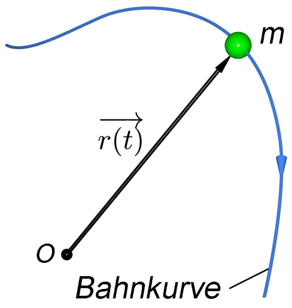
Mechanik

1. Kinematik

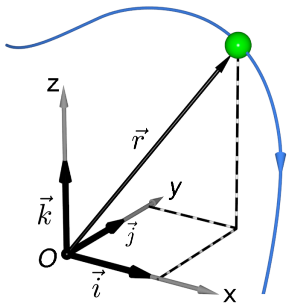
1.1 Ort und Bahn eines Massenpunktes

Der Ort eines Massenpunktes wird relativ zu einem Referenzpunkt O (Origio) gegeben und zwar durch den **Ortsvektor** $\vec{\mathbf{r}}(\mathbf{t})$.



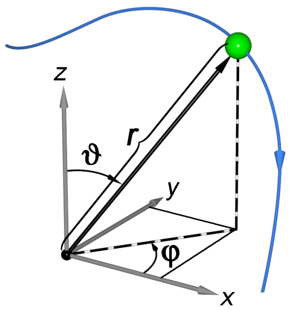
Für die Angabe von $\vec{\mathbf{r}}(\mathbf{t})$ wird meistens ein kartesisches Koordinatensystem verwendet. Wir schreiben:

$$\vec{\mathbf{r}}(\mathbf{t}) = x(t)\cdot \vec{i} + y(t)\cdot \vec{j} + z(t)\cdot \vec{k} = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$$



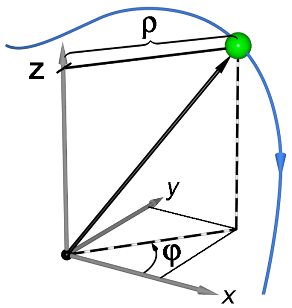
Statt kartesischer Koordinaten werden oft auch Kugelkoordinaten verwendet. Angabe von r(t) , ϑ(t), φ(t). Es gilt:

$$\vec{\mathbf{r}} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \sin\vartheta \cos\varphi \\ r \sin\vartheta \sin\varphi \\ r \cos\vartheta \end{pmatrix}$$



Eine dritte Möglichkeit sind Zylinderkoordinaten.
Angabe von ρ(t), φ(t), z(t).

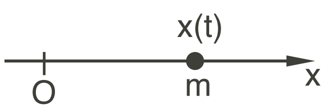
$$\vec{\mathbf{r}} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho \cos\varphi \\ \rho \sin\varphi \\ z \end{pmatrix}$$



Oft werden wir uns auf einfache Bewegungen beschränken, z.B. die lineare, 1-dimensionale Bewegung. Für deren Beschreibung benötigen wir nur eine Koordinate:

x = x(t) beschreibt die Position des Massenpunktes, der sich auf der x-Achse bewegt.

Bei der eindimensionalen Bewegung setzen wir keine Vektorzeichen mehr. Die Bewegungsrichtung ist durch die x-Achse und das Vorzeichen der Geschwindigkeit gegeben.



1.2 Die Geschwindigkeit

Die Geschwindigkeit $\vec{\mathbf{v}}$ gibt an, wie **schnell** und in welche **Richtung** sich der Massenpunkt bewegt, d.h. die Geschwindigkeit ist ein **Vektor**.

$$\vec{\mathbf{v}} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}$$

v_x: Geschwindigkeit in x-Richtung.

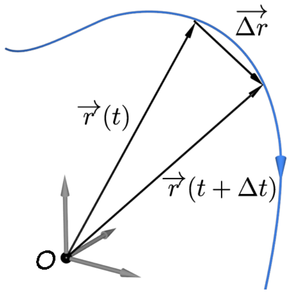
Den Betrag der Geschwindigkeit $v = |\vec{v}|$ nennen wir die **Schnelligkeit**. (im Englischen wird "velocity" und "speed" unterschieden)

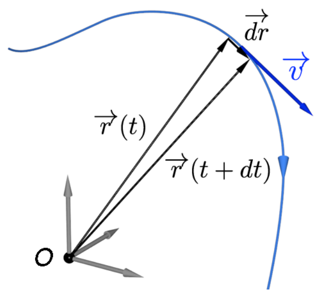
Die Geschwindigkeit (Geschwindigkeitskomponenten) erhalten wir durch Differentiation des Ortsvektors (der Ortskoordinaten x(t), y(t) z(t)) nach der Zeit:

$$\boxed{\vec{v}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}}$$

$$\boxed{\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} dx/dt \\ dy/dt \\ dz/dt \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix}}$$

Aus den untenstehenden zwei Zeichnungen ist ersichtlich $(\Delta \vec{r} \to d\vec{r})$, dass die Geschwindigkeit immer **tangential zur Bahnkurve** ist.





Ist umgekehrt die Geschwindigkeit $\vec{v}(t)$ in Funktion der Zeit bekannt, so erhält man den Ortsvektor $\vec{r}(t)$ durch Integration (Umkehroperation der Differentiation). Genauer ausgedrückt wird zusätzlich zu $\vec{v}(t)$ noch der Startort $\vec{r}(t_0)$ benötigt:

$$\boxed{\vec{r}(t) = \int_{t_0}^{t} \vec{v}(t')\, dt' + \vec{r}(t_0)}$$

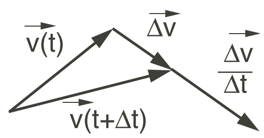
1.3 Die Beschleunigung

Die Geschwindigkeitsänderung pro Zeiteinheit heisst Beschleunigung. Wie die Geschwindigkeit ist auch die Beschleunigung ein **Vektor**. In der Umgangssprache wird der Begriff Beschleunigung jedoch oft unpräzise verwendet. Beim Übersetzen aus der Umgangssprache ist deshalb Vorsicht angebracht. Was meint man z.B. mit der Bemerkung „das Auto beschleunigt in der Kurve“ ?

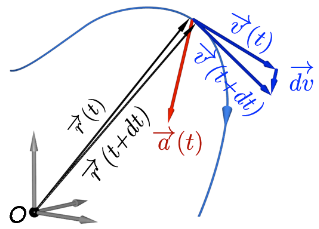
$$\vec{\mathbf{a}} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}$$

Mathematisch ist die Beschleunigung definiert als Differentiation (=Ableitung) des Geschwindigkeitsvektors nach der Zeit resp. zweite Ableitung des Ortsvektors nach der Zeit:

$$\boxed{\vec{\mathbf{a}} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{v}(t+\Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t} = \frac{\mathbf{d}\vec{\mathbf{v}}}{\mathbf{dt}} = \frac{\mathbf{d^2}\vec{\mathbf{r}}}{\mathbf{dt^2}}}$$



Im Ortsraum gezeichnet ergibt sich nebenstehender Zusammenhang:



Bei bekannter Beschleunigung $\vec{a}(t)$ und Startgeschwindigkeit $\vec{v}(t_0)$ kann mittels Integration die Geschwindigkeit berechnet werden:

$$\boxed{\vec{v}(t) = \int_{t_0}^{t} \vec{a}(t')\, dt' + \vec{v}(t_0)}$$

Definition: **Eine Bewegung heisst gleichförmig, wenn die Geschwindigkeit des Körpers konstant ist (Betrag und Richtung sind konstant)**

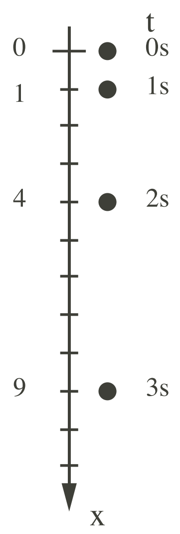
$$\vec{v}(t) = \text{const.} \qquad \Leftrightarrow \qquad \vec{a}(t) = 0$$

Dies bedeutet: **Jede krummlinige Bewegung ist ungleichförmig, ist beschleunigt.**

Beispiele:

a) Geradlinige (eindimensionale) Bewegung mit konstanter Beschleunigung: Der Freie Fall.

Der freie Fall ist Ihnen schon aus dem Unterricht in der Berufsmaturitätsschule bekannt. Er sei hier, vielleicht mit ein bis zwei zusätzlichen Finessen, repetiert.



Wir legen das "eindimensionale" Bezugssystem vertikal. Der Ursprung fällt zusammen mit dem Startpunkt der Stahlkugel.

Beobachtung: Der zurückgelegte Weg wächst quadratisch mit der Zeit:

$x(t) \sim t^2$ oder $\qquad x(t) = \text{const.} \cdot t^2 = k \cdot t^2$

$$v(t) = \frac{d\,x(t)}{dt} = \dot{x}(t) = 2 \cdot k \cdot t$$

$$a(t) = \frac{d\,v(t)}{dt} = \ddot{x}(t) = 2 \cdot k$$

Das Experiment zeigt, dass ein auf der Erde frei fallender Körper eine konstante Beschleunigung erfährt (genau genommen nur im Vakuum):

- Die Fallbewegung ist eine gleichmässig beschleunigte Bewegung.
- Die Erdbeschleunigung ist **unabhängig von der Masse und dem spezifischen Material des Körpers**.
- Ihr numerischer Wert ist schwach abhängig vom Ort, an dem das Experiment durchgeführt wird: $g \approx 9.81\ m/s^2$ (= $9.8075\ m/s^2$ in Windisch) Diagramme a(t)=g, v(t), x(t)

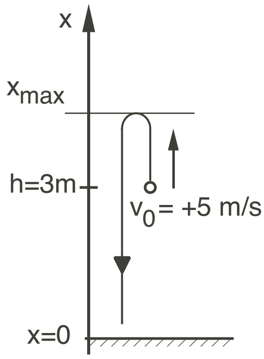
Für einen **gleichmässig beschleunigten Massenpunkt** gilt (dies gilt auch vektoriell)

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{a}(t) &= \vec{a} \\ \vec{v}(t) &= \vec{a} \cdot t + \vec{v_0} \\ \vec{r}(t) &= \vec{a}/2 \cdot t^2 + \vec{v_0} \cdot t + \vec{r_0} \end{aligned}}$$

mit der Startposition $\vec{r_0}$ und der Anfangsgeschwindigkeit $\vec{v_0}$ des Massenpunktes.

Allgemeinere Situation: Vertikaler Wurf nach oben.

- Start zur Zeit $t = 0$ in Höhe $h = 3m$,
- Geschwindigkeit $v(t=0) = v_0 = 5$ m/s,
- $a = -g = -9.81$ m/s^2 (a ist negativ, zeigt nach unten!!)



Aufgaben:

a_1) Welche maximale Höhe x_{max} erreicht die Kugel?

a_2) Wann und mit welcher Geschwindigkeit trifft sie auf den Boden?

Lösung:

a_1) Bei der Kulminationshöhe (Zeitpunkt t_1) gilt: $v(t_1) = 0$

....

....

....

a_2) Auftreffzeit t_2:

....

....

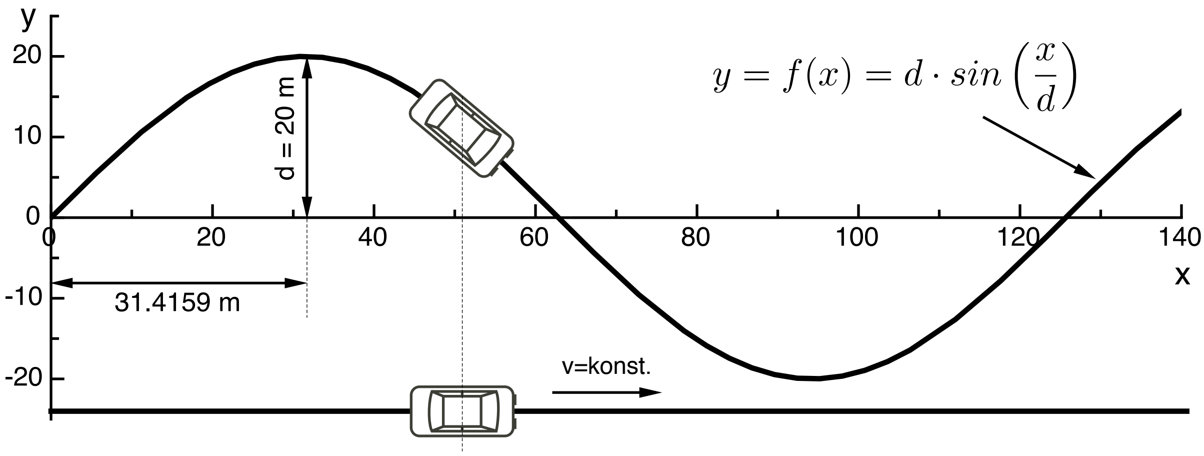
....

....

Was bedeuten die beiden Lösungen?

b) Fahrt auf Sinusbahn:

Dieses Beispiel soll den allgemeinen Zusammenhang zwischen Ortskoordinaten, Geschwindigkeit und Beschleunigung illustrieren:
Ein Auto fährt auf einer sinusförmigen Teststrecke und „hält dabei Schritt" mit einem zweiten Auto, welches mit konstanter Geschwindigkeit von c=10 m/s geradeaus fährt. Ortsvektor, Geschwindigkeit und Beschleunigung auf der Teststrecke sind zu berechnen.



Die Dimensionen der Teststrecke wurden so gewählt, dass sich für die Bahn eine einfache Formel ergibt:

$$y = f(x) = d \cdot \sin\left(\frac{x}{d}\right)$$

Verwenden wir, dass das Auto Schritt hält mit dem Vergleichsfahrzeug (konstante Geschwindigkeit c), so erhalten wir die x- und y-Koordinaten in Funktion der Zeit zu

x(t) = ...

y(t) = ...

Nun berechnen wir daraus Geschwindigkeit und Beschleunigung und erhalten auch deren Maximalwerte v_{max} und a_{max}. (Könnten Sie obige Fahrt z.B. auf einem Flugplatz ausprobieren d.h. sind die gewählten numerischen Werte sinnvoll?)

c) Kreisbewegungen

Kreisbewegungen werden oft mit Hilfe ebener Polarkoordinaten beschrieben, d.h. durch Angabe von Radius r und Winkel φ. Die dabei verwendeten Grössen

$$\textbf{Winkelgeschwindigkeit}\ \omega = {}^{d\varphi}/_{dt} = \dot{\varphi}$$

und

$$\textbf{Winkelbeschleunigung}\quad \alpha = {}^{d\omega}/_{dt} = \ddot{\varphi}$$

sind Ihnen sicher schon bekannt.

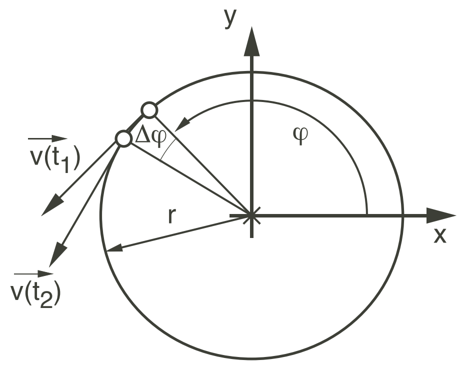
c_1) Kreisbewegung mit konstanter Winkelgeschwindigkeit

Obwohl der Betrag der Geschwindigkeit nicht ändert, ist die Bewegung ungleichförmig: Der Geschwindigkeitsvektor $\vec{v}(t)$ ändert die Richtung = Beschleunigung!

Mit Hilfe der Winkelgeschwindigkeit ω und dem Kreisradius r kann die Kreisbewegung elegant in kartesischen Koordinaten dargestellt werden ($\varphi(t)= \omega t$, $r = \text{const.}$):

$$x(t) = r \cdot \cos \varphi(t) = r \cdot \cos(\omega t)$$

$$y(t) = r \cdot \sin \varphi(t) = r \cdot \sin(\omega t)$$



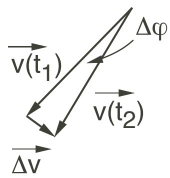
Daraus erhalten wir durch Ableiten die Geschwindigkeit und die Beschleunigung in Komponentenschreibweise

$$v_x(t) = - \omega r \sin (\omega t)$$

$$v_y(t) = \omega r \cos (\omega t)$$

$$a_x(t) = -\omega^2 r \cos (\omega t)$$

$$a_y(t) = - \omega^2 r \sin (\omega t)$$



Aus der Zeichnung ist ersichtlich, dass im Limes $\Delta t \to 0$ die Vektoren $\vec{v}(t_1)$, $\vec{v}(t_2)$ und $\Delta \vec{v}$ ein gleichschenkliges Dreieck mit unendlich kleiner Basis bilden. Der Beschleunigungsvektor $\vec{a} = d\vec{v}\,/\,dt$ steht folglich senkrecht auf dem Geschwindigkeitsvektor

$$\vec{dv} \perp \vec{v}\,;\quad \text{d.h}\quad \boxed{\vec{a} \perp \vec{v}}$$

und zeigt damit zum Kreiszentrum = **Zentripetalbeschleunigung**. Dies ist selbstverständlich auch aus der Komponentenschreibweise zu ersehen.

Die Beträge von Geschwindigkeit (**Umfangsgeschwindigkeit**) und Beschleunigung (**Zentripetalbeschleunigung**) berechnen sich leicht aus der Komponentenschreibweise:

$$\boxed{\begin{array}{l} |\vec{v}| = v = \text{const.} = \omega\, r \\ |\vec{a}| = a = \text{const.} = \omega^2 r = {}^{v^2}/_{r} \end{array}}$$

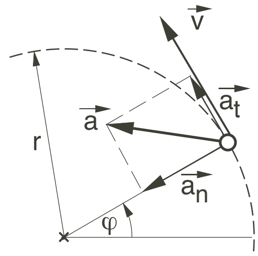
Beispiel: Wieviele Umdrehungen pro Min. macht eine torusförmige Raumstation mit Aussen-radius von 40 m, in der die Astronauten eine Beschleunigung von $1g = 9.81\ m/s^2$ erfahren?

....

c2) Kreisbewegung mit zeitabhängiger Winkelgeschwindigkeit.

Bei einer allgemeinen Kreisbewegung mit Winkelbeschleunigung $\alpha \neq 0$ zeigt der Beschleunigungsvektor vor oder hinter das Kreiszentrum.

Die nebenstehende Zeichnung zeigt die Situation für den Fall wo $\ddot{\varphi} > 0$: Der Beschleunigungsvektor zeigt vor das Kreiszentrum, der Körper wird schneller, $|\vec{v}|$ wächst.



Zerlegt man den Beschleunigungsvektor $\vec{a}$ in Tangential- ($\vec{a}_t$) und Normalkomponente ($\vec{a}_n$) so ergibt sich ein einfacher Zusammenhang mit den Winkelgrössen (Herleitung analog c1):

$$|\vec{a}_n| = \omega^2 \cdot r = v^2/r \; ; \qquad |\vec{a}_t| = |\dot{\omega}| \cdot r = |\ddot{\varphi}| \cdot r \; = \left| d|\vec{v}| / dt \right|$$

Bei einer Kreisbewegung gelten also immer die Beziehungen:

$\lvert s\rvert = \lvert\varphi\rvert \cdot r$	Bogenlänge
$\lvert v\rvert = \lvert\dot{\varphi}\rvert \cdot r$	Umfangsgeschwindigkeit
$\lvert a_t\rvert = \lvert\ddot{\varphi}\rvert \cdot r$	Tangentialbeschleunigung
$\lvert a_n\rvert = (\dot{\varphi})^2 \cdot r = v^2/r$	Normalbeschleunigung

Den Zusammenhang zwischen Winkel, Winkelgeschwindigkeit und Winkelbeschleunigung im **Spezialfall $\ddot{\varphi} = \alpha =$ konst**. können wir in Analogie zur Translationsbewegung mit konstanter Beschleunigung sofort anschreiben:

$$\text{Voraussetzung: } \ddot{\varphi} = \alpha = \text{const.} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} \omega(t) &= \alpha \cdot t + \omega_0 \\ \varphi(t) &= \frac{1}{2}\,\alpha\, t^2 + \omega_0\, t + \varphi_0 \end{aligned}$$

d) Drehbewegung im Raum.

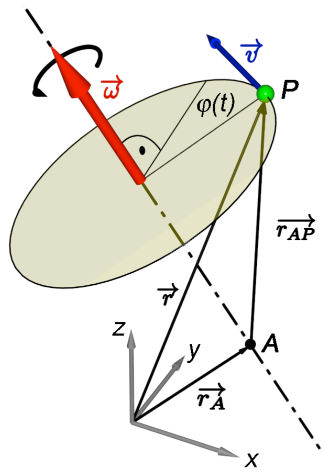
Bei einer Drehbewegung im dreidimensionalen Raume müssen Lage und Richtung der Drehachse sowie die Rotationsgeschwindigkeit um die Achse angegeben werden. Eine elegante Beschreibung erhält man durch die Einführung eines

Winkelgeschwindigkeitsvektors $\vec{\omega}$.

Der Betrag des Vektors liefert die "Rotationsgeschwindigkeit", seine Richtung gibt die Richtung der Drehachse an, der Drehsinn ist durch die "Korkenzieherregel" festgelegt.

Damit wird die Drehbewegung mit Hilfe von zwei Vektoren eindeutig beschrieben.

- Ortsvektor $\vec{r}_A$ eines Referenzpunktes A auf der Drehachse
- Winkelgeschwindigkeitsvektor

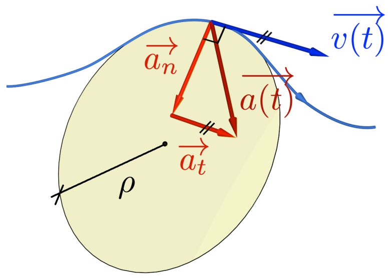


Für einen um die Achse rotierenden Punkt P gilt dann:

$$\boxed{\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}_{AP}, \quad \text{wobei } \vec{r}_{AP} = \vec{r} - \vec{r}_A} \quad \text{oder wenn } \vec{r}_A = 0: \quad \boxed{\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}}$$

Diese Schreibweise wird vor allem bei Bewegungen von ausgedehnten Körpern verwendet.

e) Allgemeine krummlinige Bewegung



Wie bei der Kreisbewegung wird die Beschleunigung bei einer allgemein krummlinigen Bewegung oft in **Tangential-** und die **Normalbeschleunigung** zerlegt:

$$\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_n$$

$$\vec{a}_t \,//\, \vec{v}, \quad \vec{a}_n \perp \vec{v}$$

Wir stellen fest:

- eine Änderung der **Schnelligkeit** ($|\vec{v}|$) ergibt eine **Tangentialkomponente** $\vec{a}_t \neq 0$;
- eine Richtungsänderung eine **Normalkomponente** $\vec{a}_n \neq 0$.

Nähert man ein kleines Stück der krummlinigen Bahnkurve (ohne Knick) durch ein Kreissegment an, so nennt man den zugehörigen Kreis den **Schmiegekreis**, die Ebene, in der der Kreis liegt, die **Schmiegungsebene** und den Radius ρ den **Krümmungsradius** der Bahn. Da die Bewegung nun lokal als Kreisbewegung beschrieben wird, erhalten wir dieselben Beziehungen wie unter c_2

$$|\vec{a}_n| = \frac{v^2}{\rho} \qquad \text{und} \qquad |\vec{a}_t| = \left|\frac{d|\vec{v}|}{dt}\right|$$

Umgekehrt kann der Krümmungsradius ρ (oder die "Krümmung" k=1/ρ) aus Geschwindigkeits- und Beschleunigungsvektor berechnet werden:

$$k^2 = 1/\rho^2 = \frac{v^2 \cdot a^2 - (\vec{v} \cdot \vec{a})^2}{v^6}.$$

Zu beachten ist, dass bei einer allgemeinen räumlichen Bewegung sowohl ρ und als auch die Schmiegungsebene eine Funktion der Zeit (Bsp.: Spiralbahn auf einem Zylinder) sind.

Spezialfälle krummliniger Bewegung:

$\vec{a}_n = 0$: geradlinige Bewegung ($\rho = \infty$ oder k=0)

$\vec{a}_t = 0$: Bewegung mit konstanter Schnelligkeit
(= Autofahrt mit "Cruise Control")

f) Allgemeines Beispiel zur Berechnung von v(t) und x(t) durch Integration aus a(t):

Taucht man eine Kugel in Öl ein und lässt sie fallen, so erhält man eine Bewegung mit zeitlich veränderlicher Beschleunigung: Die Beschleunigung geht mit der Zeit exponentiell gegen Null - die Geschwindigkeit strebt einem Grenzwert v_∞ zu (genau genommen gilt dies bei laminarer Umströmung der Kugel - siehe später). Geschwindigkeit und Ort müssen also durch Integration aus der Beschleunigung berechnet werden, die Formeln $x = a/2 \cdot t^2$ ... sind hier unbrauchbar.

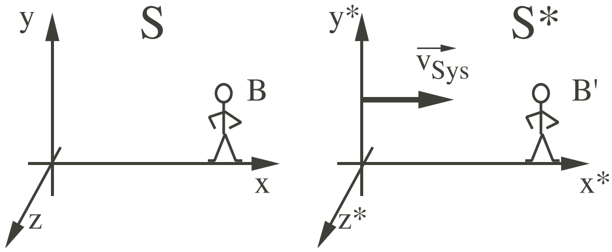
Gegeben sei die Beschleunigung [A1]

$$a(t) = a_0 \cdot e^{-\Gamma \cdot t}$$

Gesucht: v(t), x(t).

1.4. Gleichförmig bewegte Koordinatensysteme

In diesem letzten Abschnitt zur Kinematik soll besprochen werden, wie eine Bewegung, welche zum Beispiel von einem fahrenden Zug (System S^*) aus beobachtet und vermessen wird, sich von der Bahnstation (System S) aus gesehen präsentiert.



Vom Alltag her ist uns die Umrechnung von Geschwindigkeiten vom einen System ins andere geläufig: Werfen wir im Zug einen Ball nach vorne, so erhalten wir dessen Geschwindigkeit relativ zur Bahnstation ($\vec{v}$) durch Addition der Geschwindigkeit des Zuges ($\overrightarrow{v_{Sys}}$) und der Ballgeschwindigkeit relativ zum Zug ($\overrightarrow{v^*}$):

$$\vec{v} = \overrightarrow{v^*} + \overrightarrow{v_{Sys}}$$

Bei konstanter Zugsgeschwindigkeit (= konstante Schnelligkeit auf geradem Geleiseabschnitt) erhalten wir den Zusammenhang zwischen den Beschleunigungen in S und S^* zu

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \frac{d\left[\overrightarrow{v^*}(t) + \overrightarrow{v_{Sys}}\right]}{dt} = \frac{d\overrightarrow{v^*}(t)}{dt} = \overrightarrow{a^*}(t)$$

Sind also im fahrenden Zuge und auf der Bahnstation je eine Radarvermessungsanlage installiert, sollten beide Anlagen identische Beschleunigungen liefern.
Allgemein formulieren wir: Bewegt sich ein System S^* gleichförmig, relativ zu einem zweiten System S, so gelten folgende "Umrechnungsregeln"

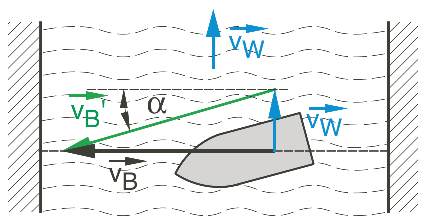
$$\boxed{\begin{aligned} \vec{r}(t) &= \overrightarrow{r^*} + \overrightarrow{v_{Sys}} \cdot t \\ \vec{v}(t) &= \overrightarrow{v^*} + \overrightarrow{v_{Sys}} \\ \vec{a}(t) &= \overrightarrow{a^*}(t) \end{aligned}}$$

sofern in beiden Systemen identische Uhren und Massstäbe verwendet werden, die Systemursprünge zur Zeit t=0 zusammenfallen und die Koordinatenachsen parallel sind zueinander.
Obigen Zusammenhang hat Galileo Galilei (1564 – 1642) als erster erkannt - diese "Umrechnungsformeln" heissen deshalb **Galileitransformation**.
Einstein bemerkte sodann, dass in den obigen Überlegungen stillschweigend angenommen wird, es gebe "eine Zeit an sich" – dass zwei identische, gegeneinander bewegte Uhren, synchron laufen. In seiner 1905 publizierten speziellen Relativitätstheorie zeigt er, dass diese Annahme nicht mit der physikalischen Realität übereinstimmt und leitet ein "neues" Set von Umrechnungsregeln her, die Lorentztransformation. Diese geht im Grenzfall kleiner Geschwindigkeiten in die Galileitransformation über (klein relativ zur Lichtgeschwindigkeit), welche sich im Alltag bestens bewährt hat.
Als Beispiel betrachten wir ein Boot, welches auf einem Fluss mit $|\vec{v'}|$ = 10 m/s fährt. Mit welchem Winkel α muss es aufkreuzen, um den Fluss auf dem direktesten Weg zu überqueren? Die Schnelligkeit des Flusses betrage v_W = 3 m/s.

Es gilt:

$$\sin\alpha = \frac{|\overrightarrow{v_W}|}{|\overrightarrow{v_B}'|} = \ldots\ldots\ldots$$

$$|\overrightarrow{v_B}| = \sqrt{{v_B}'^2 - {v_W}^2} = \ldots\ldots\ldots\ldots$$



2. Dynamik

2.1. Kraft/Masse

Was wir gemeinhin als Kraft bezeichnen, ist unserer alltäglichen Erfahrung entnommen: Wir müssen Muskelkraft aufwenden, um z.B. einen Körper zu deformieren oder ihn in Bewegung zu versetzen. Wir fragen also nach den Wirkungen einer Kraft, die Frage nach dem Wesen der Kraft bleibt unbeantwortet.

Ursache:	Wirkung
- Kraft	- Änderungen des Bewegungszustandes - Deformationen

Erfahrungen zu Kraft/Masse (Newton, Hooke):

- Die Beschleunigung eines Körpers ist proportional zur wirkenden Kraft und umgekehrt proportional zur Masse des zu beschleunigenden Körpers:
  Je grösser die Kraft, desto grösser die Beschleunigung.
  Je grösser die Masse, desto kleiner die Beschleunigung.
- Die Verlängerung einer Feder ist proportional zur Kraft, mit der man an ihr zieht.
- Kräfte sind mathematisch als Vektoren zu beschreiben, es gilt das Superpositionsprinzip.

Äquivalenz von schwerer und träger Masse:

Im Prinzip müssen wir zwei Arten von Masse unterscheiden: Schwere Masse und träge Masse. Aus unserer Alltagserfahrung wissen wir: Ein Körper, der sich nur mühsam anheben lässt, ist auch mühsam zu beschleunigen. Experimente (Eötvös, 1848 – 1919) haben gezeigt, dass innerhalb der Messgenauigkeit ($5\cdot10^{-13}$, Baessler et al. 1999) kein Unterschied zwischen schwerer und träger Masse besteht:

Schwere Masse = Träge Masse, [m] = kg

Die Äquivalenz von schwerer und träger Masse bildet den Grundbaustein von Einsteins allgemeiner Relativitätstheorie.

2.2. Die Newton'schen Gesetze

Die Grundpfeiler der Newton'schen Mechanik sind die drei Newton'schen Prinzipien (Zitat aus Ernst Mach, "Die Mechanik in ihrer Entwicklung"):

I) Jeder Körper beharrt in seinem Zustand der Ruhe oder gleichförmigen geradlinigen Bewegung, wenn er nicht durch einwirkende Kräfte gezwungen wird, seinen Zustand zu ändern. **= Definition eines Inertialystems**
II) Die Änderung der Bewegung ist der Einwirkung der bewegenden Kraft proportional und geschieht nach der Richtung derjenigen geraden Linie, nach welcher die Kraft wirkt. **Aktionsprinzip** der Translationsbewegung (= $\mathbf{AP_{trans}}$)
III) Die Wirkung ist stets der Gegenwirkung gleich, oder die Wirkungen zweier Körper aufeinander sind stets gleich und von entgegengesetzter Richtung. **Actio = Reactio**

Der im zweiten Axiom verwendete Begriff "Bewegung" oder "Bewegungsgrösse" wurde von Newton als Produkt von Masse und Geschwindigkeit definiert. Newton hatte erkannt, dass nicht der Geschwindigkeit sondern diesem Produkt eine zentrale Stellung in der Mechanik zukommt. Heute nennen wir Newtons "Bewegungsgrösse" den **Impuls** $\vec{\mathbf{p}}$ eines Körpers (in der Alltagssprache kommt diesem Begriff wohl der Ausdruck "Schwung" am nächsten):

"Bewegungsgrösse" = Impuls = $\vec{p} = m \cdot \vec{v}$ $\qquad$ $[p] = \text{m kg/s} = \text{N·s}$

Die zweite, zentrale Grösse in Newtons Grundgesetzen ist die

Kraft $\vec{F}$ $\qquad$ $[F]=\text{m·kg/s}^2=\text{N}$

In heutiger Formelsprache ausgedrückt lauten die drei Prinzipien:

I) $\overrightarrow{F_{tot}} = \sum \vec{F_i} = 0 \iff \vec{p} = m\cdot\vec{v} = \text{konst.}$

II) $d\vec{p}/dt = d(m\cdot\vec{v})/dt = \overrightarrow{F_{tot}}$

III) $\overrightarrow{F_{21}} = -\overrightarrow{F_{21}}$

Beschränken wir uns auf Körper/Vorgänge mit zeitlich unveränderlichen Massen (dm/dt = 0), so erhalten wir:

I) **"Statik"**	$\overrightarrow{F_{tot}} = \sum \vec{F_i} = \vec{0} \iff \vec{p} = m\cdot\vec{v} = \text{konst.}$
II) **AP$_{\mathbf{trans}}$**	$m\,\vec{a} = \sum_i \vec{F_i}$
III) **Actio = Reactio**	$\overrightarrow{F_{21}} = -\overrightarrow{F_{21}}$

Einführende Beispiele/Experimente zu den Newton'schen Axiomen

I) Statik

Statik bedeutet, dass der betrachtete Körper in Ruhe ist und bleibt. Damit ein ausgedehnter Körper, welcher auch Rotationsbewegungen ausführen kann, in Ruhe bleibt, muss zusätzlich zum Kräftegleichgewicht auch Drehmomentengleichgewicht gefordert werden (siehe BMS resp. später)

$\sum_i \vec{F_i} = 0$ Die Summe aller Kräfte ist Null

$\sum_i \overrightarrow{M_{A,i}} = 0$ Die Summe aller Drehmomente ist Null (bezüglich einem beliebigen Referenzpunkt A)

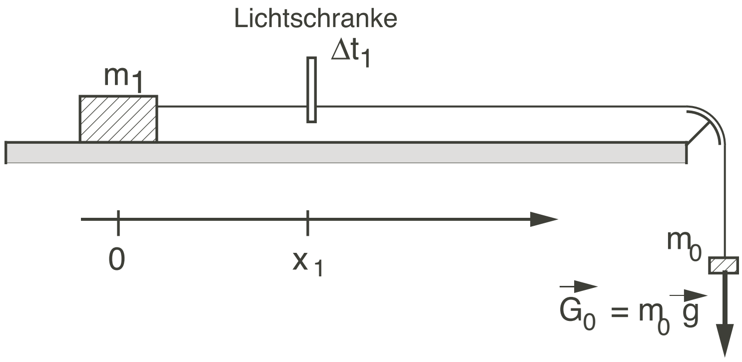
Aufgaben zur Statik sind Thema der Berufsmaturitätsausbildung. Sie sollen in Übungsaufgaben repetiert werden.

II) Dynamik

Bei konstanter Masse m (dm/dt =0) gilt: $\boxed{m \cdot \vec{a} = \vec{F}}$

a) Experimentelle Untersuchung des Zusammenhanges zwischen a, m und F:

Ein Gleiter mit Masse m_1 auf der Luftkissenbahn wird durch Anhängen eines Gewichtes G_0 an den Faden beschleunigt.
Wir stellen fest: Je grösser m_1 desto kleiner die Beschleunigung a des Gleiters.



Eine erste, etwas vorschnelle Vermutung lautet:

$$m_1 \cdot a = G_0 \quad => \quad a = m_0/m_1 \cdot g$$

Die Betrachtung des Grenzfalls m_1=0 zeigt sofort, dass ein Fehler in unserer Überlegung steckt. Wenn wir die Situation genauer analysieren bemerken wir, dass die Gewichtskraft G_0 nicht an m_1 sondern am System (m_1+m_0) angreift. In einem „Ersatzschaltbild“ wird dies offensichtlich:

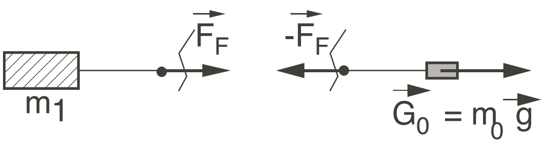
Die Systemmasse beträgt also $m_{sys}= (m_0 + m_1)$ und G_0 ist die am System angreifend Kraft. Das Aktionsprinzip für das System lautet folglich ($m_{sys} \cdot a = F_{sys}$)

$$(m_1 + m_0)\, a = G_0$$

und damit $\qquad a = ...$

Diese Formel liefert nun mit der Erfahrung übereinstimmende Grenzwerte für m_1=0, m_1=∞ etc.

Die Fadenkraft F_F, welche am Gleiter angreift, berechnen wir mit Hilfe des Aktionsprinzips, formuliert für den Gleiter allein (**Körper freischneiden**):



$$m_1 \cdot a = F_F$$

$$\frac{m_1 \cdot m_0}{m_1 + m_0} \cdot g = F_F < m_0 \cdot g$$

b) Die Zentripetalkraft bei der Kreisbewegung

Das Aktionsprinzip erlaubt nicht nur, aus bekannten Kräften und Massen auf die resultierende Beschleunigung zu schliessen. Zwei weitere "Aufgabenstellungen" sind möglich:

- Masse und Beschleunigung bekannt, Kraft gesucht
- Beschleunigung und Kraft bekannt, Masse gesucht

Bei Kreisbewegungen mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω liegt oft der erste Fall vor. Aus dem Bahnradius R und der Winkelgeschwindigkeit kann die Beschleunigung berechnet werden:

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{a}_{ZP} \quad \text{mit} \quad |\vec{a}_{ZP}| = \omega^2 r$$

Beobachten wir also eine Kreisbewegung so folgern wir sofort, dass die Summe aller Kräfte ungleich Null ist, dass irgendeine Kraft den Körper in Richtung Kreiszentrum zieht.

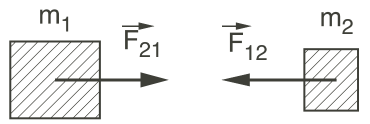
Bei Kenntnis von Bahnradius und Schnelligkeit oder Winkelgeschwindigkeit sowie der Masse des Körpers kann die wirkende **Gesamtkraft** berechnet werden:

$$m \cdot \vec{a}_{ZP} = \vec{F}_{??}$$

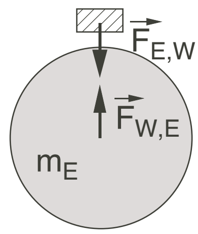
Als Index wurden in der Formel zwei Fragezeichen gesetzt: Die Kraft, welche den Körper auf die Kreisbahn "zwingt", kann eine Seilkraft, eine Federkraft, die Gravitationskraft oder eine Summe von Kräften sein, welche zum Kreiszentrum zeigt. Die Kraft wirkt zentripetal und wird deshalb oft Zentripetalkraft genannt. Es ist aber wichtig zu betonen, dass **eine Zentripetalkraft keine zusätzliche Kraft ist**!!! Man sagt besser "die Seilkraft wirkt zentripetal".

III): Actio = Reactio: Kräfte treten immer in Paaren auf $\vec{F}_{12} = - \vec{F}_{21}$

Die Kräfte $\vec{F}_{12}$ und $\vec{F}_{21}$ greifen jedoch an verschiedenen Körpern an:



In gewissen Fällen tönt obige Feststellung komisch, obwohl sie absolut richtig ist:
Ein Gegenstand auf der Erde wird von der Erde angezogen. Gemäss dem dritten Newton'schen Prinzip zieht auch der Gegenstand die Erde an. Die Konsequenz dieser Feststellung wollen wir am Beispiel eines fallenden Eisenbahnwagens berechnen.



Ein Eisenbahnwagen der Masse m_W=10t wird aus h=10m Höhe auf die Erde fallengelassen. Die Gewichtskraft auf den Eisenbahnwagen beträgt:

$$F_{E,W} = G = m_W\, g = 98'100 \text{ N}.$$

Mit der entgegengesetzt gleichen Kraft wird die Erde zum Wagen hingezogen und in Richtung Wagen beschleunigt, bis **beide** schlussendlich zusammenprallen.
Die Verschiebung der Erde vom Fallenlassen bis zum Zusammenprall wollen wir nun berechnen.
Vorgehen (Standard für Mechanik):

1. Zeichnung der gegebenen Situation
2. System(e) identifizieren
3. Alle auf den/die betrachteten Körper wirkenden Kräfte einzeichnen
4. Wahl eines geeigneten Koordinatensystems
5. Aktionsprinzip in Koordinatenschreibweise formulieren
6. Algebraische Formulierung weiterer Bedingungen
7. Gleichungssystem lösen

2.3. Der Schwerpunktsatz oder Impulssatz für ausgedehnte Körper/Systeme

Bei der Beschreibung der Bewegung eines ausgedehnten Körpers (im Gegensatz zu einem punktförmigen Körper) spielt der Schwerpunkt eine wichtige Rolle. Obwohl Sie einfache Schwerpunkts-Berechnungen schon beherrschen, wollen wir dies nochmals kurz repetieren:

Definition des Schwerpunkts eines Körpers
(System von Massenpunkten)

$$\boxed{\vec{r}_S = \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{\sum_i m_i} = \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{M} = \frac{\int \vec{r}\, dm}{M}}$$

(Bei einfachen, zusammengesetzten Körpern kann der Schwerpunkt folgendermassen berechnet werden: Der SP von zwei Körpern teilt die Verbindungsstrecke ihrer Schwerpunkte im umgekehrten Massenverhältnis. Dieses Verfahren kann iterativ angewendet werden.)

Gesamtimpuls und
Schwerpunktsgeschwindigkeit

$$\boxed{\vec{p}_{tot} = \sum_i \vec{p}_i = M\, \vec{v}_S}$$

Der **Schwerpunktsatz** wird mit Hilfe des dritten Newton'schen Axioms hergeleitet. Er lautet:

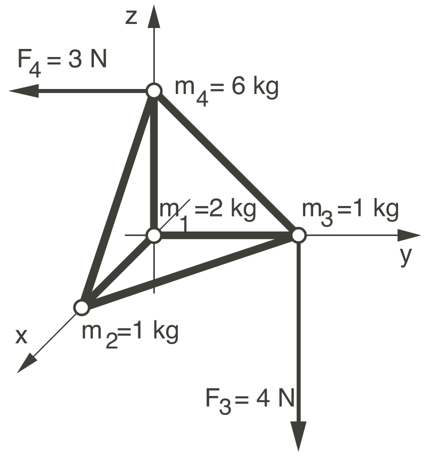
Der Schwerpunkt eines Körpers (Systems von Massenpunkten) bewegt sich so,
als ob in ihm die gesamte Masse konzentriert wäre und
sämtliche Kräfte an ihm angreifen würden.

$$\boxed{M\, \vec{a}_S = M\, {}^{d\vec{v}_S}\!/_{dt} = \vec{F}_{tot}}$$

Ein ausgedehnter Körper kann deshalb mit Hilfe eines Massenpunktes beschrieben werden, sofern wir uns nur für dessen Schwerpunktsbewegung interessieren. Dies gilt für alle Körper (Systeme), d.h. sowohl für ein Auto, eine Qualle oder z.B. das Sonnensystem. M bezeichnet dabei die Gesamtmasse des Systems, F_{tot} die Summe aller externen Kräfte (innere Kräfte müssen nicht mitgezählt werden, sie addieren sich zu Null wegen Actio = Reactio)

Spezialfall: $F_{tot} = 0 \Rightarrow$ der Systemschwerpunkt bewegt sich gleichförmig,
der Gesamtimpuls ist konstant (bleibt erhalten)!

Beispiel: Man berechne den Schwerpunkt sowie die Schwerpunktsbeschleunigung des nebenstehend gezeichneten Tetraeders aus vier Punktmassen und masselosen Verbindungsstangen der Länge 1 m resp. $\sqrt{2}$ m.

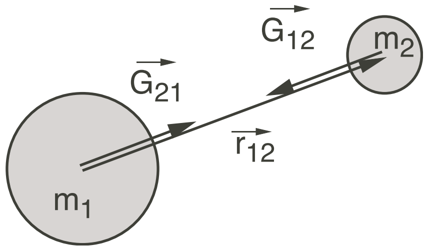


.....

.

2.4. Die fundamentalen Kräfte

2.4.1 Gravitationskraft



Das von Newton gefundene Gravitationsgesetz lautet

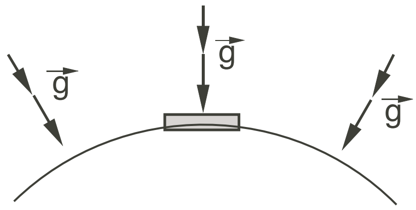
$$\boxed{\vec{G}_{12} = -\Gamma \cdot \frac{m_1 m_2}{r_{12}^2} \cdot \frac{\vec{r}_{12}}{|\vec{r}_{12}|} \qquad \Gamma = 6.6720 \cdot 10^{-11}\ \frac{\mathrm{N\,m^2}}{\mathrm{kg^2}}\ \text{(Gravitationskonstante)}}$$

wobei G_{12} die an der Masse m_2 angreifende Gravitationskraft und r_{12} den Abstandsvektor zwischen den Kugelmittelpunkten bezeichnet (Das Gesetz gilt streng für Kugelschalen homogener Dichte).

Gewicht, Erdbeschleunigung, homogenes Gravitationsfeld.
Das Gewicht G eines Körpers auf der Erde bezeichnet die Kraft, welche den Körper im freien Fall in "Richtung Erdmittelpunkt" beschleunigt. Da die Gravitationskraft auf der Erdoberfläche zu 99.7% für diesen Effekt verantwortlich ist, verwenden wir im Folgenden die Begriffe Gewichtskraft und Gravitationskraft synonym (in einer genauen Betrachtung muss die Eigenrotation der Erde, die "Mondanziehung" etc. mitberücksichtigt werden).
In oben geschilderter Näherung können wir das Gewicht eines Körpers mit Masse m sowie seine Fallbeschleunigung g mit Hilfe des Gravitationsgesetzes berechnen

$$G = \Gamma \frac{m_E \cdot m}{r^2}; \qquad g = \Gamma \frac{m_E}{r^2}$$

(Erdmasse m_E, Abstand zum Erdmittelpunkt r) und bemerken, dass Gewicht und Fallbeschleunigung quadratisch mit dem Abstand zum Erdmittelpunkt abnehmen.



Homogenes Gravitationsfeld
Bei Vorgängen im Alltag ändert sich der Abstand zum Erdmittelpunkt nur minimal - Betrag und Richtung der Gravitationskraft und damit auch die Erdbeschleunigung $g=9.81\ \mathrm{m/s^2}$ sind in guter Näherung konstant = homogenes Gravitationsfeld. (in 10'000 m Höhe ist die Erdbeschleunigung um rund 3‰ kleiner. Auf unserem Flug in die Ferien sind wir folglich für kurze Zeit um 3‰ leichter. Verifizieren Sie). In einem homogenen Gravitationsfeld gilt sodann ein Satz, den Sie sicher schon im Alltag angewendet haben:

Die Gewichtskraft greift im Schwerpunkt der Körper an.
Sie erzeugt kein Drehmoment bez. des Schwerpunktes (bewirkt keine Drehbewegung)

Beispiel einer Bewegung im homogenen Gravitationsfeld der Erde: Der schiefe Wurf

Den schiefen Wurf kennen Sie schon von Ihrem früheren Physikunterricht. Wahrscheinlich haben Sie dort auch gelernt, dass der Abschusswinkel für maximale Wurfweite 45° beträgt. Dies gilt nur im Spezialfall, wo Start- und Landeort auf gleicher Höhe sind und soll nun hergeleitet werden.

Als Erstes wollen wir uns das Vorgehen überlegen (=Lösungsstrategie):

I) Allgemeine Berechnung der Wurfweite s in Funktion des Abschusswinkels α

II) Bestimmung des Winkels α, für den s maximal wird.

I) Gegeben sind Abschussschnelligkeit v_0 und Abschusswinkel α.

I)..

....

....

....

....

....

II)..

....

....

Weitere Experimente:

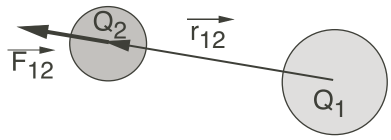
- $\alpha = 0$ (Horizontaler Wurf): Körper mit verschiedenen Geschwindigkeiten v_{x0} fallen in der gleichen Zeit gleich tief! (z-Koordinate ist unabhängig von x-Koordinate)
- Schuss auf fallendes Blech: Das Blech wird getroffen unabhängig von der Abschussgeschwindigkeit.

2.4.2. Die Coulombkraft

Die Coulombkraft, mit der elektrisch geladene Körper einander anziehen resp. abstossen, zeigt ein ähnliches Kraftgesetz wie die Gravitationskraft:

$$\boxed{\vec{F}_{12} = \vec{F}_C = \frac{1}{4\pi\,\varepsilon_0}\frac{Q_1\,Q_2}{r_{12}^2}\cdot\frac{\vec{r}_{12}}{|\vec{r}_{12}|} \qquad \varepsilon_0 = 8.85\cdot 10^{-12}\,\frac{(As)^2}{Nm^2}}$$

Dabei bedeuten Q_1 und Q_2 die elektrische Ladung der beiden kugelförmigen Körper. (Abstossung bei gleichem Vorzeichen der Ladung, Anziehung bei verschiedenem Vorzeichen. Die Gravitation ist immer anziehend!)



Vergleich der "Stärke" von Coulomb- und Gravitationskraft zwischen zwei Protonen:

$$\frac{F_C}{F_G} = \frac{Q_P^{\,2}}{4\pi\,\varepsilon_0}\,\frac{1}{\Gamma\, m_P^2} = 10^{36}$$

2.4.3. Kräfte im subatomaren Bereich: Starke und Schwache Wechselwirkung

Die Kraft, welche die Bausteine der Atomkerne (Protonen und Neutronen) zusammenhält, wird Kernkraft oder starke Wechselwirkung genannt. Die schwache Wechselwirkung ist für den radioaktiven β-Zerfall von Atomkernen verantwortlich (Umwandlung eines Kerns unter Emission eines Elektrons (β^--Zerfall) resp. Positrons (β^+-Zerfall)). Auf diese Kräfte soll hier nicht weiter eingegangen werden.

2.5. Einige weitere, "empirische" Kraftgesetze

Die im Folgenden besprochenen Kraftgesetze stellen "nicht weiter hinterfragte Erfahrungen" dar (=Empirie). Im Gegensatz z.B. zu Abweichungen vom Gravitationsgesetz stört sich hier niemand, wenn in gewissen Fällen Abweichungen zur Theorie festgestellt werden.

2.5.1. Reibungskräfte

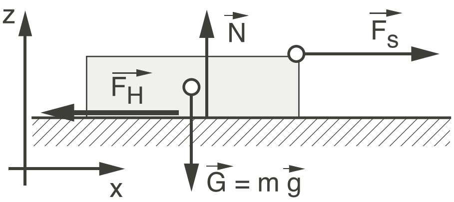
Wir unterscheiden drei Typen von Reibung:

Haftreibung, Gleit- und Rollreibung sowie nasse Reibung.

1. Haftkraft (Haftreibung):

Will man einen Gegenstand auf einer festen Unterlage in Bewegung versetzen, muss eine gewisse Minimalkraft aufgewendet werden. Zieht man mit einer kleineren Kraft, bleibt der Gegenstand in Ruhe - der Gegenstand haftet. Eine Analyse der gezeichneten Situation ergibt:

Angreifende Kräfte: Gewichtskraft $\vec{G}$
Normalkraft $\vec{N}$
Seilkraft $\vec{F}_s$
Haftkraft $\vec{F}_H$



Solange der Körper haftet, ist er in Ruhe und es gilt (AP_{trans}):

$$m\cdot\vec{a} = \vec{0} = \sum_i \vec{F}_i \quad\Rightarrow\quad \vec{F}_H = -\vec{F}_s \quad\text{und}\quad \vec{N} = -\vec{G}$$

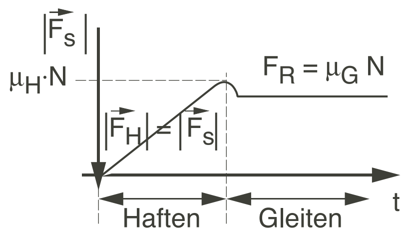
Die **Haftkraft F_H** ist folglich im Allgemeinen nur indirekt gegeben - in unserem Beispiel ist sie durch die Seilkraft bestimmt: Wird stärker gezogen, so wird die Haftkraft grösser und umgekehrt.

Empirisch findet man die **Ungleichung**

$$\boxed{0 \le \left|\vec{F_H}\right| \le \mu_H \left|\vec{N}\right|}$$

mit dem Haftkoeffizienten (Haftreibungskoeff.) μ_H.

Vorlesungsexperiment:



Mit Hilfe des Haftkoeffizienten kann nur der Grenzfall, die maximale Haftkraft, berechnet werden!

2. Gleitreibung (=trockene Reibung)

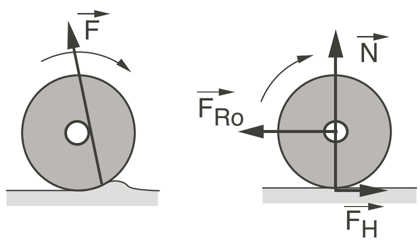
Die **Gleitreibung** ist (in guter Näherung) unabhängig von der Grösse der Gleitoberfläche und der Geschwindigkeit des Körpers und antiparallel zur Bewegungsrichtung. Es gilt:

$$\boxed{\left|\vec{F_{Gl}}\right| = \mu_G \left|\vec{N}\right|}$$

3. Rollreibung

Die **Rollreibung** ist eine Kombination von Haftung und Deformation. Die Kraft, welche die Unterlage auf ein frei rollendes Rad ausübt, zeigt etwa so, wie nebenstehend skizziert. Wir zerlegen diese Kraft in Normalkraft, Haftung und Rollreibung. Die Angriffspunkte dieser Kräfte sind dem Ersatzbild zu entnehmen.

Ersatzbild:



Für die Rollreibung gilt: $$\boxed{\left|\vec{F_{Ro}}\right| = \mu_R \left|\vec{N}\right|}$$

Alle drei oben aufgeführten Reibkoeffizienten hängen von den sich berührenden Materialien sowie von deren Oberflächenbeschaffenheiten ab (für typische Werte siehe Tabellen im Kuchling). Zwischen den Reibkoeffizienten gilt (normalerweise) die Beziehung:

$$\boldsymbol{\mu_R \le \mu_G \le \mu_H}$$

4. Nasse Oberflächen

Bewegt sich ein Körper in einer Flüssigkeit oder auf einem Flüssigkeitsfilm so gilt:

1) Eine Haftkraft existiert nicht.
2) Bei genügend **kleinen** Geschwindigkeiten ist die Reibungskraft direkt proportional zur Geschwindigkeit des sich bewegenden Körpers:

   $$\boxed{\vec{F_R} = -\beta\,\vec{v}}$$

   Die Proportionalitätskonstante β hängt von **Form** und **Grösse** der **Körperoberfläche** ab sowie von der Zähigkeit (**Viskosität**) **der Flüssigkeit** (= viskose Reibung).
3) Bei **grösseren Geschwindigkeiten** wächst die Reibungskraft infolge **Wirbelbildung** quadratisch mit der Geschwindigkeit des sich bewegenden Körpers:

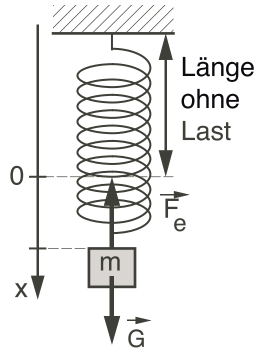
   $$\boxed{F_R \sim v^2}$$

   Die Grenzgeschwindigkeit zwischen linearem und quadratischem Verhalten hängt von verschiedenen Faktoren wie Form des Körpers, Oberflächenbeschaffenheit, Viskosität und Dichte der Flüssigkeit resp. des Gases ab.

2.4.5. Die Federkraft, elastische Dehnung, Hook'sches Gesetz

Neben den bisher besprochenen Kräften kennen wir sogenannt elastische Kräfte: Ein deformierter Körper (gedehnte Feder) kann eine Kraft auf einen andern Körper ausüben. Experimentelles Resultat: Die elastische Kraft F_e, die eine gespannte Feder auf den daran befestigten Körper ausübt, ist direkt proportional zur Verlängerung x der Feder:

$$\boxed{F_e = - k \cdot x}$$



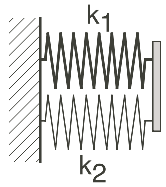
Die Proportionalitätskonstante **k** heisst **Federkonstante**. Das negative Vorzeichen drückt aus, dass die Kraft entgegengesetzt zur Verlängerung (Verkürzung) der Feder ist. Federn können folglich zur Messung von Kräften verwendet werden, wobei an der Feder eine lineare Skala anzubringen ist = Federwaage. Wenn sich der angehängte Körper nicht mehr bewegt, herrscht Kräftegleichgewicht:

$$\vec{F}_e = - \vec{G}$$

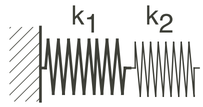
Die Federwaage misst also das Gewicht (=Kraft) und nicht die Masse!

Wie Sie leicht herleiten, gilt für die

Parallelschaltung von Federn $\qquad k_{tot} = k_1 + k_2$

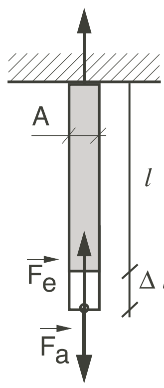


Serieschaltung $\qquad 1/k_{tot} = 1/k_1 + 1/k_2$



Bei der **Dehnung** $\varepsilon = \Delta l / l$ (=relative Verlängerung) eines Stabes finden wir ein zum Federgesetz analogen Zusammenhang. Die elastische Kraft pro Flächeneinheit, die (Normal-)**Spannung σ**, ist direkt proportional zur Dehnung ε (Hook'sches Gesetz):

$$\boxed{\sigma = E \cdot \varepsilon = E \cdot \frac{\Delta l}{l}} \qquad [\sigma] = N/m^2 \quad [E] = N/m^2;\ N/mm^2$$

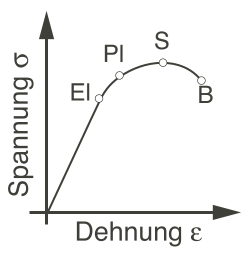


Der **Elastizitätsmodul E** (=Materialgrösse) ist dabei das analoge zur Federkonstanten im Federgesetz.

Spannungs-Dehnungs-Diagramm:

Der lineare Zusammenhang zwischen Dehnung und Kraft resp. Spannung gilt nur in einem beschränkten Bereich, dem elastischen Bereich des Materials. Normalerweise unterscheidet man

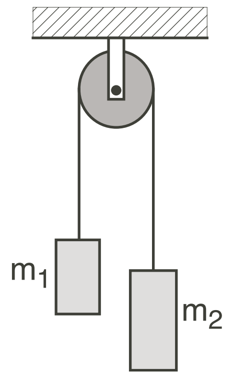
- elastischer Bereich (0-El): Es gilt das Hook'sche Gesetz. Nach der Entlastung geht die Verformung wieder zurück.
- elastisch-plastischer Bereich (El-Pl): Ein Teil der Verformung bleibt nach der Entlastung bestehen.
- plastischer Bereich (Pl - S): Verformung bleibt näherungsweise
- Bruchpunkt B.



Beispiele

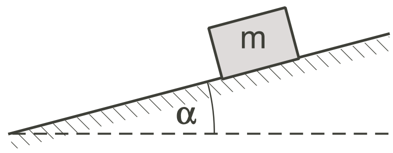
a) Die Atwood'sche Fallmaschine

Man berechne die Beschleunigung a sowie die Fadenkraft F_F. Überprüfen Sie die Richtigkeit der Resultate durch Betrachtung von Grenzfällen. [A2]



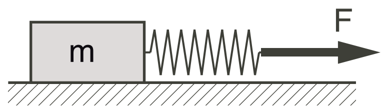
b) Schiefe Ebene

- Bei welchem Neigungswinkel α_{max} beginnt der Klotz zu rutschen?
- Mit welcher Beschleunigung gleitet er anschliessend?
- Was passiert bei kleinen Neigungswinkeln α,wenn dem Klotz eine Anfangsgeschwindigkeit $|\vec{v}| > 0$ erteilt wird? [A3]



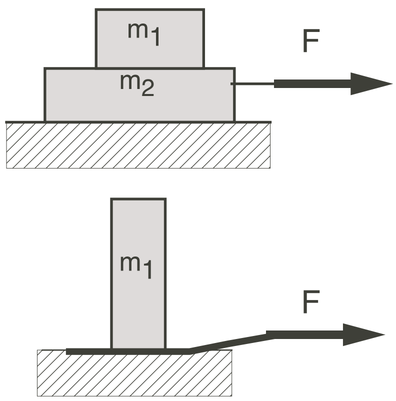
d) Haftung/Federkraft

An einem Quader (m=0.5 kg) wird mit einer Feder (Federkonst. k = 30 N/m) gezogen. Wie gross ist die Dehnung s der Feder und wie gross ist die Beschleunigung zum Zeitpunkt, in dem der Quader zu rutschen beginnt? Haftkoeff. μ_H = 0.6, Gleitreibungskoeff. μ_{gl} = 0.4, Temperatur $\vartheta = 20°C$. [A4]



c) "Trägheitsexperiment"

Am unteren Klotz resp. am Blatt unter dem Klotz wird mit der Kraft F gezogen.
Unter welchen Bedingungen bleibt der Klotz 1) in Bezug auf den unteren Klotz resp. das Blatt in Ruhe und unter welchen Bedingungen rutscht er?
Wie gross sind die resultierenden Beschleunigungen?
Wie gross muss die Kraft sein, damit das Blatt ohne Kippen des Klotzes weggezogen werden kann?
Gleit- und Haftkoeffizienten seien für alle berührenden Flächen gleich ($\mu_H > \mu_{gl}$).



e) Konisches Pendel

Eine Kugel der Masse m ist an einem Faden der Länge l aufgehängt und rotiert wie nebenan gezeichnet. Man berechne den Neigungswinkel ϑ in Funktion der Winkelgeschwindigkeit ω. Die Kugel ist als Punktmasse zu behandeln, die Masse des Faden wird vernachlässigt. [A5]

Resultat: $\cos\vartheta = g / (l \cdot \omega^2)$