b}$

Y	a.b	$\bar{a}$.b	$\bar{a}.\bar{b}$	a.$\bar{b}$
c	1			1
$\bar{c}$	1			1

$Y = a.b\,c + a.b.\bar{c} + a.\bar{b}.c + a.\bar{b}.\bar{c}$

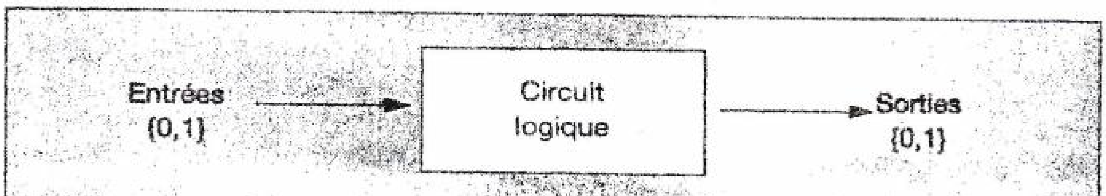
Les cases latérales d'un diagramme de Karnaugh doivent être considérées comme adjacentes.
On obtient donc : Y = a

Méthode de simplification d'une fonction logique à partir d'une table de Karnaugh
Soit n le nombre de variables d'une fonction logique f. La simplification a lieu en plusieurs étapes :
- détermination de la forme disjonctive de f (somme des minterms),
- construction de la table de Karnaugh contenant 2^n cases et marquage à 1 des cases représentant les minterms de la fonction,
- regroupement MAXIMUM des cases adjacentes marquées d'un 1. Chaque regroupement contient 2^p cases où $p \leq n$,
- une case marquée d'un 1 peut-être utilisée dans différents regroupements,
- une case marquée d'un 1 doit participer au moins à un regroupement (ce dernier pouvant être constitué d'une seule case).

III. Les circuits logiques

1) *Généralités*

Un circuit est un système réalisé à l'aide de **composants électroniques** dans lequel les **informations en entrée et en sortie se traduisent** sous la forme des **deux états logiques 0 ou 1.**



Les entrées et les sorties sont représentées physiquement par un signal digital de nature électrique dans lequel on fait correspondre à chacun des états logiques, 0 ou 1, une tension. La tension la plus haute est appelée l'état haut, la plus basse l'état bas. En fait l'état haut et l'état bas d'un circuit ne correspondent pas à deux tensions précises, et les constructeurs de circuits indiquent pour chacun d'eux une tension minimale et une tension maximale correspondant à une plage de valeurs possibles de la tension du signal. Ces plages dépendent de la technologie employée pour **réaliser** le circuit comme le montre la figure 2.5. L'affectation du 0 et du 1 à une des deux **plages** de valeur se fait de façon conventionnelle. Ainsi, lorsque le 1 logique est associé à l'état haut, on parle de logique positive, lorsqu'il est représenté par l'état bas, de **logique négative**. Sauf spécifications contraires, ce sont les conventions de la logique positive qui **sont adoptées**.

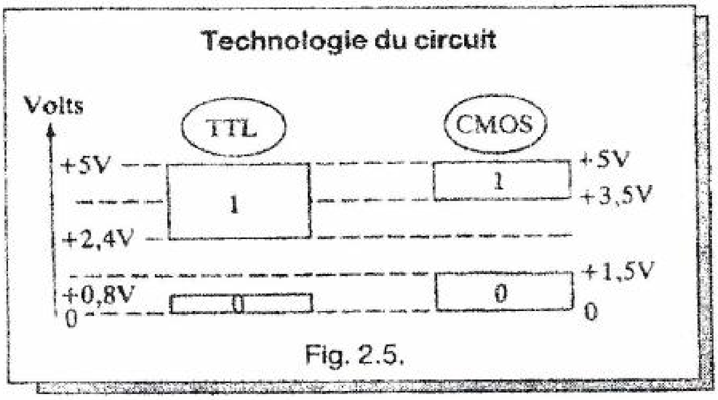


Fig. 2.5.

Exemple en technologie TTL : de + 2,4 V à + 5 V ⇒ 1 logique (état haut)
de 0 V à + 0,8 V ⇒ (0 logique (état bas)
entre les deux ⇒ indéterminé

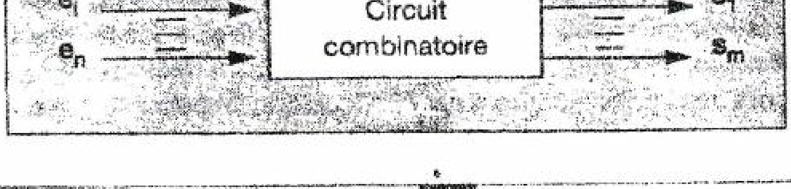
Lorsque le signal d'entrée ou de sortie est maintenu dans le temps, on parle de signal de niveau. Lorsqu'il est de courte durée, on parle d'impulsion.

On distingue deux catégories de circuits logiques :
- **les circuits combinatoires,**
- **les circuits séquentiels.**

2) Les circuits combinatoires

a) Définition

Un circuit combinatoire est un **circuit logique** dans lequel **les sorties ne dépendent** que des **entrées en amont,** et non du temps et des états antérieurs. Il peut y avoir une ou plusieurs entrées et une ou plusieurs sorties.



Exemple :
L'ouverture d'un cadenas à chiffres n'est possible que si on arrive à la bonne combinaison. Le problème est indépendant du temps et de l'ordre dans lequel on arrive à la solution.

Les mêmes entrées donnent toujours les mêmes sorties car l'état de chaque sortie du circuit logique combinatoire est une expression booléenne où figure l'état des entrées.

Ainsi le circuit est clairement défini lorsque l'on a précisé :
- le nombre des entrées,
- le nombre des sorties,
- l'état de chaque sortie en fonction des entrées.

On utilise généralement pour cela une **table de vérité** dans laquelle les entrées et les sorties sont exprimées par des **variables booléennes.**

Lorsque les fonctions de sorties obtenues sont trop complexes, on **les simplifie,** soit à l'aide de l'algèbre de Boole, soit à l'aide des **diagrammes de Karnaugh,** cette dernière méthode étant la plus utilisée pour les raisons que nous avons déjà évoquées.

Le circuit est ensuite schématisé à partir des **opérateurs** de base que nous allons voir.

Ils représentent les **fonctions logiques à** partir desquelles **il est** possible de **construire** en les assemblant, toute fonction logique plus complexe.

Nous verrons plus loin comment ils sont réalisés physiquement.

b) Les opérateurs de base

■ L'opérateur Non (Not)
C'est l'opérateur qui **fait correspondre** à toute **variable booléenne en entrée,** son **complément en sortie.** Il est appelé encore inverseur :

- Table de vérité

$S = \overline{E}$

E	S
1	0
0	1

- Représentation

■ L'opérateur Et (AND)

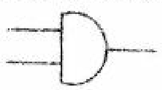
C'est l'opérateur qui réalise le produit logique des entrées. La sortie est à l'état logique 1 si **toutes les entrées sont à l'état logique 1.**

• Table de vérité avec deux entrées A et B

$S = A . B$

A	B	S
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

• Représentation

A
B

$S = A . B$

■ L'opérateur Ou (OR)

C'est l'opérateur qui réalise la somme logique des entrées. **La sortie est à l'état logique 1 si au moins une des entrées est à l'état logique 1.**

• Table de vérité avec deux entrées A et B

$S = A + B$

A	B	S
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

• Représentation

A
B

$S = A + B$

■ L'opérateur OU exclusif (XOR)

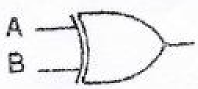
Cet opérateur est appelé encore anticoïncidence parce qu'il donne une sortie logique à 1, **si les entrées ne coïncident pas.**

• Table de vérité avec deux entrées A et B

$$S = \bar{A}B + A\bar{B}$$
$$= A \oplus B$$

A	B	S
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

• Représentation



$S = A \oplus B$

c) Les opérateurs dérivés des opérateurs de base

■ L'opérateur ET-NON (NAND)

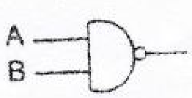
Cet opérateur est le complément de l'opérateur ET. Il donne un 0 logique si toutes les entrées sont à l'état logique 1.

• Table de vérité avec deux entrées A et B

$S = \overline{A.B} = \overline{A} + \overline{B}$

A	B	S
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

• Représentation



$S = \overline{A} + \overline{B}$

■ L'opérateur OU-NON (NOR)

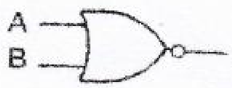
C'est le complément de l'opérateur OU. La sortie est à l'état logique 0 si au moins une des entrées est à l'état logique 1.

• Table de vérité avec deux entrées A et B

$S = \overline{A + B} = \overline{A}.\overline{B}$

A	B	S
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

• Représentation



$S = \overline{A} + \overline{B}$

■ **L'opérateur OU exclusif-NON (XHOR)**

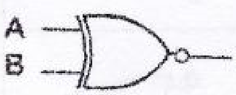
Cet opérateur est encore appelé coïncidence ou identité, car il donne une sortie logique à 1 lorsque les entrées coïncident, c'est-à-dire qu'elles sont toutes au même état logique.

• Table de vérité avec deux entrées A et B

$S = \overline{A}.\overline{B} + A.B = \overline{A \oplus B}$

A	B	S
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

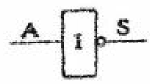
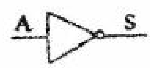
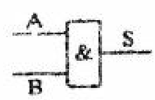
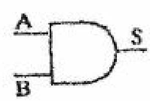
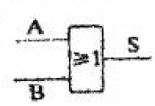
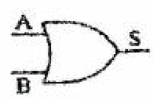
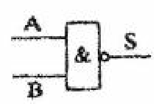
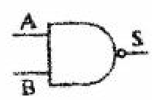
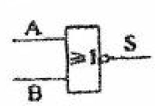
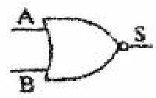
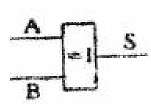
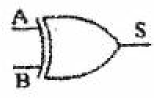
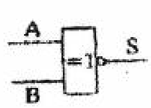
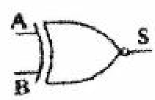
• Représentation



$S = \overline{A \oplus B}$

Fig. 2.16.

Les deux modes de représentation des circuits logiques

	représentation européenne	représentation américaine
NON - (NOT) $S = \overline{A}$		
ET (AND) $S = A . B$		
OU (OR) $S = A + B$		
ET - NON (NAND) $S = \overline{A . B}$		
OU - NON (NOR) $S = \overline{A + B}$		
OU Exclusif (XOR) $S = A \oplus B$		
OU Exclusif - NON (XNOR) $S = \overline{A \oplus B}$		

Ce tableau nous montre les deux jeux de symboles adoptés pour représenter les opérateurs logiques. La représentation symbolique la plus communément admise (et notamment par les constructeurs) est celle de la colonne de droite (représentation USA). C'est celle-ci que nous avons retenue.

ENONCE DES EXERCICES

EXERCICE 1

Démontrer les relations suivantes :

a) $a \cdot c \cdot (b + c) = a \cdot c$

b) $a \cdot c \cdot (b + \bar{c}) = a \cdot b \cdot c$

c) $a \cdot b + a \cdot b \cdot c + a \cdot b \cdot \bar{c} + \bar{a} \cdot b \cdot c = b \cdot (a + c)$

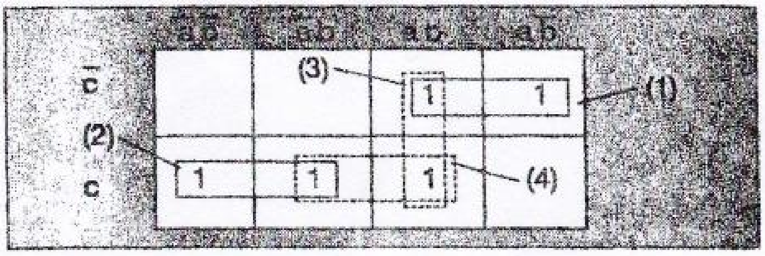
EXERCICE 2

Simplifiez la fonction booléenne suivante :

$f = a + \bar{a} b$

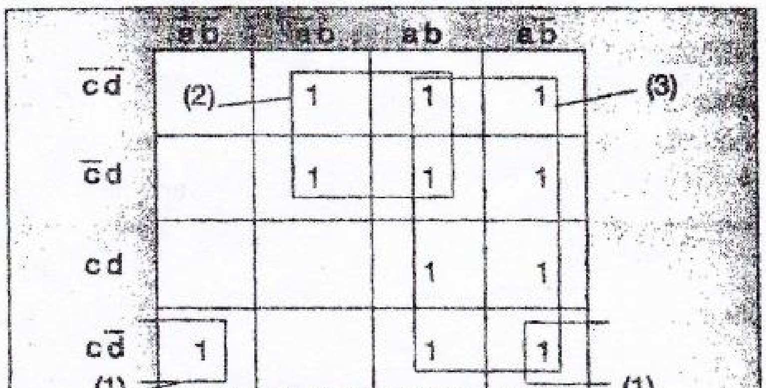
EXERCICE 3

Soit la fonction f représentée par son diagramme de KARNAUGH. Recherchez l'expression simplifiée de f.



EXERCICE 4

Soit la fonction f représentée par son diagramme de KARNAUGH.
Recherchez l'expression simplifiée de f.



CORRIGÉS DES EXERCICES

EXERCICE 1

a)

$a \,.\, c \,.\, (b + c) \;=\; a \,.\, (c\, b + c)$ (distributivité)

or, d'après la loi d'absorption on a :

$c + (c \,.\, b) \;=\; c$, donc

$a \,.\, (c\, b + c) \;=\; a \,.\, c$

b)

$a \,.\, c \,.\, (b + \bar{c}) \;=\; a \,.\, (c \,.\, b + c \,.\, \bar{c})$

or $c \,.\, \bar{c} \;=\; 0$

donc $a \,.\, c \,.\, (b + \bar{c}) \;=\; a \,.\, b \,.\, c$

c)

$a \,.\, b + a \,.\, b \,.\, c + a \,.\, b \,.\, \bar{c} + \bar{a} \,.\, b \,.\, c$

$= a \,.\, b + (a \,.\, b)\,(c + \bar{c}) + (b \,.\, c)\,(a + \bar{a})$

$= a \,.\, b + a \,.\, b + b \,.\, c$

$= a \,.\, b + b \,.\, c$

$= b \,.\, (a + c)$

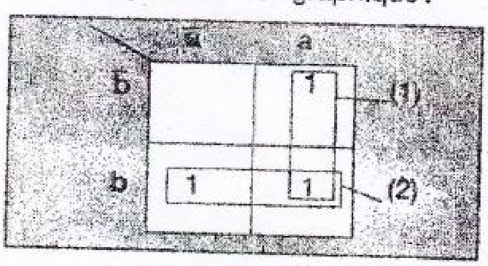
EXERCICE 2

$f \;=\; a + \bar{a}\, b$

Le terme "a" seul signifie que b est quelconque. Sachant que $(b + \bar{b}) = 1$ on peut écrire :

$f \;=\; a\,(b + \bar{b}) + \bar{a}\, b \quad ; \quad f \;=\; a\, b + a\, \bar{b} + \bar{a}\, b$

D'où la représentation graphique :



Deux groupements de deux 1 peuvent être constitués. Pour le groupement (1) représentant $a\, \bar{b} + a\, b$, la variable b a changé de valeur puisqu'elle passe de $\bar{b}$ à b : par conséquent nous l'éliminons : (1) = a.

Pour le regroupement (2) représentant $\bar{a}\, b + a\, b$, on élimine la variable a qui passe de a à $\bar{a}$: (2) = b

D'où $\quad f$ simplifiée $\;=\; a + b$

EXERCICE 3

Quatre regroupements de deux 1 peuvent être constitués ; cependant, l'un seulement des deux qui ont été tracés en pointillés est nécessaire pour obtenir la simplification maximum de f.

Nous trouvons alors 2 formes réduites de la fonction :

- groupement (1) : la variable b change de valeur, nous l'éliminons : (1) = $a\bar{c}$
- groupement (2) : la variable b change de valeur, nous l'éliminons : (2) = $\bar{a}c$
- groupement (3) : la variable c change de valeur, nous l'éliminons : (3) = ab
- groupement (4) : la variable a change de valeur, nous l'éliminons : (4) = bc

1ère forme simplifiée : (1) + (2) + (3)

$f = a\bar{c} + \bar{a}c + ab$

2ème forme simplifiée : (1) + (2) + (4)

$f = a\bar{c} + \bar{a}c + bc$

En développant la 2ème forme par exemple, vérifions que nous retrouvons la 1ère forme.

$f = a\bar{c} + \bar{a}c + bc$

$f = a\bar{c} + \bar{a}c + bc(a + \bar{a})$

$f = a\bar{c} + \bar{a}c + abc + \bar{a}bc$

$f = \bar{a}c\underbrace{(1 + b)}_{1} + a(bc + \bar{c})$

En distribuant $(bc + \bar{c})$

$f = \bar{a}c + a(b + \bar{c})\underbrace{(c + \bar{c})}_{1}$

$f = \bar{a}c + a(b + \bar{c})$

$f = \bar{a}c + a\bar{c} + ab$

qui est bien la 1ère forme simplifiée.

EXERCICE 4

(1) est un groupement de deux 1 :

la variable a change de valeur, nous l'éliminons,

$(1) = \bar{b}c\bar{d}$

(2) est un groupement de quatre 1 :

les variables a et d changent de valeur, nous les éliminons :

$(2) = b\bar{c}$

(3) est un groupement de huit 1 :

les variables b, c, d changent de valeur, nous les éliminons :

$(3) = a$

D'où la forme simplifiée de

$f = a + b\bar{c} + \bar{b}c\bar{d}$

MATHEMATIQUES II

CHAPITRE PRELIMINAIRE 3

LES GRAPHES

Nous aborderons dans ce chapitre deux paragraphes particuliers : PERT, FORD. Il nous paraît toutefois utile de commencer par quelques définitions.

A - Définition

Définition de la notion de graphe :

Un graphe est un ensemble X d'éléments appelés **sommets**, munis d'une **relation binaire U.**

Exemple 1 :

X = (A, B, C, D) les éléments de X sont dits " sommets "

U = ((A, B) ; (A, C) ; (A, D) ; (B, D) ; (D, C))

les éléments de U sont dits " arcs "

On note le graphe G = (X, U)

On peut d'une manière équivalente définir G par la donnée de X et d'une **"application multivoque"** (ou correspondance) F de X dans lui-même.

F est telle que $J \in F(A) \Leftrightarrow (A,J) \in U$

Ainsi dans l'exemple précédent :

F(A) = (B, C, D)	F (B) = (D)
F (C) = Ø	F (D) = (C)

La relation binaire U, ou l'application multivoque F peuvent être définies par un ensemble de points et un ensemble de flèches (représentations dites sagittales) ou par des matrices. Dans l'un et l'autre cas, plusieurs procédés sont utilisés.

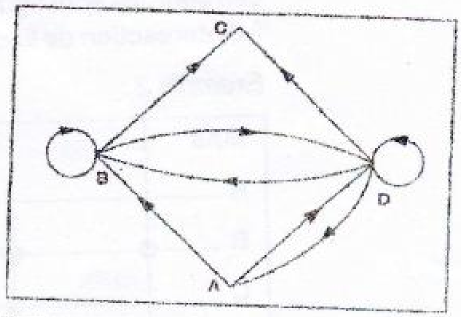
B - Représentations d'un graphe

1. Représentation sagittale : (ou par points et flèches)

Les éléments de X (sommets) sont représentés par des points. Si (A, B) ∈ U (dans ce cas B = F (A) on trace une flèche de A à B.

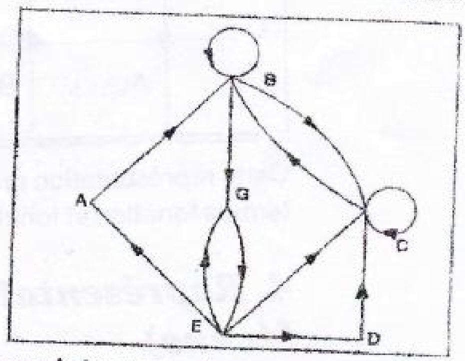
Exemple 2 :

X = (A, B, C, D)
F (A) = (B, D)
F (B) = (B, C, D)
F(C) = Ø
F (D) = (A, B, C, D) = X
U = ((A, B), (A, D), (B, B),)
((B, C), (B, D), (D, A))
((D, B), (D, C), (D, D))



Exemple 3 :

X = (A, B, C, D, E, G)
F (A) = (B)
F (B) = (B, C, G)
F (C) = (B, C)
F (D) = (C)
F (E) = (A, C, D, G)
F (G) = (E)

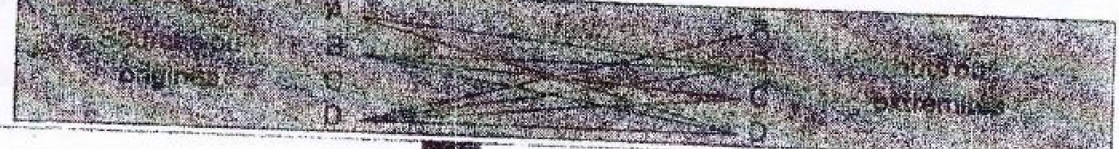


Dans certains cas (graphes valués) on peut convenir que la longueur des arcs est proportionnelle à une quantité (distance, durée...). Cette représentation est celle de cartes ou plans (routes, liaisons aériennes, ferroviaires, ...pipe-lines, circuits électriques etc...) ainsi que celle traduisant des relations entre personnes (organigrammes) ou des successions de tâches (planning d'organisation).

2. Représentation par points couplés

Les éléments de X sont dédoublés : une partie est considérée comme les sources possibles, l'autre comme les buts.

Exemple 2 :

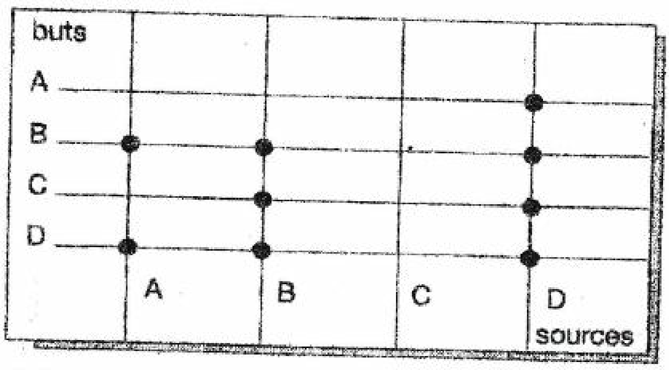


Cette représentation est un schéma spatio-temporel, utilisé quelquefois dans l'illustration des chaînes de Markov, et traduit les changements possibles d'états d'un système (machine, météorologie) entre deux instants successifs.
Inconvénients de ces deux représentations : elles deviennent rapidement peu lisibles si le cardinal de X augmente (essayer de représenter par points couplés l'exemple 3) et ne sont pas mathématiques (analogie avec les figures en géométrie).

3. Représentation par grille

Les sources sont figurées par des colonnes, les buts par des lignes. Un point est marqué à l'intersection de la colonne I et de la ligne J si (s,s) $(I,J) \in U$ donc si $J \in F(I)$

Exemple 2 :



Cette représentation présente une analogie avec le graphe d'une fonction (distinguer les termes fonction et fonction multivoque).

4. Représentation par matrice associée : (matrice booléenne)

Le principe est le même que celui du paragraphe 3 mais on construit un tableau de 1 et 0 : 1 si les sommets sont en relation, 0 sinon.

Exemple 2 :

		A	B	C	D	sources
	A	0	0	0	1	
Buts	B	1	1	0	1	= M dite **"matrice**
	C	0	1	0	1	**associée"** au graphe
	D	1	1	0	1	

Exemple 3 :

$$\begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \\ D \\ E \\ F \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} A & B & C & D & E & F \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

En employant d'autres nombres que 0 et 1, on peut noter dans ce tableau d'autres renseignements : nombres de liaisons entre les sommets " longueur " de la liaison, " capacité " ...

Cette représentation, ainsi que la suivante, est celle qui permet de décrire un graphe à un ordinateur.

5. Représentation par matrice d'incidence :

(valable uniquement si le graphe n'a pas de boucle)
On construit un tableau où chaque colonne représente un sommet et chaque ligne un arc.
On place un 1 à l'origine de l'arc, un -1 à son extrémité.
Exemple 4 :

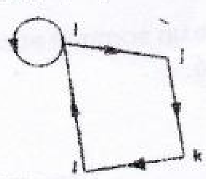
X = (A, B, C, D)
U = ((A, B) ; (AD) ; (BC))
((BD) ; (DA))
((DB) ; (DC))

$$I = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} A & B & C & D \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \\ \text{sommets} \end{array} \begin{array}{c} \\ (AB) \\ (AD) \\ (BC) \\ (BD) \\ (DA) \\ (DB) \\ (DC) \\ \\ \end{array} \text{arcs}$$

C - Terminologie

Notations : sommets : a ; b ; ... i ; j ...

arcs : (ab) = $\overset{\curvearrowright}{ab}$

Terminologie Relations orientées		Relations non orientées	
arc i j est un arc :	$j \in F(i)$ $\overset{\curvearrowright}{ij} \in U$	**arête :**	(i, j) si $\overset{\curvearrowright}{ji}$ ou $\overset{\curvearrowright}{ij}$ est un arc
chemin :	séquence d'arcs adjacentes : i j k chemin de longueur 2	**chaîne :**	séquence d'arêtes adjacentes i j k l chaîne de longueur 3
circuit :	chemin pour lequel les sommets extrêmes sont identiques : i j k i	**cycle :**	chaîne telle que les sommets sont identiques
boucle :	circuit de longueur 1 ex : i i 		

L'ensemble des arcs d'origine s est noté U^+_s, celui des arcs d'extrémité est noté U^-_s (arc aboutissant à s)

D - Définitions de graphes particuliers

1. Graphe symétrique

$\forall \overset{\curvearrowright}{ij} \in u : \overset{\curvearrowright}{ji} \in u$

Un tel graphe est aussi appelé réseau

2. Graphe antisymétrique

tel que si $\overrightarrow{(i\,j)} \in u \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{(j\,i)} \notin u$

Un graphe est dit antisymétrique complet si, pour tout couple de sommet (i, j,) soit $\overrightarrow{i\,j}$, soit $\overrightarrow{j\,i}$ est un arc.

On a donc dans ce cas la propriété suivante :

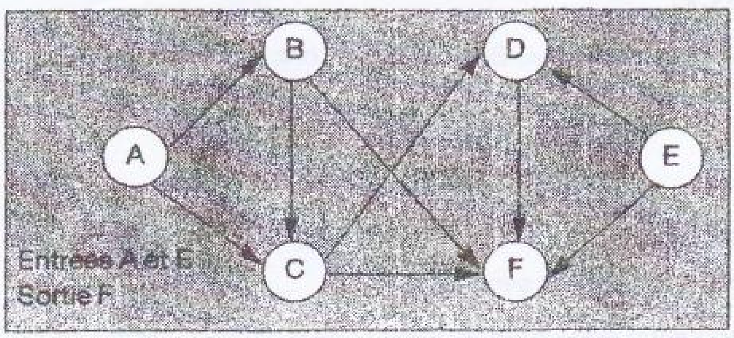
$$\forall (x \in X ; y \in X) \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix} (\text{si } (x, y) \in u \Rightarrow (y, x) \notin u \\ (\text{si } (x, y) \notin u \Rightarrow (y, x) \in u \end{matrix}$$

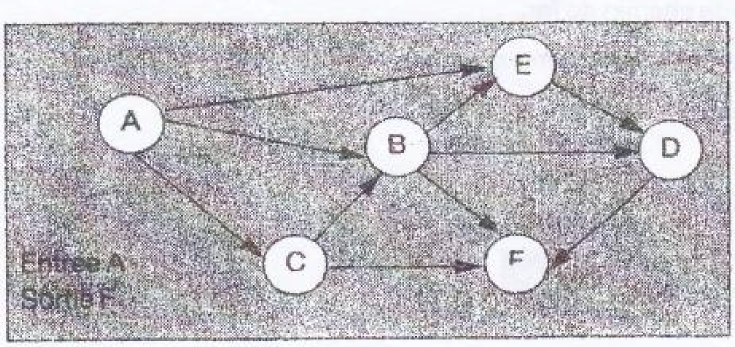
3. Graphe connexe

$\forall i \in X, \forall j \in X, \exists i \ldots j$ chaîne dans le graphe. Un graphe est fortement connexe si pour tout couple de sommets (i, j) il existe un chemin i… j

4. Un graphe de transport est un graphe connexe sans circuit

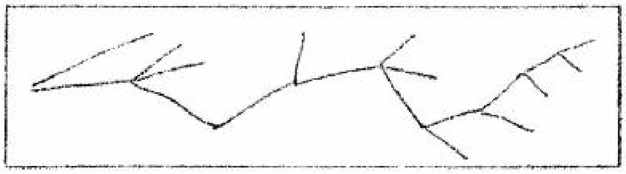
On appelle **entrées** du graphe de transport l'ensemble des sommets pour lesquels U^-_{si} est vide, **sorties** du graphe de transport l'ensemble des sommets pour lesquels U^+_{sj} est vide.





5. On appelle arbre un réseau ou graphe non orienté connexe sans cycle

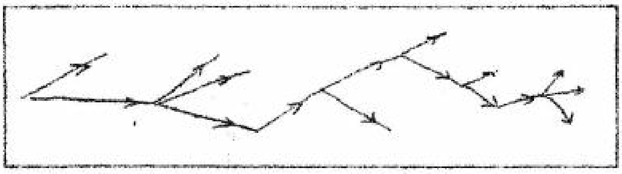
Exemple :



6. On appelle arborescence un arbre orienté, ou graphe connexe sans cycle

Pour chaque sommet, sauf un, l'ensemble U_s^- est de cardinal un.
Pour un sommet s_0, U^-_{S0} est vide, ce sommet est dit la racine de l'arbre. Pour chaque sommet, il existe un chemin partant de la racine et aboutissant à ce sommet.

Exemple :



E - Exercice

Les liaisons ferroviaires entre Agen, Bordeaux, Cahors, Limoges, Montauban, sont les suivantes :
Bordeaux - Agen
Agen - Montauban
Limoges - Cahors - Montauban
Limoges - Bordeaux

Ces liaisons existent dans les deux sens.

1) Faire une représentation graphique du graphe de la relation : une ville est liée à une autre par une ligne de chemin de fer.

2) Existe-t-il un chemin entre Bordeaux et Cahors ? Lequel ?

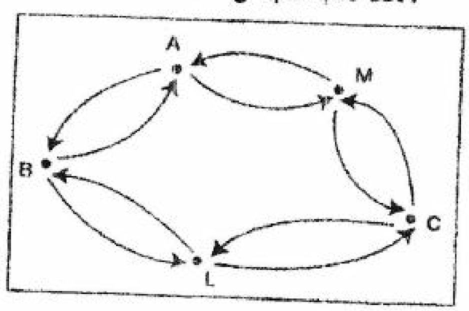
3) Le graphe est-il fortement connexe ?

MATHEMATIQUES II

Corrigé

1) Posons : Agen = A
Bordeaux = B
Cahors = C
Limoges = L
Montauban = M

La relation " une ville est liée à une autre par une ligne de chemin de fer " a un graphe dont la représentation graphique est :



2) Il existe deux chemins entre Bordeaux et Cahors :

a) Via Limoges : (B, L) (L, C)

b) Via Agen et Montauban : (B, A) (A, M) (M, C)
Le plus court n'est pas- en kilomètres- celui qui demande le moins de changements.

3) Ce graphe est fortement connexe, ce qui signifie que, de tout sommet, on peut atteindre tous les autres.
Montrons le pour le sommet A :
L'ensemble des stations que l'on peut atteindre à partir du sommet A est : {B, M}

Maintenant on voit que l'ensemble des stations que l'on peut atteindre à partir du sommet A est :
(ensemble des stations que l'on peut atteindre à partir de B) U (ensemble des stations que l'on peut atteindre à partir de M) U (ensemble des stations que l'on peut atteindre à partir de A)
= {A, L} U {A,C} U {B,M}
= {A, B, C, L, M}

Cet ensemble est appelé **fermeture transitive** du sommet "A".

On montrerait de la même façon que de n'importe quelle station on peut atteindre toutes les autres et y revenir.
Le graphe est donc fortement connexe.

Section I - Ordonnancement des taches - Le graphe pert

A - Présentation de la méthode

On dit aussi " méthode du chemin critique ", en abrégé C.P.M. (critical path method).

La méthode PERT a pour origine des travaux réalisés en 1958 par le Bureau des projets spéciaux de l'U.S. Navy. L'étude prit pour nom " Program Evaluation Research Task " et, plus tard, " Program Evaluation and Review Technique ". On décida d'appliquer PERT, en octobre 1958 au programme des missiles balistiques de la flotte. Grâce à lui, on gagna - estime-t-on deux ans dans le lancement des fusées Polaris.

Le principe de la méthode est d'utiliser la théorie des graphes pour la mise au point du planning -ou calendrier- d'un ouvrage, c'est ce que l'on appelle l'ordonnancement de l'ouvrage.

L'objectif est de parvenir à un ordonnancement qui permette de réaliser le projet dans les meilleurs délais, au moindre coût en utilisant de manière optimale les ressources disponibles et en contrôlant de manière permanente, au cours de la réalisation, l'état d'avancement des travaux.

Domaine d'application :
Le domaine d'application privilégié de la méthode PERT est le secteur du bâtiment et des travaux publics. Mais on peut en rencontrer des applications dans des domaines très divers : lancement d'un produit, mise en place d'une unité de production, mise en place du traitement automatisé de l'information (informatisation de la comptabilité d'une entreprise) ...

Méthode des potentiels :
En 1958 également, en France, une équipe de la SEMA, sous la direction de Bernard Roy, a mis au point la méthode " M.P.M. " (Méthode des Potentiels METRA). Il s'agit, comme la méthode PERT, d'une méthode qui utilise la théorie des graphes en matière d'ordonnancement.

I - Tracé du graphe (représentation sagittale)

1. Une tâche est représentée par **un arc** qui joint deux sommets.

2. Chaque **sommet** représente **une étape** qui marque le début ou la fin d'une ou plusieurs tâches.
Une tâche est encadrée par deux étapes : **l'étape de queue** (origine de l'arc) et **l'étape de tête** (extrémité de l'arc).

3. Par convention, le sens des flèches est tel que le temps s'écoule de gauche à droite

A gauche du graphe, on trouve l'étape de début de l'ouvrage, qui correspond au début de toutes les tâches qui n'ont pas de précédentes (entrée du graphe).

A droite du graphe, on trouve l'étape de fin de l'ouvrage, qui correspond à la fin de toutes les tâches qui n'ont pas de suivantes (sortie du graphe).

Après avoir tracé un premier graphe au brouillon, on peut obtenir une représentation plus satisfaisante en établissant le dictionnaire des précédents, et, à partir de là, en recherchant les niveaux des sommets dans le graphe. Cette procédure est facultative si l'énoncé du problème ne le précise pas. Par contre, on s'efforcera toujours d'obtenir une représentation claire.

4. Chaque sommet est affecté d'un numéro, de telle manière que pour chaque arc le numéro de l'origine soit inférieur au numéro de l'extrémité. Lorsque la représentation sagittale est tracée, chaque tâche est désignée par le numéro des étapes qui l'encadrent.

5. On reporte sur la représentation sagittale, à côté de chaque arc, la durée des tâches.
Remarque :
Les notations préconisées dans la suite de ce chapitre ne sont pas universelles. Elles sont empruntées à K.C. LOCKYER *Introduction à l'analyse du chemin critique* - Dunod, 1969.

Dans une copie d'examen, en l'absence de toute précision dans l'énoncé, on pourra utiliser ces notations, en prenant soin d'en préciser la signification. Dans le cas contraire, il faut, bien entendu, suivre les indications de l'énoncé.

II - Dates des étapes (Algorithme de Ford)

a - Dates au plus tôt :

1. Par convention, la date au plus tôt de l'étape 1 (entrée du graphe, début de l'ouvrage) est l'instant 0.

E(1) = 0 (E : earliest)

2. La date au plus tôt de l'étape i, E (i), est la durée **du chemin de durée maximum** conduisant de l'étape 1 à l'étape i.

On inscrit les dates au plus tôt au dessus des sommets.

b - Dates au plus tard :

1. Par convention, et, sauf précision contraire, la date au plus tard de l'étape de fin de l'ouvrage (sortie du graphe) est égale à sa date au plus tôt.

L(FIN) = E(FIN) (L : latest)

2. La date au plus tard de l'étape i, L(i), est égale à la date au plus tard de l'étape de fin, diminuée de la durée **du chemin de durée maximum** conduisant de l'étape i à l'étape de fin.

On inscrit les dates au plus tard au dessous des sommets.

c - Intervalle de flottement :
Pour une étape déterminée, on appelle " intervalle de flottement " la différence entre la date au plus tard et la date au plus tôt.
Intervalle de flottement de l'étape i = L(i) - E(i)

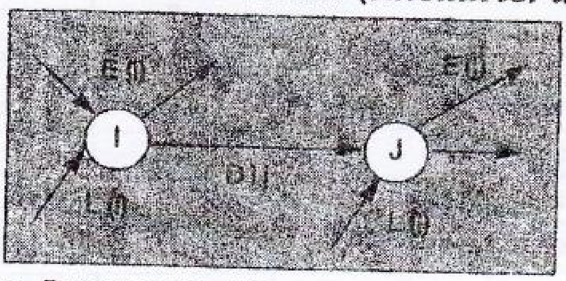
d - Chemin critique :
On appelle **chemin critique** le chemin de durée maximum entre l'entrée et la sortie du graphe.

Les tâches constituant ce chemin sont des tâches critiques. On a l'habitude de souligner le chemin critique dans la représentation sagittale. Le chemin critique est l'ensemble des tâches dont la durée conditionne la durée de l'ouvrage. Donc, on leur affectera en priorité les moyens disponibles. Au cours de l'exécution, elles feront l'objet d'une surveillance particulière.

Pour les étapes situées sur le chemin critique, E(i) = L(i) l'intervalle de flottement est nul.

Il peut y avoir plusieurs chemins critiques.

III - Date des tâches (calendrier de l'ouvrage)



a - Dates au plus tôt :
1. date de début au plus tôt
La date de début au plus tôt de la tâche Tij est égale à E(i), date au plus tôt de l'étape de queue. On la lit sur le graphe.

2. date de fin au plus tôt
La date de fin au plus tôt de Tij est égale à sa date de début au plus tôt augmentée de sa durée. On la calcule sur le calendrier.
= E(i) + Dij

Attention ! elle n'est pas nécessairement égale L (J) !

b - dates au plus tard
1. date de fin au plus tard
La date de fin au plus tard de Tij est égale à L(j), date au plus tard de l'étape de tête. On la lit sur le graphe.

2. date de début au plus tard

La date de début au plus tard de Tij est égale à sa date de fin au plus tard diminuée de sa durée. On la calcule sur le calendrier.

= L(J) - Dij

Attention ! elle n'est pas nécessairement égale à L(i) !

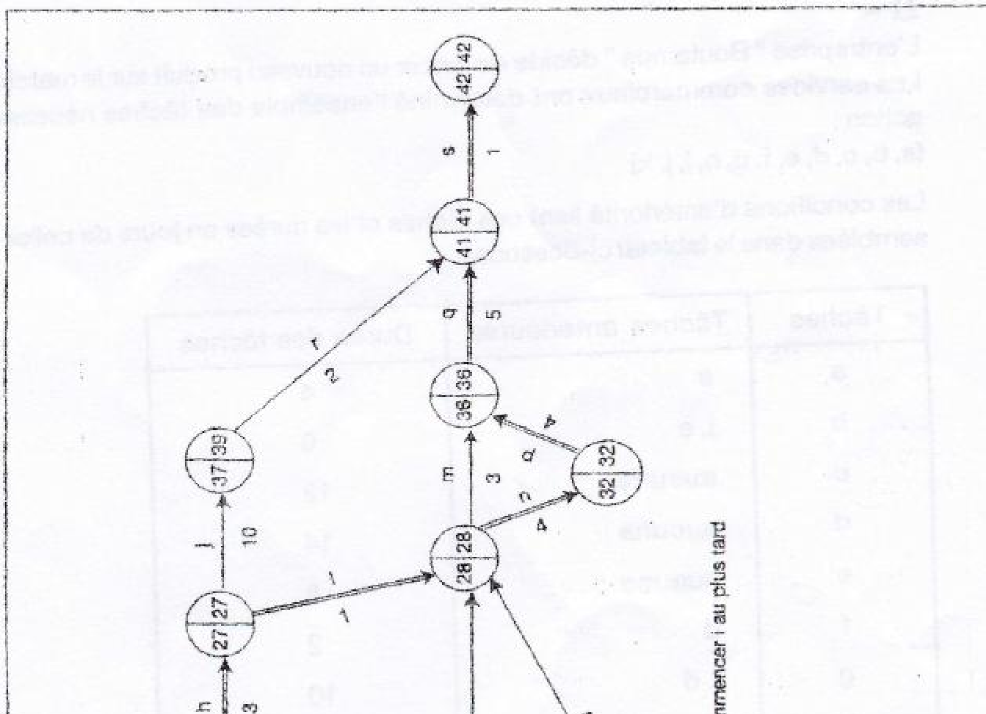
Remarque :

On a intérêt à déterminer ces quatre dates, dans l'ordre que l'on vient d'indiquer.

B - Applications

I - Analyse des différentes tâches correspondant au lancement d'une nouvelle boisson aromatisée

Désignation des tâches	Description des différentes tâches à exécuter	Durée en Semaines	Tâches antérieures
a	Etude de marché préliminaire	9	-
b	Etude de plusieurs parfums	8	a
c	Etude de plusieurs couleurs correspondant aux parfums	4	b
d	Etude de plusieurs conditionnements	8	a
e	Plan de publicité et argumentaire de vente	12	a
f	Recherche de nouveaux canaux de distribution	6	a
g	Test des parfums, couleurs et conditionnement	3	c, d
h	Dépouillement des tests et choix des produits	3	g
i	Choix des représentants, affectation de zones	4	f
j	Commande d'une nouvelle chaîne de conditionnement	10	h
l	Pré-série avec moyens actuels	1	h
m	Préparation et formation des représentants	3	l, e, i
n	Lancement du produit dans une zone test	4	l, e, i
p	Prévision des ventes et fixation du prix définitif	4	n
q	Informations des détaillants, commandes	5	m, p
r	Mise en place de la nouvelle chaîne de conditionnement	2	j
s	Mise en place du produit chez les détaillants	1	q, r



L'ensemble des tâches ne pourra être terminé au plus tôt qu'au bout de 42 semaines.

II -

L'entreprise " Boutemps " décide de lancer un nouveau produit sur le marché
Les services commerciaux ont déterminé l'ensemble des tâches nécessaires à cette action :
(a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k)

Les conditions d'antériorité liant ces tâches et les durées en jours de celles-ci sont rassemblées dans le tableau ci-dessous :

Tâches	Tâches anterieures	Durée des tâches
a	e	4
b	j, e	6
c	aucune	12
d	aucune	14
e	aucune	8
f	d	2
g	f, d	10
h	a, c, d	6
i	h, a, c, e, k, d, f,	8
j	e	12
k	f, d	2

1 - Déterminer les tâches **immédiatement** antérieures à chaque tâche.

2 - Tracer le graphe du projet par la méthode P.E.R.T. et déterminer le ou les chemins critiques en indiquant sur le graphe les dates au plus tôt et les dates au plus tard.

Les services commerciaux aimeraient connaître en quel temps minimum le lancement sera réalisé.

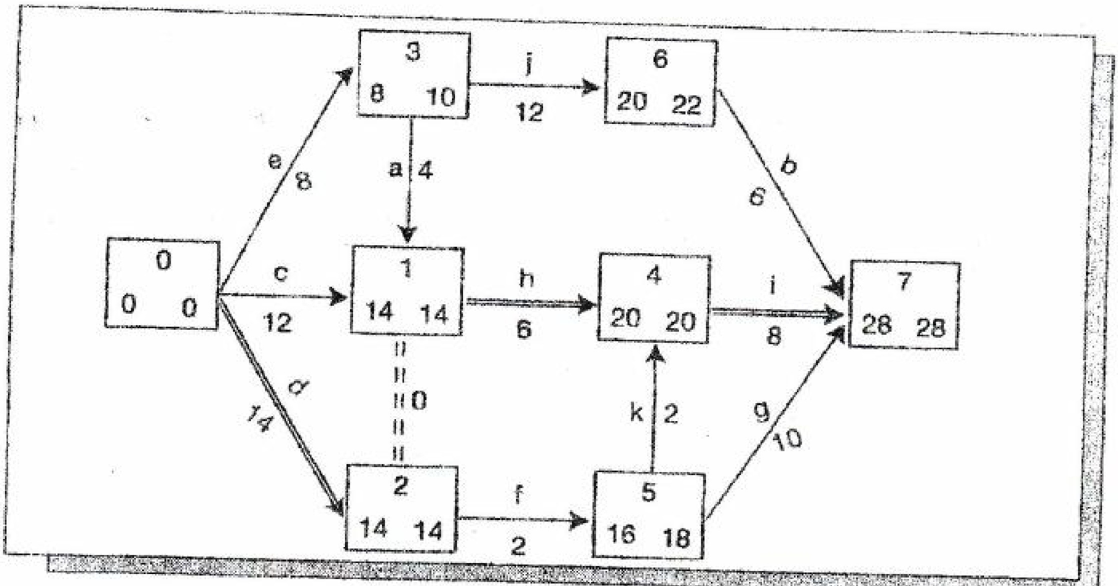
3 - Dresser un tableau des marges de flottement (marges totales) et des marges libres.

Solution :

1 - Tableau de tâches immédiatement antérieures

Tâches	Tâches antérieures	Tâches immediatement antérieures	Tâches immediatement antérieures	Tâches immediatement antérieures	Tâches à retenir
a	e	0	-	-	e
b	j, e	e, o	o	-	j
c	o	o	-	-	o
d	o	o	-	-	o
e	o	o	-	-	o
f	d	o	-	-	d
g	f, d	d, o	o	-	f
h	a, c, d	e, o	o	-	a, c, d
i	h, a, c, e, k, d, f	a, c, d, e, o, f	e, o, d	o	h, k
j	e	o	-	-	e
k	f, d	d, o	o	-	f

2 - Graphe PERT



Remarque :

Pour construire le graphe PERT, il était nécessaire de faire une tâche fictive de l'étape 2 à l'étape 1.

(tâche en pointillé sur le graphique et de durée égale à 0) pour signifier que la tâche h ne peut être commencée avant que les tâches c et d soient terminées.

Le lancement nécessitera un temps égal **au minimum** à 28 jours. Le chemin critique se compose des tâches d, h, i.

3 - Les marges libres et totales sont calculées sur les tâches non critiques

Tâches (1)	Date au plus tard terminé (2)	Date au plus tôt commencé (3)	Durée tâche (4)	Marge totale (2) - (3) - (4) = (5)	Date au plus tôt tâche suivante (6)	Marge libre (6) - (3) - (4) = 7
c	14	0	12	2	14	2
e	10	0	8	2	8	0
a	14	8	4	2	14	2
j	22	8	12	2	20	0
f	18	14	2	2	16	0
g	28	16	10	2	28	2
b	28	20	6	2	28	2
k	20	16	2	2	20	2

Section II - Recherche du chemin minimal/ algorithme de Ford

MANUPONT S. A. est implanté dans la région de M. depuis 1968. Depuis cette époque, elle a connu une croissance importante et régulière créant de gros besoins en locaux de production et en aires de stockage. Il en résulte une importante dispersion géographique des différents bâtiments de l'entreprise.

La matrice ci-dessous indique le temps en mn (temps de trajet + temps d'arrêt aux stations) que mettent les navettes " aller " pour joindre les différents points appelés A, B, ... J.

ARRIVÉE

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
A		18		10	15					
B					12					
C								5		14
D					8					
E			7				9	13	14	
F		5		6						
G									4	
H										2
I										6
J										

DEPART

1 - Etablir le dictionnaire des précédents de chaque point.

2 - Représenter le problème sous forme de graphe ordonnancé en niveaux.

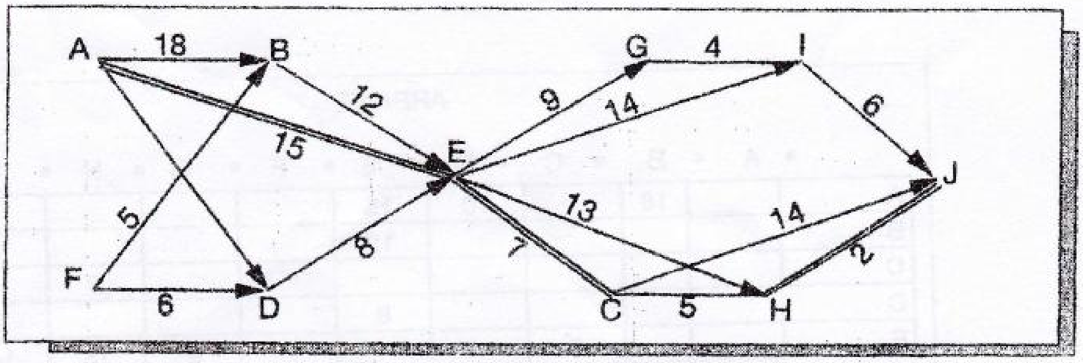
3 - Quel est le chemin que doit emprunter un employé désirant se rendre du point A au point J en un temps minimum ? Quel est ce temps ?
Pour répondre à cette question, appliquer un algorithme de recherche du chemin minimal.

Solution :

1 - Dictionnaire des tâches antérieures :

A	Ø
B	AF
C	E
D	AF
E	ABD
F	Ø
G	E
H	CE
I	EG
J	CHI

2 -



3 - Chemin minimum A, E, C, H, J

Durée du chemin minimum 29 minutes.

Niveaux	0	(A, F)
"	1	(B, D)
"	2	(E)
"	3	(C, G)
"	4	(H, I)
"	5	(J)

3.
MATHEMATIQUES II

SEQUENCE 1
REVISIONS

Cette séquence comporte un vaste programme de cours, mais il s'agit de révisions de notions qui, pour certaines, doivent être acquises depuis longtemps. Bien que nécessitant un travail sérieux et approfondi (lisez même les parties concernant des points du programme que vous pensez parfaitement connaître), elle ne devrait pas vous demander plus d'une douzaine d'heures (exercices autocorrectifs et devoir compris).

A. Algèbre

Vous trouverez ici les principaux résultats d'algèbre nécessaires à la compréhension des cours suivants. Si vous en éprouvez le besoin (mais ce ne devrait normalement pas être le cas), vous pourrez consulter la présentation complète de ces notions dans le livre "Algèbre Trigonométrie", volume 1 de la Collection du C.N.E.D. aux Editions FOUCHER.

I. Calcul algébrique

1) Egalités fondamentales

Il faut absolument savoir que, quels que soient les réels a et b,

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$
$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$
$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$
$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$
$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$

2) Racine carrée d'un nombre réel positif

Soit $a \in \mathbb{R}^+$. On appelle **racine carrée de a**, et on note $\sqrt{a}$, le nombre réel **positif** dont le carré est **a**.

Remarquez bien que :
- Pour que $\sqrt{a}$ existe, a doit être positif ;
- S'il existe, $\sqrt{a}$ est lui-même positif, **par définition.**

Par conséquent écrire, par exemple, $\sqrt{-2}$ n'a **aucun sens.**
De même, il serait faux d'affirmer que $\sqrt{4} = \pm 2$: **on a $\sqrt{4} = +2$.**

Propriétés :

• Si $a > 0$ et $b > 0$, $\sqrt{a}$ et $\sqrt{b}$ existent, et $\sqrt{a} + \sqrt{b} \neq \sqrt{a+b}$

• On ne peut écrire $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$ **que si a et b sont tous deux positifs.**

Si a et b sont tous deux négatifs, leur produit est positif et $\sqrt{ab}$ existe, mais alors $\sqrt{ab} = \sqrt{-a} \cdot \sqrt{-b}$

Ainsi, dans tous les cas où $\sqrt{ab}$ existe, on peut écrire :

$$\boxed{\sqrt{ab} = \sqrt{|a|} \cdot \sqrt{|b|}}$$

Exemple : calculer

$$E = \frac{\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)}{\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} + \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}}$$

$$E = \frac{3-2}{\dfrac{\sqrt{3}\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right) + \sqrt{2}\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)}} = \frac{1}{\dfrac{3-\sqrt{6}+\sqrt{6}+2}{3-2}} = \frac{1}{5}$$

3) Puissances d'un nombre réel

• Exposant entier naturel

Par définition, pour a réel et n dans $\mathbf{N}^*$, $a^n = \underbrace{a \times a \times \ldots\ldots \times a}_{n \text{ fois}}$

et, pour a dans $\mathbf{R}^*$, $a^0 = 1$

Propriétés : **dans la mesure où les nombres écrits existent bien,** on a :

$$\boxed{\begin{array}{ll} \left(a \times b\right)^n = a^n \times b^n & \left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n} \\ a^n \times a^p = a^{n+p} & \left(a^n\right)^p = a^{np} \\ \multicolumn{2}{c}{\dfrac{a^n}{a^p} = \begin{cases} a^{n-p}, & \text{si } n > p \\ 1, & \text{si } n = p \\ \dfrac{1}{a^{p-n}}, & \text{si } n < p \end{cases}} \end{array}}$$

• **Racine n-$^{\text{ième}}$ d'un nombre réel positif**
On étend la notion de racine carrée à un entier n tel que $n \geq 2$: soit $a \in \mathbb{R}^+$; on appelle racine n-$^{\text{ième}}$ de a, et on note $\sqrt[n]{a}$, le nombre réel **positif** dont la puissance n-$^{\text{ième}}$ est a.

On peut faire les mêmes remarques pour $\sqrt[n]{a}$ que pour $\sqrt{a}$.

• **Exposant entier relatif**
Par définition, pour **n dans N et a dans R***, on pose $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$

Alors, pour n dans **Z**, on peut réécrire les mêmes propriétés que pour un exposant entier naturel (n dans **N**). La dernière propriété s'écrit plus simplement : pour n et p dans **Z** (quel que soit leur ordre) :

$$\frac{a^n}{a^p} = a^{n-p} \text{ si } a \in \mathbb{R}^*$$

• **Exposant rationnel**
Par définition, **si $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}^*$ et $a \in \mathbb{R}^*_+$**, on pose : $a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$

Alors, pour n et p dans Q, si a et b sont dans $\mathbb{R}^*_+$, on peut encore écrire les mêmes propriétés :

$$(a \times b)^n = a^n \times b^n \qquad \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

$$a^n \times a^p = a^{n+p} \qquad (a^n)^p = a^{np}$$

$$\frac{a^n}{a^p} = a^{n-p}$$

Exemple : Calculez $y = \dfrac{\sqrt[5]{81} \times \sqrt[15]{3} \times \sqrt[3]{9} \times \sqrt{12}}{\left(\sqrt[3]{\sqrt{3}}\right)^2 \times \sqrt{18} \times \sqrt[5]{27} \times \sqrt{6}}$

on a : $y = \dfrac{\sqrt[5]{3^4} \times \sqrt[15]{3} \times \sqrt[3]{3^2} \times \sqrt{2^2 \times 3}}{\left(\sqrt[3]{\sqrt{3}}\right)^2 \times \sqrt{2 \times 3^2} \times \sqrt[5]{3^3} \times \sqrt{2 \times 3}}$

Utilisons la définition des exposants rationnels :

$$y = \frac{3^{4/5} \times 3^{1/15} \times 3^{2/3} \times \left(2^2 \times 3\right)^{1/2}}{\left[\left(3^{1/2}\right)^{1/3}\right]^2 \times \left(2 \times 3^2\right)^{1/2} \times 3^{3/5}\left(2 \times 3\right)^{1/2}}$$

$$= \frac{3^{4/5} \times 3^{1/15} \times 3^{2/3} \times \left(2^2\right)^{1/2} \times 3^{1/2}}{\left(3^{1/2}\right)^{2/3} \times 2^{1/2} \times \left(3^2\right)^{1/2} \times 3^{3/5} \times 2^{1/2} \times 3^{1/2}}$$

On peut simplifier par $3^{1/2}$:

$$y = \frac{3^{4/5} \times 3^{1/15} \times 3^{2/3} \times 2}{3^{1/3} \times 2^{1/2} \times 3 \times 3^{3/5} \times 2^{1/2}}$$

$$= \frac{3^{\left(4/5 + 1/15 + 2/3\right)} \times 2}{3^{1/3} \times 2^{1/2} \times 3 \times 3^{3/5} \times 2^{1/2}}$$

$$= \frac{3^{23/15} \times 2}{3^{29/15} \times 2} = 3^{\left(23/15 - 29/15\right)} = 3^{-2/5}$$

$$y = \frac{1}{3^{2/5}} \qquad \boxed{y = \frac{1}{\sqrt[5]{9}}} \qquad (\approx 0{,}644397)$$

II. Equations et inéquations du second degré

1) Equations du second degré

Il s'agit de résoudre des équations de la forme (E) :

$ax^2 + bx + c = 0$, avec $a \neq 0$

On calcule $\Delta = b^2 - 4ac$ (**discriminant** de l'équation (E), et on applique la règle **générale** suivante :

- Si $\Delta < 0$, pas de solution : $S = \varnothing$
- Si $\Delta = 0$, une solution "double", $x' = x'' = -\dfrac{b}{2a}$: $S = \left\{-\dfrac{b}{2a}\right\}$
- Si $\Delta > 0$, deux solutions distinctes :

$x' = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ $\qquad x'' = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$: $S = \{x', x''\}$

Pour simplifier le calcul de Δ

• On peut chercher une équation équivalente à (E) qui ait des **coefficients plus simples** (entiers, si possible).

Exemples :

a) Soit à résoudre $0{,}1\,x^2 + 0{,}8\,x + \frac{1}{2} = 0$

En remarquant que $\frac{1}{2} = 0{,}5$ et en multipliant tous les coefficients par 10, on obtient l'équation équivalente $x^2 + 8x + 5 = 0$, dont le discriminant sera beaucoup plus simple à calculer....

b) Soit à résoudre $\frac{2}{3}x^2 - \frac{5}{4}x + \frac{1}{6} = 0$

En multipliant tous les coefficients par 12 (P.P.C.M. de 3, 4 et 6), on obtient $8x^2 - 15\,x + 2 = 0$

• **Si b, entier, est pair,** on aura intérêt à poser $b = 2b'$ et à faire les calculs à l'aide du **discriminant réduit** Δ'.

$\Delta' = b'^2 - ac$. Dans le cas où il existe des solutions ($\Delta' \geq 0$), on les obtient en employant les formules générales dans lesquelles on remplace b par b', Δ par Δ', et 2a par a (voir exercices).

Attention : face à une équation du second degré, il faut **réfléchir** avant de vous "lancer" dans le calcul de D. En effet, de nombreux **cas particuliers** se résolvent sans le secours du discriminant, et il serait alors très maladroit de le calculer.

Voyons quelques-uns de ces cas qu'il faut savoir reconnaître.

a) c = 0 $\quad P(x) = ax^2 + bx = x\,(ax + b)$: P(x) n'est pas un trinôme du second degré, mais un binôme. Alors les racines sont évidentes :

$$S = \left\{0,\ -\frac{b}{a}\right\}$$

b) b = 0 $\quad P(x) = ax^2 + c = a(x^2 + \frac{c}{a})$: autre cas de binôme du second degré.

• Si $\frac{c}{a} > 0$, pas de solution : $S = \emptyset$

• Si $\frac{c}{a} \leq 0$, $S = \left\{-\sqrt{-\frac{c}{a}},\ \sqrt{-\frac{c}{a}}\right\}$

c) a + b + c = 0 $\quad$ Alors $P(1) = 0$ donc 1 est solution de (E). l'autre solution est égale au produit des solutions, c'est-à-dire $\frac{c}{a}$ (voir plus bas si vous ne vous souvenez pas de ce résultat).

$$S = \left\{1,\ \frac{c}{a}\right\}$$

d) a - b + c = 0 (qui s'écrit encore b = a + c). Alors P (-1) = 0 et -1 est **solution** de (E) (posons X' = -1).
Le produit des solutions est donc $p = -x''$, d'où $x'' = -\frac{c}{a}$ et $S = \left\{ -1, -\frac{c}{a} \right\}$

e) Enfin, si **P(x) peut se factoriser facilement** (ou, a fortiori, s'il est donné comme un produit de facteurs !) ses racines sont alors évidentes.
C'est le cas, par exemple, si on peut reconnaître en P(x) le développement d'un carré.

Exemple : soit à résoudre $P(x) = 2x^2 + 8x + 8 = 0$
$P(x) = 2(x^2 + 4x + 4) = 2(x + 2)^2$
L'équation a donc une solution double. $S = \{-2\}$.

Remarque : Même s'il y a parfois confusion entre ces deux termes, on parle plutôt des **racines du polynôme** P(x) et des **solutions de l'équation** P(x) = 0.

Pour le même polynôme P(x), il s'agit évidemment des mêmes nombres...

Produit et somme des racines d'un polynôme du second degré.
Supposons que P(x), tel que $P(x) = ax^2 + bx + c$, ait au moins une racine. Alors,

- Le produit des racines est $x'x'' = p = \frac{c}{a}$
- La somme des racines est $x' + x'' = S = -\frac{b}{a}$

Conséquences :
- Si on connaît la somme s et le produit p de deux nombres, ces nombres sont solutions de l'équation $x^2 - sx + p = 0$.
- Après avoir résolu une équation du second degré et trouvé des solutions x' et x'', il est bon de calculer rapidement x' + x'' et x'x'' et de les comparer à $-\frac{b}{a}$ et $\frac{c}{a}$ de manière à **déceler des erreurs éventuelles** dans le calcul de x' et x''.

2) Equations se ramenant au second degré

a) Equation bicarrée

On appelle équation bicarrée toute équation qui peut s'écrire sous la forme
$ax^4 + bx^2 + c = 0$, avec $a \in \mathbf{R}^*$, $b \in \mathbf{R}$, $c \in \mathbf{R}$, $x \in \mathbf{R}$.

Soit l'équation bicarrée (1) : $x^4 + x^2 - 1 = 0$ (x inconnue réelle).
Posons $X = x^2$. Les systèmes

$$\begin{cases} X = x^2 \\ x^4 + x^2 - 1 = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} X = x^2 & (3) \\ X^2 + X - 1 = 0 & (2) \end{cases} \quad \text{sont équivalents}$$

Résolvons (2) $\Delta = 5$: solutions $X' = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ et $X'' = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$

Mais l'équation (3), d'inconnue x, n'a de solution que pour X vérifiant $X \geq 0$.

Or $\frac{-1-\sqrt{5}}{2} < 0$

$$x^2 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \Leftrightarrow x = -\sqrt{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}} \text{ ou } x = \sqrt{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}$$

L'ensemble des solutions de l'équation bicarrée est donc :

$$\boxed{S = \left\{-\sqrt{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}, \sqrt{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}\right\}}$$

b) Equation du troisième degré

Propriété : soit P(x) un polynôme de degré n ($n \in \mathbb{N}^*$) :
$P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0$
Si a est racine de P(x), alors $(x - \alpha)$ peut être mis en facteur dans P(x).

En particulier, pour $n = 3$, si α est racine de P(x), ce polynôme peut se mettre sous la forme $(x - \alpha)(ax^2 + bx + c)$ où a, b et c sont des réels ($a \neq 0$)

Exemple : soit l'équation (E) : $3x^3 + 2x^2 - 6x + 1 = 0$ ($x \in \mathbb{R}$)
On remarque que 1 est solution de cette équation car $3 + 2 - 6 + 1 = 0$.
On peut donc écrire :
$3x^3 + 2x^2 - 6x + 1 = (x - 1)(ax^2 + bx + c)$

Pour déterminer le trinôme $ax^2 + bx + c$, on dispose de deux méthodes :

1e méthode : $(x - 1)(ax^2 + bx + c) = ax^3 + (b - a)x^2 + (c - b)x - c$

On doit donc avoir :
$\forall x \in \mathbb{R}, 3x^3 + 2x^2 - 6x + 1 = ax^3 + (b - a)x^2 + (c - b)x - c$

Or deux polynômes sont identiques si, et seulement si, leurs coefficients sont égaux.
Soit :

$$\begin{cases} a = 3 \\ b - a = 2 \\ c - b = -6 \\ -c = 1 \end{cases}$$

D'où : $a = 3$; $b = 5$; $c = -1$

On obtient donc : $3x^3 + 2x^2 - 6x + 1 = (x - 1)(3x^2 + 5x - 1)$

2e méthode :

On réalise la division euclidienne de $3x^3 + 2x^2 - 6x + 1$ par $x - 1$.

Soit :

$$\begin{array}{l|l}
3x^3 + 2x^2 - 6x + 1 & x - 1 \\
\underline{-3x^3 + 3x^2} & \overline{3x^2 + 5x - 1} \\
0 + 5x^2 - 6x + 1 & \\
\quad \underline{-5x^2 - 5x} & \\
\quad\quad 0 - x \quad + 1 & \\
\quad\quad\quad \underline{+x \quad - 1} & \\
\quad\quad\quad 0 \; + \; 0 &
\end{array}$$

On obtient donc :

$3x^3 + 2x^2 - 6x + 1 \;=\; (x - 1)(3x^2 + 5x - 1)$

Revenons à l'équation du troisième degré. Cette équation s'écrit donc :

$(x - 1)(3x^2 + 5x - 1) \;=\; 0$

Un produit de facteurs n'étant nul que si et seulement si un des facteurs est nul.

(E) $\Leftrightarrow (x = 1$ ou $3x^2 + 5x - 1 = 0)$

$x - 1 = 0 \;\Leftrightarrow\; x - 1$

et $3x^2 + 5x - 1 = 0 \;\Leftrightarrow\; \left(x = \dfrac{-5 - \sqrt{37}}{6} \;\text{ ou }\; x = \dfrac{-5 + \sqrt{37}}{6}\right)$

L'équation donnée (du troisième degré) admet pour ensemble de solutions :

$$\boxed{S = \left\{1, \dfrac{-5 - \sqrt{37}}{6}, \dfrac{-5 + \sqrt{37}}{6}\right\}}$$

Remarque : La résolution d'une équation du troisième degré nécessite donc la connaissance a priori d'une de ses solutions. Si vous devez résoudre une telle équation, ou bien l'énoncé vous en fournira une solution, ou bien vous la chercherez parmi les nombres 0, 1, -1, 2, -2, 3 et -3.

c) Equation irrationnelle

Exemple : soit à résoudre dans $\mathbb{R}$: $\sqrt{x + 3} \;=\; x + 1$ (E)

Contrairement aux équations polynomiales, définies sur tout $\mathbb{R}$, (E) n'a de sens que si $\sqrt{x + 3}$ en a un, c'est-à-dire pour $x \geq -3$: **son ensemble de définition est D = $[-3, +\infty[$**

Le premier membre de (E) ($\sqrt{x + 3}$) étant positif, cette équation ne peut avoir de solution vérifiant $x + 1 < 0$. Nous pouvons donc poser $x + 1 \geq 0$ sans altérer le problème, or on sait que, **pour** $a \in \mathbb{R}_+$ **et** $b \in \mathbb{R}_+$, $a = b \Leftrightarrow a^2 = b^2$

Par conséquent, **dans D,** (E) est équivalente au système

$$\begin{cases} x+1 \geq 0 \\ x+3 = (x+1)^2 \quad (E') \end{cases}$$

$(E') \Leftrightarrow x+3 = x^2+2x+1 \Leftrightarrow x^2+x-2 = 0$

$\Leftrightarrow x = 1$ ou $x = -2$

-2 ne vérifie pas $x+1 \geq 0$, donc n'est pas solution de (E).
1 vérifie bien $x+1 \geq 0$, et $1 \in D$. On peut conclure :

$\boxed{S = \{1\}}$

3) Inéquations du second degré

Résoudre une telle inéquation revient à trouver le signe d'un polynôme du second degré.
$P(x) = ax^2+bx+c$.

Il faut savoir que :

- Si P(x) n'a pas de racine, il est toujours du signe de son coefficient a.
- Si P(x) a une racine double, il est du signe de a sauf pour cette racine (pour laquelle il est nul ; ...)
- Si P(x) a deux racines distinctes x' et x", il peut se mettre sous la forme $a(x-x')(x-x'')$, et son signe est donné par le tableau suivant :

x	$-\infty$		x'		x''		$+\infty$
P(x)		signe de a	0	signe de (-a)	0	signe de a	

4) Inéquations se ramenant au second degré

a) Exemple : résoudre, dans **R**, l'inéquation $\frac{4x-5}{2x+3} \geq 0$

Posons $f(x) = \frac{4x-5}{2x+3}$

Ce rapport n'est pas défini pour $2x+3 = 0$:

$D = \mathbf{R} \setminus \left\{-\frac{3}{2}\right\}$

Dans D, le signe de f(x) est celui de $(4x-5)(2x+3)$, forme factorisée d'un trinôme dont les racines sont $\frac{5}{4}$ et, $-\frac{3}{2}$ et dont le coefficient a, $4 \times 2 = 8$ est positif.
D'où le tableau :

x	$-\infty$		$-\frac{3}{2}$		$\frac{5}{4}$		$+\infty$
f(x)		+	||	-	0	+	

où la **double barre verticale, indispensable,** signifie que $-\frac{3}{2} \notin D$

On déduit de ce tableau :

$$\boxed{S = \left]-\infty, -\frac{3}{2}\right[\cup \left[\frac{5}{4}, +\infty\right[}$$

b) Inéquation bicarrée

Soit, dans $\mathbb{R}$, l'inéquation : $x^4 - 13x^2 + 36 \leq 0$

Posons : $E(x) = x^4 - 13x^2 + 36$

En posant $X = x^2$, on obtient : $x^4 - 13x^2 + 36 = X^2 - 13X + 36$

Or $X^2 - 13x + 36 = 0 \Leftrightarrow (X = 4 \text{ ou } X = 9)$

On peut donc écrire : $X^2 - 13X + 36 = (X - 4)(X - 9)$

Et donc, puisque $X = x^2$: $E(x) = (x^2 - 4)(x^2 - 9)$

L'inéquation peut donc s'écrire : $(x^2 - 4)(x^2 - 9) \leq 0$

En utilisant la règle du signe du trinôme, on obtient le tableau suivant :

x		-3		-2		+2		+3	
$x^2 - 4$	+	|	+	0	-	0	+	|	+
$x^2 - 9$	+	0	-	|	-	|	-	0	+
$E(x)$	+	0	-	0	+	0	-	0	+

L'ensemble des solutions de cette inéquation bicarrée est donc :

$$\boxed{S = [-3, -2] \cup [2, 3]}$$

c) Inéquation du troisième degré

Soit, dans $\mathbb{R}$, l'inéquation : $x^3 - 5x + 2 < 0$.

Posons : $P(x) = x^3 - 5x + 2$

On constate que : $P(2) = 0$. Donc on peut mettre en facteur $(x - 2)$ dans $P(x)$.

Réalisons la division euclidienne de $x^3 - 5x + 2$ par $x - 2$

$$\begin{array}{l|l}
x^3 - \quad 5x + 2 & x - 2 \\
\underline{-x^3 + 2x^2} & \overline{x^2 + 2x - 1} \\
\quad 0 + 2x^2 - 5x + 2 & \\
\quad\quad \underline{-2x^2 + 4x} & \\
\quad\quad\quad 0 \; - x + 2 & \\
\quad\quad\quad\quad \underline{+x - 2} & \\
\quad\quad\quad\quad 0 + 0 &
\end{array}$$

On obtient alors :
$P(x) = (x - 2)(x^2 + 2x - 1)$
L'inéquation donnée est donc équivalente à :
$(x - 2)(x^2 + 2x - 1) < 0$

En utilisant la règle du signe du trinôme, on établit le tableau suivant

x		$-1-\sqrt{2}$		$-1+\sqrt{2}$		2	
$x - 2$	$-$		$-$		$-$	0	$+$
$x^2 + 2x - 1$	$+$	0	$-$	0	$+$		$+$
$P(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

L'ensemble des solutions de cette inéquation est donc :

$$S = \left]-\infty, -1-\sqrt{2}\right[\cup \left]-1+\sqrt{2}, 2\right[$$

d) Inéquation irrationnelle

Exemple : résoudre, dans $\mathbf{R}$, $\sqrt{x+3} > x + 1$ $\quad D = [-3, +\infty[$.

Dans D, si $x + 1 < 0$, l'inéquation est vérifiée puisque $\sqrt{x+3} \geq 0$.
Comme $x + 1 < 0 \Leftrightarrow x < -1$, nous en déduisons que $[-3, -1[\subset S$

Si on suppose maintenant $x + 1 \geq 0$, les deux membres de l'inéquation sont positifs. Or on sait que, **pour** $\mathbf{a} \in \mathbf{R}_+$ **et** $\mathbf{b} \in \mathbf{R}_+$,
$a > b \Leftrightarrow a^2 > b^2$.
$x + 3 > (x + 1)^2 \Leftrightarrow x^2 + x - 2 < 0 \Leftrightarrow (x - 1)(x + 2) < 0$

Le coefficient du terme du second degré, 1, étant positif, le trinôme factorisé $(x - 1)(x + 2)$ est négatif pour $x \in]-2 ; 1[$. Comme on a supposé $x + 1 \geq 0$ (ce qui entraîne $x \in D$), on en déduit que $[-1 ; 1[\subset S$.

Finalement, $S = [-3, -1[\cup [-1 ; 1[$:

$$\boxed{S = [-3 ; 1[}$$

Remarque : la résolution d'inéquations peut amener à utiliser les propriétés de la relation d'ordre total de $\mathbf{R}$, notée $\leq$.
Il ne faut pas oublier que cette relation est :

• **compatible avec l'addition :**

Si x, y et z sont des réels,
$x \leq y \Rightarrow x + z \leq y + z$

• non compatible avec la multiplication dans R

Ainsi, 2 < 3. Pourtant on n'a pas 2 (-1) < 3 (- 1) puisque, au contraire, - 3 < - 2. Ceci tient au fait que - 1 est négatif.

Vous savez que :

Si x et y sont des réels,
si $z \in \mathbb{R}_+$, alors $x \leq y \Rightarrow xz \leq yz$
si $z \in \mathbb{R}_-$ alors $x \leq y \Rightarrow yz \leq xz$

3.
MATHEMATIQUES II

EXERCICES

EXERCICES PARTIE A

I. Effectuer les calculs suivants :

$$A = \left(2^{-2} \times 3^{4}\right)^{-1} \times 16 \times \left(2 \times 3^{2}\right)^{2}$$

$$B = \frac{\sqrt{15}-1}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} - \frac{\sqrt{15}+1}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$$

$$C = \frac{\sqrt[5]{4} \times \sqrt[4]{64} \times \left(\sqrt[3]{\sqrt{2}}\right)^{4}}{\sqrt[3]{\sqrt{32}}}$$

II. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1) $-6x^2 + 3x = 0$ 2) $4x^2 + 9 = 0$ 3) $-25x^2 + 16 = 0$

III. Résoudre, dans $\mathbb{R}$, l'équation (E) :

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2} = 0$$

IV. Résoudre, dans $\mathbb{R}$, l'équation

$x^4 + x^2 - 12 = 0$

V. Résoudre, dans $\mathbb{R}$, les équations suivantes :

1) $2x^2 - 2x\sqrt{6} + 3 = 0$

2) $x^3 - 5x - 4 = 0$

3) $2x + 1 + \sqrt{-7x-5} = 0$

4) $\sqrt{2x+5} - \sqrt{x-1} = 1$

VI. Résoudre, dans $\mathbb{R}$, l'inéquation

$x^2 - 6x + 8 > 0$

VII. Résoudre, dans $\mathbb{R}$, les inéquations suivantes :

1) $x^3 - 4x + 3 \leq 0$

2) $x^4 + 3x^2 - 4 < 0$

3) $\dfrac{x+5}{3-x} - \dfrac{2x+1}{x+2} \geq \dfrac{23}{4}$

4) $\left(x^2 + 3x + 5\right)^2 > 16$

5) $\sqrt{2x+5} > x - 5$

B. Généralités sur les fonctions numériques

I. Définitions fondamentales

a) Vous trouverez à plusieurs reprises les **symboles ∀ (quantificateur universel) et ∃ (quantificateur existentiel).**

Une écriture de la forme **∀ x ∈ E, P(x)** (où P(x) est une proposition dépendant de x) se lit : " la proposition P est vraie pour tout élément x de l'ensemble E ".

Par exemple : $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $\sqrt{x^2} = |x|$ exprime que, pour tout nombre réel positif x, la racine carrée de x^2 est égale à la valeur absolue de x (et cette proposition est bien vraie).

$\forall x \in \mathbb{Z}$, $x < 0$ est une proposition fausse car elle exprime que tout entier relatif est strictement négatif (or on sait qu'il existe des entiers relatifs positifs, à savoir tous les entiers naturels).

Une écriture de la forme **∃ x ∈ E, P(x)** se lit : " il existe au moins un élément x de l'ensemble E, pour lequel la proposition P est vraie ".

Par exemple : $\exists x \in \mathbb{Z}$, $x < 0$ exprime qu'il existe au moins un entier relatif qui soit strictement négatif. Cette proposition est exacte : nous savons que parmi les entiers relatifs, il en existe qui sont strictement négatifs. De même est vraie la proposition $\exists x \in \mathbb{Z}$, $x \geq 0$ car tous les entiers naturels, qui sont des éléments de $\mathbb{Z}$, sont positifs, donc il existe " au moins un " (en fait, une infinité) entier relatif positif.

En revanche, $\exists x \in \mathbb{Q}$, $x = \sqrt{2}$ est une proposition fausse car elle exprime qu'il existe un nombre rationnel égal à $\sqrt{2}$, alors que nous savons que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Il est important que vous compreniez le sens de ces symboles, puisque vous les rencontrerez. Mais, leur maniement étant assez délicat, **il est préférable que vous ne les employiez pas vous-même.** Ecrivez en toutes lettres : " pour tout x élément de E,... " ou " il existe au moins un élément x de E tel que... "

b) Les conventions changent d'un auteur à l'autre pour la notation de l'ensemble de définition d'une fonction f. Vous trouverez indifféremment D_f ou $\mathcal{D}_f$ ou même, s'il n'y a pas de confusion possible, D ou $\mathcal{D}$.

Vous pouvez également trouver à la place de l'expression " ensemble de définition " l'ancienne expression : " domaine de définition ".

2) Précisions

a) On symbolise le fait qu'une fonction numérique f a pour ensemble de départ E (partie de $\mathbb{R}$), pour ensemble d'arrivée F (partie de $\mathbb{R}$), et fait correspondre à un réel x de E le réel f(x) de F par :

$$\boxed{\begin{array}{l} f : E \to F \\ \quad x \mapsto f(x) \end{array}}$$

Vous remarquerez que les deux flèches employées ne sont pas identiques. Il ne faut pas les utiliser l'une pour l'autre.

Exemple : la fonction racine carrée de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est symbolisée par

$$\begin{array}{l} f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ \quad x \mapsto \sqrt{x} \end{array}$$

Remarquons que ce n'est pas une application car $\sqrt{x}$ n'a de sens que pour $x \geq 0$: $D_f = \mathbb{R}_+$.

b) Une fonction n'est parfaitement déterminée que si on connaît non seulement l'expression de f(x) en fonction de x, mais aussi ses ensembles de départ et d'arrivée. Ainsi, les fonctions

$$\begin{array}{l} f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ \quad x \mapsto \sqrt{x} \end{array} \qquad \begin{array}{l} f_2 : [1 \ ; \ 9] \to \mathbb{R} \\ \quad x \mapsto \sqrt{x} \end{array} \qquad \begin{array}{l} f_3 : [1 \ ; \ 9] \to [2 \ ; \ 3] \\ \quad x \mapsto \sqrt{x} \end{array}$$

sont différentes

Nous venons de voir que f_1 n'est pas une application.

f_2 en est une car tout x réel tel que $1 \leq x \leq 9$ admet une racine carrée dans R.

f_3 n'est pas une application car la racine carrée d'un nombre réel x n'appartient à [2 ; 3] que si x appartient à [4 ; 9], donc D_{f_3} = n'est pas égal à l'ensemble de départ de f_3 ([1 ; 9]).

II. composition d'applications. Application réciproque d'une bijection

1) Composition d'applications

a) $f \circ g$ se lit " f rond g ".

b) Bien qu'on parle indifféremment dans ce paragraphe, de " fonctions " et d'" applications ", on limitera en fait l'opération de composition aux **applications.**

Donc, pour démontrer que $g \circ f$ existe, il faudra montrer que f et g sont des applications et que l'ensemble des valeurs de f (f <E>) est inclus dans l'ensemble de départ de g.

Si on vous demande de déterminer une application de la forme $f \circ g$, il faut bien sûr calculer $(f \circ g)(x)$, mais il est également essentiel de **préciser clairement les ensembles de départ et d'arrivée de $f \circ g$**, puisque nous avons vu ci-dessus qu'une fonction n'est parfaitement déterminée que lorsqu'on connaît ces ensembles.

2) Bijections - Applications réciproques

a) On dit que l'application f **de E vers F** est une **bijection** si tout élément de F a un antécédent et un seul par f.

Alors la relation de F vers E qui, à tout élément y de F, associe son antécédent x par f ($x \in E$) est une **application appelée application réciproque de f** et notée f^{-1}.

$f: E \to F$ $\qquad\qquad$ $f^{-1}: F \to E$

$x \mapsto y = f(x)$ $\qquad\qquad$ $y \mapsto x = f^{-1}(y)$

Alors $f \circ f^{-1}$ et $f^{-1} \circ f$ existent, puisque f et f^{-1} sont des applications et que l'ensemble d'arrivée de f est l'ensemble de départ de f^{-1} et inversement.

Déterminons $f \circ f^{-1}$, application de F vers F. Soit y un élément quelconque de F, et x son antécédent par f.

$(f \circ f^{-1})(y) = f[f^{-1}(y)] = f(x) = y$

Donc $f \circ f^{-1}$ est l'identité sur F (application noté Id_F).

De même, si x est un élément quelconque de E et y son image par f :

$(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}[f(x)] = f^{-1}(y) = x.$ $\qquad$ Donc $f^{-1} \circ f = Id_E$

EXERCICES PARTIE B

I. Donner les ensembles de définition des fonctions suivantes :

1) $f_1 : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$

$x \longmapsto \frac{1}{\sqrt{x-1}}$

2) $f_2 : [-1;0] \to \mathbf{R}$

$x \longmapsto \frac{1}{\sqrt{x-1}}$

3) $f_3 : [-1;3] \to \mathbf{R}$

$x \longmapsto \frac{1}{\sqrt{x-1}}$

4) $f_4 : \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}^+$

$x \longmapsto x - 2$

II. Soit

$f : \mathbf{R}^{*+} \to \mathbf{R}^{*+}$ et $g : \mathbf{R}^{*+} \to \mathbf{R}^{*+}$

$x \longmapsto \sqrt{x}$ $\qquad$ $x \longmapsto \frac{2}{x}$

1) $g \circ f$ et $f \circ g$ existent-elles ?

2) Calculer, pour tout x réel strictement positif, $(g \circ f)(x)$ et $(f \circ g)(x)$. A-t-on $f \circ g = g \circ f$?

III. Montrer que, si f est une bijection, f^{-1} est aussi une bijection.

IV. On suppose que f est une bijection de E dans F. Montrer que, si g est l'application réciproque de f, alors f est l'application réciproque de g.

C. Suites arithmétiques et suites géométriques

Vous pouvez reprendre vos cours de Première et Terminale.

I. Suites arithmétiques

Il faut **savoir** qu'on dit qu'une suite est **croissante** si, pour tout n élément de D tel que n + 1 appartienne à D, $u_{n+1} \geq u_n$.

De même, (u_n) est **décroissante** si, pour tout n de D tel que n + 1 appartienne à D, $u_{n+1} \leq u_n$.

On parle de croissance (ou décroissance) **stricte** si les inégalités sont strictes.

Principaux résultats (à connaître parfaitement) :
Si u_1 est le premier terme d'une suite arithmétique de raison r,

pour $n \geq 1$,
$$\left|\begin{array}{l} u_{n+1} = u_n + r \\ s_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n = \dfrac{n(u_1 + u_n)}{2} \\ u_n = u_1 + (n-1)r \end{array}\right.$$

Soyez attentif(ve) à l'indice du premier terme de la suite : si c'est 0, les n premiers termes ne sont pas $u_1, u_2 \ldots u_n$ mais $u_0, u_1, \ldots u_{n-1}$.

II. Suites géométriques

Variations d'une suite géométrique.

Si $q > 1$,	si $u_{n_0} > 0$,	alors	(u_n)	croissante	
	si $u_{n_0} < 0$,	alors	(u_n)	décroissante	
Si $0 < q < 1$, ces résultats sont inversés.					
Si $q = 1$,	pour tout n de D, $u_n = u_{n_0}$: (u_n) est stationnaire				
Si $q < 0$, les signes de deux termes consécutifs de la suite sont différents : (u_n) est alternée.					

Principaux résultats (à connaître parfaitement) :
Si u_1 est le premier terme d'une suite géométrique de raison q ($q \neq 1$), pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_{n+1} = qu_n$$
$$u_n = q^{n-1} u_1$$
$$s_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n = u_1 \frac{1-q^n}{1-q}$$

De même que pour les suites arithmétiques, il faut être attentif à l'indice du premier terme de la suite pour déterminer si u_n est le n+1-ième terme.

EXERCICES PARTIE C

I. Déterminer la raison d'une suite arithmétique (U_n), définie sur **N***, dont le troisième terme est $\frac{19}{4}$ et le sixième 7.

Trouver le premier terme.

II. Le premier terme d'une suite arithmétique est 5, le dernier -21, et la somme -88. Quel est le nombre de ses termes et quelle est sa raison ?

III. Une maison a été achetée 300 000 F. Elle doit être payée en 2 ans par traites mensuelles. Les traites forment les 24 termes d'une suite arithmétique de raison -500 F. Calculer le montant de la première traite.

IV. Déterminer la raison d'une suite géométrique définie sur **N*** dont le troisième terme est 3 et le sixième 81.

Calculer son premier terme.

V. Quel est le nombre de termes de la suite géométrique de raison -2 et de premier terme 3 dont la somme des termes est 33 ?

VI. Une dette est réglée de la façon suivante :

premier versement mensuel : 100 F ;

chaque versement mensuel est le double du versement précédent.

Quel est le montant du dixième versement ?

Quel est le montant de la dette s'il y a 10 versements ?

MATHEMATIQUES II

CORRIGÉS DES EXERCICES

PARTIE A

I. Vous avez dû trouver :

$A = 256$

$B = 2\sqrt{5}$

$C = 2^{\frac{26}{15}} = 2\sqrt[15]{2^{11}} \approx 3{,}3249516$

En cas d'erreur, refaites vos calculs.

II. 1) $-6x^2 + 3x = 0 \Leftrightarrow x(-6x + 3) = 0$

$$\boxed{S = \left\{0, \frac{1}{2}\right\}}$$

2) $4x^2 + 9 = 0$ Le premier membre est la somme d'un nombre positif ($4x^2$) et d'un nombre strictement positif (9). Il est donc lui-même strictement positif : il ne peut s'annuler.

$$\boxed{S = \varnothing}$$

3) $-25x^2 + 16 = 0$ Le premier membre est une différence de carrés. Une identité remarquable nous permet donc de le factoriser : $16 - 25x^2 = (4 - 5x)(4+5x)$.
Ce produit de facteurs est nul si et seulement si $4 - 5x = 0$ ou $4 + 5x = 0$

$$\boxed{S = \left\{-\frac{4}{5}, \frac{4}{5}\right\}}$$

III. Résolution de l'équation (E) :

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2} = 0$$

$D = \mathbb{R}^* \setminus \{-2, -1\}$

Dans D, (E) peut s'écrire :

$$\frac{(x+1)(x+2) + x(x+2) + x(x+1)}{x(x+1)(x+2)} = 0$$

On sait que, si $D \neq 0$, $\frac{N}{D} = 0 \Leftrightarrow N = 0$

Calculons donc le numérateur du premier membre de (E) :

$N = x^2 + 3x + 2 + x^2 + 2x + x^2 + x$

$\quad = 3x^2 + 6x + 2$

Donc, pour $x \in \mathbb{R}^* \setminus \{-2, -1\}$, (E) est équivalente à l'équation (E') : $3x^2 + 6x + 2 = 0$

Résolvons (E') : $\Delta' = 9 - 6 = 3$

$$x' = \frac{-3+\sqrt{3}}{3} = -1+\frac{\sqrt{3}}{3} \qquad x'' = \frac{-3-\sqrt{3}}{3} = -1-\frac{\sqrt{3}}{3}$$

Ces deux valeurs appartiennent bien à l'ensemble de définition de (E), donc

$$\boxed{S = \left\{-1-\frac{\sqrt{3}}{3} \; ; \; -1+\frac{\sqrt{3}}{3}\right\}}$$

IV. Résolution de $x^4 + x^2 - 12 = 0$. (1)

Pour se ramener à un problème du deuxième degré, posons $X = x^2$. Quand x varie dans $\mathbb{R}$, X varie dans $\mathbb{R}_+$.

Il suffit alors de résoudre le système $\begin{cases} X = x^2 \\ X^2 + X - 12 = 0 \end{cases}$ (2)

Résolvons (2) : $\Delta = 1 + 48 = 49 = 7^2$

$$X = \frac{-1+7}{2} = 3 \quad \text{et} \quad X'' = \frac{-1-7}{2} = -4$$

Seule X' appartient à $\mathbb{R}^+$. De $X = 3$, on tire $x^2 = 3$

D'où l'ensemble des solutions :

$$\boxed{S = \left\{-\sqrt{3}, \ \sqrt{3}\right\}}$$

V. 1) $S = \left\{\frac{\sqrt{6}}{2}\right\}$

2) $\left(x^3 - 5x - 4 = 0\right) \Leftrightarrow \left(\left(x+1\right)\left(x^2 - x - 4\right) = 0\right)$

$$S = \left\{\frac{1-\sqrt{17}}{2}, \ -1, \ \frac{1+\sqrt{17}}{2}\right\}$$

3) L'équation peut s'écrire : $\sqrt{-7x-5} = -2x-1$

Pour l'existence de la racine carrée il faut :

$-7x - 5 \geq 0$

$x \leq -\frac{5}{7}$ $\qquad D = \left]-\infty, -\frac{5}{7}\right]$ Dans D, l'équation donnée est équivalente aux " systèmes " suivants :

$$\begin{cases} -2x - 1 \geq 0 \\ -7x - 5 = (-2x-1)^2 \end{cases}$$

$\begin{cases} x \le -\dfrac{1}{2} \\ -7x-5 = 4x^2+4x+1 \end{cases}$ $\quad\quad$ $\begin{cases} x \le -\dfrac{1}{2} \\ 4x^2+11x+6=0 \end{cases}$

$\begin{cases} x \le -\dfrac{1}{2} \\ x=-2 \text{ ou } x=-\dfrac{3}{4} \end{cases}$

On a $-2 \in D$ et $-\dfrac{3}{4} \in D$. L'ensemble des solutions est donc :

$S = \left\{-2, -\dfrac{3}{4}\right\}$

4) Cherchons l'ensemble de définition de l'équation donnée :

$2x+5 \ge 0$ et $x-1 \ge 0 \Leftrightarrow x \ge 1$ donc **$D = [1, +\infty[$**

En présence de racines carrées, nous sommes tentés d'élever les deux membres au carré pour résoudre cette équation. Mais nous savons qu'on n'a l'équivalence $A = B \Leftrightarrow A^2 = B^2$ que sur un ensemble où A et B sont tous deux de même signe. Nous allons donc transposer des termes de l'équation afin d'obtenir deux membres de même signe :

Sur D, $\sqrt{2x+5} - \sqrt{x-1} = 1 \Leftrightarrow \sqrt{2x+5} = \sqrt{x-1}+1$

Les deux membres de cette dernière expression sont tous deux positifs, on peut donc écrire que, sur D, l'équation donnée est équivalente à

$2x+5 = \left(\sqrt{x-1}+1\right)^2$

$2x+5 = (x-1)+1+2\sqrt{x-1}$

$2x+5 = x+2\sqrt{x-1}$

$x+5 = 2\sqrt{x-1}$

Reprenons alors la méthode vue en cours :

$\begin{cases} x+5 \ge 0 \\ (x+5)^2 = 4(x-1) \end{cases}$ $\quad\quad$ $\begin{cases} x \ge -5 \\ x^2+10x+25 = 4(x-1) \end{cases}$

$\begin{cases} x \ge -5 \\ x^2+6x+29=0,\ \Delta' = -20 \end{cases}$

Cette équation n'admet donc pas de racine : $\boxed{S = \varnothing}$

VI. Soit $P(x) = x^2 - 6x + 8$

Cherchons si ce trinôme a des racines :

$\Delta' = b'^2 - ac = 9 - 8 = 1.$

P(x) a deux racines ; $x' = 3 + 1 = 4$ et $x'' = 3 - 1 = 2$

On a donc $x^2 - 6x + 8 = a(x - x')(x - x'') = (x - 2)(x - 4)$

P(x) est du signe de -a (-1, négatif) entre les racines.

P(x) est strictement positif pour $x < 2$ ou $x > 4$. On en déduit :

$$\boxed{S = \left]-\infty, 2\right[\cup \left]4, +\infty\right[}$$

VII. 1) Cette inéquation s'écrit : $(x - 1)(x^2 + x - 3) \leq 0$

D'où $\boxed{S = \left]-\infty, \frac{-1-\sqrt{13}}{2}\right] \cup \left[1, \frac{-1+\sqrt{13}}{2}\right]}$

2) $S = \left]-1, +1\right[$

3) Cette inéquation peut s'écrire successivement :

$$\frac{x+5}{3-x} - \frac{2x+1}{x+2} - \frac{23}{4} \geq 0$$

$$\frac{4(x+2)(x+5) - 4(3-x)(2x+1) - 23(3-x)(x+2)}{4(3-x)(x+2)} \geq 0$$

$$\frac{4(x^2+7x+10) - 4(-2x^2+5x+3) - 23(-x^2+x+6)}{4(3-x)(x+2)} \geq 0$$

$$\frac{35x^2 - 15x - 110}{4(3-x)(x+2)} \geq 0$$ Posons $E = \dfrac{35x^2 - 15x - 110}{4(3-x)(x+2)}$

x	$-\infty$		-2		-11/7		2		3		$+\infty$
$35x^2 - 15x - 110$		+		+	0	-	0	+		+	
$4(3-x)(x+2)$		-	0	+		+		+	0	-	
E		-	‖	+	0	-	0	+	‖	-	

L'ensemble des solutions de cette inéquation est donc :

$$\boxed{S = \left]-2, -\frac{11}{7}\right] \cup \left[2, 3\right[}$$

4) Cette inéquation peut s'écrire :
$(x^2+3x+5)^2-16>0$
le premier membre étant alors une différence entre deux carrés, on obtient une équation équivalente : $(x^2+3x+9)(x^2+3x+1)>0$

D'où la solution : $S=\left]-\infty, \frac{-3-\sqrt{5}}{2}\right[\cup\left]\frac{-3+\sqrt{5}}{2}, +\infty\right[$

5) $\sqrt{2x-5}$ existe pour $2x-5\geq 0$, c'est-à-dire pour x dans $\left[-\frac{5}{2}, +\infty\right[$

Si x, dans D, vérifie $x-5<0$, x vérifie l'inéquation car un nombre positif est supérieur à un nombre strictement négatif.

$$\text{Or } (x\in D \text{ et } x-5<0) \Leftrightarrow \begin{cases} x\geq -\frac{5}{2} \\ x<5 \end{cases} \Leftrightarrow x\in\left[-\frac{5}{2}, 5\right[$$

Ainsi, $\left[-\frac{5}{2}, 5\right[\subset S$

Si $x-5\geq 0$, c'est-à-dire $x\geq 5$, on obtient une inéquation équivalente en élevant au carré les deux membres, positifs ou nuls :
$2x+5>(x-5)^2$; $x\geq 5$
$2x+5>x^2-10x+25$; $x\geq 5$
$x^2-12x+20<0$; $x\geq 5$

Soit : $2<x<10$ et $x\geq 5$
Et donc, dans ce cas, l'inéquation est vérifiée par les éléments de $[5\,;10[$.

En réunissant les deux cas, on trouve les solutions de cette inéquation :

$$\boxed{S=\left[-\frac{5}{2}, 10\right[}$$

PARTIE B

I. 1) $f_1 : \mathbf{R}\to\mathbf{R}$
$x\mapsto\frac{1}{\sqrt{x-1}}$

Pour que $f_1(x)$ existe, il faut que x appartienne à l'ensemble de départ de f_1, que $\frac{1}{\sqrt{x-1}}$ existe, et que ce nombre appartienne à l'ensemble d'arrivée de f_1.

Or $\frac{1}{\sqrt{x-1}}$ existe si et seulement si $\sqrt{x-1}$ existe et n'est pas nul, ce qui s'écrit $x-1\geq 0$ et $x-1\neq 0$, c'est-à-dire $x>1$.

III. On suppose que f est une bijection de E vers $\mathbb{R}$. On sait qu'alors son application réciproque existe et est déterminée par

$$f^{-1} : F \to E$$
$$y \to f^{-1}(y) = x$$

antécédent unique de y par f.

Pour montrer que f^{-1} est aussi une bijection, il faut montrer que tout élément de E a un antécédent unique par f^{-1}.

Soit x un élément de E.

• x a un antécédent par f^{-1}. En effet, l'image de x par f existe puisque f est une application de E vers F. Posons $y = f(x)$

Alors y est antécédent de x par f^{-1}, par définition de f^{-1}.

• y est l'unique antécédent de x par f^{-1} puisque c'est la seule image de x par f (f est une fonction).

On peut donc conclure :

L'application réciproque d'une bijection est une bijection

IV. Il résulte de l'exercice précédent que, g étant l'application réciproque de la bijection f de E vers F, g est une **bijection** de F vers E.

Donc g admet une application réciproque g^{-1}, qui est une application de E vers F.

f et g^{-1} ont par conséquent même ensemble de départ E, et même ensemble d'arrivée F.

Pour démontrer que ces deux applications sont égales, il suffit donc de démontrer que, pour tout x de E, $f(x) = g^{-1}(x)$.

Soit x un élément quelconque de E. Appelons y son image par f : $y = f(x)$.

Par définition de l'application réciproque, g, de f, $g(y) = x$.

De même, g^{-1} étant l'application réciproque de g, $g^{-1}(x) = y$.

Comme $y = f(x)$, on a bien $g^{-1}(x) = f(x)$

Donc, si f est une bijection dont l'application réciproque est g, alors f est l'application réciproque de g.

PARTIE C

I. On connaît $u_3 = \frac{19}{4}$ et $u_6 = 7$. On sait que $u_6 = u_3 + (6-3)r$ (r étant la raison de la suite arithmétique). Donc $u_6 = u_3 + 3r$

et $r = \frac{1}{3}(u_6 - u_3) = \frac{1}{3}\left(7 - \frac{19}{4}\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{9}{4}\right) = \frac{3}{4}$

On a alors $u_1 = u_3 - 2r = \frac{19}{4} - \frac{3}{2} = \frac{13}{4}$

$$\boxed{r = \frac{3}{4} \text{ et } u_1 = \frac{13}{4}}$$

II. Si n est le nombre de termes de la suite, et S_n sa somme, les hypothèses s'écrivent :

$u_1 = 5$; $u_n = -21$; $S_n = -88$

On sait que $S_n = \frac{n}{2}(u_1 + U_n)$ Donc $-88 = \frac{n}{2}(5 - 21) = -8n$

On en tire : $\boxed{n = 11}$

Pour trouver la raison r, écrivons que $u_n = u_1 + (n-1)r$

$-21 = 5 + 10r \Leftrightarrow 10r = -26$ $\boxed{r = -2{,}6}$

III. La somme des 24 traites $u_1, u_2, \ldots u_{24}$ est le prix d'achat de la maison, soit 300 000 F.

On sait aussi que cette somme est égale à $\frac{24}{2}(u_1 + u_{24}) = 12(u_1 + u_{24})$

Puisqu'on connaît la raison de la suite, on peut exprimer u_{24} en fonction de u_1 :

$u_{24} = u_1 + (24 - 1)r = u_1 - 23 \times 500 = u_1 - 11\,500$

Alors $12(u_1 + u_{24}) = 12(2u_1 - 11\,500) = 300\,000$

Equation équivalente à $2u_1 - 11\,500 = 25\,000$ d'où on tire $\boxed{u_1 = 18\,250 \text{ F}}$

IV. On nous donne $u_3 = 3$ et $u_6 = 81$. Si q est la raison de la suite géométrique,

$u_6 = qu_5 = q(qu_4) = q^2u_4 = q^2(qu_3) = q^3u_3$

(d'une manière générale, $u_p = q^{p-a}u_a$).

On en déduit $q^3 = \frac{u_6}{u_3} = \frac{81}{3} = 27$, donc $q = 3$

Comme $u_1 = q^{-2}u_3$, on a $u_1 = \frac{3}{3^2}$ $\boxed{u_1 = \frac{1}{3}}$

V. Soit n le nombre de termes de la suite. Les hypothèses s'écrivent :

$q = -2$; $u_1 = 3$; $S_n = 33$.

On sait que $S_n = u_1\frac{q^n - 1}{q - 1}$ Donc $33 = 3 \times \frac{(-2)^n - 1}{-3} = 1 - (-2)^n$

On en déduit $(-2)^n = -32$ et, de là, $\boxed{n = 5}$

VI. Les versements destinés à rembourser la dette forment une suite géométrique finie, puisque chacun se déduit du précédent en multipliant par 2.

On sait que $u_1 = 100$ et $q = 2$

Cherchons u_{10}, montant du dixième versement : $u_{10} = u_1q^9$

$\boxed{u_{10} = 51\,200 \text{ F}}$

S'il y a 10 versements, le montant de la dette est

$S_{10} = 100\,\frac{2^{10} - 1}{2 - 1} = 100(2^{10} - 1) = 100(1023)$

$\boxed{S_{10} = 102\,300 \text{ F}}$

1) Pour que g ∘ f existe, par définition, f et g doivent être des applications telles que l'ensemble des valeurs de f soit inclus dans l'ensemble de départ de g.
Cherchons les ensembles de définition de f et g pour savoir si ce sont bien des applications.

On sait que $\sqrt{x}$ existe pour tout x de $\mathbb{R}^+$, donc en particulier pour tout x de $\mathbb{R}^*_+$. De plus, on sait que $x > 0 \Rightarrow \sqrt{x} > 0$. Donc, pour tout x dans l'ensemble de départ de f, $\sqrt{x}$ existe et est dans l'ensemble d'arrivée de f : l'ensemble de définition de f est bien $\mathbb{R}^*_+$
f est une application.

De même, $\frac{2}{x}$ existe pour tout x de $\mathbb{R}^*$, donc de $\mathbb{R}^*_+$, et on sait que $x > 0 \Rightarrow \frac{2}{x} > 0$. g est donc bien aussi une application.

Comme l'ensemble d'arrivée de f est l'ensemble de départ de g.

On peut conclure :

$\boxed{g \circ f \text{ existe}}$

Pour l'existence de f ∘ g, on sait que f et g sont des applications. De plus, l'ensemble d'arrivée de g est l'ensemble de départ de f :

$\boxed{f \circ g \text{ existe}}$

2) Pour tout x de $\mathbb{R}^*_+$, $(g \circ f)(x) = g[f(x)] = g(\sqrt{x}) = \dfrac{2}{\sqrt{x}}$

Pour tout x de $\mathbb{R}^*_+$, $(f \circ g)(x) = f[g(x)] = f\left(\dfrac{2}{x}\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{x}}$

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Donc } f \circ g \text{ et } g \circ f \text{ sont des fonctions de } \mathbb{R}^*_+ \text{ vers } \mathbb{R}^*_+ \text{ telles que,} \\ \text{pour tout x de } \mathbb{R}^*_+,\ (g \circ f)(x) = \dfrac{2}{\sqrt{x}} \text{ et } (f o g)(x) = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{x}}\end{array}}$$

Par définition de l'égalité des fonctions, f ∘ g et g ∘ f sont égales si et seulement si elles ont le même ensemble de départ (ce qui est vérifié), le même ensemble d'arrivée (c'est le cas aussi) et si, de plus, tout élément x de leur ensemble de départ vérifie $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x)$.

Or cette dernière condition n'est pas vérifiée. En effet,

$$(g \circ f)(x) = (f \circ g)(x) \Leftrightarrow \frac{2}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{2}}{x} \Leftrightarrow 2 = \sqrt{2}$$

Cette relation n'est pas vérifiée pour tout x de $\mathbb{R}^{*+}$ (elle n'est même vérifiée pour aucun de ces x !). On en déduit que

$\boxed{g o f \neq f o g}$

Comme les ensembles de départ et d'arrivée de f_1 sont $\mathbb{R}$, tous les réels x vérifient $x > 1$ appartiennent à l'ensemble de définition de cette fonction :

$\boxed{D_{f_1} = \left]1, +\infty\right[}$

2) $f_2 : [-1 \, ; \, 0] \to \mathbb{R}$

$x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x-1}}$

Cette fois, l'ensemble de départ de la fonction n'est plus $\mathbb{R}$.
Les éléments de l'ensemble de définition de f_2 sont donc les réels x qui vérifient à la fois $x \in [-1 \, ; 0]$ et $x > 1$. Comme aucun réel ne vérifie ces deux conditions à la fois, D_{f_2} est vide :

$\boxed{D_{f_2} = \emptyset}$

3) $f_3 : [-1 \, ; \, 3] \to \mathbb{R}$

$x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x-1}}$

Un raisonnement identique au précédent nous conduit à

$D_{f_3} = [-1 \, ; \, 3] \cap \left]1, +\infty\right[$

$\boxed{D_{f_3} = \left]1 \, ; \, 3\right]}$

4) $f_4 : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$

$x \to x - 2$

Pour tout x réel, x - 2 existe. Mais, pour que $f_4(x)$ existe il faut aussi que x appartienne à l'ensemble de départ de f_4 (donc que x vérifie $x \geq 0$) et de plus que $x - 2$ appartienne à son ensemble d'arrivée. L'ensemble d'arrivée de f_4 étant $\mathbb{R}^+$. On doit donc avoir $x - 2 \geq 0$. Les réels x qui vérifient à la fois $x \geq 0$ et $x \geq 2$ sont les éléments de $[2, +\infty[$:

$\boxed{D_{f_4} = [2, +\infty[}$

II. $f : \mathbb{R}^{*+} \to \mathbb{R}^{*+}$ $\quad$ $g : \mathbb{R}^{*+} \to \mathbb{R}^{*+}$

$x \mapsto \sqrt{x}$ $\quad$ $x \mapsto \dfrac{2}{x}$

3.
MATHEMATIQUES II

SEQUENCE 2

LES LIMITES

I. Fonctions bornées sur un sous-ensemble de R : rappels

1) Majorants - minorants

Soit $A \subset R$, $A \neq \emptyset$

• On dit que **A est majoré** s'il existe un réel M tel que, pour tout élément x de A, on ait $x \leq M$. M est un **majorant** de A.

• On dit que **A est minoré** s'il existe un réel m tel que, pour tout élément x de A, on ait $m \leq x$. m est un **minorant** de A.

2) Fonction majorée, minorée, bornée sur un sous-ensemble de R

Soit f une fonction numérique définie sur E, et f <E> l'ensemble des images par f des éléments de E.

• Si f <E> est majoré, on dit que **f est majorée sur E.**

• Si f <E> est minoré, on dit que **f est minorée sur E.**

• Si f est la fois majorée et minorée sur E, on dit qu'elle est **bornée sur** E.

Exemple : $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$

$x \mapsto 2x - 1$

Montrons que f est bornée sur E = [0 ; 2]

Constatons d'abord que f est bien définie sur E (elle est définie sur tout R).

De plus, $x \in [0 ; 2] \Rightarrow 0 \leq x \leq 2$.

$0 \leq x \Rightarrow 0 \leq 2x \Rightarrow -1 \leq 2x - 1$

Ainsi, $x \in E \Rightarrow -1 \leq f(x)$. Puisque chaque élément y de f <E> s'écrit f(x) (où x est un élément de E), il vérifie $-1 \leq y$. Donc f <E> est minoré par -1, c'est-à-dire que **f est minorée sur E par -1.**

$x \leq 2 \Rightarrow 2x \leq 4 \Rightarrow 2x - 1 \leq 3$

Ainsi $x \in E \Rightarrow f(x) \leq 3$. Puisque chaque élément y de f <E> s'écrit f(x) (où x est un élément de E), il vérifie $y \leq 3$. Donc f <E> est majoré par 3, c'est-à-dire que **f est majorée sur E par 3.**

f est à la fois minorée et majorée sur E : elle y est bornée.

Remarques :

a) Si m est un minorant de A (partie de $\mathbb{R}$), tout réel α tel que $\alpha \leq m$ est aussi un minorant de A.
En effet, pour tout x élément de A, si $\alpha \leq x$, alors $\alpha \leq x$.

b) De même, si M est un majorant de A, tout réel $b \geq M$ est aussi un majorant de A.

II. Limite finie d'une fonction en un " point " x_0

Il est courant d'employer le mot " point " à la place de l'expression " nombre réel " pour désigner un élément de l'ensemble de départ d'une fonction numérique.

Rappelons qu'un nombre réel (ou encore : un point) x_0 est, par définition, fini.

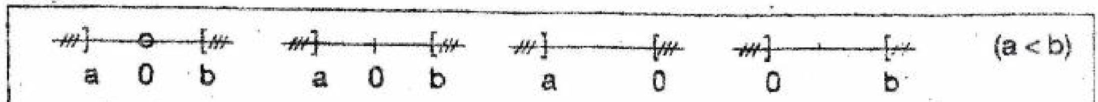
1) *Limite nulle d'une fonction en zéro*

• Soit f une fonction définie sur une partie A de $\mathbb{R}$ telle que, si I est un intervalle ouvert quelconque de centre 0, $A \cap I \neq \varnothing$. Alors on dit que f **admet en zéro la limite zéro** si on peut trouver n dans $\mathbb{N}^* \cup \left\{\frac{1}{2}\right\}$ et k dans $\mathbb{R}_+$ tels que, pour $|x|$ assez petit,

$|f(x)| \leq k|x|^n$ On écrit $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$ ou $\lim\limits_{0} f = 0$, et on lit :

" limite quand x tend vers zéro de f(x) égale zéro ou" la limite en zéro de f est zéro ".

Vous savez que cette définition suppose des conditions très précises sur l'ensemble de définition de f. Il est donc impératif, avant toute étude de limite, de **déterminer l'ensemble de définition de la fonction.**
Cet ensemble D, doit contenir une partie A de $\mathbb{R}$ qui aura une des quatre formes suivantes :



Dans les deux derniers cas, on ne pourra parler de limite de la fonction en 0 que si on se " rapproche " de 0 par " la gauche " ou par " la droite " exclusivement . On parle alors de limite de f(x) quand x tend vers 0 **"par valeurs inférieures"** ou **"par valeurs supérieures"**.

• Si f est définie sur un intervalle]a, 0[(respectivement] 0, b[ ), on dit que **f admet en 0 la limite à gauche (resp. à droite) 0** si on peut trouver n dans $\mathbb{N}^* \cup \left\{\frac{1}{2}\right\}$ et k dans $\mathbb{R}_+$ tels que, pour $|x|$ assez petit,

$|f(x)| \leq k\,|x|^n$ on écrit $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = 0$ ou $\lim\limits_{0^-} f = 0$

$\left(\text{resp. } \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 0 \text{ ou } \lim\limits_{0^+} f = 0\right)$

Exemple : soit $f : x \mapsto \dfrac{x^2}{x+2}$, définie sur $D = \mathbb{R} - \{-2\}$

Démontrons que : $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$

Pour cela, il suffit de trouver $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \mathbb{R}$, tels que $|f(x)| \leq k\,|x|^n$ pour $|x|$ assez proche de 0.

Or $|f(x)| = \left|\dfrac{1}{x+2}\right| x^2$

Nous allons donc chercher à majorer $\left|\dfrac{1}{x+2}\right|$ donc à minorer $|x+2|$ Comme on se place dans le cas où $|x|$ est petit, on peut par exemple poser $|x| \leq \dfrac{1}{2}$ ce qui peut encore s'écrire $-\dfrac{1}{2} \leq x \leq \dfrac{1}{2}$

En ajoutant 2 aux membres de cette double inégalité, on trouve $\dfrac{3}{2} \leq x+2 \leq \dfrac{5}{2}$

Tous les termes de cette nouvelle double inégalité étant positifs, on peut passer aux inverses à condition de changer le sens des inégalités : $\dfrac{2}{3} \geq \dfrac{1}{x+2} \geq \dfrac{2}{5}$

qu'on peut encore écrire $\dfrac{2}{5} \leq \dfrac{1}{x+2} \leq \dfrac{2}{3}$. Ainsi, $\dfrac{1}{x+2}$, encadré par des nombres positifs, est positif, et $\left|\dfrac{1}{x+2}\right| = \dfrac{1}{x+2}$

Ainsi, $\left|\dfrac{1}{x+2}\right| \leq \dfrac{2}{3}$ et $|f(x)| = \left|\dfrac{1}{x+2}\right| |x|^2 \Rightarrow |f(x)| \leq \dfrac{2}{3}|x|^2$

On a bien trouvé $k = \dfrac{2}{3}$ et $n = 2$ tels que, pour $|x|$ assez petit

$\left(|x| \leq \dfrac{1}{2}\right)$, on a $|f(x)| \leq k\,|x|^n$

$$\boxed{\lim_{x \to 0} f(x) = 0}$$

2) Limite finie l d'une fonction en zéro

• Définition : on dit que la **fonction f admet la limite l au point 0** lorsque la fonction $x \to f(x) - l$ admet en 0 la limite 0.

On note $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = l$ ou $\lim\limits_{0} f = l$

Remarque : pour que $x \mapsto f(x) - l$ soit définie sur un ensemble A, il faut et il suffit que f le soit. Vous voyez donc que l'ensemble de définition de f doit vérifier les mêmes conditions pour que f puisse admettre une limite finie en zéro, que cette limite soit nulle ou non.

Alors, $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = l$ s'il existe $n \in \mathbb{N}^* \cup \left\{\frac{1}{2}\right\}$ et $k \in \mathbb{R}^+$ tels que

$|f(x) - l| \leq k\,|x|^n$ si $|x|$ est assez petit

Cette définition traduit l'intuition que, plus x se rapproche de 0, plus f(x) se rapproche de l.

De la même manière qu'on l'avait fait pour $l = 0$, on peut définir une limite à droite et une limite à gauche, l, d'une fonction en 0 (l pouvant prendre toute valeur réelle).

3) Limite finie l d'une fonction en un point x_0

Exemple : soit la fonction $x \mapsto x + 1$ définie sur $\mathbb{R}$.

On ne s'intéresse plus au comportement de f au voisinage de 0, mais à son comportement au voisinage d'un autre point, par exemple 1.

En calculant des valeurs f(x) pour x proche de 1, on constate que plus x est proche de 1, plus f(x) est proche de 2. Pour faire une étude plus précise, posons $x = 1 + h$.

Alors, $f(x) = f(1 + h) = 1 + h + 1 = h + 2$

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(h) = h + 2$.

La fonction $h \mapsto h$ admet la limite 0 en 0, donc g admet la limite 2 en 0 (car $g(h) - 2 = h$).

On convient alors de dire que la limite de f au point 1 est 2, c'est-à-dire la limite de g au point 0.

• Définition : soit f une fonction définie sur une partie A de $\mathbb{R}$ telle que, pour tout intervalle I ouvert de centre x_0, $A \cap I \neq \emptyset$.

On dit que **f admet la limite l au point x_0** lorsque la fonction $h \mapsto f(x_0 + h)$ admet la limite l en 0.

On écrit $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$ ou $\lim\limits_{x_0} f = l$

Conséquence : pour démontrer que $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$, il suffit de démontrer que

$\lim\limits_{h \to 0} f(x_0 + h) = l$, ou encore que $\lim\limits_{h \to 0} \left[f(x_0 + h) - l\right] = 0$

Exemple : soit $f : x \mapsto \dfrac{2}{x+3}$. Montrer que $\lim\limits_{x \to -1} f(x) = 1$.

$D = \mathbb{R} \setminus \{-3\}$. On ne peut parler de limite de f en -1 qu'en se plaçant dans un intervalle A inclus dans $]-3, +\infty[$. Pour $-1 + h \neq -3$.

On a : $f(-1+h) = \dfrac{2}{h+2}$ et $f(-1+h) - 1 = \dfrac{-h}{h+2}$

Pour montrer que $\lim\limits_{h \to 0}\left[f(-1+h) - 1\right] = 0$, il suffit donc de montrer qu'on peut trouver n de $\mathbb{N}^*$ et k de $\mathbb{R}^+$ tels que, pour $|h|$ assez petit, $\left|\dfrac{-h}{h+2}\right| \leq k\,|h|^n$

Pour $(-1 + h)$ dans A, on a $-1 + h > -3$, donc $h + 2 > 0$

Alors $\left|\dfrac{-h}{h+2}\right| = \dfrac{|h|}{h+2} = \dfrac{1}{h+2}|h|$

Il s'agit donc de majorer $\dfrac{1}{h+2}$, c'est-à-dire de minorer $h + 2$.

Prenons par exemple $|h| \leq 1$, soit $-1 \leq h \leq 1$ (qui vérifie bien $h + 2 > 0$).

Alors $h \geq -1 \Rightarrow h + 2 \geq 1$ et $\dfrac{1}{h+2} \leq 1$, donc $\left|f(-1+h) - 1\right| \leq |h|$ pour $|h| \leq 1$,

on a bien trouvé $n = 1$ et $k = 1$ répondant à la question :

$\boxed{\lim\limits_{x \to -1} f(x) = 1}$

4) Opérations sur les limites finies

Retenez les deux théorèmes fondamentaux :

- Si P est une fonction polynôme, pour tout x_0 réel,

  $\lim\limits_{x \to x_0} P(x) = P(x_0)$

- Si f est une fonction rationnelle définie sur D, pour tout x_0 de D,

  $\lim\limits_{x \to x_0} P(x) = P(x_0)$

De plus, sachant que $(\lim u = l \text{ et } l \geq 0) \Rightarrow \lim \sqrt{u} = \sqrt{l}$

on peut énoncer un troisième théorème important :

> • Si f est une fonction polynôme ou une fonction rationnelle **définie et positive** sur un ensemble E, alors pour tout x_0 de E,
>
> $\lim\limits_{x \to x_0} \sqrt{f(x)} = \sqrt{f(x_0)}$

III. Limite infinie d'une fonction en un point x_0

• Soit f une fonction définie sur une partie A de R, telle que, si I est un intervalle quelconque de centre x_0, $A \cap I \neq \emptyset$.

• On dit que **f admet $+\infty$ pour limite en x_0** si, pour x suffisamment proche de x_0, f(x) est supérieur à tout nombre réel donné.

• On dit que **f admet $-\infty$ pour limite en x_0** si, pour x suffisamment proche de x_0, f(x) est inférieur à tout nombre réel donné.

Vous voyez que l'ensemble de définition de f doit vérifier en x_0 les mêmes conditions, pour que f admette une limite en ce point, que cette limite soit finie que si **f n'est pas définie en x_0.** En effet, si $f(x_0)$ existe, c'est un nombre réel, fini, et on ne peut pas rendre f(x) aussi grand que l'on veut en valeur absolue lorsque x se rapproche de x_0. L'ensemble de définition de f contiendra donc un ensemble A qui aura une des trois formes 1, 3, et 4 schématisées p. 102 (la forme 2 est exclue puisque c'est la seule pour laquelle $0 \in A$), en remplaçant bien sûr 0 par x_0.

• Comme dans les autres cas de limites, on peut définir la limite infinie d'une fonction à **droite ou à gauche** de x_0.

Vous savez que $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$

> D'une manière générale, vous admettrez que, si $\lim\limits_{x_0} v = 0$, $\lim\limits_{x_0} \frac{1}{v} = \infty$

On peut avoir à distinguer, comme ci-dessus, le cas d'une limite à droite en x_0 de celui d'une limite à gauche en x_0. Selon le signe de v(x) pour x proche de x_0, cette limite pourra être $+\infty$ ou $-\infty$.

Exemple : soit $f : x \mapsto \frac{1}{(x-2)^2}$ Trouver $\lim_{x \to 2} f(x)$

$x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$: $D = \mathbf{R} - \{2\}$. f est donc bien définie sur une partie A de $\mathbf{R}$ qui contient des nombres aussi proches que l'on veut de 2, sans contenir 2 : on est en droit de chercher la limite de f en 2.

$x \mapsto (x-2)^2$ est une fonction polynôme définie en 2. On sait que la limite en 2 de cette fonction est la valeur prise par le polynôme pour $x = 2$, soit 0 : $\lim_{x \to 2} (x-2)^2 = 0$

D'après le résultat ci-dessous, on en déduit que la limite de f en 2 est infinie. Pour trouver son signe, il suffit de remarquer qu'un carré étant toujours positif, f est positive sur D :

$\boxed{\lim_{x \to 2} f(x) = +\infty}$

Ici, f gardant un signe constant, f(x) a même limite quand x tend vers 2 par valeurs supérieures que quand x tend vers 2 par valeurs inférieures.

IV. Limite d'une fonction à l'infini ($-\infty$ ou $+\infty$)

Pour une fonction f dont l'ensemble de définition contient des intervalles de la forme $]a, +\infty[$ (resp. $]-\infty, b[$), on peut se demander comment se comporte f(x) quand x devient très grand (resp. très petit, c'est-à-dire négatif et grand en valeur absolue). C'est ce qu'on appelle rechercher les limites de f à l'infini.

1) *Limite infinie d'une fonction à l'infini*

Soit la fonction $f : x \mapsto x^3$. $D = \mathbf{R}$, donc D contient des intervalles de la forme $]a, +\infty[$ et de la forme $]-\infty, b[$. Cherchons les limites de f à l'infini.

En calculant f(x) pour des valeurs de plus en plus grandes (positives) de x, on constate que f(x) devient aussi de plus en plus grand. De même, en faisant le calcul pour des valeurs de x de plus en plus petites (négatives, donc de plus en plus grandes en valeur absolue), on constate que f(x), négatif, devient aussi de plus en plus grand en valeur absolue.

Plus précisément, quel que soit le nombre M de $\mathbf{R}^+$ (aussi grand que l'on veut), il suffit de prendre $x > \sqrt[3]{M}$ pour avoir $x^3 > M$.

On dit que **f(x) tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$.**

On écrit $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ ou $\lim_{+\infty} f = +\infty$

De même, quel que soit le nombre réel m de $\mathbb{R}^-$ (aussi grand en valeur absolue que l'on veut), il suffit de prendre $x < \sqrt[3]{m}$ pour avoir $x^3 < m$.

On dit que **f(x) tend vers $-\infty$ quand x tend vers $-\infty$.**

On écrit $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ ou $\lim\limits_{-\infty} f = -\infty$

D'une manière générale, vous savez que les fonctions de référence $x \mapsto x^p$ ($p \in \mathbb{N}^*$) et $x \mapsto \sqrt{x}$ vérifient :

> $\lim\limits_{x \to +\infty} x^p = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$
>
> et, si p est impair, $\lim\limits_{x \to -\infty} x^p = -\infty$
>
> si p est pair, $\lim\limits_{x \to -\infty} x^p = +\infty$

La comparaison d'une fonction à ces fonctions de référence permet de trouver des limites infinies à l'infini grâce aux théorèmes suivants :

> Si, pour x suffisamment grand, $f(x) \geq g(x)$,
> - si $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$, alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$
> - si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$, alors $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$
>
> Si, pour x suffisamment petit (négatif et grand en valeur absolue), $f(x) \geq g(x)$,
> - si $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = +\infty$, alors $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$
> - si $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$, alors $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = -\infty$

2) Limite finie d'une fonction à l'infini

a) Limite nulle à l'infini

Soit la fonction $f : \mapsto \frac{1}{x}$. $D = \mathbb{R}^*$ On s'intéresse maintenant à la limite éventuelle de f, non plus en o, mais en $+\infty$ ou $-\infty$.

Le calcul de f(x) pour des valeurs de x devenant de plus en plus grandes en valeur absolue montre que f(x) se rapproche de plus en plus de 0, en gardant bien sûr le signe de x.

On écrit $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0^+$ et $\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0^-$

Signalons qu'on n'a pu faire cette étude que parce D contient un intervalle de la forme $]a, +\infty[$ (et un autre de la forme $]-\infty, b[$).

Vous admettrez que, d'une manière générale, si v est une fonction telle que son ensemble de définition contient un intervalle de la forme $]a, +\infty[$ (resp. $]-\infty, b[$), et telle que :

$\lim_{x \to +\infty} v(x) = \infty$ (resp. $\lim_{x \to -\infty} v(x) = \infty$), alors $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{v(x)} = 0$

(resp. $\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{v(x)} = 0$).

Il faut évidemment préciser dans chaque cas le signe de $\lim_{x \to +\infty} v(x)$ $\left(\text{resp. } \lim_{x \to -\infty} v(x)\right)$

En particulier, pour les fonctions de référence $x \mapsto \frac{1}{x^p}$ $(p \in \mathbb{N}^*)$ et $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{|x|}}$ vous savez que :

$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^p} = 0$	$\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x^p} = 0$
$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$	$\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{\sqrt{-x}} = 0$

La comparaison d'une fonction à ces fonctions de référence permet de trouver des limites nulles à l'infini grâce aux théorèmes suivants :

Si, pour x suffisamment grand, $|f(x)| \leq |g(x)|$,

- si $\lim_{x \to +\infty} g(x) = 0$, alors $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$

Si, pour x suffisamment petit (négatif et grand en valeur absolue), $|f(x)| \leq |g(x)|$,

et si $\lim_{x \to -\infty} g(x) = 0$, alors $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$

b) limite finie à l'infini

On peut généraliser ce qui précède, comme l'avait fait pour les limites finies en un point au cas où la limite est un réel quelconque, l.

Définition : si $\lim\limits_{x \to +\infty} \left[f(x) - l\right] = 0$, on dit que f admet pour limite l en $+\infty$.

On note $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = l$ ou $\lim\limits_{+\infty} f = l$

Cette définition s'adapte immédiatement au cas $-\infty$.

Vous admettrez les théorèmes suivants, valables pour toutes les limites finies de fonctions, que ce soit en un point ou à l'infini :

- Si les fonctions f et g vérifient $\lim\limits_{\alpha} f = l$, $\lim\limits_{\alpha} g = l'$ et $f(x) \leq g(x)$ pour x suffisamment proche de α alors $l \leq l'$
- Si les fonctions u, v et f vérifient $\lim\limits_{\alpha} u = \lim\limits_{\alpha} v = l$ et $u(x) \leq f(x) \leq v(x)$ pour x suffisamment proche de α alors $\lim\limits_{\alpha} f = l$

α, ici, désigne soit un réel, soit $+\infty$ ou $-\infty$.

N. B. Si on remplace $f(x) \leq g(x)$ par $f(x) < g(x)$, on ne peut pas conclure que $l < l'$: on sait seulement que $l \leq l'$.

3) Opérations sur les limites, finies ou infinies

Les deux théorèmes essentiels et très utilisés dans la pratique sont :

- Toute fonction polynôme admet, en $+\infty$ et $-\infty$ même limite que son monôme de plus haut degré.
- Toute fonction rationnelle admet, en $+\infty$ et $-\infty$, même limite que le quotient des monômes de plus haut degré du numérateur et du dénominateur.

- Ils permettent de lever les indéterminations de la forme $\infty - \infty$ pour les fonctions polynômes et $\frac{\infty}{\infty}$ pour les fonctions rationnelles. Souvenez-vous bien qu'on ne peut les utiliser que pour les limites à **l'infini** de ces fonctions.

V. Comparaison de fonctions au voisinage d'un point α

Remarque : le mot " point " est pris ici non seulement au sens de nombre réel, mais éventuellement aussi au sens de $+\infty$ ou $-\infty$.

Définition : on dit que deux fonctions u et v sont équivalentes **au voisinage de** α

- s'il existe une fonction φ telle que, pour x assez proche de α, $u(x) = v(x)\,[1 + \varphi(x)]$ avec $\lim\limits_{\alpha} \varphi = 0$

- ou s'il existe une fonction ψ telle que, pour x assez proche de α, $v(x) = u(x)\,[1 + \psi(x)]$ avec $\lim\limits_{\alpha} \psi = 0$

Vous admettrez que si l'une des conditions ci-dessus est remplie l'autre l'est également.

On note : $u \sim v\,(\alpha)$ ou $u(x) \sim v(x)$ quand $x \to \alpha$

De cette définition, et des théorèmes sur les limites, on déduit immédiatement que

> Si u et v sont deux fonctions équivalentes au voisinage de α, $\lim\limits_{\alpha} u = \lim\limits_{\alpha} v$

Exemples :

1. Soit $u : x \mapsto x^2 - x + 2$ et $v : x \mapsto x^2$. u et v sont définies sur R.

Pour $x \neq 0$, $u(x) = x^2\left(1 - \frac{x}{x^2} + \frac{2}{x^2}\right) = v(x)\left[1 - \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}\right]$

Posons $\varphi : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$

$$x \mapsto -\frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} \qquad \lim_{x \to +\infty} \varphi(x) = 0$$

On a mis u(x) sous la forme $v(x)\,[1 + \varphi(x)]$ avec $\lim\limits_{+\infty} \varphi = 0$

on peut affirmer que u et v sont équivalentes au voisinage de $+\infty$:

$x^2 - x + 2 \sim x^2$ quand $x \to +\infty$

Cela traduit le fait que, pour x suffisamment grand, $-x+2$ est **négligeable** devant x^2 : $x \mapsto x^2 - x + 2$ se comporte comme $x \mapsto x^2$. (On dit encore que $x \mapsto x^2$ tend " plus vite " vers $+\infty$ que $x \mapsto -x+2$ ne tend vers $-\infty$).

Alors $\lim\limits_{x \to +\infty} u(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} v(x) = +\infty$.

2. Soit $u : x \mapsto x^2 - x + 2$ et $v : x \mapsto 2$

Pour tout réel x, $u(x) = 2\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} + 1\right) = 2\left(1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x}{2}\right)$

Posons $\varphi : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$

$x \mapsto \frac{x^2}{2} - \frac{x}{2}$

On a bien mis u(x) sous la forme $v(x)\left[1+\varphi(x)\right]$ avec $\lim\limits_{0} \varphi = 0$: **u et v sont équivalentes** au voisinage de 0.

$x^2 - x + 2 \sim 2$ quand $x \to 0$

Quand |x| est suffisamment petit, $x^2 - x$ est négligeable devant 2.

On a $\lim\limits_{x \to 0}(x^2 - x + 2) = \lim\limits_{x \to 0} 2 = 2$

Ce résultat peut être généralisé : **toute fonction polynôme est équivalente à son terme de plus bas degré au voisinage de zéro.**

VI. Limites de fonctions composées

Exemple : soit la fonction f telle que $f(x) = \sqrt{x^2 - x + 2}$

Comme $x^2 - x + 2$ est positif pour tout réel ($\Delta = 1 - 8 = -7$), f est définie sur $\mathbb{R}$.

Si on pose $u : x \mapsto x^2 - x + 2$ et $v : y \mapsto \sqrt{y}$, on a $f = v \circ u$.

Etudions par exemple $\lim\limits_{+\infty} f$ et $\lim\limits_{-\infty} f$

On sait que $\lim\limits_{x \to +\infty} u(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$

et $\lim\limits_{x \to -\infty} u(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} x^2 = +\infty$

Par ailleurs, on sait aussi que $\lim\limits_{y \to +\infty} v(y) = \lim\limits_{y \to +\infty} \sqrt{y} = +\infty$

On est donc amené, intuitivement, à penser que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

Ou encore, en posant $l = \lim\limits_{x \to +\infty} u(x)$: $\lim\limits_{x \to +\infty} (v \circ u)(x) = \lim\limits_{y \to l} v(y)$

Vous admettrez qu'on peut généraliser ce résultat sous la forme suivante :

Soit u et v deux fonctions, et $f = v \circ u$.
On suppose que $\lim_{\alpha} u = \beta$ et que $\lim_{\beta} v$ existe.
Alors $\lim_{\alpha} f = \lim_{\beta} v$

Complément : **Théorème** (à admettre)
Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ et f une fonction numérique non définie en x_0.

S'il existe une fonction g et une partie A de $\mathbb{R}$ telle que : f est définie sur A et, pour tout intervalle ouvert I de centre x_0, $A \cap I \neq \emptyset$; g est définie sur $A \cup \{x_0\}$ et, pour tout x de A, $f(x) = g(x)$; la limite de g en x_0 existe (on sait qu'alors cette limite est $g(x_0)$) alors $\lim_{x_0} f = \lim_{x_0} g$.

Cette proposition reste vraie si on y remplace " limite " par " limite à droite " ou " limite à gauche ".

ÉNONCE DES EXERCICES

Déterminer les limites des fonctions suivantes, aux points indiqués (n'oubliez pas l'étape indispensable de recherche de l'ensemble de définition, avant toute transformation de f(x) :

EXERCICE 1

$f : x \mapsto x^2 - 5x + 2$ en 2

$g : x \mapsto \dfrac{x-2}{x+1}$ en 1

EXERCICE 2

$f : x \mapsto x^3 - x + 1$ en $+\infty$ et $-\infty$

$g : x \mapsto \dfrac{2x^2 - 1}{x+8}$ en 0, en $+\infty$ et en $-\infty$

$h : x \mapsto \sqrt{x-2}$ en 3, en $+\infty$ et en $-\infty$

EXERCICE 3

$f : x \mapsto \dfrac{x^2 + x + 1}{-x^2 + 5x - 6}$ en $+\infty$, $-\infty$, 2 et 3

(pour ces deux dernières valeurs, distinguer limite à droite et limite à gauche).

EXERCICE 4

1) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{x+3} - \sqrt{3}}{x}$

2) $f : x \mapsto \dfrac{x^2 - 4x + 1}{x+2} - \dfrac{x^2 + 2x - 3}{x+1}$ en $+\infty$ et en $-\infty$

3) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 4}{x-2}$

EXERCICE 5

1) $f : x \mapsto \dfrac{\sqrt{2x-1} - x}{x^2 + 3x - 4}$ en 1.

2) $f : x \mapsto \sqrt{x^2 + x + 1} - 3x$ en $+\infty$

3) $f : x \mapsto \sqrt{x^2 + x + 1} - x$ en $+\infty$

3. MATHEMATIQUES II

CORRIGÉS DES EXERCICES

EXERCICE 1

$f(x) = x^2 - 5x + 2$

f est une fonction polynôme définie sur $\mathbb{R}$.

On sait que, pour tout x_0 réel, $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$. En particulier, $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = f(2)$

$f(2) = 4 - 10 + 2 = -4$

$$\boxed{\lim_{x \to 2} f(x) = -4}$$

$$g(x) = \frac{x-2}{x+1}$$

g, fonction rationnelle, est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ (puisque $x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1$). On sait que, pour tout x_0 de l'ensemble de définition de g, $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = g(x_0)$. Or 1 appartient à l'ensemble de définition de g et $g(1) = -\frac{1}{2}$

$$\boxed{\lim_{1} g = -\frac{1}{2}}$$

N.B. On a utilisé les deux théorèmes fondamentaux rappelés p. 105 de ce cours.

EXERCICE 2

$f(x) = x^3 - x + 1$

f est une fonction polynôme définie sur $\mathbb{R}$. On sait qu'une telle fonction est équivalente à son monôme de plus haut degré au voisinage de l'infini (théorème p. 110). On sait aussi que : $\lim\limits_{x \to +\infty} x^3 = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} x^3 = -\infty$

$$\boxed{\lim_{+\infty} f = +\infty \qquad \lim_{-\infty} f = -\infty}$$

$$g(x) = \frac{2x^2 - 1}{x + 8}$$

g est une fonction rationnelle définie sur $D_g = \mathbb{R} \setminus \{-8\}$.

Comme $0 \in D_g$, $\lim\limits_{x \to 0} g(x) = g(0)$

$$\boxed{\lim_{x \to 0} g(x) = -\frac{1}{8}}$$

On sait qu'au voisinage de l'infini, une fonction rationnelle est équivalente au rapport des termes de plus haut degré du numérateur et du dénominateur.

$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x^2}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} 2x = +\infty$

De même, $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} 2x = -\infty$

$\boxed{\lim\limits_{+\infty} g = +\infty \qquad \lim\limits_{-\infty} g = -\infty}$

$h(x) = \sqrt{x-2}$. h est une fonction irrationnelle dont l'ensemble de définition est $D_h = [2, +\infty[$ puisque $x - 2 \geq 0 \iff x \geq 2$

Comme $x \mapsto x - 2$ est une fonction polynôme (définie et positive sur D_h), on sait que, pour tout x_0 de D_h, $\lim\limits_{x\to x_0} h(x) = h(x_0)$

Comme $3 \in D_h$, on a : $\lim\limits_{x\to 3} h(x) = h(3) = \sqrt{1} = 1$

$\boxed{\lim\limits_{3} h = 1}$

N.B. On a utilisé cette fois le troisième théorème de la page 106.

Comme D_h est un intervalle de la forme $[a, +\infty[$ on peut étudier $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)$.

Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} (x-2) = +\infty$, on sait (limite de fonction composée, p. 113) que

$\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = \lim\limits_{y\to+\infty} \sqrt{y} = +\infty$

$\boxed{\lim\limits_{+\infty} h = +\infty}$

D_h ne contient aucun intervalle de la forme $]-\infty, b]$. Il serait donc absurde de chercher la limite de h en $-\infty$.

La limite de h en $-\infty$ n'existe pas

EXERCICE 3

$f : x \mapsto \dfrac{x^2 + x + 1}{-x^2 + 5x - 6}$

Cette fraction rationnelle est définie lorsque son dénominateur est non nul.
Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation du second degré : $-x^2 + 5x - 6 = 0$.

$\Delta = 25 - 24 = 1$. Les solutions sont donc $\dfrac{-5+1}{-2}$ et $\dfrac{-5-1}{-2}$: le dénominateur de f s'annule en 2 et 3.

$\boxed{D = \mathbb{R}\setminus\{2 ; 3\} =]-\infty, 2[\cup]2 ; 3[\cup]3, +\infty[}$

En $+\infty$ ou $-\infty$, f, fraction rationnelle, a même limite que le rapport des monômes de plus haut degré de ses numérateur et dénominateur :

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2}{-x^2} = -1$ et de même, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -1$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -1$	$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -1$

Soit N(x) et D(x) respectivement le numérateur et le dénominateur de f(x).

On a $\lim\limits_{x \to 2} N(x) = 4 + 2 + 1 = 7$ et

$\lim\limits_{x \to 3} N(x) = 9 + 3 + 1 = 13$

Ainsi le numérateur N(x) tend vers une limite finie positive quand x tend vers 2 ou vers 3. On a vu que D(x), lui, tend vers 0 quand x tend vers ces valeurs. On sait qu'alors f(x) tend vers l'infini, avec le signe du dénominateur D(x).

Déterminons ce signe : D(x) est un trinôme du second degré, et dresser le tableau suivant donnant son signe :

x	$-\infty$		2		3		$+\infty$
D(x)		-	0	+	0	-	

D'où l'on déduit immédiatement :

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 3^+} f(x) = -\infty$$
$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 3^-} f(x) = +\infty$$

EXERCICE 4

1) Posons $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+3} - \sqrt{3}}{x}$

Il s'agit d'étudier la limite de f en zéro.

f(x) existe pour $x + 3 \geq 0$ et $x \neq 0$: $D_f = [-3 ; 0[\cup]0, +\infty[$

$0 \notin D_f$, mais on peut étudier la limite de f en 0 car 0 est une valeur isolée pour laquelle f n'est pas définie : $\{0\} \cup D_f$ est un intervalle de R.

On a $\lim\limits_{x \to 0}(x + 3) = 3$ donc $\lim\limits_{x \to 0} \sqrt{x+3} = \sqrt{3}$. D'après le théorème sur la différence de limites finies, le numérateur de f(x) tend alors vers $\sqrt{3} - \sqrt{3}$, c'est-à-dire 0, quand x tend vers 0. Comme c'est également le cas du dénominateur, on se trouve devant la forme indéterminée $\dfrac{0}{0}$.

Pour lever cette indétermination, on multiplie numérateur et dénominateur de f(x) par la " quantité conjuguée " du numérateur :

$$\text{Dans } D_f,\ f(x) = \frac{\left(\sqrt{x+3}-\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{x+3}+\sqrt{3}\right)}{x\left(\sqrt{x+3}+\sqrt{3}\right)}$$

$$= \frac{x+3-3}{x\left(\sqrt{x+3}+\sqrt{3}\right)} = \frac{1}{\sqrt{x+3}+\sqrt{3}}$$

Cette fraction (contrairement à f(x) prend une valeur en zéro : la valeur $\frac{1}{2\sqrt{3}}$.
Montrons que ce nombre est la limite de f en zéro.

En revenant à la définition, cela revient à démontrer que $f - \frac{1}{2\sqrt{3}}$ admet pour limite zéro en zéro.

$$\text{Or, pour } x \in D_f,\ f(x) - \frac{1}{2\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}-\sqrt{x+3}-\sqrt{3}}{2\sqrt{3}\left(\sqrt{x+3}+\sqrt{3}\right)}$$

$$= \frac{\sqrt{3}-\sqrt{x+3}}{2\sqrt{3}\left(\sqrt{x+3}+\sqrt{3}\right)}$$

Lorsque x tend vers 0, le numérateur de cette fraction tend vers $\sqrt{3}-\sqrt{3}$(c'est-à-dire 0), et son dénominateur tend vers $2\sqrt{3}\left(\sqrt{3}+\sqrt{3}\right)$ (c'est-à-dire 12), nombre non nul.

D'après les théorèmes sur les limites, on en déduit que $\lim\limits_{x\to 0}\left[f(x)-\frac{1}{2\sqrt{3}}\right] = 0$. donc

$$\boxed{\lim_{x\to 0} f(x) = \frac{1}{2\sqrt{3}}}$$

D'une manière générale, si une fonction se présente sous la forme indéterminée $\frac{0}{0}$ lorsque x tend vers x_0, on cherche, pour lever l'indétermination, à mettre $(x - x_0)$ en facteur au numérateur et au dénominateur pour pouvoir ensuite simplifier la fraction. On obtient alors une fonction dont on peut généralement trouver la limite en x_0 : cette limite sera aussi celle de la fonction initiale.

2) $f(x) = \frac{x^2-4x+1}{x+2} - \frac{x^2+2x-3}{x+1}$

$D_f = \mathbb{R} \setminus \{-2, -1\}$

Lorsque x tend vers l'infini, $\frac{x^2-4x+1}{x+2}$ se comporte comme $\frac{x^2}{x}$ et $\frac{x^2+2x-3}{x+1}$ aussi.
f(x) se présente donc alors sous la forme indéterminée $\infty - \infty$.

Pour lever l'indétermination, réduisons les deux fractions au même dénominateur :

$$f(x) = \frac{(x+1)(x^2-4x+1)-(x+2)(x^2+2x-3)}{(x+2)(x+1)}$$
$$= \frac{-7x^2-4x+7}{x^2+3x+2}$$

Donc, lorsque x tend vers l'infini, f(x) se comporte comme $\frac{-7x^2}{x^2}$ donc comme -7 :

$$\boxed{\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} f(x) = -7}$$

3) Posons $f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$ $\quad D_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$

Le numérateur s'annulant aussi pour 2, f(x) se présente sous la forme indéterminée $\frac{0}{0}$ lorsque x tend vers 2. Or, pour $x \in D_f$, $f(x) = x + 2$ (car $x^2 - 4 = (x + 2)(x - 2)$).

Comme $\lim\limits_{x \to 2}(x+2) = 4$, on peut conclure :

$$\boxed{\lim_{2} f = 4}$$

(En utilisant le théorème de la page 113)

EXERCICE 5

1) $f(x) = \frac{\sqrt{2x-1}-x}{x^2+3x-4}$

$x^2 + 3x - 4$ a pour racines évidentes 1 et -4 : $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-4 ; 1\}$

$\lim\limits_{x \to 1} \sqrt{2x-1} = 1$ donc $\lim\limits_{x \to 1} \sqrt{2x-1} - x = 1 - 1 = 0$

Ainsi, lorsque x tend vers 1 , f(x) se présente sous la forme indéterminée $\frac{0}{0}$

Pour lever cette indétermination, multiplions dénominateur et numérateur par la quantité conjuguée de ce dernier :

Pour tout x de D_f,

$$f(x) = \frac{\left(\sqrt{2x-1}-x\right)\left(\sqrt{2x-1}+x\right)}{\left(x^2+3x-4\right)\left(\sqrt{2x-1}+x\right)}$$
$$= \frac{2x-1-x^2}{\left(x^2+3x-4\right)\left(\sqrt{2x-1}+x\right)}$$

On peut alors aisément mettre (x - 1) en facteur au numérateur et au dénominateur :
Pour tout x de D_f,

$$f(x) = \frac{-(x-1)^2}{(x-1)(x+4)\left(\sqrt{2x-1}+x\right)}$$

$$= \frac{-x+1}{(x+4)\left(\sqrt{2x-1}+x\right)}$$

Cette fraction prend pour valeur 0 pour x = 1 (le dénominateur ne s'annule pas si x = 1).

Donc $\boxed{\lim_{x \to 1} f(x) = 0}$

2) $f(x) = \sqrt{x^2+x+1} - 3x$

$x^2 + x + 1$ est positif pour tout x ($\Delta = 1 - 4 = -3$). $D_f = \mathbb{R}$.

$\lim_{x \to +\infty} (x^2 + x + 1) = +\infty$ donc $\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x^2+x+1} = +\infty$

Comme on a aussi $\lim_{x \to +\infty} 3x = +\infty$, f(x) se présente sous la forme indéterminée $\infty - \infty$ lorsque x tend vers $+\infty$

Pour lever l'indétermination, mettons x^2 en facteur sous le radical.

$$f(x) = \sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)} - 3x \qquad \text{pour tout } x \text{ de } \mathbb{R}^*$$

$f(0) = 1$

La racine d'un produit de nombres positifs étant égale au produit de leurs racines, et $\sqrt{x^2}$ étant égal à $|x|$, on obtient :

$$f(x) = |x|\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}} - 3x$$

Nous voulons étudier la limite de f(x) quand x tend vers $+\infty$.
Nous pouvons donc nous placer dans l'intervalle $]0, +\infty[$ pour cette étude. Or, dans $\mathbb{R}^*_+$, on a $|x| = x$, donc

$$f(x) = x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}} - 3\right)$$

De $\lim_{x \to +\infty} \sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}} = 1$, on tire $\lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}} - 3\right) = -2$

et $\boxed{\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty}$

3) $f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1} - x$ On a encore $D_f = R$, et on aboutit à nouveau à la forme indéterminée $\infty - \infty$ lorsque x tend vers $+\infty$.

La méthode précédente nous conduisant à la forme indéterminée $\infty \times 0$, multiplions et divisons par l'expression conjuguée :

$$f(x) = \frac{\left(\sqrt{x^2 + x + 1} - x\right)\left(\sqrt{x^2 + x + 1} + x\right)}{\sqrt{x^2 + x + 1} + x}$$ si $x \in R \setminus \{-1\}$ (Car $\sqrt{x^2 + x + 1} + x = 0$ a pour solution -1 : faites la résolution).

$$= \frac{x + 1}{\sqrt{x^2 + x + 1} + x}$$

$$= \frac{x\left(1 + \frac{1}{x}\right)}{\sqrt{x^2\left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)} + x} = \frac{x\left(1 + \frac{1}{x}\right)}{|x|\sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} + x}$$

pour tout x de $R^* \setminus \{-1\}$

(car on peut se placer dans R^*_+ pour étudier la limite de f en $+\infty$).

Pour tout x de R^*_+,

$$f(x) = \frac{x\left(1 + \frac{1}{x}\right)}{x\left(\sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} + 1\right)}$$

$$f(x) = \frac{1 + \frac{1}{x}}{\sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} + 1}$$

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} f(x) = \frac{1}{2}}$$

SEQUENCE 3

LES FONCTIONS

A. Généralités sur variations et représentation de fonctions numériques

Ne vous attardez pas sur le calcul du taux de variation des fonctions : comme vous le savez, la dérivation est un outil plus puissant pour l'étude des variations d'une fonction. Nous reverrons en séquence 5 les dérivées usuelles mais, ici, il vous suffira de savoir ce qu'est une fonction croissante, décroissante ou constante sur un intervalle, et comment cela se traduit sur la représentation graphique.

A ce stade, vous devez parfaitement connaître (et reconnaître) les fonctions affines, affines par intervalles (on dit aussi affines " par morceaux "), en escalier ...

B. Continuité des fonctions numériques

I. Définitions

Une fonction f, définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, est dite :

- **continue au point x_0** de I si elle admet une limite finie en x_0
- **continue sur I** si elle est continue en tout point de I.

1) Remarque

Pour que f admette une limite en un point x_0, une première condition est qu'elle soit définie en des valeurs proches de x_0, mais pas nécessairement en x_0. Pour qu'une fonction f soit continue sur un intervalle, il faut d'abord qu'elle soit définie en tout point de cet intervalle. Comme pour une étude de limite, il faudra commencer toute étude de continuité de fonction par la recherche de l'ensemble de définition.

2) *Conséquence de la définition*

> Si f est continue sur I alors, pour tout x_0 de I,
>
> $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

En effet, soit f une fonction continue sur **I**, et x_0 un élément de I. Par définition de la continuité sur un intervalle, la limite de f en x_0 existe. Posons $l = \lim_{x \to x_0} f(x)$ et démontrons que $l = f(x_0)$. ($f(x_0)$ existe puisque f, continue sur I, y est définie).

Par définition de la limite (finie) d'une fonction en un point, on sait qu'il existe n de N* et k de R* tels que, pour $|h|$ assez petit et tel que $(x_0 + h) \in I$, $\left|f(x_0 + h) - l\right| \leq k\,|h|^n$
$\left|f(x_0 + h) - l\right| \leq k\sqrt{|h|}$. En particulier, si h = 0, on a $(x_0 + h) \in I$, car $x_0 + h = x_0$, et $\left|f(x_0) - l\right| \leq 0$.

Une valeur absolue n'étant jamais strictement négative, on en déduit que $\left|f(x_0) - l\right| = 0$ ou encore que $f(x_0) = l$.

3) *Exemples*

a) On sait déjà que les fonctions polynômes possèdent cette propriété.
Toute fonction polynôme est continue sur R.

b) De même, toute fonction rationnelle est continue **sur les intervalles où elle est définie.**

4) *Interprétation graphique*

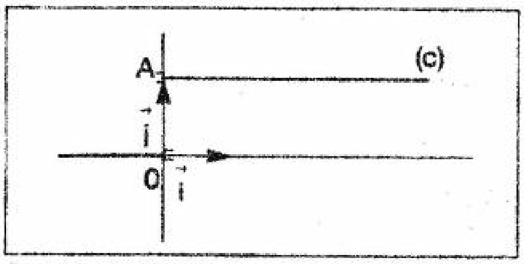
Soit la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$\begin{cases} x \to 0 \text{ si } x \in \mathbf{R} \\ x \to 1 \text{ si } x \in \mathbf{R}^*_+ \end{cases}$$

Bien que f soit définie en **0**, elle n'y admet pas de limite.
En effet, quel que soit le réel strictement positif x (aussi proche de 0 soit-il), on aura toujours f(x) = 1 ; f(x) ne se rapproche pas de **0** quand x tend vers 0. Or, puisque f(0) existe, si la limite de f en 0 existait, elle serait égale à f(0), c'est-à-dire 0.

On en déduit que f n'est continue sur aucun intervalle contenant 0 (bien qu'elle soit définie sur tous ces intervalles).

On dit que f présente une **discontinuité en 0.**



On voit ci-contre que, sur la courbe représentative de f, cette discontinuité en 0 se traduit par un " saut " entre le point O(0 ; 0) (appartenant à la courbe) et le point A(0 ; 1) (qui ne lui appartient pas).

La courbe représentative d'une fonction continue sur un intervalle peut, au contraire, être tracée " sans lever le crayon " entre les deux points qui ont pour abscisses les extrémités de cet intervalle. Exemples : arcs de parabole pour les fonctions polynômes ; arcs d'hyperboles correspondant à des intervalles où la fonction est définie pour les fonctions homographiques ...).

5) Comme nous l'avons fait pour les limites, nous pouvons compléter la définition de la continuité en un point par deux autres :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et $x_0 \in I$.

- **f est continue à droite en x_0** si $\lim\limits_{x_0^+} f = f(x_0)$
- **f est continue à gauche de x_0** si $\lim\limits_{x_0^-} f = f(x_0)$

Là encore, il est essentiel de remarquer que f **doit être définie en x_0**, pour y être continue à droite ou à gauche.

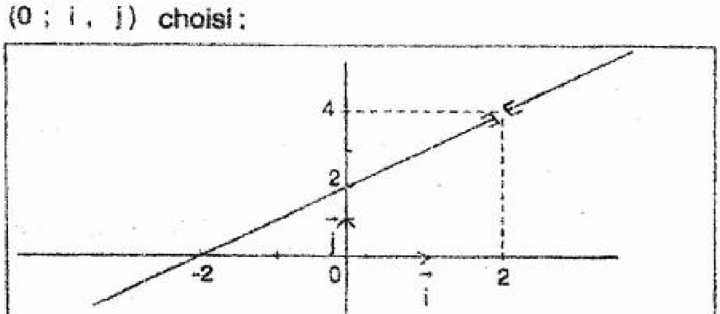
Si f est continue à droite et à gauche en x_0, alors elle y est continue.

En effet, on a alors $\lim\limits_{x_0^+} f = \lim\limits_{x_0^-} f = \lim\limits_{x_0} f = f(x_0)$

6) Prolongement par continuité

Soit : $f : x \to \dfrac{x^2-4}{x-2}$. On a vu que, bien que non définie en 2, f y admet 4 pour limite.

Comme $f(x) = x + 2$ pour $x \neq 2$, la représentation de f est la suivante dans le repère $(0 ; \vec{i}, \vec{j})$ choisi :



On voit qu'il suffit pour "rendre f continue", de poser f(2) = 4. Ce faisant, on obtient en fait une **autre** fonction, puisqu'elle est définie en 2 alors que f ne l'est pas. C'est la fonction g déterminée par g(x) = f(x) pour $x \neq 2$ et g(2) = 4.
g est appelée "prolongement par continuité de f en 2".

Soit f une fonction non définie en x_0, mais définie et continue sur un sous-ensemble D de R tel que $D \cup \{x_0\}$ soit un intervalle.

Si f admet en x_0 une limite finie l, la fonction g définie par :

$$\begin{cases} g(x_0) = l \\ g(x) = f(x) \text{ si } x \neq x_0 \end{cases}$$

est continue sur $D \cup \{x_0\}$. C'est **le prolongement par continuité de f en x_0.**

II. Propriétés des fonctions continues sur un intervalle I

Nous énonçons ici des théorèmes qui ont des applications pratiques importantes (que nous verrons plus tard pour la plupart).
Leur démonstration n'est pas à votre programme.

Rappel : on note f (I), ou f < I >, l'ensemble des valeurs prises par f (x) lorsque x décrit I.

Théorème 1. L'image d'un intervalle I par une fonction f continue sur cet intervalle est un intervalle.
Si I est fermé, f (I) est également fermé.

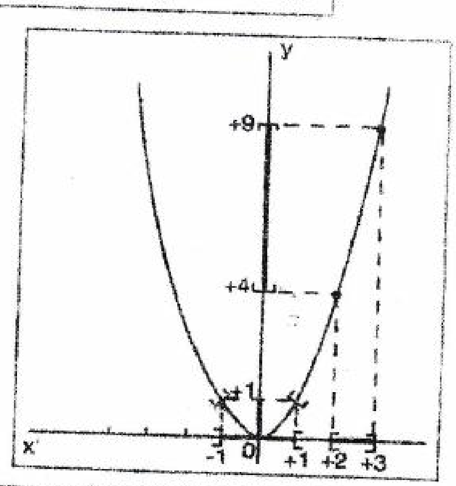
Remarque : un intervalle fermé de **R** est parfois appelé **segment.**
La deuxième partie du théorème précédent peut donc aussi s'énoncer :

L'image par une fonction continue d'un segment de **R** est un segment de **R**.

Exemple 1.

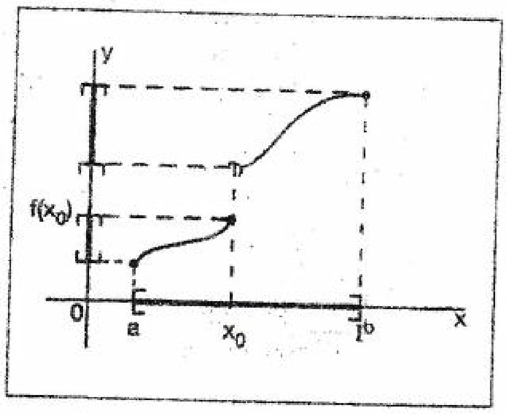
Soit f la fonction définie sur **R** par $f(x) = x^2$.
f est continue sur **R** comme fonction polynôme.

I =]-1, + 1[: f (I) = [0 ; 1[
I = [+ 2, + 3] : f (I) = [4 ; 9]

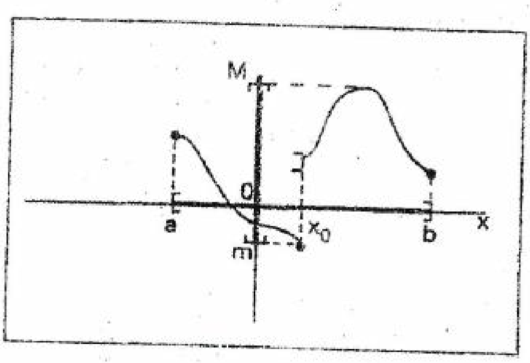


Exemple 2. La figure ci-après est la représentation graphique d'une fonction f telle que :

- f est définie sur $I = [a, b]$;
- f est continue sur $I \setminus \{x_0\}$ ($x_0 \in I$) ;
- f n'est pas continue en x_0 ;
- f(I) n'est pas un intervalle.



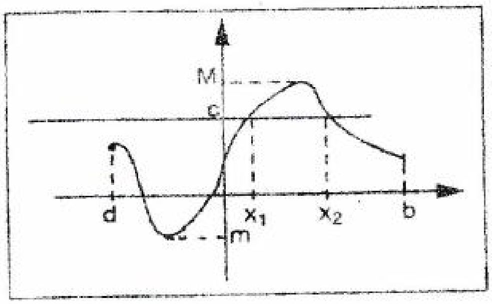
Attention : il ne faudrait pas déduire de l'exemple ci-dessus que si f, définie sur un intervalle I, n'y est pas continue, alors f(I) n'est pas un intervalle.
En effet, f(I) peut être un intervalle sans que f soit continue sur I comme la figure ci-après peut vous en convaincre.



On a bien $J = [m, M] = f(I)$, où $I = [a, b]$; pourtant f n'est pas continue en x_0.

Théorème 2 (théorème de la valeur intermédiaire)
Soit f une fonction définie et continue sur un segment I et soit $J = [m, M] = f(I)$.
Alors f prend au moins une fois sur I toute valeur comprise entre m et M.

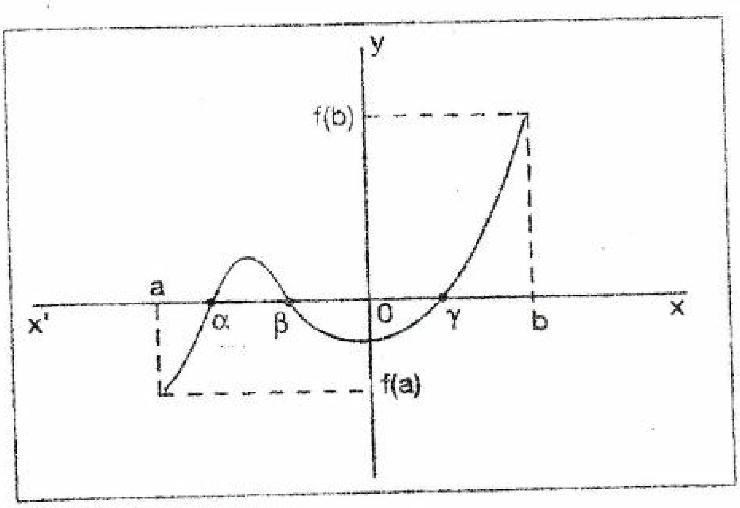
Ce qu'on peut encore écrire :
pour tout c dans J, il existe au moins un x de I tel que c = f(x).



Ceci est vrai en particulier dans le cas où $0 \in J$, ce qui est toujours réalisé si, pour $I = [a, b]$, f(a) et f(b) sont de signes contraires, c'est-à-dire si $f(a)\,f(b) < 0$.

D'où le théorème suivant :

Théorème 3 : Soit f une fonction numérique continue sur l'intervalle [a, b] telle que $f(a)\,f(b) < 0$.
Alors l'équation f(x) = 0 admet au moins une solution dans l'intervalle]a,b[



l'équation f(x) = 0 admet pour solutions :
α, β, γ

Théorème 4
Toute fonction f continue **strictement monotone** sur un intervalle I est une bijection de I sur l'intervalle J = f(I).
Son application réciproque f^{-1} (définie sur J) est elle aussi continue et strictement monotone, de même sens que f.

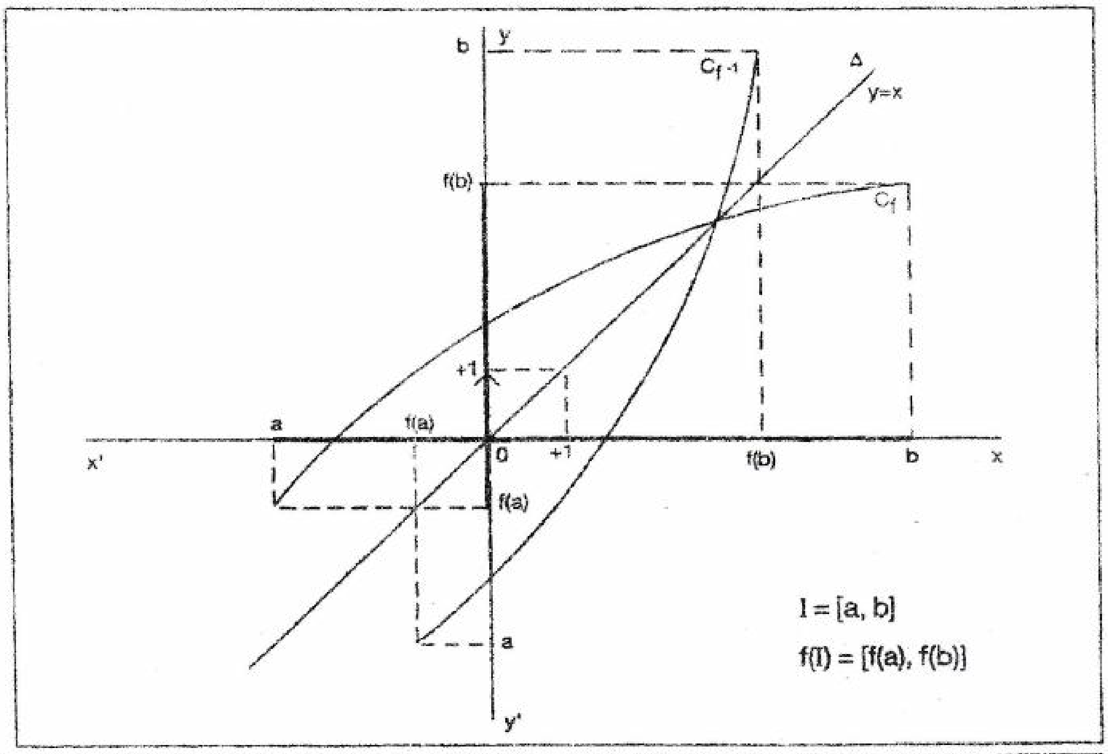
Pour que f soit une bijection de I sur f(I), il faut bien sûr qu'elle soit strictement monotone sinon il existerait un couple (x_1, x_2) d'éléments de I tels que $f(x_1) = f(x_2)$: f ne serait pas injective.

f étant une bijection, vous savez que sa réciproque f^{-1} existe (séquence 1) et que sa courbe représentative en repère orthonormé est symétrique de celle de f par rapport à la première bissectrice (droite Δ d'équation y = x).

Vous remarquerez que ce théorème est valable pour tout type d'intervalle I qui peut donc éventuellement être ouvert, et même non borné.

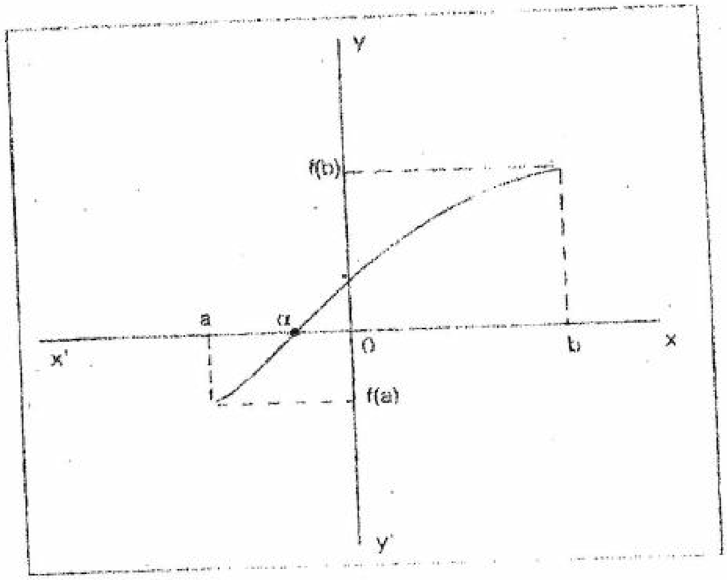
La figure suivante est faite dans le cas où I est un segment [a, b]. Comme f a été choisie croissante, on a J = [f(a), f(b)].

Vous vérifiez sur cette représentation que f^{-1} est bien croissante aussi (strictement).



Des deux théorèmes précédents on déduit :

Théorème 5
Si f est une fonction numérique continue et strictement monotone sur [a,b] telle que f(a) f(b) < 0, alors l'équation f(x) = 0 admet une solution unique dans l'intervalle]a,b[.



La solution de l'équation f(x) = 0 est α

Ce théorème permet donc de démontrer l'existence d'une solution pour une équation f(x) = 0, dans les conditions où il s'applique. Nous verrons aussi, après l'étude des variations des fonctions (séquence 10) qu'il permet de plus de donner une valeur approchée de cette solution.

ENONCE DES EXERCICES

EXERCICE 1

Soit f la fonction numérique définie par :

$$\begin{cases} f(x) = 2x & \text{si } x \in [0\,;1[\\ f(x) = 2 & \text{si } x \in [1\,;3[\\ f(x) = -x+7 & \text{si } x \in [3\,;6] \end{cases}$$

Après avoir précisé l'ensemble de définition de f, déterminer la nature de cette fonction. Dresser son tableau de variations et la représenter graphiquement dans un repère orthonormé.

EXERCICE 2

$f : x \rightarrow \dfrac{2x}{x-1}$ est-elle continue en 1 ?

$g : x \rightarrow \dfrac{2x}{x-3}$ est-elle continue en 2 ? Est-elle continue sur l'intervalle]1 ; 2] ? Et sur]2 ; 4[?

EXERCICE 3

Soit la fonction numérique f définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{x^3+x} & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

Etudier la continuité de f en 0.

EXERCICE 4

On considère la fonction numérique f telle que

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{x^3+x^2-11x+10}{x^2-6x+8} & \text{pour } x \in \mathbb{R} \setminus \{2;4\} \\ f(2) = -\dfrac{5}{2} \end{cases}$$

1) f est-elle continue au point 2 ?

2) Déterminer l'ensemble sur lequel f est continue.

EXERCICE 5

Soit la fonction f déterminée par :

$$\begin{cases} \bullet \text{ Si } x < 1 : f(x) = \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x - 1} \\ \bullet \text{ Si } x > 1 : f(x) = \dfrac{x^2 - ax + 3}{x^2 + bx - b - 1} \\ f(1) = c \end{cases}$$

Déterminer a, b et c pour que f soit continue en 1.

EXERCICE 6

Déterminer, si elle existe, la limite en 1 de la fonction f telle que $f(x) = \dfrac{\sqrt{x-1}}{x-1}$, et trouver un prolongement par continuité de f à $D_f \cup \{1\}$ (D_f étant l'ensemble de définition de f).

EXERCICE 7

L'image par $f : x \mapsto x^2$ de $I =]-1 ; 2[$ est-elle un intervalle ouvert ?

CORRIGÉS DES EXERCICES

EXERCICE 1

• f est définie par :

$$\begin{cases} f(x) = 2x & \text{si } x \in [0, 1[\\ f(x) = 2 & \text{si } x \in [1, 3[\\ f(x) = -x + 7 & \text{si } x \in [3, 6] \end{cases}$$

• f est donc définie sur $[0 ; 1[\cup [1 ; 3[\cup [3 ; 6] = [0 ; 6]$.
$D_f = [0 ; 6]$

• La restriction de f à chacun des intervalles $[0 ; 1[$, $[1 ; 3[$, $[3 ; 6]$ est donc une fonction affine.
f est donc une fonction affine par intervalles sur [0 ; 6]

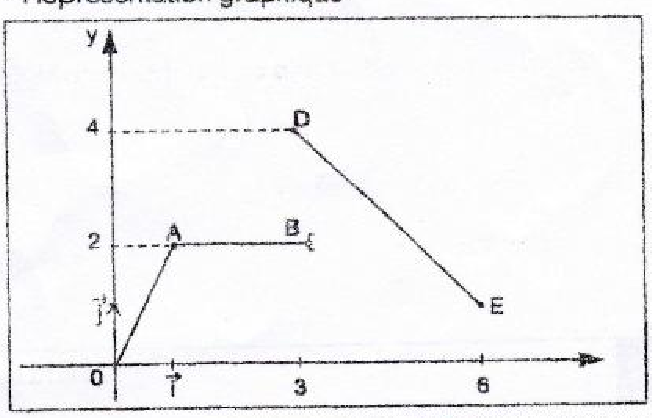
• Etude des variations de f.
Sur [0, 1[, f est croissante (coefficient de x positif)
Sur [1, 3[, f est constante.
Sur [3 ; 6], f est décroissante (coefficient de x négatif)

• Tableau de variation

x	0	1	3	6
f(x)	0 ↗	2 →	2 ‖ 4 ↘	1

• Etude des valeurs remarquables
pour x = 0 f(x) = 2 x = 0
pour x = 1 f(x) = 2
pour x = 3 f(x) = -x + 7 = 4
pour x = 6 f(x) = -x + 7 = 1

• Représentation graphique



• Sur [0, 1[, $f(x) = 2x$
f est représentée graphiquement par le segment semi-ouvert [OA[, A de coordonnées (1,2).

• Sur [1 ; 3[, $f(x) = 2$
f est représentée graphiquement par le segment semi-ouvert [AB[avec B(3,2).

• Sur [3 ; 6], $f(x) = -x + 7$
f est représentée graphiquement par le segment fermé [DE] avec D(3,4) et E(6,1).

EXERCICE 2

$f : x \mapsto \dfrac{2x}{x-1}$ n'est pas définie en 1. On en déduit immédiatement que

$\boxed{\text{f n'est pas continue en 1}}$

$g : x \to \dfrac{2}{x-3}$ est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{3\}$. Cette fonction rationnelle est continue en tout point de son ensemble de définition, en particulier en 2.

$\boxed{\text{g est continue en 2}}$

$]1 ; 2] \subset D_g$ Donc g est continue en tout point de cet intervalle. Par définition de la continuité sur un intervalle, on conclut :

$\boxed{\text{g est continue sur l'intervalle }]1 ; 2]}$

$3 \in]2 ; 4[$. Or g n'est pas continue en 3, puisqu'elle n'y est pas définie. On en déduit que

$\boxed{\text{g n'est pas continue sur }]2 ; 4[}$

EXERCICE 3

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{x^3+x} & \text{pour} \quad x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

$x^3 + x$ s'annule seulement si $x = 0$. Mais comme f est définie en 0 par la donnée $f(0) = 0$, on a $D_f = \mathbb{R}$.
Cherchons si f a une limite en 0.

Quand x tend vers 0, $\sqrt{x^2+1} - x$ tend vers 0, ainsi que $x^3 + x$.

f(x) se présente donc sous la forme indéterminée $\dfrac{0}{0}$.

$$f(x)=\frac{\left(\sqrt{x^2+1}-1\right)\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)}{\left(x^3+x\right)\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)} \quad \text{pour} \quad x\neq 0$$

$$=\frac{x^2}{\left(x^3+x\right)\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)}$$

Soit, en mettant x en facteur au dénominateur et en simplifiant par x ($x \neq 0$) :

$$f(x)=\frac{x}{\left(x^2+1\right)\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)} \quad \text{si } x\neq 0$$

Cette fraction prend la valeur 0 en 0 (car, pour cette valeur de x, le numérateur s'annule, mais pas le dénominateur). Par ailleurs, et par hypothèse, f(0) = 0.

Donc $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$, et on peut conclure :

$\boxed{\text{f est continue en 0}}$

EXERCICE 4

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{x^3+x^2-11x+10}{x^2-6x+8} & \text{pour} \quad x\in \mathbb{R}\setminus\{2;4\} \\ f(2)=-\dfrac{5}{2} \end{cases}$$

Le dénominateur $x^2 - 6x + 8$ a pour racines 2 et 4. Comme f est par ailleurs définie en 2, on a $D_f = \mathbb{R} \setminus \{4\}$

1) Pour savoir si f est continue en 2, nous allons chercher $\lim\limits_{2} f$.

Pour x = 2, on a $x^3 + x^2 - 11x + 10 = 0$. f(x) se présente donc sous la forme indéterminée $\frac{0}{0}$ lorsque x tend vers 2. Pour lever l'indétermination, sachant que (x - 2) peut se mettre en facteur au numérateur.

En opérant par identification, il vient :

$$\begin{aligned} x^3 + x^2 - 11x + 10 &= (x-2)(ax^2+bx+c) \\ &= ax^3 + (b-2a)x^2 + (c-2b)x - 2c \end{aligned}$$

D'où on tire immédiatement a = 1 et c = -5, puis b - 2 = 1, d'où b = 3 (on vérifie qu'on a bien alors c - 2b = - 11).

Pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{2\ ;\ 4\}$, on peut donc écrire

$$f(x) = \frac{(x-2)(x^2+3x-5)}{(x-2)(x-4)} = \frac{x^2+3x-5}{x-4}$$

Or, pour $x = 2$, $\frac{x^2+3x-5}{x-4} = -\frac{5}{2}$ et, par hypothèse, $f(2) = -\frac{5}{2}$

Donc, pour tout x de D_f $f(x) = \frac{x^2+3x-5}{x-4}$: f est une fonction rationnelle.
Par conséquent, f est continue sur D_f, en particulier en 2.

$\boxed{\text{f est continue en 2}}$

2) De l'étude précédente il résulte :

$\boxed{\text{f est continue sur l'ensemble } \mathbb{R} \setminus \{4\}}$

EXERCICE 5

- Si $x < 1$ $f(x) = \frac{x^2-3x+2}{x-1}$
- Si $x > 1$ $f(x) = \frac{x^2-ax+3}{x^2+bx-b-1}$
- $f(1) = c$

Pour que f soit continue en 1, une première condition est qu'elle y soit définie, ce qui est le cas puisque $f(1) = c$.

Par définition, f sera alors continue en 1 si elle y admet une limite finie. Comme f(x) prend des expressions algébriques différentes selon que x est supérieur ou inférieur à 1, nous étudierons l'existence d'une limite à droite et d'une limite à gauche de f en 1. Nous savons que f est continue en 1 si et seulement si elle est continue à droite et à gauche en 1 (théorème p. 125).

Continuité à gauche

Pour $x < 1$, $f(x) = \frac{x^2-3x+2}{x-1}$. Le numérateur de cette fraction s'annule pour $x = 1$, donc f(x) se présente sous la forme indéterminée $\frac{0}{0}$ quand x tend vers 1^-. Pour lever cette indétermination, remarquons que les racines du numérateur de f(x) sont 1 et 2, donc qu'on peut le mettre sous la forme $(x - 1)(x - 2)$.

Ainsi, pour $x < 1$, $f(x) = x - 2$.

Soit g_1 la fonction de R dans R qui à x fait correspondre x - 2.
Sur]- ∞, 1[, $f = g_1$. Or g_1, fonction polynôme, est continue sur R et, en particulier, continue à gauche en 1. On sait que $\lim_{1^-} g_1 = g_1(1) = -1$. f étant définie en 1, sa limite à gauche en 1 existera donc si et seulement si f(1) = -1. Or f(1) = c.

Pour que f soit continue à gauche en 1, il faut et il suffit que c = -1.

Continuité à droite

Pour $x > 1, f(x) = \dfrac{x^2 - ax + 3}{x^2 + bx - b - 1}$.
Le dénominateur de cette fraction est un trinôme du second degré dont la somme des coefficients est nulle. Il admet donc 1 pour racine. Si le numérateur ne s'annule pas, lui aussi, pour x = 1, la fraction ne pourra tendre que vers l'infini quand x tend vers 1. Or cette limite ne peut être, par ailleurs, que f(1), valeur finie. On a donc ainsi établi qu'une condition nécessaire pour que f soit continue (à droite) en 1 est que $x^2 - ax + 3 = 0$ pour x = 1, ce qui s'écrit 4 - a = 0, ou encore a = 4.

Cette condition étant réalisée, le numérateur de f(x), $x^2 - 4x + 3$, peut s'écrire (x - 1) (x - 3). Le dénominateur, lui, peut s'écrire (x - 1) (x + b + 1).

Alors, pour $x < 1,\ f(x) = \dfrac{(x-1)(x-3)}{(x-1)(x+b+1)} = \dfrac{x-3}{x+b+1}$

Soit g_2 la fonction de R dans R qui à x fait correspondre $\dfrac{x-3}{x+b+1}$

Sur]1, + ∞[, $f = g_2$. Or g_2 est une fonction rationnelle définie sur R \ {-b -1} et, en tant que telle, elle est continue à droite en 1 à condition que -b - 1 ≠ 1, c'est-à-dire que b ≠ -2.

Si cette condition est réalisée, on a $\lim_{x \to 1^+} g_2(x) = \dfrac{-2}{b+2}$

Comme f(1) = - 1, si les deux conditions précédentes sont réalisées, une condition nécessaire et suffisante pour que f soit continue à droite en 1 sera donc $\dfrac{-2}{b+2} = -1$ c'est-à-dire b = 0.

Cette dernière condition réalise bien $b \neq -2$.
Nous pouvons donc affirmer que la condition nécessaire et suffisante pour que f soit continue à droite en 1 est **a = 4 et b = 0.**

En conclusion,

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{f est continue en 1 si et seulement si}\\ a = 4, \quad b = 0 \quad \text{et} \quad c = -1\end{array}}$$

Alors f est déterminée par :

$$\begin{cases} f(x) = x - 2 \text{ pour } x < 1 \\ f(x) = \dfrac{x-3}{x+1} \text{ pour } x > 1 \\ f(1) = -1 \end{cases}$$

EXERCICE 6

$$f(x) = \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1}$$

$\sqrt{x}$ n'a de sens que pour $x \geq 0$. De plus, la fraction f(x) n'a de sens que si son dénominateur n'est pas nul, c'est-à-dire pour $x \neq 1$:

$$\mathbf{D_f = R^+ \setminus \{1\}}$$

1 n'appartenant pas à D, f n'est pas continue en 1. Déterminons, si elle existe, sa limite en ce point.

On sait que $\lim\limits_{x \to 1} \sqrt{x} = \sqrt{1} = 1$. Donc $\lim\limits_{x \to 1}\left(\sqrt{x} - 1\right) = 0$, et f(x) se présente sous la forme Indéterminée $\frac{0}{0}$ lorsque x tend vers 1.

Pour lever cette indétermination, remarquons que, pour x dans D_f,

$$x - 1 = (\sqrt{x})^2 - 1 = (\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1).$$

Pour x dans D_f, $\sqrt{x} - 1 \neq 0$: on peut simplifier f(x) par $\sqrt{x} - 1$.

On obtient $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x} + 1}$

Posons g : $R^+ \to R$

$$x \to \frac{1}{\sqrt{x} + 1}$$

g est définie sur R^+ et les théorèmes sur les limites nous permettent d'écrire :

$\lim_{x \to 1} g(x) = g(1) = \frac{1}{2}$

On en déduit : $\boxed{\lim_{1} f = \frac{1}{2}}$

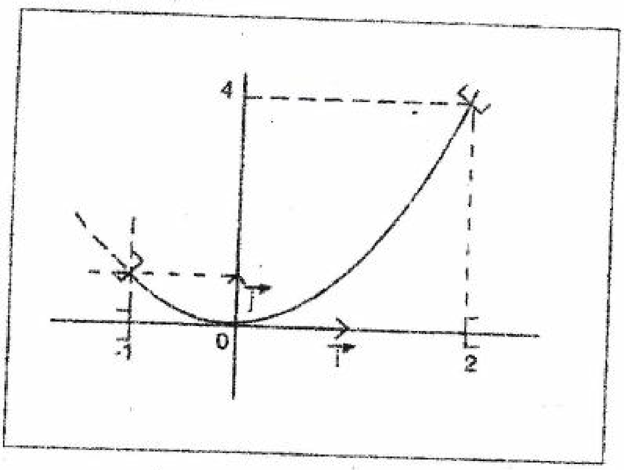
La fonction g, qui vérifie $g(x) = f(x)$ pour tout x de D_f et $g(1) = \lim_{x \to 1} f(x)$, est le prolongement par continuité de f à $D_f \cup \{1\}$, c'est-à-dire à R^+.

$g : R^+ \to R$

$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x+1}}$

est le prolongement par continuité de f à R^+.

EXERCICE 7



La fonction $f : x \mapsto x^2$ est définie et continue sur R, donc en particulier sur $]-1 ; 2[$.
Le théorème 1 du cours p. 126 permet d'affirmer que, dans ces conditions, l'image par f de $I =]-1 ; 2[$ est un intervalle. Pour connaître sa nature, il faut le déterminer.

On sait que la courbe représentative de f est une parabole " tournée vers les y positifs " et ayant l'origine pour sommet. Lorsque x varie de -1 à 0, f(x) varie de 1 à 0, en atteignant cette valeur. Lorsque de 0 à 2, f(x) varie de 0 à 4.

Finalement, $f(I) = [0 ; 4[$

$\boxed{\text{f(I) n'est pas un intervalle ouvert}}$

Je vous rappelle qu'on ne peut conclure **directement** à la nature de l'image d'un intervalle par une fonction continue que si cet intervalle est un segment (alors son image en est un aussi).

Dans tous les autres cas, les intervalles images prennent une forme qu'il est impossible de prévoir à priori : il faut les déterminer pour connaître leur nature.