



Centre national de télé-enseignement de Madagascar

CNTEMAD

Apprendre et réussir en toute liberté

www.cntemad.mg

cntemad@cntemad.mc
22 600 57

**LICENCE 1
EN INFORMATIQUE
MODULE 12**

**METROLOGIE
EN
INFORMATIQUE**



Mention : Informatique

Grade : Licence

Semestre : 2

Cours de Métrologie

Chapitre 1 - GENERALITES SUR LA METROLOGIE

1.1 Introduction

La métrologie au sens étymologique du terme se traduit par « science de la mesure ».

La métrologie s'intéresse traditionnellement à la détermination des caractéristiques (appelées grandeurs) qui peuvent être fondamentales comme par exemple une longueur, une masse, un temps, ou dérivées des grandeurs fondamentales comme par exemple une surface, une vitesse.

Cependant, dans les domaines courants des essais, il existe de nombreuses caractéristiques n'ayant qu'une relation indirecte avec ces grandeurs. C'est le cas, par exemple, de la dureté, de la viscosité, qui peut poser des problèmes dans l'interprétation.

Mesurer une grandeur physique consiste à lui attribuer une valeur quantitative en prenant pour référence une grandeur de même nature appelée unité.

Dans le langage courant des «métrologues», on entend souvent dire **mesurer c'est comparer**.

Les résultats des mesures servent à prendre des décisions dans de nombreux domaines, tels que:

- acceptation d'un produit (mesure de caractéristiques, de performances, conformité à une exigence),
- réglage d'un instrument de mesure, validation d'un procédé,
- réglage d'un paramètre dans le cadre d'un contrôle d'un procédé de fabrication
- validation d'une hypothèse scientifique,
- protection de l'environnement,
- définition des conditions de sécurité d'un produit ou d'un système.

L'ensemble de ces décisions concourt à la qualité des produits ou des services: on peut qualifier quantitativement la qualité d'un résultat de mesure grâce à son incertitude.

En effet sans incertitude les résultats de mesure ne peuvent plus être comparés:

- soit entre eux (essais croisés),
- soit par rapport à des valeurs de références spécifiées dans une norme ou une spécification (conformité d'un produit).

1.2 La mesure d'une grandeur physique

On appelle **grandeur physique** toute propriété de la nature qui peut être quantifiée par la mesure ou le calcul, et dont les différentes valeurs possibles s'expriment à l'aide d'un nombre généralement accompagné d'une unité de mesure.

Ainsi par exemple, la masse et la longueur sont des grandeurs qui s'expriment respectivement en kilogramme et en mètre (ou en multiples de ces unités de base), alors que l'indice de réfraction d'un milieu s'exprime à l'aide d'un nombre sans unité et constitue une grandeur sans dimension.

L'addition et la soustraction de nombres n'est possible que s'ils sont relatifs à la même grandeur.

En revanche, il est possible de multiplier ou de diviser des grandeurs différentes, auquel cas on obtient une nouvelle grandeur dérivée des deux autres. Par exemple, la vitesse est issue de la division de la longueur par le temps. Il existe donc théoriquement une infinité de grandeurs, mais seul un certain nombre d'entre elles sont utilisées dans la pratique. Le domaine de la physique qui traite des relations entre les grandeurs est l'analyse dimensionnelle.

On écrira le résultat d'une mesure d'une grandeur sous la forme: $X = \{X\} \cdot [X]$

où X est le nom de la grandeur physique, $[X]$ représente l'unité et $\{X\}$ est la valeur numérique de la grandeur exprimée dans l'unité choisie.

Toute grandeur physique est invariante, c'est-à-dire qu'elle ne dépend pas de l'unité dans laquelle on l'exprime. Par exemple:

Longueur d'une règle = 30,48 cm,

0,3048 m,

12 pouces,

1,646 · 10⁻⁴ mille marin.

On remarque que la valeur numérique dépend de l'unité choisie. En conséquence, celle-ci doit toujours être précisée.

1.3 Un peu de vocabulaire

Dans le vocabulaire officiel des normes de métrologie, cette opération communément appelée mesure est appelée **mesurage** (en anglais *measurement*).

De même, la grandeur physique soumise à l'opération de mesurage est appelée **mesurande** (en anglais *measurand*).

Attention aux faux amis, l'opération d'**étalonnage** (en anglais *calibration*) doit être distinguée de celle appelée **calibrage** (en anglais *gauging*).

Il ne faut pas utiliser le terme précision mais le terme **incertitude** (en anglais *uncertainty*).

1.4 Système international d'unités

Le **Système International d'unités** (abrégé en **SI**), inspiré du **système métrique**, est le système d'unités le plus largement employé du monde. Il s'agit d'un système d'unités décimal (On passe d'une unité à ses multiples ou sous-multiples à l'aide de puissances de 10).

C'est la Conférence générale des poids et mesures, rassemblant des délégués des états membres de la Convention du Mètre, qui décide de son évolution, tous les quatre ans, à Paris. L'abréviation de « Système International » est SI, quelle que soit la langue utilisée.

La norme internationale **ISO 1000 (ICS 01 060)** décrit les unités du Système International et les recommandations pour l'emploi de leurs multiples et de certaines autres unités.

1.4.1 Unités de base

Les définitions des unités de base du système international utilisent des phénomènes physiques reproductibles.

Seul le kilogramme est encore défini par rapport à un objet matériel susceptible de s'altérer.

Actuellement, des recherches ont donc lieu pour remplacer cette définition par une autre, utilisant cette fois un phénomène physique.

À l'issue de ces recherches, le kilogramme pourrait perdre son statut d'unité de base au profit d'une autre unité: c'est en effet seul le nombre d'unités fondamentales qui est imposé, puisqu'elles doivent permettre, par combinaison, de mesurer toute grandeur physique connue sans définition redondante, mais le choix précis des unités fondamentales comme les unités de masse, longueur, temps, courant électrique, température, intensité lumineuse et quantité de matière est purement **arbitraire**.

Grandeur	Symbole	Nom de l'unité	Symbole de l'unité	Définition, Remarques
longueur	m	mètre	m	<p>Le mètre est la longueur du trajet parcouru dans le vide par la lumière pendant une durée de 1/299792458 de seconde.</p> <p>Historiquement, la première définition officielle et pratique du mètre (1791) était basée sur la circonférence de la terre, et valait 1/40000000 d'un méridien.</p> <p>Auparavant, le mètre en tant que proposition d'unité décimale de mesure universelle était défini comme la longueur d'un pendule qui oscille avec une demi-période d'une seconde.</p>

Grandeur	Symbole	Nom de l'unité	Symbole De l'unité	Définition, Remarques
masse	M	kilogramme	kg	<p>Le kilogramme est la masse du prototype international du kilogramme.</p> <p>Ce dernier, composé d'un alliage de platine et d'iridium (90%-10%), est conservé au Bureau international des poids et mesures à Sèvres, en France. Historiquement, la définition du kilogramme était la masse d'un décimètre cube d'eau (un litre).</p>
temps	T	seconde	s	<p>La seconde est la durée de 9 192 631 770 périodes de la radiation correspondant à la transition entre les deux niveaux de l'état fondamental de l'atome de césum 133 à la température de 0 kelvin.</p> <p>La seconde était à l'origine basée sur la durée du jour terrestre, divisé en 24 heures de 60 minutes, chacune d'entre elles durant 60 secondes (soit 86 400 secondes pour une journée)</p>
Courant électrique	I	Ampère	A	L'ampère est l'intensité d'un courant constant qui, maintenu dans deux conducteurs parallèles, rectilignes, de longueur infinie, de section circulaire négligeable et placés à une distance de un mètre l'un de l'autre dans le vide produirait entre ces conducteurs une force égale à $2 \cdot 10^{-7}$ newton par mètre de longueur.
température	T	Kelvin	K	Le kelvin, unité de température thermodynamique, est la fraction 1/273,16 de la température thermodynamique du point triple de l'eau.
Quantité de matière	N	mole	mol	<p>La mole est la quantité de matière d'un système contenant autant d'entités élémentaires qu'il y a d'atomes dans 0,012 kilogramme de carbone 12.</p> <p>Ce nombre d'entités élémentaires est appelé nombre d'Avogadro. Lorsque l'on emploie la mole, les entités élémentaires doivent être spécifiées et peuvent être des atomes, des molécules, des ions, des électrons, d'autres particules ou des groupements spécifiés de telles particules.</p>
Intensité lumineuse	I_V	candela	cd	La candela est l'intensité lumineuse, dans une direction donnée, d'une source qui émet un rayonnement monochromatique de fréquence $540 \cdot 10^{12}$ hertz et dont l'intensité énergétique dans cette direction est de 1/683 watt par stéradian.

Certaines unités fondamentales utilisent d'autres unités fondamentales dans leur définition, parfois *via* des unités dérivées (la définition de la seconde utilise par exemple celle de kelvin).

Les unités fondamentales ne sont donc pas strictement indépendantes les unes des autres, mais les grandeurs physiques qu'elles permettent de mesurer le sont.

1.4.2 Unités supplémentaires

A côté de ces unités de base et des unités dérivées, il existe des unités supplémentaires, au nombre de deux:

- l'unité d'angle plan: le **radian** (symbole: rad) ; le radian est l'angle plan compris entre deux rayons qui, sur la circonférence d'un cercle, interceptent un arc de longueur égale à celle du rayon,
- l'unité d'angle solide: le **stéradian** (symbole: sr) ; le stéradian est l'angle solide qui, ayant son sommet au centre d'une sphère, découpe sur la surface de cette sphère une aire égale à celle d'un carré ayant pour côté le rayon de la sphère.

Les grandeurs «angle plan» et «angle solide» doivent être considérées comme des unités sans dimension qui peuvent être utilisées ou non dans les expressions des unités dérivées.

1.4.3 Unités dérivées

Les unités dérivées font partie du système international d'unités et sont déduites des sept unités de base.

1.4.3.1 Unités ayant un nom et un symbole spécial

Grandeur physique	Nom de l'unité	Symbole de l'unité	Expression en termes d'autres unités	Expression en termes d'unités de base	Relation
Fréquence	hertz	Hz		s^{-1}	Fréquence = 1 / période
Force	newton	N		$kg\ m\ s^{-2}$	Force = masse · accélération
Contrainte et pression	pascal	Pa	$N\ m^{-2}$	$kg\ m^{-1}\ s^{-2}$	Pression = force / surface
Travail, énergie et quantité de chaleur	joule	J	N m	$kg\ m^2\ s^{-2}$	Travail = force · distance; énergie cinétique = masse · vitesse ² / 2
Puissance, flux énergétique et flux thermique	watt	W	$J\ s^{-1}$	$kg\ m^2\ s^{-3}$	Puissance = travail / temps
Quantité d'électricité et charge électrique	coulomb	C		A s	Charge = courant · temps

Grandeur physique	Nom de l'unité	Symbol de l'unité	Expression en termes d'autres unités	Expression en termes d'unités de base	Relation
Force électromotrice et différence de potentiel (ou tension)	volt	V	$J C^{-1}$	$kg\ m^2\ s^{-3}\ A^{-1}$	Tension = travail / charge
Résistance électrique	ohm	Ω	$V\ A^{-1}$	$kg\ m^2\ s^{-3}\ A^{-2}$	Résistance = tension / courant
Conductance électrique	siemens	S	$A\ V^{-1}$	$kg^{-1}\ m^{-2}\ s^3\ A^2$	Conductance = courant / tension
Capacité électrique	farad	F	$C\ V^{-1}$	$kg^{-1}\ m^{-2}\ s^4\ A^2$	Capacité = charge / tension
Induction magnétique	tesla	T	$V\ s\ m^{-2}$	$kg\ s^{-2}\ A^{-1}$	Induction = tension · temps / surface
Flux d'induction magnétique	weber	Wb	V s	$kg\ m^2\ s^{-2}\ A^{-1}$	Flux d'induction = tension · temps
Inductance électrique	henry	H	$V\ s\ A^{-1}$	$kg\ m^2\ s^{-2}\ A^{-2}$	Inductance = tension · temps / courant
Température	degré Celsius	°C		K	
Flux lumineux	lumen	lm	cd sr		
Éclairement lumineux	lux	lx	cd sr m ⁻²		
Activité (radioactive)	becquerel	Bq		s ⁻¹	
Énergie communiquée massique, dose absorbée, kerma	gray	Gy	$J\ kg^{-1}$	$m^2\ s^{-2}$	
Équivalent de dose	sievert	Sv	$J\ kg^{-1}$	$m^2\ s^{-2}$	
Activité catalytique	katal	kat		$mol\ s^{-1}$	

1.4.3.2 Autres unités

Grandeur physique	Nom de l'unité	Symbole de l'unité	Expression en termes d'unités de base
Aire	mètre carré	m^2	
Volume	mètre cube	m^3	
Vitesse	mètre par seconde	m s^{-1}	
Vitesse angulaire	radian par seconde	rad s^{-1}	
Accélération	mètre par seconde carrée	m s^{-2}	
Accélération angulaire	radian par seconde carrée	rad s^{-2}	
Moment d'une force	newton-mètre	N m	$\text{kg m}^2 \text{s}^{-2}$
Nombre d'onde	mètre à la puissance moins un	m^{-1}	
Masse volumique	kilogramme par mètre cube	kg m^{-3}	
Masse linéique	kilogramme par mètre	kg m^{-1}	
Volume massique	mètre cube par kilogramme	$\text{m}^3 \text{kg}^{-1}$	
Concentration molaire	mole par mètre cube	mol m^{-3}	
Volume molaire	mètre cube par mole	$\text{m}^3 \text{mol}^{-1}$	
Capacité thermique, entropie	joule par kelvin	J K^{-1}	$\text{kg m}^2 \text{K}^{-1} \text{s}^{-2}$
Capacité thermique molaire, entropie molaire	joule par mole-kelvin	$\text{J mol}^{-1} \text{K}^{-1}$	$\text{kg m}^2 \text{mol}^{-1} \text{K}^{-1} \text{s}^{-2}$
Chaleur massique, entropie massique	joule par kilogramme-kelvin	$\text{J kg}^{-1} \text{K}^{-1}$	$\text{m}^2 \text{K}^{-1} \text{s}^{-2} = \text{m}^2 \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$
Énergie molaire	joule par mole	J mol^{-1}	$\text{kg m}^2 \text{mol}^{-1} \text{s}^{-2}$
Énergie massique	joule par kilogramme	J kg^{-1}	$\text{m}^2 \text{s}^{-2}$
Énergie volumique	joule par mètre cube	J m^{-3}	$\text{kg m}^{-1} \text{s}^{-2}$
Tension capillaire	newton par mètre	N m^{-1}	kg s^{-2}
Flux de chaleur	watt par mètre carré	W m^{-2}	kg s^{-3}
Conductivité thermique	watt par mètre-kelvin	$\text{W m}^{-1} \text{K}^{-1}$	$\text{m kg K}^{-1} \text{s}^{-3}$
Viscosité cinématique	mètre carré par seconde	$\text{m}^2 \text{s}^{-1}$	
Viscosité dynamique	pascal-seconde	Pa s	$\text{kg m}^{-1} \text{s}^{-1}$

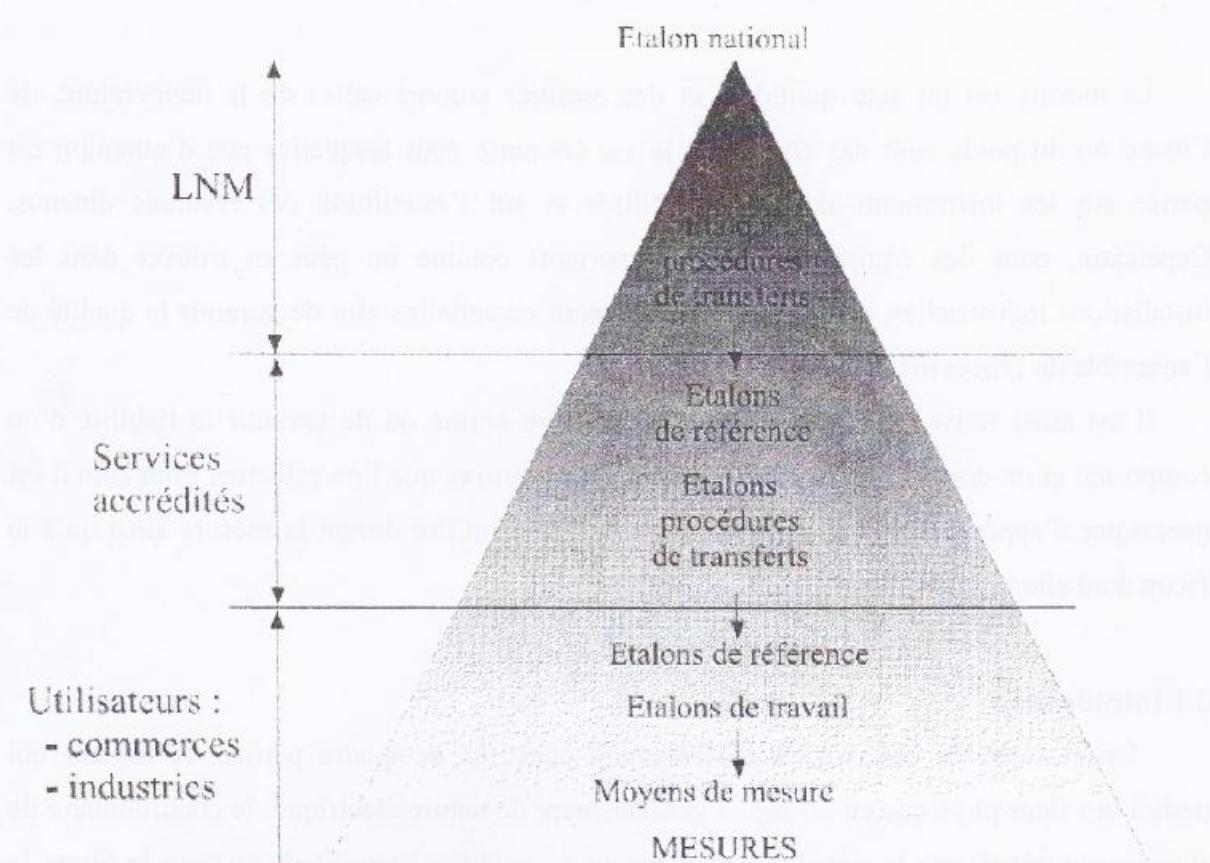
Grandeur physique	Nom de l'unité	Symbole de l'unité	Expression en termes d'unités de base
Densité de charge électrique	coulomb par mètre cube	C m ⁻³	A s m ⁻³
Densité de courant	ampère par mètre carré	A m ⁻²	
Conductivité	siemens par mètre	S m ⁻¹	A ² s ³ kg ⁻¹ m ⁻³
Conductivité molaire	siemens mètre carré par mole	S m ² mol ⁻¹	A ² s ³ kg ⁻¹ mol ⁻¹
Permittivité	farad par mètre	F m ⁻¹	A ² s ⁴ kg ⁻¹ m ⁻³
Perméabilité	henry par mètre	H m ⁻¹	m kg s ⁻² A ⁻²
Intensité de champ électrique	volt par mètre	V m ⁻¹	m kg A ⁻¹ s ⁻³
Intensité de champ magnétique	ampère par mètre	A m ⁻¹	
Luminance	candela par mètre carré	cd m ⁻²	
Exposition (rayons X et gamma)	coulomb par kilogramme	C kg ⁻¹	A s kg ⁻¹
Débit de dose absorbée	gray par seconde	Gy s ⁻¹	m ² s ⁻³
Débit massique	kilogramme par seconde	kg s ⁻¹	
Débit volumique	mètre cube par seconde	m ³ s ⁻¹	

1.4.4 Traçabilité des mesurages

La traçabilité est la propriété du résultat d'un mesurage tel qu'il puisse être relié à des références déterminées, généralement des étalons nationaux ou internationaux, par l'intermédiaire d'une **chaîne ininterrompue de comparaisons** ayant toutes des incertitudes déterminées.

Son organisation est pyramidale (figure ci-dessous), c'est-à-dire de la référence nationale (et donc internationale) vers l'utilisateur.

Les LNM (Laboratoire Nationaux de Métrologie) détiennent les références nationales et les diffusent vers l'utilisateur.



Chapitre 2 - SYSTEMES DE MESURE

La mesure est un acte quotidien et des mesures comme celles de la température, de l'heure ou du poids sont des choses de la vie courante pour lesquelles peu d'attention est portée sur les instruments de mesure utilisés et sur l'exactitude des résultats obtenus. Cependant, pour des équipements plus importants comme on peut en trouver dans les installations industrielles, ces questions deviennent essentielles afin de garantir la qualité de l'ensemble du processus de mesure.

Il est ainsi souvent nécessaire de respecter une norme ou de garantir la fiabilité d'un composant et on doit être assuré de la **qualité des mesures** que l'on effectue. Pour cela il est nécessaire d'apporter une grande attention au matériel utilisé durant la mesure ainsi qu'à la façon dont elle est effectuée.

2.1 Introduction

Un système de mesure est généralement constitué de quatre parties: le capteur qui traduit la valeur physique en un signal généralement de nature électrique, le conditionneur de signaux qui transforme le signal du capteur pour en modifier l'amplitude ou pour le filtrer, la sortie qui permet de lire la valeur mesurée et éventuellement un système de contrôle par feedback dans le cas où le système de mesure est inclus dans un contrôle de processus.

Le capteur utilise un phénomène physique réagissant à la valeur physique à mesurer et assure sa transformation en un signal électrique, optique ou mécanique plus facile à manipuler et à quantifier. Les différents types de capteurs et leurs fonctionnements seront décrits beaucoup plus en détail par la suite.

L'ensemble de l'équipement constitue une partie du processus de mesure. En effet, il doit être complété par une procédure de mesure qui définira l'ensemble des grandeurs à mesurer, les moyens techniques pour y parvenir et qui déterminera aussi l'ensemble des traitements à effectuer sur les valeurs mesurées pour parvenir à l'objectif final.

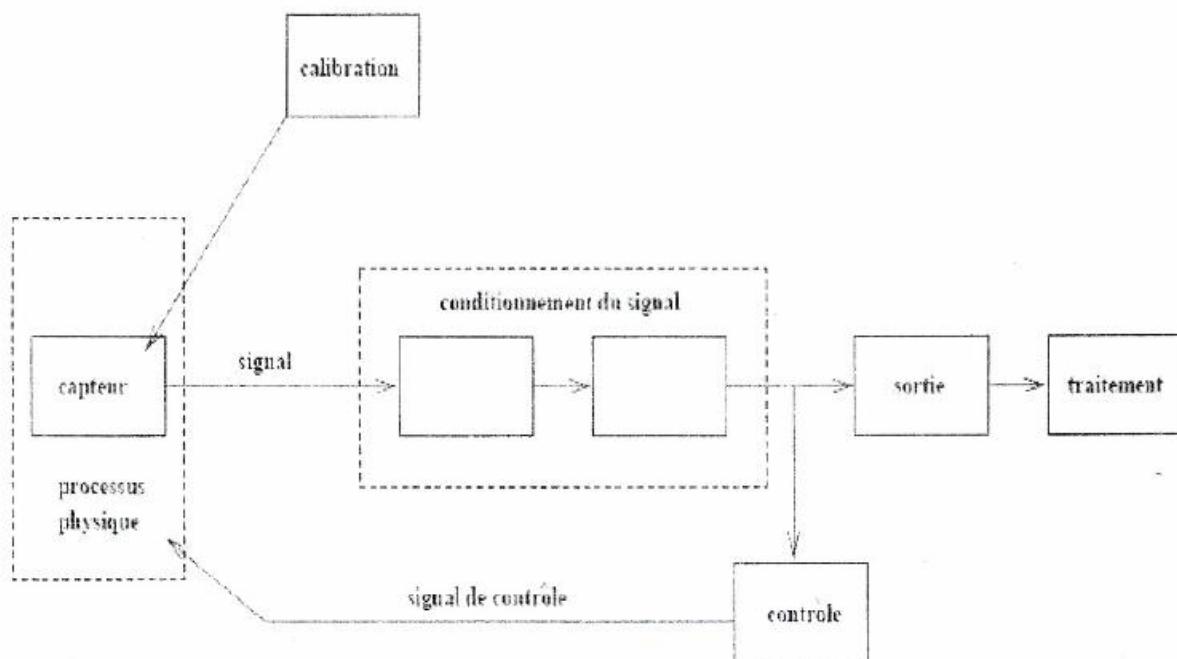


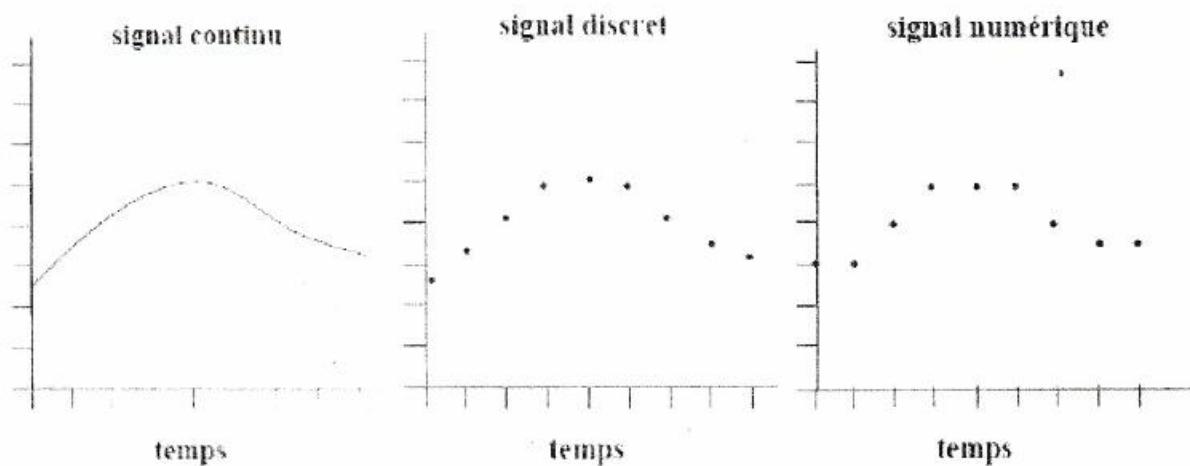
Schéma général d'un système de mesure

2.2 Signaux

Un système de mesure transforme une entrée, en règle générale la quantification d'un phénomène physique, en un signal de sortie. Différents types de signaux sont transmis entre les capteurs, les conditionneurs et la sortie du système. Une caractérisation de ces signaux est nécessaire à la compréhension du fonctionnement des appareils de mesure.

Pour cela, on peut dans un premier temps classifier les signaux en trois catégories selon leur représentation temporelle et les valeurs prises par la quantité mesurée.

On distingue ainsi: les **signaux continus** (dits aussi **analogiques**), les **signaux discrets**, les **signaux numériques**. Ces types de signaux sont représentés sur la figure suivante.

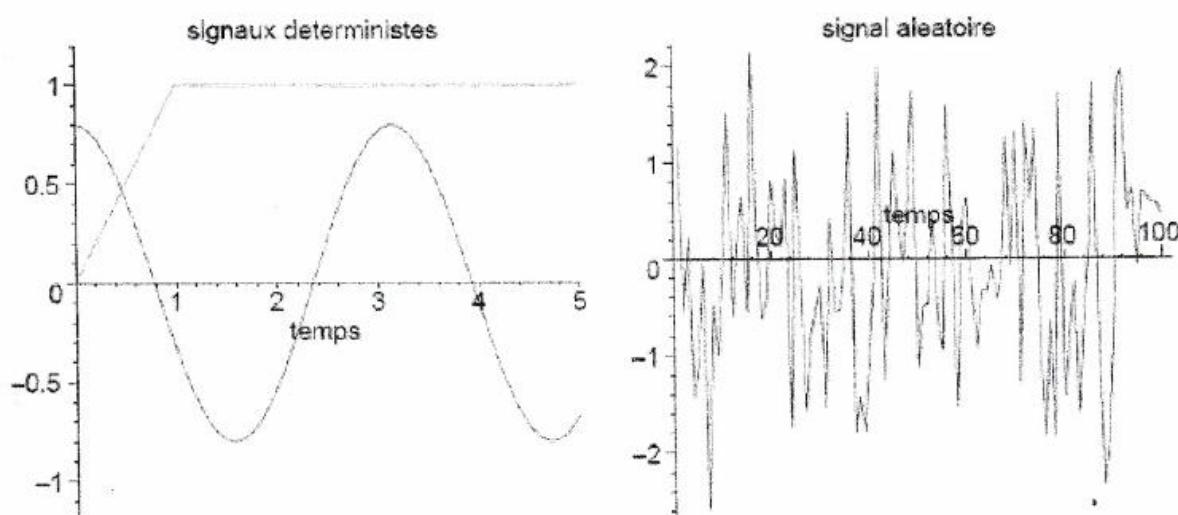


- Un **signal continu** est défini pour toutes les valeurs du temps et peut prendre n'importe quelle valeur en amplitude.
- Un **signal discret** est en général un signal continu qui est mesuré à certains instants seulement.
- Un **signal numérique** est un signal discret qui a été quantifié et qui par conséquent ne peut prendre qu'un ensemble discret de valeurs en amplitude.

Un signal analogique peut être numérisé à l'aide d'un convertisseur analogique numérique. La transformation inverse d'un signal est réalisée par un convertisseur numérique analogique.

En fonction du phénomène physique qu'ils représentent, il faut aussi distinguer les **signaux déterministes** en fonction du temps pour lesquels les valeurs futures peuvent être prédites, des **signaux aléatoires** qui ne sont pas prédictibles et qui nécessiteront des traitements spécifiques.

Ces deux types de signaux sont représentés dans la figure suivante.



Les signaux de mesure sont généralement des signaux déterministes. Les bruits de mesure sont des signaux aléatoires qui s'ajoutent aux signaux à mesurer. Un signal d'interférence est plutôt un signal de type déterministe qui s'ajoute au signal à mesurer et qui le perturbe.

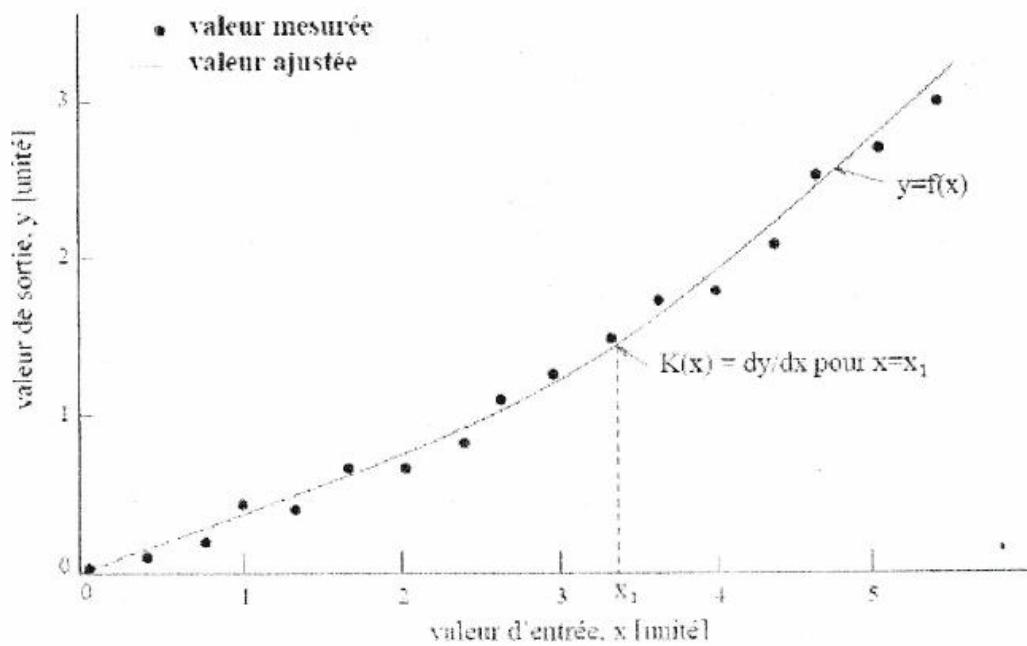
Enfin, une dernière caractéristique des signaux concerne l'intervalle de temps sur lequel ils sont définis. Il faut distinguer les signaux transitoires qui n'existent que sur un intervalle de temps fini des signaux permanents définis à tout instant.

On distinguera aussi les **signaux stationnaires** dont les propriétés n'évoluent pas en fonction du temps, des **signaux non-stationnaires** dont les propriétés sont variables en fonction du temps. Par exemple un bruit de mesure d'origine thermique est un signal stationnaire et permanent alors qu'un choc engendre un signal transitoire.

2.3 Etalonnage

Pour les capteurs instruments de mesure, l'étalonnage est un réglage ou une caractérisation de la réponse de l'appareil. Pour cela, généralement on utilise des grandeurs de référence ou étalons.

L'étalonnage d'un instrument consiste à appliquer une valeur connue en entrée du système de mesure afin de vérifier que la sortie correspond bien à la valeur attendue. En entrant différentes valeurs connues on peut obtenir en sortie la courbe d'étalonnage $y = f(x)$ de l'instrument qui permet de relier la valeur lue en sortie notée y à la vraie valeur de la grandeur physique à mesurer notée x (voir figure).



C'est particulièrement utile lorsque la réponse de l'instrument est non linéaire.

La méthode générale consiste à utiliser l'appareil de mesure sur un étalon, et à vérifier que la mesure produite correspond bien à la valeur attendue ; si ce n'est pas le cas, on corrige le réglage de l'appareil. Par exemple, on pèse une masse étalon, et on corrige la position de l'aiguille pour que celle-ci indique la valeur correcte. C'est l'étalonnage dit *à un point*.

Cependant, cela ne suffit pas toujours. L'appareil peut présenter :

- Une dérive systématique: il indique systématiquement une valeur supérieure ou inférieure d'une quantité fixe ;
- Une dérive de sensibilité: il indique systématiquement une valeur supérieure ou inférieure d'une proportion (d'un pourcentage) donné.

Chaque mesure étant entachée d'erreur, y compris la mesure des étalons, on effectue en général plusieurs mesures du même étalon, ou bien on utilise plus d'étalons que nécessaire et l'on détermine la courbe d'étalonnage par régression (méthode des moindres carrés).

L'étalonnage est généralement effectué par le fabricant de l'appareil de mesure. De manière générale, un appareil de mesure transforme un paramètre physique en une donnée analogique(lecture sur un cadran, tracé d'un feutre sur un papier) ou un signal électrique, qui peut ensuite être converti en données numériques.

De plus en plus sur les appareils modernes la correction suite à l'étalonnage n'est pas réglée sur l'instrument mais est fournie dans un fichier numérique. Cette correction est de fait effectuée numériquement par un microcontrôleur ou par l'ordinateur relié à l'instrument.

L'opération d'étalonnage permet aussi de déduire la **justesse** de l'instrument. La justesse est l'aptitude de l'instrument à fournir la vraie valeur de la grandeur physique. En entrant une valeur connue, on peut mesurer l'erreur due à l'instrument et définir la justesse par :

$$e_{\%} = \frac{|vraie\ valeur - valeur\ mesurée|}{|vraie\ valeur|} * 100$$

L'étalonnage peut être simple ou multiple suivant que la valeur de sortie dépend d'une ou de plusieurs grandeurs physiques d'entrée.

2.4 Sensibilité

Connaissant la courbe d'étalonnage, on peut définir la sensibilité de l'instrument au voisinage d'une valeur d'entrée x_1 par la relation :

$$K(x_i) = \frac{\partial y}{\partial x_i}$$

Cette grandeur permet de mesurer l'influence d'un changement de la valeur d'entrée sur la valeur de sortie. Un bon instrument devra avoir une assez grande sensibilité. Lorsque la sensibilité est constante la réponse de l'instrument est linéaire. Ce type d'instrument sera particulièrement recherché en raison de sa facilité d'utilisation.

La sensibilité devra être aussi indépendante que possible de la fréquence de variation de la grandeur mesurée, du temps et d'autres grandeurs d'influence.

2.5 Précision

La précision d'une mesure est l'accord (ou la différence) entre le résultat d'une mesure et la vraie valeur du mesurande (la valeur du mesurande n'est en général pas exactement connue).

2.6 Répétabilité

Une mesure est répétable lorsque l'on vérifie la proximité de l'accord entre les résultats des mesures successives du même mesurande, effectuées dans les mêmes conditions de mesure:

- même procédé de mesure,
- même observateur,
- même instrument de mesure, utilisé dans les mêmes conditions
- même emplacement,
- répétition sur une courte période de temps.

La dispersion des résultats permet de quantifier la Répétabilité.

2.7 Reproductibilité

Une mesure est reproductible lorsque l'on vérifie la proximité de l'accord entre les résultats des mesures du même mesurande, effectuées dans des conditions de mesure différentes à définir au cas par cas.

2.8 Les méthodes générales de mesures

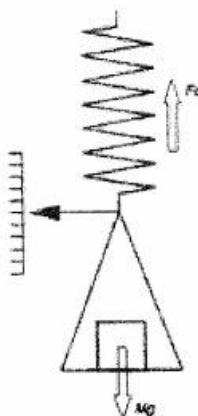
2.8.1 Mesures par déviation

C'est la méthode qui consiste à obtenir la déviation d'un système, d'une position d'équilibre qu'il occupait en l'absence de mesurande, à une nouvelle position d'équilibre qu'il occupe en présence du mesurande. L'écart entre les deux positions fournit plus ou moins directement la mesure.

Dans la méthode de **déviation ou d'elongation simple**, les deux positions sont des positions au sens géométrique du mot; elles ne mettent pas en jeu un équilibre particulier de force. Ainsi en est-il de la mesure d'une longueur au pied à coulisse, où l'opérateur déplace les palpeurs pour venir en contact entre eux (zéro), ou sur la pièce (mesure).

Dans la méthode **d'elongation et d'équilibre spontané**, les positions d'équilibre sont le résultat d'une opposition entre deux forces égales.

L'exemple typique d'une mesure par déviation est le **peson à ressort**. Les transmissions et transformations d'énergie se font sans intermédiaire. Lorsque l'on suspend une masse sur le plateau fixé à une extrémité d'un ressort vertical, l'autre étant fixe. Les forces de contraintes, dont le ressort devient le siège quand il est déformé, sont proportionnelles à l'allongement. Il existe une valeur d'allongement pour laquelle ces forces égalent le poids du corps, et c'est cette valeur qui indique le poids. On peut certes calculer les forces développées à partir des caractéristiques du ressort, mais il est plus simple et plus précis de tarer le ressort avec des masses connues.



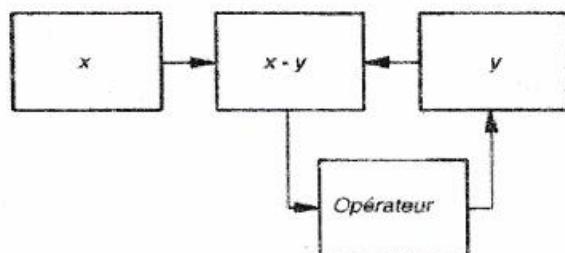
Les appareils qui utilisent la méthode de déviation sont innombrables dans tous les domaines de la métrologie appliquée. Quelques types élémentaires sont mentionnés dans le tableau ci-dessous:

Appareil	Grandeur d'entrée (mesurande)	Grandeur d'opposition	Grandeur de sortie (mesure)
Peson à ressort	force	contrainte ressort	allongement
Peson à contrepoids	force	moment d'une force	angle
Baromètre à mercure	pression	pression hydrostatique	différence de niveau
Thermomètre à gaz à pression constante	température	volume	déplacement d'un niveau

2.8.2 Mesures par comparaison

Les mesures par comparaison couvrent un très large nombre de mesures de toutes grandeurs. Le principe général est de comparer le mesurande x à une grandeur connue de même nature y pour obtenir $x = y$ ou $x - y = 0$.

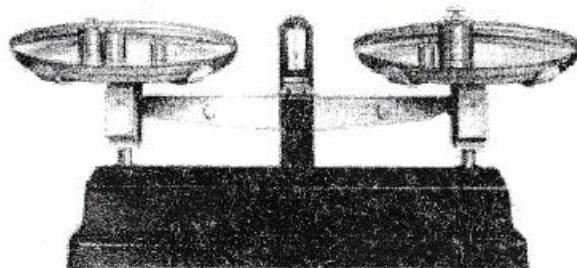
Cette grandeur de comparaison est parfois réglée par un opérateur – dont le rôle est celui d'un **asservissement** et peut être tenu par un dispositif automatique - qui agit sur y pour obtenir que la valeur de $(x-y)$ formée par le **détecteur d'écart** soit nulle.



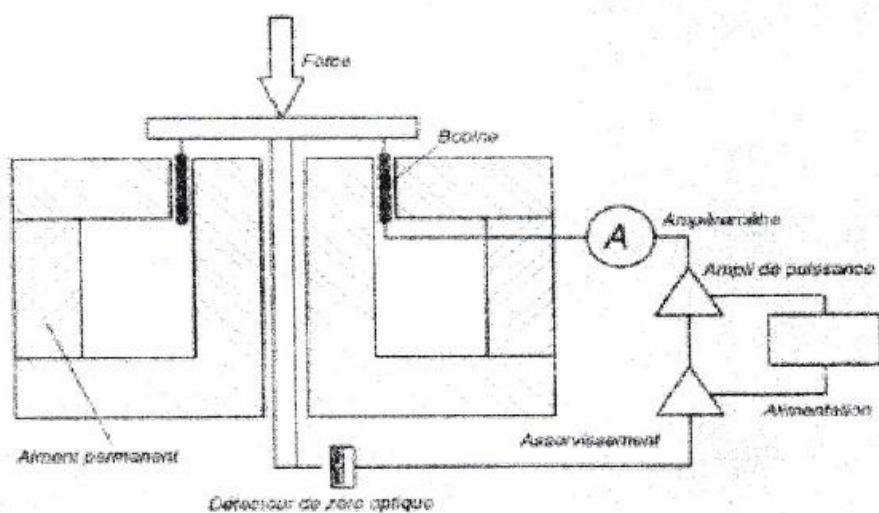
2.8.2.1 Méthode d'opposition ou méthode de zéro

Une balance de Roberval possède tous les organes d'un appareil de zéro: le soustracteur (fléau), le détecteur d'écart (l'aiguille), la grandeur d'opposition (boîte de poids).

C'est l'opérateur qui apprécie l'écart puis dépose ou retire les poids pour obtenir l'équilibre.



Un autre exemple de méthode de zéro par asservissement est présenté dans la figure ci-dessous:



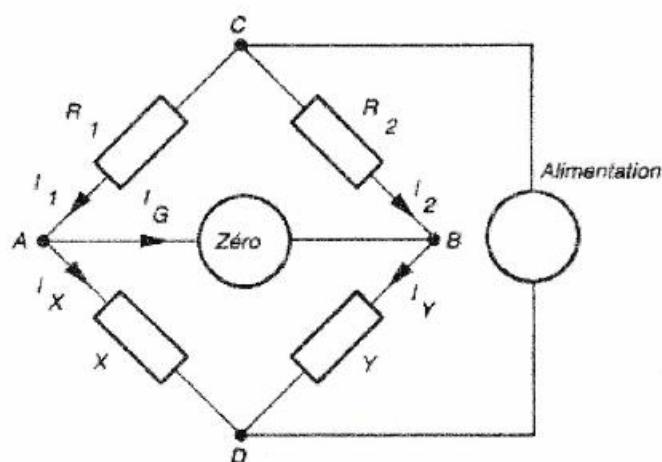
Il s'agit d'un dynamomètre électromagnétique. L'équilibre de la force présente sur le plateau est réalisé par une force électromagnétique grâce à un dispositif analogue à celui d'une bobine de haut-parleur. On imaginera aisément le circuit comprenant le détecteur d'écart, la

source d'énergie, l'amplificateur de puissance réglant l'intensité du courant, l'ampèremètre fournissant la valeur du poids.

2.8.2.2 Les montages en pont

Le montage en pont est un montage différentiel qui soustrait les réponses de deux bras contigus. Ceci permet de s'affranchir de l'influence de certaines grandeurs parasites qui pourraient masquer le phénomène auquel on porte intérêt.

Un pont est présenté traditionnellement comme un quadrilatère et deux diagonales.



Les 4 côtés du quadrilatère constituent les bras. Une des diagonales (CD) contient l'alimentation en énergie; l'autre (AB) l'appareil de zéro. Lorsque la mesure d'une grandeur passive est faite par la méthode de déviation, les alimentations doivent avoir un niveau connu puisque la déviation leur est proportionnelle.

Dans les montages en pont on est ramené en fait à la comparaison des valeurs des grandeurs passives qui constituent les bras, et par suite le niveau de l'unique source peut être quelconque à l'équilibre.

L'application du pont de Wheatstone à la mesure des résistances électriques et de capteurs résistifs en général comme les **jauge extensométriques** (*strain gauges*) est bien connue. Mais les montages en pont se rencontrent dans bien d'autres mesures.

La jauge active est soumise à l'action conjointe de l'allongement et de la température alors que la jauge témoin, collée au voisinage de la précédente, n'est soumise qu'à l'action de la température.

2.8.2.3 Méthode de déviation constante

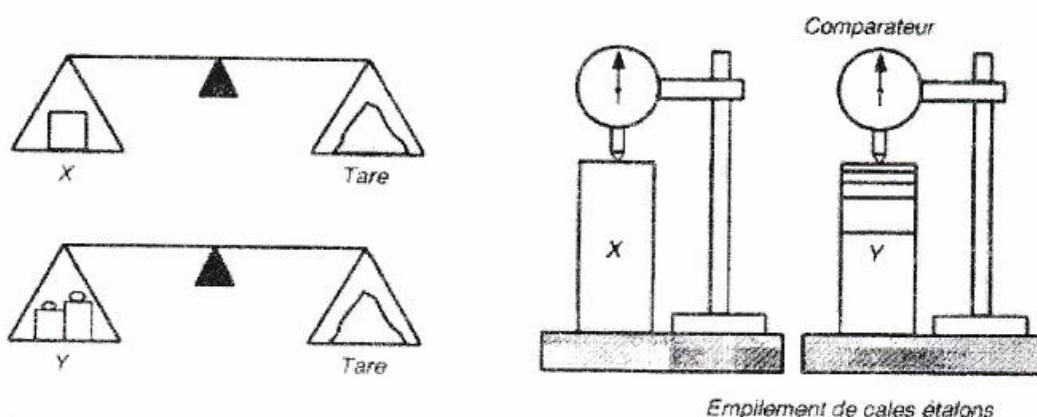
C'est encore une variante de la méthode de comparaison, mais ici la grandeur de comparaison conserve une valeur constante. On ajoute au besoin au mesurande la quantité nécessaire pour atteindre la valeur fixée: $x + y = \text{constante}$.

Cette méthode se retrouve en plusieurs variantes.

a°) Méthode de substitution

Au mesurande on substitue une grandeur connue qui doit provoquer un effet identique. Puisqu'il s'agit de comparer deux effets successifs, il faut qu'un organe garde la trace du premier effet; il peut prendre dans certains appareils une place très importante, sous le nom de mémoire.

Dans le cas du peson, par exemple, on décroche le poids inconnu et on le remplace par des poids marqués pour retrouver l'indication précédemment notée.



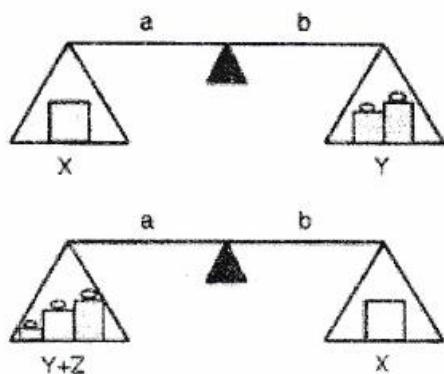
Pour une balance on fait l'équilibre avec une tare, puis on substitue des poids marqués à l'objet à peser. Cette méthode porte le nom célèbre de Borda. C'est la tare qui fait office de mémoire.

La méthode s'étend à toutes sortes de mesures: de différence de potentiel dans certains convertisseurs analogique-numérique, de radioactivité, de longueur, etc. En contrôle dimensionnel, il est classique de substituer à la pièce dont la cote inconnue est gardée en mémoire sur un **comparateur**, un empilement de cales dont les dimensions sont bien connues, jusqu'à ramener le comparateur à la même indication.

b°) Méthode de permutation

Lorsqu'on utilise un appareil qui réalise l'égalité $ax = by$, il faut en principe connaître a/b pour avoir la mesure.

Cependant, il est possible d'éliminer le facteur a/b en effectuant deux mesures selon le schéma indiqué dans la figure ci-après.



L'équilibre des moments donne:

$$a \cdot x \cdot g = b \cdot y \cdot g \text{ et } a \cdot (y+z) \cdot g = b \cdot x \cdot g$$

en divisant membre à membre on obtient :

$$\frac{x}{y+z} = \frac{y}{x}$$

Soit finalement:

$$x = \sqrt{y(y+z)}$$

Appliquée aux balances à bras légèrement inégaux, cette méthode porte le nom célèbre de Gauss.

c°) Appareils à seuil

On se propose de connaître l'instant, ou les conditions, auquel la grandeur x atteint une valeur prédéterminée. Ceci se rencontre en particulier lorsqu'on cherche à régler une variable à une valeur donnée (régulation), mais se rencontre aussi dans de nombreux processus métrologiques.

La grandeur de comparaison a une valeur fixe et le détecteur de zéro se trouve bloqué par son action tant que le mesurande ne la dépasse pas. L'exemple typique en est les accéléromètres des airbags.

2.9 Comptages

Il est très fréquent d'avoir à compter une certaine quantité d'éléments (nombre de tours, nombre d'impulsions, nombre de particules, etc.). La mesure se réduit alors à un comptage.

La fréquence de comptage des systèmes mécaniques ne dépasse pas quelques centaines de hertz; celle des compteurs électroniques dépasse 10 GHz.

2.10 Avantages et inconvénients des mesures par déviation et par comparaison

Les caractères de mesures par déviation et ceux des mesures par comparaison sont très différents. Le bilan sera dans l'ensemble favorable aux dernières, qui n'ont guère contre elles que leur relative complication et leur prix.

C'est le **détecteur d'écart** qui donne aux mesures par comparaison l'essentiel de leur caractère.

C'est l'absence d'exigences métrologiques à son égard, par opposition aux exigences formées pour les instruments de mesure par déviation, qui rend les mesures par comparaison plus précises que celles par méthode de déviation.

En effet dans les méthodes de zéro, le repérage de la position zéro est assuré par le **détecteur d'écart** qui fournit le **signal d'erreur** dont seuls l'existence et le signe nous intéressent. Ce fait permet de simplifier à l'extrême le détecteur sans exiger de lui des qualités métrologiques poussées. Il suffit que sa position d'équilibre soit stable, qu'il soit **fidèle au zéro**.

Dans tout instrument de mesure, la **justesse** est limitée par les défauts intrinsèques de l'instrument. Ces défauts se retrouvent évidemment aussi bien dans les mesures par déviation que dans les mesures par comparaison. Dans le cas des balances, l'influence des erreurs d'étalonnage, des erreurs sur les masses utilisées, des erreurs sur le parallélisme des couteaux, des erreurs sur les bras du fléau, etc. se retrouvent dans les deux cas. Il n'en va pas de même des erreurs de lecture.

Dans la mesure par déviation, l'**erreur de lecture** représente en effet une fraction donnée de l'étendue de mesure, généralement de l'ordre de 1 à 0.1%.

Or que dans la **méthode de zéro**, la partie principale de la mesure porte sur des grandeurs quantifiées connues avec exactitude et leur somme ne peut être entachée d'aucune erreur (sauf de grossières erreurs, baptisées parasites par les normes, et qui sont en général faciles à dépister). L'erreur de lecture ne porte que sur l'évaluation du zéro, obtenue d'une manière précise par coïncidence. Pratiquement on la trouve au moins 100 à 1000 fois plus petite que l'erreur de la mesure par déviation.

Toutefois, l'usage de la méthode de déviation paraît plus simple, donc plus prompte. Par exemple, le corps à peser est posé sur le plateau et il suffit d'attendre un temps suffisant que l'elongation ait le temps de se stabiliser et que les oscillations soient amorties.

Or que la méthode de zéro suppose une série d'opérations qui comprennent la constatation d'un écart, l'application de la contre-réaction puis l'attente d'un nouvel équilibre.

Toute mesure consomme de l'énergie. Mais il y a aussi de ce point de vue une grande différence entre la méthode de déviation et la méthode de zéro. Dans le premier cas l'énergie correspond à la déformation du système de mesure de sa position zéro à sa position d'équilibre final. Dans le second cas, elle ne correspond qu'à la déformation nécessaire pour observer l'écart.

Si on évalue la tension d'une pile avec un voltmètre à cadre, il y a passage d'un courant tant que dure la mesure et consommation d'énergie. Si au contraire on utilise la méthode d'opposition, aucun courant ne circule dans le galvanomètre de zéro et il n'y a aucune consommation d'énergie (donc aucune déformation du phénomène) que celle qui peut correspondre au plus petit écart discernable du galvanomètre. L'instrument de mesure se comporte comme s'il avait une impédance infinie.

Chapitre 3 – MESURE - ERREURS - INCERTITUDES

Tout système de mesure est inéluctablement attaché d'erreurs. Un système de mesure n'est jamais parfait puisqu'il est en général plus ou moins sensible à l'environnement (température, pression, humidité...), il n'est pas fidèle et même les étalons servant à l'étalonnage de l'instrumentation ne sont qu'une matérialisation imparfaite de la définition de l'unité qu'ils sont chargés représenter, la mauvaise définition de la grandeur est elle-même une source d'erreur.

De manière générale, le but de la mesure est d'évaluer une variable physique appelée **variable mesurée** ou **mesurande**. Le but du système de mesure est donc la quantification de la variable mesurée, c'est l'opération de mesurage. Ce que l'on obtient en pratique est la valeur donnée par l'instrument de mesure. L'exactitude de la mesure se définit à partir de la différence entre la valeur donnée par l'appareil de mesure et la valeur réelle de la grandeur mesurée.

Toute la difficulté consiste donc à avoir une valeur donnée par le processus de mesure qui soit la plus proche possible de la vraie valeur physique qui reste généralement inconnue. Il est cependant essentiel de pouvoir estimer l'**erreur probable** que l'on commet durant le processus de mesure afin de pouvoir garantir que la valeur donnée par l'appareil de mesure ne diffère pas de la vraie valeur d'une quantité supérieure à une grandeur fixée et connue.

3.1 Exemples de causes d'erreur

Très en général, les erreurs peuvent se classer en trois types:

1. Les erreurs d'étalonnage
 - Erreur par rapport aux étalons primaires
 - Erreur due à la technique d'étalonnage
2. Erreur d'acquisition de données
 - Erreur due aux capteurs
 - Erreur due à l'appareil de mesure
 - Erreur due aux variables non contrôlées
3. Erreur due à l'analyse des données
 - Erreurs dus au lissage (i.e. méthode des moindres carrés)
 - Erreur de troncature

On donne ici ensuite quelques descriptions et exemples des causes d'erreur plus fréquentes.

3.1.1 Erreur d'étalonnage

L'étalonnage a pour but de réduire les erreurs mais ne peut pas les éliminer complètement. La grandeur étalon utilisée pour étalonner le système n'est pas parfaite et engendre une petite erreur de même que la mise en œuvre de la procédure d'étalonnage.

3.1.2 Hystérésis

On peut balayer la plage de valeurs d'entrée d'un système en partant de la plus petite valeur vers la plus grande ou au contraire de la plus grande vers la plus petite. Pour une même valeur d'entrée le système peut donner deux valeurs différentes suivant le sens de balayage.

On définit alors l'erreur d'hystérésis par :

$$\%e_{max} = \frac{y_{haut} - y_{bas}}{y_{max}} * 100$$

Ce phénomène peut être produit par exemple par des effets de viscosité ou de charge électrique résiduelle dans le système.

3.1.3 Erreur de linéarité

Beaucoup d'instruments sont conçus pour fournir une relation linéaire entre la valeur physique entrée dans le système et la valeur lue en sortie. Mais comme les systèmes réels ne sont jamais parfaitement linéaires, une erreur est introduite à ce niveau et peut être estimée par :

$$\%e_L = \frac{y_L - y}{y_{max}} * 100$$

Où y_L est la valeur du système linéaire, y la valeur réelle de sortie et y_{max} la valeur maximale fournie par l'instrument.

3.1.4 Erreur de sensibilité

La valeur mesurée est définie à partir du signal fourni par le capteur grâce à la mesure préalable de la sensibilité du système. Les erreurs de précision, par exemple, limitent la connaissance possible de la sensibilité du système qui n'est connue qu'avec une certaine indétermination.

Cela définit l'erreur de sensibilité.

3.1.5 Erreur due à la résolution de l'instrument

L'erreur due à la résolution de l'instrument peut être évaluée par :

$$u_{res} = \pm \frac{1}{2} resolution$$

où la résolution est la plus petite valeur mesurable par l'instrument.

3.1.6 Grandeur d'influence

Le système peut, lors de son utilisation, être soumis non seulement au mesurande mais également à d'autres grandeurs physiques dont les variations peuvent influencer la valeur de la grandeur de sortie (électrique). Ces variations sont impossibles à distinguer de l'action du mesurande.

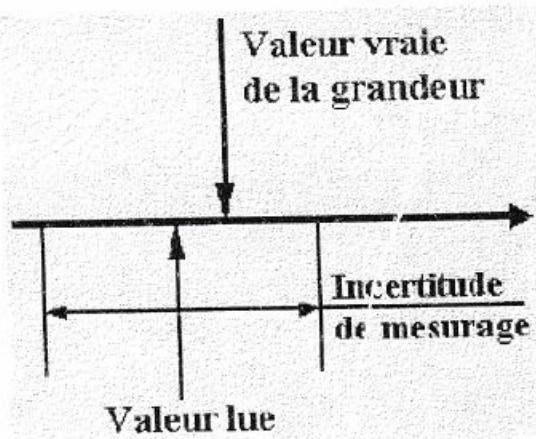
Les principales grandeurs d'influence sont la température (qui a des effets électrique, mécanique, géométrique), la pression, l'accélération et les vibrations (déformations, contraintes), l'humidité (constante diélectrique, résistivité, isolation électrique), les champs magnétiques variables ou statiques (f.e.m. résistivité), la tension d'alimentation, l'amplitude et la fréquence (grandeur de sortie électrique).

Pour tenter d'éviter ces problèmes il faut mettre tout en œuvre pour réduire leur importance et si cela n'est pas possible, il faut au minimum stabiliser les grandeurs d'influence et effectuer un étalonnage aussi précis que possible.

3.2 Définitions d'erreur et d'incertitude en métrologie

L'erreur de mesure est définie comme la différence entre la valeur annoncée et la valeur vraie qui reste inconnue. Cette valeur annoncée sera généralement obtenue par une opération de moyenne de plusieurs mesures.

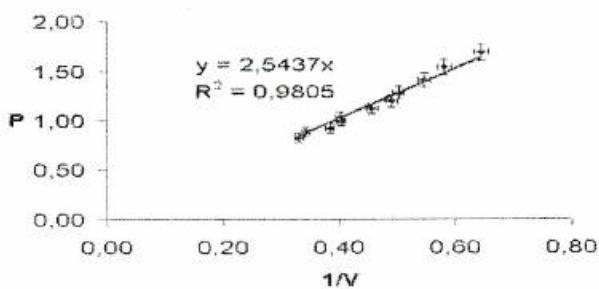
L'incertitude de mesure décrit une région autour de la valeur lue ou observée (souvent elle-même une moyenne de plusieurs mesures individuelles) d'une quantité physique, dans laquelle on estime que se trouve la vraie valeur.



L'incertitude de mesure sera en général décrite par la notation suivante:

Résultat de la mesure = Valeur annoncée \pm incertitude [unités]

L'incertitude de mesure peut aussi être décrite par des barres d'erreurs sur un graphique.



Exemple de graphique avec barres d'erreur (incertitude)

L'incertitude affichée peut être :

- **Incertitude absolue U_X** , qui a les mêmes unités que la grandeur X
- **Incertitude relative $U_r = U_X/X$** , qui est sans dimensions et souvent donné en %.

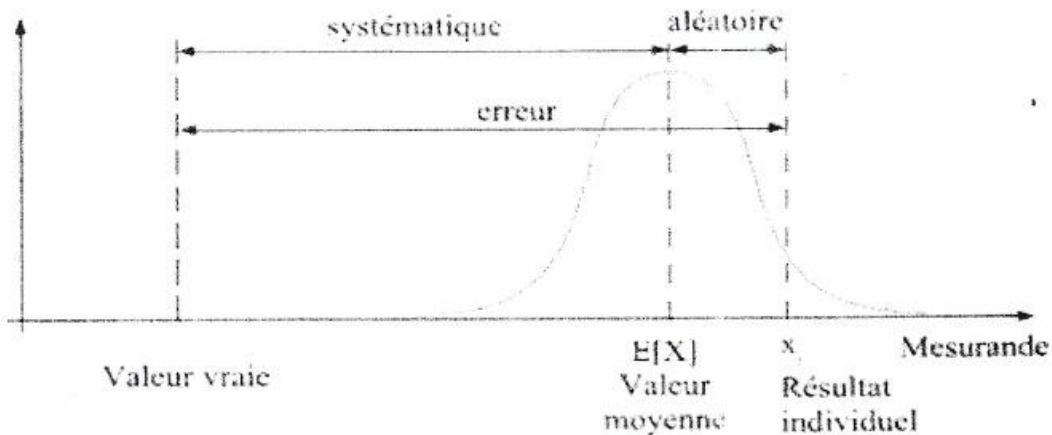
L'incertitude comprend, en général, les effets d'erreurs systématiques et aléatoires, et dépend de la précision et résolution de l'instrument.

Les **effets d'erreurs de type aléatoire** sont évalués à partir de la distribution statistique des résultats de séries de mesurages et peuvent être caractérisés par des écart-types expérimentaux.

Les **effets d'erreurs de type systématique**, quand ils ne peuvent pas être corrigés, sont évalués en admettant des distributions de probabilité, d'après l'expérience acquise ou d'après d'autres informations.

3.3 Types d'erreurs

Il est toujours possible de décomposer le terme **erreurs** en une erreur systématique et une erreur aléatoire:



L'**erreur systématique** (notée e_s) est la moyenne qui résulterait d'un nombre infini de mesurages du même mesurande, effectués dans des conditions de **répétabilité**, moins la valeur vraie du mesurande.

En général, et à moins que l'instrument ne puisse être considéré d'une précision parfaite, l'erreur systématique et ses causes ne peuvent être connues qu'en partie.

L'**erreur aléatoire** (notée e_a) est défini comme le résultat d'un mesurage moins la moyenne d'un nombre infini de mesurages du même mesurande (grandeur physique) effectués dans des conditions de répétabilité (tout reste identique).

Comme on ne peut faire qu'un nombre limité (fini) de mesurages, il est seulement possible de déterminer une **estimation** de l'erreur aléatoire. Cela veut dire que l'erreur aléatoire a elle-même une incertitude associée à sa quantification.

A cela doivent s'ajouter les **erreurs grossières**, qui sont dues à des conditions anormales ou à des fautes techniques, et qui se manifesteront généralement par des valeurs mesurées considérablement différentes de toutes les autres erreurs.

3.3.1 Erreurs systématiques

3.3.1.1 Erreurs systématiques connues

Les erreurs systématiques connues (e_{sc}) d'une mesure sont des grandeurs pouvant être déterminées tant du point de leur intensité que de leur signe. Les normes (ex. DIN1319) en fournissent d'autres désignations telles que: erreurs systématiques avec signe connu, erreurs systématiques pures, erreurs corrigables.

Les erreurs systématiques connues peuvent être corrigées dans le résultat. Lorsque la correction a été effectuée, les erreurs systématiques connues ne font plus partie de l'indication d'incertitude de mesure.

Exemples d'erreurs systématiques connues:

- Les erreurs vérifiées de graduation d'échelle sont manifestement des erreurs systématiques.
- Une cale-étalon qui est plus longue de $0,7 \mu\text{m}$ que la valeur nominale indiquée.
- Une mesure de longueur qui est effectuée à la température de 25°C au lieu de la température de référence de 20°C ; cela produit une erreur systématique à la suite de la dilatation thermique de l'objet.
- Un palmer qui possède des touches de palpation présentant une usure mesurable.
- Le tachymètre d'une voiture qui présente une indication de 5 km/h trop élevée dans un certain secteur.

- Un voltmètre dont on a vérifié qu'il possède un facteur d'amplification erroné ou indique une valeur trop élevée de 0,1 V dans toutes ses mesures.

3.3.1.2 Erreurs systématiques inconnues

Il existe aussi des erreurs systématiques inconnues (e_{si}) qui sont généralement dues à des imprécisions des instruments: celles-ci sont normalement définies en termes de valeurs (ou tolérances) maximums, souvent avec le signe \pm . Il se peut que ces erreurs soient constantes dans une série de mesures avec un équipement particulier, mais on ne connaît ni leur valeur ni leur signe. On définit donc souvent les erreurs systématiques inconnues comme **erreurs de tolérance**.

Les méthodes pour prendre en compte les erreurs systématiques inconnues dans un calcul global d'incertitude font l'objet d'études et de controverses depuis près de 200 ans, et le sujet reste controversé encore aujourd'hui.

On présente dans ce cours l'approche de *ISO Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement* (abrégé **GUM**). Essentiellement l'idée de GUM est de « transformer » les erreurs systématiques inconnues en erreurs aléatoires, en postulant une distribution statistique ad hoc, généralement rectangulaire.

3.3.2 Erreurs aléatoires

On distingue ici deux catégories principales:

- A. Les erreurs aléatoires qui peuvent être évaluées rigoureusement par des méthodes statistiques.
- B. Les erreurs systématiques inconnues « converties » en erreurs pseudo-aléatoires (réf. Page précédente) et qui demandent pour leur évaluation la prise en compte additionnelle d'aspects non-statistiques tels que les caractéristiques et tolérances techniques de l'instrument, la précision et la fiabilité de l'étalonnage, l'expérience de l'opérateur, etc..

3.3.2.1 Erreurs aléatoires qui peuvent être évaluées par des méthodes statistiques (type A)

Ces erreurs aléatoires sont en général dues à des **fluctuations des conditions environnementales** (au sens large, ce qui inclut l'opérateur et l'instrument) au cours de la mesure. Ces erreurs au cours d'une série de mesures sont par conséquent inconnues, tant du point de vue de leur intensité que de leur signe.

Lors de mesures répétées au cours d'une série, on trouve que:

1. Les erreurs aléatoires fluctuent de manière imprévisible par rapport à une valeur moyenne.
2. L'incertitude de la moyenne diminue avec le nombre de mesures.

On qualifie ces erreurs aléatoires, qui ont souvent une distribution normale, par leur écart-type.

Exemples d'erreurs aléatoires de ce type:

- Les jeux des roulements ainsi que les flexions d'arbres de dispositifs mécaniques.
- Les jeux d'articulations de palpeurs.
- Les erreurs de lecture des graduations d'un microscope de mesure en raison d'une netteté insuffisante de ces dernières.
- Des erreurs de positionnement d'un palpeur sur l'objet à mesurer au cours d'une série de mesures.
- Fluctuation de la température ambiante par exemple à la suite de la régulation thermostatique ou par ouverture et fermeture répétée d'une porte du local de mesure. Une fluctuation de la température de l'objet à mesurer peut également intervenir à la suite d'une manutention plus ou moins longue de ce dernier avec la main ou le doigt.
- Influence de la fluctuation imprévisible de champs électrique et magnétique sur l'indicateur d'appareils électriques en proximité d'autres instruments de mesure.
- Bruit d'instruments électroniques produisant des fluctuations du signal transmis.
- Influence de vibrations mécaniques sur l'instrument de mesure.

3.3.2.2 Erreurs pseudo-aléatoires demandant des méthodes non-statistiques (type B)

Parmi telles erreurs sont typiquement les **tolérances des instruments de mesures**. Leur amplitude ainsi que leur signe au moment d'une mesure déterminée sont inconnus. Toutefois leur présence ainsi que l'intensité maximale (**tolérance**) sont connues.

Dans le cadre de mesures répétées dans une série de mesures, il se peut que ces erreurs systématiques inconnues aient toujours la même valeur et le même signe. Le problème est que cette valeur ainsi que le signe sont inconnus: on n'en connaît en général que la valeur **maximale** que l'on caractérise par le signe \pm .

Exemples d'erreurs de ce type:

- La résolution d'un affichage numérique.
- La vis micrométrique d'un palmer possède une tolérance connue du pas de $0,3\mu\text{m}$.

On ne sait cependant pas si le vrai pas est trop grand ou trop petit.

- Le cas où, dans le cadre d'une mesure de longueur, la température de l'objet n'est pas mesurée. On sait cependant qu'au cours des mesures, la température se trouvait dans la tolérance de $\pm 1^{\circ}\text{C}$ par rapport à la température de référence de 20°C .
- Une jauge qui possède une grandeur nominale de 30,000 mm et une indication de tolérance de $\pm 1\mu\text{m}$.

On peut remarquer que les erreurs de type B se distinguent des erreurs de type A par le fait qu'elles ne peuvent normalement pas être diminuées en augmentant le nombre de mesures effectuées.

Les erreurs de ce type peuvent être déterminées ou estimées de plusieurs manières, selon le cas:

- A partir des caractéristiques (*datasheet*) de l'instrument. Par exemple, si d'après les caractéristiques fournies par le constructeur, la linéarité d'un voltmètre est de 0,1% de la gamme de mesure de 300 V, il en résulte une erreur systématique inconnue de ± 0.3 V, à laquelle on associera une distribution rectangulaire.
- Comparaison avec un instrument de mesure **au moins dix fois plus précis**.
- Calcul des tolérances à partir des tolérances mécaniques et des relations géométriques de l'instrument de mesure, par exemple dans le cas de basculement de systèmes de guidage ou de dilatation thermique.

3.3.3 Erreurs grossières

Après chaque série de mesures, il faut détecter et éliminer les erreurs grossières. La raison de ces dernières doit aussitôt être élucidée de manière à ce que cette situation ne se reproduise plus au cours des séries de mesures suivantes. Si elles ne sont pas **éliminées** elles peuvent influencer considérablement la valeur moyenne et l'écart-type d'une série de mesures.
Exemples d'erreurs grossières:

- Les premières valeurs d'une série de mesures peuvent être erronées si l'appareil de mesure ne fournit des valeurs fiables qu'après un certain temps d'échauffement.
- Fausse lecture d'une mesure: par exemple par une erreur de virgule ou du facteur x10, x100 affiché.
- Les éléments d'une chaîne de mesure ne sont pas correctement adaptés en impédance.
- Tension d'alimentation fausse ou fluctuante.
- Choc contre l'instrument de mesure au cours du mesurage.
- L'appareil utilisé est défectueux en raison d'une chute antérieure.
- Mauvaise manipulation de l'appareil en raison de la méconnaissance du mode d'emploi de ce dernier.

Chapitre 4 - TRAITEMENT STATISTIQUE

Si l'on mesure plusieurs fois le même phénomène avec un appareil suffisamment précis, on obtiendra chaque fois un résultat différent x_i . Ceci est dû à des phénomènes perturbateurs ou, pour les mesures extrêmement précises, à la nature aléatoire du phénomène (chaos, incertitude quantique).

Cette dispersion statistique des **erreurs aléatoires** peut être caractérisée par certains paramètres, aussi appelés **positions**.

En mesure physique et en métrologie, on va en général au minimum calculer deux valeurs:

- la **moyenne**, qui représentera la **valeur annoncée** de la mesure, appelée aussi **espérance** en statistique;
- l'**écart type** qui (en général multiplié par un facteur approprié) permet d'estimer **l'incertitude de mesure**.

De plus en général, on va vouloir avoir une description plus fine de la **distribution** des valeurs, et donc calculer d'autres positions.

4.1 La moyenne

La **moyenne arithmétique** est la moyenne « ordinaire », c'est-à-dire la somme des valeurs numériques (de la série) divisée par leur nombre.

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i$$

4.2 Autres types de moyenne

La **moyenne géométrique** est définie de la manière suivante:

$$\bar{x} = \sqrt[N]{x_1 * x_2 * \dots * x_N}$$

On peut illustrer la moyenne géométrique avec les deux cas suivants:

- Si l'inflation d'un pays est de 5% la première année et de 15% la suivante, l'augmentation moyenne des prix se calcule grâce à la moyenne géométrique des coefficients multiplicateurs 1,05 et 1,15 soit une augmentation moyenne de 9,88% et non grâce à la moyenne arithmétique 10%.

- Le carré (c'est-à-dire le rectangle moyen à deux côtés égaux) qui a même surface (le total considéré ici) qu'un rectangle de côtés 3 et 7 a pour côté la moyenne géométrique des deux côtés du rectangle $\sqrt{3 * 7} = 4,5826$.

La **moyenne harmonique** est définie de la manière suivante:

$$\bar{x} = \frac{N}{\sum_{i=1}^N \frac{1}{x_i}}$$

Dans certains cas, la moyenne harmonique donne la véritable notion de "moyenne". Par exemple, si pour la moitié de la distance d'un trajet vous voyagez à 40 km/h, et que pour l'autre moitié vous voyagez à 60 km/h, votre vitesse moyenne est alors donnée par la moyenne harmonique de 40 et 60, ce qui donne 48. Votre temps de voyage total est donc le même que si vous aviez voyagé à 48 km/h sur l'ensemble de la distance (attention toutefois, si vous aviez voyagé la moitié du temps à une vitesse, et l'autre moitié du temps à une autre vitesse, la moyenne arithmétique, dans ce cas 50 km/h, vous aurait donné la bonne moyenne).

De même, si un circuit électrique a deux résistances reliées en parallèle, la première faisant $40\ \Omega$ et l'autre $60\ \Omega$, la résistance moyenne des deux est $48\ \Omega$; la résistance totale du circuit est la même que si les deux résistances en parallèle étaient remplacées par des résistances de $48\ \Omega$ (attention, cette résistance moyenne n'est pas la résistance équivalente, qui est elle de $24\ \Omega$, et qui correspond à remplacer les deux résistances en parallèle par une seule résistance de $24\ \Omega$).

La **moyenne glissante**, ou **moyenne mobile**, définie comme :

$$\bar{x}_i = \frac{\bar{x}_{i-1}(i-1) + x_i}{i}$$

est un type de moyenne statistique utilisée pour analyser des séries ordonnées de données, le plus souvent des séries temporelles, en supprimant les fluctuations transitoires de façon à en souligner les tendances à plus long terme. Cette moyenne est dite mobile parce qu'elle est recalculée de façon continue, en utilisant à chaque calcul un sous-ensemble d'éléments dans lequel un nouvel élément remplace le plus ancien ou s'ajoute au sous-ensemble.

Ce type de moyenne est utilisé généralement comme méthode de lissage de valeurs, en particulier dans le domaine financier pour l'analyse technique des cours boursiers.

4.3 La médiane

De manière générale, la moyenne n'est pas forcément une manière pertinente de représenter la valeur la plus probable d'une série de données. On peut, par exemple, lui préférer la valeur **médiane** qui est la valeur à laquelle 50% des valeurs observées sont inférieures. La médiane n'est pas (sauf par hasard) équivalente à la moyenne arithmétique de l'ensemble.

En supposant que l'on ait, au préalable, rangé les valeurs observées de sorte qu'elles se trouvent indexées suivant l'ordre des valeurs croissantes, pour un **nombre pair** $N = 2n$ de valeurs, la médiane est la *moyenne* des deux valeurs centrales, soit $(x_n + x_{n+1})/2$.

Pour un **nombre impair** $N = 2n+1$ de valeurs, la médiane est unique et égale à x_{n+1} .

4.4 Variance et écart type

En probabilité, la **variance** d'une série de données est la moyenne des carrés des écarts à la moyenne:

$$\sigma^2 = \frac{\sum(x_i - \bar{x})^2}{N}$$

Elle permet de caractériser la dispersion des valeurs par rapport à la moyenne. Ainsi, une distribution avec une même espérance et une variance plus grande apparaîtra comme plus étalée.

Le fait que l'on prenne le carré de ces écarts à la moyenne évite que des écarts positifs et négatifs ne s'annulent. La variance σ^2 est toujours positive ou nulle. Ses dimensions sont le carré de celles de la variable mesurée.

Lorsque la variance est nulle, cela signifie que la variable aléatoire correspond à une constante (toutes les mesures sont identiques).

L'**écart type** est la racine carrée de la variance et donc mesure également la dispersion d'une série de valeurs autour de leur moyenne.

En statistiques, plus particulièrement en théorie des sondages, ainsi qu'en métrologie, l'**écart-type** (*standard deviation* en anglais) tente d'évaluer, à partir d'un échantillon soumis au hasard, la dispersion de la population tout entière. On distingue alors l'**écart type empirique biaisé** et l'**écart type empirique corrigé** dont la formule diffère de celle utilisée en probabilité.

Les écarts types connaissent de nombreuses applications, tant dans les sondages, qu'en physique (où ils sont souvent nommés *RMS* par abus de langage), ou en biologie. Ils permettent en pratique de rendre compte des résultats numériques d'une expérience répétée.

On distingue l'**écart type empirique** :

$$\sigma_e = \sqrt{\frac{\sum(x_i - \bar{x})^2}{N}} \quad (1)$$

de l'**écart type empirique corrigé** σ_c d'une série finie de n mesures:

$$\sigma_c = \sqrt{\frac{\sum(x_i - \bar{x})^2}{N-1}} \quad (2)$$

Pourquoi $(N-1)$?

Le fait que l'estimateur de la variance doive être divisé par $(N - 1)$ - et donc dans un certain sens moins précis - pour être sans biais provient du fait que l'estimation de la variance implique l'estimation d'un paramètre en plus, la moyenne. Cette correction tient compte donc du fait que l'estimation de la moyenne induit une incertitude de plus – voir aussi la section suivante. En effet si l'on suppose que la moyenne est parfaitement connue, l'estimateur (1) est sans biais.

Propriétés de l'écart type

- Invariance par translation. L'écart type n'est pas modifié si on ajoute ou retranche une constante à la série statistique.

Si on a $y = x + C$

$$\text{alors } \sigma_y = \sigma_x$$

- Stabilité par multiplication par une constante. Si on multiplie une série par une constante positive, l'écart type est multiplié par la même constante.

Si $y = Kx$

$$\text{alors } \sigma_y = K\sigma_x$$

- L'écart type est toujours positif et est nul si la série statistique est constante.
- Sensibilité aux valeurs extrêmes: comme la moyenne, l'écart type est sensible aux valeurs extrêmes ou aberrantes et il est généralement nécessaire d'**éliminer ces valeurs** avant de faire le calcul de l'écart type.

4.5 Ecart-type de la valeur moyenne

Considérons une série de n mesures x_i , de moyenne \bar{x} et écart type σ .

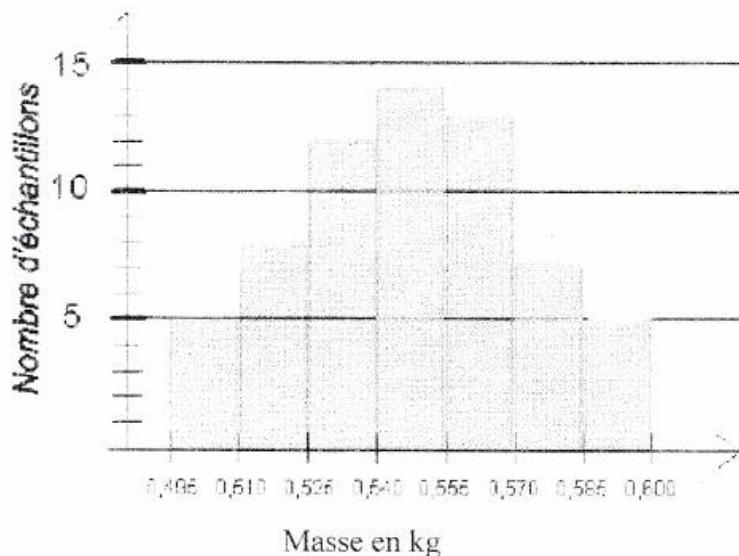
La dispersion attendue sur cette moyenne si on mesurait plusieurs séries de n mesures, donc l'incertitude sur la valeur x peut être caractérisée par l'**écart type de la valeur moyenne**, qui peut être estimé à partir de l'écart type d'une seule série de n mesure par:

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{N}}$$

4.6 Histogramme

L'histogramme est un moyen simple et rapide pour représenter la distribution d'un paramètre mesuré. Exemples:

- diamètre d'un arbre après usinage,
- dureté d'une série de pièces après un traitement thermique,
- concentration d'un élément dans la composition d'alliages produit par une fonderie,
- masse de préparation alimentaire dans une boîte de conserve,
- répartition de la luminosité des pixels dans une photographie.



Pour pouvoir bien mener l'étude de la dispersion d'un paramètre à l'aide d'un ou de plusieurs histogrammes, il faut avoir une bonne connaissance du paramètre étudié. De même, il faut connaître les conditions de collecte des données: fréquence de mesure, outil de mesure utilisé, possibilité de mélange de lots, possibilité de tri etc.

4.6.1. Collecte des données

La première phase est la collecte des données en cours de fabrication. Cette collecte peut être réalisée soit de façon exceptionnelle à l'occasion de l'étude du paramètre soit en utilisant un relevé automatique ou manuel fait lors d'un contrôle réalisé dans le cadre de la surveillance du procédé de fabrication.

Sans qu'il soit réellement possible de donner un nombre minimum, il faut que le nombre de valeurs relevées soit suffisant. Plus l'on dispose d'un nombre élevé de valeurs, plus l'interprétation sera aisée.

4.6.2 Nombre de classes

La première opération est de déterminer le nombre de classes de l'histogramme. Généralement, dans le cadre d'une analyse de ce type, on utilise des classes de largeur identique.

Le nombre de classes dépend du nombre de valeurs N dont on dispose.

Le nombre de classes K peut être déterminé par la formule suivante:

$$K = 1 + \frac{10 \log(N)}{3} \text{ ou plus simplement } K = \sqrt{N}$$

Cependant, l'histogramme étant souvent aussi un outil visuel, il est possible de faire varier le nombre de classes. Ceci permet de voir l'histogramme avec un nombre différent de classes et ainsi de trouver le meilleur compromis qui facilitera l'interprétation. L'utilisation d'un logiciel dédié ou plus simplement d'un tableur facilite cette opération.

4.6.3 Intervalles de classe

L'amplitude w de l'histogramme est

$$w = \text{valeur maximale} - \text{valeur minimale}$$

L'amplitude h théorique de chaque classe est alors:

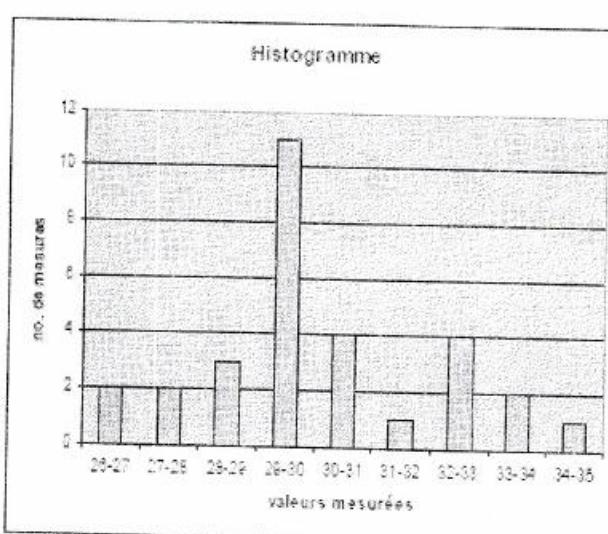
$$h = \frac{w}{K}$$

Il convient généralement d'**arrondir** cette valeur à un multiple de résolution de l'instrument de mesure (arrondi à l'excès).

4.7 Diagramme des effectifs cumulés (fonction de répartition)

Ce diagramme peut s'obtenir facilement depuis l'histogramme. Il permet de lire l'effectif d'un **intervalle entre zéro et une valeur quelconque x** et, par différence, l'effectif de tout intervalle.

Cette représentation préfigure le tracé de la fonction de répartition en probabilité.



Histogramme

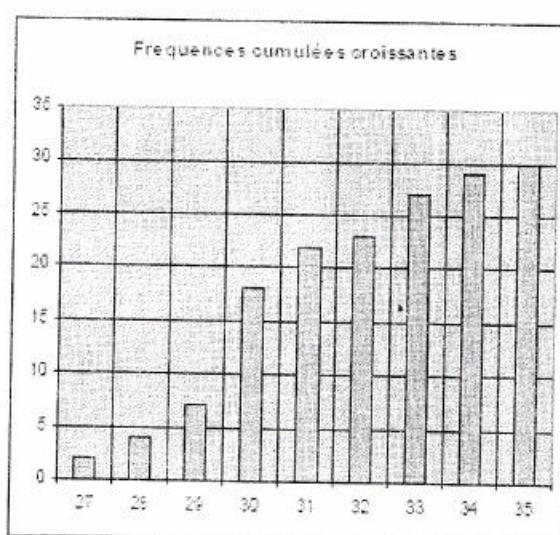
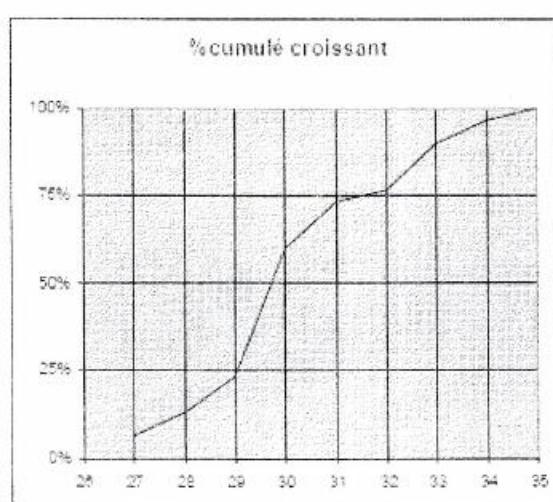
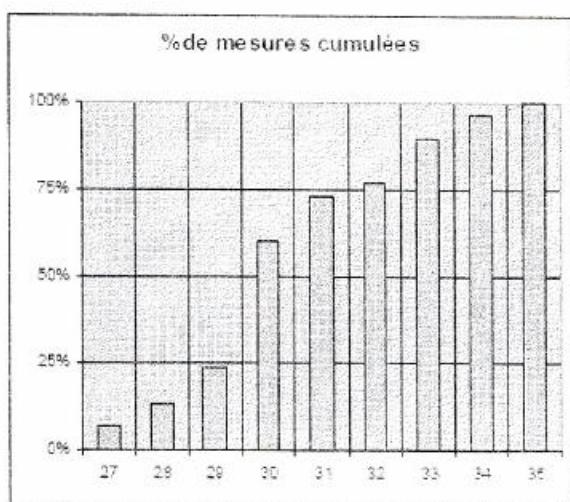


Diagramme des effectifs cumulés

Ce type de diagramme peut indiquer soit le nombre absolu de mesures, soit le pourcentage.

Ce diagramme peut être mis en forme de **polygone des effectifs cumulés** aussi pour des intervalles discrets.



4.8 Quantiles

Les quantiles sont des points essentiels pris à des intervalles réguliers verticaux d'une fonction de répartition cumulative d'une variable aléatoire. Diviser des données ordonnées en q sous-jeux de données de dimension essentiellement égale est la motivation des q-quantiles; les quantiles sont les valeurs de données marquant les limites entre deux sous-jeux consécutifs.

Certains quantiles ont des noms spéciaux:

- Les 100-quantiles sont appelés centiles ou percentiles selon un anglicisme fréquent;
- Les 10-quantiles sont appelés déciles;
- Les 5-quantiles sont appelés quintiles;
- Les 4-quantiles sont appelés quartiles;
- Le 2-quantile est la **médiane**.

4.9 La loi ou distribution normale ou gaussienne

La distribution de beaucoup de paramètres industriels correspond souvent à une **loi normale**, avec son profil « en cloche ».

Typiquement ce sera la première distribution avec laquelle on va comparer des histogrammes de mesure.

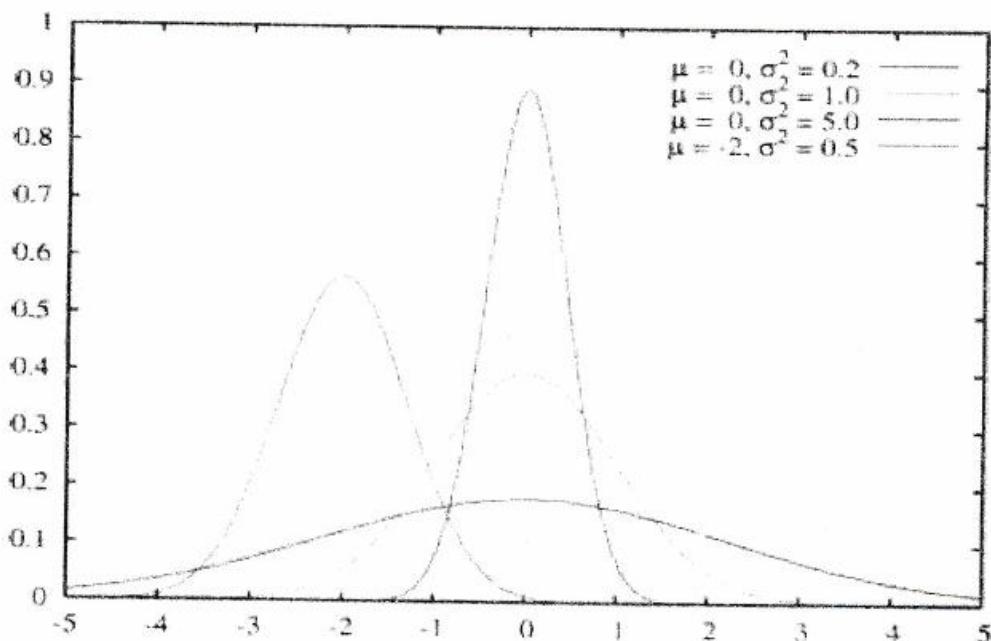
Une variable aléatoire suit une loi normale (ou loi normale gaussienne, loi de Laplace-Gauss) de moyenne μ et d'écart type σ (donc de variance σ^2) si elle admet une densité de probabilité f telle que:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-\mu}{\sigma})^2}$$

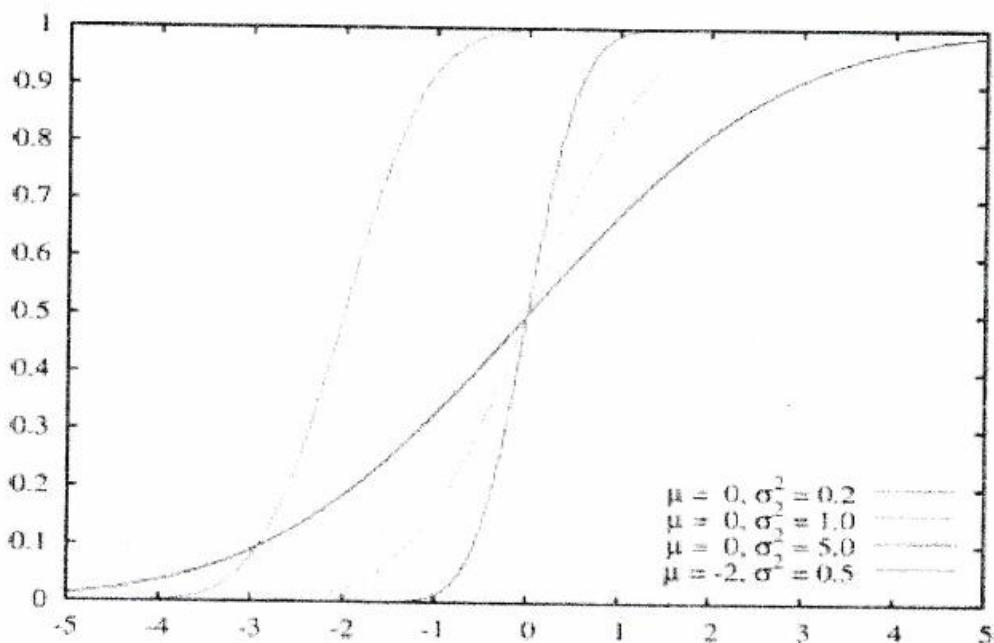
Une telle variable aléatoire est dite **variable gaussienne**.

Le cas où la moyenne est zéro et l'écart type est l'unité (1) est appelée **loi normale centrée réduite**:

$$\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}$$



Densité de probabilité (aussi appelée **fonction de masse**) de quelques distribution normales.
La courbe verte (pour $\sigma = 1$) représente la **loi normale centrée réduite**.



Fonctions de répartition pour divers moyennes et écart-types

On note Φ la **fonction de répartition de la loi normale centrée réduite**.

Elle est définie, pour tout réel x , par:

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^x \varphi(t) dt = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

La fonction de répartition tend vers 0 en $-\infty$; elle s'exprime à l'aide de la **fonction d'erreur**.

Il n'existe donc pas d'expression analytique pour Φ mais on peut exploiter avec profit son aspect régulier pour en donner une approximation grâce à un développement en série de Taylor.

Par exemple, une approximation (à l'ordre 5) autour de 0 est

$$\Phi(x) \approx \frac{1}{2} + 0,3989423 \left[x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{40} \right]$$

Cette approximation est performante pour

$$|x| < 2$$

4.10 Intervalle de confiance

En statistiques, et en particulier dans la théorie des sondages, lorsqu'on cherche à estimer la valeur d'un paramètre, on parle d'**intervalle ou niveau de confiance** lorsque l'on donne un intervalle qui contient, avec un certain degré de confiance, la valeur à estimer. Le **niveau de confiance** est en principe exprimé sous la forme d'une probabilité.

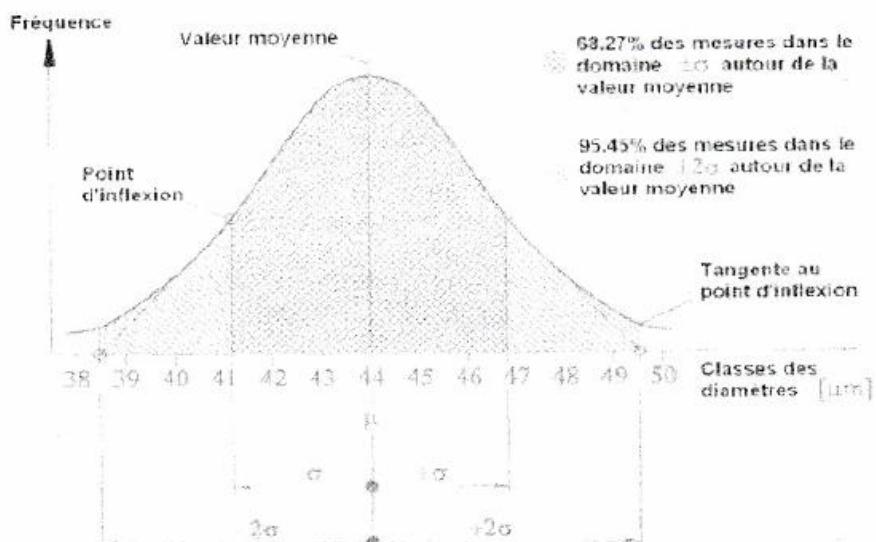
Ainsi, lorsqu'on effectue un sondage (tirage au hasard d'un sous-ensemble d'une population), l'estimation d'une quantité d'intérêt donnée est soumise au hasard et correspond rarement exactement à la valeur de la quantité que l'on cherche à estimer. En présentant pour l'estimation non pas une valeur mais un encadrement, on quantifie d'une certaine manière l'incertitude sur la valeur estimée.

Plus l'intervalle de confiance est de taille petite, plus l'incertitude sur la valeur estimée est petite.

L'un des objectifs de la théorie des sondages consiste à trouver des méthodes permettant de donner des intervalles de confiance de taille raisonnable.

On désigne le niveau de confiance par $(1-\alpha)$. Le nombre α est le **risque** que l'on prend de se tromper en affirmant que toutes les mesures sont bien dans l'intervalle proposé.

Un niveau de confiance de, par exemple, $(1-\alpha) = 95.45\%$ signifie qu'une mesure va se trouver dans le domaine de deux écarts-type de part et d'autre de la valeur moyenne avec une probabilité de 95.45%.



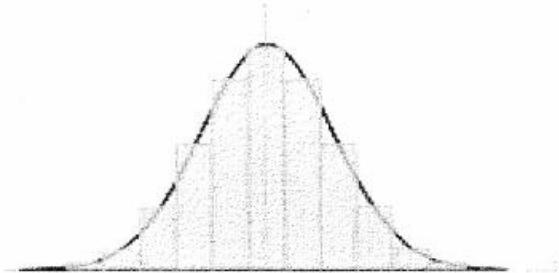
Dans le cadre de la technique de mesure industrielle, on travaille la plupart du temps avec un niveau de confiance de 95% respectivement avec le domaine de confiance $\pm 1.96 \sigma$. Mais dès que des vies humaines dépendent de la fiabilité des mesures, il est recommandé de travailler au minimum avec un niveau de confiance $(1-\alpha) = 99.73\%$ ce qui correspond à un domaine de confiance de $\pm 3\sigma$.

4.11 Critères de normalité

La distribution de beaucoup de paramètres industriels correspond souvent à une loi normale.

En effet le recours à une distribution gaussienne est si fréquent qu'il peut finir par être abusif. Il faut alors rechercher des **critères de normalité**.

La première méthode, la plus simple, consiste à tracer l'histogramme ou le diagramme en bâtons de la distribution et à vérifier si le diagramme est en forme de « cloche ». Ce critère est subjectif, il permet cependant d'éliminer une partie des distributions jugées alors non gaussiennes.



Cette comparaison est visuelle et même si elle peut être une première approche, elle ne constitue pas un critère de «normalité».

Un premier critère consiste à utiliser les plages de normalité ou intervalles de confiance.

Si une distribution est gaussienne:

1. 68% de la population est dans l'intervalle +/- 1 sigma
2. 95% de la population est dans l'intervalle +/- 2 sigma
3. 99,7% de la population est dans l'intervalle +/- 3 sigma

Lorsque ces pourcentages ne sont pas (plus ou moins bien) respectés, il est fort à parier que la distribution ne soit pas gaussienne.

Chapitre 5 - METHODE DES MOINDRES CARRES

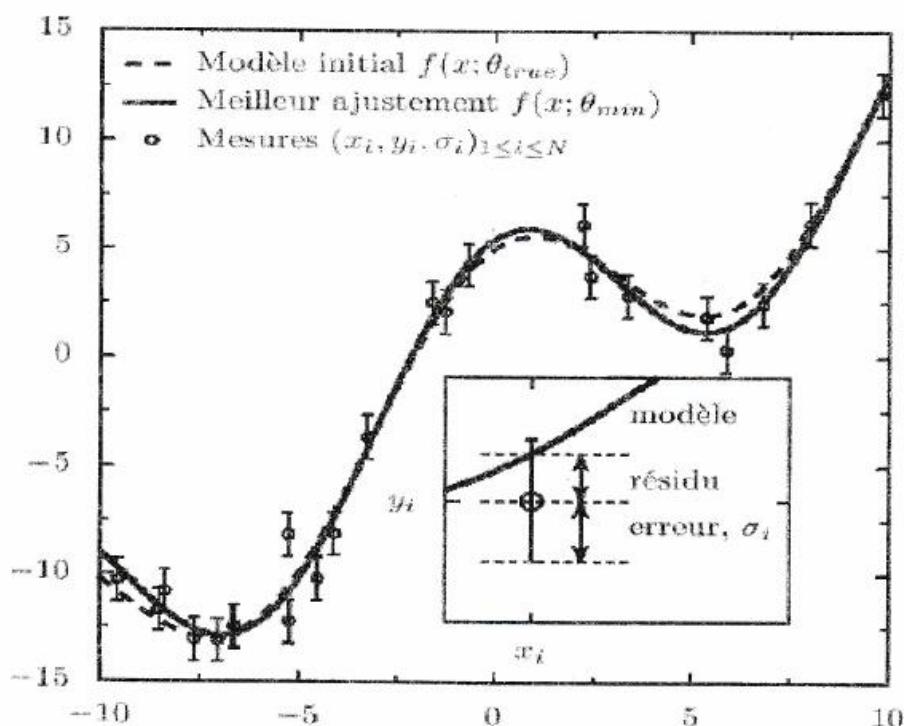
5.1 Définition

La **méthode des moindres carrés**, indépendamment élaborée par Legendre en 1805 et Gauss en 1809, permet de comparer des données expérimentales, généralement entachées d'erreurs de mesure à un **modèle mathématique** censé décrire ces données.

La méthode des moindres carrés permet alors de minimiser l'impact des erreurs expérimentales en « ajoutant de l'information » dans le processus de mesure.

Dans le cas le plus courant, le modèle théorique est une famille de fonctions $f(x; \theta)$ d'une ou plusieurs variables x , indexées par un ou plusieurs paramètres θ inconnus. La méthode des moindres carrés permet de sélectionner parmi ces fonctions, celle qui reproduit le mieux les données expérimentales.

On parle dans ce cas d'**ajustement par la méthode des moindres carrés**. Si les paramètres θ ont un sens physique la procédure d'ajustement donne également une estimation indirecte de la valeur de ces paramètres.



La figure ci-dessus est une illustration de la méthode des moindres carrés. Les données suivent la courbe figurée en pointillés et sont affectées par un bruit gaussien centré, de variance 1. Elles sont représentées graphiquement sous la forme de points de mesures, munies de barres d'erreur, représentant, par convention, ± 1 écart-type autour du point de mesure. Le meilleur ajustement déterminé par la méthode des moindres carrés est représenté en rouge. Il

s'agit de la fonction qui minimise la somme quadratique des écarts (appelés **résidus**) entre les données et le modèle.

La méthode consiste en une prescription (initialement empirique) qui est que la fonction $f(x; \theta)$ qui décrit « le mieux » les données est celle qui minimise la somme quadratique des déviations des mesures aux prédictions de $f(x; \theta)$.

Si par exemple, on dispose de N mesures, $(y_i)_{i=1, N}$ les paramètres θ « optimaux » au sens de la méthode des moindres carrés sont ceux qui minimisent la quantité:

$$S(\theta) = \sum_{i=1}^N (y_i - f(x_i; \theta))^2 = \sum_{i=1}^N r_i^2(\theta)$$

où les $r_i(\theta)$ sont les **résidus** au modèle, i.e. les écarts entre les points de mesure y_i et le modèle $f(x; \theta)$.

$S(\theta)$ peut être considéré comme une mesure de la **distance** entre les données expérimentales et le modèle théorique qui prédit ces données. La prescription des moindres carrés commande que cette distance soit minimale.

Si, comme c'est généralement le cas, on dispose d'une estimation de l'écart-type σ_i du bruit qui affecte chaque mesure, on l'utilise pour « peser » la contribution de la mesure au χ^2 .

Une mesure aura d'autant plus de poids que son incertitude sera faible:

$$\chi^2(\theta) = \sum_{i=1}^N \left(\frac{y_i - f(x_i; \theta)}{\sigma_i} \right)^2 = \sum_{i=1}^N w_i (y_i - f(x_i; \theta))^2$$

Les quantités w_i , inverses des variances des mesures sont appelées **poids** des mesures.

La quantité ci-dessus est appelée **khi carré** ou **khi-deux**. Son nom vient de la loi statistique qu'elle décrit, si les erreurs de mesure qui entachent les y_i sont distribuées suivant une loi normale (ce qui est très courant). Dans ce dernier cas, la méthode des moindres carrés permet de plus d'estimer quantitativement l'adéquation du modèle aux mesures, pour peu que l'on dispose d'une estimation fiable des erreurs σ_i .

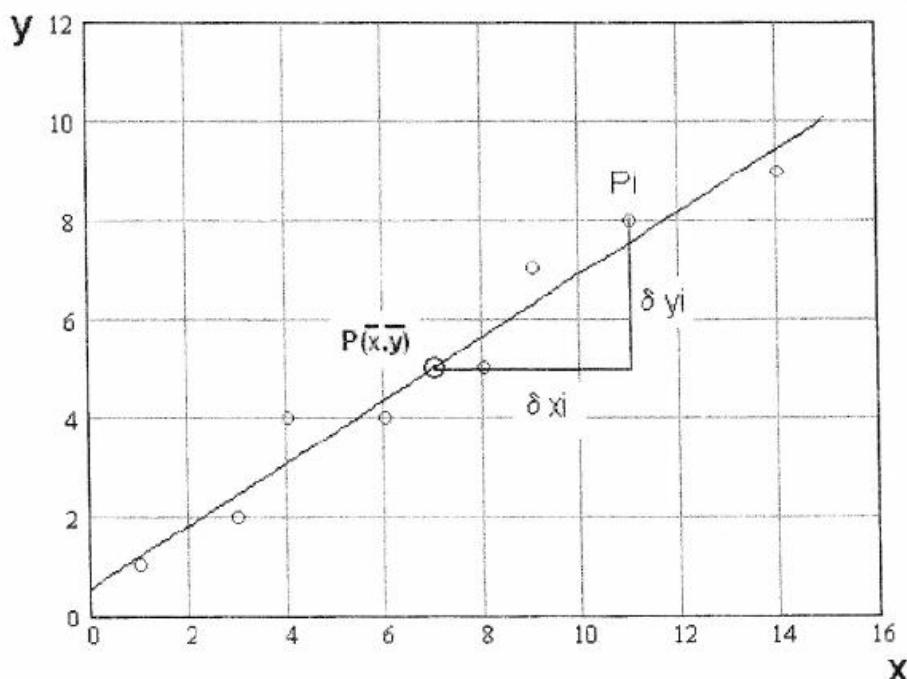
Son extrême simplicité fait que cette méthode est très couramment utilisée en sciences expérimentales. Une application courante est le **lissage** des données expérimentales par une fonction empirique (fonction linéaire, polynômes ou splines). Cependant son usage le plus important est probablement la mesure de quantités physiques à partir de données expérimentales.

Dans de nombreux cas, la quantité que l'on cherche à mesurer n'est pas observable et n'apparaît qu'indirectement comme paramètre θ d'un modèle théorique $f(x, \theta)$. Dans ce dernier cas de figure, il est possible de montrer que la méthode des moindres carrés permet de construire un estimateur de θ , qui vérifie certaines conditions d'optimalité.

5.2 Régression linéaire

Considérons deux grandeurs x et y supposées présenter entre elles une dépendance linéaire.

Il est possible de s'assurer graphiquement de l'existence d'une telle dépendance en dessinant le graphique des points (x_i, y_i) des mesures simultanées des grandeurs x et y .



Si le nuage de points s'aligne approximativement sur une droite, il y a tout lieu de penser que la relation reliant ces deux grandeurs peut s'écrire:

$$y = ax + b$$

relation dans laquelle a et b sont des constantes à déterminer

Etant données les erreurs aléatoires apparaissant sur les mesures de x et de y , il faut tenir compte de l'ensemble des mesures pour calculer a et b .

La première condition à satisfaire dans la résolution de ce problème est de faire passer la droite par le centre de gravité du nuage de points. Alors s'il y a corrélation linéaire entre x et y , on devrait avoir:

$$\bar{y} - y_i = a \cdot (\bar{x} - x_i)$$

En faisant intervenir les erreurs apparentes:

$$\delta\bar{x}_i = \bar{x} - x_i \quad \text{et} \quad \delta\bar{y}_i = \bar{y} - y_i$$

On obtient $\delta\bar{y}_i - a \cdot \delta\bar{x}_i = 0$

En raison des erreurs aléatoires, cette dernière relation n'est généralement pas satisfaite pour tous les points de mesure. On pose alors:

$$\delta_i = \delta\bar{y}_i - a \cdot \delta\bar{x}_i$$

La meilleure estimation de la pente a est celle qui rend la somme des carrés des δ_i minimum:

$$\sum_{i=1}^n \delta_i^2 = \sum_{i=1}^n (\delta\bar{y}_i - a \cdot \delta\bar{x}_i)^2$$

La meilleure estimation de a annule la dérivée première de la relation précédente par rapport à a , soit:

$$2 \cdot \sum_{i=1}^n (\delta\bar{y}_i - a \cdot \delta\bar{x}_i) \cdot (-\delta\bar{x}_i) = 0$$

donc:

$$\overline{a} = \frac{\sum_{i=1}^n \delta\bar{x}_i \cdot \delta\bar{y}_i}{\sum_{i=1}^n \delta\bar{x}_i^2}$$

La meilleure estimation de b est obtenue à l'aide du point définissant le centre de gravité de la meilleure estimation de a , soit:

$$\overline{b} = \bar{y} - \overline{a} \cdot \bar{x}$$

Finalement, la meilleure droite d'ajustement d'un nuage de points, appelée **droite de régression**, est donnée par l'équation:

$$y = \overline{a} \cdot x + \overline{b}$$

On peut remarquer que la droite de régression obtenue ici est celle déterminée en **minimisant la somme des carrés des écarts sur les ordonnées**, c'est-à-dire que l'on a supposé que les erreurs aléatoires sur les mesures de x sont négligeables par rapport à celles intervenant sur y .

Dans le cas inverse, il faudrait minimiser la somme des carrés des écarts sur les abscisses.

5.3 Régressions curvilinéaires

Dans de nombreux problèmes, une relation nette apparaît entre les variables étudiées, sans que cette relation soit linéaire. Il peut alors être utile de procéder à l'ajustement d'une courbe de régression au nuage de points observés.

Deux problèmes distincts se posent alors: d'une part, le choix de l'équation de la courbe (donc le choix d'un certain type de fonction), et d'autre part, la détermination des paramètres intervenant dans cette équation.

Il existe des régressions polynomiales, exponentielles, logarithmiques, ...

5.3.1 Régression polynomiale

On se propose d'ajuster un polynôme d'ordre k à un ensemble de n points de mesures donnés par les couples (x_i, y_i) .

Par hypothèse, un tel polynôme est du type:

$$a_0 x^0 + a_1 x^1 + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots + a_k x^k = y$$

On a une équation et $(k+1)$ inconnues a_i .

Pour obtenir les k équations manquantes, on multiplie successivement la relation précédente par

x, x^2, x^3, \dots, x^k . On écrit ensuite chacune des équations obtenues pour tous les couples de mesures et on effectue la sommation des mêmes types d'équations.

On obtient alors le système suivant:

$$\left\{ \begin{array}{l} a_0 n + a_1 \sum_{i=1}^n x_i + a_2 \sum_{i=1}^n x_i^2 + \dots + a_k \sum_{i=1}^n x_i^k = \sum_{i=1}^n y_i \\ a_0 \sum_{i=1}^n x_i + a_1 \sum_{i=1}^n x_i^2 + a_2 \sum_{i=1}^n x_i^3 + \dots + a_k \sum_{i=1}^n x_i^{k+1} = \sum_{i=1}^n y_i x_i \\ \dots \\ a_0 \sum_{i=1}^n x_i^k + a_1 \sum_{i=1}^n x_i^{k+1} + a_2 \sum_{i=1}^n x_i^{k+2} + \dots + a_k \sum_{i=1}^n x_i^{2k} = \sum_{i=1}^n y_i x_i^k \end{array} \right.$$

qui peut s'écrire sous forme matricielle :

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} n & \sum_{i=1}^n x_i^1 & \sum_{i=1}^n x_i^2 & \dots & \sum_{i=1}^n x_i^k & a_0 \\ \sum_{i=1}^n x_i^1 & \sum_{i=1}^n x_i^2 & \sum_{i=1}^n x_i^3 & \dots & \sum_{i=1}^n x_i^{k+1} & a_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sum_{i=1}^n x_i^k & \sum_{i=1}^n x_i^{k+1} & \sum_{i=1}^n x_i^{k+2} & \dots & \sum_{i=1}^n x_i^{2k} & a_k \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} \sum_{i=1}^n y_i \\ \sum_{i=1}^n y_i \cdot x_i \\ \dots \\ \dots \\ \sum_{i=1}^n y_i \cdot x_i^k \end{array} \right)$$

soit, sous forme condensée

$$[P][Q] = [R]$$

Finalement, la solution s'obtient par:

$$[Q] = [P]^{-1} \cdot [R]$$

5.3.2 Ajustement d'un cercle par la méthode des moindres carrés.

Soit un cercle de rayon R dont l'équation est donnée par:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2 \quad (1)$$

Cette équation peut s'écrire:

$$2ax + 2by + (R^2 - a^2 - b^2) = x^2 + y^2 \quad (2)$$

Les inconnues sont a , b et R . Il faut donc disposer de 3 équations.

En multipliant par x et par y la relation (2) on obtient:

$$2ax^2 + 2bxy + (R^2 - a^2 - b^2)x = x^3 + xy^2 \quad (3)$$

$$2axy + 2by^2 + (R^2 - a^2 - b^2)y = x^2y + y^3 \quad (4)$$

On écrit les relations (2), (3) et (4) pour tous les N points P_i , de coordonnées x_i , y_i , puis l'on somme toutes les équations par catégorie.

On obtient:

$$2a\sum_i x_i + 2b\sum_i y_i + N(R^2 - a^2 - b^2) = \sum_i x_i^2 + \sum_i y_i^2 \quad (5)$$

$$2a\sum_i x_i^2 + 2b\sum_i x_i y_i + (R^2 - a^2 - b^2)\sum_i x_i = \sum_i x_i^3 + \sum_i x_i y_i^2 \quad (6)$$

$$2a\sum_i x_i y_i + 2b\sum_i y_i^2 + (R^2 - a^2 - b^2)\sum_i y_i = \sum_i x_i^2 y_i + \sum_i y_i^3 \quad (7)$$

soit, sous forme matricielle:

$$\begin{pmatrix} \sum_i x_i & \sum_i y_i & N \\ \sum_i x_i^2 & \sum_i x_i y_i & \sum_i x_i \\ \sum_i x_i y_i & \sum_i y_i^2 & \sum_i y_i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2a \\ 2b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_i x_i^2 + \sum_i y_i^2 \\ \sum_i x_i^3 + \sum_i x_i y_i^2 \\ \sum_i x_i^2 y_i + \sum_i y_i^3 \end{pmatrix} \quad (8)$$

avec:

$$c = R^2 - a^2 - b^2 \quad (9)$$

et si on écrit l'équation (8) sous la forme:

$$[P] \cdot [Q] = [T] \quad (10)$$

on obtient les coefficient a, b, c par:

$$[Q] = [P]^{-1} \cdot [T] \quad (11)$$

Chapitre 6 BILAN ET CALCUL D'INCERTITUDE

Le bilan d'incertitude est le processus conduisant à estimer l'**incertitude de mesure**.

Ce processus tient compte de l'analyse complète du processus de mesure: évidemment les grandeurs mesurées, de la prise en compte des facteurs d'influence et des corrections apportées au résultat annoncé.

Ce type de calcul peut devoir se faire dans plusieurs contextes distincts:

- Dans le cas le plus simple on a un mesurande qui coïncide avec la seule grandeur mesurée physiquement, toutefois en général l'incertitude de la mesure sera aussi fonction d'autres variables (résolution de l'instrument, dérives, grandeurs d'influence, corrections, ...).
- Lorsqu'une valeur mesurée est utilisée dans une formule, il faut savoir estimer l'erreur induite sur la grandeur qui est le résultat de la formule, qui est de fait le vrai mesurande de l'opération. On parle ici donc de propagation des erreurs.
- Le calcul d'incertitude permet d'évaluer les erreurs qui se produisent lors de mesures liées à la vérification d'une relation entre différentes grandeurs physiques. Il faut ici évaluer ces incertitudes pour répondre à la question: « la relation n'est pas vérifiée exactement parce qu'elle est fausse ou parce que les mesures sont incertaines ? » On en déduit des marges d'erreurs, en dehors desquelles la relation sera invalidée.

5.1 Approche GUM

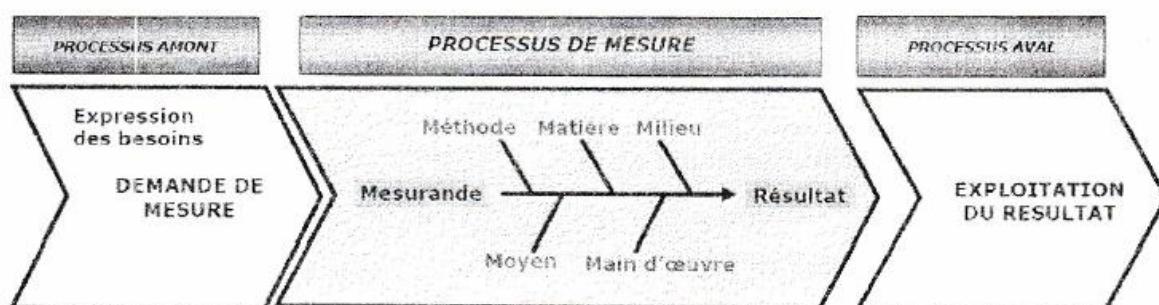
La méthode GUM (*Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement*) est une norme ISO décrivant des procédures générales pour le bilan et le calcul d'incertitude.

Cette approche est fondée sur le fait qu'il existe toujours un modèle explicite du processus de mesure. On rappelle que ce modèle est équivalent à une expression mathématique décrivant la façon dont sont utilisées toutes les informations dont dispose l'expérimentateur (série de lectures de l'instrument, valeur d'une correction lue dans un certificat d'étalonnage, la mesure de l'estimation des effets d'une grandeur d'influence...).

La méthode GUM décrit une procédure générale pour l'estimation de l'incertitude qui devient plus ou moins complexe en fonction de la précision désirée et du nombre et type de variables influençant la mesure.

On en donne ici une approche simplifiée, néanmoins applicable à la plupart des mesures industrielles et scientifiques, qui se déroule en un certain nombre d'étapes standard.

6.1.1 Analyse du processus de mesure: la méthode des «5 M»



On commence par définir le processus de mesure:

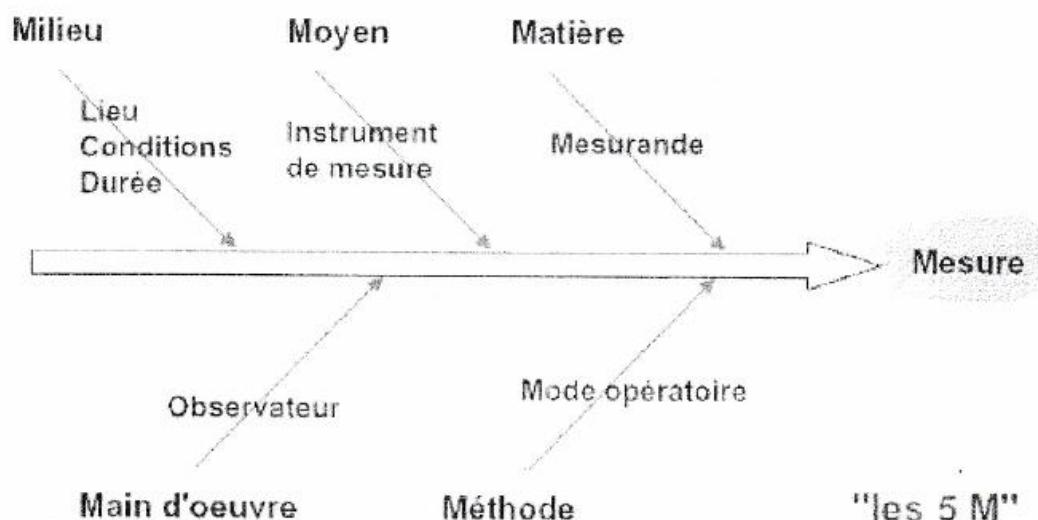
- Définir le besoin: pourquoi veut-on cette mesure ?
- Définir le mesurande: que mesure t'on ?
- Définir l'exactitude souhaitée: quelles contraintes ? (norme, budget, exactitude ...)
- Définir le processus de mesure: comment procéder vu les points précédents.

On va ensuite **recenser les sources d'erreurs** de mesure affectant le mesurage du mesurande.

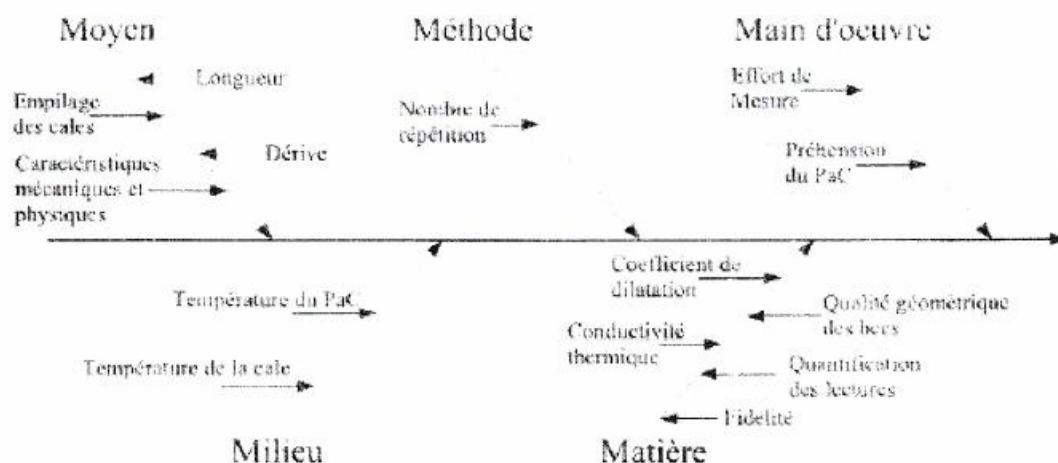
La diminution des erreurs est certainement la tâche la plus délicate pour toute personne réalisant des mesures ou des essais. Elle demande une étude approfondie de l'ensemble de la chaîne d'instrumentation et des phénomènes physiques directs ou indirects dont dépend le résultat de la mesure ou de l'essai.

Cette étude permet à la fois d'identifier les causes d'erreurs puis de proposer des corrections qui permettront de compenser les erreurs présumées.

Une méthode particulièrement utile est celle nommée des **5 M**: Méthode, Matière, Milieu, Moyen, Main d'œuvre.



On explicite successivement, la contribution des **moyens**, de la **méthode de mesure**, l'impact du **milieu environnant** et de la **main d'œuvre** (l'expérimentateur) sans oublier l'objet mesuré lui-même: le **mesurande**.



Cette analyse doit conduire normalement à déterminer le type et l'amplitude des différentes erreurs du mesurage:

1. Erreurs grossières (eg)

Les erreurs grossières se produisent lors d'une procédure non-conforme lors de la prise de mesure. Par exemple en provoquant un choc contre un comparateur, en commettant une erreur de lecture ou encore une erreur de décimale. Il faut déterminer les raisons des erreurs grossières et les éliminer dans la mesure du possible. En pratique, toute erreur supérieure à 3σ , doit faire l'objet d'une analyse et éventuelle répétition, et en général sera considérée comme erreur grossière. Les valeurs mesurées affectées par des erreurs grossières **doivent être éliminées** de la série de mesures.

2. Erreurs systématiques connues (e_{sc})

Les erreurs systématiques d'une mesure sont des grandeurs pouvant être déterminées tant du point de leur intensité que de leur signe. Par exemple on fait une série de mesures utilisant un instrument **au moins 10 fois plus précis** et on compare les résultats avec ceux du premier instrument. Pour chaque composante j de l'erreur identifiée, on cherche une estimation e_{sj} .

On appelle corrections, ces estimations changées de signe:

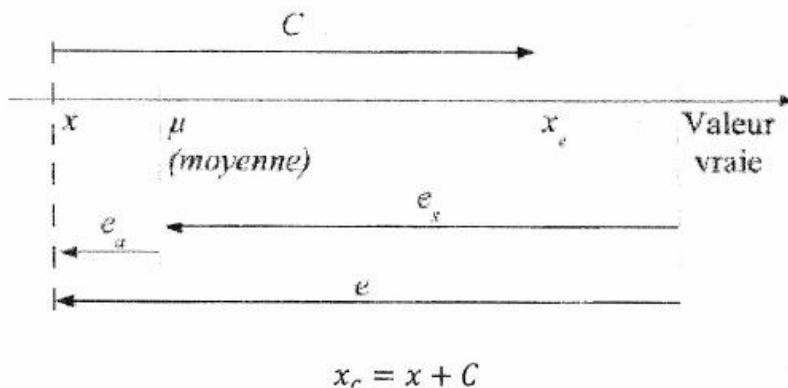
$$c_j = -e_{sj}$$

La correction totale est la somme algébrique de ces composantes:

$$C = \sum_j c_j$$

Cette loi est connue sous le nom de loi de composition des corrections.

On obtient le résultat corrigé de la mesure en ajoutant algébriquement la correction C au résultat brut x (figure ici-bas):



Il faut toutefois noter que souvent les estimations e_s peuvent être elles-mêmes affectées d'une incertitude, qui sera par exemple l'erreur du deuxième instrument utilisé pour leur détermination. Ces incertitudes seront traitées comme des erreurs aléatoires, généralement de type B.

3. Erreurs aléatoires (e_a) dont on peut étudier la dispersion statistique (type A), ou en évaluer les effets par d'autres méthodes (type B).

6.1.2 Modélisation du processus

Dans le cas général on considère la grandeur de sortie y (le mesurande) comme dépendant de plusieurs grandeurs d'entrées x_i par une fonction f , soit:

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

où f exprime la loi physique liant la grandeur de sortie aux grandeurs d'entrées.

Chaque grandeur d'entrée est un paramètre associé à une source d'**erreur aléatoire de type A ou B**, les mesures brutes ayant été préalablement corrigées pour les erreurs grossières et systématiques connues. Notons qu'il n'est pas strictement nécessaire de connaître mathématiquement la fonction $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ dans tous les domaines des grandeurs d'entrée mais uniquement autour des valeurs mesurées.

Si une des grandeurs x_i du modèle est nulle, il ne faut surtout pas l'éliminer car son incertitude, quant à elle, n'est pas nécessairement nulle.

6.1.3 Calcul des coefficients de sensibilité de y pour chaque x_i

Le calcul des $\frac{\partial y}{\partial x_i}$ sert à l'élaboration des incertitudes.

- Si on connaît l'équation liant y et x_i , alors on dérive y par rapport à x_i .
- Si on ignore la forme de l'équation $y(x_i)$ alors on la vérifie expérimentalement et on en détermine la pente au point de la mesure.

6.1.4 Estimation des moyennes et écarts type des variables X_i

A chaque grandeur x_i du modèle mathématique du processus de mesure $y = f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ correspond une variable aléatoire X_i dont on déterminera la **moyenne $\mu(X_i)$** et l'**incertitude type $u(X_i)$** .

EXERCICES

EXERCICE 01 :

Une résistance $R = 5.1 \text{ W}$ est traversée pendant 60.0 s par un courant continu d'intensité 2.2 A . Quelle est l'énergie thermique dépensée dans cette résistance ?

Donner son incertitude absolue. (Donner le résultat en deux chiffres significatifs)

Les incertitudes absolues des différents termes sont au plus égales à une unité de l'ordre du dernier chiffre.

EXERCICE 02 :

Afin de calculer les pertes de chaleur à travers les murs d'un bâtiment, il est nécessaire de connaître la différence de température entre l'intérieur et l'extérieur.

Des températures de 5°C et 20°C sont mesurées de chaque côté du mur par un thermomètre à mercure avec un domaine de -25°C à $+25^\circ\text{C}$. La précision des mesures est de $\pm 1\%$ de la lecture, calculer l'erreur possible dans la figure calculée pour la différence de température.

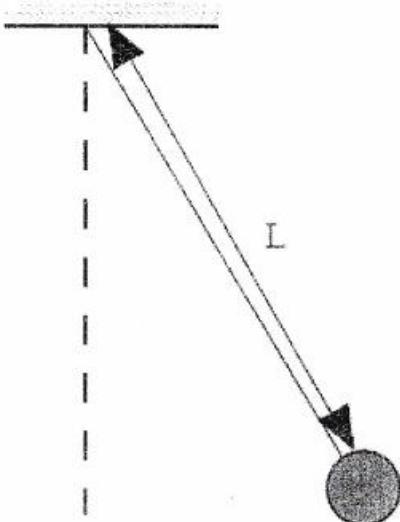
EXERCICE 03 :

L'accélération g de la pesanteur mesurée avec une pendule réversible est donnée par la relation suivante :

$$g = \frac{4 * \pi^2 * L}{T^2}$$

Avec $L = 104.23 \text{ cm}$: la longueur du pendule et $DL = 0.1 \text{ mm}$.

T : est la période des oscillations



1. Exprimer l'incertitude absolue sur g en fonction de DL , DT , L et T .
2. On veut mesurer la période T avec un chronomètre, pour cela on compte N périodes pendant un temps t . Calculer t pour que l'incertitude relative sur T soit égale à 1% sachant que les incertitudes sur t sont dues à l'erreur d'enclenchement et à l'erreur de déclenchement du chronomètre sont de 0.1 s chacune.
3. Sachant que le nombre d'oscillations est de 22 oscillations pendant le temps t , déduire la période T .
4. Calculer g et Dg .

EXERCICE 04 :

La période d'un pendule simple pour des oscillations de faible amplitude est:

$$T = 2 \times \pi \times \sqrt{\frac{l}{g}} \quad \text{avec} \quad \left\{ \begin{array}{l} l = 1m \pm 0.001m \\ g = 9.8N/kg \pm 0.01N/kg \end{array} \right\}$$

Calculer T et son incertitude absolue

EXERCICE 05 :

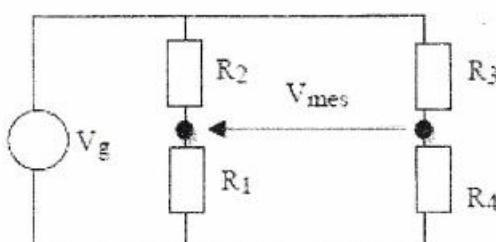
L'impédance d'une portion de circuit est :

$$Z = \sqrt{R^2 + L^2 \omega^2}$$

Chaque grandeur étant entachée d'incertitude, donner l'expression théorique de l'incertitude absolue sur Z .

EXERCICE 06 :

On considère le pont de Wheatstone présenté sur la figure ci-dessous :



1. Montrer que la tension V_{mes} peut être obtenue par l'expression suivante :

$$V_{mes} = \left(\frac{R_1}{R_1 + R_2} - \frac{R_4}{R_3 + R_4} \right) \cdot V_g$$

2. A l'équilibre, la valeur de V_{mes} est égale à Zéro. En déduire une relation entre R_1 et les autres résistances.

3. On suppose que les résistances R_3 et R_4 sont égales, et que $R_1=2\times R_2$.

Déterminer l'erreur relative sur V_{mes} sachant que l'erreur sur V_g est égale à 1%.

EXERCICE 07 :

La résistance d'une thermistance à une température T est donnée par la relation suivante :

$$R = R_0 \exp \left[\beta \left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_0} \right) \right]$$

Où :

R_0 : La valeur de la résistance à la température T_0 [K]

β : une constante dans le domaine considéré

$R_0 = 5000 \Omega$ à 23°C

Un étalonnage est réalisé afin de déterminer la valeur de la constante β dans le domaine d'étude.

1. Donner la signification de l'étalonnage et expliquer comment conduire une telle expérience
2. Les résultats expérimentaux obtenus sont illustrés dans le tableau suivant:

T($^\circ\text{C}$)	23	30	35	40	45	50	55	60
R(Ω)	5000	3950	365	2890	2500	2150	1860	1630

En utilisant la régression linéaire (méthode des moindres carrées) déterminer la meilleure estimation de β .

SOLUTIONS DES EXERCICES

EXERCICE 01 :

Remarque : les incertitudes des différents termes sont au plus égales à une unité de l'ordre du dernier chiffre inscrit.

$$\left\{ \begin{array}{l} R = (5,1 \pm 0,1)\Omega \\ I = (2,2 \pm 0,1)A \\ t = (60 \pm 0,1)s \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} P = RI^2 \\ P = \frac{W}{t} \end{array} \right.$$

L'énergie thermique dépensée est :

$$W = RI^2t$$

$$\text{A.N : } W = 5,1 \times 2,2^2 \times 60 = 1,5 \cdot 10^3 J$$

Calcul d'incertitude :

$$\frac{\Delta W}{W} = \frac{\Delta R}{R} + \frac{\Delta(I^2)}{I^2} + \frac{\Delta T}{T}$$

$$\frac{\Delta W}{W} = \frac{\Delta R}{R} + 2 \frac{\Delta I}{I} + \frac{\Delta T}{T}$$

Ainsi, l'incertitude absolue est déterminée par l'équation suivante :

$$\Delta W = W \times \left[\frac{\Delta R}{R} + 2 \frac{\Delta I}{I} + \frac{\Delta T}{T} \right]$$

$$\Delta W = 182 J \approx 200 J$$

$$\text{D'où } W = (1,5 \pm 0,2) \cdot 10^3 J$$

EXERCICE 02 :

L'erreur effectuée sur la première mesure est de :

$$\Delta T_1 = \frac{5 \times 1}{100} = 0.05^\circ C$$

En ce qui concerne la deuxième mesure, elle est de :

$$\Delta T_2 = \frac{20 \times 1}{100} = 0.2^\circ C$$

L'erreur probable sur la différence est:

$$\Delta T = \sqrt{\Delta T_1^2 + \Delta T_2^2} = 0.2^\circ C$$

Par rapport à l'étendue du thermomètre cette erreur représente:

$$\frac{\Delta T}{\text{étendue}} = \frac{0.2}{50} \times 100 = 4\%$$

EXERCICE 03 :

1. $g = \frac{4\pi^2 \times L}{T^2}$ d'où :

$$Lng = Ln4\pi^2 + LnL - 2LnT$$

$$\frac{dg}{g} = \frac{dL}{L} - 2\frac{dT}{T}$$

$$\frac{\Delta g}{g} = \frac{\Delta L}{L} + 2\frac{dT}{T}$$

$$\Delta g = g \times \left[\frac{\Delta L}{L} + 2\frac{\Delta T}{T} \right] = \frac{4 \times \pi^2 \times L}{T^2} \times \left[\frac{\Delta L}{L} + 2\frac{dT}{T} \right]$$

2. $t = N \times T$

Soit Dt_e et Dt_d les erreurs d'enclenchement et de déclenchement du chronomètre :

$$\Delta t = \sqrt{\Delta t_e^2 + \Delta t_d^2} = \sqrt{0,1^2 + 0,1^2} = \sqrt{0,02} = 0,14 \text{ s}$$

$$T = \frac{t}{N} \text{ ainsi : } \frac{\Delta T}{T} = \frac{\Delta t}{t} = 1\% \text{ d'où } t = \frac{\Delta t}{0,01} = 100 \times \Delta t = 14,14 \text{ s}$$

3. $T = \frac{t}{N} = \frac{t}{22} = 0,64 \text{ s}$

4. $g = \frac{4\pi^2 \times L}{T^2} = 10,04 \text{ s}$

$$g = g \times \left[\frac{\Delta L}{L} + 2\frac{\Delta T}{T} \right] = 0,208 \text{ m.s}^{-2} \text{ d'où } g = 9,96 \pm 0,21 \text{ m.s}^{-2}$$

EXERCICE 04 :

$$T = 2 \times \pi \times \sqrt{\frac{l}{g}} \text{ avec } \begin{cases} l = 1m \pm 0,001m \\ g = 9,8N/kg \pm 0,01N/kg \end{cases}$$

A.N : $T = 2,007 \text{ s}$

Calcul d'incertitude :

$$\frac{\Delta T}{T} = \frac{1}{2} \frac{\Delta l}{l} + \frac{1}{2} \frac{\Delta g}{g} \Rightarrow \Delta T = \frac{T}{2} \left[\frac{\Delta l}{l} + \frac{\Delta g}{g} \right]$$

$$A.N: \Delta T = \frac{2,007}{2} \left[\frac{0,001}{1} + \frac{0,01}{9,8} \right] = 0,002 \text{ s}$$

EXERCICE 05 :

En utilisant le principe suivant :

$$Y = X_1 \cdot X_2 \rightarrow \Delta Y = Y \left(\frac{\Delta X_1}{X_1} + \frac{\Delta X_2}{X_2} \right)$$

Nous obtenons :

$$\frac{\Delta Z}{Z} = \frac{R \Delta R}{R^2 + L^2 \omega^2} + \frac{(L \omega)^2 \left(\frac{\Delta L}{L} + \frac{\Delta \omega}{\omega} \right)}{R^2 + L^2 \omega^2}$$

$$\frac{\Delta Z}{Z} = \frac{R \Delta R}{R^2 + L^2 \omega^2} + \frac{L \omega^2 \Delta L}{R^2 + L^2 \omega^2} + \frac{L^2 \omega \Delta \omega}{R^2 + L^2 \omega^2}$$

$$\Delta Z = \frac{R}{\sqrt{R^2 + L^2 \omega^2}} \Delta R + \frac{L \omega^2}{\sqrt{R^2 + L^2 \omega^2}} \Delta L + \frac{L^2 \omega}{\sqrt{R^2 + L^2 \omega^2}} \Delta \omega$$

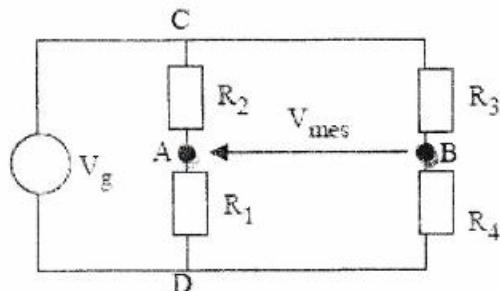
EXERCICE 06 :

- La relation donnant V_{mes} peut être obtenue par deux méthodes : la première se base sur l'équation de Thevenin et la deuxième sur la loi des mailles.

Équation de Thevenin :

$$V_{BD} = V_g \frac{R_4}{R_3 + R_4} ; \quad V_{AD} = V_g \frac{R_1}{R_1 + R_2}$$

La f.e.m du générateur de Thevenin est :



Pont de Wheatstone

$$E_T = V_{BA} = V_g \left(\frac{R_4}{R_3 + R_4} - \frac{R_1}{R_1 + R_2} \right)$$

D'où :

$$V_{mes} = V_{AB} = V_g \left(\frac{R_1}{R_1 + R_2} - \frac{R_4}{R_3 + R_4} \right)$$

2.

$$V_{mes} = 0 \rightarrow \frac{R_1}{R_1 + R_2} = \frac{R_4}{R_3 + R_4}$$

Ce qui donne :

$$R_1 R_3 = R_2 R_4$$

3.

$$V_{mes} = V_g \left(\frac{2R_2}{3R_2 + R_4} - \frac{R_4}{2R_4} \right) = \frac{1}{6} V_g \Rightarrow \frac{dV_{mes}}{V_{mes}} = \frac{dV_g}{V_g} = 1\%$$

EXERCICE 07 :

1. L'étalonnage consiste à déterminer des valeurs de l'output d'un instrument pour des valeurs constantes de l'input.

2.

$$R = R_0 \exp \left[\beta \left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_0} \right) \right]$$

$$\ln R = \ln R_0 + \beta \left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_0} \right)$$

Faisons le changement de variable suivant :

$$y = \ln R, \quad x = \left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_0} \right) \text{ et } b = \ln R_0$$

Ainsi, la relation devient linéaire : $y = \beta x + b$.

Avec ce changement de variable, nous obtenons :

T(°C)	23	30	35	40	45	50	55	60
R(Ω)	5000	3950	365	2890	2500	2150	1860	1630
T(K)	296	303	308	313	318	323	328	333
X	0	-8E-5	-1E-4	-2E-4	-2E-4	-3E-4	-3E-4	-4E-4
Y	8,5	8,3	8,1	8,0	7,8	7,7	7,5	7,4

En appliquant la méthode de régression linéaire (moindres carrées) :

$$m = \frac{\sum x \sum y - n \sum xy}{(\sum x)^2 - n \sum x^2}$$

Et

$$b = \frac{\sum y - m \sum x}{n} = \frac{\sum x \sum y - \sum x^2 \sum y}{(\sum x)^2 - n \sum x^2}$$

