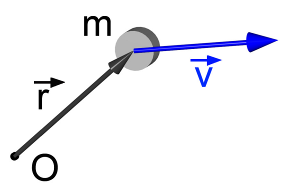
2.6. Das Aktionsprinzip für Rotationsbewegung AP_{rot}

2.6.1 Der Drehimpuls

Das zweite Newton'sche Prinzip, das Aktionsprinzip für Translationsbewegung AP_{trans}, erlaubt uns, die Bewegung eines Massenpunktes oder die Bewegung des Schwerpunktes eines ausgedehnten Körpers unter der Einwirkung von äusseren Kräften zu berechnen. Zur vollständigen Beschreibung der Bewegung eines ausgedehnten Körpers (Systems von Massenpunkten) benötigen wir zwei weitere Grössen, den Drehimpuls $\vec{L}_O$ und das Drehmoment $\vec{M}_O$ bezüglich eines Referenzpunktes O:

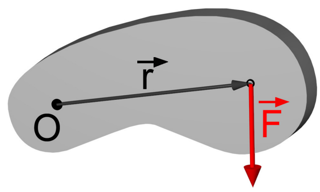
Drehimpuls bez. O
(einzelne Punktmasse):

$$\boxed{\vec{L}_O = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times (m \cdot \vec{v})} \qquad [L_O] = \frac{m^2\,kg}{s}$$



Drehmoment bez. O
(einzelne angreifende Kraft):

$$\boxed{\vec{M}_O = \vec{r} \times \vec{F}} \qquad [M_O] = \frac{m^2\,kg}{s^2} = N{\cdot}m$$



Wie beim schon bekannten Drehmoment wollen wir den Abstandsvektor $\vec{r}$ vom **Bezugspunkt O** anschaulich "**Hebelarmvektor**" nennen.

Für Drehimpuls und Drehmoment gilt das Superpositionsprinzip. Der Gesamtdrehimpuls eines Systems von Massenpunkten resp. das Gesamtdrehmoment mehrerer Kräfte berechnet sich folglich gemäss:

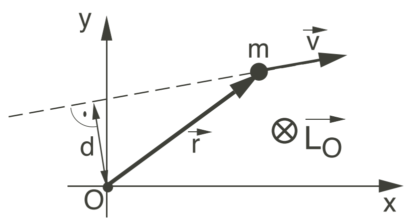
$$\vec{L}_{O,\,tot} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{p}_i \qquad\qquad \vec{M}_{O,\,tot} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i$$

Die folgenden Beispiele sollen den Begriff des Drehimpulses ("Drehschwung") illustrieren:

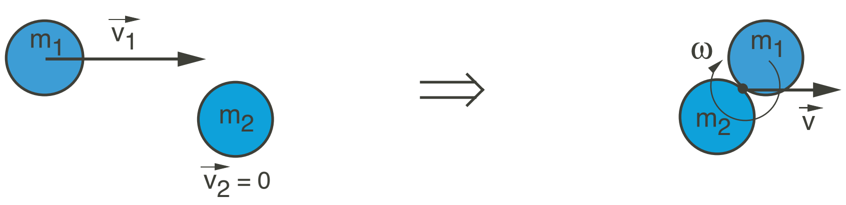
a) Aus der Defintion des Drehimpulses folgt, dass auch ein einzelner Massenpunkt im allgemeinen einen von Null verschiedenen Drehimpuls ("Drehschwung") hat. Für die nebenan gezeichnete Situation erhalten wir:

$\vec{L}_O = \vec{r} \times \vec{p} = m \cdot \vec{r} \times \vec{v}$ antiparallel z-Achse und

$\left|\vec{L}_O\right| = m \cdot d \cdot v$



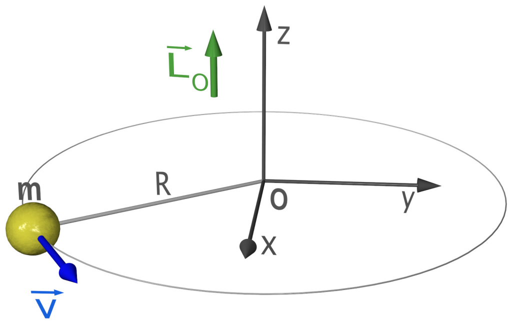
Der Drehimpuls ist Null, wenn die Punktmasse genau auf den Bezugspunkt O "zufliegt".
Das Experiment zweier Pucks, welche nach der Kollision aneinander kleben, illustriert, dass in einer reinen Translationsbewegung auch eine "Drehgrösse" drinstecken kann (keine Rotation wenn die Pucks zentral aufeinandertreffen):



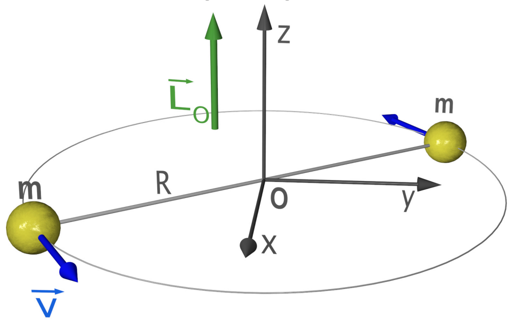
"reine" Translationsbewegung von Puck 1

kombinierte Translations- und Rotationsbewegung der beiden Pucks

b) rotierende Punktmasse m



rotierende Hantel aus zwei Punktmassen m, Verbindungsstange masselos



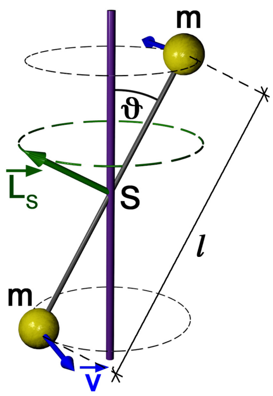
"Hebelarmvektor" und Impuls stehen senkrecht aufeinander $\Rightarrow$ $\vec{L}_O$ // z-Achse

$\left|\vec{L}_O\right| = R \cdot m \cdot v = m \cdot\ R^2 \cdot \omega$ $\qquad\qquad$ $\left|\vec{L}_O\right| = 2m \cdot R^2 \cdot \omega$

Man beachte:

- Der Drehimpuls ist ein Vektor, man darf den Pfeil also prinzipiell irgendwo zeichnen (ob der gewählte Ort das Lesen der Zeichnung erleichtert, ist eine andere Frage).
- Der Drehimpulsvektor der einzelnen, rotierenden Punktmasse hängt vom gewählten Bezugspunkt O ab (siehe Übungsaufgabe).

c) Rotation einer schrägstehenden Hantel
(starre Achse durch den Schwerpunkt S, konstante Winkelgeschwindigkeit ω)



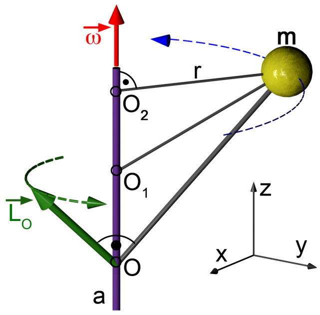
Da bei beiden Punktmassen "Hebelarmvektor" und Geschwindigkeitsvektor senkrecht aufeinander stehen, findet man leicht:

Der Drehimpulsvektor bezüglich S

- hat konstanten Betrag $\left|\vec{L}_S\right| = 2m \cdot \frac{l}{2} \cdot v = \ 2\ m \cdot \left(\frac{l}{2}\right)^2 \cdot \sin\vartheta \cdot \omega$
- steht senkrecht auf der Hantelachse
- rotiert mit Winkelgeschwindigkeit ω um die Drehachse

2.6.2. Rotation um eine starre Achse a, das Massenträgheitsmoment (MTM) I_a

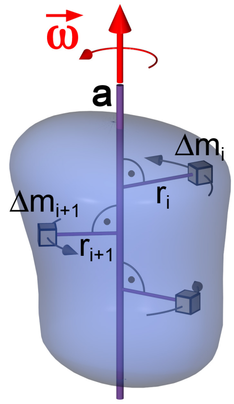
Rotiert ein Körper um eine starre Achse a, so interessiert in vielen Fällen nur die Vektorkomponente des Drehimpulses parallel zur Drehachse a ($L_a = L_z$ in nebenstehend gezeichnetem Beispiel). Wie man sich leicht überzeugt, erhält man denselben Wert L_z für alle Bezugspunkte O, O_1, O_2, .. auf der Drehachse a (der Geschwindigkeitsvektor liegt in der xy-Ebene, ...),



$$L_z = L_a = m{\cdot}r{\cdot}v = m\, r^2 \cdot \omega$$

wobei r den Abstand der Punktmasse von der Drehachse bedeutet. (man beachte: der Vektor $\vec{L}_O$ als Ganzes ist abhängig von der Wahl von O!)

Denken wir uns einen ausgedehnten, starren Körper aus Punktmassen Δm_i aufgebaut so beachten wir, dass alle Punktmassen mit derselben Winkelgeschwindigkeit ω rotieren. Die Drehimpulskomponente in Achsenrichtung a erhalten wir also zu:



$$L_a = \left(\sum_i \Delta m_i\, r_i^2\right) \cdot \omega = I_a \cdot \omega$$

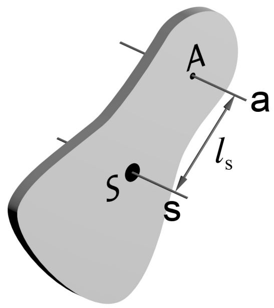
Die Grösse I_a heisst **Massenträgheitsmoment** (**MTM**) des Körpers bezüglich der Drehachse a. Sie spielt bei der Rotationsbewegung dieselbe Rolle wie die Masse bei der Translationsbewegung, d.h. I_a können wir anschaulich auch **Drehmasse** nennen.

Allgemeines zum Massenträgheitsmoment:
Gemäss obiger Betrachtung berechnet sich das Massenträgheitsmoment folglich nach

$$\boxed{I_a = \sum_i \Delta m_i\, r_i^2 = \int_{V_K} r^2 \cdot \rho \cdot dV}$$

wobei ρ die Dichte (d.h. $\rho\, dV = dm$) und V_K das Köpervolumen bedeutet.
Die Massenträgheitsmomente für Schwerpunktsachsen regulärer Körper (Quader, Kugel etc.) finden Sie im Kuchling oder andern Büchern. Aus den tabellierten MTM's für die "Hauptachsen" (siehe unten) kann das Massenträgheitsmoment für beliebige Drehachsen berechnet werden. Bei Parallelverschiebung einer Drehachse aus dem Schwerpunkt erhält man das neue Massenträgheitsmoment mit Hilfe des Satzes von Steiner.

Satz von Steiner: $\boxed{I_a = I_s + m\, l_s^{\,2}}$



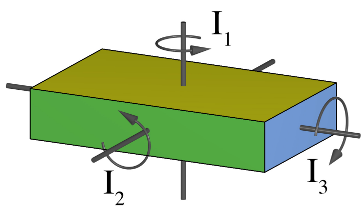
Beispiel:
MTM eines Vollzylinders um die Zylinderachse $I_s = 1/2\ m r^2$
MTM bezüglich einer Mantellinie

$$I_a = {}^1\!/_2\ m r^2 + m r^2 = {}^3\!/_2\ m r^2$$

Allgemein kann gezeigt werden, dass man das Trägheitsmoment bezüglich irgendeiner Achse aus den sogenannten

drei Hauptträgheitsmomenten

bezüglich des Schwerpunktes berechnen kann.
Es gilt:



- **Die drei Hauptträgheitsmomentachsen stehen senkrecht aufeinander.**
- **Rotationen um Hauptträgheitsmomentachsen erfolgen drehmomentenfrei**, **der Drehimpulsvektor ist parallel zur Rotationsachse**. Bei allen andern Achsenrichtungen treten Lagermomente auf (**Unwucht**); das zugehörige MTM liefert eine Matrixrechnung.

Stabilität:
Sind die drei Hauptträgheitsmomente eines Körpers verschieden gross, so sind die freien Rotationen um die Achsen mit dem kleinsten und dem grössten Hauptträgheitsmoment stabil. Die Rotation um die Achse mit dem mittleren MTM ist instabil: Bei freier Rotation um die instabile Achse beginnt der Körper bei der kleinsten Störung zu torkeln, die Drehachse bewegt sich in der Folge "wild im Raume" (siehe Experiment).
Für den oben gezeichneten Quader gilt $I_1 < I_2 < I_3$, d.h. Rotationen um die 1- und 3-Achse sind stabil, die Rotation um die 2-Achse labil.

2.6.3. Das Aktionsprinzip für Rotationsbewegungen AP_{rot}

Analog zu den ersten zwei Newton'schen Prinzipien gilt für Drehbewegungen:

I) **Statik, Drehimpulserhaltungssatz (Drallsatz)**

Wirkt auf ein System von Massenpunkten (auf einen Körper) kein äusseres Drehmoment, so bleibt der Drehimpuls konstant.

$$\overrightarrow{M_{O,tot}} = \sum_i \overrightarrow{M_{O,i}} = \vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{L_O} = \text{const.}$$

II) **Aktionsprinzip für Drehbewegungen allgemein (AP_{rot})**

Die Änderung des Drehimpulses ist proportional zum wirkenden Drehmoment.

$$d\,\overrightarrow{L_O}/dt = \sum_i \overrightarrow{M_{Oi}} = \overrightarrow{M_{O,tot}}$$

Für Rotation um eine **starre Achse** a gilt:

allgemein $\boxed{\dfrac{dL_a}{dt} = \dfrac{d\,(I_a \cdot \omega)}{dt} = M_{a,tot}}$ starrer Körper (I_a = const.) $\boxed{I_a \cdot \ddot{\varphi} = M_{a,tot}}$

Dabei bezeichnet $M_{a,tot}$ die Komponente des Drehmomentes in Achsenrichtung.

Vergleich Translationsbewegung - Rotationsbewegung

Bewegungsgrösse

Impuls: $\vec{p} = m\,\vec{v}$ Drehimpuls bez. O $\overrightarrow{L_O} = \vec{r_O} \times \vec{p}$

Aktionsprinzip allgemein:

$\dfrac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$ (Kraft) $\dfrac{d\overrightarrow{L_O}}{dt} = \overrightarrow{M_O}$ (Drehmoment)

eindimensionale Translation - Rotation um eine starre Achse a

Masse	m	kg	MTM (Drehmasse)	I_a	m^2kg
Ort	x	m	Winkel	φ	rad
Geschwindigkeit	v	m/s	Winkel-geschwindigkeit	ω	s^{-1}
Impuls	$p=m\cdot v$	mkg/s	Drehimpuls	$L_a = I_a \cdot \omega$	m^2kg/s
Kraft	F	$m\,kg/s^2$	Drehmoment	M_a	m^2kg/s^2

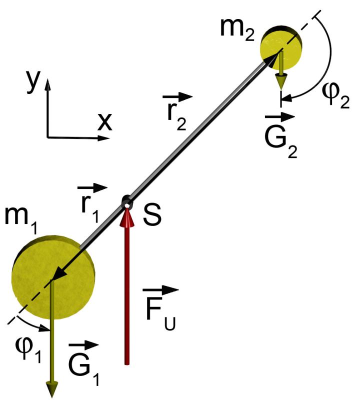
$\mathbf{AP_{trans}}$ $\quad \dfrac{dp}{dt} = m \cdot \dfrac{d^2x}{dt^2} = F_{tot}$	$\mathbf{AP_{rot}}$ $\quad \dfrac{dL_a}{dt} = I_a \cdot \dfrac{d^2\varphi}{dt^2} = M_{a,tot}$

2.6.4. Anwendungen zum Aktionsprinzip für Rotationsbewegungen AP_{rot}

a) Das Drehmoment der Gewichtskraft bezüglich dem Schwerpunkt ist Null:

Befindet sich eine Hantel mit Punktmassen m_1 und m_2 im Schwerefeld der Erde, so greifen die Gewichtskräfte $\vec{G_1}$ und $\vec{G_2}$ an den Hantelkugeln an. Damit der Schwerpunkt in Ruhe bleibt, muss die Hantel in S unterstützt sein:

$$\vec{F_U} = -\left(\vec{G_1} + \vec{G_2}\right) \rightarrow \vec{F_{tot}} = 0$$



Die von den Gewichtskräften erzeugten Drehmomente bez. S sind parallel resp. antiparallel zur z-Achse und es gilt:

$$|M_{S,1}| = m_1\, g\, r_1\, |\sin \varphi_1|$$

$$|M_{S,2}| = m_2\, g\, r_2\, |\sin \varphi_2|$$

Für den Schwerpunkt gilt aber

$$r_1 / r_2 = m_2 / m_1$$

und folglich sind die beiden Drehmomente entgegengesetzt gleich.

Im homogenen Gravitationsfeld gilt folglich allgemein:

Das Drehmoment der Gewichtskraft bezüglich des Schwerpunktes ist Null

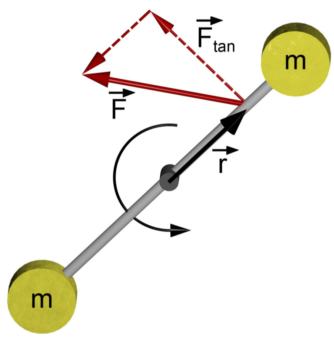
$$\overrightarrow{M_{Gew.,S}} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow$$

Die Gewichtskraft (das Gewicht) greift im Schwerpunkt an.

Während Beispiel a) allgemein, d.h. in vektorieller Schreibweise gilt, wollen wir uns in den nächsten Beispielen auf Rotationen um eine starre Achse beschränken:

b) Ziehen wir mit einem Faden an einer frei drehbar gelagerten Hantel, so ist ohne Rechnung ersichtlich, dass nur die Kraftkomponente senkrecht zum "Hebelarmvektor" $\vec{r}$ die Hantel in Rotation versetzt. Die Komponente parallel zu Hantelstange oder parallel zu Drehachse wird von den Lagern kompensiert. Das wirkende Drehmoment ist also das Produkt des Abstandes r des Angriffspunktes zur Rotationsachse und Tangentialkomponente F_{tan} der angreifenden Kraft. (tangential an den Kreis, den der Angriffspunkt beschreibt)



$$M_a = r \cdot F_{tan}$$

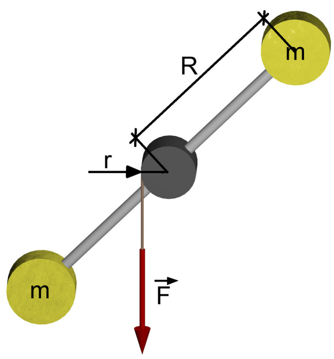
(Bei mehreren Kräften muss ev. noch eine Vorzeichenkonvention eingeführt werden)

c) Ziehen wir wie nebenan gezeichnet an einem Faden, welcher um den Nocken des Hantellagers gewickelt ist, so berechnen wir die resultierende Winkelbeschleunigung mit dem AP_{rot}

$$I_a\, \ddot{\varphi} = M_a$$

zu

$$\boxed{\ddot{\varphi} = \frac{r \cdot F}{2\, m\, R^2}}$$

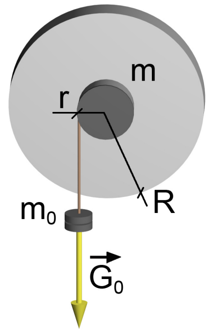


Dabei wurden die Hantelmassen als Punktmassen angenähert und Hantelstange und Nocken als masselos (Bei normalen Hanteln ist dies nicht zulässig!)

d) Vorlesungsexperiment mit Scheibe

Zu berechnen ist die Winkelbeschleunigung in nebenstehend dargestellten Experiment: Vollscheibe mit MTM $I_a = m/2 \cdot R^2$ und Gewicht G_0. Etwas vorschnell schreiben wir

$$I_a \ddot{\varphi} = r \cdot G_0 \Rightarrow \ddot{\varphi} = 2 \cdot \frac{r \cdot G_0}{m \cdot R^2} \quad ??$$



und bemerken, dass die Winkelbeschleunigung für R -> 0 divergiert!? Unsere Fehlüberlegung besteht darin, dass nicht das Gewicht G_0 sondern die Fadenkraft an der Scheibe angreift. Da m_0 selbst beschleunigt, ist die Fadenkraft kleiner.

Zur Lösung der Aufgabe bieten sich zwei Wege an:

I) Wir betrachten Scheibe und m_0 zusammen als unser System, an dem die Kraft G_0 (sowie die Lagerkraft) angreift.

II) Wir betrachten Scheibe und m_0 als zwei separate, "gekoppelte" Systeme (Actio = Reactio), berechnen die Fadenkraft und daraus das auf die Scheibe wirkende Drehmoment.

I) Der Drehimpuls des Systems setzt sich zusammen aus Drehimpuls der Scheibe und Drehimpuls der Masse m_0, welche sich mit $v = \omega \cdot r$ nach unten beweget:

$$L_{a,tot} = I_a \cdot \omega + r \cdot m_0 \cdot v = \frac{m}{2} R^2 \cdot \omega + m_0 r^2 \cdot \omega = \left(\frac{m}{2} R^2 + m_0 r^2\right) \cdot \omega$$

und damit lautet das AP_{rot}:
$$\frac{dL_{a,tot}}{dt} = \left(\frac{m}{2} R^2 + m_0 r^2\right) \cdot \frac{d\omega}{dt} = M_a = r \cdot G_0$$

II) Für die Masse m_0 gilt das AP_{trans}, für die Scheibe das AP_{rot}:

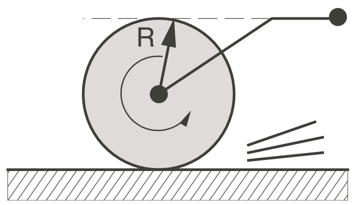
$$m_0 \ddot{x} = G_0 - F_F \qquad I_a \ddot{\varphi} = r \cdot F_F$$

Ferner gilt: $\ddot{x} = r \cdot \ddot{\varphi}$

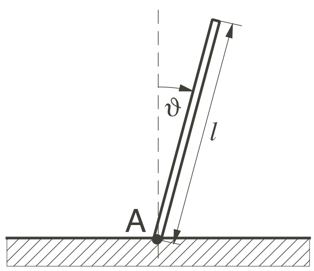
Kombinieren wir die drei Gleichungen, so erhalten wir wie in I):

$$\boxed{\ddot{\varphi} = \frac{d\omega}{dt} = \frac{r \cdot G_0}{\left(\frac{m}{2} R^2 + m_0 r^2\right)}}$$

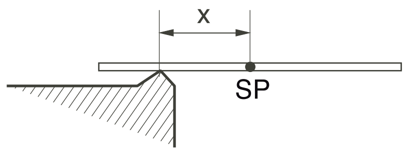
e) Welches Drehmoment muss der Motor einer Schleifmaschine (m=10kg, R=0.1m) entwickeln, damit die Scheibe mit konstanter Winkelgeschwindigkeit dreht? Die Schleifmaschine werde auf Höhe Scheibenoberkante gehalten, der Gleitreibungskoeffizient betrage $\mu_{gl} = 0.15$.



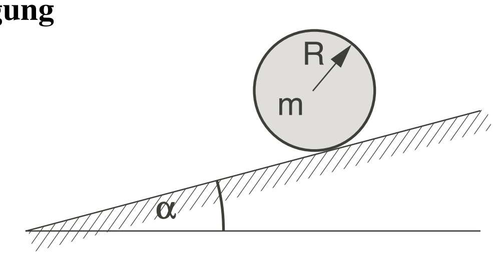
f) Ein dünner Stab (Masse m, Länge l) sei im Punkt A frei drehbar befestigt und werde aus der Vertikalen losgelassen. Man berechne die resultierende Winkelbeschleunigung in Funktion des Neigungswinkels ϑ. Wie gross ist die in A angreifende Normalkraft?[i]



g) Gegeben sei die nebenan gezeichnete Situation (Stab der Länge l , Masse m). Für welchen Wert x wird die Winkelbeschleunigung maximal und wie gross ist sie in diesem Falle?[ii]
Resultat: $x = l/2\sqrt{3}$, $\alpha = \sqrt{3}\, g/l$

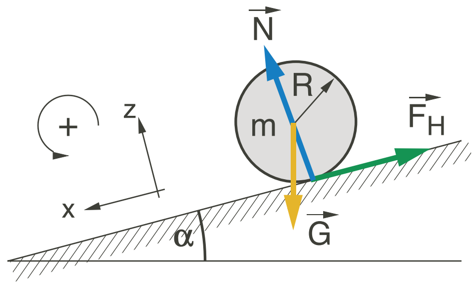


h) **Kombinierte Translations- und Rotationsbewegung**
Lassen wir einen Vollzylinder (Masse m, Radius R) auf einer schiefen Ebene hinunterrollen, so stellen wir fest, dass dieser langsamer ist als z.B. ein Spielzeugwagen (siehe Experiment). Woran liegt dies, wie können wir die Beschleunigung des Zylinders berechnen?

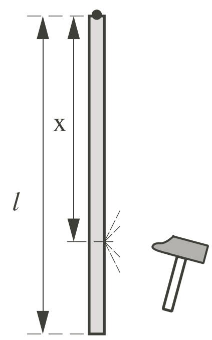


Zur Lösung der Aufgabe gehen wir vor wie üblich:

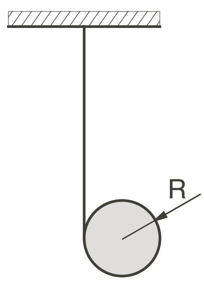
1. Situation zeichnen
2. System identifizieren
3. Kräfte eintragen: Damit der Zylinder **rollt** und nicht rutscht, muss offensichtlich eine Haftkraft wirken.
4. Der Körper führt eine kombinierte Translations- und Rotationsbewegung aus. Deshalb zeichnen wir sowohl ein Koordinatensystem ein wie auch den positiven Drehsinn. Dabei soll "positive Drehung" eine Translation in positiver Richtung bewirken (es geht auch anders, aber die Vorzeichenfehler sind dann häufiger!)
5. AP_{trans} **UND** AP_{rot} aufstellen
6. Weitere Gleichungen: **Rollbedingung**
7. Lösen des Gleichungssystems
8. Test und Interpretation der Lösung



i) Das Perkussionszentrum eines am Ende befestigten Stabes
Bedingung: Der Stoss soll im Lager (im ersten Moment) nicht spürbar sein. Dies bedeutet:
I) Die Kraft F ist alleine für die Beschleunigung des Schwerpunktes verantwortlich.
II) Das Drehmoment, welches den Stab in Drehung versetzt, wird ausschliesslich durch die Kraft F erzeugt.[iii]



k) abrollendes Yoyo[iv]



Bemerkungen zu den bisherigen Aufgaben: Wie Sie eventuell bemerkten, haben wir uns praktisch ausschliesslich auf Rotationen um eine starre Achse beschränkt. Dadurch kann der Eindruck entstehen, dass Rotationsbewegungen generell vollkommen analog zu Problemen der Translation sind. Dies ist im Allgemeinen nicht der Fall sondern gilt nur bei diesen speziellen Bewegungen. Die Theorien der allgemeinen Rotation eines starren Körpers sind die wesentlich schwierigere Kreiseltheorie (keine Kopplung zwischen Translation und Rotation) und die Ballistiktheorie (mit entsprechender Kopplung). Leider werden trotzdem in vielen Lehrbüchern die folgenden falschen Vektor-Gleichungen angeschrieben, wobei I das MTM bedeutet:

$$I \cdot \vec{\omega} = \vec{L} \qquad \text{und}$$

$$I \cdot \dot{\vec{\omega}} = I \cdot \vec{\alpha} = \vec{M}$$

Die erste Gleichung nicht korrekt, weil Winkelgeschwindigkeitsvektor und Drehimpuls nur in Spezialfällen parallel sind (3 Spezialfälle gegen unendlich viele andere Möglichkeiten). Auch wird nicht angedeutet, dass der Drehimpuls immer in Bezug auf einen Referenzpunkt berechnet wird. Wenn I den sogenannten Massenträgheitsmomenttensor mit 6 unabhängigen Grössen bezeichnen würde, wäre diese Gleichung korrekt. Davon wird aber in diesen Lehrbüchern nichts gesagt. Die zweite Gleichung ist noch weniger korrekt. Nähere Erläuterungen erfahren Sie von Ihrem Dozenten/Ihrer Dozentin oder Sie finden diese in irgendeinem Mechanikbuch mit Kreiseltheorie.

Folgendes einfaches "Experiment" soll Sie erahnen lassen, dass Rotationen um einiges komplizierter sind als Translationen:

a) Translation: Nehmen Sie ein ca. 1 m langes Holzstück in die Hand. Verschieben Sie es einen halben Meter nach links, einen halben Meter nach oben und dann zurück zum Ausgangspunkt. Worin unterscheiden sich Start- und Endsituation?

b) Rotation: (Hilfsdefinition: Die Körperebene bezeichne die Ebene durch Schultern und Füsse einer "normal" aufrecht stehenden Person). Halten Sie das Holzstück von a) in der rechten Hand über dem Kopf: Horizontal und in der Körperebene. Bringen Sie den Arm seitlich in die Horizontale = Rotation um 90° um eine horizontale Achse senkrecht zur Körperebene. Als nächstes bringen Sie Ihren Arm genau vor sich = Rotation um 90° um die Körper-Längsachse. Zum Schluss bringen Sie Ihre Hand wieder über den Kopf = Rotation um 90° um eine Achse durch die Schultern. Wir sind zum Ausgangspunkt zurückgekehrt. Vergleichen Sie wiederum Start- und Endsituation! Vergleich mit a)?

2.6.5. Lagerkräfte/Lagermomente bei Drehbewegungen

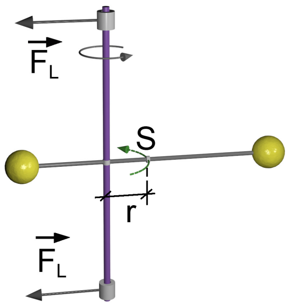
Nun wenden wir uns nochmals dem AP_{rot} in allgemeinerer Form zu: Wir untersuchen die Rotation einer allgemein gelagerten Hantel um eine starre Achse a und berechnen die zusätzlich auftretenden Lagerkräfte ("zusätzlich" im Vergleich zur Statik).

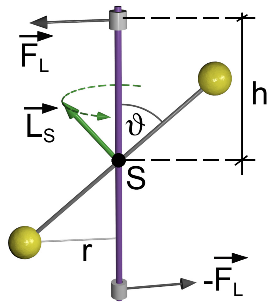
Situation 1: Die Achse geht durch den Schwerpunkt und steht senkrecht auch der Hantelachse.

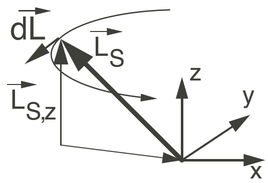
$\Rightarrow$ Rotation ohne zusätzliche Lagerkräfte

Situation 2: Die Achse steht senkrecht auf der Hantelachse, geht aber nicht durch den Schwerpunkt $\Rightarrow$ Wir beobachten eine Unwucht: Der Hantelschwerpunkt macht eine Kreisbewegung d.h. eine beschleunigte Bewegung und folglich muss eine zusätzliche äussere Kraft auf die Hantel wirken = Lagerkräfte.

Situation 3: Die Drehachse a steht nicht senkrecht auf der Hantelachse und geht durch den Schwerpunkt. Wir überlegen: Der Schwerpunkt der Hantel bleibt in Ruhe und folglich ist die Summe zusätzlicher Kräfte auf die Hantel Null: $\vec{F}_{tot}^{\,*}=0$.
Trotzdem stellen wir eine Unwucht fest.







In unserem Beispiel berechnen wir

$$F_{tot}^{*} = 2\,F_L = m_{tot}\,\omega^2\,r$$

Erklärung der Unwucht in Situation 3:

Der Drehimpulsvektor $\vec{L}_S$ steht senkrecht auf der Hantelachse und rotiert mit der Winkelgeschwindigkeit ω. Die Drehimpulskomponente parallel zur Drehachse (L_z in unserem Beispiel) ist zwar zeitlich konstant, L_x und L_y hingegen nicht:

$$L_x = -\left|\vec{L}_S\right|\cdot\cos(\vartheta)\cdot\cos(\omega t)$$
$$L_y = -\left|\vec{L}_S\right|\cdot\cos(\vartheta)\cdot\sin(\omega t)$$
$$L_z = \left|\vec{L}_S\right|\cdot\sin(\vartheta)$$

Das AP_{rot} in vektorieller Schreibweise

$$\frac{d\vec{L}_S}{dt} = \vec{M}_{tot}$$

liefert uns sodann das wirkende Drehmoment (und damit die Lagerkräfte):

$$\frac{d\vec{L}_S}{dt} = \left|\vec{L}_S\right|\cdot\cos(\vartheta)\cdot\omega\begin{pmatrix}\sin\omega t\\ -\cos\omega t\\ 0\end{pmatrix} = \vec{M}_S(t)$$

Der Drehmomentvektor liegt in der x-y-Ebene und rotiert mit der Winkelgeschwindigkeit ω.
Die Lagerkräfte $\vec{F}_L$ rotieren damit auch mit ω, was als Unwucht beobachtet wird.

Zum Schluss soll noch der Betrag der Lagerkraft F_L berechnet werden. Dabei bezeichne R den Hantelradius und 2h die Länge der Stange, an der die Hantel (Punktmassen m) befestigt ist:

Mit $\left|\vec{L}_S\right| = 2\,m\,R^2\,\omega\,\sin(\vartheta)$ und $\left|\vec{M}_S\right| = 2\cdot h\cdot F_L$ erhalten wir aus obiger Gleichung:

$$\boxed{F_L = \frac{m\,R^2\cdot\omega^2\cdot\cos(\vartheta)\cdot\sin(\vartheta)}{h}}$$

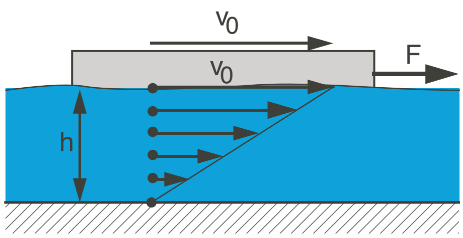
Zusammenfassung:

- Bei einer Rotation eines starren Körpers um eine feste Achse treten im allgemeinen Lagerkräfte auf.
- Betrachten wir nur die Drehimpulskomponente parallel zur Rotationsachse a so lautet das Aktionsprinzip für die Drehbewegung:
$$\frac{dL_a}{dt} = I_a\,\dot{\omega} = M_a$$
- Bei jedem starren Körper gibt es drei (mindestens drei, ev. unendlich viele) zueinander senkrecht stehende Achsen durch den Schwerpunkt, um die der Körper ohne Auftreten von Lagerkräften/momenten rotiert ($\vec{L} \,//\, \vec{\omega} \,//$ Rot.achse). Die Trägheitsmomente des Körpers bezüglich dieser Drehachsen a,b,c sind die Hauptträgheitsmomente I_a, I_b, I_c. Bei Rotation um andere Drehachsen treten **immer** Lagerkräfte/-momente auf.
- Bei symmetrischen Körpern sind ev. zwei oder alle drei Hauptträgheitsmomente gleich. Ist z.B. $I_a = I_b$, so ist das Trägheitsmoment bezüglich aller Schwerpunktsdrehachsen in der Ebene (a,b) gleich. Der Körper rotiert um all diese Achsen lagerkräftefrei. Sind alle drei Hauptträgheitsmomente gleich (Kugel, Würfel, ...) so gilt dies für beliebige Schwerpunktsachsen.

2.7. Reibungsgesetze in Flüssigkeiten und Gasen

2.7.1 Laminare Strömung

Wie schon kurz erwähnt, ist die Reibung in Flüssigkeiten bei laminarer Strömung proportional zur Geschwindigkeit des sich bewegenden Körpers. Laminar heisst Strömung ohne Wirbelbildung. Zieht man eine ebene Platte in einem Wasserbecken der Tiefe h, so bildet sich nach



einer gewissen Zeit ein stabiles Strömungsprofil aus: Die Geschwindigkeit der Flüssigkeitsteilchen am Gefässboden ist Null und wächst linear mit zunehmender Höhe über dem Gefässboden. An der Plattenunterseite ist die Geschwindigkeit der Flüssigkeitsteilchen gleich der Plattengeschwindigkeit (die Flüssigkeitsteilchen haften an den festen Grenzflächen. **Empirisch** findet man in vielen Flüssigkeiten, dass die Reibungskraft proportional zur Fläche A und zum Geschwindigkeitsgefälle dv/dx in der Flüssigkeit ist (**Newton'sches Reibungsgesetz**):

$$F_R = \eta \cdot A \cdot \frac{dv}{dx}$$

Der Proportionalitätsfaktor η mit der Einheit Ns/m^2 = Pa s (Pascalsekunde), die **dynamische Viskosität** (Zähigkeit) der Flüssigkeit, ist stark temperaturabhängig!!. Aus der linearen Geschwindigkeitszunahme erhalten wir $dv/dx = v_0/h$ und damit

$$\boxed{F_R = \eta \cdot A \cdot \frac{v_0}{h}}$$

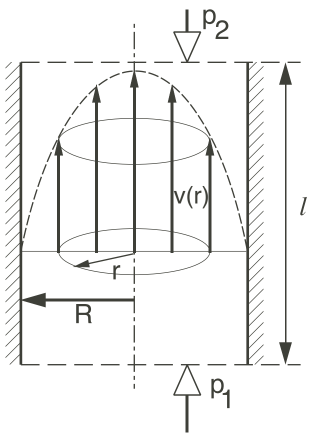
Laminare Rohrströmung

Strömt eine Flüssigkeit in einem Rohr, so sind die Flächen gleicher Flüssigkeitsgeschwindigkeit konzentrische Zylinder. Wendet man das Newton'sche Reibungsgesetz für diese Strömungsgeometrie an so folgt, dass sich im Rohr ein parabolisches Geschwindigkeitsprofil ausbildet (v=0 an den Wänden). Die mittlere Strömungsgeschwindigkeit beträgt:

$$\bar{v} = 1/2\, v_{max}$$

und die Reibungskraft erhält man zu:

$$\boxed{F_R = 8\, \pi \eta\, l\, \bar{v}}$$



(Gesetz von Hagen –Poiseuille)

Damit die Strömung zeitlich konstant ist, muss die Reibungskraft durch den Druckunterschied $\Delta p = p_2 - p_1$ gerade kompensiert werden (Druck = Kraft pro Flächeneinheit):

$$|F_R| = \pi\, R^2 \left(p_2 - p_1\right) = \pi\, R^2\, \Delta p \quad \text{und somit} \quad \boxed{\bar{v} = \frac{R^2\, \Delta p}{8\, \eta\, l}}$$

Laminare Umströmung einer Kugel

Mit den gleichen Randbedingungen berechnet man für eine **laminare Strömung an einer Kugel** mit Kugelradius R:

$$\boxed{F_R = 6\, \pi\, \eta\, R\, v}$$

Stokes'sches Gesetz

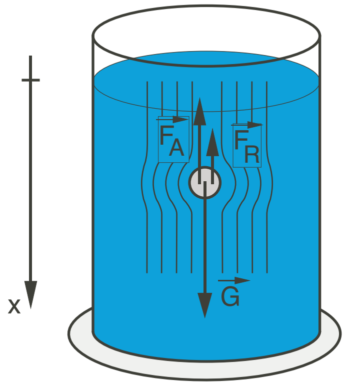
Anwendungsbeispiel: Bestimmung der Viskosität einer Flüssigkeit.

Auf die sich bewegende Kugel (Radius R) wirken drei Kräfte:

- Auftriebskraft = Gewicht der verdrängten Flüssigkeit =

$$F_A = 4\pi/3\, R^3 \cdot \rho_{Fl} \cdot g$$

- Reibungskraft $F_R = 6\,\pi\,\eta\,R\,v$
- Gewichtskraft $G = mg$



Wenn sich die Kugel mit konstanter Geschwindigkeit bewegt, herrscht Kräftegleichgewicht:

$$m\,\ddot{x} = 0 = G - F_A - F_R$$

Aus der sich einstellenden konstanten Geschwindigkeit v_∞ können wir die Viskosität der Flüssigkeit berechnen:

$$\boxed{\eta = \frac{mg - {}^{4\pi}\!/_{3}\, R^3 \rho_{Fl}\, g}{6\,\pi\,R\,v_\infty} = \frac{2\,R^2 (\rho_K - \rho_{Fl})\, g}{9\,v_\infty}}$$

Zeitlicher Verlauf der Geschwindigkeit der Kugel:

Bei viskoser Reibung ist die Reibungskraft von der Geschwindigkeit und damit im Allgemeinen von der Zeit abhängig. Das Newton'sche Aktionsprinzip für eine fallende Kugel in einer Flüssigkeit lautet:

$$m\ddot{x} = F_A + F_G + F_R = \frac{4\pi}{3} R^3 \cdot (\rho_K - \rho_{Fl}) \cdot g - 6\,\pi\,\eta\,R\,\dot{x}$$

Diese Gleichung ist also vom Typ:

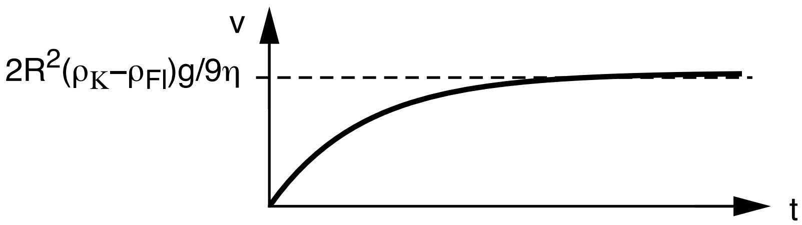
$$m\ddot{x} + \beta\dot{x} = m\frac{d^2x}{dt^2} + \beta\frac{dx}{dt} = \gamma \qquad \text{oder}$$

$$m\frac{dv}{dt} + \beta\,v = \gamma$$

Eine solche Gleichung nennt man **Differentialgleichung (DG).** Methoden zur Lösung von Differentialgleichungen werden Sie später im Mathematikunterricht kennenlernen. Hier soll die Lösung $\dot{x} = v(t)$ für eine Bewegung mit $v_0 = 0$ einfach angeben werden. Durch überzeugen wir uns dann, dass diese Funktion wirklich der obigen DG genügt:

$$\boxed{v(t) = {}^{\gamma}\!/_{\beta} \cdot \left[1 - \exp\left\{-{}^{\beta}\!/_{m} \cdot t\right\}\right]}$$

Ferner ist leicht ersichtlich, dass $v(t\to\infty) \to {}^{\gamma}\!/_{\beta} = v_\infty$. Das Geschwindigkeits-Zeitdiagramm hat folgende Form:



Die oben besprochenen Gesetze gelten bei laminarer Strömung, d.h. solange keine Wirbelbildung (= turbulente Strömung) auftritt. Eine Abschätzung für die Geschwindigkeit, bei der die Strömung turbulent wird, erfolgt mit Hilfe der Reynolds-Zahl:

$$Re := \frac{l\,\bar{v}\,\rho}{\eta}$$

Die Grösse l in dieser Formel ist eine für den jeweiligen Körper charakteristische Länge (Rohrdurchmesser, Kugelradius). Es gilt:

Eine Strömung in einem Rohr ist laminar, wenn $Re < 2320 = Re_{krit,Rohr}$,

bei einer sinkenden Kugel sofern $Re < 0.5 = Re_{krit,Kugel}$.

2.7.2 Turbulente Strömung

Wenn die Strömung turbulent wird, wird in dieser Wirbelbildung sehr viel Energie in Wärme umgewandelt, d.h. wir haben einen stärkeren Bremseffekt. Für turbulente Strömung erhält man empirisch:

$$\boxed{F_{R,\,\text{turbulent}} = c_w\, A' \,\frac{\rho\, v^2}{2}}$$

Dabei ist A' die Projektionsfläche des Körpers, ρ die Dichte des Fluidums und c_W der sogenannte Widerstandsbeiwert der Körperform. Der c_W-Wert ist im wesentlichen ein geometrischer Faktor. Er hängt aber bei vielen Körperformen von der Geschwindigkeit ab.

Beispiel zu turbulenter Strömung: Fallschirmspringer. Wenn der Fallschirm eine konstante Geschwindigkeit erreicht hat, haben wir Kräftegleichgewicht:

$$mg = c_W\, A' \,\frac{\rho\, v^2}{2}$$

$$v = \sqrt{\frac{2mg}{c_W\, A'\, \rho}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 80 \cdot 10}{2 \cdot 50 \cdot 1.2}}\ \text{m/s} = 3.6\ \text{m/s}$$

Reynolds-Zahl $\quad Re_{\text{Fallsch.}} = \frac{D \cdot \bar{v} \cdot \rho}{\eta} = \frac{8 \cdot 3.6 \cdot 1.2}{17.2 \cdot 10^{-6}} = 2 \cdot 10^6 \quad$: hochgradig turbulent.

Allgemein gültige Formeln für den Rohrströmungswiderstand

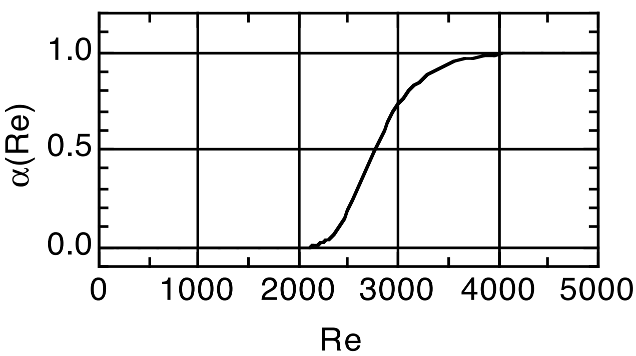
Der Strömungswiderstand in einem Rohr wird von den Hydraulikern mit Hilfe einer dimensionslosen Rohrreibungszahl $\lambda(Re)$ berechnet. Der dabei verwendete Formalismus vertuscht zwar etwas unsere allgemeine Feststellung, dass der Strömungswiderstand bei laminarer Strömung (d.h. bei $Re < Re_{krit}$) linear und bei turbulenter Strömung ($Re > Re_{krit}$) quadratisch mit der Geschwindigkeit anwächst sowie dass er im einen Fall direkt proportional zur Viskosität und unabhängig von der Dichte ist und umgekehrt. Diese generell gültige Regel wird aber aus den untenstehend gezeichneten Plots ersichtlich und kann selbstverständlich bei entsprechendem Aufwand auch algebraisch gezeigt werden.

Die folgend angegebenen Formeln sollen es Ihnen z.B. ermöglichen, den Schlauch zur Bewässerung Ihres Gartens richtig zu dimensionieren.

Um den Übergang vom laminaren zum turbulenten Regime mathematisch zu erfassen führen die Hydrauliker eine Hilfsfunktion $\alpha(Re)$ ein:

$$\alpha = \exp\left[- \exp\left(- 3.3 \cdot 10^{-3} \cdot Re + 8.75 \right) \right]$$

Die grafische Darstellung zeigt, dass α=0 im laminaren und α=1 im turbulenten Bereich ($Re_{krit} = 2320$).



Mit Hilfe der Funktion α können nun die beiden Grenzfälle "laminar" und "turbulent" miteinander kombiniert werden. Die Formel für die Rohrreibungszahl für beliebige Reynoldszahlen oder Geschwindigkeiten lautet:

$$\boxed{\lambda = \frac{64}{Re} \cdot (1 - \alpha) + \frac{\alpha}{\left[0.868 \cdot \ln\left(\frac{\ln(Re)^{1.2}}{Re} + \frac{1}{3.71} \cdot \frac{k}{d}\right)\right]^2}}$$

Wir bemerken, dass der erste Summand im laminaren, der zweite im turbulenten Regime dominiert. Da der Strömungswiderstand im turbulenten Bereich wesentlich von der Rauhigkeit der Rohrwände abhängt, enthält der zweite Summand noch den sogenannten Rauhigkeitskoeffizienten k. Typische k–Werte sind:

Verzinkte Rohre handelsüblicher Qualität	k = 0.3 mm
Leitungen aus gezogenem Stahl	k = 0.01 – 0.05 mm
Betonrohre roh	k = 1 – 3 mm

Der Druckabfall in einem horizontalen Rohr der Länge L und konstantem Durchmesser d kann nun nach folgender Formel berechnet werden:

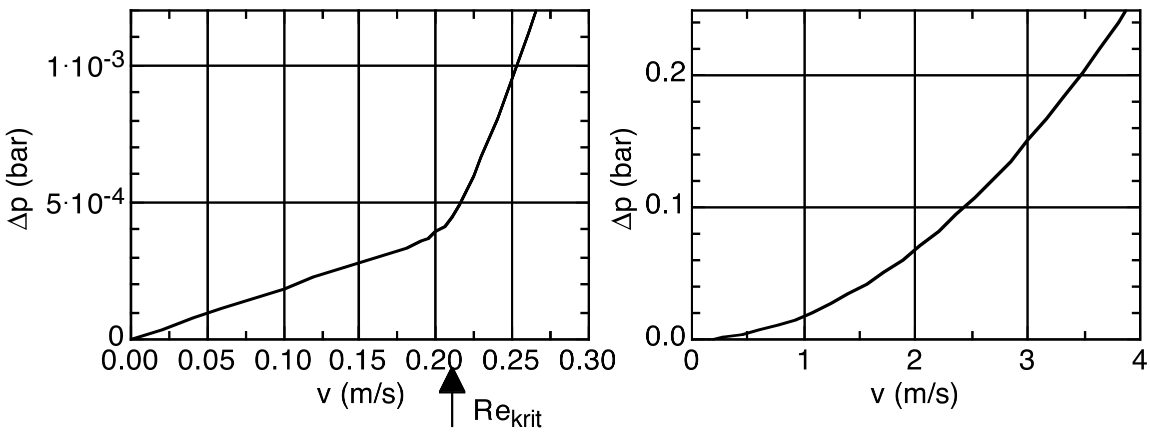
$$\boxed{\Delta p = \frac{\rho}{2} v^2 \cdot \lambda \cdot \frac{L}{d}}$$

Die untenstehenden Graphen zeigen den Druckabfall in einem verzinkten Rohr in Funktion der Strömungsgeschwindigkeit für das Medium Wasser. Gut erkennbar sind der lineare und quadratische Verlauf in den entsprechenden Bereichen.

Druckabfall in einem verzinkten Rohr in Funktion der Strömungsgeschwindigkeit

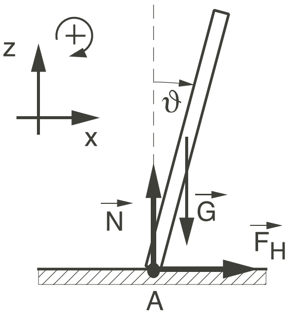
Medium: Wasser

Rohrlänge L = 1 m, Rohrdurchmesser d = 15 mm, Rauhigkeitskoeffizient k = 0.3 mm



i

b) I) Wähle A als Ref.Pkt. für Drehmomentberechnung:



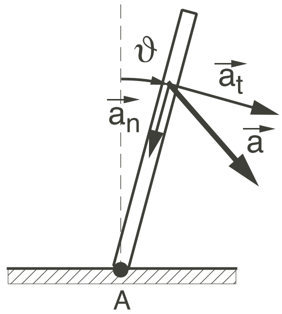
$$I_A \cdot \ddot{\vartheta} = G \cdot \sin\vartheta \cdot \frac{l}{2}$$

$$\ddot{\vartheta} = \frac{m \cdot g \cdot l \cdot \sin\vartheta}{2 \cdot I_A} \qquad I_A = \frac{m}{3} \cdot l^2 \qquad \boxed{\ddot{\vartheta} = \frac{3}{2}\frac{g}{l}\sin\vartheta}$$

$$= \frac{3\, m\, g\, l\, \sin\vartheta}{2\, m\, l^2}$$

II) $\vec{N} = (0{,}0{,}N) \Rightarrow m a_z = -m\,g + N$

$$N = m\,(a_z + g)$$



$$|\vec{a}_t| = \ddot{\vartheta} \cdot R$$

$$|\vec{a}_n| = \dot{\vartheta}^2 \cdot R \qquad (\omega^2 R)$$

$$a_{t,z} = -|\vec{a}_t| \cdot \sin\vartheta = -\ddot{\vartheta} \cdot R \cdot \sin\vartheta$$

$$a_{n,z} = -|\vec{a}_n| \cdot \cos\vartheta = -\dot{\vartheta}^2 \cdot R \cdot \cos\vartheta$$

$$\Rightarrow \boxed{a_z = -R \cdot \left(\dot{\vartheta}^2 \cos\vartheta + \ddot{\vartheta} \sin\vartheta\right)}$$

$$\boxed{a_x = -R \cdot \left(\ddot{\vartheta} \cos\vartheta - \dot{\vartheta}^2 \sin\vartheta\right)}$$

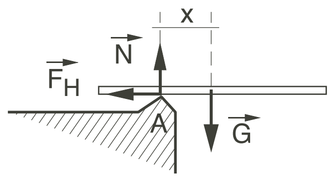
da $m\,a_x = F_H$

$\vec{F}_H$ zuerst: $\rightarrow$

dann $\leftarrow$

ii

Stab der Länge l .F_H ist Null im ersten Moment, wie obiges Resultat zeigt, $N \neq 0$!!



$$I_A\, \ddot{\vartheta} = m \cdot g \cdot x$$

$$\left(\frac{m}{12} l^2 + m\,x^2\right) \ddot{\vartheta} = m\,g\,x$$

$$\ddot{\vartheta} = \frac{g\,x}{\frac{1}{12} l^2 + x^2}$$

$$\frac{d\left(\ddot{\vartheta}\right)}{dx} = 0 = \frac{g}{\frac{1}{12} l^2 + x^2} - \frac{2\,g\,x^2}{\left(\frac{1}{12} l^2 + x^2\right)^2}$$

$$2\,g\,x^2 = \frac{1}{12} l^2 + x^2$$

$$\boxed{x = \frac{1}{\sqrt{12}}\, l = \frac{1}{2\sqrt{3}} \cdot l}$$

AP_{rot}: I) $I_A \ddot{\vartheta} = F \cdot d$

AP_{trans}: II) $m\, a_x = F - F_{L1}$

Rot/Trans: III) $a_x = \frac{l}{2} \cdot \ddot{\vartheta}$

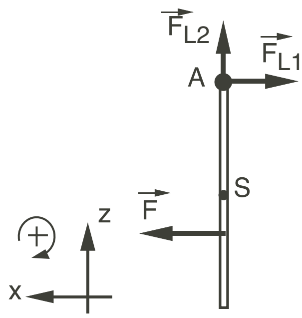
I), II): $m\, a_x = \frac{I_A \ddot{\vartheta}}{d} - F_{L1}$

& III): $m \frac{l}{2} \ddot{\vartheta} = \frac{I_A}{d} - F_{L1}$

$$F_{L1} = \left(\frac{I_A}{d} - \frac{m\,l}{2}\right) \cdot \ddot{\vartheta} = 0 \text{ !!!}$$

$$\Rightarrow \frac{m}{3} l^2 / d = \frac{m\,l}{2}$$

$$\boxed{d = \frac{2}{3} l}$$



iv

I): $m\, a_z = m\, g - F_F$

II): $I_s\, \ddot{\vartheta} = F_F \cdot R$

III): $\ddot{\vartheta} \cdot R = a_z$

I)' $m\, a_z = m\, g - \frac{I_s\, a_z / R}{R}$

$$\boxed{\begin{array}{l} a_z = \dfrac{1}{1 + I_s / mR^2} \cdot g = \dfrac{2}{3}\, g \ \text{(Vollzyl.)} \\ F_F = \dfrac{1}{3}\, m\, g \end{array}}$$