

---

# Rapport d'EI

Pollution acoustique intérieure

---

*Projet réalisé par :*

Baptiste POKRZYWA  
Mathis ROUGET  
Seif ZAAFOURI  
Ayman ZBIRI  
Hamman ZELAOUI



CentraleSupélec



Novembre 2024

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>3</b>
1.1	Définition du problème . . . . .	3
1.2	Approche par liner absorbant . . . . .	4
1.3	Choix de la plage de fréquences d'étude . . . . .	4
<b>2</b>	<b>Modélisation du problème et étude théorique</b>	<b>5</b>
2.1	Modélisation du problème . . . . .	5
2.2	Relèvement du problème pour se ramener à une condition de Dirichlet homogène	5
2.3	Résolution par la méthode du Lagrangien . . . . .	6
2.3.1	Formulation variationnelle du problème de Helmholtz . . . . .	6
2.3.2	Expression et dérivation du Lagrangien . . . . .	7
2.3.3	Formulation du problème adjoint . . . . .	8
2.3.4	Expression et dérivation de l'énergie . . . . .	9
2.4	Conclusion de l'analyse théorique . . . . .	9
<b>3</b>	<b>Analyse des résultats numériques</b>	<b>10</b>
3.1	Optimisation de l'énergie par descente de gradient . . . . .	10
3.2	Principe de l'algorithme descente de gradient . . . . .	10
3.3	Critères d'arrêt . . . . .	10
3.4	Étude comparative des matériaux pour liners acoustiques . . . . .	11
3.5	Étude de la géométrie . . . . .	12
3.6	Étude de la quantité de matériaux . . . . .	13
3.7	Optimisation multi-fréquentielle . . . . .	15
3.8	Conclusion de l'analyse numérique . . . . .	16

# 1 Introduction

## 1.1 Définition du problème

Les nuisances sonores liées au milieu aéronautique et plus particulièrement celles liées aux réacteurs d'avions posent un réel problème de tranquillité pour les riverains mais également pour leur santé [1]. Des initiatives à l'instar du programme de recherche DEBATS (Discussion sur les Effets du Bruit des Aéronefs Touchant la Santé) ont permis la réalisation d'études à proximité des aéroports Paris-Charles-De-Gaulle, Toulouse-Blagnac et Lyon-Saint-Exupéry [2]. Ces dernières ont démontré que la pollution sonore en milieu urbain et en particulier aux alentours des couloirs aériens aurait un effet néfaste pour la santé des riverains et que l'exposition au bruit aurait un effet stressant. Toutes ces nuisances ont un coût social important comme le souligne l'ADEME [3] et cela représente un enjeu majeur pour l'industrie aéronautique.

Afin de comprendre l'origine de cette pollution sonore, il faut s'intéresser à la structure des réacteurs d'avions. Les principales sources de bruits sont liées aux bruits des pâles et de la combustion comme l'illustrent les Figures 1 et 2.

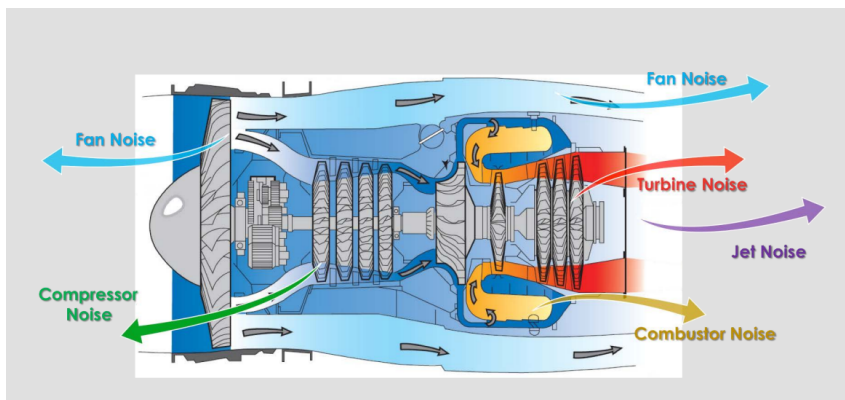


FIGURE 1 – Différentes sources de bruits d'un réacteur d'avion [4]

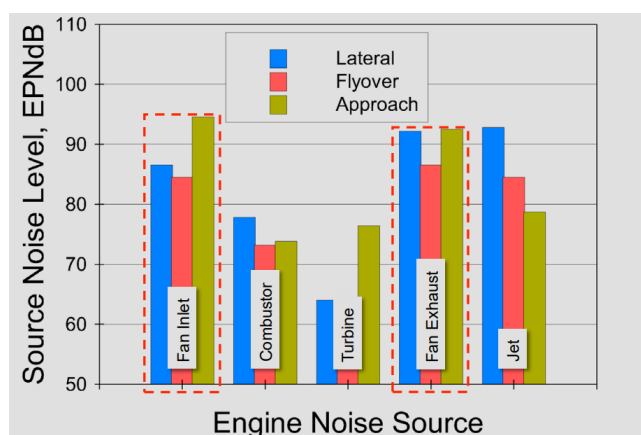


FIGURE 2 – Comparaison des sources de bruits d'un réacteur d'avion [4]

L'objectif de notre étude est d'étudier une méthode d'atténuation de la pollution sonore liée au réacteur : le liner absorbant situé sur la surface intérieure du réacteur.

## 1.2 Approche par liner absorbant

La solution étudiée ici est l'utilisation d'un liner absorbant disposé sur la surface interne du réacteur. Différentes structures existent telles qu'un liner en nid d'abeilles mais nous étudierons ici un modèle simplifié. Nous considérerons également qu'il n'y a pas d'écoulement d'air dans un souci de simplification.

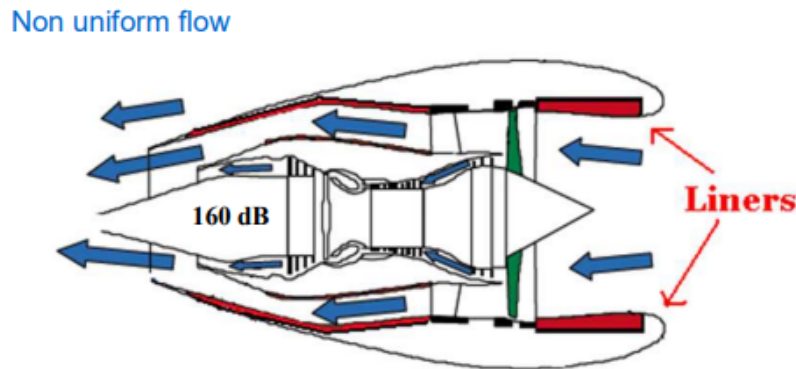


FIGURE 3 – Modélisation d'un réacteur avec présence d'un liner absorbant interne [5]



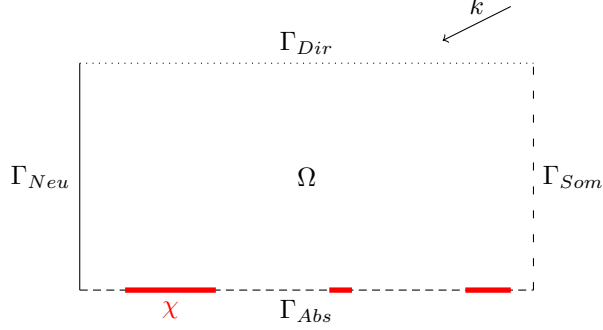
FIGURE 4 – Réacteur d'avion avec liner en nid d'abeilles [6]

## 1.3 Choix de la plage de fréquences d'étude

Nous avons vu que les pâles représentent la principale source de nuisances sonores. De plus ce sont en général les basses fréquences qui sont les plus difficiles à absorber. Cela nous amène à considérer une plage de fréquences comprises dans l'intervalle [10 Hz, 2000 Hz] qui inclut les basses fréquences [7].

## 2 Modélisation du problème et étude théorique

### 2.1 Modélisation du problème



On assimile l'intérieur du réacteur à un domaine rectangulaire  $\Omega$  qui reçoit une onde plane incidente de vecteur d'onde  $k$  sur l'une de ses faces, notée  $\Gamma_{Dir}$ . L'onde se propage alors dans le domaine  $\Omega$  et peut être réfléchié totalement sur un bord appelé  $\Gamma_{Neu}$ , absorbée partiellement par un revêtement adapté sur une paroi notée  $\Gamma_{Abs}$  ou bien s'échapper du réacteur par une paroi vérifiant une condition de Sommerfeld, notée  $\Gamma_{Som}$ . Notons que la paroi  $\Gamma_{Abs}$  n'est que partiellement recouverte par un revêtement poreux et la répartition est définie selon la fonction caractéristique  $\chi$  représentée en rouge sur le schéma.

On peut modéliser la situation par le problème de Helmholtz suivant :

$$\begin{cases} \Delta u + k^2 u = 0 & \text{sur } \Omega \\ u = g & \text{sur } \Gamma_{Dir} \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 & \text{sur } \Gamma_{Neu} \\ \frac{\partial u}{\partial n} + \alpha \chi u = 0 & \text{sur } \Gamma_{Abs} \\ \frac{\partial u}{\partial n} - iku = 0 & \text{sur } \Gamma_{Som} \end{cases} \quad (1)$$

En effet, l'onde incidente peut être modélisée par une condition de Dirichlet non-homogène avec un terme source  $g$ , la réflexion totale correspond à une condition de Neumann sur le bord concerné tandis que l'absorption et la transmission totale à l'extérieur de  $\Omega$  correspondent à des conditions de Robin (avec  $\alpha \in \mathbb{C}$  dépendant de la fréquence de l'onde  $\omega$  et du matériau poreux utilisé, et  $\chi$  la répartition du revêtement absorbant). On a  $\text{Re}(\alpha) > 0$  correspondant à une contribution au terme d'énergie caractérisant la réflexion dans le domaine et  $\text{Im}(\alpha) < 0$  qui permet de caractériser la décroissance de l'énergie liée à l'absorption par le milieu poreux.

L'objectif est désormais de comparer les modifications liées à la condition de type Sommerfeld par rapport à l'étude avec une condition de Neumann décrite dans [8]. Nous reprendrons ainsi la preuve de la méthode du Lagrangien en présentant les différences rencontrées.

### 2.2 Relèvement du problème pour se ramener à une condition de Dirichlet homogène

Afin de résoudre le problème (1) avec  $g \neq 0$ , nous pouvons utiliser une méthode de relèvement afin de se ramener à un problème avec une condition de Dirichlet homogène sur  $\Gamma_{Dir}$ . Pour cela, on écrit  $u = \hat{u} + \hat{g}$  sous forme faible avec  $\hat{u} \in V(\Omega)$  et  $\hat{g} \in H^1(\Omega)$  vérifiant :

$$\begin{cases} \Delta \hat{u} + k^2 \hat{u} = -k^2 \hat{g} & \text{sur } \Omega \\ \text{Tr } \hat{u} = 0 & \text{sur } \Gamma_{Dir} \\ \frac{\partial \hat{u}}{\partial n} = 0 & \text{sur } \Gamma_{Neu} \\ \frac{\partial \hat{u}}{\partial n} + \alpha \chi \text{Tr } \hat{u} = 0 & \text{sur } \Gamma_{Abs} \\ \frac{\partial \hat{u}}{\partial n} - ik \text{Tr } \hat{u} = 0 & \text{sur } \Gamma_{Som} \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{cases} \Delta \hat{g} = 0 & \text{sur } \Omega \\ \text{Tr } \hat{g} = g & \text{sur } \Gamma_{Dir} \\ \frac{\partial \hat{g}}{\partial n} = 0 & \text{sur } \Gamma_{Neu} \\ \frac{\partial \hat{g}}{\partial n} + \alpha \chi \text{Tr } \hat{g} = 0 & \text{sur } \Gamma_{Abs} \\ \frac{\partial \hat{g}}{\partial n} - ik \text{Tr } \hat{g} = 0 & \text{sur } \Gamma_{Som} \end{cases} \quad (3)$$

On note alors pour faciliter les notations :  $f = -k^2 \hat{g}$ .

## 2.3 Résolution par la méthode du Lagrangien

### 2.3.1 Formulation variationnelle du problème de Helmholtz

Dans toute la suite, nous noterons  $\alpha = \alpha_R + i\alpha_I$ ,  $\hat{u} = \hat{u}_R + i\hat{u}_I$ ,  $\hat{g} = \hat{g}_R + i\hat{g}_I$  les décompositions en valeurs réelles et imaginaires des fonctions considérées et nous assimilerons abusivement ces notations à leurs traces lorsque c'est nécessaire (en particulier, lorsque ces notations sont utilisées dans des intégrales sur le bord du domaine).

Ainsi on a :

$$\begin{cases} \alpha \hat{u} = (\alpha_R \hat{u}_R - \alpha_I \hat{u}_I) + i(\alpha_I \hat{u}_R + \alpha_R \hat{u}_I) \\ -i\hat{u} = \hat{u}_I - i\hat{u}_R \end{cases}$$

On en déduit les sous-problèmes de Helmholtz suivants :

$$\begin{cases} \Delta \hat{u}_R + k^2 \hat{u}_R = f_R & \text{sur } \Omega \\ \hat{u}_R = g & \text{sur } \Gamma_{Dir} \\ \frac{\partial \hat{u}_R}{\partial n} = 0 & \text{sur } \Gamma_{Neu} \\ \frac{\partial \hat{u}_R}{\partial n} + \chi(\alpha_R \hat{u}_R - \alpha_I \hat{u}_I) = 0 & \text{sur } \Gamma_{Abs} \\ \frac{\partial \hat{u}_R}{\partial n} + k \hat{u}_I = 0 & \text{sur } \Gamma_{Som} \end{cases} \quad (4)$$

$$\begin{cases} \Delta \hat{u}_I + k^2 \hat{u}_I = f_I & \text{sur } \Omega \\ \hat{u}_I = g & \text{sur } \Gamma_{Dir} \\ \frac{\partial \hat{u}_I}{\partial n} = 0 & \text{sur } \Gamma_{Neu} \\ \frac{\partial \hat{u}_I}{\partial n} + \chi(\alpha_I \hat{u}_R + \alpha_R \hat{u}_I) = 0 & \text{sur } \Gamma_{Abs} \\ \frac{\partial \hat{u}_I}{\partial n} - k \hat{u}_R = 0 & \text{sur } \Gamma_{Som} \end{cases} \quad (5)$$

On peut ensuite exprimer les formulations faibles en intégrant par parties :

$$\forall v_R \in V(\Omega), - \int_{\Omega} \nabla \hat{u}_R \nabla v_R \, dx + k^2 \int_{\Omega} \hat{u}_R v_R \, dx - k \int_{\Gamma_{Som}} \hat{u}_I v_R \, d\mu - \int_{\Gamma_{Abs}} \chi(\alpha_R \hat{u}_R - \alpha_I \hat{u}_I) v_R \, d\mu = \int_{\Omega} f_R v_R \, dx \quad (6)$$

$$\forall v_I \in V(\Omega), - \int_{\Omega} \nabla \hat{u}_I \nabla v_I \, dx + k^2 \int_{\Omega} \hat{u}_I v_I \, dx - k \int_{\Gamma_{Som}} \hat{u}_R v_I \, d\mu - \int_{\Gamma_{Abs}} \chi(\alpha_I \hat{u}_R + \alpha_R \hat{u}_I) v_I \, d\mu = \int_{\Omega} f_I v_I \, dx \quad (7)$$

On peut alors exprimer la formulation variationnelle en soustrayant (7) à (6) pour  $(v_R, v_I)$  dans  $V(\Omega)^2$  :

$$\begin{aligned} \text{FV}(\chi, \hat{u}_R, \hat{u}_I, v_R, v_I) &= \int_{\Omega} ((\nabla \hat{u}_I \nabla v_I - \nabla \hat{u}_R \nabla v_R) + k^2(\hat{u}_R v_R - \hat{u}_I v_I) + (f_R v_R - f_I v_I)) \, dx \\ &+ \int_{\Gamma_{Abs}} \chi((\alpha_I \hat{u}_R + \alpha_R \hat{u}_I) v_I - (\alpha_R \hat{u}_R - \alpha_I \hat{u}_I) v_R) \, d\mu \\ &- \int_{\Gamma_{Som}} k(\hat{u}_I v_R + \hat{u}_R v_I) \, d\mu \end{aligned} \quad (8)$$

### 2.3.2 Expression et dérivation du Lagrangien

De la section précédente découle l'expression du Lagrangien exprimé en fonction de cinq variables indépendantes  $\chi$  et  $w_R, w_I, q_R, q_I$  dans  $V(\Omega)$  :

$$\mathcal{L}(\chi, w_R, w_I, q_R, q_I) = \text{FV}(\chi, w_R, w_I, q_R, q_I) + \int_{\Omega} ((w_R + \hat{g}_R)^2 + (w_I + \hat{g}_I)^2) \, dx \quad (9)$$

Il faut noter que l'expression du Lagrangien prend en compte le relèvement car on considère le terme d'énergie totale correspondant à l'énergie de la solution du problème de Helmholtz initial (1). On peut donc écrire le Lagrangien sous sa forme intégrale explicite :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\chi, w_R, w_I, q_R, q_I) &= \int_{\Omega} (w_R^2 + w_I^2 + \hat{g}_R^2 + \hat{g}_I^2 + 2(w_R \hat{g}_R + w_I \hat{g}_I)) \, dx \\ &+ \int_{\Omega} ((\nabla w_I \nabla q_I - \nabla w_R \nabla q_R) + k^2(w_R q_R - w_I q_I) + (f_R q_R - f_I q_I)) \, dx \\ &+ \int_{\Gamma_{Abs}} \chi((\alpha_I w_R + \alpha_R w_I) q_I - (\alpha_R w_R - \alpha_I w_I) q_R) \, d\mu \\ &- \int_{\Gamma_{Som}} k(w_I q_R + w_R q_I) \, d\mu \end{aligned} \quad (10)$$

Les dérivées de  $\mathcal{L}$  par rapport à  $w_R$  et  $w_I$  s'expriment alors aisément ainsi on dérive par rapport aux variables indépendantes puis on évalue en  $w_R = \hat{u}_R$  et  $w_I = \hat{u}_I$  d'où pour  $(\phi_R, \phi_I) \in V(\Omega)^2$  :

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial w_R}(\chi, \hat{u}_R, \hat{u}_I, q_R, q_I), \phi_R \right\rangle &= \int_{\Omega} 2(\hat{u}_R + \hat{g}_R) \phi_R \, dx \\ &+ \int_{\Omega} (-\nabla q_R \nabla \phi_R + k^2 q_R \phi_R) \, dx \\ &+ \int_{\Gamma_{Abs}} \chi(\alpha_I q_I - \alpha_R q_R) \phi_R \, d\mu \\ &- \int_{\Gamma_{Som}} k q_I \phi_R \, d\mu \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned}
\left\langle \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial w_I}(\chi, \widehat{u}_R, \widehat{u}_I, q_R, q_I), \phi_I \right\rangle &= \int_{\Omega} 2(\widehat{u}_I + \widehat{g}_I) \phi_I \, dx \\
&+ \int_{\Omega} (\nabla q_I \nabla \phi_I - k^2 q_I \phi_I) \, dx \\
&+ \int_{\Gamma_{Abs}} \chi(\alpha_R q_I + \alpha_I q_R) \phi_I \, d\mu \\
&- \int_{\Gamma_{Som}} k q_R \phi_I \, d\mu
\end{aligned} \tag{12}$$

### 2.3.3 Formulation du problème adjoint

Le problème adjoint se formule ainsi :

$$\forall \phi_R \in V(\Omega), \left\langle \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial w_R}(\chi, \widehat{u}_R, \widehat{u}_I, p_R, p_I), \phi_R \right\rangle = 0 \tag{13}$$

$$\forall \phi_I \in V(\Omega), \left\langle \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial w_I}(\chi, \widehat{u}_R, \widehat{u}_I, p_R, p_I), \phi_I \right\rangle = 0 \tag{14}$$

où  $p_R$  et  $p_I$  désignent les solutions de problème adjoint (au lieu de conserver les notations des variables indépendantes du Lagrangien  $q_R$  et  $q_I$ ). Ces conditions se reformulent par :

$$\begin{aligned}
\forall \phi_R \in V(\Omega), \\
\int_{\Omega} 2(\widehat{u}_R + \widehat{g}_R) \phi_R \, dx + \int_{\Omega} (-\nabla p_R \nabla \phi_R + k^2 p_R \phi_R) \, dx \\
+ \int_{\Gamma_{Abs}} \chi(\alpha_I p_I - \alpha_R q_R) \phi_R \, d\mu - \int_{\Gamma_{Som}} k p_I \phi_R \, d\mu = 0
\end{aligned} \tag{15}$$

$$\begin{aligned}
\forall \phi_I \in V(\Omega), \\
\int_{\Omega} 2(\widehat{u}_I + \widehat{g}_I) \phi_I \, dx + \int_{\Omega} (\nabla p_I \nabla \phi_I - k^2 p_I \phi_I) \, dx \\
+ \int_{\Gamma_{Abs}} \chi(\alpha_R p_I + \alpha_I p_R) \phi_I \, d\mu - \int_{\Gamma_{Som}} k p_R \phi_I \, d\mu = 0
\end{aligned} \tag{16}$$

sous formulation variationnelle mais on peut également obtenir une formulation forte du problème adjoint à l'aide d'intégrations par parties :

$$\begin{cases} \Delta p_R + k^2 p_R = -2u_R & \text{sur } \Omega \\ p_R = 0 & \text{sur } \Gamma_{Dir} \\ \frac{\partial p_R}{\partial n} = 0 & \text{sur } \Gamma_{Neu} \\ \frac{\partial p_R}{\partial n} + \chi(\alpha_R p_R - \alpha_I p_I) = 0 & \text{sur } \Gamma_{Abs} \\ \frac{\partial p_R}{\partial n} + k p_I = 0 & \text{sur } \Gamma_{Som} \end{cases} \tag{17}$$



$$\begin{cases} \Delta p_I + k^2 p_I = -2u_I & \text{sur } \Omega \\ p_I = 0 & \text{sur } \Gamma_{Dir} \\ \frac{\partial p_I}{\partial n} = 0 & \text{sur } \Gamma_{Neu} \\ \frac{\partial p_I}{\partial n} + \chi(\alpha_I p_R + \alpha_R p_I) = 0 & \text{sur } \Gamma_{Abs} \\ \frac{\partial p_I}{\partial n} + k p_R = 0 & \text{sur } \Gamma_{Som} \end{cases} \quad (18)$$

d'où le problème adjoint complexe pour  $p = p_R + ip_I$  :

$$\begin{cases} \Delta p + k^2 p = -2\bar{u} & \text{sur } \Omega \\ p = 0 & \text{sur } \Gamma_{Dir} \\ \frac{\partial p}{\partial n} = 0 & \text{sur } \Gamma_{Neu} \\ \frac{\partial p}{\partial n} + \chi \alpha p = 0 & \text{sur } \Gamma_{Abs} \\ \frac{\partial p}{\partial n} + ik\bar{p} = 0 & \text{sur } \Gamma_{Som} \end{cases} \quad (19)$$

On remarque que le problème adjoint dépend de la solution du problème de Helmholtz non relevé (1) notée  $u$ .

### 2.3.4 Expression et dérivation de l'énergie

En notant  $J(\chi)$  l'énergie du problème de Helmholtz initial (1), on la définit par :

$$J(\chi) = \int_{\Omega} |u(\chi)|^2 dx$$

et on peut calculer sa dérivée de Fréchet grâce à la formule :

$$\begin{aligned} \langle J'(\chi), \chi_0 \rangle &= \left\langle \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \chi}(\chi, u_R(\chi), u_I(\chi), p_R(\chi), p_I(\chi)), \chi_0 \right\rangle \\ &= \int_{\Gamma_{Abs}} \chi_0 ((\alpha_I u_R(\chi) + \alpha_R u_I(\chi)) p_I(\chi) - (\alpha_R u_R(\chi) - \alpha_I u_I(\chi)) p_R(\chi)) d\mu \quad (20) \\ &= - \int_{\Gamma_{Abs}} \chi_0 \operatorname{Re} (\alpha u(\chi) p(\chi)) d\mu \end{aligned}$$

On retrouve la même dérivée pour  $J$  que dans le cas sans condition de Sommerfeld au détail près que le problème adjoint ayant été modifié,  $p$  n'a pas exactement la même valeur.

## 2.4 Conclusion de l'analyse théorique

Cette analyse théorique nous permet de conclure quant à la convergence de l'algorithme de minimisation qui sera utilisé (approche par suite minimisante par descente de gradient pour trouver une répartition  $\chi_{opt}$  minisant  $J$  sur  $U_{ad}(\beta)$ ). En effet, en adaptant le problème adjoint, la solution fournie par le même algorithme adapté sera également convergente puisque l'on a montré que le problème était bien posé et que la dérivée de Fréchet était identique.

Concernant les détails de la convergence, on a comme pour le cas de condition de Neumann sur les deux bords, que l'approche par suite minimisante fonctionne puisque  $U_{ad}^*(\beta)$  est compact pour la convergence faible\* et  $J^*$  est continue. En projetant les éléments optimaux obtenus de  $U_{ad}^*(\beta)$  sur  $U_{ad}(\beta)$  on obtient une répartition optimale. Aussi, en pratique, on utilise différents niveaux de fractales mais il faut faire attention à ce que l'usinage soit simple pour ne pas que le matériau ne coûte trop cher.

### 3 Analyse des résultats numériques

#### 3.1 Optimisation de l'énergie par descente de gradient

Dans cette partie, nous appliquons l'algorithme de descente de gradient pour minimiser l'énergie au sein du réacteur, en prenant un nombre d'onde  $k = 1$ . Cet algorithme ajuste progressivement les paramètres dans le but de réduire la fonction coût, qui correspond ici à l'énergie que nous souhaitons minimiser. Afin de visualiser l'efficacité de cette méthode, nous représentons l'évolution de la fonction coût en fonction du nombre d'itérations. Cette courbe montre la diminution de l'énergie à chaque étape de l'optimisation et permet d'évaluer la rapidité de convergence de l'algorithme. À chaque itération, le nouvel ajustement calculé par l'algorithme entraîne une baisse de l'énergie, démontrant ainsi l'efficacité de la descente de gradient dans l'optimisation énergétique du réacteur.

#### 3.2 Principe de l'algorithme descente de gradient

L'objectif de cet algorithme est de déterminer la distribution optimale  $\chi$  permettant de minimiser l'énergie  $J(\chi)$ , définie par :

$$J(\chi) = \int_{\Omega} |p_{\chi}|^2 dx,$$

où  $p_{\chi}$  est la solution d'un système d'équations décrit précédemment. Pour cela, on utilise un algorithme de descente de gradient, dont la mise à jour est donnée par :

$$\chi^{(k+1)} = P_{\mathcal{L}} \left[ \chi^{(k)} - \mu_k \mathcal{A}(\chi^{(k)}) \right],$$

où  $P_{\mathcal{L}}$  est un projecteur permettant de garantir que  $\chi^{(k+1)}$  reste dans l'intervalle admissible  $[0, 1]$ , et  $\mu_k$  est le pas d'apprentissage.

##### Mise à jour du pas d'apprentissage

Le pas  $\mu_k$  évolue à chaque itération en fonction de la variation de l'énergie :

- Si  $J(\chi^{(k+1)}) < J(\chi^{(k)})$ , alors  $\mu_{k+1} = \mu_k + \epsilon$ ,
- Sinon,  $\mu_{k+1} = \frac{\mu_k}{2}$ .

##### Projection sur l'espace admissible

Pour s'assurer que  $\chi^{(k+1)} \in [0, 1]$ , on applique le projecteur défini par :

$$P_{\mathcal{L}}(\chi) = \max(0, \min(\chi + \ell, 1)),$$

où  $\ell$  est un multiplicateur de Lagrange, mis à jour à chaque itération, afin de respecter la contrainte suivante :

$$\int_{\Gamma_{\text{abs}}} \chi dS = \beta.$$

#### 3.3 Critères d'arrêt

L'algorithme s'arrête selon l'un des critères suivants :

- Le nombre maximal d'itérations  $K$  est atteint,
- La différence entre deux itérations successives devient inférieure à une tolérance pré-définie, soit :

$$\|\chi^{(k+1)} - \chi^{(k)}\|_2 < \text{tolérance}.$$

### 3.4 Étude comparative des matériaux pour liners acoustiques

Dans cette section, nous menons une étude comparative de plusieurs matériaux potentiellement adaptés pour la fabrication de *liners* acoustiques destinés à l'absorption de l'énergie sonore, que nous cherchons à minimiser. Cette capacité d'absorption est un critère fondamental pour les liners de moteurs d'avion, où la réduction des nuisances sonores est primordiale.

La qualité d'absorption d'un matériau dépend principalement de son coefficient d'absorption acoustique, qui varie en fonction de la fréquence du son. À basse fréquence, les matériaux doivent absorber efficacement les ondes sonores tout en conservant une faible densité pour minimiser le poids total de l'appareil, et une haute résistance mécanique pour garantir leur durabilité. Par ailleurs, une structure poreuse est requise pour permettre la dissipation de l'énergie sonore au sein de la matrice du matériau.

Ainsi, nous avons sélectionné six matériaux présentant des propriétés qui répondent à ces exigences : l'Isorel, la mélamine, le bouleau lamellé (birch\_LT), la laine de roche, les fibres de verre, et le polyuréthane. Chacun de ces matériaux est évalué en fonction de trois paramètres physiques essentiels qui influencent leurs performances d'absorption acoustique :

- **La porosité  $\phi$**  : Elle détermine la proportion de vide dans le matériau, ce qui permet aux ondes sonores de pénétrer et d'être dissipées.
- **La résistivité  $\sigma$**  : Elle caractérise la résistance au passage de l'air à travers le matériau, affectant directement la capacité de dissipation des ondes sonores.
- **La tortuosité  $h$**  : Elle mesure la complexité du chemin que les ondes sonores doivent suivre dans le matériau, ce qui favorise une dissipation accrue de l'énergie sonore.

Matériau	Porosité $\phi$	Résistivité $\sigma$ (N.s/m <sup>4</sup> )	Tortuosité $\alpha_h$
Mélamine	0.99	14000	1.02
Isorel	0.7	142300	1.15
Bouleau lamellé (Birch_LT)	0.529	151429	1.37
Laine de roche	0.95	30000	1.05
Fibres de verre	0.9	50000	1.1
Polyuréthane	0.8	100000	1.3

TABLE 1 – Caractéristiques physiques des matériaux pour liners acoustiques.

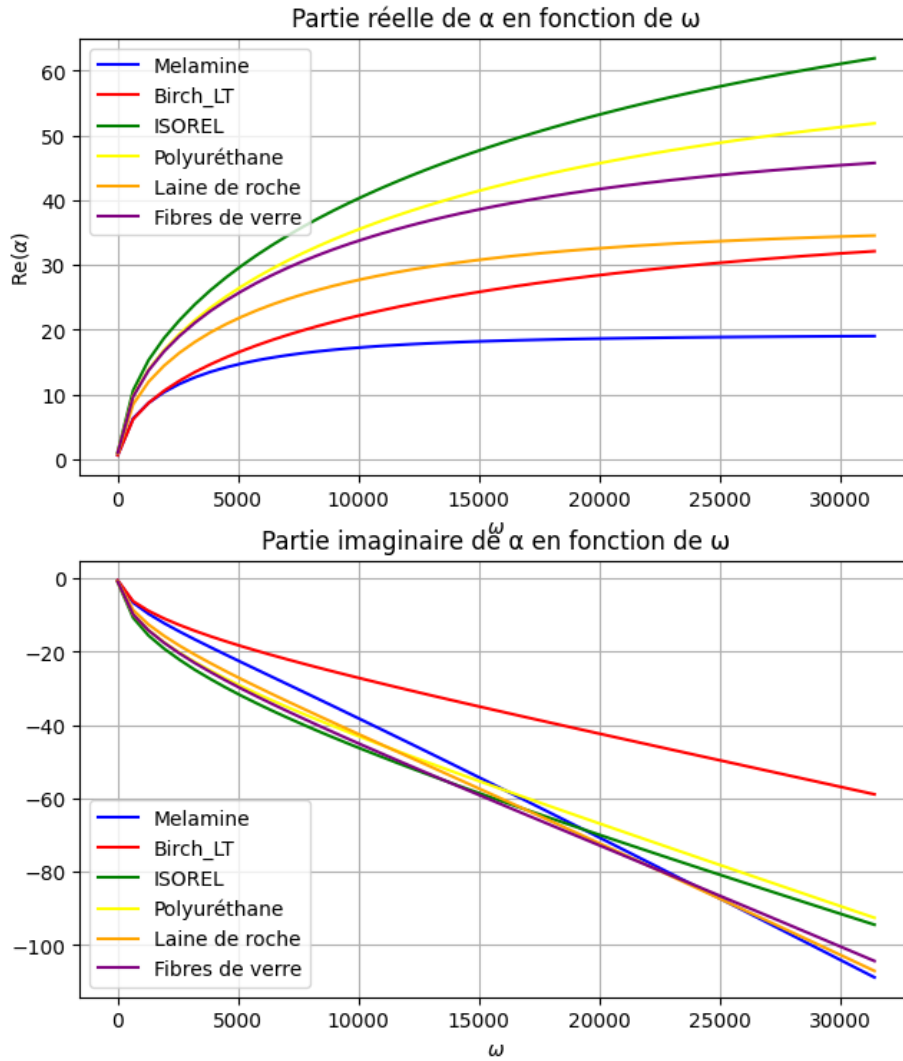


FIGURE 5 –  $\text{Re}(\alpha)$  et  $\text{Im}(\alpha)$  en fonction de  $\omega$  pour les différents matériaux

La figure présentée montre clairement que parmi les différents matériaux testés, la Mélanine se distingue comme étant le plus absorbant. Ce matériau présente les meilleures performances en termes d'absorption acoustique, ce qui en fait un choix privilégié pour la fabrication de matériaux poreux. En raison de ses propriétés supérieures, il est recommandé d'adopter la Mélanine pour la construction du matériau poreux au niveau de la frontière de bas, dans le but d'optimiser l'absorption sonore et d'améliorer les performances acoustiques globales du système.

### 3.5 Étude de la géométrie

#### Étude de l'absorption de l'énergie acoustique en fonction du niveau de fractale

Dans cette étude, nous analysons comment le niveau de fractale influence l'absorption de l'énergie acoustique. Les matériaux poreux possédant des structures fractales offrent des configurations complexes qui peuvent absorber les ondes sonores de manière efficace. Toutefois, l'efficacité de cette absorption peut varier en fonction de la complexité ou du

niveau de la fractale, représenté ici par les ordres de fractale  $N = 0, 1, 2, 3$ .

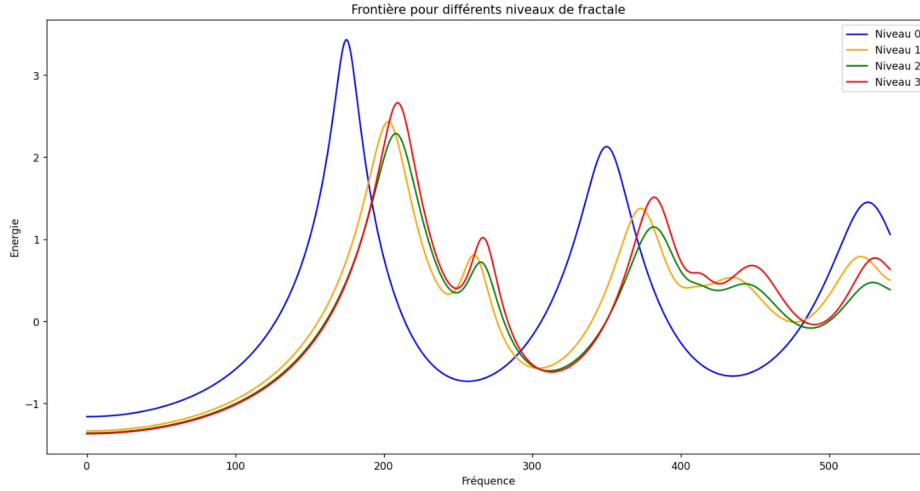


FIGURE 6 – Frontière pour différents niveaux de fractale : influence sur l’absorption de l’énergie acoustique

La figure ci-dessus (Figure (6)) présente la variation de l’énergie absorbée en fonction de la fréquence pour quatre niveaux de fractale :  $N = 0$  (courbe bleue),  $N = 1$  (courbe orange),  $N = 2$  (courbe verte), et  $N = 3$  (courbe rouge). Chaque courbe montre comment l’énergie est absorbée selon le niveau de fractale à travers une gamme de fréquences.

**Analyse des résultats :** Il apparaît que les niveaux de fractale  $N = 2$  et  $N = 3$  (courbe verte) se distinguent par une absorption d’énergie acoustique relativement plus élevée par rapport aux autres niveaux. La fractale d’ordre 2 est la plus efficace pour absorber les ondes sonores parmi les quatre configurations testées.

**Conclusion :** La figure montre que, parmi les niveaux testés, une fractale d’ordre 2 présente la plus faible capacité d’absorption de l’énergie acoustique. Ce résultat souligne l’importance de choisir judicieusement le niveau de fractale pour optimiser l’absorption sonore dans des matériaux poreux.

### 3.6 Étude de la quantité de matériaux

Dans le problème la quantité de matériau à déposer n’est pas précisément définie. Il est essentiel d’optimiser sa répartition, mais il faut encore déterminer comment choisir la quantité adéquate. Les simulations réalisées révèlent que l’énergie optimisée diminue rapidement au début avec un plus gros volume de matériau, puis stagne avant de diminuer de nouveau. Ainsi au-delà d’un certain seuil, ajouter plus de matériau devient inutile, car cela n’apporte pas de réduction significative de l’énergie. D’autant plus que cette différence est encore moins visible avec un mur de fractal de niveau 1 par rapport à un mur de géométrie de niveau 0. On a donc choisi 50 pourcent pour beta ce qui représentait un bon compromis. Et ce qui est aussi moins coûteux qu’une grande valeur de beta.

La Figure X0 représente la distribution initiale  $\chi_0$  avant l’application de l’algorithme de descente de gradient. Cette configuration initiale est utilisée comme point de départ pour le processus d’optimisation.

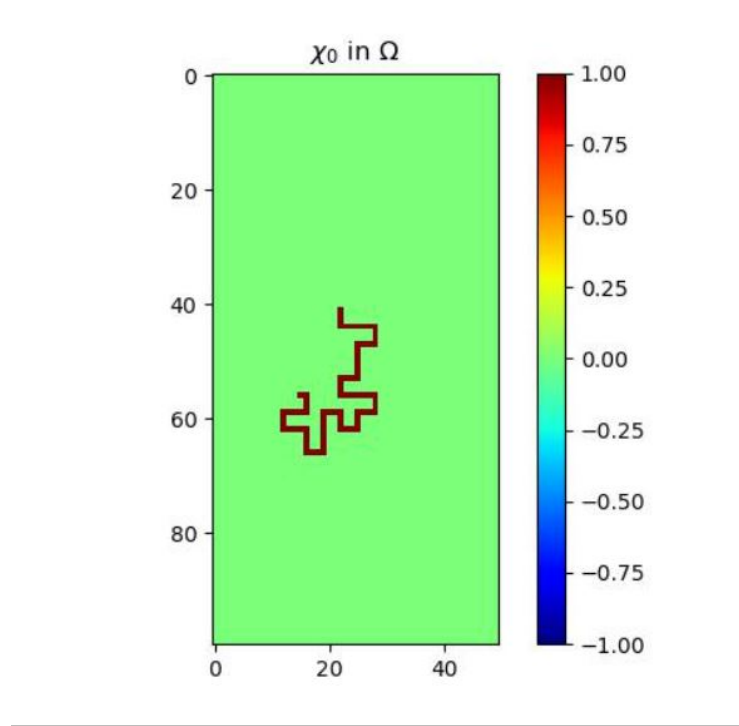


FIGURE 7 – Répartition finale après plusieurs itérations

Après l'exécution de l'algorithme, nous obtenons la distribution  $\chi_n$  illustrée dans la Figure X1. Cette nouvelle configuration est plus optimale et permet de minimiser efficacement l'énergie acoustique tout en réduisant le coût global.

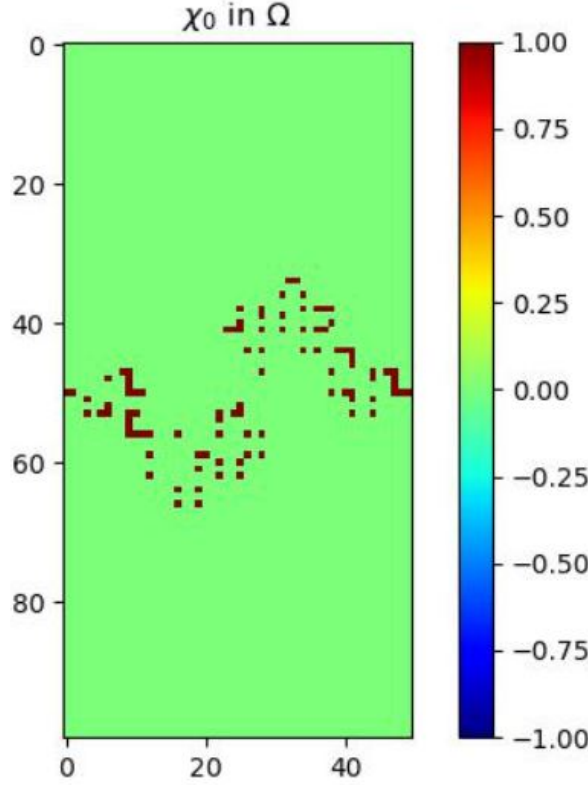


FIGURE 8 – Autre répartition d'absorbant

### 3.7 Optimisation multi-fréquentielle

Jusqu'à présent, nous avons cherché à optimiser la distribution de  $\chi_n$  pour une fréquence  $f_i$  fixée. Cependant, cela n'a pas de sens pour un réacteur d'avion où toutes les fréquences sont présentes dans le spectre audio avec une seule configuration possible de matériau poreux dans le réacteur. Il nous faut alors changer notre démarche afin de n'avoir qu'une distribution  $\chi_n$  pour toutes les fréquences choisies. Cela revient d'abord à choisir une nouvelle fonction de coût  $J$  somme sur plusieurs fréquences des précédentes fonctions coût :

$$J(\chi) = \sum_{i=1}^n J_i(\chi) = \sum_{i=1}^n \|u_i(f_i)\|^2 \quad (21)$$

On obtient un nouveau gradient paramétrique  $J'$  :

$$J'(\chi) = \sum_{i=1}^n J'_i(\chi) = \sum_{i=1}^n -\operatorname{Re}(\alpha u(f_i)p(f_i)) \quad (22)$$

Ainsi à chaque itération de l'algorithme de descente de gradient, nous devons résoudre notre problème de Helmholtz pour chaque fréquence (variation du nombre d'onde et du coefficient d'absorption  $\alpha$ ) afin d'en déduire la fonction coût et le gradient paramétrique.

Voici les résultats obtenus :

On constate que la différence avec l'optimisation monofréquentielle est assez faible. Trouver une solution où l'amélioration de la performance sur une fréquence ne peut pas se faire sans dégrader les performances sur d'autres fréquences car nous sommes dans une situation d'optimum de Pareto.

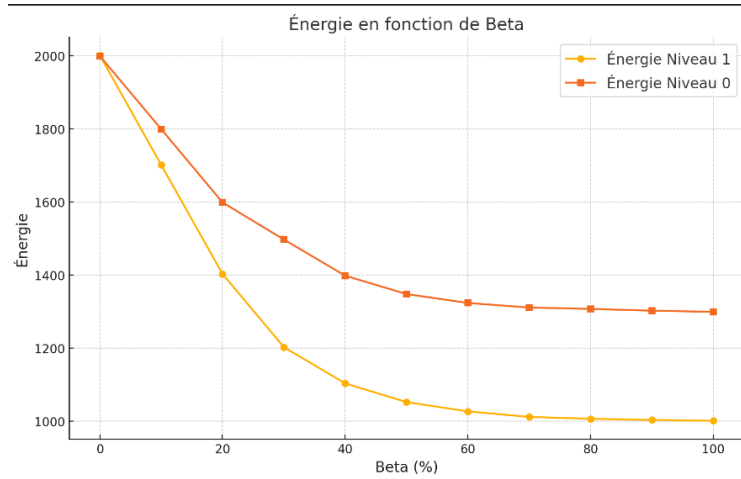


FIGURE 9 – Énergie en fonction de  $\beta$

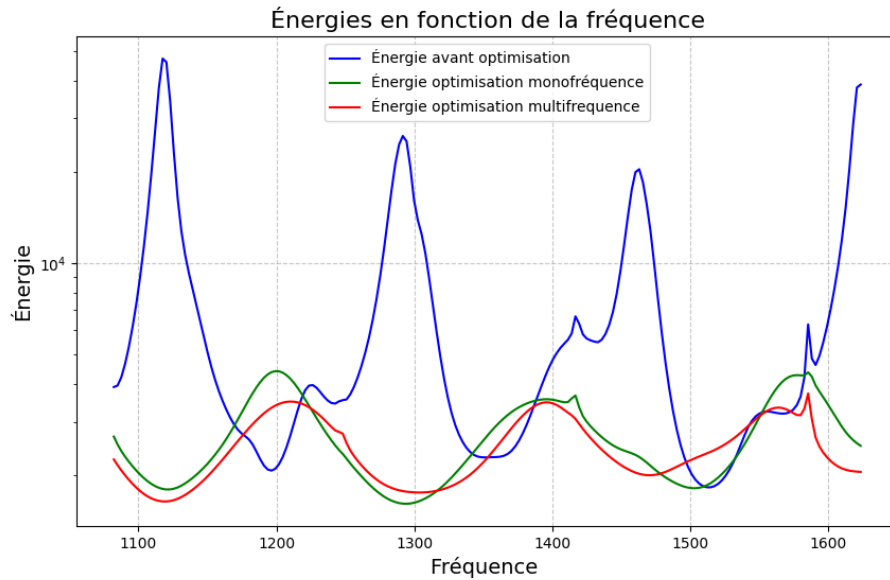


FIGURE 10 – Énergie en fonction de la fréquence pour différentes optimisations

### 3.8 Conclusion de l'analyse numérique

Dans cette étude, nous avons exploré l'utilisation d'une géométrie fractale de niveau 2 associée au matériau Mélamine pour optimiser l'absorption acoustique dans un moteur d'avion. L'application de l'algorithme de descente de gradient a permis d'obtenir une distribution optimale du matériau absorbant, réduisant ainsi significativement l'énergie acoustique tout en maintenant des contraintes de coût maîtrisées.

Les résultats démontrent que l'utilisation d'une géométrie fractale de niveau 2 offre un excellent compromis entre efficacité et économie de matière. Comparée à des géométries plus simples, cette configuration permet une meilleure dispersion des ondes acoustiques tout en limitant la quantité de matériau nécessaire. En effet, la géométrie fractale exploite de manière optimale la surface du bord absorbant, ce qui se traduit par une réduction des



coûts sans compromettre les performances.

La distribution géométrique résultante, calculée par l'algorithme, a été ajustée pour maximiser l'absorption dans les plages de fréquences critiques identifiées. Ce choix stratégique s'avère particulièrement pertinent pour des applications où la réduction des nuisances sonores est cruciale, comme dans l'industrie aéronautique.

Enfin, cette démarche met en évidence l'importance de combiner un choix judicieux de matériaux, comme la Mélamine, avec une approche géométrique innovante et une optimisation algorithmique rigoureuse. Cela ouvre la voie à de futures explorations, notamment l'adoption de géométries fractales plus complexes ou l'utilisation d'autres algorithmes, tels que les algorithmes génétiques, pour affiner davantage la performance et le coût global des solutions acoustiques.

## Bibliographie

- [1] Mathieu Martin. Pollution sonore : le bruit des avions affecte notre santé. *Université Claude Bernard Lyon 1 - Villes Durables*, 2023.
- [2] Evrard Anne-Sophie, Lefèvre Marie, Baudin Clémence, Carlier Marie-Christine, Champelovier Patricia, Giorgis-Allemand Lise, Léger Damien Lambert Jacques, Nassur Ali-Mohamed, and Laumon Bernard. Effets de l'exposition au bruit des avions sur la santé : résultats, à l'inclusion, de l'étude débats. *DEBATS*, 2020.
- [3] Douillet Maia, Sipos Gala, Delugin Léna, Bulliot Benoît, Remontet Lucas, and Bidault Elsa. Coût social du bruit en france. *ADEME*, 2021.
- [4] Envia Edmane. Fan broadband noise generation and suppression. *NASA, AIAA Aviation Meeting*, 2015.
- [5] Frank Simon. Acoustic porous solutions for aircraft noise. *ONERA*, 2024.
- [6] Eric Savin. Parametric optimization of an acoustic liner. *ONERA*, 2024.
- [7] Vyacheslav Baklanov. Dynamics and vibration of new generation aviation engines. *ICAS - 30th Congress of the International Council of the Aeronautical Sciences*, 2016.
- [8] Anna Rozaneva-Pierrat. Control of waves. *CentraleSupelec*, 2024.