Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

Лабораторная работа №1
по дисциплине
"Математический анализ и основы вычислений"
Вариант 44

Семестр II

Выполнил:
студент
Бровкин Аким Алексеевич
гр. J3110
ИСУ 465282

Отчёт сдан:
26.03.2025

Санкт-Петербург
2025

1 Введение

Целью данной лабораторной работы является изучение и реализация численных методов интегрирования: метода прямоугольников, метода трапеций и метода Симпсона. Задачи работы включают:

- Проведение вычислений для функции $f(x) = \sin(2x)$ на интервале $[0, \pi/2]$ с различным числом разбиений n;
- Построение графиков аппроксимаций;
- Анализ точности каждого метода.

2 Теоретическая часть

Численные методы интегрирования используются для приближенного вычисления определенных интегралов, когда аналитическое решение невозможно или затруднительно. В данной работе рассматриваются три метода: метод прямоугольников, метод трапеций и метод Симпсона.

2.1 Метод прямоугольников

Метод прямоугольников аппроксимирует площадь под кривой с помощью прямоугольников. Для интервала $[a, b]$, разбитого на n равных частей, шаг разбиения $h = \dfrac{b-a}{n}$. Площадь каждого прямоугольника определяется как произведение высоты (значение функции в определенной точке) на ширину h.

Формулы для различных вариантов метода:

- Левые прямоугольники: $s_i = f(x_{i-1}) \cdot h$,
- Правые прямоугольники: $s_i = f(x_i) \cdot h$,
- Средние прямоугольники: $s_i = f\left(\dfrac{x_{i-1} + x_i}{2}\right) \cdot h$,

где $x_i = a + ih$, а общий интеграл — сумма площадей всех прямоугольников. Метод прост в реализации, но имеет линейную точность $O(h)$.

2.2 Метод трапеций

Метод трапеций аппроксимирует площадь под кривой с помощью трапеций, что повышает точность по сравнению с методом прямоугольников. Площадь каждой трапеции вычисляется как:

$$s_i = \frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2} \cdot h,$$

где h — шаг разбиения, а $x_i = a + ih$. Суммирование площадей всех трапеций дает приближенное значение интеграла. Точность метода составляет $O(h^2)$, что делает его более эффективным.

2.3 Метод Симпсона

Метод Симпсона использует параболическую аппроксимацию, что обеспечивает еще более высокую точность. Для каждого подинтервала $[x_{i-1}, x_i]$ площадь вычисляется по формуле:

$$s_i = \left(f(x_{i-1}) + 4f\left(\frac{x_{i-1} + x_i}{2}\right) + f(x_i) \right) \cdot \frac{h}{6}.$$

Сумма всех таких площадей дает результат. Точность метода — $O(h^4)$, что делает его предпочтительным для задач, требующих высокой точности.

3 Реализация методов

3.1 Метод прямоугольников

Функция для метода прямоугольников вычисляет интеграл для левых, правых, средних и случайных прямоугольников:

```python
def rectangle_method(a, b, n):
    h = (b - a) / n
    x = [a + i * h for i in range(n + 1)]
    S_left = sum(f(x[i-1]) * h for i in range(1, n + 1))
    S_right = sum(f(x[i]) * h for i in range(1, n + 1))
    S_mid = sum(f((x[i-1] + x[i]) / 2) * h for i in range(1, n + 1))
    S_rand = sum(f(x[i-1] + random.random() * h) * h for i in range(1, n +
    1))
    return S_left, S_right, S_mid, S_rand
```

Функция $f(x) = \sin(2x)$ определена отдельно, а параметры $a = 0$, $b = \pi/2$, n варьируются.

3.2 Метод трапеций

Реализация метода трапеций:

```python
def trapezoid_method(a, b, n):
    h = (b - a) / n
    x = [a + i * h for i in range(n + 1)]
    return sum((f(x[i - 1]) + f(x[i])) * h / 2 for i in range(1, n + 1))
```

Код вычисляет среднее значение функции на концах каждого подинтервала и умножает на шаг h.

3.3 Метод Симпсона

Реализация метода Симпсона:

```python
def simpson_method(a, b, n):
    h = (b - a) / n
    x = [a + i * h for i in range(n + 1)]
    return sum((f(x[i - 1]) + 4 * f((x[i] + x[i - 1]) / 2) + f(x[i])) * h
    / 6 for i in range(1, n + 1))
```

Метод использует три точки на каждом подинтервале для построения параболы.

4 Экспериментальная часть

Для анализа методов были проведены вычисления интеграла $\int_0^{\pi/2} \sin(2x)\,dx$ при $n = 24$ и построены графики аппроксимаций для $n = 4, 8, 16$.

4.1 Результаты вычислений

Точное значение интеграла $\int_0^{\pi/2} \sin(2x)\,dx = 1$. Результаты для $n = 24$:

Метод	Значение
Левые прямоугольники	0.9985716979019744
Правые прямоугольники	0.9985716979019744
Средние прямоугольники	1.0007143040431583
Случайные прямоугольники	0.997075327211255
Трапеции	0.9985716979019744
Симпсон	1.000000101996097

Таблица 1: Приближенные значения интеграла для $n = 24$

4.2 Графики аппроксимаций

Графики построены с использованием библиотеки Matplotlib для $n = 4, 8, 16$. Примеры для $n = 4$:

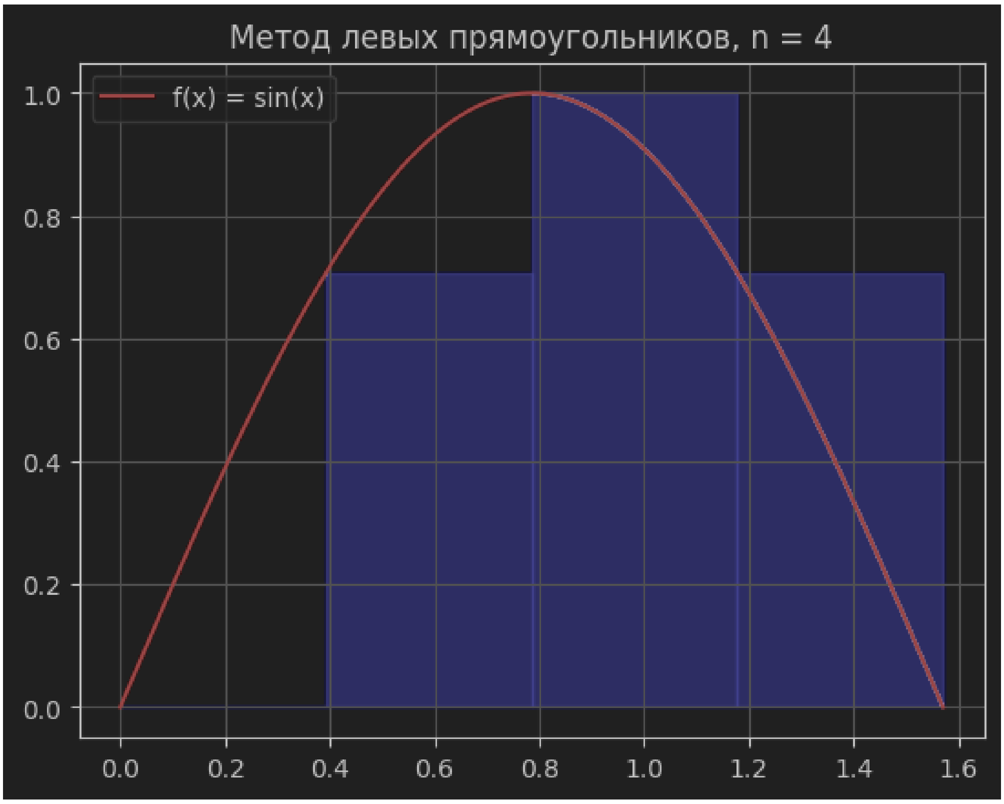

Рис. 1: Метод левых прямоугольников, $n = 4$

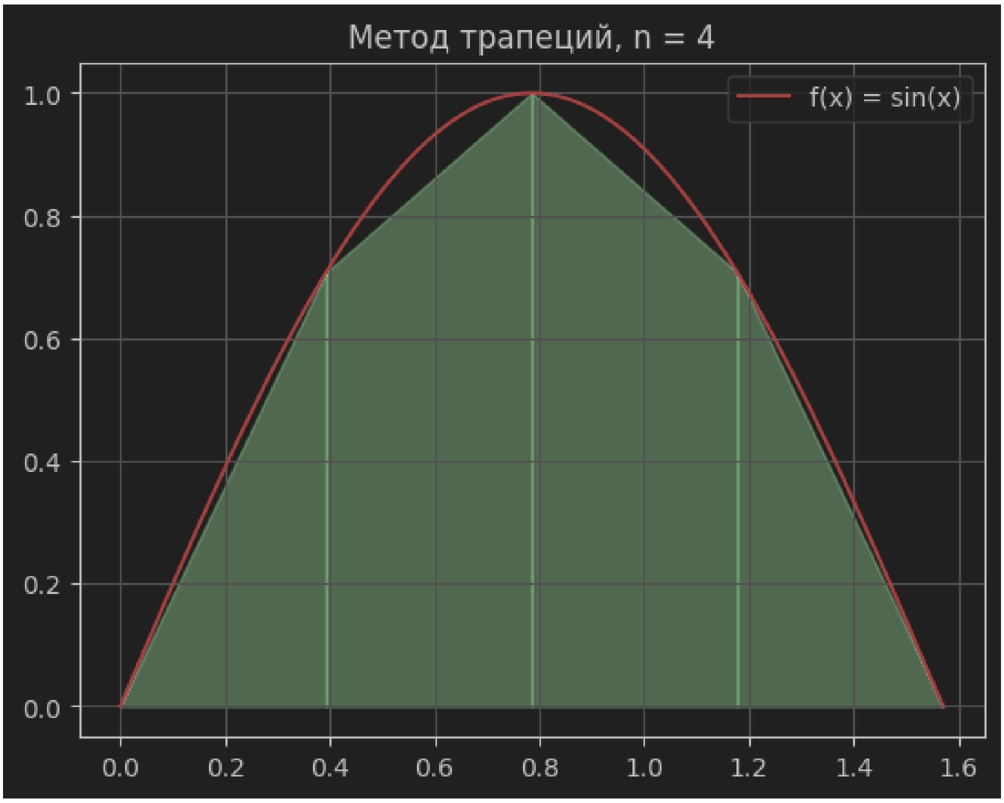

Рис. 2: Метод трапеций, $n = 4$

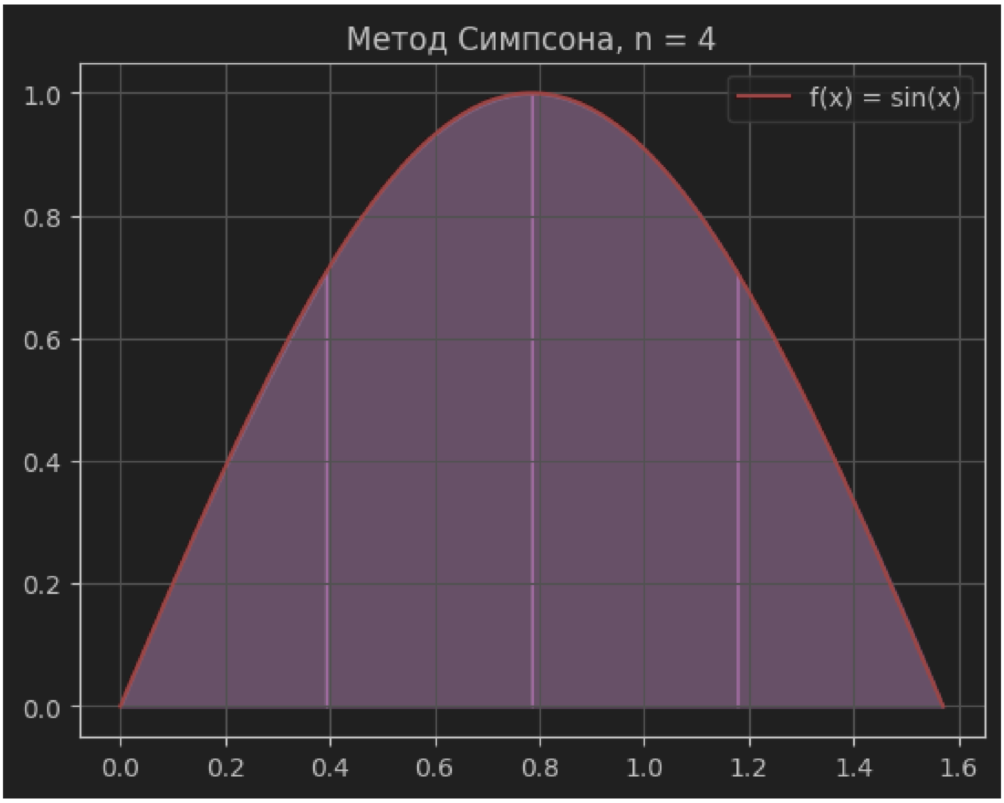

Рис. 3: Метод Симпсона, $n = 4$

5 Анализ результатов

Точное значение интеграла равно 1. Из таблицы видно, что:
- Метод прямоугольников (левые, правые, случайные) дает значения, близкие к 1, но с заметной погрешностью (0.001–0.003).
- Средние прямоугольники и метод трапеций показывают схожую точность, но средние прямоугольники слегка переоценивают результат.
- Метод Симпсона демонстрирует наилучшую точность (погрешность 10^{-7}), что соответствует его теоретической точности $O(h^4)$.

Графики подтверждают, что с увеличением n аппроксимации становятся ближе к функции $f(x) = \sin(2x)$, особенно для метода Симпсона, где параболическая форма лучше описывает кривизну.

6 Заключение

В ходе работы были реализованы и исследованы численные методы интегрирования: метод прямоугольников, метод трапеций и метод Симпсона. Проведенные вычисления для $f(x) = \sin(2x)$ на интервале $[0, \pi/2]$ и построенные графики позволили оценить их точность. Метод Симпсона показал наилучшие результаты, что соответствует его теоретической основе.

7 Приложение

Ссылка на код