

Synthetische Seismogramme für eine sphärisch
symmetrische, nichtrotierende Erde durch direkte
Berechnung der Greenschen Funktion

Diplomarbeit

von

Jörg Dalkolmo

Hauptbericht: Prof. Dr. rer. nat. E. Wielandt

Mitbericht: Prof. Dr. rer. nat. Dr. h. c. A. Seeger

Institut für Geophysik
Universität Stuttgart

Im Juli 1993

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	4
Konzept	4
Greensche Funktion	5
Das Erdmodell	6
I Herleitung der Bewegungsgleichungen	9
1 Bewegungsgleichung für eine SNRATI-Erde	10
1.1 Vektorielle Formulierung	10
1.1.1 Randbedingungen für Verschiebung, Spannung und Gravitationspotential	13
1.2 Komponentenweise Formulierung der Bewegungsgleichung	15
1.2.1 Die Bewegungsgleichung in krummlinigen Koordinaten	15
1.2.2 Die Bewegungsgleichung in Kugelkoordinaten	19
1.3 Die Spannungs–Dehnungs–Beziehung	22
1.3.1 Der Verzerrungstensor	22
1.3.2 Der Tensor der elastischen Konstanten	24
1.3.3 Berücksichtigung von Anelastizität	26
1.4 Zwischenbilanz	26
1.5 Skalare Formulierung der Bewegungsgleichungen	27
1.5.1 Skalare Repräsentation der Verschiebung und der anregenden Kraft . .	27
1.5.2 Sphäroidale und toroidale Bewegung	29
1.5.3 Kugelflächenfunktionsentwicklung der Skalare und Übergang zur Fouriertransformierten	30
1.5.4 Endgültige Form der Bewegungsgleichungen	32
2 Die Beschreibung der seismischen Quelle	35
2.1 Die anregende Kraft als Divergenz einer Momententensordichte	35
2.2 Berechnung der Quellterme	36

II Numerisches Lösen der Bewegungsgleichungen	41
3 Greensche Funktion mittels Kombination von Basislösungen an der Erdoberfläche	42
3.1 Allgemeine Form der Lösung des linearen Differentialgleichungssystems	42
3.1.1 Unstetigkeit der allgemeinen Lösung am Quellort	43
3.2 Anpassen der Lösung an die Randbedingungen	44
3.2.1 Bildung von Minoren aus linear unabhängigen Basislösungen	45
3.3 Startwerte für die numerische Integration	48
3.3.1 Start der Integration in einer flüssigen Schicht	50
3.3.2 Spezialfall $l = 0$	51
3.4 Fortsetzung der Lösungen an Grenzflächen	51
3.5 Der Bulirsch–Stoer–Integrationsalgorithmus	53
3.6 Testrechnung für eine Explosionsquelle	56
4 Direkte Integration der Greenschen Funktion vom Quellort zur Erdoberfläche	65
4.1 Anfangswerte für die Greensche Funktion am Quellort	65
4.2 Fall $l = 0$	68
4.3 Testrechnung für Explosionsquelle	69
5 Greensche Funktion mittels Kombination von Basislösungen am Quellort	71
5.1 Integration ausschließlich in Richtung Quellort	71
5.2 Fall $l = 0$	72
5.3 Testrechnung für Explosionsquelle	72
5.4 Rechnung für Frequenzen bis 100 mHz	75
6 Synthetische Seismogramme	78
6.1 Berechnung synthetischer Seismogramme	78
6.2 Gegenüberstellung mit gemessenen Seismogrammen	80
6.3 Vergleich mit Laufzeitkurven für das <i>iasp91</i> –Modell	81
6.4 Vergleich mit durch Überlagerung von Eigenschwingungen erzeugten Seismogrammen	89
6.5 Zusammenfassung für die Test– und Vergleichsrechnungen	89

Literaturhinweise	97
Danksagung	99
A Anhang	100
A.1 Güte Q und komplexe, elastische Parameter	101
A.2 Time-aliasing, was tun?	104
A.3 Verhalten der $P_l^m(\cos \vartheta)$ für $\vartheta \rightarrow 0$	106
A.4 Analytische Lösung für eine homogene, isotrope Erde	108

Einleitung

Konzept

In Abb. 1 sehen wir das Seismogramm eines Erdbebens vom 26.11.91, das sich um 19:40:53 Uhr in der Nähe von Hokkaido in einer Tiefe von ungefähr 46 km ereignete. Aufgezeichnet wurde dieses Seismogramm von der Regionalnetzstation TNS im Taunus, welche eine Epizentraldistanz von 80 Grad zum Epizentrum dieses Bebens besitzt. Wir sehen hier die Vertikal-Komponente der „Bodengeschwindigkeit“ in nm pro Sekunde. Die Aufzeichnungsdauer betrug in diesem Fall fast 2 Stunden.

Oft sind nur bestimmte Ausschnitte des Seismogramms von Interesse, z.B. der Einsatz und Amplitudenverlauf von Oberflächenwellen; oder nur eine kurze Zeitspanne nach dem Ersteinsatz, d.h. nach dem Eintreffen der p-Wellen. So könnte z.B. nur der bis zur Zeit T gekennzeichnete Abschnitt in Abb. 2 Gegenstand der Untersuchung sein.

Wollen wir versuchen, ein vollständiges Seismogramm oder einen Seismogrammabschnitt durch eine Modellrechnung künstlich zu erzeugen, benötigen wir zum einen die physikalischen Gleichungen, welche die Bewegung der Erde unter Einfluß eines bestimmten Kraftfeldes beschreiben, und zum anderen ein Erdmodell, in dem die Materialeigenschaften, die in die physikalischen Bewegungsgleichungen eingehen, spezifiziert sind.

Die Art, wie wir bei der Rechnung im Detail vorgehen, wird zum großen Teil durch das Erdmodell bestimmt, aber auch Länge und Form des von uns gewünschten Seismogramms spielen eine Rolle.

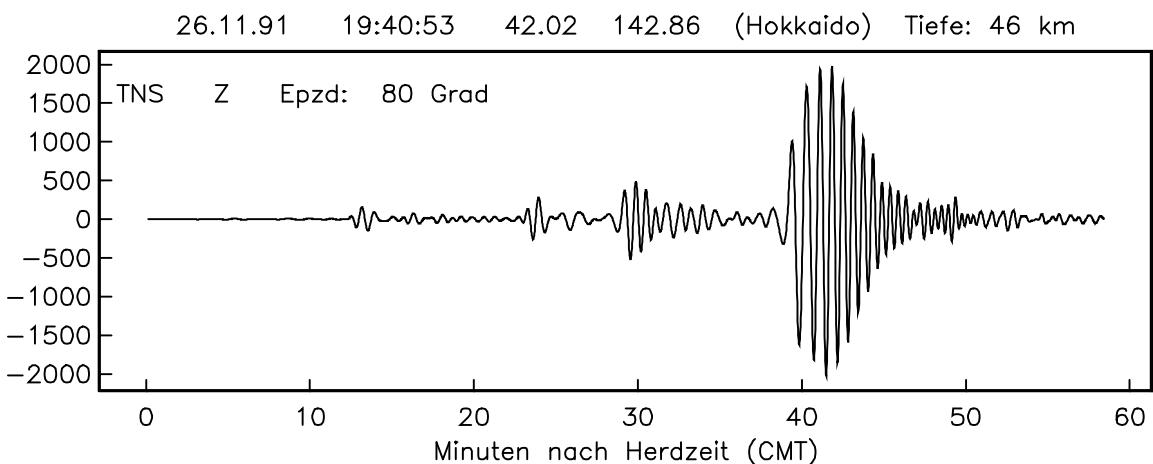


Abbildung 1: Seismogramm eines Bebens vom 26.11.91. Frequenzbereich 2–50 mHz. Auslenkung in nm/s.

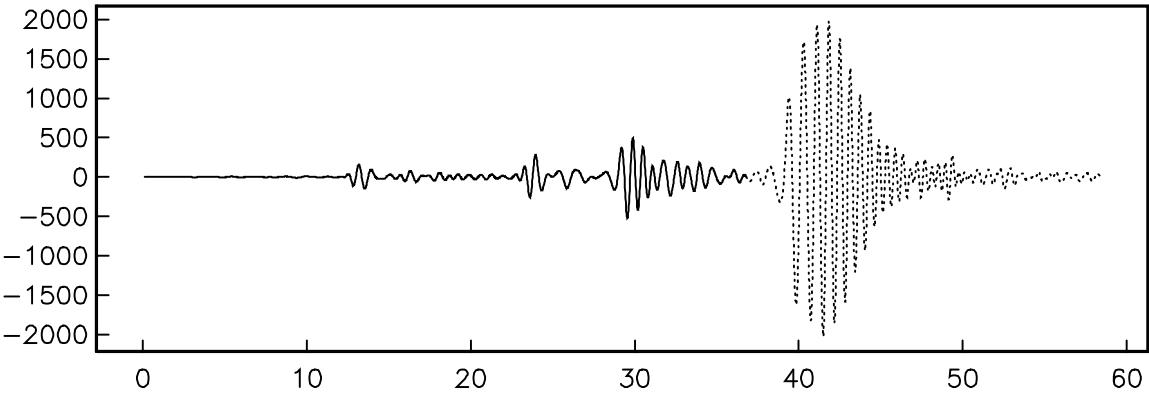


Abbildung 2: Seismogramm mit Zeitfenster von $t = 0$ bis $t = T$. Der gestrichelte Verlauf liegt außerhalb des Fensters ($t > T$).

Sei $f(t)$ ein solcher Seismogrammabschnitt und T dessen Länge. Denkt man sich $f(t)$ periodisch fortgesetzt, so läßt sich $f(t)$ in eine Fourierreihe folgender Form entwickeln:

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ a_n \cos \left(\frac{2\pi n}{T} t \right) + b_n \sin \left(\frac{2\pi n}{T} t \right) \right\} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{i \frac{2\pi n}{T} t}, \quad 0 \leq t < T. \end{aligned} \quad (1)$$

Können wir die Fourierkoeffizienten c_n bzw. a_n und b_n berechnen, ist unser Problem gelöst. Dazu überführen wir die Bewegungsgleichungen durch Fouriertransformation vom Zeit- in den Frequenzbereich. Aus der Fourierreihe lesen wir ab, daß wir nur für diskrete Frequenzen im Abstand $\Delta\nu = 1/T$ die Bewegungsgleichungen zu lösen, d.h. die Fourierkoeffizienten zu ermitteln brauchen. Um $f(t)$ für alle t aus $[0, T]$ zu erhalten, müssten wir bei unendlich vielen Frequenzstellen rechnen, was natürlich nicht möglich ist. Vielmehr wählen wir die Beobachtungsdauer T nicht allzu groß, so daß wir mit einem daraus resultierenden nicht allzu kleinen $\Delta\nu$ und genügend vielen Stellen $n\Delta\nu$ den wesentlichen Frequenzbereich des Signalausschnitts durchschreiten können. Da ein Seismogramm ein *transientes* (vorübergehendes) Signal darstellt, ist sein Spektrum nicht bandbegrenzt, d.h. alle Frequenzen sind im Spektrum vertreten. Wir können jedoch nur bis zu einer maximalen Frequenz ν_{max} rechnen. Um mit echten Seismogrammen vergleichen zu können, müssen deshalb in deren Spektren alle Frequenzen, die größer als ν_{max} sind, mit einem Filter ausgeblendet werden.

Grezsche Funktion

Um die Seismogramme zu berechnen, gehen wir von der Impulsbilanz der linearen Elastodynamik aus, d.h. wir betrachten die Bewegungen der Erde als kleine Auslenkung \mathbf{u} aus einem Gleichgewichtszustand, und nehmen einen linearen Zusammenhang zwischen Spannung und Dehnung an.

Nach Übergang von der vektoriellen Formulierung der Bewegungsgleichung auf Kugelkoordinaten erhalten wir partielle, gekoppelte Differentialgleichungen in r, ϑ, φ und t für die Kom-

ponenten der Auslenkung \mathbf{u} . Die Symmetrien unseres Erdmodells erlauben es uns jedoch mit Hilfe der sogenannten *skalaren Repräsentation* von \mathbf{u} und der die Bewegung verursachenden Kraftverteilung \mathbf{f} , die ϑ - und φ -Abhängigkeit durch eine Reihenentwicklung nach Kugelflächenfunktionen $Y_l^m(\vartheta, \varphi)$ darzustellen. Nach Fouriertransformation in den Frequenzraum muß nur noch ein lineares, inhomogenes Differentialgleichungssystem 1. Ordnung in r ,

$$\frac{d\mathbf{y}(r)}{dr} = \mathbf{A}(r) \cdot \mathbf{y}(r) + \mathbf{z}(r),$$

gelöst werden.

Als *Greensche Funktion* bezeichnet man in der Seismologie u.a. die Lösung der Bewegungsgleichung für die Erde mit gegebenen Randbedingungen bei Anwendung eines Kraftimpulses im räumlichen und zeitlichen Bereich:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{f}_0 \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \delta(t - t_0).$$

Wegen der Gesamtimpuls- und Gesamtdrehimpulserhaltung der Erde bei erdbebenverursachenden inneren Kraftfeldern können wir jedoch nicht eine Kraft in der obigen Form wählen, sondern werden spezielle Volumenkräfte annehmen, die dann auch auf Ableitungen der δ -Funktion führen (Friederich, 1992):

$$\mathbf{f} = -\nabla \cdot \mathbf{m}, \quad \mathbf{m} = \mathbf{M}(t) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0).$$

\mathbf{m} hat die Einheit eines Drehmoments pro Volumeneinheit, und wird deshalb auch *Momententensordichte* genannt. \mathbf{M} besitzt dann die Einheit eines Drehmoments, und wird in der Seismologie als der *Momententensor* bezeichnet.

Wir werden die Antwort $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ auf diese Kraftverteilung ebenfalls als Greensche Funktion bezeichnen.

In dieser Arbeit begnügen wir uns mit der Berechnung der Vertikalkomponente von \mathbf{u} , die wir dann sowohl mit tatsächlich gemessenen als auch mit auf andere Weise synthetisch erzeugten Seismogrammen vergleichen. Diese „Synthetics“ werden durch Überlagerung von Eigenschwingungen der Erde, auch *Moden* genannt, erzeugt. Dies ist eine wesentlich andere Methode, in welcher man nicht den Umweg über die Fouriertransformation, und damit alle mit ihr verbundenen Schwierigkeiten, zu machen braucht. Dafür benötigt man die Kenntnis aller Eigenfrequenzen und Eigenfunktionen der Erde bis zur maximalen zugelassenen Frequenz im Spektrum des Seismogramms.

Das Erdmodell

In der Herleitung der Bewegungsgleichung betrachten wir die Erde als einen sphärisch symmetrischen, **nicht rotierenden**, **anelastischen**, **transversal-isotropen** Körper (SNRATI-Erde). Zur konkreten Zahlendarstellung dieses Erdkörpers in den numerischen Rechnungen bedienen wir uns zweier leicht unterschiedlicher Modelle: Für den Vergleich der von uns erzeugten synthetischen Seismogramme mit den durch Überlagerung von Eigenschwingungen generierten benutzen wir *stuprem*, eine von uns etwas modifizierte Version des *Isotropic PREM*, des

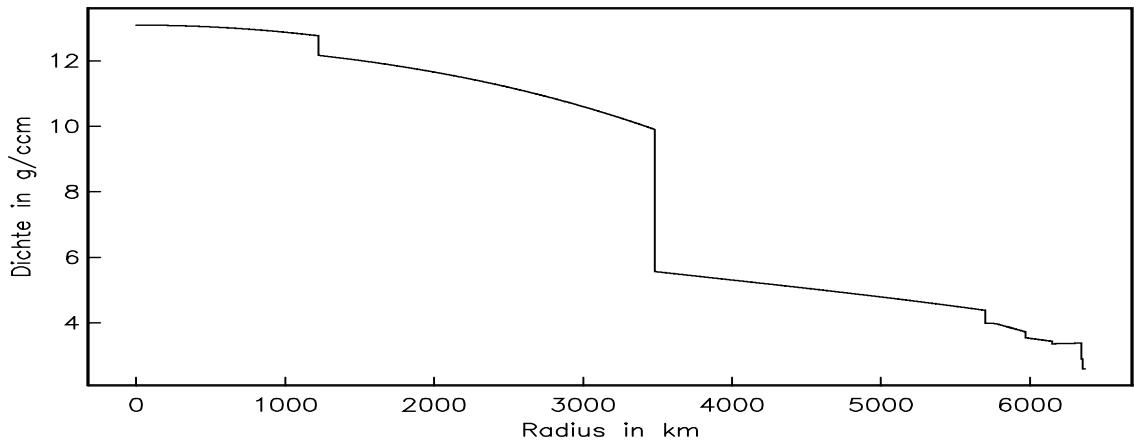


Abbildung 3: Radialer Verlauf der Dichte bei *PREM* in der von uns verwendeten Version ohne Ozean (*stutprem*).

Preliminary Reference Earth Model von A. M. Dziewonski und D. L. Anderson aus dem Jahre 1981 (Dziewonski u. Anderson, 1981). Die Originalausführung dieses Modells unterscheidet 12 radiale Schichten plus einer oben aufliegenden flüssigen Schicht zur Repräsentation der Ozeane. Wir berücksichtigen diese flüssige Schicht nicht, sondern dehnen die darunterliegende 12., feste Schicht um die Dicke der flüssigen auf den von uns verwendeten Betrag des Erdradius von $a = 6371$ km aus.

Wir verwenden das Modell in der parametrisierten Form. Hierbei sind Dichte ρ , P–Wellengeschwindigkeit α und S–Wellengeschwindigkeit β in insgesamt 12 radiale Schichten eingeteilt, in denen sie jeweils als Interpolationspolynome von maximalem Grad 3 dargestellt sind. Das Material wird in allen Schichten als isotrop angenommen, obwohl in unsere Bewegungsgleichung die allgemeinere Eigenschaft der *transversalen Isotropie* eingeht. Die anisotrope Version von PREM ist in der Weise etwas komplizierter aufgebaut, indem es im Bereich zwischen der Kruste und der Übergangszone vom oberen Mantel transversale Isotropie zuläßt.

Anelastisches Verhalten berücksichtigen wir in Form von Dämpfung, verknüpft mit dem Gütefaktor Q . Dieser kann von Schicht zu Schicht variieren, doch innerhalb einer Schicht soll er räumlich konstant und außerdem noch frequenzunabhängig sein, was dann allerdings zu frequenzabhängigen, komplexen Wellengeschwindigkeiten bzw. elastischen Konstanten führt (siehe Anhang A.1).

Die Abbildungen 3 und 4 geben einen Überblick über den radialen Verlauf von Dichte, P– und S–Wellengeschwindigkeit des oben beschriebenen Modells.

Das Modell, das wir den übrigen Berechnungen, vor allem auch denen für den Vergleich mit bestehenden Laufzeitkurven, zugrunde legen werden, geht aus den *iasp91*–Tabellen für die radiale Abhängigkeit von P– und S–Wellengeschwindigkeiten im Erdkörper hervor. Dieses Modell wurde zwischen 1988 und 1991 von einer Unterkommission der *International Association of Seismology and the Physics of Earth's Interior* (IASPEI) so konstruiert, daß die

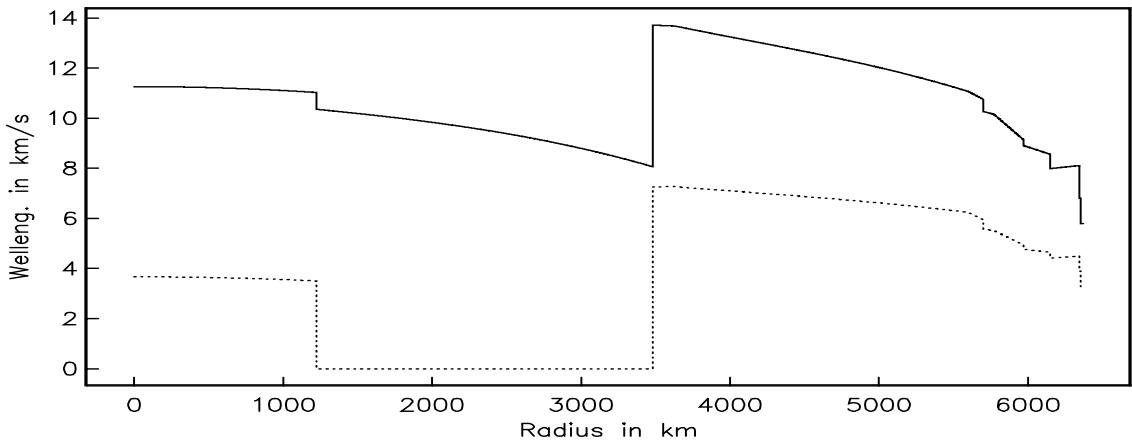


Abbildung 4: Radialer Verlauf der Wellengeschwindigkeiten bei *stutprem*. (···) S–Welleng. (—) P–Welleng.

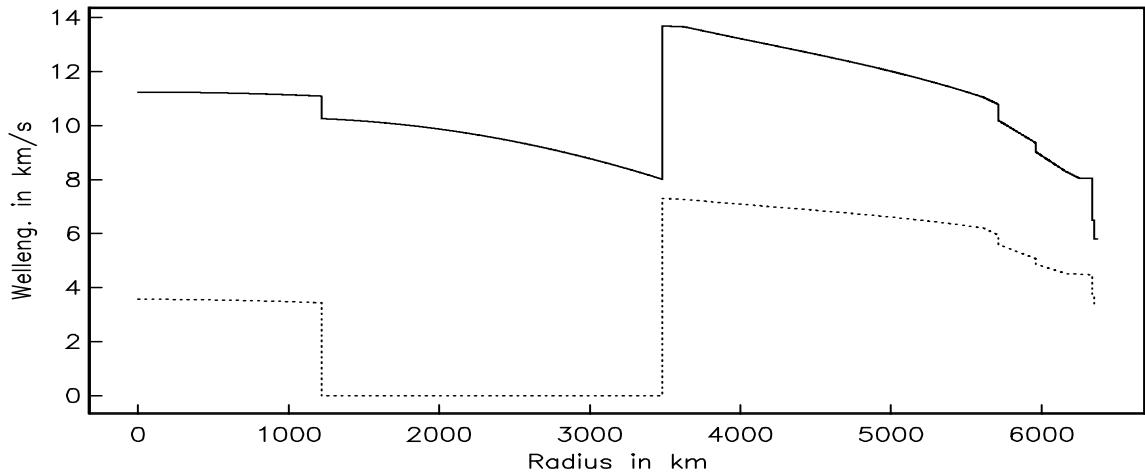


Abbildung 5: Radialer Verlauf der Wellengeschwindigkeiten bei *iasp91*. (···) S–Welleng. (—) P–Welleng.

Laufzeiten der wichtigsten seismischen Phasen mit jenen übereinstimmen, welche im Katalog des *International Seismological Centre* (ISC) für Ereignisse im Zeitraum von 1964–1987 berichtet werden. Als Autoren dieses Erdmodells sind zu nennen E. R. Engdahl, K. Toy, A. M. Dziewonski, A. Morelli, B. L. N. Kennett und R. Buland.

In der parametrisierten Form sind P–Wellengeschwindigkeit α und S–Wellengeschwindigkeit β in insgesamt 11 radiale Schichten eingeteilt, in denen sie wie bei *PREM* jeweils als Interpolationspolynome von maximalem Grad 3 dargestellt sind. Den Verlauf von Q und der Dichte ρ entnehmen wir *PREM* bzw. *stutprem*.

Die Abbildung 5 zeigt den radialen Verlauf von α und β des *iasp91*–Modells.

Teil I

Herleitung der Bewegungsgleichungen

Kapitel 1

Bewegungsgleichung für eine sphärisch symmetrische, nicht rotierende, anelastische, transversal-isotrope Erde

1.1 Vektorielle Formulierung

Wir nehmen an, daß in dem Zeitraum, in dem wir die Bewegung der Erde betrachten, keine Erdmasse verloren geht oder dazu kommt. Dann regelt die Kontinuitätsgleichung das Verhalten der Massendichte ρ :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\nabla \cdot (\rho \mathbf{v}), \quad (1.1)$$

\mathbf{v}Geschwindigkeit eines Masselements.

Unter Voraussetzung der Massenerhaltung lautet die Impulsbilanz der Kontinuumsmechanik in differentieller Schreibweise:

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{k} + \nabla \cdot \boldsymbol{\Sigma}. \quad (1.2)$$

Dabei ist

\mathbf{k}Volumenkraft

$\boldsymbol{\Sigma}$Spannungstensor.

Für die Erde teilen wir die Volumenkraft \mathbf{k} in zwei Beiträge auf:

$$\mathbf{k} = \rho \mathbf{g} + \mathbf{f}.$$

\mathbf{f} ist eine zusätzliche Volumenkraft, welche als Quellterm für elastische Wellen eine Rolle spielen wird, \mathbf{g} ist die Gravitationsbeschleunigung.

Definiert man \mathbf{g} als Gradienten eines Schwerepotentials:

$$\mathbf{g} = -\nabla \Phi, \quad (1.3)$$

so gilt für dieses die Poissons-Gleichung

$$\nabla^2 \Phi = 4\pi \gamma \rho. \quad (1.4)$$

Die Bewegungen des Erdkörpers betrachten wir als kleine Auslenkungen aus einem Gleichgewichtszustand mit $\mathbf{v} = 0$. In diesem soll sich die Erde wie eine ideale Flüssigkeit verhalten, die

nur unter dem Einfluß des eigenen Gewichts steht, d.h. $\mathbf{k} = \rho_0 \mathbf{g}_0$, wobei der Spannungstensor für eine ideale Flüssigkeit

$$\boldsymbol{\Sigma}_0 = -p_0 \mathbf{I} \quad (1.5)$$

ist, mit \mathbf{I} als dem Einheitstensor.

Das Gleichgewicht wird dann durch

$$\rho_0 \mathbf{g}_0 = \nabla p_0 \quad (1.6)$$

beschrieben.

Um kleine Auslenkungen aus dem Gleichgewichtszustand zu betrachten, wird die Verschiebung \mathbf{u} eingeführt:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(\xi, t) &= \mathbf{x}(\xi, t) - \xi \\ &\text{bzw.} \\ \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) &= \mathbf{x} - \xi(\mathbf{x}, t). \end{aligned}$$

ξ ist der Ortsvektor eines materiellen Punktes in einem möglichst geschickt gewählten Referenzzustand, im Fall der Erde am besten der Gleichgewichtszustand. Man nennt ξ auch den materiellen oder Lagrangeschen Ortsvektor, während \mathbf{x} als räumlicher oder Eulerscher Ortsvektor bezeichnet wird (Becker u. Bürger, 1990). Die zeitliche Ableitung in der Impulsbilanz ist zu verstehen als materielle oder substantielle Ableitung

$$\frac{d\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)}{dt} = \frac{\partial \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{x}}) \mathbf{v},$$

wobei $\nabla_{\mathbf{x}}$ der Nabla-Operator bezüglich der räumlichen Koordinate \mathbf{x} ist.

Für die Geschwindigkeit \mathbf{v} gilt

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \frac{d\mathbf{u}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{x}}) \mathbf{u}.$$

Kleine Verschiebungen bedeutet

$$\left| \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right| \ll 1. \quad (1.7)$$

Wir können die Impulsbilanz dann näherungsweise für \mathbf{u} formulieren:

$$\rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = \mathbf{f} - \rho \nabla \Phi + \nabla \cdot \boldsymbol{\Sigma}. \quad (1.8)$$

Für die nun benötigten Funktionen ρ , Φ und \mathbf{T} machen wir folgende Ansätze:

$$\begin{aligned} \rho(\mathbf{x}, t) &= \rho_0(\xi) + \rho_1(\mathbf{x}, t), \\ \Phi(\mathbf{x}, t) &= \Phi_0(\xi) + \psi(\mathbf{x}, t), \\ \boldsymbol{\Sigma}(\mathbf{x}, t) &= \boldsymbol{\Sigma}_0(\xi) + \mathbf{T}(\mathbf{x}, t), \end{aligned} \quad (1.9)$$

d.h. die neuen Werte am Ort \mathbf{x} sind die alten Werte vor der Deformation am Ort ξ plus ein kleiner Zusatzterm, der, da er von \mathbf{u} verursacht wird, *mindestens erster Ordnung* in \mathbf{u} ist.

Dies bedeutet, daß eine Funktion $h(\mathbf{u})$ — welche stetig differenzierbar von \mathbf{u} abhängt — in ihrer Potenzreihenentwicklung nach \mathbf{u} keinen Term 0. ter Ordnung besitzt:

$$h(\mathbf{u}) = (\mathbf{u} \cdot \nabla_u) h + \frac{1}{2!} (\mathbf{u} \cdot \nabla_u)^2 h + \dots$$

Wir entwickeln $\rho_0(\xi)$ bis zur ersten Ordnung in \mathbf{u} und setzen dann unseren Ansatz in die Kontinuitätsgleichung (1.1) ein, wobei wir gleich $\mathbf{v} \approx \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}$ annehmen werden. Wir erhalten

$$\frac{\partial}{\partial t} [\rho_0(\mathbf{x}) - \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla \rho_0 + \rho_1(\mathbf{x}, t)] = -\nabla \cdot \left[(\rho_0(\mathbf{x}) - \mathbf{u} \cdot \nabla \rho_0 + \rho_1) \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \right].$$

Vernachlässigung Terme höherer als erster Ordnung in \mathbf{u} führt mit $\frac{\partial \rho_0(\mathbf{x})}{\partial t} = 0$ zu

$$\rho_1(\mathbf{x}, t) = -\nabla \cdot (\rho_0 \mathbf{u}) + \mathbf{u} \cdot \nabla \rho_0,$$

wobei wir gefordert haben, daß $\rho_1(\mathbf{x}, t)$ keine statischen, d.h. nur vom Orte \mathbf{x} abhängigen, Terme enthalten soll.

Damit wird die Dichte zu

$$\rho(\mathbf{x}, t) = \rho_0(\mathbf{x}) - \nabla \cdot (\rho_0 \mathbf{u}). \quad (1.10)$$

Mit Hilfe des Ansatzes für das Potential schreiben wir die Poissons-Gleichung

$$\nabla^2(\Phi_0(\mathbf{x}) - \mathbf{u} \cdot \nabla \Phi_0 + \psi(\mathbf{x}, t)) = 4\pi\gamma(\rho_0(\mathbf{x}) - \nabla \cdot (\rho_0 \mathbf{u})).$$

Die Gleichgewichtsterme heben sich weg und wir erhalten mit der Definition

$$\phi(\mathbf{x}, t) \stackrel{\text{def}}{=} \psi(\mathbf{x}, t) - \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla \Phi_0 \quad (1.11)$$

die Poissons-Gleichung nur für ϕ :

$$\nabla^2 \phi(\mathbf{x}, t) = -4\pi\gamma \nabla \cdot (\rho_0 \mathbf{u}). \quad (1.12)$$

Der Spannungstensor hat, wenn man den von uns angenommenen Flüssigkeitscharakter der Erde im Gleichgewicht berücksichtigt, die Form

$$\Sigma(\mathbf{x}, t) = -p_0(\mathbf{x}) \mathbf{I} + (\mathbf{u} \cdot \nabla p_0) \mathbf{I} + \mathbf{T}(\mathbf{x}, t). \quad (1.13)$$

Wir setzen nun die Ansätze (1.9) nach obiger Bearbeitung in die Impulsbilanz (1.8) ein und linearisieren die resultierende Gleichung in \mathbf{u} :

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = \mathbf{f} - \rho_0 \nabla \Phi_0 + \nabla \cdot (\mathbf{u} \rho_0) \nabla \Phi_0 - \rho_0 \nabla \phi - \nabla p_0 + \nabla (\mathbf{u} \cdot \nabla p_0) + \nabla \cdot \mathbf{T}.$$

Die Gleichgewichtsterme heben sich weg und es bleibt übrig:

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = \mathbf{f} - \rho_0 \nabla \phi - \nabla \cdot (\mathbf{u} \rho_0) \mathbf{g}_0 + \nabla (\mathbf{u} \cdot \rho_0 \mathbf{g}_0) + \nabla \cdot \mathbf{T}. \quad (1.14)$$

1.1.1 Randbedingungen für Verschiebung, Spannung und Gravitationspotential

Die physikalischen Parameter in unserem Erdmodell sind im Bereich vom Erdmittelpunkt $r = 0$ bis zur Erdoberfläche $r = a$ keine stetigen Funktionen, sondern es treten immer wieder Schichtgrenzen auf, an welchen sich die Dichte oder die Wellengeschwindigkeiten sprunghaft ändern. Die in dem Zusammenhang wohl wichtigste „Schichtgrenze“ ist die Erdoberfläche, denn sie liefert uns die Randbedingungen für eine mögliche Lösung $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ unseres Problems. Außerdem können wir aus numerischen Gründen im Integrationsalgorithmus nicht einfach über diese Diskontinuitäten „hinwegintegrieren“, sondern werden jeweils von Schichtanfang bis Schichtende rechnen und dort die Lösung nach bestimmten Regeln zu Anfangswerten für die nächste Schicht kombinieren. Deshalb müssen wir nach dem Verhalten von Verschiebung, Spannung und Gravitationspotential an Grenzflächen fragen.

Für zwei Kontinua 1 und 2, welche durch eine Grenzfläche getrennt sind, die weder einen Knick hat, noch sich irgendwie faltet, gilt für die Geschwindigkeit dies- und jenseits der Grenzfläche

$$\mathbf{v}^{(1)}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{v}^{(2)}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}, t),$$

wobei \mathbf{n} eine Normale auf der Grenzfläche ist. Als Beispiel nennen wir den Übergang von einem flüssigen in ein festes Medium, bei dem die Tangentialkomponente der Geschwindigkeit \mathbf{v} , und damit auch die von \mathbf{u} nicht stetig zu sein braucht.

Wir schreiben hier \mathbf{x} , da die Randbedingungen auf der *deformierten* Grenzfläche gelten; dementsprechend muß die Normale auf dieser genommen werden. Sind die Kontinua miteinander „verschweißt“, gilt plausiblerweise

$$\mathbf{v}^{(1)} = \mathbf{v}^{(2)} \quad \sim \quad \mathbf{u}^{(1)} = \mathbf{u}^{(2)}. \quad (1.15)$$

Die Grenzfläche ist für unser Erdmodell im Gleichgewicht sphärisch, wir beschreiben sie dort im undeformierten Zustand zur Zeit $t = 0$ als

$$\Psi_0(r) = r - \xi_1 = 0 \quad \text{mit} \quad \xi_1 = \hat{\mathbf{r}} \cdot \boldsymbol{\xi}.$$

$\hat{\mathbf{r}}$ ist der Einheitsvektor in radialer Richtung.

Die zur Zeit $t > 0$ verschobene, radiale Position der Grenzfläche ist

$$\xi_1 + u_1(\boldsymbol{\xi}, t), \quad u_1 = \hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{u}.$$

Wir haben also

$$\Psi_t(r) = r - \xi_1 - u_1(\xi_1, \vartheta, \varphi, t).$$

Eine Normale auf dieser Grenzfläche ist

$$\nabla \Psi_t(r) = \hat{\mathbf{r}} - \frac{1}{\xi_1} \nabla_1 u_1 = \mathbf{n},$$

mit dem Oberflächengradienten

$$\nabla_1 \stackrel{\text{def}}{=} \hat{\boldsymbol{\vartheta}} \frac{\partial}{\partial \vartheta} + \frac{1}{\sin \vartheta} \hat{\boldsymbol{\varphi}} \frac{\partial}{\partial \varphi}.$$

$\hat{\vartheta}$ und $\hat{\varphi}$ sind die Einheitsvektoren in ϑ - und φ -Richtung.

Vernachlässigung der Terme höherer als 1. Ordnung in \mathbf{u} liefert

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{n} \approx \hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}} = 1,$$

d.h. \mathbf{n} ist in 1. Ordnung ein Einheitsvektor.

Wir können also näherungsweise sagen:

$$\begin{aligned}\mathbf{n} \cdot \mathbf{v} &= \mathbf{n} \cdot \frac{d\mathbf{u}}{dt} \\ &= \left(\hat{\mathbf{r}} - \frac{1}{\xi_1} \nabla_1 u_1 \right) \cdot \frac{d\mathbf{u}}{dt} \\ &\approx \hat{\mathbf{r}} \cdot \frac{d\mathbf{u}}{dt} \quad \text{stetig},\end{aligned}$$

und damit auch

$$\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{u} = u_1 \quad \text{stetig}.$$

Für die Spannung findet man die Bedingung

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{T}^{(1)} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{T}^{(2)},$$

d.h. die Spannungsvektoren an der Grenzfläche müssen stetig sein. Im Fall einer *freien Oberfläche* ist $\mathbf{T}^{(2)}$ gleich Null, dies liefert eine unserer Randbedingungen. Näherungsweise haben wir auch hier

$$\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{T} \quad \text{stetig}.$$

Um das Verhalten des Gravitationspotential zu ergründen, integrieren wir die Poissonsleichung über ein kleines, zylinderförmiges Volumen, welches von der Grenzfläche in zwei Hälften geteilt wird, und machen dann Gebrauch vom *Gaußschen Integralsatz*:

$$\iiint_{V_Z} \nabla^2 \Phi dV = \iint_{A_Z} \nabla \Phi \cdot d\mathbf{A} = 4\pi\gamma \iiint_{V_Z} \rho dV.$$

Lassen wir die Höhe des Zylinders gegen Null gehen, verschwindet das rechte Integral, und es bleibt das Integral über die Zylinderdeckflächen übrig, woraus wir erhalten:

$$\mathbf{n} \cdot \nabla \Phi^{(1)} = \mathbf{n} \cdot \nabla \Phi^{(2)}, \tag{1.16}$$

oder anders ausgedrückt

$$\frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial \mathbf{n}} = \frac{\partial \Phi^{(2)}}{\partial \mathbf{n}},$$

mit der *Richtungsableitung* $\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} := \mathbf{n} \cdot \nabla$.

Wenn die Ableitung von Φ in Richtung \mathbf{n} stetig sein muß, muß dies auch Φ selbst in dieser Richtung sein. Wir hatten $\Phi = \Phi_0 + \phi$. Da Φ_0 eine stetige Funktion ist, muß also auch ϕ stetig sein.

Wir schreiben für $\nabla\Phi$ auf der deformierten Grenzfläche

$$\begin{aligned}\nabla\Phi(\mathbf{x}, t) &= \nabla\Phi_0(\mathbf{x}) + \nabla\phi(\mathbf{x}, t) \\ &= \nabla\Phi_0(\boldsymbol{\xi} + \mathbf{u}(\boldsymbol{\xi}, t)) + \nabla\phi(\boldsymbol{\xi} + \mathbf{u}(\boldsymbol{\xi}, t), t) \\ &= \hat{\mathbf{r}}g_0(\xi_1 + u_1(\boldsymbol{\xi}, t)) + \nabla\phi \\ &\approx \hat{\mathbf{r}}g_0(\xi_1) + \hat{\mathbf{r}}u_1(\boldsymbol{\xi}, t)\frac{dg_0(r)}{dr}\Big|_{r=\xi_1} + \nabla\phi.\end{aligned}$$

Daß u_1 stetig ist wissen wir; wegen $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\boldsymbol{\xi}, t)$ und somit $\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\xi}(\mathbf{u})$, müssen wir auch nach dem Verhalten von $g_0(\xi_1)$ fragen. Dieses selbst ist stetig; dg_0/dr ersetzen wir mittels der Poissongleichung durch

$$\frac{dg_0}{dr} = 4\pi\gamma\rho_0 - \frac{2}{r}g_0. \quad (1.17)$$

Wir erhalten dann für die Randbedingung $\mathbf{n} \cdot \nabla\Phi$ stetig:

$$\mathbf{n}(\mathbf{x}, t) \cdot [\hat{\mathbf{r}}u_1(\xi_1, t)4\pi\gamma\rho_0(\xi_1, t) + \nabla\phi(\mathbf{x}, t)] \quad \text{stetig.}$$

Berücksichtigt man nur Terme 1. Ordnung in \mathbf{u} , kann man schreiben

$$\phi(\mathbf{x}, t) \approx \phi(\boldsymbol{\xi}, t).$$

Lassen wir wieder alle nichtlinearen Terme in \mathbf{u} fort, erhalten wir schließlich mit $\mathbf{n} \approx \hat{\mathbf{r}}$ für das Gravitationspotential ϕ die Randbedingung

$$\frac{\partial\phi(\boldsymbol{\xi}, t)}{\partial r} + 4\pi\gamma\rho_0(\xi_1)u_1(\boldsymbol{\xi}, t) \quad \text{stetig} \quad (1.18)$$

auf der undeformierten Grenzfläche.

1.2 Komponentenweise Formulierung der Bewegungsgleichung

1.2.1 Die Bewegungsgleichung in krummlinigen Koordinaten

Wir werden nun die Bewegungsgleichung in unserem Erdmodell angepassten sphärischen Koordinaten formulieren. Dazu müssen wir alle vektoriellen und tensoriellen Größen bezüglich der Basisvektoren des Kugelkoordinatensystems darstellen.

Zunächst nehmen wir beliebige, krummlinige Koordinaten $\Theta^1, \Theta^2, \Theta^3$ als gegeben an (Klingbeil, 1989). Die Verschiebung \mathbf{u} schreiben wir dann

$$\mathbf{u} = u^i \mathbf{b}_i. \quad (1.19)$$

Wir benützen die **Summationskonvention**, die besagt, daß über in einem Produkt paarweise auftretende Indizes automatisch summiert wird.

u^i mit obenstehendem Index heißen *kontravariante* Komponenten des Vektors \mathbf{u} . \mathbf{b}_i mit untenstehendem Index heißen *kovariante* Basisvektoren. Ist \mathbf{R} der Ortsvektor als Funktion der Koordinaten Θ^i , $i = 1, 2, 3$ gegeben, so gilt für die \mathbf{b}_i

$$\mathbf{b}_i = \frac{\partial \mathbf{R}(\Theta^1, \Theta^2, \Theta^3)}{\partial \Theta^i}. \quad (1.20)$$

In Kugelkoordinaten r, ϑ, φ lautet \mathbf{R}

$$\mathbf{R}(r, \vartheta, \varphi) = r \sin \vartheta \cos \varphi \mathbf{e}_x + r \sin \vartheta \sin \varphi \mathbf{e}_y + r \cos \vartheta \mathbf{e}_z, \quad (1.21)$$

mit den kartesischen Einheitsvektoren $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$. Wir identifizieren

$$\begin{aligned} \Theta^1 &\rightarrow r \\ \Theta^2 &\rightarrow \vartheta \\ \Theta^3 &\rightarrow \varphi, \end{aligned}$$

und erhalten

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_1 &= \sin \vartheta \cos \varphi \mathbf{e}_x + \sin \vartheta \sin \varphi \mathbf{e}_y + \cos \vartheta \mathbf{e}_z \\ \mathbf{b}_2 &= r \cos \vartheta \cos \varphi \mathbf{e}_x + r \cos \vartheta \sin \varphi \mathbf{e}_y - r \sin \vartheta \mathbf{e}_z \\ \mathbf{b}_3 &= -r \sin \vartheta \sin \varphi \mathbf{e}_x + r \sin \vartheta \cos \varphi \mathbf{e}_y. \end{aligned} \quad (1.22)$$

Wichtig ist zu bemerken, daß die Basisvektoren in obiger Form nicht normiert sind, dies müssen wir bei den Komponenten von Vektoren berücksichtigen.

Der Spannungstensor \mathbf{T} hat die Darstellung

$$\mathbf{T} = T^{kl} \mathbf{b}_k \mathbf{b}_l, \quad (1.23)$$

wobei $\mathbf{b}_k \mathbf{b}_l$ ein tensorielles oder dydisches Produkt bedeutet.

Der Nabla-Operator in krummlinigen Koordinaten lautet

$$\nabla = \mathbf{b}^i \frac{\partial}{\partial \Theta^i}. \quad (1.24)$$

\mathbf{b}^i mit obenstehendem Index heißen *kontravariante* Basisvektoren. Zwischen ihnen und den kovarianten Basisvektoren gilt folgende Beziehung

$$\mathbf{b}^k \cdot \mathbf{b}_l = \delta_l^k, \quad (1.25)$$

mit δ_l^k als dem bekannten Kroneckersymbol. Die \mathbf{b}^k werden auch als *reziprokes Dreibein* bezeichnet.

Wir betrachten jetzt den Term $\nabla \cdot (\rho_0 \mathbf{u}) \mathbf{g}_0$ in Gleichung (1.14) und setzen hierin die Darstellungen

$$\nabla = \mathbf{b}^k \frac{\partial}{\partial \Theta^k}, \quad \mathbf{u} = u^i \mathbf{b}_i, \quad \mathbf{g}_0 = g_0^j \mathbf{b}_j \quad (1.26)$$

ein. Er lautet dann

$$\mathbf{b}^k \cdot \frac{\partial}{\partial \Theta^k} (\rho_0 u^i \mathbf{b}_i) g_0^j \mathbf{b}_j = \mathbf{b}^k \cdot \left[\frac{\partial \rho_0}{\partial \Theta^k} u^i \mathbf{b}_i + \rho_0 \frac{\partial u^i}{\partial \Theta^k} \mathbf{b}_i + \rho_0 u^i \frac{\partial \mathbf{b}_i}{\partial \Theta^k} \right] g_0^j \mathbf{b}_j.$$

Als Abkürzung schreiben wir die Ableitung nach den krummlinigen Koordinaten

$$\frac{\partial}{\partial \Theta^k} (\quad) = (\quad)_{,k}.$$

Wir beachten die Orthogonalität (1.25) der ko- und kontravarianten Basisvektoren, und fahren fort mit

$$\nabla \cdot (\rho_0 \mathbf{u}) \mathbf{g}_0 = (\rho_{0,k} u^k + \rho_0 u^k_{,k} + \rho_0 u^i \mathbf{b}^k \cdot \mathbf{b}_{i,k}) g_0^j \mathbf{b}_j.$$

Die Ableitungen der Basisvektoren $\mathbf{b}_{i,k}$ findet man zu

$$\mathbf{b}_{i,k} = \Gamma_{ik}^j \mathbf{b}_j. \quad (1.27)$$

Die Γ_{ik}^j heißen *Christoffelsymbole 2. Art*, und sind definiert als

$$\Gamma_{ik}^j = \frac{\partial \Theta^j}{\partial x^m} \frac{\partial^2 x^m}{\partial \Theta^i \partial \Theta^k}. \quad (1.28)$$

Mit obigen Definitionen bekommen wir

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\rho_0 \mathbf{u}) \mathbf{g}_0 &= (\rho_{0,k} u^k + \rho_0 u^k_{,k} + \rho_0 \Gamma_{ik}^k u^i) g_0^j \mathbf{b}_j \\ &= (\rho_{0,k} u^k + \rho_0 u^k|_k) g_0^j \mathbf{b}_j. \end{aligned} \quad (1.29)$$

Allgemein gilt für die Ableitung eines Vektors

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \Theta^k} \mathbf{x} = \mathbf{x}_{,k} &= x^i_{,k} \mathbf{b}_i + x^i \mathbf{b}_{i,k} \\ &= x^i_{,k} \mathbf{b}_i + x^i \Gamma_{ik}^j \mathbf{b}_j. \end{aligned}$$

Wir vertauschen im 2. Summanden die Indizes i und j, und können dann schreiben

$$\mathbf{x}_{,k} = x^i|_k \mathbf{b}_i, \quad (1.30)$$

mit der *kovarianten Ableitung*

$$x^i|_k = x^i_{,k} + \Gamma_{jk}^i x^j. \quad (1.31)$$

Der 4. Term in der Impulsbilanz (1.14) lautet $\nabla(\rho_0 \mathbf{u} \cdot \mathbf{g}_0)$. Mit den obigen Darstellungen (1.26) wird daraus

$$\mathbf{b}^k \frac{\partial}{\partial \Theta^k} (\rho_0 u^i g_0^j \mathbf{b}_i \cdot \mathbf{b}_j) = \mathbf{b}^k \frac{\partial}{\partial \Theta^k} (\rho_0 u^i g_0^j b_{ij}).$$

Die Größen $b_{ij} = \mathbf{b}_i \cdot \mathbf{b}_j$ heißen *kovariante Metrikkoeffizienten*, als Matrix geschrieben bilden sie den *kovarianten Metriktenensor*.

Wir können dann schreiben

$$\nabla(\rho_0 \mathbf{u} \cdot \mathbf{g}_0) = (\rho_0 u^i g_0^j b_{ij})_{,k} \mathbf{b}^k. \quad (1.32)$$

Die Divergenz des Spannungstensors lautet

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{T} &= \mathbf{b}^k \cdot \frac{\partial}{\partial \Theta^k} (\mathbf{T}^{lm} \mathbf{b}_l \mathbf{b}_m) \\ &= \mathbf{b}^k \cdot (\mathbf{T}^{lm}_{,k} \mathbf{b}_l \mathbf{b}_m + \mathbf{T}^{lm} \mathbf{b}_{l,k} \mathbf{b}_m + \mathbf{T}^{lm} \mathbf{b}_l \mathbf{b}_{m,k}). \end{aligned}$$

Wir verwenden die Christoffelsymbole, und erhalten dann

$$\nabla \cdot \mathbf{T} = T^{jk}|_k \mathbf{b}_j, \quad (1.33)$$

wobei

$$T^{ij}|_k = T_{,k}^{ij} + \Gamma_{km}^i T^{mj} + \Gamma_{km}^j T^{im}. \quad (1.34)$$

Nun formulieren wir die Bewegungsgleichung mit den obigen Notationen (1.26), (1.29), (1.32) und (1.33):

$$\begin{aligned} \rho_0 \frac{\partial^2 u^j \mathbf{b}_j}{\partial t^2} &= f^j \mathbf{b}_j - \rho_0 \mathbf{b}^j \phi_{,j} - (\rho_0 u^k + \rho_0 u^k|_k) g_0^j \mathbf{b}_j \\ &\quad + (\rho_0 u^k g_0^l b_{kl})_{,j} \mathbf{b}^j + T^{jk}|_k \mathbf{b}_j. \end{aligned}$$

Um die Bewegungsgleichung für jede Komponente getrennt zu formulieren, benutzen wir die Beziehung (1.25), d.h. wir multiplizieren obige Formel mit \mathbf{b}^i und bekommen

$$\begin{aligned} \rho_0 \frac{\partial^2 u^i}{\partial t^2} &= f^i - \rho_0 b^{ij} \phi_{,j} - (\rho_0 u^k + \rho_0 u^k|_k) g_0^i \\ &\quad + (\rho_0 u^k g_0^l b_{kl})_{,j} b^{ij} + T^{ik}|_k. \end{aligned} \quad (1.35)$$

Die *kontravarianten Metrikkoeffizienten*

$$b^{ij} = \mathbf{b}^i \cdot \mathbf{b}^j$$

bilden analog zu den kovarianten Metrikkoeffizienten den kontravarianten Metrikensor, welcher aus dem kovarianten Metrikensor durch Inversion hervorgeht:

$$(b^{ij}) = (b_{kl})^{-1}. \quad (1.36)$$

Die Poissons-Gleichung lautet in Vektorkomponenten geschrieben:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \phi &= \nabla \cdot (\nabla \phi) = \mathbf{b}^i \cdot \frac{\partial}{\partial \Theta^i} \left(\mathbf{b}^j \frac{\partial \phi}{\partial \Theta^j} \right) \\ &= \mathbf{b}^i \cdot \mathbf{b}_{,i}^j \phi_{,j} + b^{ij} \phi_{,i,j} = -4\pi\gamma \mathbf{b}^i \cdot (\rho_0 \mathbf{u}),_i. \end{aligned} \quad (1.37)$$

Die Ableitungen der kontravarianten Basisvektoren \mathbf{b}^j nach den krummlinigen Koordinaten Θ^i werden berechnet durch

$$\mathbf{b}_{,l}^k = -\Gamma_{lm}^k \mathbf{b}^m. \quad (1.38)$$

Damit lautet die Poissons-Gleichung ausführlich

$$b^{ij} \phi_{i,j} - \Gamma_{ik}^j b^{ik} \phi_j = -4\pi\gamma (\rho_{0,i} u^i + \rho_0 u^i|_i). \quad (1.39)$$

1.2.2 Die Bewegungsgleichung in Kugelkoordinaten

In Kugelkoordinaten lautet der kovariante Metriktensor

$$(b_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \sin^2 \vartheta \end{pmatrix}. \quad (1.40)$$

Der kontravariante Metriktensor ergibt sich daraus durch Invertieren:

$$(b^{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} \end{pmatrix}. \quad (1.41)$$

Anstatt mit der etwas schwerfälligen Formel (1.28) kann man die Christoffelsymbole auch mit Hilfe der Metrikoeffizienten berechnen:

$$\Gamma_{lm}^k = \frac{1}{2} b^{kn} (b_{mn,l} + b_{nl,m} - b_{lm,n}). \quad (1.42)$$

Das Ergebnis der Rechnung nach Formel (1.42) schreiben wir als 3×3 -Matrizen der Form

$$\begin{aligned} (\Gamma_{ij}^1) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -r & 0 \\ 0 & 0 & -r \sin^2 \vartheta \end{pmatrix}, & (\Gamma_{ij}^2) &= \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{r} & 0 \\ \frac{1}{r} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sin \vartheta \cos \vartheta \end{pmatrix}, \\ (\Gamma_{ij}^3) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{r} \\ 0 & 0 & \cot \vartheta \\ \frac{1}{r} & \cot \vartheta & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (1.43)$$

Mit den Metriktenoren und den Christoffelsymbolen haben wir alles was wir brauchen, um die Bewegungsgleichung bezüglich r, ϑ und φ zu formulieren. Eine Vereinfachung ergibt sich dadurch, daß für die Gleichgewichtsgrößen gilt

$$\begin{aligned} \rho_0 &= \rho_0(r) \\ \mathbf{g}_0 &= -g_0(r)\mathbf{b}_1 = -g_0(r)\hat{\mathbf{r}} \\ \text{d.h. } g_0^1 &= -g_0(r). \end{aligned}$$

In der Bewegungsgleichung für u^r tritt noch ein Term dg_0/dr auf, den wir durch Ausdrücke ersetzen können, die keine Ableitungen von \mathbf{g}_0 enthalten. Wir erinnern uns an die Poisson-Gleichung im hydrostatischen Gleichgewicht

$$\nabla^2 \Phi_0 = -\nabla \cdot \mathbf{g}_0 = 4\pi\gamma\rho_0.$$

Da \mathbf{g}_0 nur von r abhängt, finden wir

$$\frac{\partial g_0}{\partial r} = \frac{dg_0}{dr} = 4\pi\gamma\rho_0 - \frac{2}{r}g_0. \quad (1.44)$$

Für die kovarianten Ableitungen $u^k|_k$ und $T^{ik}|_k$ haben wir die Formeln (1.31) und (1.33); mit ihnen erhalten wir für die r -Komponente:

$$\begin{aligned} \rho_0 \frac{\partial^2 u^r}{\partial t^2} &= f^r - \rho_0 \frac{\partial \phi}{\partial r} - 4\pi\gamma\rho_0^2 u^r + \rho_0 g_0 \left(\frac{\partial u^\vartheta}{\partial \vartheta} + \frac{\partial u^\varphi}{\partial \varphi} + \frac{4}{r} u^r + u^\vartheta \cot \vartheta \right) \\ &\quad + \frac{\partial T^{rr}}{\partial r} + \frac{\partial T^{r\vartheta}}{\partial \vartheta} + \frac{\partial T^{r\varphi}}{\partial \varphi} \\ &\quad - r T^{\vartheta\vartheta} - T^{\varphi\varphi} r \sin^2 \vartheta + \frac{2}{r} T^{rr} + T^{r\vartheta} \cot \vartheta. \end{aligned} \quad (1.45)$$

Die Gleichung für die ϑ -Komponente lautet:

$$\begin{aligned} \rho_0 \frac{\partial^2 u^\vartheta}{\partial t^2} &= f^\vartheta - \frac{\rho_0}{r^2} \frac{\partial \phi}{\partial \vartheta} - \frac{\rho_0 g_0}{r^2} \frac{\partial u^r}{\partial \vartheta} + \frac{\partial T^{r\vartheta}}{\partial r} + \frac{\partial T^{\vartheta\vartheta}}{\partial \vartheta} \\ &\quad + \frac{\partial T^{\vartheta\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{4}{r} T^{r\vartheta} - T^{\varphi\varphi} \sin \vartheta \cos \vartheta + T^{\vartheta\vartheta} \cot \vartheta. \end{aligned} \quad (1.46)$$

Und schließlich erhalten wir für die φ -Komponente:

$$\begin{aligned} \rho_0 \frac{\partial^2 u^\varphi}{\partial t^2} &= f^\varphi - \frac{\rho_0}{r^2 \sin^2 \vartheta} \frac{\partial \phi}{\partial \varphi} - \frac{\rho_0 g_0}{r^2 \sin^2 \vartheta} \frac{\partial u^r}{\partial \varphi} + \frac{\partial T^{r\varphi}}{\partial r} \\ &\quad + \frac{\partial T^{\vartheta\varphi}}{\partial \vartheta} + \frac{\partial T^{\varphi\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{4}{r} T^{r\varphi} + 3 T^{\vartheta\varphi} \cot \vartheta. \end{aligned} \quad (1.47)$$

Die Poissongleichung (1.39) wird nach Einsetzen der Christoffelsymbole (1.43) und der Metrikoeffizienten (1.40), (1.41) zu

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \vartheta^2} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \varphi^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{\cot \vartheta}{r^2} \frac{\partial \phi}{\partial \vartheta} = \\ = -4\pi\gamma \left[u^r \frac{\partial \rho_0}{\partial r} + \rho_0 \left(\frac{\partial u^r}{\partial r} + \frac{\partial u^\vartheta}{\partial \vartheta} + \frac{\partial u^\varphi}{\partial \varphi} + \frac{2}{r} u^r + u^\vartheta \cot \vartheta \right) \right]. \end{aligned} \quad (1.48)$$

Wir hatten bereits bei der Einführung unserer Basisvektoren des Kugelkoordinatensystems darauf hingewiesen, daß diese Basisvektoren \mathbf{b}_i ihrer Definition nach nicht von vorneherein normiert zu sein brauchen. Die Länge eines Vektors läßt sich dann aber nicht allein aus den Komponenten ausrechnen; soll dies der Fall sein, müssen wir auf normierte Basisvektoren übergehen.

Ein normierter Basisvektor ist dann z.B.

$$\hat{\mathbf{b}}_1 = \frac{1}{|\mathbf{b}_1|} \mathbf{b}_1 = \frac{1}{\sqrt{b_{11}}} \mathbf{b}_1. \quad (1.49)$$

Für die Einheitsvektoren in r -, ϑ - und φ -Richtung verwenden wir auch die Schreibweise

$$\hat{\mathbf{b}}_1 \stackrel{\text{def}}{=} \hat{\mathbf{r}}, \quad \hat{\mathbf{b}}_2 \stackrel{\text{def}}{=} \hat{\boldsymbol{\vartheta}}, \quad \hat{\mathbf{b}}_3 \stackrel{\text{def}}{=} \hat{\boldsymbol{\varphi}}. \quad (1.50)$$

Hat die Verschiebung \mathbf{u} die Darstellung

$$\mathbf{u} = u^i \mathbf{b}_i = \hat{u}^j \hat{\mathbf{b}}_j, \quad (1.51)$$

sehen wir daraus, daß die Komponenten bezüglich normierter Basisvektoren aus den Komponenten bezüglich nicht normierter Basisvektoren durch folgende Beziehung hervorgehen:

$$u^i = \frac{\hat{u}^i}{\sqrt{b_{(ii)}}}. \quad (1.52)$$

Die Klammer um die Indizes bedeutet, daß hier nicht über i summiert wird.

Wir haben also in allen bereits abgeleiteten Formeln die obige Beziehung, sowie

$$T^{ij} = \frac{\hat{T}^{ij}}{\sqrt{b_{(ii)}}\sqrt{b_{(jj)}}} \quad (1.53)$$

einzusetzen. Danach werden wir alle Gleichungen in der neuen Form hinschreiben, jedoch das Dach '̂' auf den Komponenten weglassen, um die Buchstaben nicht mit Indizes und Akzenten zu überfrachten. Wir wollen aber betonen, daß es sich nun um *Vektor- und Tensorkomponenten bezüglich einer normierten Basis* handelt.

Als erstes folgt die Bewegungsgleichung für die r -Komponente der Verschiebung:

$$\begin{aligned} \rho_0 \frac{\partial^2 u^r}{\partial t^2} &= f^r + \frac{\rho_0 g_0}{r} \left(\frac{\partial u^\vartheta}{\partial \vartheta} + \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial u^\varphi}{\partial \varphi} + 4u^r + u^\vartheta \cot \vartheta \right) \\ &\quad - 4\pi\gamma\rho_0^2 u^r - \rho_0 \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{\partial T^{rr}}{\partial r} + \frac{2}{r} T^{rr} + \frac{1}{r} \frac{\partial T^{r\vartheta}}{\partial \vartheta} \\ &\quad + \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial T^{r\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} T^{r\vartheta} \cot \vartheta - \frac{1}{r} (T^{\vartheta\vartheta} + T^{\varphi\varphi}). \end{aligned} \quad (1.54)$$

Die Gleichung für u^ϑ hat folgende Form:

$$\begin{aligned} \rho_0 \frac{\partial^2 u^\vartheta}{\partial t^2} &= f^\vartheta - \frac{\rho_0}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \vartheta} - \frac{\rho_0 g_0}{r} \frac{\partial u^r}{\partial \vartheta} + \frac{\partial T^{r\vartheta}}{\partial r} + \frac{3}{r} T^{r\vartheta} \\ &\quad + \frac{1}{r} \frac{\partial T^{\vartheta\vartheta}}{\partial \vartheta} + \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial T^{\vartheta\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\cot \vartheta}{r} (T^{\vartheta\vartheta} - T^{\varphi\varphi}). \end{aligned} \quad (1.55)$$

Als drittes die Gleichung für u^φ :

$$\begin{aligned} \rho_0 \frac{\partial^2 u^\varphi}{\partial t^2} &= f^\varphi - \frac{\rho_0}{r \sin \vartheta} \frac{\partial \phi}{\partial \varphi} - \frac{\rho_0 g_0}{r \sin \vartheta} \frac{\partial u^r}{\partial \varphi} + \frac{\partial T^{r\varphi}}{\partial r} + \frac{3}{r} T^{r\varphi} \\ &\quad + \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial T^{\vartheta\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} \frac{\partial T^{\vartheta\varphi}}{\partial \vartheta} + \frac{2 \cot \vartheta}{r} T^{\vartheta\varphi}. \end{aligned} \quad (1.56)$$

Zum Schluß führen wir noch die Poissongleichung auf:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \vartheta^2} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \varphi^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{\cot \vartheta}{r^2} \frac{\partial \phi}{\partial \vartheta} &= \\ = -4\pi\gamma \left[u^r \frac{\partial \rho_0}{\partial r} + \rho_0 \left(\frac{\partial u^r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u^\vartheta}{\partial \vartheta} + \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial u^\varphi}{\partial \varphi} + \frac{2}{r} u^r + \frac{\cot \vartheta}{r} u^\vartheta \right) \right]. \end{aligned} \quad (1.57)$$

Um mit der Untersuchung der obigen Gleichungen fortfahren zu können, benötigen wir die *Spannungs–Dehnungs–Beziehung* $\mathbf{T} = \mathbf{T}(\mathbf{u}, t)$.

1.3 Die Spannungs–Dehnungs–Beziehung

1.3.1 Der Verzerrungstensor

Als Zusammenhang $\mathbf{T}(\mathbf{u})$ verwenden wir die Spannungs–Dehnungs–Beziehung (SDB) für elastisches Material. Betrachten wir hierzu die elastische Verzerrungsenergie W , wie sie z.B. in einer gespannten Feder oder einem gedehnten Gummiband gespeichert ist. Lassen wir thermische und sonstige Effekte außer acht, gilt die Beziehung

$$\Sigma^{ij} = \frac{\partial W}{\partial e_{ij}}. \quad (1.58)$$

e_{ij} sind die kovarianten Komponenten des Verzerrungstensors, der mit der räumlichen Änderung der Verschiebung verknüpft ist.

Um die Definition des Verzerrungstensors zu erläutern, betrachten wir einen materiellen Punkt, der sich vor der Verformung im Punkt P_1 mit dem Ortsvektor $\mathbf{R}(\Theta^1, \Theta^2, \Theta^3, t=0)$ befunden hat. Er erleidet durch die Verformung des Körpers eine Verschiebung $\mathbf{u}(\Theta^1, \Theta^2, \Theta^3, t)$, die i.a. noch von der Zeit abhängt. Dadurch gelangt er in den Punkt P_2 mit dem Ortsvektor $\mathbf{x}(\Theta^1, \Theta^2, \Theta^3, t)$:

$$\mathbf{x}(\Theta^1, \Theta^2, \Theta^3, t) = \mathbf{R}(\Theta^1, \Theta^2, \Theta^3, t=0) + \mathbf{u}(\Theta^1, \Theta^2, \Theta^3, t).$$

Die kovariante Basis \mathbf{B}_i im verformten Zustand erhalten wir durch

$$\mathbf{B}_i = \mathbf{x}_{,i} = \mathbf{R}_{,i} + \mathbf{u}_{,i} = \mathbf{b}_i + \mathbf{u}_{,i}. \quad (1.59)$$

Als Maß für die Verzerrung nehmen wir die Differenz der Bogenelemente dS^2 und ds^2 im verformten und unverformten Zustand. Für die Bogenelemente gilt

$$\begin{aligned} ds^2 &= b_{ij} d\Theta^i d\Theta^j \\ dS^2 &= B_{ij} d\Theta^i d\Theta^j. \end{aligned}$$

Die Differenz lautet dann

$$dS^2 - ds^2 = 2e_{ij} d\Theta^i d\Theta^j,$$

wenn darin

$$e_{ij} = \frac{1}{2}(B_{ij} - b_{ij}) \quad (1.60)$$

gesetzt wird. Wollen wir den Verzerrungstensor auf die Basis des unverformten Körpers beziehen, schreiben wir mit Gleichung (1.59)

$$B_{ij} = \mathbf{B}_i \cdot \mathbf{B}_j = (\mathbf{b}_i + \mathbf{u}_{,i}) \cdot (\mathbf{b}_j + \mathbf{u}_{,j}),$$

und erhalten

$$e_{ij} = \frac{1}{2}(\mathbf{b}_i \cdot \mathbf{u}_{,j} + \mathbf{b}_j \cdot \mathbf{u}_{,i} + \mathbf{u}_{,i} \cdot \mathbf{u}_{,j}). \quad (1.61)$$

Wir beziehen die Verschiebung auf die kontravariante Basis

$$\mathbf{u} = u_k \mathbf{b}^k, \quad (1.62)$$

wobei wir dann unter Verwendung von Gleichung (1.38) erhalten:

$$\mathbf{u}_{,i} = u_k|_i \mathbf{b}^k. \quad (1.63)$$

Hierin haben wir die kovariante Ableitung $u_k|_i$ als

$$u_k|_i = u_{k,i} - \Gamma_{ki}^j u_j \quad (1.64)$$

definiert. Mit obigen Beziehungen können wir Gleichung (1.61) wie folgt formulieren:

$$e_{ij} = \frac{1}{2}(u_i|_j + u_j|i + u_k|i u^k|_j). \quad (1.65)$$

Wir haben hier die leicht nachzuvollziehenden Formeln zur Umrechnung von ko- auf kontravariante Komponenten

$$u^i = b^{ij} u_j, \quad u_j = b_{ij} u^i \quad (1.66)$$

benutzt. Man spricht auch vom *Herauf-* bzw. *Herunterziehen* eines Index.

Wir hatten die Verschiebung als kleine Größe gemäß Gleichung (1.7) vorausgesetzt, deshalb vernachlässigen wir den letzten Term in der Klammer von Gleichung (1.65) und gelangen so zum Verzerrungstensor der *geometrisch linearen Theorie*:

$$\begin{aligned} e_{ij} &= \frac{1}{2}(u_i|_j + u_j|i) \\ &= \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i} - 2\Gamma_{ij}^k u_k). \end{aligned} \quad (1.67)$$

Wir formulieren jetzt obiges Ergebnis für Kugelkoordinaten bezüglich der Basisvektoren (1.22). Dazu gehen wir zuerst von den in Gleichung (1.67) stehenden kovarianten Komponenten u_j auf kontravariante Komponenten u^i durch *Heraufziehen der Indizes* über. Wir müssen ersetzen:

$$u_r = u^r, \quad u_\vartheta = r^2 u^\vartheta, \quad u_\varphi = r^2 u^\varphi \sin^2 \vartheta,$$

und erhalten dann für die Komponenten des Verzerrungstensors

$$\begin{aligned} e_{rr} &= \frac{\partial u^r}{\partial r}, \quad e_{\vartheta\vartheta} = r^2 \frac{\partial u^\vartheta}{\partial \vartheta} + r u^r \\ e_{\varphi\varphi} &= r^2 \sin^2 \vartheta \left(\frac{\partial u^\varphi}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} u^r + u^\vartheta \cot \vartheta \right) \\ e_{r\vartheta} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u^r}{\partial \vartheta} + r^2 \frac{\partial u^\vartheta}{\partial r} \right) \\ e_{r\varphi} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u^r}{\partial \varphi} + r^2 \sin^2 \vartheta \frac{\partial u^\varphi}{\partial r} \right) \\ e_{\vartheta\varphi} &= \frac{1}{2} r^2 \left(\frac{\partial u^\vartheta}{\partial \varphi} + \sin^2 \vartheta \frac{\partial u^\varphi}{\partial \vartheta} \right). \end{aligned}$$

Für den Übergang auf Komponenten bez. normierter Basisvektoren müssen wir die Transformationen (1.52), sowie

$$e_{ij} = \frac{\hat{e}_{ij}}{\sqrt{b^{(ii)}} \sqrt{b^{(jj)}}}$$

ausführen. Die endgültige Form der Komponenten des Verzerrungstensors erhalten wir dann zu

$$\begin{aligned}
e_{rr} &= \frac{\partial u^r}{\partial r}, & e_{\vartheta\vartheta} &= \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u^\vartheta}{\partial \vartheta} + u^r \right) \\
e_{\varphi\varphi} &= \frac{1}{r} \left(\frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial u^\varphi}{\partial \varphi} + u^r + u^\vartheta \cot \vartheta \right) \\
e_{\vartheta\varphi} &= \frac{1}{2r} \left(\frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial u^\vartheta}{\partial \varphi} + \frac{\partial u^\varphi}{\partial \vartheta} - u^\varphi \cot \vartheta \right) \\
e_{r\varphi} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u^\varphi}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial u^r}{\partial \varphi} - \frac{1}{r} u^\varphi \right) \\
e_{r\vartheta} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u^\vartheta}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u^r}{\partial \vartheta} - \frac{1}{r} u^\vartheta \right).
\end{aligned} \tag{1.68}$$

1.3.2 Der Tensor der elastischen Konstanten

Kehren wir zurück zu Gleichung (1.58). Es ist

$$W = W(e_{ij}), \quad i, j = 1, 2, 3.$$

Nach Voraussetzung sind unsere Verzerrungen ebenfalls kleine Größen. Haben wir keine Materialfehler, können wir W in eine Taylorsche Reihe um $\mathbf{e} = 0$ entwickeln:

$$W(\mathbf{e}) = W(0) + \frac{\partial W(0)}{\partial e_{ik}} e_{ik} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 W(0)}{\partial e_{ik} \partial e_{lm}} e_{ik} e_{lm} + \dots$$

Also bekommen wir

$$\begin{aligned}
\Sigma^{ij}(\mathbf{e}) &= \frac{\partial W(\mathbf{e})}{\partial e_{ij}} = \frac{\partial W(0)}{\partial e_{ij}} + \frac{\partial^2 W(0)}{\partial e_{ij} \partial e_{kl}} e_{kl} + \dots \\
&\approx \Sigma^{ij}(\mathbf{e} = 0) + E^{ijkl} e_{kl},
\end{aligned} \tag{1.69}$$

bei Vernachlässigung nichtlinearer Terme in e_{ij} .

Wir identifizieren $\Sigma^{ij}(\mathbf{e} = 0)$ mit unserem Σ_0^{ij} , und können dann schreiben

$$T^{ij} = E^{ijkl} e_{kl}. \tag{1.70}$$

Dies ist das *Hooke'sche Gesetz*.

Man nennt E^{ijkl} den *Tensor der elastischen Konstanten*; er ist durch Gleichung (1.69) definiert als

$$E^{ijkl} = \frac{\partial^2 W(\mathbf{e} = 0)}{\partial e_{ij} \partial e_{kl}}. \tag{1.71}$$

Der Verzerrungstensor ist symmetrisch, daher gilt

$$E^{ijkl} = E^{jikl} = E^{ijlk} = E^{jilk}. \tag{1.72}$$

Die gemischten Ableitungen in der Taylor-Entwicklung sollen vertauschbar sein, dies bedeutet

$$E^{ijkl} = E^{klij}$$

Die oben angeführten Symmetrien lassen die ursprünglich 81 Komponenten von \mathbf{E} auf nur 21 unabhängige Elemente schrumpfen. Wegen der Symmetrierelation (1.72) ist es von Vorteil eine neue Notation, die sogenannte *Voigt–Notation*, zu verwenden. Man bezeichnet die Indexpaare wie folgt:

$$\begin{array}{ccc} 11 & \rightarrow & 1 \\ 22 & \rightarrow & 2 \\ 33 & \rightarrow & 3 \end{array} \quad \begin{array}{ccc} 23 & \rightarrow & 4 \\ 31 & \rightarrow & 5 \\ 12 & \rightarrow & 6. \end{array}$$

So wird z.B. $E^{1123} = E^{1132} \rightarrow E^{14}$. Der Tensor \mathbf{E} lässt sich somit als symmetrische 6×6 –Matrix darstellen.

Materialsymmetrien reduzieren die Anzahl der unabhängigen Komponenten von \mathbf{E} noch weiter. So kann man isotropes Material durch nur zwei unabhängige Konstanten beschreiben, welche als *Lamésche Konstanten* bezeichnet werden.

Die Erde soll jedoch vorerst nicht isotrop sein, sonder sich *transversal isotrop* bezüglich der r –Richtung verhalten, d.h. keine Richtung senkrecht zur r –Achse soll ausgezeichnet sein. In diesem Fall besitzt \mathbf{E} 5 unabhängige Konstanten, welche im Rahmen der Geophysik A, C, F, L und N genannt werden. Der Tensor der elastischen Konstanten lautet dann in Voigt–Notation

$$(E^{IJ}) = \begin{pmatrix} C & F & F & 0 & 0 & 0 \\ F & A & A - 2N & 0 & 0 & 0 \\ F & A - 2N & A & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2N & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2L & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2L \end{pmatrix}. \quad (1.73)$$

Wir haben die Indizes bei \mathbf{E} zur Verdeutlichung der Voigt–Notation großgeschrieben.

Die SDB können wir nun explizit hinschreiben indem wir die Summation (1.70) in Voigt–Notation formulieren:

$$T^{ij} = E^{ijkl} e_{kl} \quad \longrightarrow \quad T^J = E^{JK} e_K, \quad (1.74)$$

und mit der oben angeführten Matrix ausführen. Wir verwenden jedoch in diesem Ergebnis und auch im folgenden die Voigt–Notation nicht mehr, um keine Verwirrung bei der Indizierung von Vektoren, Tensoren oder sonstigen Größen zu verursachen.

Die SDB lautet nun

$$\begin{aligned} T^{rr} &= Ce_{rr} + F(e_{\vartheta\vartheta} + e_{\varphi\varphi}) \\ T^{\vartheta\vartheta} &= Fe_{rr} + A(e_{\vartheta\vartheta} + e_{\varphi\varphi}) - 2Ne_{\varphi\varphi} \\ T^{\varphi\varphi} &= Fe_{rr} + A(e_{\vartheta\vartheta} + e_{\varphi\varphi}) - 2Ne_{\vartheta\vartheta} \\ T^{\vartheta\varphi} &= 2Ne_{\vartheta\varphi}, \quad T^{r\varphi} = 2Le_{r\varphi}, \quad T^{r\vartheta} = 2Le_{r\vartheta}. \end{aligned}$$

1.3.3 Berücksichtigung von Anelastizität

Unser Erdmodell soll realistischerweise auch Dämpfung beinhalten. Man beschreibt dies dadurch, daß die elastischen Konstanten frequenzabhängig und komplex werden. Im Zeitbereich erweitern wir deshalb die SDB auf eine allgemeinere Beziehung; wir setzen

$$\begin{aligned} \mathbf{T}^{ij}(\mathbf{x}, t) &= \int_0^t \mathbf{E}^{ijkl}(\mathbf{x}, t - \tau) \mathbf{e}_{kl}(\mathbf{x}, \tau) d\tau \\ &= \mathbf{E}^{ijkl}(\mathbf{x}, t) * \mathbf{e}_{kl}(\mathbf{x}, t) \end{aligned} \quad (1.75)$$

für ein kausales System, in dem das „Eingangssignal“ $\mathbf{e}_{kl}(\mathbf{x}, \tau) = 0$ für $\tau < 0$ und deshalb auch $\mathbf{E}^{ijkl}(\mathbf{x}, t - \tau) = 0$ für $t < \tau$ ist.

Nach dem Faltungstheorem der Fouriertransformation erhalten wir dann für die Spektren:

$$\tilde{\mathbf{T}}^{ij}(\mathbf{x}, \omega) = \tilde{\mathbf{E}}^{ijkl}(\mathbf{x}, \omega) \tilde{\mathbf{e}}_{kl}(\mathbf{x}, \omega). \quad (1.76)$$

Solange wir nicht im Frequenzraum rechnen, müßten wir konsequenterweise die einfachen Multiplikationen in der SDB (1.75) durch ein Faltungsprodukt ersetzen und durch einen Stern $*'$ kennzeichnen. Dies würde die ohnehin komplizierten Formeln nicht übersichtlicher machen, weshalb wir darauf verzichten werden und nochmal darauf hinweisen, *daß das Produkt zwischen einer elastischen Konstante und der Verzerrung als Faltung zu verstehen ist*.

1.4 Zwischenbilanz

Wir fassen die Problemstellung nochmal kurz zusammen: Unser Erdmodell liefert uns direkt oder indirekt folgende Größen:

$$\rho_0(r), A(r), C(r), F(r), L(r), N(r).$$

Außerdem geben wir die Volumenkraft $\mathbf{f}(r, \vartheta, \varphi, t)$ — das „Erdbeben“ — in irgend einer Art und Weise vor. Wir könnten nun die Elemente des Verzerrungstensors in die SDB einsetzen und diese wiederum in unsere drei Bewegungsgleichungen einbringen. Mit der Poissons-Gleichung hätten wir dann vier gekoppelte, partielle Differentialgleichungen für die gesuchten Funktionen $u^r(r, \vartheta, \varphi, t)$, $u^\vartheta(r, \vartheta, \varphi, t)$, $u^\varphi(r, \vartheta, \varphi, t)$ und $\phi(r, \vartheta, \varphi, t)$. Dieses System wäre allerdings äußerst unangenehm zu bearbeiten, vor allem wegen des partiellen Charakters. Wir können jedoch die Symmetrien, die aufgrund unseres Erdmodells in die Rechnungen eingehen, dazu benutzen diese Differentialgleichungen handlicher zu gestalten.

Unser Erdmodell ist radial geschichtet, d.h. seine Eigenschaften sind nur abhängig von r , eine beliebige Drehung des Koordinatensystems um den Ursprung $r = 0$ kann an der Situation nichts ändern, und somit müsste auch die Bewegungsgleichung im gedrehten System die gleiche Form haben. Da sich bei einer solchen Drehung die Winkel ϑ und φ ändern, andererseits aber die Gleichungen ihre Form beibehalten sollen, müssen wir nach einem Differentialoperator bezüglich ϑ und φ fragen, der gegenüber Drehungen invariant ist, d.h. im gedrehten Koordinatensystem die gleiche Form hat wie im alten.

Dieser Operator ist

$$\nabla_1^2 = \frac{\partial^2}{\partial \vartheta^2} + \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \cot \vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta}. \quad (1.77)$$

Wir finden ∇_1^2 auch im Hamiltonoperator des Wasserstoff-Problems in der Quantenmechanik, da dort das ebenfalls zentrale symmetrische Coulomb-Potential der Rechnung zugrunde liegt.

Die Eigenwerte und Eigenfunktionen dieses Operators sind bestimmt durch

$$\nabla_1^2 Y_l^m(\vartheta, \varphi) = \lambda Y_l^m(\vartheta, \varphi) = -l(l+1)Y_l^m(\vartheta, \varphi). \quad (1.78)$$

Die $Y_l^m(\vartheta, \varphi)$ heißen Kugelflächenfunktionen, und bilden auf der Kugel ein vollständiges und orthogonales Funktionensystem. Dies bedeutet, daß jede auf der Kugel definierte, skalare Funktion $h(\vartheta, \varphi)$ in eine Reihe nach den Y_l^m entwickelt werden kann:

$$h(\vartheta, \varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l h_l^m Y_l^m(\vartheta, \varphi). \quad (1.79)$$

Die Entwicklungskoeffizienten h_l^m erhält man durch das *innere Produkt*

$$h_l^m = \int_0^\pi d\vartheta \sin \vartheta \int_0^{2\pi} d\varphi h(\vartheta, \varphi) \bar{Y}_l^m(\vartheta, \varphi). \quad (1.80)$$

Der Strich ' $-$ ' über Y_l^m bedeutet *konjugiert komplex*.

Wir werden die Y_l^m in der folgenden Form verwenden

$$Y_l^m(\vartheta, \varphi) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-|m|)!}{(l+|m|)!}} P_l^{|m|}(\cos \vartheta) e^{im\varphi} = \mathcal{N}_l^{|m|} P_l^{|m|}(\cos \vartheta) e^{im\varphi}, \quad (1.81)$$

mit $\mathcal{N}_l^{|m|} \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-|m|)!}{(l+|m|)!}}$. In dieser Form gilt

$$Y_l^{-m}(\vartheta, \varphi) = \bar{Y}_l^m(\vartheta, \varphi). \quad (1.82)$$

1.5 Skalare Formulierung der Bewegungsgleichungen

1.5.1 Skalare Repräsentation der Verschiebung und der anregenden Kraft

Nun zurück zu den Differentialgleichungen: Wenn es uns gelingt, diese auf eine Gestalt zu transformieren, in welcher Ableitungen nach ϑ und φ nur innerhalb ∇_1^2 vorkommen, können wir obige Reihe (1.79) zur Darstellung der Winkelabhängigkeit verwenden.

Zuerst stellen wir sämtliche Vektorfelder durch Skalarfelder dar. Hierzu denken wir uns den Vektor \mathbf{u} , definiert auf einer Kugelfläche mit beliebigem, aber festem Radius r , aufgeteilt in einen radialen und einen zur Kugelfläche tangentialen Teil:

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_{rad} + \mathbf{u}_{tang}. \quad (1.83)$$

Das *Tangentialvektor-Repräsentations-Theorem* (Backus, 1967) sagt nun aus, daß für jedes feste r zwei eindeutige Skalarfelder $V(r, \vartheta, \varphi)$ und $W(r, \vartheta, \varphi)$ existieren, so daß gilt:

$$\mathbf{u}_{tang} = \nabla_1 V - \hat{\mathbf{r}} \times \nabla_1 W, \quad (1.84)$$

mit $\nabla_1 = \hat{\vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} + \frac{1}{\sin \vartheta} \hat{\varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi}$, oder wenn wir unsere Notation mit Summationskonvention und nicht unbedingt normierten Basisvektoren benützen: $\nabla_1 = r \mathbf{b}^\alpha \frac{\partial}{\partial \theta^\alpha}$. Dabei treffen wir folgende Vereinbarung: *Lateinische Indizes laufen von 1 bis 3, griechische Indizes nur von 2 bis 3.*

Den gesamten Vektor \mathbf{u} können wir mit obigem Theorem dann darstellen als

$$\mathbf{u}(r, \vartheta, \varphi, t) = U(r, \vartheta, \varphi, t) \hat{\mathbf{r}} + \nabla_1 V(r, \vartheta, \varphi, t) - \hat{\mathbf{r}} \times \nabla_1 W(r, \vartheta, \varphi, t), \quad (1.85)$$

mit $U(r, \vartheta, \varphi, t)$ als einem dritten Skalarfeld.

Die einzelnen Komponenten von \mathbf{u} lauten damit

$$\begin{aligned} u^r &= U \\ u^\vartheta &= \frac{\partial V}{\partial \vartheta} + \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial W}{\partial \varphi} \\ u^\varphi &= \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial V}{\partial \varphi} - \frac{\partial W}{\partial \vartheta}. \end{aligned} \quad (1.86)$$

In analoger Weise repräsentieren wir die Volumenkraft \mathbf{f} durch drei Skalarfelder $G(r, \vartheta, \varphi, t)$, $H(r, \vartheta, \varphi, t)$ und $K(r, \vartheta, \varphi, t)$:

$$\mathbf{f}(r, \vartheta, \varphi, t) = G(r, \vartheta, \varphi, t) \hat{\mathbf{r}} + \nabla_1 H(r, \vartheta, \varphi, t) - \hat{\mathbf{r}} \times \nabla_1 K(r, \vartheta, \varphi, t). \quad (1.87)$$

Wir verwenden die Repräsentation von \mathbf{u} zuerst in der Poissons-Gleichung, welche dann lautet:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \nabla_1^2 \phi = \\ - 4\pi\gamma \left[\frac{\partial}{\partial r} (\rho_0 U) + \frac{\rho_0}{r} \left(\frac{2}{r} U + \frac{\rho_0}{r} \nabla_1^2 V \right) \right]. \end{aligned} \quad (1.88)$$

Die Bewegungsgleichungen für u^r , u^ϑ und u^φ werden durch die Skalare zu

$$\begin{aligned} \rho_0 \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = & G - \rho_0 \left(\frac{\partial \phi}{\partial r} + 4\pi\gamma\rho_0 U - \frac{2g_0}{r} U \right) \\ & - \frac{1}{r} \left[\frac{2(A-N)}{r} - \rho_0 g_0 \right] (2U + \nabla_1^2 V) - \frac{2F}{r} \frac{\partial U}{\partial r} \\ & + \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{2}{r} \right) \left[C \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{F}{r} (2U + \nabla_1^2 V) \right] \\ & + \frac{L}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} \nabla_1^2 V - \frac{1}{r} \nabla_1^2 (V - U) \right], \end{aligned} \quad (1.89)$$

$$\begin{aligned}
\rho_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial V}{\partial \vartheta} + \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial W}{\partial \varphi} \right) &= \frac{\partial H}{\partial \vartheta} + \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial K}{\partial \varphi} - \frac{\rho_0}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \vartheta} - \frac{\rho_0 g_0}{r} \frac{\partial U}{\partial \vartheta} \\
&+ \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{3}{r} \right) L \left[\frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\frac{\partial V}{\partial r} - \frac{V-U}{r} \right) + \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{\partial W}{\partial r} - \frac{W}{r} \right) \right] \\
&+ \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left[\frac{F}{r} \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{A}{r^2} (2U + \nabla_1^2 V) + \frac{2N}{r^2} (V-U) \right] \\
&+ \frac{N}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \varphi} (2W + \nabla_1^2 W) , \tag{1.90}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\rho_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial V}{\partial \varphi} - \frac{\partial W}{\partial \vartheta} \right) &= \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial H}{\partial \varphi} - \frac{\partial K}{\partial \vartheta} - \frac{\rho_0}{r \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \varphi} (\phi + \rho_0 U) \\
&+ \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{3}{r} \right) L \left[\frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{\partial V}{\partial r} - \frac{V-U}{r} \right) - \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\frac{\partial W}{\partial r} - \frac{W}{r} \right) \right] \\
&+ \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left[\frac{F}{r} \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{A}{r^2} (2U + \nabla_1^2 V) + \frac{2N}{r^2} (V-U) \right] \\
&- \frac{N}{r^2} \frac{\partial}{\partial \vartheta} (2W + \nabla_1^2 W) . \tag{1.91}
\end{aligned}$$

1.5.2 Sphäroidale und toroidale Bewegung

Wir können die 4 Gleichungen teilweise entkoppeln, und zwar in 3 Gleichungen für U , V und ϕ , welche die Bewegung der sogenannten *sphäroidalen Moden* beschreiben, und in eine Gleichung nur für W , die die *toroidalen Moden* regelt. Diese Moden sind verdrillungsähnliche Bewegungen, die ohne Dilatation des Materials ablaufen, d.h. die keine Dichteänderung verursachen, und somit auch nicht an das Gravitationspotential gekoppelt sind.

Um die Gleichungen teilweise zu entkoppeln, müssen wir nach den Skalaren „auflösen“; dazu bilden wir

$$\frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \sin \vartheta \text{ Glg. (1.90)} + \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \text{ Glg. (1.91)}$$

und

$$\frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \text{ Glg. (1.90)} - \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \sin \vartheta \text{ Glg. (1.91)}.$$

Wir erhalten eine Gleichung für V :

$$\begin{aligned}
\nabla_1^2 \rho_0 \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} &= \nabla_1^2 \left[H - \frac{\rho_0}{r} (\phi + g_0 U) + \frac{F}{r} \frac{\partial U}{\partial r} \right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{3}{r} \right) L \left(\frac{\partial V}{\partial r} - \frac{V-U}{r} \right) + \frac{A}{r^2} (2U + \nabla_1^2 V) + \frac{2N}{r^2} (V-U) \right] , \tag{1.92}
\end{aligned}$$

und eine für W :

$$\nabla_1^2 \rho_0 \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = \nabla_1^2 \left[K + \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{3}{r} \right) L \left(\frac{\partial W}{\partial r} - \frac{W}{r} \right) + \frac{N}{r^2} (2W + \nabla_1^2 W) \right] . \tag{1.93}$$

1.5.3 Kugelflächenfunktionsentwicklung der Skalare und Übergang zur Fouriertransformierten

Bis jetzt haben wir erreicht, die Bewegungsgleichungen für die Komponenten des Verschiebungsvektors in Gleichungen für auf der Kugelfläche mit Radius r definierten skalaren Funktionen überzuführen. Desweiteren haben wir gesehen, daß die Symmetrie unseres Erdmodells es erlaubt, Ableitungen nach ϑ und φ nur in Form des Operators ∇_1^2 auszudrücken.

Der nächste Schritt wird nun sein, sämtliche Skalare nach den Kugelflächenfunktionen Y_l^m zu entwickeln und damit die Wirkung von ∇_1^2 auf eine einfache Multiplikation mit $-l(l+1)$ zu reduzieren.

Wir setzen jetzt

$$\phi(r, \vartheta, \varphi, t) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \phi_l^m(r, t) Y_l^m(\vartheta, \varphi), \quad (1.94)$$

und analoge Reihen für U, V, W, G, H und K .

Da die Y_l^m für verschiedene l oder m linear unabhängig und orthogonal, außerdem die Differentialgleichungen linear sind, kann man die Gleichungen für jeden Entwicklungskoeffizienten einzeln formulieren. Wir erhalten

$$\frac{\partial^2 \phi_l^m}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \phi_l^m}{\partial r} - \frac{l(l+1)}{r^2} \phi_l^m = -4\pi\gamma \left[\frac{\partial}{\partial r} (\rho_0 U_l^m) + \frac{\rho_0}{r} [2U_l^m - l(l+1)U_l^m] \right] \quad (1.95)$$

für die Poissongleichung, und für die Entwicklungskoeffizienten von U

$$\begin{aligned} \rho_0 \frac{\partial^2 U_l^m}{\partial t^2} &= G_l^m - \rho_0 \left(\frac{\partial \phi_l^m}{\partial r} + 4\pi\gamma\rho_0 U_l^m - \frac{2g_0}{r} U_l^m \right) \\ &\quad - \frac{1}{r} \left[\frac{2(A-N)}{r} - \rho_0 g_0 \right] [2U_l^m - l(l+1)V_l^m] - \frac{2F}{r} \frac{\partial U_l^m}{\partial r} \\ &\quad + \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{2}{r} \right) \left[C \frac{\partial U_l^m}{\partial r} + \frac{F}{r} [2U_l^m - l(l+1)V_l^m] \right] \\ &\quad - \frac{l(l+1)}{r} L \left(\frac{\partial V_l^m}{\partial r} - \frac{V_l^m - U_l^m}{r} \right). \end{aligned} \quad (1.96)$$

Die Gleichungen für V_l^m sowie W_l^m haben nur für $l > 0$ einen Sinn, da für $l = 0$ keine Abhängigkeit von ϑ und φ vorliegt. Diese Koeffizienten würden für u^ϑ und u^φ keinen Beitrag leisten, weshalb man getrost $V_0^0 = W_0^0 \equiv 0$ setzen kann.

Wenn $l > 0$ haben wir also für die V_l^m

$$\begin{aligned} \rho_0 \frac{\partial^2 V_l^m}{\partial t^2} &= H_l^m - \frac{\rho_0}{r} (\phi_l^m + g_0 U_l^m) + \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{3}{r} \right) L \left(\frac{\partial V_l^m}{\partial r} - \frac{V_l^m - U_l^m}{r} \right) \\ &\quad + \frac{F}{r} \frac{\partial U_l^m}{\partial r} + \frac{A}{r^2} [2U_l^m - l(l+1)V_l^m] + \frac{2N}{r^2} (V_l^m - U_l^m), \end{aligned} \quad (1.97)$$

und für die W_l^m

$$\rho_0 \frac{\partial^2 W_l^m}{\partial t^2} = K_l^m + \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{3}{r} \right) L \left(\frac{\partial W_l^m}{\partial r} - \frac{W_l^m}{r} \right) + \frac{N}{r^2} [2W_l^m - l(l+1)W_l^m]. \quad (1.98)$$

Der nächste Schritt besteht darin, die Ableitung nach der Zeit zu eliminieren. Da wir das Spektrum berechnen wollen, müssen wir für die gesuchten Funktionen zur Fouriertransformierten übergehen.

Wir werden die Fouriertransformation in folgender Form benutzen

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega , \quad \tilde{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt. \quad (1.99)$$

Die gesuchten Funktionen, z.B. ϕ_l^m , werden dann ersetzt durch

$$\phi_l^m(r, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\phi}_l^m(r, \omega) e^{i\omega t} d\omega , \quad (1.100)$$

in analoger Weise transformieren wir die Größen U_l^m , V_l^m , W_l^m , G_l^m , H_l^m und K_l^m sowie die elastischen Konstanten A , C , F , L und N (siehe Abschnitt 1.3.3). In den Gleichungen ersetzen wir nur $\frac{\partial^2}{\partial t^2}$ durch $-\omega^2$ und alle obengenannten Größen durch ihre Fouriertransformierte.

Wir werden das Gleichungssystem noch in eine für die numerische Integration geschickte Form des linearen Differentialgleichungssystems 1. Ordnung bringen. Dazu führen wir drei Skalare R , S und T ein, welche den Spannungsvektor auf der Erdoberfläche repräsentieren sollen:

$$\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{T} = R\hat{\mathbf{r}} + \nabla_1 S - \hat{\mathbf{r}} \times \nabla_1 T. \quad (1.101)$$

Mit Hilfe der SDB und den Komponenten des Verzerrungstensors finden wir für die drei Skalare:

$$R = C \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{F}{r} (2U + \nabla_1^2 V) \quad (1.102)$$

$$S = L \left(\frac{\partial V}{\partial r} - \frac{V - U}{r} \right) \quad (1.103)$$

$$T = L \left(\frac{\partial W}{\partial r} - \frac{W}{r} \right). \quad (1.104)$$

Entsprechend der Kugelfunktionsentwicklung und der Fouriertransformation dafür

$$\tilde{R}_l^m(r, \omega) = \tilde{C} \frac{\partial \tilde{U}_l^m}{\partial r} + \frac{\tilde{F}}{r} \left(2\tilde{U}_l^m - l(l+1)\tilde{V}_l^m \right) \quad (1.105)$$

$$\tilde{S}_l^m(r, \omega) = \tilde{L} \left(\frac{\partial \tilde{V}_l^m}{\partial r} - \frac{\tilde{V}_l^m - \tilde{U}_l^m}{r} \right) \quad (1.106)$$

$$\tilde{T}_l^m(r, \omega) = \tilde{L} \left(\frac{\partial \tilde{W}_l^m}{\partial r} - \frac{\tilde{W}_l^m}{r} \right), \quad (1.107)$$

wobei die elastischen Konstanten ebenfalls frequenzabhängig sind (siehe Abschnitt 1.3.3).

Die Randbedingungen für das Gravitationspotential nützen wir aus um auch in der Poisson-Gleichung nur erste Ableitungen nach r stehen zu haben.

Wir wissen, daß der Ausdruck

$$\frac{\partial \phi}{\partial r} + 4\pi\gamma\rho_0 u^r \quad (1.108)$$

stetig sein muß. Außerhalb der Erde ist aber $\rho_0 = 0$, und die Lösung für $\tilde{\phi}_l^m$ lautet dort

$$\tilde{\phi}_{l,ext}^m = c \left(\frac{a}{r} \right)^{l+1}. \quad (1.109)$$

Die Konstante c erhalten wir mit a als Erdradius durch

$$\tilde{\phi}_{l,ext}^m(a) = \tilde{\phi}_l^m(a), \quad (1.110)$$

da ϕ selbst stetig sein muß. Wir erhalten

$$c = \tilde{\phi}_l^m(a). \quad (1.111)$$

An der Erdoberfläche lautet die Stetigkeitsbedingung deshalb

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{\phi}_l^m}{\partial r} \Big|_a + 4\pi\gamma\rho_0(a)\tilde{U}_l^m(a) &= \frac{\partial \phi_{l,ext}^m}{\partial r} \Big|_a \\ &= -\frac{l+1}{a}\tilde{\phi}_l^m(a). \end{aligned} \quad (1.112)$$

Wir definieren nun eine neue Funktion (Takeuchi u. Saito, 1972)

$$\tilde{Q}_l^m(r) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial \tilde{\phi}_l^m}{\partial r} + 4\pi\gamma\rho_0\tilde{U}_l^m + \frac{l+1}{r}\tilde{\phi}_l^m, \quad (1.113)$$

für die die Randbedingung die Form

$$\tilde{Q}_l^m(a) = 0$$

annahmt. $\frac{\partial \tilde{Q}_l^m}{\partial r}$ erhalten wir aus der Poissongleichung.

1.5.4 Endgültige Form der Bewegungsgleichungen

Wir sind jetzt in der Lage unser Problem auf ein gewöhnliches, lineares, inhomogenes 6×6 - und 2×2 -Differentialgleichungssystem in r zu bringen, welches zu lösen gilt:

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{U}_l^m}{dr} &= \frac{1}{\tilde{C}} \left[\tilde{R}_l^m - \frac{\tilde{F}}{r} (2\tilde{U}_l^m - l(l+1)\tilde{V}_l^m) \right] \\ \frac{d\tilde{R}_l^m}{dr} &= -\rho_0\omega^2\tilde{U}_l^m + \frac{2}{r} \left(\tilde{F} \frac{d\tilde{U}_l^m}{dr} - \tilde{R}_l^m \right) + \frac{l(l+1)}{r}\tilde{S}_l^m \\ &\quad + \frac{1}{r} \left[\frac{2}{r} (\tilde{A} - \tilde{N}) - \rho_0 g_0 \right] (2\tilde{U}_l^m - l(l+1)\tilde{V}_l^m) \\ &\quad - \rho_0 \left(\frac{l+1}{r}\tilde{\phi}_l^m - \tilde{Q}_l^m + \frac{2g_0}{r}\tilde{U}_l^m \right) - \tilde{G}_l^m \\ \frac{d\tilde{V}_l^m}{dr} &= \frac{1}{\tilde{L}}\tilde{S}_l^m + \frac{1}{r}(\tilde{V}_l^m - \tilde{U}_l^m) \\ \frac{d\tilde{S}_l^m}{dr} &= -\rho_0\omega^2\tilde{V}_l^m - \frac{\tilde{F}}{r} \frac{d\tilde{U}_l^m}{dr} + \frac{\tilde{A}}{r^2} (2\tilde{U}_l^m - l(l+1)\tilde{V}_l^m) \end{aligned} \quad (1.114)$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{2\tilde{N}}{r^2}(\tilde{U}_l^m - \tilde{V}_l^m) - \frac{3}{r}\tilde{S}_l^m + \frac{\rho_0}{r}(\tilde{\phi}_l^m + g_0\tilde{U}_l^m) - \tilde{H}_l^m \\
\frac{d\tilde{\phi}_l^m}{dr} &= \tilde{Q}_l^m - 4\pi\gamma\rho_0\tilde{U}_l^m - \frac{l+1}{r}\tilde{\phi}_l^m \\
\frac{d\tilde{Q}_l^m}{dr} &= \frac{l-1}{r}(\tilde{Q}_l^m - 4\pi\gamma\rho_0\tilde{U}_l^m) - \frac{4\pi\gamma\rho_0}{r}(2\tilde{U}_l^m - l(l+1)\tilde{V}_l^m).
\end{aligned}$$

Das 2×2 -System lautet

$$\begin{aligned}
\frac{d\tilde{W}_l^m}{dr} &= \frac{1}{\tilde{L}}\tilde{T}_l^m + \frac{1}{r}\tilde{W}_l^m \\
\frac{d\tilde{T}_l^m}{dr} &= -\frac{3}{r}\tilde{T}_l^m - \left(\rho_0\omega^2 + \frac{\tilde{N}}{r^2}[2-l(l+1)] \right) \tilde{W}_l^m - \tilde{K}_l^m.
\end{aligned} \tag{1.115}$$

Im folgenden wollen wir nur die sphäroidale Bewegung betrachten, die den schwieriger zu lösenden Teil des Differentialgleichungssystem bilden. Da die in dieser Arbeit vorgestellte Methode besonders bei höheren Frequenzen ihre Anwendung finden wird, können wir die Schwere vernachlässigen.

Es entfallen dann die Variablen $\tilde{\phi}_l^m$ und \tilde{Q}_l^m , außerdem ist $g_0 = 0$, und wir behalten übrig ein 4×4 -System, welches nach explizitem Ausschreiben von $\frac{d\tilde{U}_l^m}{dr}$ lautet:

$$\begin{aligned}
\frac{d\tilde{U}_l^m}{dr} &= -\frac{2\tilde{F}}{r\tilde{C}}\tilde{U}_l^m + \frac{1}{\tilde{C}}\tilde{R}_l^m + \frac{l(l+1)\tilde{F}}{r\tilde{C}}\tilde{V}_l^m \\
\frac{d\tilde{R}_l^m}{dr} &= \left[-\rho_0\omega^2 + \frac{4}{r^2} \left(\tilde{A} - \frac{\tilde{F}^2}{\tilde{C}} - \tilde{N} \right) \right] \tilde{U}_l^m + \frac{2}{r} \left(\frac{\tilde{F}}{\tilde{C}} - 1 \right) \tilde{R}_l^m \\
&\quad - \frac{2l(l+1)}{r^2} \left(\tilde{A} - \frac{\tilde{F}^2}{\tilde{C}} - \tilde{N} \right) \tilde{V}_l^m + \frac{l(l+1)}{r}\tilde{S}_l^m - \tilde{G}_l^m \\
\frac{d\tilde{V}_l^m}{dr} &= -\frac{1}{r}\tilde{U}_l^m + \frac{1}{r}\tilde{V}_l^m + \frac{1}{\tilde{L}}\tilde{S}_l^m \\
\frac{d\tilde{S}_l^m}{dr} &= -\frac{2}{r^2} \left(\tilde{A} - \frac{\tilde{F}^2}{\tilde{C}} - \tilde{N} \right) \tilde{U}_l^m - \frac{\tilde{F}}{r\tilde{C}}\tilde{R}_l^m \\
&\quad + \left[-\rho_0\omega^2 + \frac{l(l+1)}{r^2} \left(\tilde{A} - \frac{\tilde{F}^2}{\tilde{C}} \right) - \frac{2\tilde{N}}{r^2} \right] \tilde{V}_l^m - \frac{3}{r}\tilde{S}_l^m - \tilde{H}_l^m
\end{aligned} \tag{1.116}$$

(siehe auch Takeuchi u. Saito, 1972).

1.5.4.1 Bewegungsgleichung im flüssigen Medium

Im (ideal) flüssigen Medium gibt es keine Scherspannung, und außerdem ist es isotrop, so daß wir folgende Änderungen berücksichtigen müssen:

$$\begin{aligned}
\tilde{A} &= \tilde{C} = \tilde{F} = \tilde{\lambda}(r) \\
\tilde{L} &= \tilde{N} = 0 \\
\tilde{S}_l^m &\equiv 0.
\end{aligned}$$

\tilde{V}_l^m erhalten wir aus der 4. Gleichung unseres Systems (1.116)ff zu

$$\tilde{V}_l^m = -\frac{1}{r\omega^2\rho_0}\tilde{R}_l^m - \frac{1}{\omega^2\rho_0}\tilde{H}_l^m.$$

Übrig bleiben dann die ersten 2 Gleichungen

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{U}_l^m}{dr} &= -\frac{2}{r}\tilde{U}_l^m + \left(\frac{1}{\tilde{\lambda}} - \frac{l(l+1)}{r^2\omega^2\rho_0}\right)\tilde{R}_l^m - \frac{l(l+1)}{r\omega^2\rho_0}\tilde{H}_l^m \\ \frac{d\tilde{R}_l^m}{dr} &= -\omega^2\rho_0\tilde{U}_l^m - \tilde{G}_l^m. \end{aligned} \quad (1.117)$$

1.5.4.2 Bewegungsgleichungen für Grad $l = 0$

Ausgehend von der Entwicklung nach Kugelflächenfunktionen können wir sagen, daß die Terme für $l = 0$ nicht von den Winkeln ϑ und φ abhängen. Dies bedeutet eine rein radiale Bewegung $u^r(\mathbf{x}, t)$, die Definition der Skalarfelder V und W werden in diesem Fall sinnlos und somit auch die zugehörigen Differentialgleichungen. Das System (1.116)ff reduziert sich auf ein 2×2 -System der Form

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{U}_0}{dr} &= -\frac{2\tilde{F}}{r\tilde{C}}\tilde{U}_0 + \frac{1}{\tilde{C}}\tilde{R}_0 \\ \frac{d\tilde{R}_0}{dr} &= \left[-\omega^2\rho_0 + \frac{4}{r^2}\left(\tilde{A} - \frac{\tilde{F}^2}{\tilde{C}} - \tilde{N}\right)\right]\tilde{U}_0 + \frac{2}{r}\left(\frac{\tilde{F}}{\tilde{C}} - 1\right)\tilde{R}_0 - \tilde{G}_0. \end{aligned} \quad (1.118)$$

Kapitel 2

Die Beschreibung der seismischen Quelle

2.1 Die anregende Kraft als Divergenz einer Momententensordichte

Die Volumenkraft \mathbf{f} in der Bewegungsgleichung repräsentiert die Ursache der Bewegung, z.B. ein Erdbeben, eine unterirdische Explosion oder evtl. einen Bergsturz. Für sogenannte teleseismische Ereignisse kann die Quelle in ihrer räumlichen Ausdehnung als punktförmig angesehen werden:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{f}_0(t)\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_s), \quad (2.1)$$

\mathbf{x}_s bezeichnet den Ort der Quelle (*source*). Da unser primäres Interesse den Seismogrammen von Erdbeben gilt, können wir $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ etwas genauer beschreiben:

Erdbeben sind Ereignisse hervorgerufen durch innere Kräfte. Dies bedeutet für die Erde, daß Gesamtimpuls und Gesamtdrehimpuls erhalten bleiben. Das Kraftfeld \mathbf{f} erfüllt diese Bedingung, wenn es z.B. folgende Form hat (Friederich, 1992):

$$\mathbf{f} = -\nabla \cdot \mathbf{m}, \quad (2.2)$$

wobei \mathbf{m} an der Erdoberfläche verschwindet und außerdem symmetrisch ist. Man nennt \mathbf{m} auch die *Momententensordichte*.

Wir werden im folgenden zeigen, daß unter den oben genannten Voraussetzungen Impuls- und Drehimpulserhaltung gilt.

\mathbf{f} muß erfüllen:

$$\iiint_{V_{\oplus}} \mathbf{f} \, dV = 0,^1 \quad (2.3)$$

(Erhaltung des Gesamtimpulses)

$$\iiint_{V_{\oplus}} \mathbf{x} \times \mathbf{f} \, dV = 0 \quad (2.4)$$

(Erhaltung des Gesamtdrehimpulses).

Die Gesamtimpulserhaltung lautet mit $\mathbf{f} = -\nabla \cdot \mathbf{m}$:

$$\iiint_{V_{\oplus}} \mathbf{f} \, dV = - \iiint_{V_{\oplus}} \nabla \cdot \mathbf{m} \, dV = - \iint_{A_{\oplus}} \mathbf{m} \cdot d\mathbf{A}, \quad (2.5)$$

¹Das Zeichen \oplus soll für die Erde stehen.

wobei wir den Gaußschen Integralsatz verwendet haben. Da wir fordern, daß \mathbf{m} überall auf der Erdoberfläche verschwindet, ist das Integral auf der rechten Seite Null und somit der Gesamtimpuls erhalten.

Im Falle der Gesamtdrehimpulserhaltung definieren wir zuerst das Gesamtdrehmoment

$$\mathbf{D} \stackrel{\text{def}}{=} \iiint_{V_{\oplus}} \mathbf{x} \times \mathbf{f} \, dV, \quad (2.6)$$

welches verschwinden muß. Wir gehen auf Indexschreibweise über und rechnen in kartesischen Koordinaten:

$$D_i = \iiint_{V_{\oplus}} \epsilon_{ijk} x_j f_k \, dV. \quad (2.7)$$

Hierin berechnen wir das Kreuzprodukt mit Hilfe des sogenannten **ϵ -Tensors**. Dies ist ein *vollständig antisymmetrischer Tensor 3. Stufe im dreidimensionalen Raum*. Bezüglich eines kartesischen Koordinatensystems ist ϵ_{ijk} gleich 1 wenn die Permutation ijk der Zahlen 123 eine gerade Anzahl Inversionen besitzt, -1 falls diese Anzahl ungerade ist, und Null falls zwei Indizes der ijk gleich sind.

Wir fahren fort mit

$$\begin{aligned} \mathbf{D} &= - \iiint_{V_{\oplus}} \epsilon_{ijk} x_j \frac{\partial}{\partial x_l} m^{lk} \, dV \\ &= - \iiint_{V_{\oplus}} \epsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_l} (x_j m^{lk}) \, dV + \iiint_{V_{\oplus}} \epsilon_{ijk} m^{jk} \, dV. \end{aligned}$$

Das erste Integral auf der rechten Seite wandeln wir in ein Oberflächenintegral um, welches dann wegen $\mathbf{m}(A_{\oplus}) \equiv 0$ verschwindet. Das zweite Integral ist Null, weil \mathbf{m} symmetrisch konstruiert ist. Somit haben wir gezeigt, daß auch der Gesamtdrehimpuls erhalten bleibt.

2.2 Berechnung der Quellterme

Beim Ableiten der Differentialgleichungen für die Entwicklungskoeffizienten hatten wir \mathbf{f} durch 3 Skalare G , H und K repräsentiert. In der Praxis sind jedoch die Elemente des sogenannten *Momententensors* gegeben. Wir müssen deshalb die Skalare bzw. die Entwicklungskoeffizienten der Skalare durch die Elemente dieses Momententensors ausdrücken. Machen wir Gebrauch von den Operationen

$$\frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} (f^{\vartheta} \sin \vartheta) + \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \varphi} f^{\varphi} = \nabla_1^2 H,$$

sowie

$$\frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \varphi} f^{\vartheta} - \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} (f^{\varphi} \sin \vartheta) = \nabla_1^2 K,$$

und ersetzen die Skalare gleich durch ihre Kugelfunktionsentwicklung, bekommen wir nach innerer Produktbildung mit $\bar{Y}_l^m(\vartheta, \varphi)$:

$$G_l^m = \iint d\Omega f^r \bar{Y}_l^m \quad (2.8)$$

$$\begin{aligned} H_l^m &= -\frac{1}{l(l+1)} \iint \frac{d\Omega}{\sin \vartheta} \left[\frac{\partial}{\partial \vartheta} (f^\vartheta \sin \vartheta) + \frac{\partial}{\partial \varphi} f^\varphi \right] \bar{Y}_l^m \\ K_l^m &= -\frac{1}{l(l+1)} \iint \frac{d\Omega}{\sin \vartheta} \left[\frac{\partial}{\partial \varphi} f^\vartheta - \frac{\partial}{\partial \vartheta} (f^\varphi \sin \vartheta) \right] \bar{Y}_l^m. \end{aligned}$$

Hierin bedeutet $d\Omega = \sin \vartheta d\vartheta d\varphi$ das infinitesimale Oberflächenelement auf der Kugel mit Radius 1.

Wenn $l = 0$ ist, liegt eine rein radiale Bewegung vor, d.h. die Betrachtung von H und K wird sinnlos; wir behalten dann übrig:

$$G_0^0 = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \iint d\Omega f^r. \quad (2.9)$$

Sei nun im folgenden $l > 0$.

Durch partielle Integration können wir die Ableitung nach ϑ und φ auf die Kugelfunktionen wälzen, und schreiben dann kompakter:

$$H_l^m = \frac{1}{l(l+1)} \iint d\Omega \mathbf{f} \cdot \nabla_1 \bar{Y}_l^m \quad (2.10)$$

$$K_l^m = \frac{1}{l(l+1)} \iint d\Omega (\hat{\mathbf{r}} \times \mathbf{f}) \cdot \nabla_1 \bar{Y}_l^m. \quad (2.11)$$

Im Rahmen dieser Arbeit interessieren wir uns ausschließlich für die sphäroidale Bewegung. Dafür ist jedoch nur das 4×4 -System (1.116) von Bedeutung, dementsprechend brauchen wir im Quellterm nur die Entwicklungskoeffizienten G_l^m und H_l^m zu berücksichtigen. Wir werten diese Koeffizienten unter der Annahme aus, daß $\mathbf{f} = -\nabla \cdot \mathbf{m}$.

Wir verwenden wieder die Vektor- und Tensornotation aus Abschnitt 1.2 und schreiben

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{m} &= m^{ij}|_i \mathbf{b}_j, \quad i, j = 1, 2, 3 \\ \nabla_1 \bar{Y}_l^m &= r \mathbf{b}^\alpha \frac{\partial \bar{Y}_l^m}{\partial \Theta^\alpha}, \quad \alpha = 2, 3, , \end{aligned}$$

mit den m^{ij} bezüglich der Basisvektoren (1.22).

Also ist

$$(\nabla \cdot \mathbf{m}) \cdot \nabla_1 \bar{Y}_l^m = r m^{i\alpha}|_i \frac{\partial \bar{Y}_l^m}{\partial \Theta^\alpha}. \quad (2.12)$$

Die Divergenz eines symmetrischen Tensors hatten wir schon einmal in Verbindung mit der Bewegungsgleichung ausgewertet. Wir übernehmen dieses Ergebnis und erhalten dann (jetzt wieder mit Tensorkomponenten bezüglich normierten Basisvektoren gemäß Übergang (1.53)) für die G_l^m und H_l^m :

$$\begin{aligned} G_l^m &= - \iint d\Omega \left\{ \left[\frac{\partial m^{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial m^{r\vartheta}}{\partial \vartheta} + \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial m^{r\varphi}}{\partial \varphi} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{2}{r} m^{rr} + \frac{\cot \vartheta}{r} m^{r\vartheta} - \frac{1}{r} (m^{\vartheta\vartheta} + m^{\varphi\varphi}) \right] \bar{Y}_l^m \right\} \end{aligned} \quad (2.13)$$

$$\begin{aligned}
H_l^m &= -\frac{1}{l(l+1)} \iint d\Omega \left\{ \left[\frac{\partial m^{r\vartheta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial m^{\vartheta\vartheta}}{\partial \vartheta} + \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial m^{\vartheta\varphi}}{\partial \varphi} \right. \right. \\
&\quad + \frac{3}{r} m^{r\vartheta} + \frac{\cot \vartheta}{r} (m^{\vartheta\vartheta} - m^{\vartheta\varphi}) \left. \right] \frac{\partial \bar{Y}_l^m}{\partial \vartheta} \\
&\quad + \frac{1}{\sin \vartheta} \left[\frac{\partial m^{r\varphi}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial m^{\vartheta\varphi}}{\partial \vartheta} + \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial m^{\vartheta\varphi}}{\partial \varphi} \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{3}{r} m^{r\varphi} + \frac{2 \cot \vartheta}{r} m^{\vartheta\varphi} \right] \frac{\partial \bar{Y}_l^m}{\partial \varphi} \right\}. \tag{2.14}
\end{aligned}$$

Da die Quelle punktförmig lokalisiert sein soll, setzen wir \mathbf{m} als Produkt eines Momententensors und einer räumlichen δ -Funktion an:

$$\mathbf{m}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{M}h(t)\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_s). \tag{2.15}$$

$h(t)$ ist eine noch nicht näher bestimmte Zeitfunktion.

In Kugelkoordinaten formulieren wir die δ -Funktion bestehend aus 3 Faktoren:

$$\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_s) = \frac{\delta(r - r_s)}{r_s^2} \frac{\delta(\vartheta - \vartheta_s)}{\sin \vartheta_s} \delta(\varphi - \varphi_s). \tag{2.16}$$

Wir benutzen folgende Eigenschaft der δ -Funktion:

$$\int f(x) \frac{d}{dx} \delta(x - x_0) dx = -\frac{df(x)}{dx} \Big|_{x=x_0}, \tag{2.17}$$

und schreiben dann unsere Koeffizienten als

$$\begin{aligned}
G_l^m &= -\frac{h(t)}{r_s^2} \left\{ \left[M^{rr} \delta'(r - r_s) + \frac{2M^{rr}}{r} \delta(r - r_s) - \frac{1}{r} (M^{\vartheta\vartheta} + M^{\vartheta\varphi}) \delta(r - r_s) \right] \bar{Y}_l^m \right. \\
&\quad \left. - \frac{M^{r\vartheta}}{r} \delta(r - r_s) \frac{\partial \bar{Y}_l^m}{\partial \vartheta} - \frac{M^{r\varphi}}{r \sin \vartheta} \delta(r - r_s) \frac{\partial \bar{Y}_l^m}{\partial \varphi} \right\}_{\vartheta_s, \varphi_s}, \tag{2.18}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H_l^m &= -\frac{h(t)}{r_s^2 l(l+1)} \left\{ \left[M^{r\vartheta} \delta'(r - r_s) + \frac{3}{r} M^{r\vartheta} \delta(r - r_s) \right. \right. \\
&\quad + \frac{\cot \vartheta}{r} (M^{\vartheta\vartheta} - M^{\vartheta\varphi}) \delta(r - r_s) \left. \right] \frac{\partial \bar{Y}_l^m}{\partial \vartheta} \\
&\quad + \frac{1}{\sin \vartheta} \left[M^{r\varphi} \delta'(r - r_s) + \frac{3}{r} M^{r\varphi} \delta(r - r_s) + \frac{2 \cot \vartheta}{r} M^{\vartheta\varphi} \delta(r - r_s) \right] \frac{\partial \bar{Y}_l^m}{\partial \varphi} \\
&\quad \left. \left. - \left[\frac{2M^{\vartheta\varphi}}{r \sin \vartheta} \frac{\partial^2 \bar{Y}_l^m}{\partial \vartheta \partial \varphi} + \frac{M^{\vartheta\vartheta}}{r} \frac{\partial^2 \bar{Y}_l^m}{\partial \vartheta^2} + \frac{M^{\vartheta\varphi}}{r \sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2 \bar{Y}_l^m}{\partial \varphi^2} \right] \delta(r - r_s) \right\}_{\vartheta_s, \varphi_s}. \tag{2.19}
\end{aligned}$$

Es erweist sich nun als günstig, das Koordinatensystem so zu drehen, daß die Quelle im „Nordpol“ zu liegen kommt. Wir machen diesen Übergang auf dem Weg

$$\begin{aligned}
\varphi_s &\rightarrow 0 \\
\vartheta_s &\rightarrow 0,
\end{aligned}$$

in dieser Reihenfolge. Bevor wir aber den Übergang $\varphi_s \rightarrow 0$ machen, muß die Ableitung der Kugelflächenfunktion nach φ ausgerechnet werden:

Aus Formel (1.81) erhalten wir

$$\frac{\partial \bar{Y}_l^m}{\partial \varphi} = -im \bar{Y}_l^m, \quad \text{mit } m = -l, \dots, +l, \quad (2.20)$$

wobei dann

$$\bar{Y}_l^m(\vartheta_s, \varphi_s = 0) = N_l^{|m|} P_l^{|m|}(\cos \vartheta_s). \quad (2.21)$$

Wir werden sehen, daß nach dem Übergang $\vartheta_s \rightarrow 0$ nur noch Terme mit der Ordnung $|m| \leq 2$ übrig bleiben. Dazu betrachten wir die zugeordneten Legendrepolygone für kleine Winkel ϑ . Man kann zeigen (siehe Anhang A.3), daß für $\vartheta \ll 1$ diese Polynome die Form

$$P_l^{|m|}(\vartheta \ll 1) \approx \frac{1}{2^{|m|}|m|!} \frac{(l+|m|)!}{(l-|m|)!} \vartheta^{|m|} - \left(\frac{|m|}{3!2^{|m|}|m|!} \frac{(l+|m|)!}{(l-|m|)!} + \frac{1}{2^{|m|+2}(|m|+1)!} \frac{(l+|m|+1)!}{(l-|m|-1)!} \right) \vartheta^{|m|+2}$$

haben. Wir kürzen dies ab mit

$$P_l^{|m|}(\vartheta \ll 1) \approx a_1(l, |m|) \vartheta^{|m|} - a_2(l, |m|) \vartheta^{|m|+2}. \quad (2.22)$$

Die Koeffizienten G_l^m und H_l^m enthalten höchstens zweite Ableitungen nach ϑ , und aus obiger Näherungsformel für die $P_l^{|m|}$ sehen wir dann, daß

$$\lim_{\vartheta \rightarrow 0} \left(P_l^{|m|}, \frac{\partial P_l^{|m|}}{\partial \vartheta}, \frac{\partial^2 P_l^{|m|}}{\partial \vartheta^2} \right) = 0, \quad \text{für } |m| > 2.$$

Mit diesem Ergebnis und

$$\cos \vartheta \approx 1, \quad \sin \vartheta \approx \vartheta \quad \text{für } \vartheta \ll 1$$

gehen wir nun in die Koeffizientengleichungen für G_l^m und H_l^m und erhalten nach Transformation in den Frequenzbereich für die Ordnungen $m = -2, -1, 0, 1, 2$ die Ergebnisse für

Ordnung $m = 0$:

$$\tilde{G}_l^0 = -\frac{\tilde{h}}{r_s^2} \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} \left[M^{rr} \delta'(r - r_s) + \frac{1}{r} \left(2M^{rr} - M^{\vartheta\vartheta} - M^{\varphi\varphi} \right) \delta(r - r_s) \right] \quad (2.23)$$

$$\tilde{H}_l^0 = -\frac{\tilde{h}}{2rr_s^2} \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} \left(M^{\vartheta\vartheta} + M^{\varphi\varphi} \right) \delta(r - r_s), \quad (2.24)$$

Ordnung $m = \pm 1$:

$$\tilde{G}_l^{\pm 1} = \frac{\tilde{h}}{2rr_s^2} l(l+1) \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi l(l+1)}} \left(M^{r\vartheta} \mp iM^{r\varphi} \right) \delta(r - r_s) \quad (2.25)$$

$$\tilde{H}_l^{\pm 1} = -\frac{\tilde{h}}{2r_s^2} \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi l(l+1)}} \left(M^{r\vartheta} \mp iM^{r\varphi} \right) \left[\delta'(r - r_s) + \frac{3}{r} \delta(r - r_s) \right], \quad (2.26)$$

Ordnung $m = \pm 2$:

$$\tilde{G}_l^{\pm 2} = 0 \quad (2.27)$$

$$\tilde{H}_l^{\pm 2} = -\frac{\tilde{h}}{4rr_s^2} \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi l(l+1)}} (l^2 + l - 2) \left(M^{\varphi\varphi} - M^{\vartheta\vartheta} \pm 2iM^{\vartheta\varphi} \right) \delta(r - r_s). \quad (2.28)$$

Teil II

Numerisches Lösen der Bewegungsgleichungen

Kapitel 3

Greensche Funktion mittels Kombination von Basislösungen an der Erdoberfläche

3.1 Allgemeine Form der Lösung des linearen Differentialgleichungssystems

Wir haben in den Beziehungen für die Entwicklungskoeffizienten der Quelle eine δ -Funktion und ihre Ableitung stehen. Was bedeutet das für die allgemeine Lösung unseres linearen Differentialgleichungssystems? Dazu stellen wir ein paar generelle Betrachtungen über dessen Verhalten bei einer Inhomogenität obiger Form an.

Die gesuchten Funktionen \tilde{U}_l^m , \tilde{R}_l^m , \tilde{V}_l^m und \tilde{S}_l^m bezeichnen wir nun als allgemeinen Funktionen-Vektor $\mathbf{y}(r)$

$$\mathbf{y}(r) = \begin{pmatrix} y_1(r) \\ y_2(r) \\ y_3(r) \\ y_4(r) \end{pmatrix}, \quad \text{mit} \quad y_1 = \tilde{U}_l^m, \quad y_2 = \tilde{R}_l^m, \quad y_3 = \tilde{V}_l^m, \quad y_4 = \tilde{S}_l^m.$$

Wir schreiben dann die Bewegungsgleichungen in folgender Weise (Collatz, 1990):

$$\frac{d}{dr} \mathbf{y}(r) = \mathbf{A}(r) \cdot \mathbf{y}(r) + \mathbf{z}(r), \quad (3.1)$$

wobei sich die Matrix $\mathbf{A}(r)$ durch Vergleich mit dem System (1.116) ergibt. Der Inhomogenitätsvektor $\mathbf{z}(r)$ besteht aus den Quelltermen:

$$\mathbf{z}(r) = \begin{pmatrix} z_1(r) \\ z_2(r) \\ z_3(r) \\ z_4(r) \end{pmatrix}, \quad \text{mit} \quad z_1 = 0, \quad z_2 = -\tilde{G}_l^m, \quad z_3 = 0, \quad z_4 = -\tilde{H}_l^m.$$

Bezeichnen wir die Lösung der homogenen Gleichung ($\mathbf{z} \equiv 0$) mit $\mathbf{Y}(r)$, wobei \mathbf{Y} eine aus den Fundamentallösungen gebildete Matrix ist, so können wir eine spezielle Lösung \mathbf{y}_s zu $\mathbf{z}(r) \not\equiv 0$ z.B. durch Variation der Konstanten gewinnen.

Der Ansatz

$$\mathbf{y}_s(r) = \mathbf{Y}(r) \cdot \mathbf{c}(r)$$

führt auf

$$\mathbf{Y}(r) \cdot \frac{d}{dr} \mathbf{c}(r) = \mathbf{z}(r),$$

oder

$$\mathbf{c}(r) = \int_{r_0}^r dr' \mathbf{Y}^{-1}(r') \cdot \mathbf{z}(r').$$

Die Inhomogenität hat in unserem Fall die Form

$$\mathbf{z}(r) = \mathbf{z}_1(r)\delta(r - r_s) + \mathbf{z}_2 \frac{d}{dr} \delta(r - r_s). \quad (3.2)$$

Einsetzen in die vorherige Gleichung ergibt für

$$r_0 < r < r_s : \quad \mathbf{c}(r) = 0, \quad (3.3)$$

und falls sich der Quellort innerhalb des Integrationsintervall befindet:

$$\mathbf{c}(r) \equiv \mathbf{c}_s = \mathbf{Y}^{-1}(r_s) \cdot \mathbf{z}_1(r_s) - \frac{d\mathbf{Y}^{-1}(r_s)}{dr} \cdot \mathbf{z}_2, \quad r_0 < r_s < r. \quad (3.4)$$

Wegen $\mathbf{Y}^{-1} \cdot \mathbf{Y} = \mathbf{I}$ finden wir

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr} (\mathbf{Y}^{-1} \cdot \mathbf{Y}) &= \frac{d\mathbf{Y}^{-1}}{dr} \cdot \mathbf{Y} + \mathbf{Y}^{-1} \cdot \frac{d\mathbf{Y}}{dr} \\ &= \frac{d\mathbf{Y}^{-1}}{dr} \cdot \mathbf{Y} + \mathbf{Y}^{-1} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{Y} = 0, \end{aligned}$$

und somit

$$\frac{d\mathbf{Y}^{-1}}{dr} = -\mathbf{Y}^{-1} \cdot \mathbf{A}.$$

Also bekommen wir

$$\mathbf{c}_s = \mathbf{Y}^{-1}(r_s) \cdot [\mathbf{z}_1(r_s) + \mathbf{A}(r_s) \cdot \mathbf{z}_2], \quad r_0 < r_s < r. \quad (3.5)$$

Die allgemeine Lösung des Differentialgleichungssystem ist dann die Summe aus der Lösung des homogenen Systems und der speziellen Lösung:

$$\mathbf{y}_{allg}(r) = \begin{cases} \mathbf{Y}(r) \cdot \mathbf{c} & \text{für } r_0 < r < r_s \\ \mathbf{Y}(r) \cdot \mathbf{c} + \mathbf{Y}(r) \cdot \mathbf{Y}^{-1}(r_s) \cdot [\mathbf{z}_1(r_s) + \mathbf{A}(r_s) \cdot \mathbf{z}_2] & \text{für } r_0 < r_s < r \end{cases}. \quad (3.6)$$

3.1.1 Unstetigkeit der allgemeinen Lösung am Quellort

Wir entnehmen der Beziehung (3.6) daß die allgemeine Lösung am Quellort einen von der Quelle und der Matrix \mathbf{A} bestimmten Sprung der Größe

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_{allg}(r_s + 0) - \mathbf{y}_{allg}(r_s - 0) &= \mathbf{z}_1(r_s) + \mathbf{A}(r_s) \cdot \mathbf{z}_2 \\ &\stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{s}(r_s) \end{aligned} \quad (3.7)$$

macht. Wir können diesen Sprung angeben, indem wir in

$$\mathbf{z}(r) = \mathbf{z}_1(r)\delta(r - r_s) + \mathbf{z}_2\delta'(r - r_s) = \begin{pmatrix} 0 \\ -\tilde{G}_l^m \\ 0 \\ -\tilde{H}_l^m \end{pmatrix} \quad (3.8)$$

z_1 und z_2 entsprechend unserer Koeffizienten (2.23)ff identifizieren, und in die Sprunggleichung (3.7) einsetzen:

Ordnung $m = 0$:

$$\mathbf{s}(r_s) = \frac{\tilde{h}}{r_s^3} \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} \begin{pmatrix} \frac{r_s}{\tilde{C}} M^{rr} \\ \frac{2\tilde{F}}{\tilde{C}} M^{rr} - M^{\vartheta\vartheta} - M^{\varphi\varphi} \\ 0 \\ -\frac{\tilde{F}}{\tilde{C}} M^{rr} + \frac{1}{2} (M^{\vartheta\vartheta} + M^{\varphi\varphi}) \end{pmatrix}, \quad (3.9)$$

Ordnung $m = \pm 1$:

$$\mathbf{s}(r_s) = \frac{\tilde{h}}{2\tilde{L}r_s^2} \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi l(l+1)}} (M^{r\vartheta} \mp iM^{r\varphi}) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (3.10)$$

Ordnung $m = \pm 2$:

$$\mathbf{s}(r_s) = \frac{\tilde{h}}{4r_s^3} \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi l(l+1)}} (l^2 + l - 2) (M^{\varphi\varphi} - M^{\vartheta\vartheta} \pm i2M^{\vartheta\varphi}) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (3.11)$$

3.2 Anpassen der Lösung an die Randbedingungen durch Kombination von Basislösungen an der Erdoberfläche

Die Form der allgemeinen Lösung sagt uns, daß wir uns nur um die Lösung des homogenen Systems zu kümmern brauchen. Zu beachten sind allerdings die Randbedingungen, welche da lauten:

1. Die Spannung an der Erdoberfläche muß verschwinden („Freie Oberfläche–Bedingung“),
2. die Lösung muß im Erdmittelpunkt $r = 0$ endlich bleiben.

Diese Randbedingungen legen den konstanten Vektor \mathbf{c} in der allgemeinen Lösung fest.

Das homogene System hat 4 linear unabhängige Basislösungen, davon sind nur 2 bei $r = 0$ endlich bzw. regulär (ohne Beweis). Unterhalb der Quelle, d.h. $r < r_s$, ist die allgemeine Lösung

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_{allg}(r) &= \mathbf{Y}(r) \cdot \mathbf{c} \\ &= \mathbf{y}_1 c_1 + \mathbf{y}_2 c_2 + \mathbf{y}_3 c_3 + \mathbf{y}_4 c_4, \quad r < r_s, \end{aligned}$$

mit den 4 Basislösungen $\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_4$.

Die zweite Randbedingung verlangt, daß die Koeffizienten der bei $r = 0$ singulären Basislösungen gleich Null sind. Wir wählen o.B.d.A.¹ $c_3 = c_4 = 0$. Es bleibt übrig:

$$\mathbf{y}_{allg}(r) = \begin{cases} \mathbf{y}_1(r)c_1 + \mathbf{y}_2(r)c_2 & \text{für } r < r_s \\ \mathbf{y}_1(r)c_1 + \mathbf{y}_2(r)c_2 + \mathbf{Y}(r) \cdot \mathbf{Y}^{-1}(r_s) \cdot [\mathbf{z}_1(r_s) + \mathbf{A}(r_s) \cdot \mathbf{z}_2] & \text{für } r > r_s \end{cases}. \quad (3.12)$$

3.2.1 Bildung von Minoren aus linear unabhängigen Basislösungen

Die Form (3.12) der allgemeinen Lösung führt uns auf eine erste Art der Problemlösung:

Wir sehen, daß bei $r = r_s + 0$ gilt:

$$\mathbf{y}_{allg}(r_s + 0) = \mathbf{y}_1(r_s)c_1 + \mathbf{y}_2(r_s)c_2 + \mathbf{z}_1(r_s) + \mathbf{A}(r_s) \cdot \mathbf{z}_2.$$

Wir benötigen $\mathbf{y}_{allg}(a)$. Dazu müßten wir zwei bei $r = 0$ reguläre Basislösungen von einem Startradius r_1 zur Erdoberfläche und außerdem eine Lösung von r_s zur Erdoberfläche mit den Startwerten $\mathbf{z}_1(r_s) + \mathbf{A}(r_s) \cdot \mathbf{z}_2$ integrieren.

Die allgemeine Lösung habe dann an der Erdoberfläche die Form

$$\mathbf{y}_{allg}(a) = \mathbf{y}_1(a)c_1 + \mathbf{y}_2(a)c_2 + \mathbf{s}(a). \quad (3.13)$$

In Anlehnung an die Greensche Funktion bezeichnen wir von nun an $\mathbf{y}_{allg}(r)$ mit $\mathbf{g}(r)$ (nicht zu verwechseln mit der Schwere \mathbf{g}_0).

Die erste Randbedingung fordert $g_2(a) = g_4(a) = 0$. Wir suchen $g_1(a)$, $g_3(a)$, c_1 und c_2 , und haben dazu auch 4 Gleichungen zur Verfügung. Ordnet man diese Gleichungen etwas um, kann man schreiben

$$\begin{pmatrix} s_1(a) \\ s_2(a) \\ s_3(a) \\ s_4(a) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -y_{11}(a) & -y_{21}(a) \\ 0 & 0 & -y_{12}(a) & -y_{22}(a) \\ 0 & 1 & -y_{13}(a) & -y_{23}(a) \\ 0 & 0 & -y_{14}(a) & -y_{24}(a) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} g_1(a) \\ g_3(a) \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}. \quad (3.14)$$

Wir nehmen die *Cramersche Regel* zu Hilfe und berechnen für $g_1(r)$ bei $r = a$:

$$g_1 = s_1 - s_2 \frac{\mathbf{m}_3}{\mathbf{m}_5} + s_4 \frac{\mathbf{m}_1}{\mathbf{m}_5}, \quad r = a. \quad (3.15)$$

Mit $\mathbf{m}_1, \dots, \mathbf{m}_6$ bezeichnen wir Unterdeterminanten oder auch *Minoren* der obigen Koeffizientenmatrix (Woodhouse, 1988). Diese Minoren lauten im einzelnen:

$$\begin{aligned} \mathbf{m}_1(r) = \mathbf{m}_{12} &= \begin{vmatrix} y_{11} & y_{21} \\ y_{12} & y_{22} \end{vmatrix}, & \mathbf{m}_2(r) = \mathbf{m}_{13} &= \begin{vmatrix} y_{11} & y_{21} \\ y_{13} & y_{23} \end{vmatrix}, \\ \mathbf{m}_3(r) = \mathbf{m}_{14} &= \begin{vmatrix} y_{11} & y_{21} \\ y_{14} & y_{24} \end{vmatrix}, & \mathbf{m}_4(r) = \mathbf{m}_{23} &= \begin{vmatrix} y_{12} & y_{22} \\ y_{13} & y_{23} \end{vmatrix}, \end{aligned}$$

¹ohne Beschränkung der Allgemeinheit

$$\mathbf{m}_5(r) = \mathbf{m}_{24} = \begin{vmatrix} y_{12} & y_{22} \\ y_{14} & y_{24} \end{vmatrix}, \quad \mathbf{m}_6(r) = \mathbf{m}_{34} = \begin{vmatrix} y_{13} & y_{23} \\ y_{14} & y_{24} \end{vmatrix}.$$

Diese Minoren spielen eine wichtige Rolle bei der numerischen Behandlung unseres Problems, wie wir noch erläutern werden.

Wir sehen, daß g_1 in Gleichung (3.15) für $\mathbf{m}_5 = 0$ genauer betrachtet werden muß. Dies ist dann der Fall, wenn eine Eigenfrequenz der Erde vorliegt. Das ist eine Frequenz, bei der in Gleichung (3.13) die allgemeine Lösung $\mathbf{y}_{allg}(a)$ ohne anregende Kraft den Randbedingungen genügt. Das Verschwinden der Spannung erfordert in diesem Fall für eine nicht-triviale Lösung

$$\begin{vmatrix} y_{12}(a) & y_{22}(a) \\ y_{14}(a) & y_{24}(a) \end{vmatrix} = \mathbf{m}_5(a) \equiv 0,$$

während die restlichen Minoren bei $r = a$ nicht gleich Null sein müssen. Die Greensche Funktion $g_1(a)$ wird also bei Eigenfrequenzen unendlich.

Wir müssen deshalb sichergehen, daß wir mit den Stützstellen im Frequenzraum nicht zufällig eine Eigenfrequenz erwischen. Da wir jedoch die Eigenfrequenzen unseres Erdmodells von vornherein nicht kennen, aber wissen, daß diese reell sind, umgehen wir die Pole der Greenschen Funktion auf der reellen Achse, indem wir das Spektrum für komplexe Frequenzen $\omega - i\sigma$ berechnen. Mit diesem Trick können wir außerdem noch das Problem des *Aliasing* — der Verfälschung des Seismogramms innerhalb unseres berechneten Zeitbereichs $0 < t < T$ durch Signale, die zu einem späteren Zeitpunkt $t > T$ eintreffen würden — wirksam bekämpfen (siehe Anhang A.2).

Unser prinzipielles Vorgehen müsste folgendermaßen aussehen:

Wir besorgen uns bei einem genügend kleinen Startradius r_1 zwei zu je einer bei $r = 0$ regulären Basislösung gehörende linear unabhängige Anfangswerte und integrieren numerisch (wir verwenden das sog. *Bulirsch–Stoer–Verfahren*) von $r = r_1$ die homogenen Gleichungen zweimal bis $r = a$. Dies würde uns $\mathbf{y}_1(a)$ und $\mathbf{y}_2(a)$ liefern, aus deren Komponenten wir die benötigten Minoren berechnen. Dann müssten wir nochmals das homogene System von $r = r_s$ bis $r = a$ integrieren, und zwar mit Startwerten, die durch den Sprung der Lösung an der Quelle gegeben sind. Diese Integration ergäbe $\mathbf{s}(a)$; die Kombination von den $s_i(a)$ und $\mathbf{m}_j(a)$ nach Gleichung (3.15) ist dann der gesuchte Entwicklungskoeffizient $g_1(a) \equiv \tilde{U}_l^m(a)$.

Nun ist aber die Determinantenberechnung numerisch heikel, da man oft Differenzen von fast gleichen Zahlen bilden muß, wobei nicht selten das Verhältnis von Differenz zu Summanden unterhalb der beim numerischen Integrationsverfahren festgelegten Genauigkeit liegt. Diese Differenzen haben dann mit dem „richtigen“ Ergebnis nichts mehr gemein.

Um dieses Problem zu umgehen, ist es sinnvoll, die Minoren *selbst* von r_1 bis a zu integrieren, d.h. ein Differentialgleichungssystem für die Minoren aufzustellen und dies numerisch zu lösen. Man erhält die Minoren dann mit derselben Genauigkeit, mit welcher man die Basislösungen bekommen würde.

Wir müssten dann das Minoren–Gleichungssystem von $r = r_1$ bis $r = a$, und das homogene System (1.116) von $r = r_s$ bis $r = a$ berechnen, um Gleichung (3.15) bilden zu können.

Um das Gleichungssystem für die Minoren aufzustellen, greifen wir einen beliebigen Minor heraus, und notieren ihn als

$$\mathbf{m}_{jk} = y_{1j}y_{2k} - y_{1k}y_{2j}, \quad \mathbf{m}_{kj} = -\mathbf{m}_{jk}. \quad (3.16)$$

Leiten wir diesen nach r ab, erhalten wir

$$\mathbf{m}'_{jk} = y'_{1j}y_{2k} + y_{1j}y'_{2k} - y'_{1k}y_{2j} - y_{1k}y'_{2j}.$$

Mit der Indexschreibweise für das homogene System,

$$y'_{ni} = A_{ik}y_{nk}, \quad n = 1, 2, \dots,$$

können wir dies umformen in

$$\begin{aligned} \mathbf{m}'_{jk} &= A_{jl}y_{1l}y_{2k} + y_{1j}A_{kl}y_{2l} - A_{kl}y_{1l}y_{2j} - y_{1k}A_{jl}y_{2l} \\ &= A_{jl}(y_{1l}y_{2k} - y_{1k}y_{2l}) + A_{kl}(y_{1j}y_{2l} - y_{1l}y_{2j}) \\ &= A_{jl}\mathbf{m}_{lk} + A_{kl}\mathbf{m}_{jl}. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Dies sind die gesuchten Differentialgleichungen für die Minoren.

Mit Hilfe der Koeffizientenmatrix des homogenen Systems formulieren wir das Differentialgleichungssystem für die Minoren:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{m}_1}{dr} &= -\frac{2}{r}\mathbf{m}_1 - \frac{2l(l+1)}{r^2} \left(\tilde{A} - \frac{\tilde{F}^2}{\tilde{C}} - \tilde{N} \right) \mathbf{m}_2 + \frac{l(l+1)}{r}\mathbf{m}_3 \\ &\quad - \frac{l(l+1)\tilde{F}}{r\tilde{C}}\mathbf{m}_4 \end{aligned} \quad (3.18)$$

$$\frac{d\mathbf{m}_2}{dr} = \frac{1}{r} \left(1 - \frac{2\tilde{F}}{\tilde{C}} \right) \mathbf{m}_2 + \frac{1}{\tilde{L}}\mathbf{m}_3 + \frac{1}{\tilde{C}}\mathbf{m}_4 \quad (3.19)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{m}_3}{dr} &= -\frac{2\tilde{F}}{r\tilde{C}}\mathbf{m}_1 + \left[-\omega^2\rho_0 + \frac{l(l+1)}{r^2} \left(\tilde{A} - \frac{\tilde{F}^2}{\tilde{C}} \right) - \frac{2\tilde{N}}{r^2} \right] \mathbf{m}_2 \\ &\quad - \frac{1}{r} \left(3 + \frac{2\tilde{F}}{\tilde{C}} \right) \mathbf{m}_3 + \frac{1}{\tilde{C}}\mathbf{m}_5 \end{aligned} \quad (3.20)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{m}_4}{dr} &= \frac{2}{r}\mathbf{m}_1 + \left[-\omega^2\rho_0 + \frac{4}{r^2} \left(\tilde{A} - \frac{\tilde{F}^2}{\tilde{C}} - \tilde{N} \right) \right] \mathbf{m}_2 \\ &\quad - \frac{1}{r} \left(1 - \frac{2\tilde{F}}{\tilde{C}} \right) \mathbf{m}_4 + \frac{1}{\tilde{L}}\mathbf{m}_5 \end{aligned} \quad (3.21)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{m}_5}{dr} &= \frac{4}{r^2} \left(\tilde{A} - \frac{\tilde{F}^2}{\tilde{C}} - \tilde{N} \right) \mathbf{m}_1 + \left[-\omega^2\rho_0 + \frac{4}{r^2} \left(\tilde{A} - \frac{\tilde{F}^2}{\tilde{C}} - \tilde{N} \right) \right] \mathbf{m}_3 \\ &\quad + \left[-\omega^2\rho_0 + \frac{l(l+1)}{r^2} \left(\tilde{A} - \frac{\tilde{F}^2}{\tilde{C}} \right) - \frac{2\tilde{N}}{r^2} \right] \mathbf{m}_4 + \frac{1}{r} \left(\frac{2\tilde{F}}{\tilde{C}} - 5 \right) \mathbf{m}_5. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Diese 5 Gleichungen genügen, denn man erkennt nach Aufstellen der Gleichung für \mathbf{m}_6 , daß gilt:

$$\mathbf{m}_6 = -\frac{1}{l(l+1)}\mathbf{m}_1. \quad (3.23)$$

3.3 Startwerte für die numerische Integration

Um die Startwerte bei $r = r_1$ für die numerische Integration der Minoren zu erhalten, brauchen wir die für die Basislösungen. Wir müssen sicherstellen, daß diese Startwerte auch zu bei $r = 0$ regulären Lösungen gehören, deshalb benötigen wir für diese Lösungen analytische Ausdrücke. Diese erhalten wir, indem wir annehmen, daß die Erde unterhalb $r = r_1$ homogen und isotrop ist. Homogen bedeutet *keine r-Abhängigkeit* der elastischen Konstanten und der Dichte; isotropes Verhalten vereinfacht die 5 elastischen Parameter zu

$$\begin{aligned}\tilde{A} &= \tilde{C} = \tilde{\lambda} + 2\tilde{\mu} \\ \tilde{F} &= \tilde{\lambda} \\ \tilde{L} &= \tilde{N} = \tilde{\mu},\end{aligned}\tag{3.24}$$

Wir lassen auch im homogenen und isotropen Bereich Dämpfung zu, weshalb die elastischen Parameter dort ebenfalls komplex und frequenzabhängig werden. Dementsprechend müssen die *Laméschen Konstanten* λ und μ durch ihre Fouriertransformierten $\tilde{\lambda}$ und $\tilde{\mu}$ gemäß Abschnitt 1.3.3 ersetzt werden.

Im homogenen, isotropen Fall ist eine analytische Lösung der Differentialgleichungen (1.116)ff möglich. Eine detaillierte Berechnung der Lösungen befindet sich im Anhang A.4.

Wir geben hier gleich das Ergebnis für die zwei linear unabhängigen Basislösungen an (Takemoto u. Saito, 1972):

$$\begin{aligned}ry_{11}(r) &= l j_l(x_\alpha) - x_\alpha j_{l+1}(x_\alpha) \\ r^2 y_{12}(r) &= -(\tilde{\lambda} + 2\tilde{\mu}) x_\alpha^2 j_l(x_\alpha) + 2\tilde{\mu} [l(l-1) j_l(x_\alpha) + 2x_\alpha j_{l+1}(x_\alpha)] \\ ry_{13}(r) &= j_l(x_\alpha) \\ r^2 y_{14}(r) &= 2\tilde{\mu} [(l-1) j_l(x_\alpha) - x_\alpha j_{l+1}(x_\alpha)] \\ \\ ry_{21}(r) &= -l(l+1) j_l(x_\beta) \\ r^2 y_{22}(r) &= 2\tilde{\mu} [-l(l^2-1) j_l(x_\beta) + l(l+1) x_\beta j_{l+1}(x_\beta)] \\ ry_{23}(r) &= -(l+1) j_l(x_\beta) + x_\beta j_{l+1}(x_\beta) \\ r^2 y_{24}(r) &= \tilde{\mu} [x_\beta^2 j_l(x_\beta) - 2(l^2-1) j_l(x_\beta) - 2x_\beta j_{l+1}(x_\beta)].\end{aligned}\tag{3.25}$$

Hierin sind die $j_l(x)$ sphärische Besselfunktionen 1. Art der Ordnung l ; die Argumente x_α und x_β stehen für

$$x_\alpha = k_\alpha r, \quad k_\alpha = \frac{\omega}{\alpha}, \quad \alpha^2 = \frac{\tilde{\lambda} + 2\tilde{\mu}}{\rho_0} \tag{3.26}$$

$$x_\beta = k_\beta r, \quad k_\beta = \frac{\omega}{\beta}, \quad \beta^2 = \frac{\tilde{\mu}}{\rho_0}. \tag{3.27}$$

α bzw. β sind die Phasengeschwindigkeiten einer Longitudinal- bzw. Transversalwelle im elastischen, homogenen und isotropen Vollraum.

Wir erinnern uns an die Definition der Minoren

$$\mathbf{m}_{jk} = y_{1j}y_{2k} - y_{1k}y_{2j}, \quad \mathbf{m}_{kj} = -\mathbf{m}_{jk},$$

und bräuchten hier nur noch das Ergebnis (3.25) einzusetzen, um die Startwerte der Minoren beim Radius r_1 zu erhalten. Die in den Startwerten enthaltenen Besselfunktionen sind aber numerisch nicht so einfach zu bestimmen, da vor allem für hohe Ordnungen l bei den Algorithmen schnell ein „underflow“ auftreten kann.

Wir umgehen die direkte Berechnung der Besselfunktionen, indem wir nur ein spezielles Verhältnis zweier Besselfunktionen betrachten. Dieses lautet (Takeuchi u. Saito, 1972)

$$z_l(x) := \frac{x j_{l+1}(x)}{j_l(x)}, \quad x = x_\alpha, x_\beta. \quad (3.28)$$

Dieses Verhältnis tritt auf, wenn wir die Minoren-Startwerte durch $j_l(x_\alpha)j_l(x_\beta)$ dividieren, wobei wir sehen, daß die Startwerte dann nur noch von $z_l(x_\alpha)$ und $z_l(x_\beta)$ abhängen. Diese Division ist erlaubt, da zum einen noch die beliebigen Faktoren c_α und c_β (siehe Anhang A.4) in den Lösungen auftraten, und zum anderen dieser Divisor sich bei der Bildung der Minorenverhältnisse sowieso wieder herauskürzt.

Wir sehen noch, daß die Startwerte mit steigendem l wachsen. Da dies die bei $r = 0$ reguläre Lösung auch tut, könnten wir für große l im Laufe der Integration einen „overflow“ erhalten. Deshalb teilen wir die Startwerte noch durch den gemeinsamen Faktor $-r_1^2/l^2(l + 1)$ und schreiben sie in folgender Form nieder:

$$\begin{aligned} \mathbf{m}_2(r_1) &= \frac{1}{l} [-z_\alpha + z_\beta(z_\alpha - 1)] \\ \mathbf{m}_1(r_1) &= \frac{\tilde{\mu}}{r_1} \left[\frac{x_\beta^2}{l} + 2l(l + 1)\mathbf{m}_2(r_1) \right] \\ \mathbf{m}_3(r_1) &= \frac{\tilde{\mu}}{r_1} \left[-2\mathbf{m}_2(r_1) + \frac{x_\beta^2}{l(l + 1)}(z_\alpha - 1) \right] \\ \mathbf{m}_4(r_1) &= -\frac{\tilde{\mu}}{r_1} \left[\frac{x_\beta^2}{l^2}(1 - z_\beta) + 4\mathbf{m}_2(r_1) \right] \\ \mathbf{m}_5(r_1) &= \frac{\tilde{\mu}^2}{r_1^2} \left\{ -4(l - 1)(l + 2)\mathbf{m}_2(r_1) \right. \\ &\quad \left. + \frac{x_\beta^2}{l} \left[\frac{x_\beta^2 - 2(l - 1)(2l + 1)}{l(l + 1)} - \frac{4}{l + 1}z_\alpha - \frac{2}{l}z_\beta \right] \right\}. \end{aligned} \quad (3.29)$$

Dabei haben wir folgende Abkürzungen verwendet:

$$\begin{aligned} x_\alpha &= k_\alpha r_1, & x_\beta &= k_\beta r_1, \\ z_\alpha &= \frac{1}{l} z_l(x_\alpha), & z_\beta &= \frac{1}{l + 1} z_l(x_\beta). \end{aligned}$$

Zur Berechnung der $z_l(x)$ nehmen wir die Rekursionsformel (A.72), und setzen diese in die Formel für $z_l(x)$ ein:

$$z_l(x) = \frac{x j_{l+1}(x)}{j_l(x)} = 2l + 1 - \frac{x j_{l-1}}{j_l}$$

$$= 2l + 1 - x^2 \frac{j_{l-1}}{x j_l} = 2l + 1 - \frac{x^2}{z_{l-1}(x)}.$$

Da die Rekursionsformel für $j_l(x)$ nur in Richtung kleiner werdender l numerisch stabil ist, müssen wir diese Richtung auch für die $z_l(x)$ wählen:

$$z_{l-1}(x) = \frac{x^2}{2l + 1 - z_l(x)}. \quad (3.30)$$

Diese Rekursion beginnen wir für ein genügend großes l_0 mit dem Anfangswert

$$z_{l_0}(x) = \frac{x^2}{2l_0 + 3}.$$

3.3.1 Start der Integration in einer flüssigen Schicht

Wir können auch im flüssigen Medium beginnen zu integrieren. Dazu nehmen wir die Erde unterhalb $r = r_1$ als homogene, flüssige Kugel an. Das System (1.117)f ist dann analytisch lösbar, wenn wir annehmen $\rho_0 = \text{const}$, $\tilde{\lambda} = \text{const}$. Hierfür differenzieren wir die zweite Gleichung

$$y_1 = -\frac{1}{\omega^2 \rho_0} y'_2 \quad \rightsquigarrow \quad y'_1 = -\frac{1}{\omega^2 \rho_0} y''_2, \quad (3.31)$$

womit die erste Gleichung übergeht in

$$-\frac{1}{\omega^2 \rho_0} y''_2 = \frac{2}{r \omega^2 \rho_0} y'_2 + \left(\frac{1}{\tilde{\lambda}} - \frac{l(l+1)}{r^2 \omega^2 \rho_0} \right) y_2,$$

oder

$$y''_2 + \frac{2}{r} y'_2 + \left(\frac{\omega^2 \rho_0}{\tilde{\lambda}} - \frac{l(l+1)}{r^2} \right) y_2 = 0. \quad (3.32)$$

Dies ist eine *Besselsche* Differentialgleichung mit der bei $r = 0$ regulären Lösung

$$y_2(r) = c_\alpha j_l(k_\alpha r), \quad k_\alpha = \frac{\omega}{\alpha}. \quad (3.33)$$

Für $y_1(r)$ bekommen wir dann

$$y_1(r) = -\frac{c_\alpha}{\omega^2 \rho_0} \frac{d}{dr} j_l(k_\alpha r) = -\frac{c_\alpha}{\omega^2 \rho_0} \left(\frac{l}{r} j_l(k_\alpha r) - k_\alpha j_{l+1}(k_\alpha r) \right). \quad (3.34)$$

Wenn $l > 0$, dividieren wir die Lösung durch $c_\alpha l j_l(k_\alpha r)$, und gelangen zu den Startwerten

$$\begin{aligned} y_1(r_1) &= -\frac{1}{r_1 \omega^2 \rho_0} \left(1 - \frac{1}{l} z_l(x_\alpha) \right) \\ y_2(r_1) &= \frac{1}{l}. \end{aligned} \quad (3.35)$$

Im Fall $l = 0$ teilen wir nur durch $c_\alpha j_0(k_\alpha r)$, und finden

$$\begin{aligned} y_1(r_1) &= \frac{z_0(x_\alpha)}{r_1 \omega^2 \rho_0} \\ y_2(r_1) &= 1. \end{aligned} \quad (3.36)$$

3.3.2 Spezialfall $l = 0$

Die bisherigen Betrachtungen sind für den Fall $l > 0$ gültig. Der Fall $l = 0$ muß gesondert behandelt werden.

Wir können die Überlegungen für $l > 0$ auf diesen Fall übertragen, indem wir analog zu Gleichung (3.13) schreiben:

$$\mathbf{y}_{allg}(a) = \mathbf{y}_1(a)c_1 + \mathbf{s}(a), \quad (3.37)$$

da von den zwei Basislösungen des Systems (1.118) nur eine bei $r = 0$ regulär ist. Wieder nennen wir $\mathbf{y}_{allg}(a) = \mathbf{g}(a)$, und schreiben wegen der Randbedingungen „Freie Oberfläche“ bei $r = a$:

$$\begin{aligned} g_1(a) &= y_{11}(a)c_1 + s_1(a) \\ 0 &= y_{12}(a)c_1 + s_2(a), \end{aligned}$$

woraus wir berechnen:

$$g_1(a) = s_1(a) - s_2(a) \frac{y_{11}(a)}{y_{12}(a)}. \quad (3.38)$$

Um die Startwerte des Systems (1.118)f zu erhalten, setzen wir einfach in der ersten Basislösung von (3.25)ff $l = 0$, und bekommen

$$\begin{aligned} r_1 y_{11}(r_1) &= -x_\alpha j_1(x_\alpha) \\ r_1^2 y_{12}(r_1) &= -(\tilde{\lambda} + 2\tilde{\mu})x_\alpha^2 j_0(x_\alpha) + 4\tilde{\mu}x_\alpha j_1(x_\alpha). \end{aligned} \quad (3.39)$$

Wir lösen zuerst nach $y_{11}(r_1)$ bzw. $y_{12}(r_1)$ auf, dividieren beide Gleichungen durch j_0/r_1 und erhalten dann

$$\begin{aligned} y_{11}(r_1) &= -z_0(x_\alpha) \\ y_{12}(r_1) &= \frac{4\tilde{\mu}}{r_1}z_0(x_\alpha) - r_1\omega^2\rho_0. \end{aligned} \quad (3.40)$$

3.4 Fortsetzung der Lösungen an Grenzflächen

Leider ist es uns nicht möglich mit einem geeigneten Einschrittverfahren reibungslos von einem Startradius r_1 „in einem Zug“ zur Erdoberfläche a zu integrieren. Denn erstens sind Dichte und Wellengeschwindigkeiten aufgrund des Schichtaufbaus des Erdmodells nur stückweise stetige Funktionen mit teilweise erheblichen Sprüngen an den Schichtgrenzen. Zweitens beinhaltet das Erdmodell noch eine flüssige Schicht, den äußeren Erdkern, in welcher nicht dasselbe Differentialgleichungssystem wie in festen Schichten verwendet werden kann.

Wir werden deshalb jeweils von Schichtanfang bis Schichtende rechnen, und je nach Materialzustand der darauf folgenden Schicht die Anfangswerte in dieser Schicht aus den Endwerten der letzten konstruieren (Takeuchi u. Saito, 1972).

Übergang feste Schicht → feste Schicht

Dies ist der einfachste Fall. Nehmen wir die Schichten als miteinander „verschweißt“ an, ergeben die Grenzbedingungen, daß Verschiebungsvektor und Normalspannung stetig sein müssen.

In diesem Fall können wir die Minorenwerte bzw. Verschiebungs- und Spannungswerte am Ende der vorhergehenden Schicht einfach als Anfangswerte für die folgende Schicht nehmen.

Übergang feste Schicht → flüssige Schicht

Dies kommt vor beim Übergang vom inneren zum äußeren Erdkern. Um hier die Fortsetzungsbedingungen zu erhalten, müssen wir die Form der Lösung von System (1.116)ff untersuchen.

Auf der festen (soliden) Seite der Grenzfläche schreiben wir die Lösung als

$$y_i^s = c_1^s y_{1i}^s + c_2^s y_{2i}^s, \quad i = 1, 2, 3, 4.$$

Da es an dieser Grenzfläche keine Scherspannung geben kann, können wir das Verhältnis der Integrationskonstanten bestimmen:

$$y_4^s = c_1^s y_{14}^s + c_2^s y_{24}^s = 0 \quad \leadsto \quad \frac{c_2^s}{c_1^s} = -\frac{y_{14}^s}{y_{24}^s}, \quad (3.41)$$

also

$$y_i^s = c_1^s \left(y_{1i}^s - \frac{y_{14}^s}{y_{24}^s} y_{2i}^s \right), \quad i = 1, 2, 3, 4. \quad (3.42)$$

Auf der flüssigen (liquiden) Seite der Grenzfläche hat die Lösung die Form

$$y_i^l = c_1^l y_{1i}^l, \quad i = 1, 2. \quad (3.43)$$

An der Grenzfläche muß nun gelten

$$y_i^l = y_i^s, \quad i = 1, 2, \quad , \quad (3.44)$$

$$\text{d.h.} \quad c_1^l y_{1i}^l = c_1^s \left(y_{1i}^s - \frac{y_{14}^s}{y_{24}^s} y_{2i}^s \right), \quad (3.45)$$

bzw. für die einzelnen Komponenten:

$$c_1^l y_{11}^l = \frac{c_1^s}{y_{24}^s} (y_{11}^s y_{24}^s - y_{14}^s y_{21}^s) = \frac{c_1^s}{y_{24}^s} m_3 \quad (3.46)$$

$$c_1^l y_{12}^l = \frac{c_1^s}{y_{24}^s} (y_{12}^s y_{24}^s - y_{14}^s y_{22}^s) = \frac{c_1^s}{y_{24}^s} m_5. \quad (3.47)$$

Wir vereinbaren $c_1^s = c_1^l y_{24}^s$ und damit wegen Gleichung (3.41) $c_2^s = -c_1^l y_{14}^s$. Dann bekommen wir für die Fortsetzung am Übergang *fest*→*flüssig*

$$y_{11}^l = m_3, \quad y_{12}^l = m_5. \quad (3.48)$$

Übergang flüssige Schicht → feste Schicht

Da wir mit Minoren rechnen, müssen wir aus einer Lösung auf der flüssigen Seite der Grenzfläche zwei linear unabhängige Lösungen auf der festen Seite konstruieren. Eine davon können wir gleich angeben:

$$y_{1i}^s = y_{1i}^l, \quad i = 1, 2 \quad (3.49)$$

$$y_{13}^s = y_{14}^s = 0. \quad (3.50)$$

Die zweite Lösung erhalten wir dadurch, daß wir berücksichtigen, daß die Tangentialkomponente der Verschiebung an der Grenzfläche $flüssig \rightarrow fest$ nicht stetig zu sein braucht. Wir wählen deshalb einfach

$$y_{23}^s = 1, \quad y_{21}^s = y_{22}^s = y_{24}^s = 0. \quad (3.51)$$

Aus diesen beiden linear unabhängigen Lösungen konstruieren wir die Anfangswerte der Minoren zu

$$\begin{aligned} m_1 &= y_{11}^s y_{22}^s - y_{12}^s y_{21}^s = y_{11}^l y_{22}^s - y_{12}^l y_{21}^s = 0 \\ m_2 &= y_{11}^s y_{23}^s - y_{13}^s y_{21}^s = y_{11}^l y_{23}^s - y_{13}^s y_{21}^s = y_{11}^l \\ m_3 &= y_{11}^s y_{24}^s - y_{14}^s y_{21}^s = y_{11}^l y_{24}^s - y_{14}^s y_{21}^s = 0 \\ m_4 &= y_{12}^s y_{23}^s - y_{13}^s y_{22}^s = y_{12}^l y_{23}^s - y_{13}^s y_{22}^s = y_{12}^l \\ m_5 &= y_{12}^s y_{24}^s - y_{14}^s y_{22}^s = y_{12}^l y_{24}^s - y_{14}^s y_{22}^s = 0. \end{aligned} \quad (3.52)$$

3.5 Der Bulirsch–Stoer–Integrationsalgorithmus

Das Integrationsverfahren, mit welchem wir die linearen Differentialgleichungen lösen, ist ein Einschrittverfahren verbunden mit Extrapolation durch rationale Funktionen. Wir skizzieren hier nur die Funktionsweise dieser Methode und verweisen den interessierteren Leser auf die ausführlichen Darstellungen in

- Bulirsch, Stoer: *Numerical treatment of ordinary differential equations by extrapolation methods*, Num. Math. **8**, 1–13 (1966),
- Press et al.: *Numerical recipes* (s. Lit.hinw.),
- Stoer, Bulirsch: *Numerische Mathematik*, Abschn. 7.2.14, Springer (1990).

Der Bulirsch–Stoer–Integrationsalgorithmus beruht auf folgendem Prinzip:

Das numerische Ergebnis, welches wir erhalten, wenn wir von r bis $r + H$ in äquidistanten Teilschritten h integrieren, wird als analytische Funktion von der Teilschrittweite h aufgefaßt. Diese Funktion wird „abgetastet“, indem man von r bis $r + H$ mit unterschiedlichen Teilschrittweiten $h = H/n$, $n > 0$, n ganzzahlig, integriert. Die so an diskreten Stellen gewonnene Funktion $y_{r+H}(h)$ wird dann zum „idealen“ Punkt $h = 0$ mittels Anpassung durch eine rationale Funktion extrapoliert. Die Abbildung 3.1 soll das Prinzip verdeutlichen. Der Ablauf des Algorithmus sieht dann so aus, daß man zuerst eine Sequenz von Unterteilungen definiert; z.B.

$$n = 2, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 32, 48, 64, 96, \dots, [n_j = 2n_{j-2}], \dots \quad . \quad (3.53)$$

Für die Teilschrittweite h bedeutet dies eine Verkleinerung gemäß

$$h = \frac{H}{n} = \frac{H}{2}, \frac{H}{4}, \frac{H}{6}, \dots \quad . \quad (3.54)$$

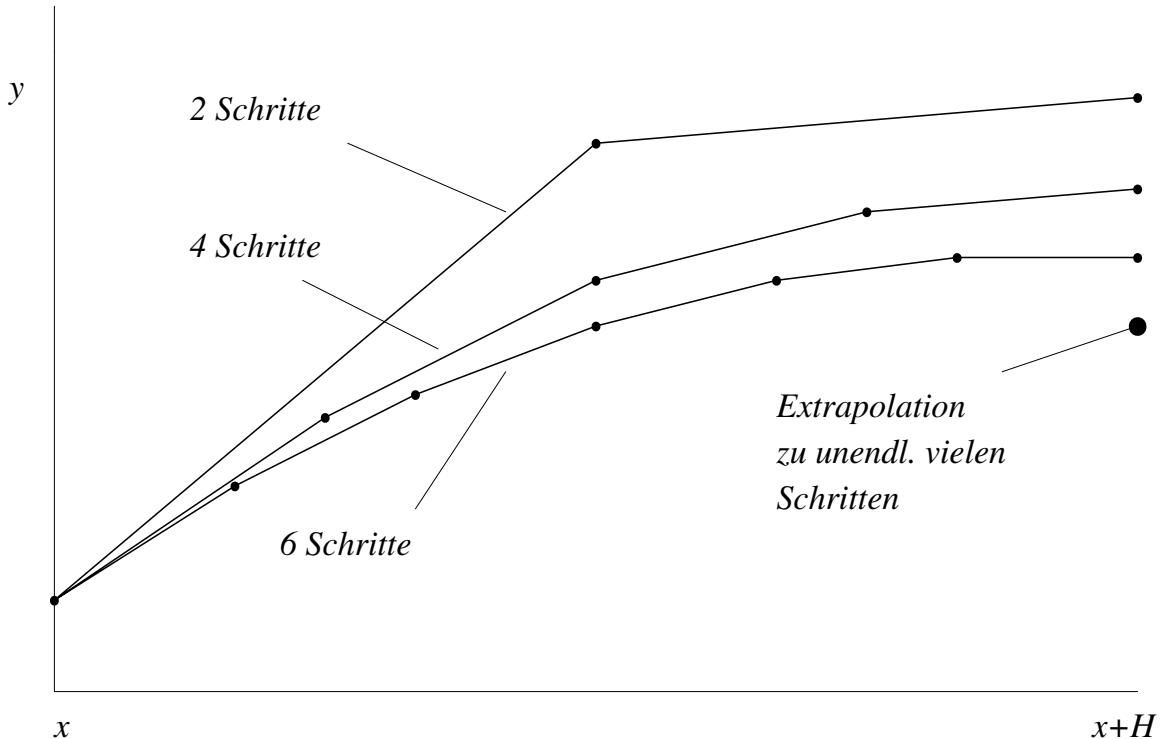


Abbildung 3.1: Bulirsch–Stoer–Integrationsprinzip

Der Algorithmus berechnet dann $y_{r+H}(h)$ nacheinander für $h = H, h = H/2, h = H/4$, usw., extrapoliert nach jeder Rechnung ab $n = 4$ — d.h. mind. 3 Stützstellen — die „Funktion“ $y_{r+H}(h)$ nach $h = 0$, und führt anschließend eine Fehlerbetrachtung durch. Ist die Genauigkeit im gewünschten Rahmen, wird die Sequenz (3.53) abgebrochen und von $r + H$ an mit einer neuen, evtl. kleineren oder größeren Schrittweite H' weitergerechnet.

Bei der Integration über *einen* Schritt H müssen wir die rechte Seite der Differentialgleichungen (1.116) bzw. (3.18) für verschiedene Teilschrittweiten, d.h. verschiedenes n , öfters an derselben Stelle x auswerten. Für die Sequenz (3.53) ist das z.B. immer der Fall bei $r + H/2$ (siehe auch Abbildung). Wir müssen also in

$$\frac{dy}{dr} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{y}$$

$\mathbf{A} = \mathbf{A}(r)$ mehrmals am gleichen Radius r berechnen. Dies kann je nach „Kompliziertheit“ der $A_{ij}(r)$ einiges an Rechenzeit kosten.

Man kann jedoch die Stellen, an denen man mehrmals anlangt, anhand der Sequenz (3.53) bestimmen. Die Bedingung, daß man für unterschiedliche n_j bei äquidistantem Vorwärtschreiten von r bis $r + H$ an derselben Stelle hält macht, ist

$$i \frac{H}{n_k} = j \frac{H}{n_l}, \quad i < n_k, \quad j < n_l, \quad i, j \text{ ganz,}$$

oder

$$in_l = jn_k.$$

Wir sparen etwas Rechenzeit, indem wir die innerhalb eines Schrittes H mehrmals zu berechnenden Werte von $\mathbf{A}(r)$ in einem Speicher ablegen.

Um zu erfahren, ob wir ein $\mathbf{A}(x)$ bereits ermittelt haben und wo im Speicher diese Werte liegen, haben wir ein 3-dimensionales Integer-Feld *memo* definiert. Im Falle der Sequenz (3.53) besteht es aus 11 Zeilen, 97 Spalten und 2 Ebenen. Integrieren wir z.B. gerade mit $h = \frac{H}{12}$, so wird im *memo*-Feld die Zeile 5, Spalte 0, ..., 12 von Bedeutung sein.

Unten haben wir die 2 Ebenen für die Zeilen 1 bis 5 aufgezeichnet:

Ebene 1

$$\begin{aligned} n = 2 &\rightarrow 0\ 0\ 0 \\ n = 4 &\rightarrow 1\ 0\ 1\ 0\ 1 \\ n = 6 &\rightarrow 1\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 1 \\ n = 8 &\rightarrow 1\ 0\ 2\ 0\ 1\ 0\ 2\ 0\ 1 \\ n = 12 &\rightarrow 1\ 0\ 3\ 2\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 2\ 3\ 0\ 1 \end{aligned}$$

Ebene 2

$$\begin{aligned} n = 2 &\rightarrow 0\ 0\ 0 \\ n = 4 &\rightarrow 0\ 0\ 1\ 0\ 2 \\ n = 6 &\rightarrow 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 2 \\ n = 8 &\rightarrow 0\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 2 \\ n = 12 &\rightarrow 0\ 0\ 1\ 1\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 3\ 5\ 0\ 2 \end{aligned}$$

Beispiel: Rechnen wir gerade von r bis $r + H$ in Teilschritten $H/12$, und befinden uns bei Teilschritt 10, d.h. bei $x = r + 10\frac{H}{12}$, entnehmen wir dem *memo*-Feld, daß wir an dieser Stelle x die Matrix \mathbf{A} bereits bei $n_3 = 6$ (\rightarrow Zeile 3) und Teilschritt 5 (\rightarrow Spalte 5) berechnet haben. Also legen wir die A_{ij} ebenfalls in ein Feld der Dimensionierung (11,0:96) (in FORTRAN) ab, und können dann die bereits gerechneten Werte mittels der Feldindizes, welche in Ebene 1 und 2 von *memo* stehen, wiederverwenden. Eine Null in Ebene 1 bedeutet „noch nicht berechnet“.

Diese *memo*-Technik ist wegen der Feldverwaltung etwas aufwendig, vor allem da man immer genau wissen muß, bei welcher Zahl der Sequenz (3.53) und bei welchem Teilschritt man momentan ist. Dies erfordert eine „Zeiger“(pointer)-Verwaltung innerhalb der Integrationsroutinen. Der hierfür nötige Aufwand wird umso unwirtschaftlicher je einfacher die r -Abhängigkeit der A_{ij} ist.

In unserem Fall haben wir nicht die komplette Matrix \mathbf{A} einem Speicherfeld zugewiesen, sondern nur die in den A_{ij} vorkommenden elastischen Konstanten und die Dichte. Dies ist nicht ganz so effektiv, da man sich nur in den A_{ij} vorkommende Faktoren und Summanden anstatt die gesamten A_{ij} merkt. Die Ermittlung dieser Faktoren und Summanden macht aber den Hauptteil bei der Berechnung der A_{ij} aus, da wir die elastischen Konstanten nur auf Umweg über die Wellengeschwindigkeiten und die Dichte erhalten. Außerdem muß auf

die Konstanten noch ein komplexer, frequenzabhängiger Faktor zur Berücksichtigung von Anelastizität multipliziert werden.

3.6 Testrechnung für eine Explosionsquelle

Um die Funktionsfähigkeit unseres Konzepts zu überprüfen, verwendeten wir in den Quelltermen einen Momententensor einfacher Gestalt:

$$M^{rr} = M^{\vartheta\vartheta} = M^{\varphi\varphi} = M_0, \quad M^{r\vartheta} = M^{r\varphi} = M^{\vartheta\varphi} = 0. \quad (3.55)$$

Dies entspricht der Kräfteverteilung einer Explosion.

Jede Lösung der Differentialgleichungssysteme (3.18)ff und (1.116)ff entspricht *einem* Koeffizienten in der Entwicklung nach Kugelflächenfunktionen und in der Fourierreihe. Wir müssen uns entscheiden *wieviele* Koeffizienten wir ermitteln wollen.

Anzahl der Frequenzstützstellen

Den Frequenzbereich wählten wir in den Grenzen $\nu_1 \approx 5$ mHz bis $\nu_2 \approx 50$ mHz. Die untere Grenze $\nu_1 \approx 5$ mHz haben wir mit Rücksicht auf die Vernachlässigung der Schwere festgelegt, da die Schwere bei sehr kleinen Frequenzen eine Rolle spielt (Aki & Richards, 1980, Kap. 8).

Bei einer betrachteten Seismogrammlänge von $T = 5120$ s haben wir in unserem Frequenzbereich 230 Stützstellen, angefangen bei $n_1 = 27$ bis $n_2 = 256$.

Anzahl der Grade l und Ordnungen m

Aus den Berechnungen der Quellterme wissen wir, daß maximal $|m| = 2$ auftreten kann, d.h. die Ordnungen m liegen im Bereich

$$-2 \leq m \leq 2 \quad \text{und} \quad |m| \leq l.$$

Der Grenzwert für den Grad l , l_{max} , ist nicht eindeutig bestimmbar. Um ein Kriterium für die Ermittlung von l_{max} zu erhalten, lösten wir das Minoren–System (3.18)ff an einzelnen Frequenzen ν_i für Grade l bis ca. 1000.

Die Diagramme 3.2 und 3.3 zeigen den Betrag der Minorenverhältnisse m_1/m_5 und m_3/m_5 aus Gleichung (3.15) in Abhängigkeit von l bei einer festen Frequenz $\nu = 39$ mHz. Wir erkennen ein letztes großes Maximum bei $l \approx 415$ und danach einen wahrscheinlich exponentiellen Abfall auf Null. Will man dieses Schaubild bezüglich Wellenausbreitung und einzelner Wellenarten interpretieren, macht man sich am besten klar, daß l eine Art horizontale, dimensionslose Wellenzahl darstellt. Der Quotient $\frac{\omega}{l}$ ist dann eine Phasengeschwindigkeit mit der Einheit Winkel pro Sekunde. Ermitteln wir für obiges Diagramm die Phasengeschwindigkeit an der Erdoberfläche, die dem letzten Maximum zuzuordnen ist, in km pro Sekunde, erhalten wir

$$\frac{\omega}{l} \frac{360^\circ}{2\pi} \frac{111 \text{ km}}{\text{Grad}} \approx 3.7 \frac{\text{km}}{\text{s}}.$$

Dies ist die Geschwindigkeit einer Rayleighwelle, welche sich in der obersten Schicht unseres Erdmodells ausbreitet.

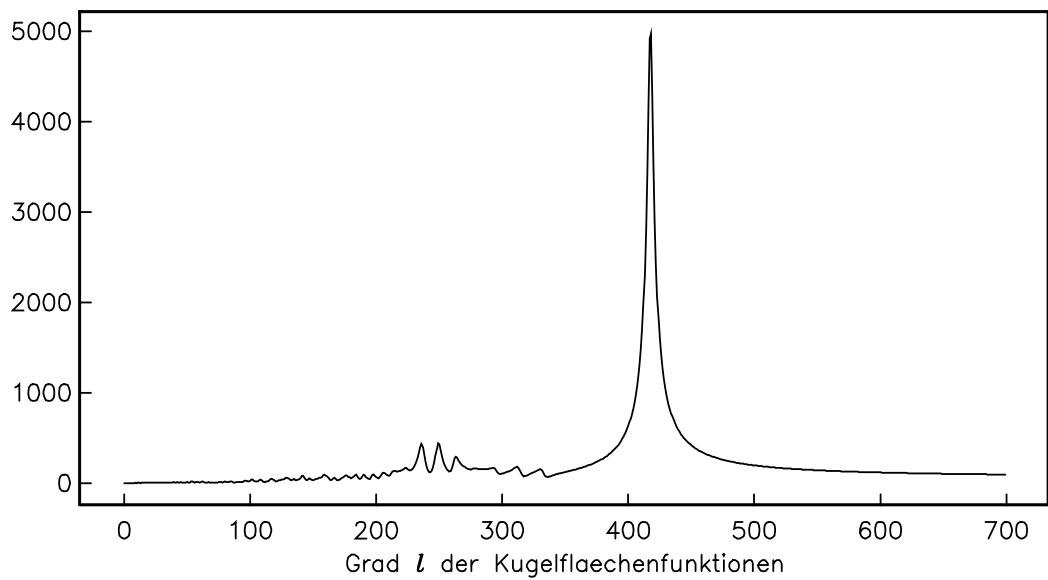


Abbildung 3.2: Minorenverhältnis $|m_1/m_5|$ bei einer Frequenz $\nu = 39 \text{ mHz}$.

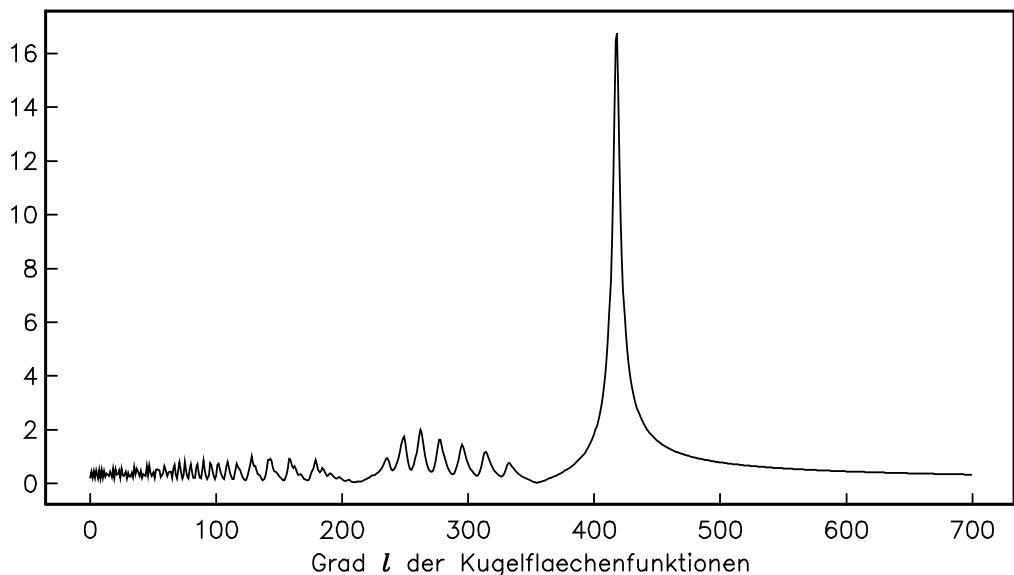


Abbildung 3.3: Minorenverhältnis $|m_3/m_5|$ bei einer Frequenz $\nu = 39 \text{ mHz}$.

Nach jener am langsamsten sich ausbreitenden Oberflächenwelle erkennen wir keine einem bestimmten Wellentyp zuzuordnende Struktur mehr in den Diagrammen. Wir brechen daher die Berechnung nach diesem letzten Maximum ab, wobei wir willkürlich eine bestimmte Anzahl von Graden l festlegen (z.B. 50 oder 100), die wir danach noch weiterrechnen.

Auf diese Weise ermittelten wir l_{max} an mehreren Frequenzen, und haben dann zwischen diesen Frequenzen l_{max} durch lineare Interpolation bestimmt.

Abhängigkeit des Startradius r_1 von l

Nach welchen Gesichtspunkten wählen wir den Startradius r_1 für die numerische Integration? Bei $r = 0$ können wir nicht beginnen, da dort die Differentialgleichungen singulär werden; jedoch sollte r_1 ziemlich nahe am Erdmittelpunkt liegen, um durch die Näherung einer homogenen, isotropen Erden unterhalb r_1 nicht allzu sehr von unserem Erdmodell abzuweichen.

Grundsätzlich sollten wir diesen Startradius r_1 bei der Berechnung aller Koeffizienten bzw. Minoren, d.h. für alle ν und l , beibehalten. Es zeigt sich jedoch, daß bei festem ν für wachsendes l die Lösung zunehmend „blind“ für die Erdstruktur wird. Damit meinen wir, daß die Lösung, integriert von einem größeren Startradius $r_1^{(2)} > r_1$ an, sich — bis auf einen konstanten Faktor — nicht von der Lösung unterscheidet, welche von r_1 an integriert wurde. D.h. wir integrieren in diesem Fall von r_1 an nur die homogene, isotrope Lösung, die wir annehmen würden, wenn wir von $r_1^{(2)} > r_1$ starten.

Um grobe Richtwerte für die Verschiebung von r_1 mit wachsendem l zu erhalten, gaben wir eine Anzahl von festen Startradien $r_1^{(i)}$ vor, und legten eine untere Grenze für jene Anderung von $|\frac{m_1}{m_5}|$ und $|\frac{m_3}{m_5}|$ fest, welche sich bei der Integration für festes ν und l ergibt, wenn man einmal von $r_1^{(i)}$ und einmal von $r_1^{(i+1)} > r_1^{(i)}$ rechnet. Der Wert von l , bei welchem diese Grenze unterschritten wird, dient dann als Sprungmarke, bei der der Startradius $r_1^{(i)}$ auf $r_1^{(i+1)}$ erhöht wird.

Analog zur Bestimmung von $l_{max}(\nu)$ berechneten wir die Sprungmarken $l_{grenz}^{(k)}$ der einzelnen Startradien $r_1^{(k)}$ an mehreren Frequenzen — die gleichen wie bei l_{max} — und bestimmten die Zwischenwerte durch lineare Interpolation.

Das Schaubild 3.4 zeigt $l_{max}(\nu)$ und $l_{grenz}^{(k)}(\nu)$ für 5 Startradien, aufgetragen über den von uns betrachteten Frequenzbereich. Nach Berechnung der \tilde{U}_l^m führen wir nicht gleich die Summe über die Kugelflächenfunktionen aus, um das Spektrum zu erhalten. Zuvor tragen wir den Betrag $|\tilde{U}_l^m|$ in Abhängigkeit von der Frequenz und dem Grad l für eine Ordnung — im Fall einer Explosionsquelle gibt es nur $m = 0$ — als 2-dim. Profil auf, in dem der Wert von $|\tilde{U}_l^m|$ durch Graustufen dargestellt ist. Wir nennen diese Auftragungen „ $\omega-l$ -Plots“. Man kann diese auch als Dispersionskurven auffassen, denn der Quotient ω/l ist tatsächlich eine Phasengeschwindigkeit von *Auslenkungen* entlang eines Meridians. Diese Auslenkungen werden außer von Oberflächenwellen auch von Wellen verursacht, die von der Quelle in den Erdkörper abtauchen und am Empfänger unter einem gewissen Winkel γ gegen die Erdoberfläche wieder auftauchen (Abb. 3.5); man spricht dann von *Raumwellen*. Im Grenzfall ist dieser Winkel 90° , das bedeutet, daß eine Wellenfront, welche die Erdoberfläche erreicht, auf dieser an verschiedenen Orten gleichzeitig eine Auslenkung verursacht. Die Ausbreitungsgeschwindigkeit dieser Auslenkung wäre dann unendlich. In unseren $\omega-l$ -Plots ist dies die Achse $l = 0$, welche die rein radiale Bewegung darstellt.

Diagramm 3.6 zeigt den $\omega-l$ -Plot für eine Explosion mit dem Gesamtmoment von 10^{20} Nm in 35 km Tiefe. Aufgetragen ist hier nicht $|\tilde{U}_l^m|$, sondern

$$|\tilde{U}_l^m|^{\varepsilon}, \quad 0 < \varepsilon \leq 1.$$

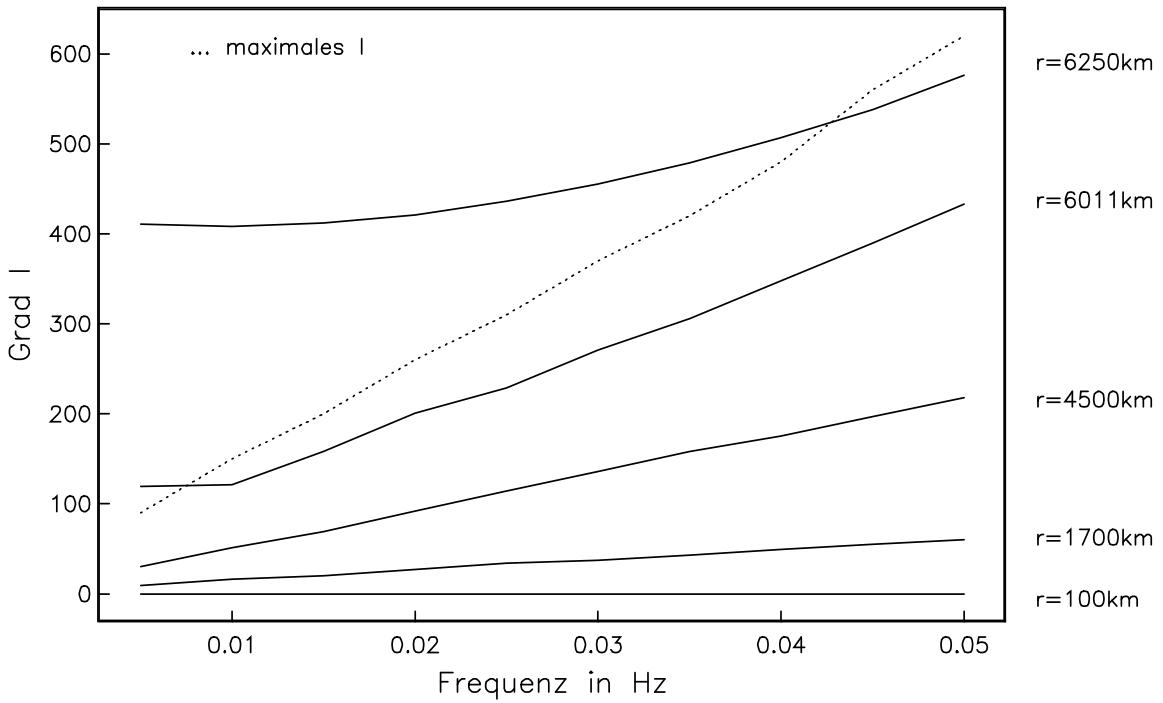


Abbildung 3.4: Sprungwerte für Wechsel der Startradien. Gerechnet wird nur bis l_{max} (···).

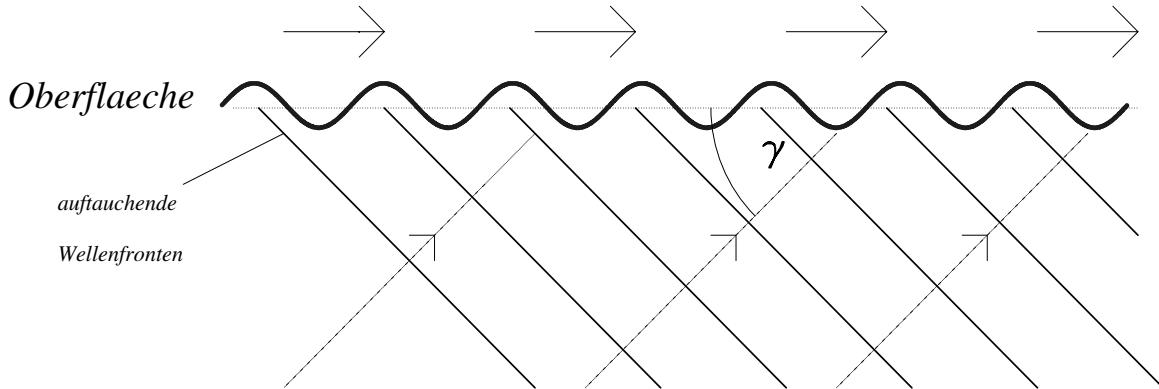


Abbildung 3.5: Horizontale Scheingeschwindigkeit von durch auftauchende Wellen verursachten Auslenkungen.

Der Exponent ε ist nötig, um den Wertebereich etwas zu komprimieren. Das die Diagramme erzeugende Grafikprogramm unterteilt den Wertebereich der Daten in Intervalle, und ordnet diesen Grauwerte (Farben) zu. Bei zu großer Dynamik in den Werten werden Details nicht mehr aufgelöst. Man erkennt in dem Diagramm die klare Dominanz der Oberflächenwelle — ersichtlich an der „schwarze Kurve“ am rechten Rand des Gebiets der berechneten Koeffizienten — mit der kleinsten Phasengeschwindigkeit ω/l .

Abbildung 3.7 zeigt den $\omega-l$ -Plot für eine Explosion in 135 km Tiefe. Im Vergleich zur Quelltiefe 35 km erkennt man vor allem zwei wichtige Unterschiede. Man sieht zum einen, daß mit zunehmender Tiefe die Oberflächenwelle gegenüber den Raumwellen nicht mehr so stark an-

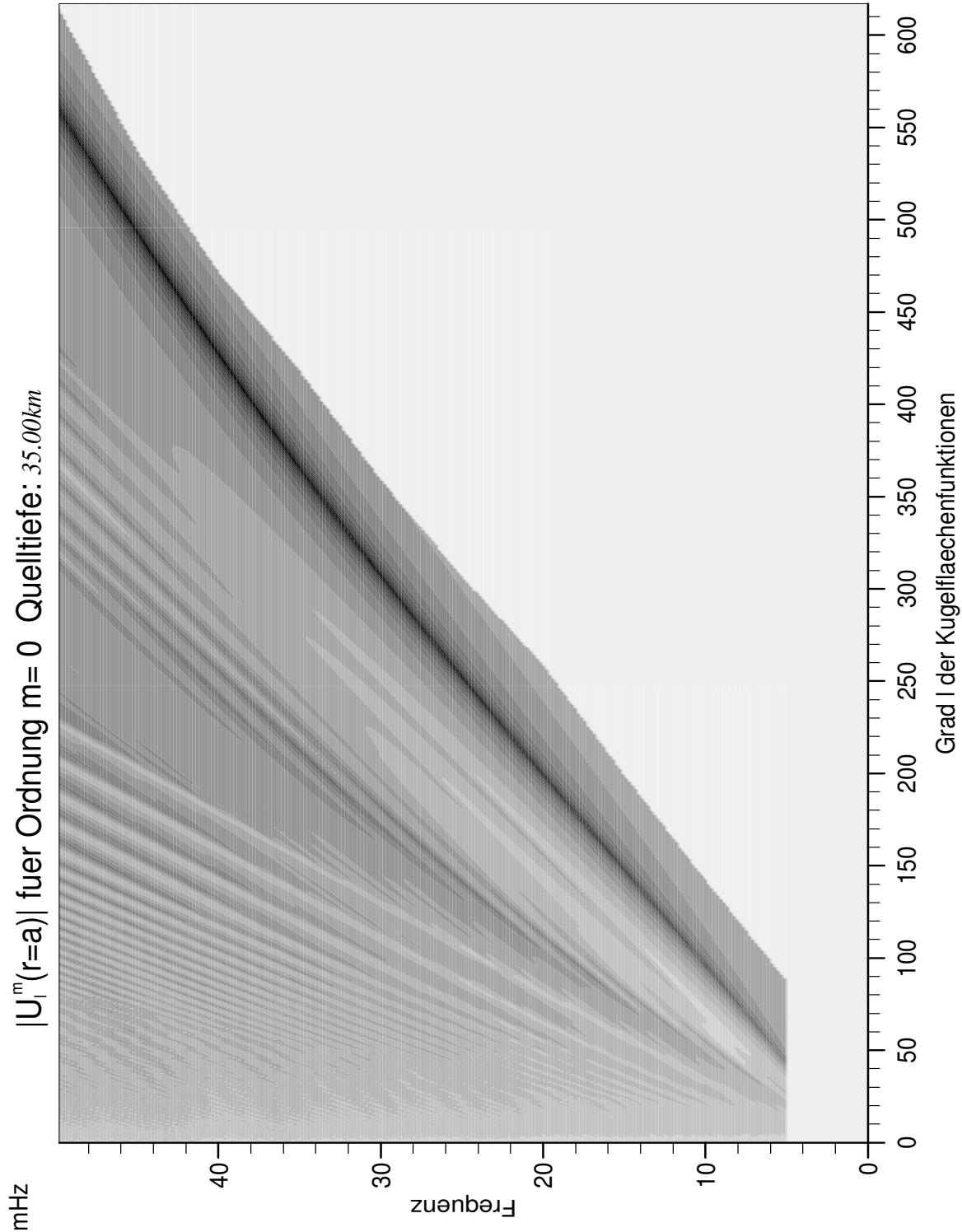


Abbildung 3.6: Auftragung der Entwicklungskoeffizienten \tilde{U}_l^m über der $\omega-l$ -Ebene. Je dunkler das Gebiet, desto stärker die „Anregung“ der zugehörigen Wellenart.

geregt wird. Zum anderen, und dies ist weit wichtiger, erkennen wir eine grieselige Struktur in der oberen rechten Ecke des Diagramms. In Diagramm 3.8 für eine Quelltiefe von 200 km ist diese diffuse Struktur noch stärker, und zwar dort wo eigentlich nichts sein sollte. Der Grund liegt in der Summen- und Differenzbildung in Gleichung (3.15):

Bei unserem Integrationsalgorithmus geben wir normalerweise eine Genauigkeit von z.B. 10^{-7} vor, d.h. alles was nach der 7. Dezimalstelle kommt, hat mit der tatsächlichen Lösung nichts mehr zu tun. Bei der numerischen Integration in dem $\omega-l$ -Bereich, in dem wir das „Rauschen“ sehen, erhalten wir jedoch Lösungen, die ungefähr in der Größenordnung von 10^{30} liegen. Das bedeutet, daß auch die einzelnen Summanden in Gleichung (3.15) von dieser Größenordnung sind. $\mathbf{g}(a)$ liegt aber in der Regel ca. 25 Zehnerpotenzen tiefer, während diese Summanden bei einer Genauigkeit von 10^{-7} eine Differenz im Bereich von 10^{23} liefern, die dann natürlich wenig Bezug zu $\mathbf{g}(a)$ hat. Obwohl wir alle Größen in *double precision (FORTRAN)* berechnen, nützt in diesem Fall auch eine Erhöhung der Genauigkeit bei der Integration nichts, da *double precision* nur eine maximale Genauigkeit von 10^{-15} zuläßt. Da außerdem die in die Differentialgleichungen eingehenden Modellparameter (Dichte, usw.) höchstens 7 geltende Ziffern haben, ist es sinnlos, die Genauigkeit über diese Anzahl hinaus zu steigern.

Das Schaubild 3.9 zeigt sehr deutlich die Auswirkungen dieses Effektes mit zunehmender Quelltiefe.

Obige Resultate bedeuten, daß die Gleichung (3.15) und das mit ihr verbundene Konzept ungeeignet ist zur Ermittlung der Koeffizienten $\tilde{U}_l^m(a, \omega)$, weil die Rechengenauigkeit keine Berechnung mit Quellen in größeren Tiefen zuläßt, d.h. wir können keine Seismogramme für Quellen in beliebiger Tiefe erzeugen.

Aus diesen Gründen sparten wir uns die anschließende Summation über die Kugelflächenfunktionen und die Fouriertransformation in den Zeitbereich.

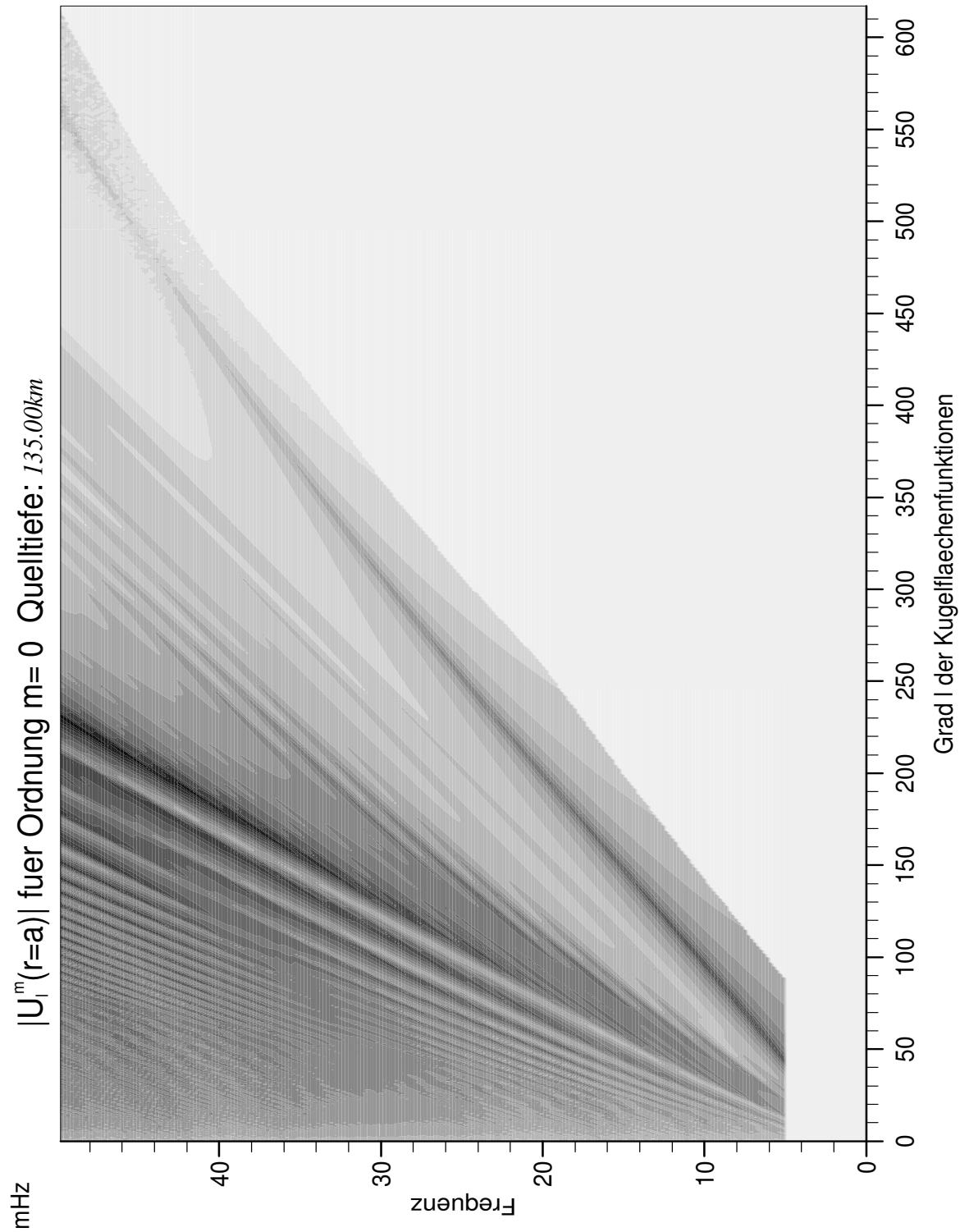


Abbildung 3.7: $\omega-l$ -Plot mit ersten Anzeichen von „numerischem Rauschen“ durch Verlust signifikanter Stellen.

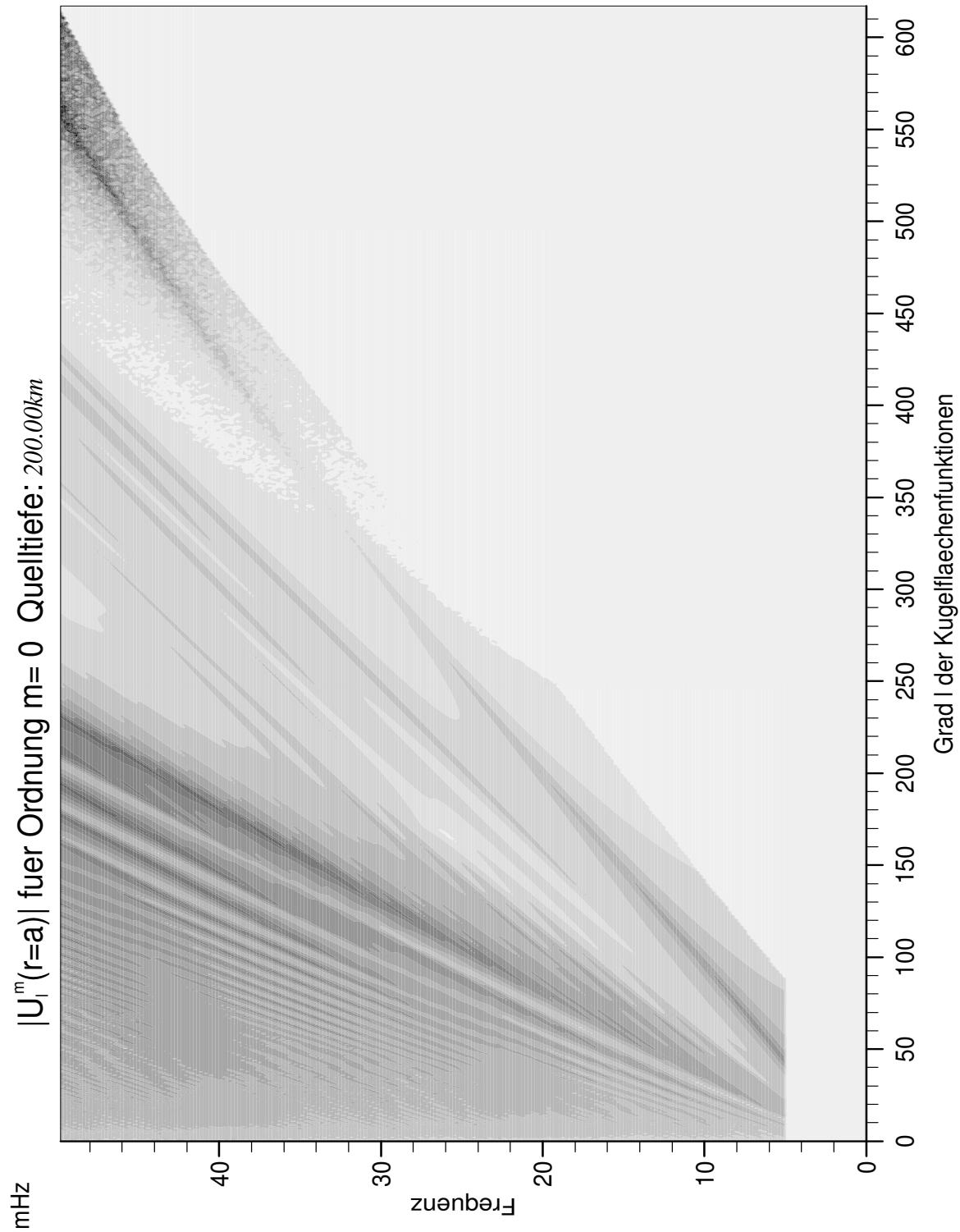


Abbildung 3.8: $\omega-l$ -Plot mit zunehmender Dominanz des „numerischen Rauschens“ über die eigentlichen Werte.

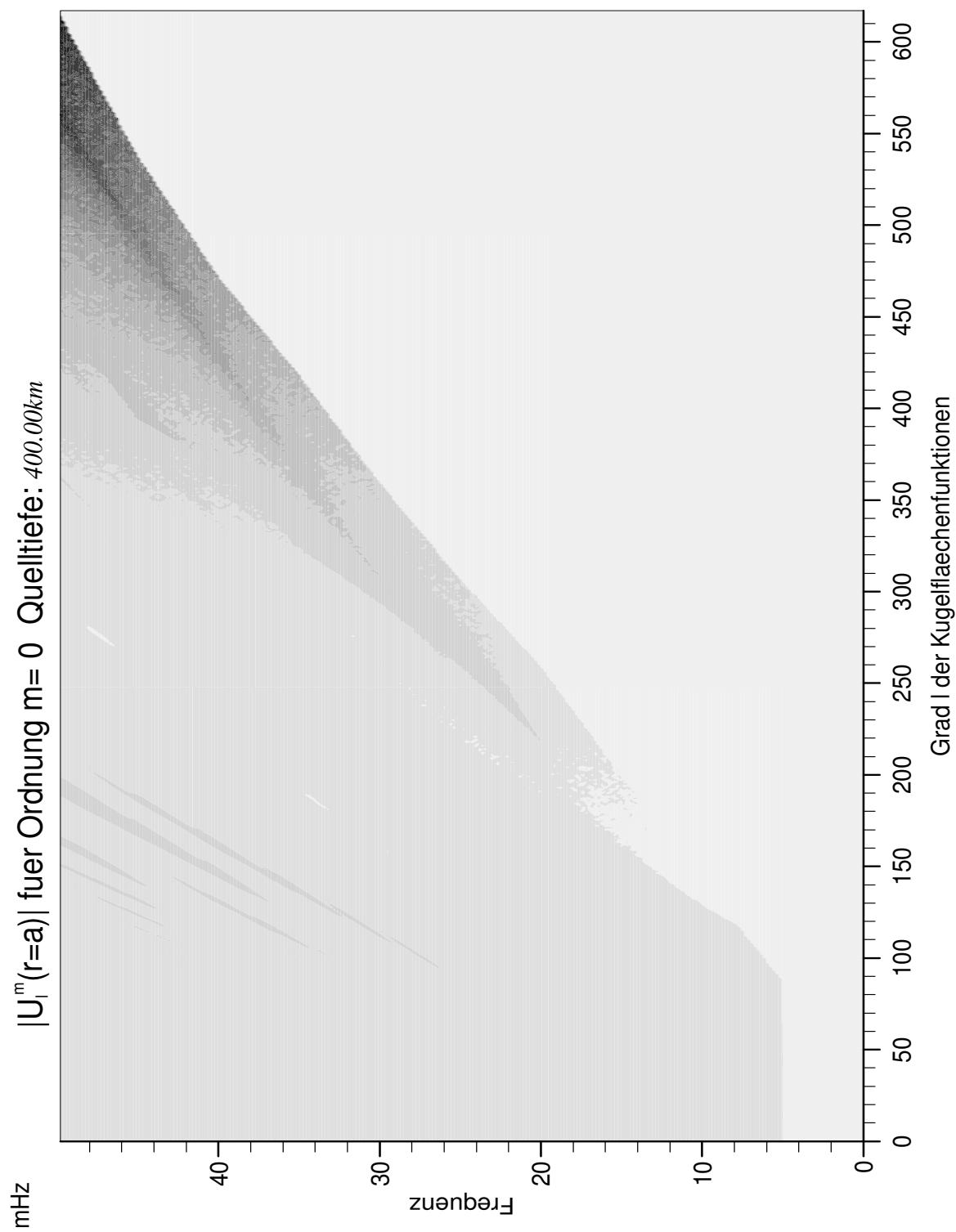


Abbildung 3.9: $\omega-l$ -Plot ohne Bezug zur Realität.

Kapitel 4

Direkte Integration der Greenschen Funktion vom Quellort zur Erdoberfläche

4.1 Anfangswerte für die Greensche Funktion am Quellort

Unser homogenes System (1.116) stellt im Prinzip ein Eigenwertproblem für den *Eigenwert* ω^2 dar. Lösungen welche bei gegebenem Parameter ω^2 beide Randbedingungen erfüllen, heißen *Eigenfunktionen zum Eigenwert* ω^2 . Solche Lösungen existieren in der Regel nicht für beliebige ω^2 .

Betrachten wir den Vektorraum V_1 aller Lösungen welche im Ursprung regulär sind, d.h. welche der ersten Randbedingung genügen. Des Weiteren bezeichnen wir mit V_2 den Vektorraum aller Lösungen welche der zweiten Randbedingung — verschwindende Spannung an der Erdoberfläche — genügen. Solange ω^2 kein Eigenwert ist, sind diese beiden Vektorräume V_1 und V_2 disjunkt, sie haben kein gemeinsames Element. Ist jedoch ω^2 ein Eigenwert, und somit ω eine *Eigenfrequenz* der Erde, haben die Vektorräume ein gemeinsames Element, nämlich die Eigenfunktion.

Unser Interesse liegt aber gar nicht im Auffinden der Eigenfunktionen, sondern es ist für uns wichtig, daß ω^2 kein Eigenwert ist, da sonst die Greensche Funktion unendlich wird. Anschaulich gesprochen hätten wir dann eine Resonanzfrequenz der Erde erwischt, und die Antwort der Erde auf eine Anregung mit dieser Frequenz wäre — zumindest im ungedämpften Fall — unendlich hoch.

Sei die 4×2 -Matrix $\mathbf{G}(r)$ eine Fundamentalmatrix von V_2 . Sei $\mathbf{W}(r)$ ebenfalls eine 4×2 -Matrix und Basis des Vektorraums V_1 . Dann können wir aufgrund unserer Betrachtungen in Abschnitt 3.2 folgende Aussagen machen:

Oberhalb des Quellradius r_s können wir unsere Lösung $\mathbf{g}(r)$ darstellen als

$$\mathbf{g}(r) = \mathbf{G}(r) \cdot \mathbf{c}, \quad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}, \quad (4.1)$$

und somit haben wir an der Erdoberfläche

$$\mathbf{g}(a) = \mathbf{G}(a) \cdot \mathbf{c}. \quad (4.2)$$

Unterhalb der Quelle stammt unsere Lösung aus dem Vektorraum V_1 ; das bedeutet

$$\mathbf{g}(r) = \mathbf{W}(r) \cdot \mathbf{d}, \quad r < r_s, \quad \mathbf{d} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix}. \quad (4.3)$$

Die Lösung \mathbf{g} macht an der Quelle einen Sprung der Größe

$$\mathbf{g}(r_s + 0) - \mathbf{g}(r_s - 0) = \mathbf{z}_1(r_s) + \mathbf{A}(r_s) \cdot \mathbf{z}_2 = \mathbf{s}(r_s). \quad (4.4)$$

Dies schreiben wir als

$$\begin{pmatrix} \mathbf{G}(r_s) & -\mathbf{W}(r_s) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{c} \\ \mathbf{d} \end{pmatrix} = \mathbf{s}, \quad (4.5)$$

oder notiert mit Spaltenvektoren:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{g}_1(r_s) & \mathbf{g}_2(r_s) & -\mathbf{w}_1(r_s) & -\mathbf{w}_2(r_s) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{c} \\ \mathbf{d} \end{pmatrix} = \mathbf{s}. \quad (4.6)$$

Für die Basis $\mathbf{G}(r)$ bei $r = a$ setzen wir

$$\mathbf{G}(a) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.7)$$

Die von uns gesuchte Größe ist $g_{11}(a)$, also

$$g_{11}(a) = c_1. \quad (4.8)$$

Wir können c_1 aus Gleichung (4.6) bestimmen, indem wir erneut die Cramersche Regel verwenden:

$$c_1 = \frac{1}{\Delta} \left| \begin{matrix} \mathbf{s} & \mathbf{g}_2 & -\mathbf{w}_1 & -\mathbf{w}_2 \end{matrix} \right|, \quad (4.9)$$

wobei Δ die Determinante der Koeffizientenmatrix in Gleichung (4.6) ist:

$$\Delta = \left| \begin{matrix} \mathbf{G} & -\mathbf{W} \end{matrix} \right| = \left| \begin{matrix} \mathbf{G} & \mathbf{W} \end{matrix} \right|. \quad (4.10)$$

Ausgedrückt durch die Elemente der Matrizen lautet Δ :

$$\Delta = \epsilon_{ijkl} g_{1i} g_{2j} w_{1k} w_{2l}. \quad (4.11)$$

Wir benützen hier das Symbol ϵ analog zu den Gleichungen (2.7)ff, obwohl es nun natürlich keinen Tensor im Sinne der Vektoranalysis darstellt.

Δ lässt sich auch durch die schon vorher eingeführten Minoren ausdrücken,

$$\Delta = \epsilon_{(ij)(kl)} (g_{1i} g_{2j} - g_{1j} g_{2i}) (w_{1k} w_{2l} - w_{1l} w_{2k}), \quad (4.12)$$

wobei die Klammer um die Indizes anzeigen soll, daß $i < j$ bzw. $k < l$ zu wählen ist.

Wir bezeichnen nun

$$\mathbf{m}_{ij}^{(2)} := g_{1i} g_{2j} - g_{1j} g_{2i}, \quad \mathbf{m}_{kl}^{(1)} := w_{1k} w_{2l} - w_{1l} w_{2k}. \quad (4.13)$$

Damit berechnen wir die Determinante Δ zu

$$\begin{aligned}\Delta &= \epsilon_{(ij)(kl)} m_{ij}^{(2)} m_{kl}^{(1)} \\ &= m_{12}^{(1)} m_{34}^{(2)} - m_{13}^{(1)} m_{24}^{(2)} + m_{14}^{(1)} m_{23}^{(2)} \\ &\quad + m_{23}^{(1)} m_{14}^{(2)} - m_{24}^{(1)} m_{13}^{(2)} + m_{34}^{(1)} m_{12}^{(2)}.\end{aligned}\tag{4.14}$$

Die Gleichung (4.9) für c_1 lautet in Indexform

$$\begin{aligned}c_1 &= \frac{1}{\Delta} \epsilon_{ijkl} s_i g_{2j} w_{1k} w_{2l} = \frac{1}{\Delta} \epsilon_{ij(kl)} s_i g_{2j} m_{kl}^{(1)} \\ &= \frac{1}{\Delta} \epsilon_{(ij)(kl)} m_{kl}^{(1)} (s_i g_{2j} - s_j g_{2i}).\end{aligned}\tag{4.15}$$

Die gleiche Rechnung machen wir für c_2 , und finden

$$c_2 = \frac{1}{\Delta} \epsilon_{(ij)(kl)} m_{kl}^{(1)} (g_{1i} s_j - g_{1j} s_i).\tag{4.16}$$

Mit c_1 und c_2 haben wir die Möglichkeit, die Greensche Funktion \mathbf{g} am Quellort r_s zu bestimmen. Damit besitzen wir die Startwerte für eine numerische Integration von \mathbf{g} selbst von r_s bis a . Wir wissen, daß gilt:

$$\mathbf{g}(r_s + 0) = c_1 \mathbf{g}_1(r_s + 0) + c_2 \mathbf{g}_2(r_s + 0).\tag{4.17}$$

Wir setzen die Ausdrücke (4.15) und (4.16) in die obige Formel ein, und bekommen für die n -te Komponente von $\mathbf{g}(r_s + 0)$:

$$\begin{aligned}g_n(r_s + 0) &= \frac{1}{\Delta} \epsilon_{(ij)(kl)} m_{kl}^{(1)} [(s_i g_{2j} - s_j g_{2i}) g_{1n} + (g_{1i} s_j - g_{1j} s_i) g_{2n}] \\ &= \frac{1}{\Delta} \epsilon_{(ij)(kl)} m_{kl}^{(1)} [s_j (g_{1i} g_{2n} - g_{1n} g_{2i}) - s_i (g_{1j} g_{2n} - g_{1n} g_{2j})] \\ &= \frac{1}{\Delta} \epsilon_{(ij)(kl)} m_{kl}^{(1)} (s_j m_{in}^{(2)} - s_i m_{jn}^{(2)}).\end{aligned}\tag{4.18}$$

Wir sind also in der Lage, den Wert der Funktion $\mathbf{g}(r)$ an der Stelle $r = r_s$ mit Hilfe der Minoren und der Quellfunktion zu bestimmen. Eine numerische Integration von System (1.116)ff von $r = r_s$ bis $r = a$ mit den durch obige Formel gegebenen Startwerten würde somit den gesuchten Wert $\mathbf{g}(a)$ liefern. Um die Startwerte $\mathbf{g}(r_s)$ bereitzustellen, müssen wir jedoch zuerst die Minoren $m_{kl}^{(1)}$ von einem genügend kleinen Radius $r_1 < r_s$ mit zu bei $r = 0$ regulären Lösungen gehörenden Anfangswerten bis $r = r_s$ integrieren, und zusätzlich die Minoren von $r = a$ mit zu den dortigen Randbedingungen passenden Anfangswerten nach r_s hinunter integrieren.

Die Anfangswerte für die Integration von a bis r_s erhalten wir aus unserer Wahl der Basis V_2 bei $r = a$. Wir vereinbarten

$$\mathbf{G}(a) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{11}(a) & g_{21}(a) \\ g_{12}(a) & g_{22}(a) \\ g_{13}(a) & g_{23}(a) \\ g_{14}(a) & g_{24}(a) \end{pmatrix},\tag{4.19}$$

daraus lesen wir den Startwert für den Minorenvektor ab:

$$\vec{m}(a) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (4.20)$$

4.2 Fall $l = 0$

Wie bereits in Abschnitt 3.2 erwähnt, stellt $l = 0$ einen nicht mit den Minoren behandelbaren Spezialfall dar. Die Rechnungen verlaufen jedoch in ihrer Argumentation ähnlich zu $l > 0$.

Für $r, a > r_s$ schreiben wir

$$\mathbf{g}(r) = \mathbf{G}(r)c_1, \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{g}(a) = \mathbf{G}(a)c_1. \quad (4.21)$$

$\mathbf{G}(r)$ stellt nun eine 2×1 -Matrix dar. Für $r < r_s$ haben wir

$$\mathbf{g}(r) = \mathbf{W}(r)d_1. \quad (4.22)$$

Der Sprung von \mathbf{g} an der Quelle bei r_s ,

$$\mathbf{g}(r_s + 0) - \mathbf{g}(r_s - 0) = \mathbf{s}, \quad (4.23)$$

führt auf

$$\begin{pmatrix} g_{11}(r_s) & -w_{11}(r_s) \\ g_{12}(r_s) & -w_{12}(r_s) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ d_1 \end{pmatrix} = \mathbf{s}. \quad (4.24)$$

Das Konstante c_1 ergibt sich zu

$$c_1 = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} s_1(r_s) & -w_{11}(r_s) \\ s_2(r_s) & -w_{12}(r_s) \end{vmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} w_{11}(r_s) & s_1(r_s) \\ w_{12}(r_s) & s_2(r_s) \end{vmatrix}. \quad (4.25)$$

Sie genügt, um die Vertikalkomponente $g_{11}(a)$ der Greenschen Funktion festzulegen:

Wir wählen

$$\mathbf{G}(a) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (4.26)$$

und haben dann

$$g_1(a) = c_1 = \frac{1}{\Delta} [s_2(r_s)w_{11}(r_s) - s_1(r_s)w_{12}(r_s)], \quad (4.27)$$

mit $\Delta = g_{12}(r_s)w_{11}(r_s) - g_{11}(r_s)w_{12}(r_s)$.

4.3 Testrechnung für Explosionsquelle

Wie in Abschnitt 3.6 verwenden wir als Test den Momententensor einer Explosionsquelle. Zur Überprüfung der Integrationsergebnisse können wir z.B. die Spannungskomponenten $g_2(a)$ und $g_4(a)$ kontrollieren. Analytisch müßten sie verschwinden, numerisch ist dies praktisch nicht zu machen, doch wenn sie im Rahmen unserer Genauigkeitsvorgaben bei ca. 10^{-5} liegen, genügt das.

Eine Integration von der Quelltiefe 410 km zeigt jedoch überdeutlich, daß selbst solche Bedingungen utopisch sind. Diagramm 4.1 ist der zugehörige $\omega-l$ -Plot. Wir sehen deutlich in dem Bereich, in dem die Oberflächenwelle eigentlich *fehlen* sollte, betragsmäßig gegenüber den anderen Werten stark dominierenden numerischen Unfug. Der Grund hierfür ist, daß die Greensche Funktion als Antwort der Erde auf die anregende Kraft mit wachsendem Abstand vom Quellort abnimmt, und gleichzeitig die Lösung des homogenen Systems (1.116) ist, die oberhalb des Quellradius r_s kleiner wird. Das System (1.116) besitzt aber noch zwei linear unabhängige Lösungen, welche mit wachsendem r ansteigen. Wir können nicht verhindern, daß unsere Startwerte $\mathbf{g}(r_s)$ noch zum kleinen Teil aus Beiträgen dieser anwachsenden Lösung besteht. Diese vergrößern sich dann bei der Integration, während die eigentliche Lösung $\mathbf{g}(r)$ abnimmt und an der Erdoberfläche schließlich gegenüber der „falschen“ Lösung keine Rolle mehr spielt. Wir integrieren also bei diesem Konzept in die numerisch instabile Richtung, und brauchen es daher nicht mehr weiter zu verfolgen.

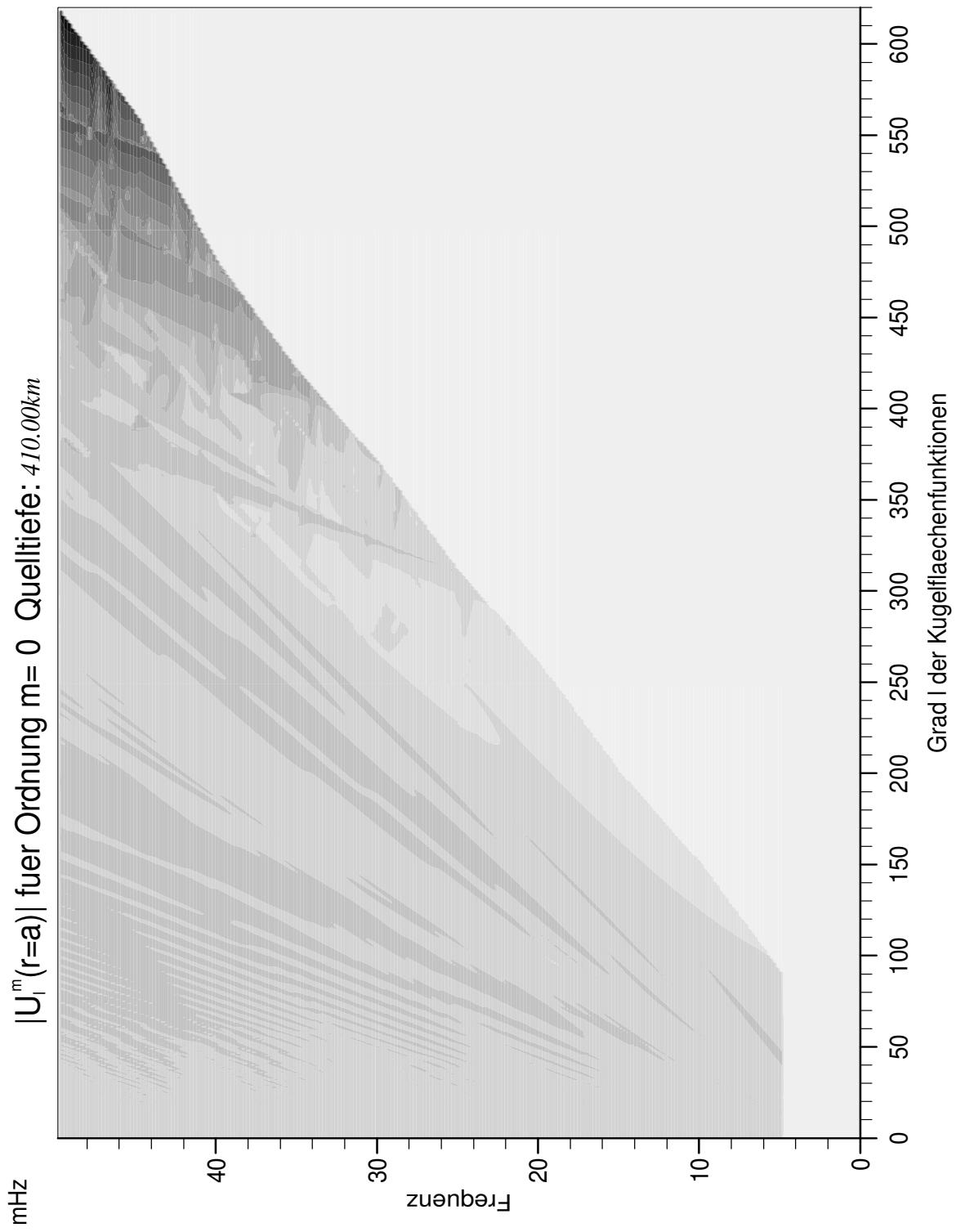


Abbildung 4.1: $\omega-l$ -Plot für eine direkte Integration der Greenschen Funktion vom Quellort zur Erdoberfläche. Die numerischen Probleme sind eine Folge der „Verunreinigung“ der Startwerte mit Anteilen von mit r wachsenden Basislösungen.

Kapitel 5

Greensche Funktion mittels Kombination von Basislösungen am Quellort

5.1 Integration ausschließlich in Richtung Quellort

Bei dieser Methode wird nur in die numerisch stabile Richtung integriert. Für die Minoren brauchen wir nichts zu ändern, da die Integration jeweils in der stabilen Richtung ausgeführt wird.

Wir gehen zurück zu Gleichung (4.15). Wegen

$$c_1 = g_{11}(a) \quad (5.1)$$

genügt es, den Ausdruck

$$c_1 = \frac{1}{\Delta(r_s)} \epsilon_{(ij)(kl)} \mathbf{m}_{kl}^{(1)}(r_s) [s_i(r_s)g_{2j}(r_s) - s_j(r_s)g_{2i}(r_s)] \quad (5.2)$$

zu berechnen. Dies erfordert zusätzlich zu den Integrationen der Minoren von unten und von oben (nötig für $\Delta(r_s)$) die Integration der Basislösung $\mathbf{g}_2(r)$ von $r = a$ nach $r = r_s$ mit dem Startwert

$$\mathbf{g}_2(a) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (5.3)$$

Mit den so erhaltenen Werten und den Minoren konstruieren wir dann $c_1 = g_{11}(a)$. Wollten wir auch die Horizontalkomponente der sphäroidalen Bewegung bekommen, also die Konstante c_2 bestimmen, hätten wir noch eine zweite Basislösung $\mathbf{g}_1(r)$ von $r = a$ mit dem Startwert

$$\mathbf{g}_1(a) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (5.4)$$

bis nach r_s zu berechnen.

Es ist rationeller, den Ausdruck für c_1 in Form einer Matrixmultiplikation darzustellen:

$$c_1 = \mathbf{C}_{1k} s_k. \quad (5.5)$$

Auf diese Weise kann die Arbeit in zwei getrennte Schritte aufgeteilt werden. \mathbf{C}_{1k} ist eine Größe, welche nicht von der Quelle abhängt, sondern in die nur Eigenschaften des Erdmodells

und die Quelltiefe eingehen. Dies legt es nahe, C_{1k} an einem Katalog von Quelltiefen $r_s^{(i)}$ zu berechnen, wonach dann $\tilde{U}_l^m(a)$ für einen beliebigen Momententensor bei $r = r_s^{(i)}$ sofort ermittelt werden kann. Denn für die s_i benötigen wir nur noch die Quelltiefe r_s und einige der elastischen Konstanten an dieser Stelle.

Zur Bestimmung von C_{1k} schreiben wir

$$c_1 = \frac{1}{\Delta} \epsilon_{ij(kl)} s_i g_{2j} m_{kl}^{(1)} \quad (5.6)$$

als

$$c_1 = C_{1i} s_i, \quad (5.7)$$

mit

$$C_{1i} = \frac{1}{\Delta} \epsilon_{ij(kl)} g_{2j} m_{kl}^{(1)}. \quad (5.8)$$

Wir werden die Koeffizienten C_{1i} im folgenden als *Green-Koeffizienten* bezeichnen.

5.2 Fall $l = 0$

Das Vorgehen ist bereits im Abschnitt 4.2 vorweggenommen. Im Falle von nur insgesamt zwei linear unabhängigen Basislösungen ist keine weitere Integration von a bis r_s mehr nötig, da die Konstante c_1 bei Wahl der Anfangswerte gemäß Formel (4.26) die Greensche Funktion $g(a)$ bereits darstellt.

Hier brauchen wir nur noch die Gleichungen von Abschnitt 4.2 in die Form $c_1 = C_{1i} s_i$ bringen, wobei dann

$$C_{11} = -\frac{w_{12}(r_s)}{\Delta(r_s)} \quad \text{und} \quad C_{12} = \frac{w_{11}(r_s)}{\Delta(r_s)} \quad (5.9)$$

ist.

5.3 Testrechnung für Explosionsquelle

Zur Überprüfung der neuen Methode erzeugen wir wieder zuerst $\omega-l$ -Diagramme der Koeffizienten \tilde{U}_l^m für verschiedene Quelltiefen mit einer Explosionsquelle. Das zugrundeliegende Erdmodell ist *iasp91*.

Die drei Abbildungen 5.1–5.3 zeigen das Ergebnis für die Quelltiefen 10, 80 und 400 km. Bereits bei 80 km erkennen wir eine schwächere Anregung der Oberflächenwelle bei hohen Frequenzen im Vergleich zur Tiefe 10 km, und eine gleichzeitig stärkere Präsenz der Raumwellen. In einer Tiefe von 400 km werden praktisch kaum mehr Oberflächenwellen angeregt, die Raumwellen dominieren klar.

Die Diagramme zeigen im Hinblick auf numerische Probleme keinerlei mit unseren Mißerfolgen vergleichbare Merkmale, was keineswegs selbstverständlich ist. Denn in Formel (5.8) bilden wir ebenfalls Differenzen von Produkten, sowohl in Δ als auch in $\epsilon_{ij(kl)} g_{2j} m_{kl}^{(1)}$, von denen wir nicht sofort sagen können, ob sie kritisch sind oder nicht.

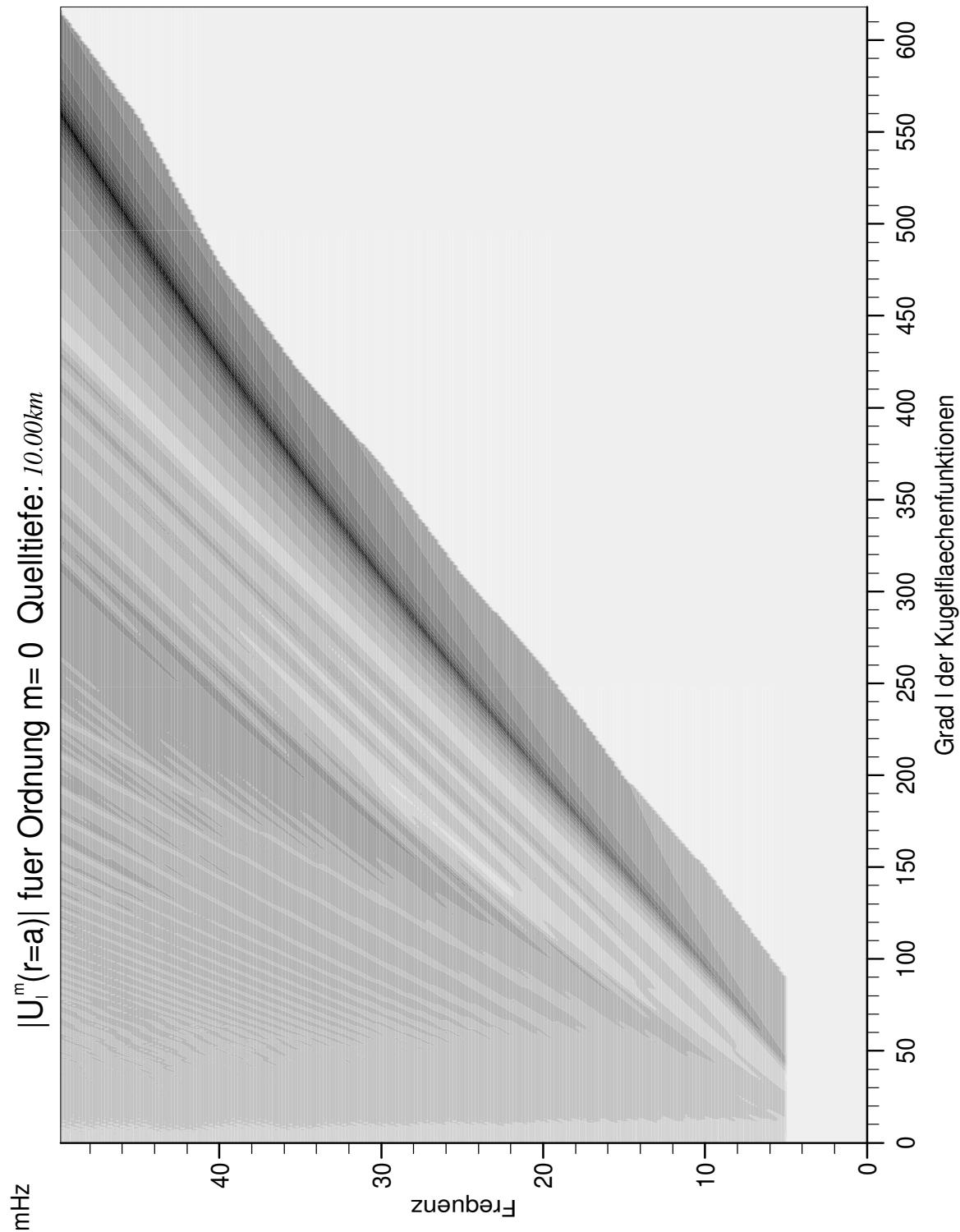


Abbildung 5.1: $\omega-l$ -Plot für Greensche Funktion berechnet durch Kombination von Basislösungen am Quellort. Quelltiefe 10 km. Quellart Explosion.

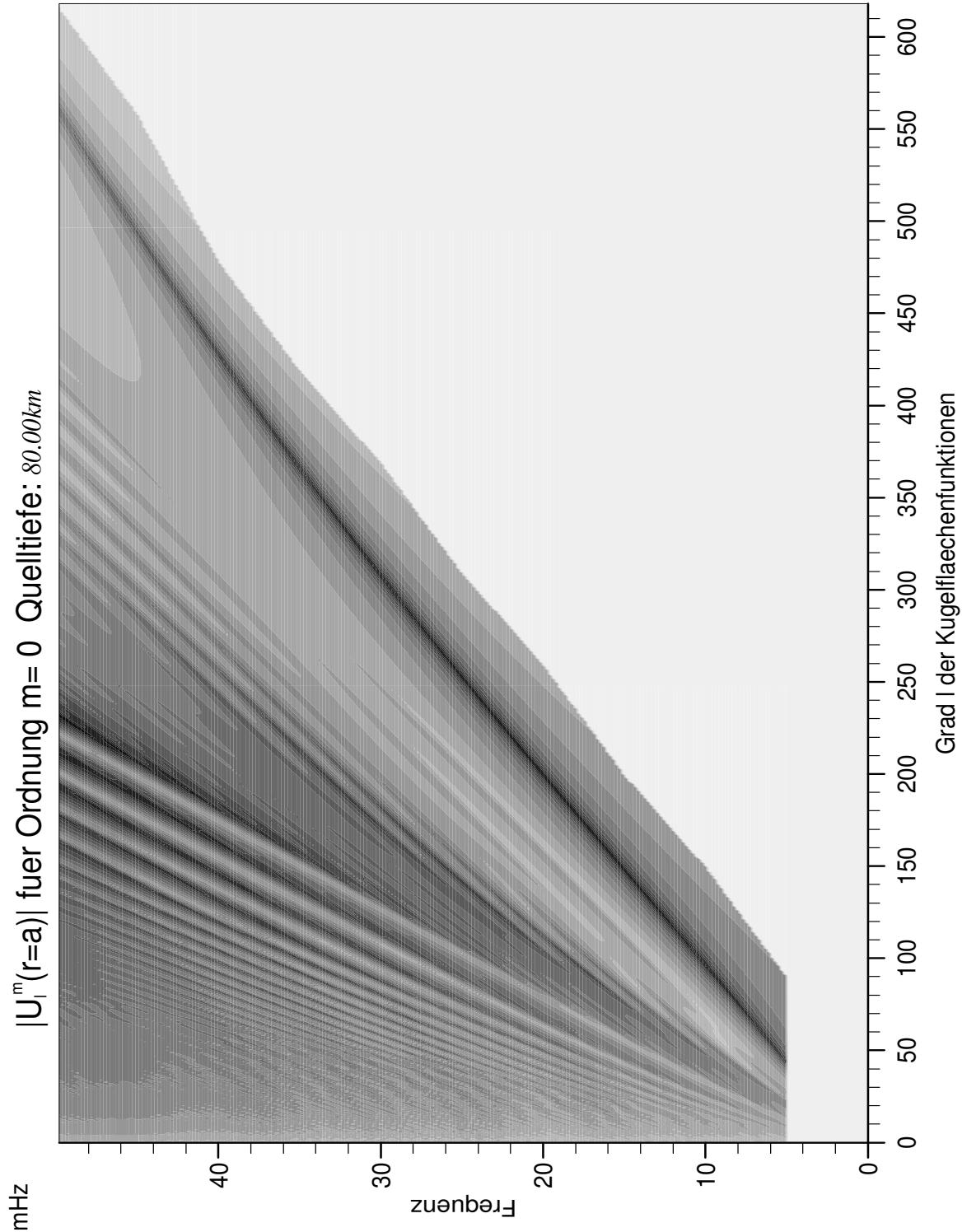


Abbildung 5.2: $\omega-l$ -Plot für Greensche Funktion berechnet durch Kombination von Basislösungen am Quellort. Quelltiefe 80 km. Quellart Explosion.

5.4 Rechnung für Frequenzen bis 100 mHz

Bisher war die maximale Frequenz bei unseren Rechnungen 50 mHz. Da die $\omega-l$ -Plots nun keine Anzeichen von numerischen Problemen mehr zeigen, verschieben wir die maximal zu berücksichtigende Frequenz auf ca. 100 mHz, um zu klären, ob unser Konzept mit zunehmender Frequenz, zumindest in numerischer Hinsicht, nicht doch noch versagt. Dazu haben wir eine Rechnung für eine Quelltiefe von 600 km in einem Frequenzbereich von 2 mHz bis 100 mHz durchgeführt. Den zugehörigen $\omega-l$ -Plot für eine Explosionsquelle sehen wir in Diagramm 5.4 aufgetragen. Wie für die Frequenzen und Quelltiefen im vorhergehenden Abschnitt sehen wir auch hier keine Anzeichen für numerische Schwierigkeiten.

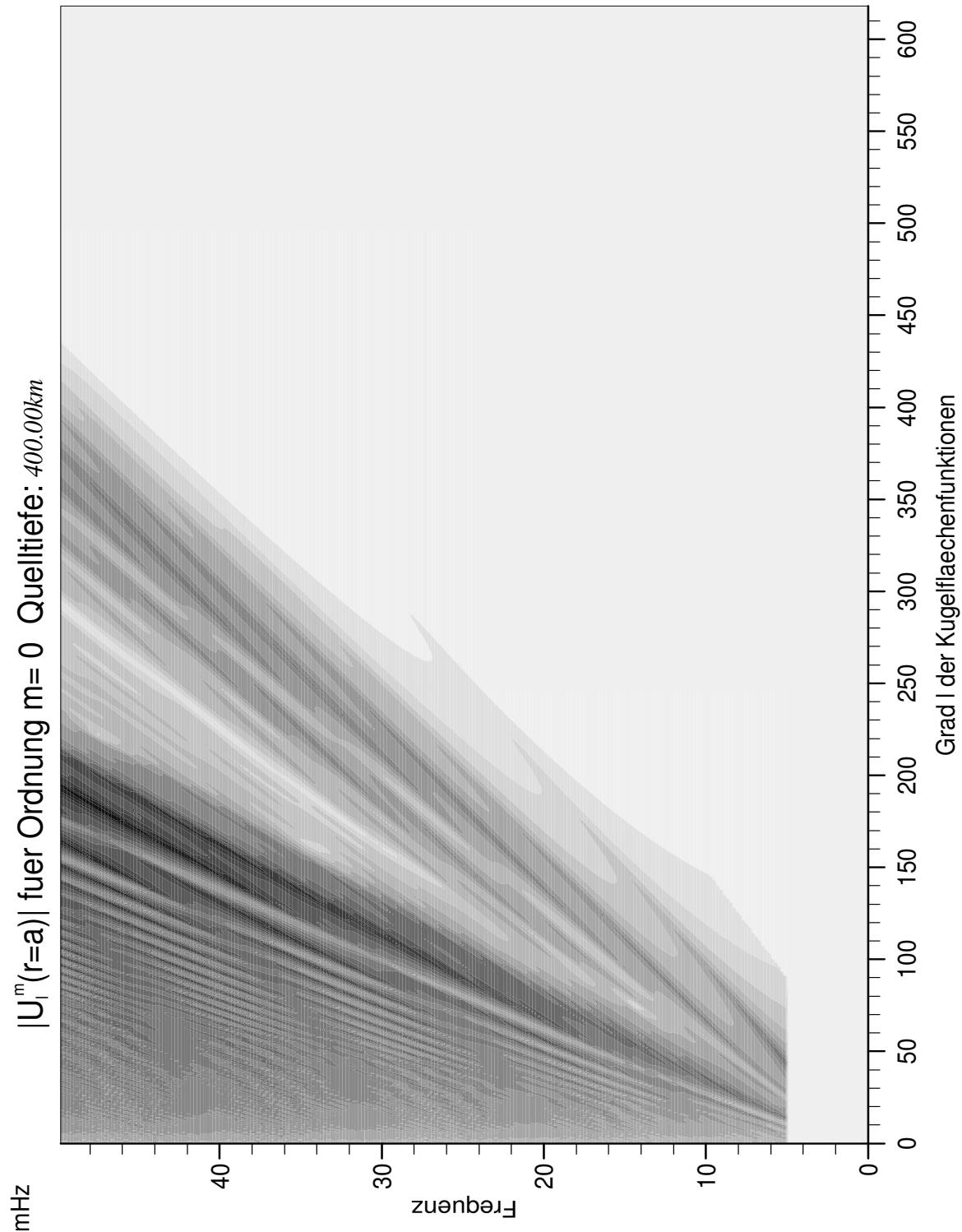


Abbildung 5.3: $\omega-l$ -Plot der Greenschen Funktion mit Explosion als Quelle in einer Tiefe von 400 km. Man sieht keine Anzeichen numerischer Probleme.

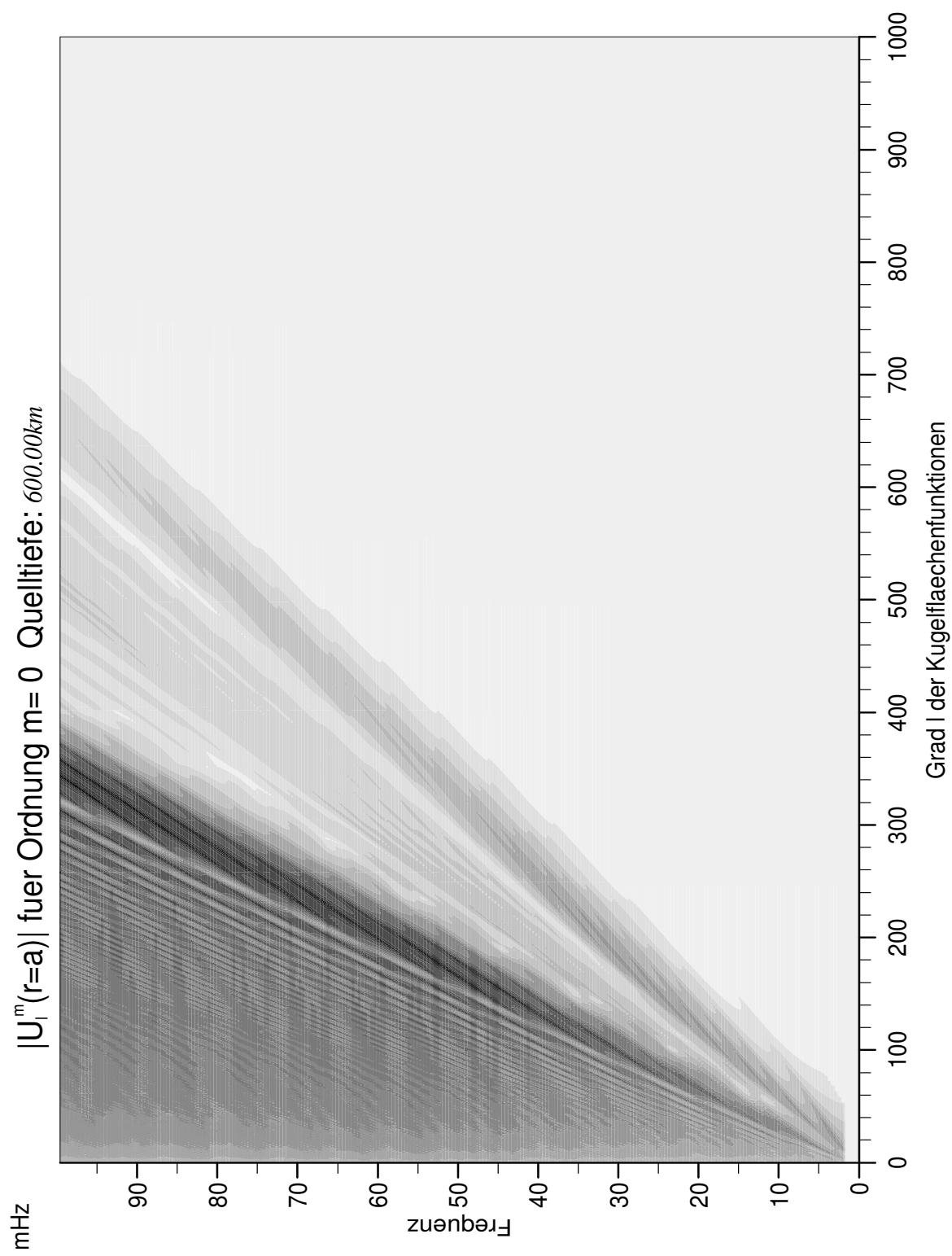


Abbildung 5.4: $\omega-l$ -Plot der Greenschen Funktion für eine Explosion in 600 km Tiefe. Der Frequenzbereich ist 2–100 mHz.

Kapitel 6

Synthetische Seismogramme

6.1 Berechnung synthetischer Seismogramme

Nachdem bezgl. der Quelltiefe keine numerischen Probleme mehr erkennbar sind, starten wir einen ersten Vergleich der *Synthetics* mit gemessenen Daten, um vor allem die Größenordnung der Amplituden unserer künstlichen Zeitreihen zu überprüfen. Diese sollten sich im selben Bereich bewegen. Die „echten“ Seismogramme wurden von Stationen des Regionalnetzes aufgezeichnet.

Nach erfolgreicher Berechnung der $\tilde{U}_l^m(a, \omega)$ erhalten wir das Spektrum $\tilde{U}(a, \omega)$ für einen Empfänger bei ϑ_r, φ_r durch Ausführen der Reihe

$$\tilde{U}(a, \omega) = \sum_{l=0}^{l_{max}} \sum_{m=-l}^l \tilde{U}_l^m(a, \omega) P_l^{|m|}(\cos \vartheta_r) e^{im\varphi_r}, \quad |m| \leq 2,$$

wobei wir l_{max} nach dem in Abschnitt 3.6 beschriebenen Verfahren festlegen.

Wir sollten eigentlich $\tilde{U}(a, \omega - i\sigma)$ schreiben, da wir die Frequenz ω in allen Rechenschritten durch den komplexen Wert $\omega - i\sigma$ ersetzt haben. Dies ist zum einen eine für unsere Methode wesentliche Maßnahme, — wir dürfen nicht in die Pole der Greenschen Funktion laufen — zum anderen ist dies ein nützlicher Trick, um das *Aliasing* im Zeitbereich abzuschwächen (siehe Anhang A.2). Als Konsequenz dieses Vorgehens muß jedoch bei jeder Operation im Frequenzbereich überprüft werden, ob diese evtl. bei komplexen Frequenzen vorzunehmen ist. So sind z.B. die mit den synthetischen Spektren multiplizierten Filterfunktionen bei komplexen Frequenzen zu ermitteln.

Ein für die Amplitudenverteilung im Seismogramm wichtiger Punkt ist das Spektrum $\tilde{h}(\omega)$ des zeitabhängigen Faktors $h(t)$ in den Quelltermen (3.9)ff.

Wir sehen aus Gleichung (5.8), daß unsere Lösung $\tilde{U}_l^m(a, \omega)$ und damit auch $\tilde{U}(a, \omega)$ proportional zum *Quellen-Spektrum* $\tilde{h}(\omega)$ ist. D.h. wir haben

$$\tilde{U}(a, \omega) = \tilde{f}(a, \omega) \tilde{h}(\omega).$$

Für die Rücktransformation in den Zeitbereich bekommen wir dann

$$\begin{aligned} U(a, t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{U}(a, \omega) e^{i\omega t} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(a, \omega) \tilde{h}(\omega) e^{i\omega t} d\omega. \end{aligned}$$

Dies würde einer *Faltung* der beiden Funktionen $f(a, t)$ und $h(t)$ entsprechen:

$$U(a, t) = \int_0^t f(a, \tau) h(t - \tau) d\tau.$$

Die uns zur Verfügung stehenden echten Seismogramme zeigen aber nicht die Verschiebung \mathbf{u} in Abhängigkeit der Zeit, sondern die *Verschiebungsgeschwindigkeit* $\dot{\mathbf{u}}$. Für die obige Faltung heißt das, daß wir

$$\dot{U}(a, t) = \int_0^t f(a, \tau) \dot{h}(t - \tau) d\tau \quad (6.1)$$

erhalten müssen. Wir erreichen eine Vereinfachung, indem wir für die Quellfunktion $h(t)$ eine Sprungfunktion annehmen

$$h(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t \leq 0 \\ 1 & \text{für } t > 0 \end{cases}.$$

Die Ableitung ist dann eine δ -Funktion:

$$\dot{h}(t) = \delta(t),$$

und deren Spektrum gleich Eins:

$$\mathcal{F}[\dot{h}(t)] = 1.$$

Damit wird die Faltung (6.1) zu

$$\dot{U}(a, t) = f(a, t).$$

Das heißt also, transformieren wir nur $\tilde{f}(a, \omega)$,

$$\dot{U}(a, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(a, \omega) e^{i\omega t} d\omega,$$

erhalten wir direkt Geschwindigkeitsseismogramme.

Die Rücktransformation der synthetischen Spektren in den Zeitbereich geschieht mittels der Schnellen Fouriertransformation. Dabei müssen wir beachten daß die Anzahl der Frequenzstützstellen eine 2er-Potenz ist. Da wir die Rechnungen nicht bei $\nu = 0$ beginnen, setzen wir die Stellen bis zum Beginn unseres Frequenzintervalls gleich Null. Eine einfache Methode die Seismogramme etwas zu „glätten“, d.h. zu interpolieren, ist im Spektrum Nullen anzuhängen. Wir tun dies, indem wir die Anzahl der Frequenzstellen durch die gleiche Anzahl Nullen verdoppeln.

Um keine Abschneideeffekte im Seismogramm durch die Unstetigkeit bei der Abbruchfrequenz zu bekommen, müssen wir das Spektrum mittels eines Tiefpass- und Hochpass-Filters an beiden Enden möglichst „sanft“ auf Null herabdämpfen. Dieselben Filter (allerdings dann bei *reellen* Frequenzen berechnet) werden auch auf die echten Daten angewandt.

6.2 Gegenüberstellung mit gemessenen Seismogrammen

Vergleichskriterien:

Die größten Amplituden in einem Seismogramm verursachen in der Regel die Oberflächenwellen. Zum Vergleich mit unseren *Synthetics* sind sie aber nur beschränkt geeignet. Oberflächenwellen durchlaufen mit der Erdkruste ein viel strukturreicheres Medium als es Raumwellen auf ihrem Weg durch den oberen Mantel seien. Da sich dies vor allem auf die Amplitude auswirkt, können wir höchstens die Laufzeiten der Oberflächenwellen bei den gemessenen und synthetischen Seismogrammen vergleichen. Wichtig sind vor allem der Ersteinsatz und die verschiedenen Phasen der Raumwellen.

Die Werte für den Momententensor \mathbf{M} und den Quellradius r_s entnehmen wir der Zeitschrift *Physics of the Earth and Planetary Interiors*. In dieser werden in regelmäßigen Abständen die wichtigsten Kenngrößen von Erdbeben aufgeführt, die sich innerhalb eines bestimmten Zeitraums weltweit ereigneten. Der Herdmechanismus wird dort u.a. durch einen punktförmig lokalisierten Momententensor, dem *Centroid–moment tensor*, repräsentiert (Dziewonski, Chou and Woodhouse, 1981). Wir verwenden die Komponenten dieses Momententensors in unseren Quelltermen (3.9). Außerdem entnehmen wir den Tabellen Datum und Herdzeit, geographische Koordinaten des Herdes und die Herdtiefe.

Die Einheiten der Materialparameter der von uns verwendeten Erdmodelle sind km und km/s. Die Amplituden der echten Seismogramme haben die Einheit nm/s. Geben wir die Tensorkomponenten in (3.9) mit der Einheit 10^6 Nm an, erhalten wir unsere Seismogramme ebenfalls in der Einheit nm/s.

In den folgenden Diagrammen sehen wir die *Synthetics* und die echten Seismogramme übereinander gezeichnet. Das gestrichelte Seismogramm ist das künstliche. In der Diagrammüberschrift stehen Datum und Herdzeit, geographische Breite und Länge, die Ortsangabe des ungefähren Epizentrums, sowie die ungefähre Herdtiefe. Innerhalb des Diagrammrahmens links oben steht die Abkürzung der Station des Regionalnetzes, die Aufzeichnungskomponente — in unserem Fall immer die z(Vertikal)-Komponente — und die Epizentraldistanz der Station zum Herd. Unterhalb des Diagramms haben wir aufgeführt, welche Tiefe bzw. Quellradius wir aus dem Katalog von Quellradien wählten, an denen wir die Green-Koeffizienten berechnet haben. Des Weiteren haben wir den Frequenzbereich, die Größe des Abtastintervalls in diesem, und die Parameter der Filter angegeben. Der Hochpass mit der Eckfrequenz 8 mHz und Ordnung 2 wurde nur auf die *Synthetics* angewandt; er soll die Übertragungsfunktion des Seismographen darstellen.

Die Abbildungen 6.1 bis 6.6 zeigen Seismogrammvergleiche für Beben in einem Epizentralbereich von ca. 50 bis 160 Grad. Die Hypozentren liegen nicht tiefer als ca. 50 km. Für den Vergleich mit tieferen Beben war das Datenmaterial der echten Seismogramme quantitativ und qualitativ nicht ausreichend. Die Oberflächen(Rayleigh)-Welle haben wir nur bei dem Hokkaido- (Abb. 6.2), dem Kurilen- (Abb. 6.4) und dem Mindanao-Beben (Abb. 6.5) mitabgebildet, da deren große Amplitude sonst durch die Skalierung die Amplituden der Raumwellen

auf zu kleine Werte gedrückt hätte.

Wir erkennen, daß die Einsatzzeiten und Amplituden der *Synthetics* recht gut mit denen der echten Seismogramme übereinstimmen, wobei die Einsatzzeiten in diesen Diagrammen nicht sehr genau bestimmt werden können. Es ist erfreulich, daß vor allem bei den Raumwellen die echten Daten von den *Synthetics* teilweise kaum zu unterscheiden sind.

6.3 Vergleich mit Laufzeitkurven für das *iasp91*-Modell

Eine Aussage über die völlige Funktionstüchtigkeit unserer Methode ist durch einen Vergleich mit tatsächlich gemessenen Seismogrammen nicht möglich. Diese werden durch die lokale Struktur in der Stationsumgebung und sonstige, evtl. auch instrumentelle Einflüsse zu stark bestimmt. Höchstens im langperiodischen Bereich ist ein Vergleich in gewissen Grenzen möglich, da Wellen größerer Wellenlänge von der Struktur der Erdkruste weniger beeinflußt werden. In diesem Frequenzbereich ist aber der Vergleich von Einsatzzeiten schwierig, deshalb überprüfen wir die Einsätze der *Synthetics* anhand von Laufzeitkurven für das Modell *iasp91* (Kennett u. Engdahl, 1991).

Wir berechnen hierzu eine *Seismogrammontage*. In Abbildung 6.7 sehen wir 180 Seismogramme der Länge 40 Minuten nebeneinander aufgetragen. Die Grauwerte sind ein Maß für den Betrag der Amplituden; je dunkler desto höher die Amplitude. Die 180 Empfänger sitzen im Abstand von 1 Grad auf einem Großkreis durch das Epizentrum eines Bebens mit einem *double couple* als Quelle in 600 km Tiefe. Der Azimuth der Empfänger ist Null. Das *double couple* simulieren wir durch Wahl von nur einer von Null verschiedenen Komponente des Momententensors, in diesem Fall ist es die Komponente $M^{r\vartheta}$. Wir haben den Seismogrammen die Green-Koeffizienten zugrundegelegt, die wir in Abschnitt 5.4 berechnet haben. Durch das größere Frequenzband (2–100 mHz) erhalten wir eine bessere Auflösung der Einsatzzeiten als wir es mit dem Frequenzbereich 5–50 mHz erhalten hätten.

Zum Vergleich haben wir unserer Montage eine Folie mit der *iasp91*-Laufzeitkurve aus der oben zitierten Literatur für eine Quelle in dieser Tiefe beigefügt. Die Strukturen in dem Bereich, in dem eigentlich noch kein Signal zu sehen sein sollte, sind *Alias*-Effekte.

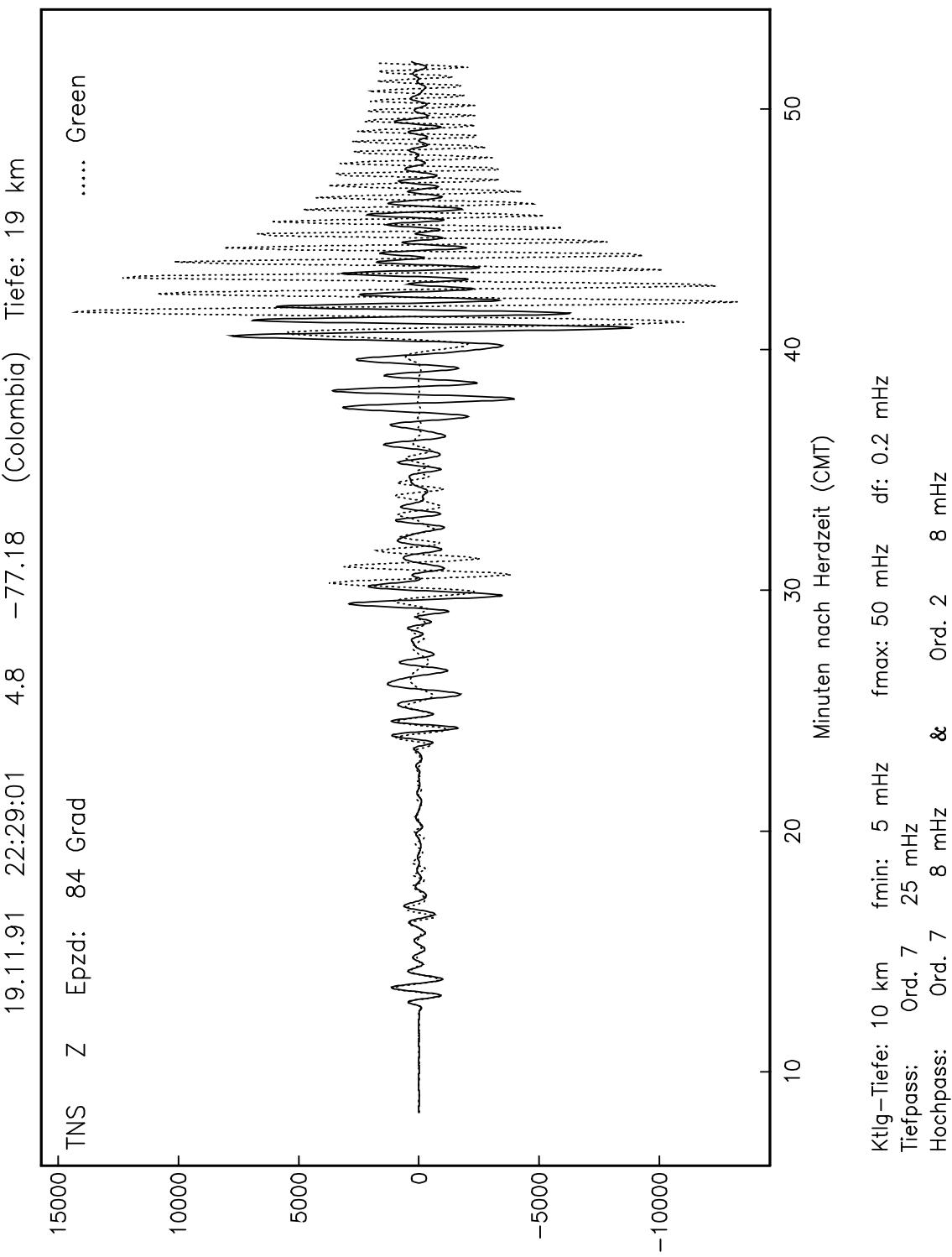


Abbildung 6.1: Vergleich mit echtem Seismogramm. (···) künstliches Seismogramm. Der Verlauf der p-Wellen ist praktisch identisch.

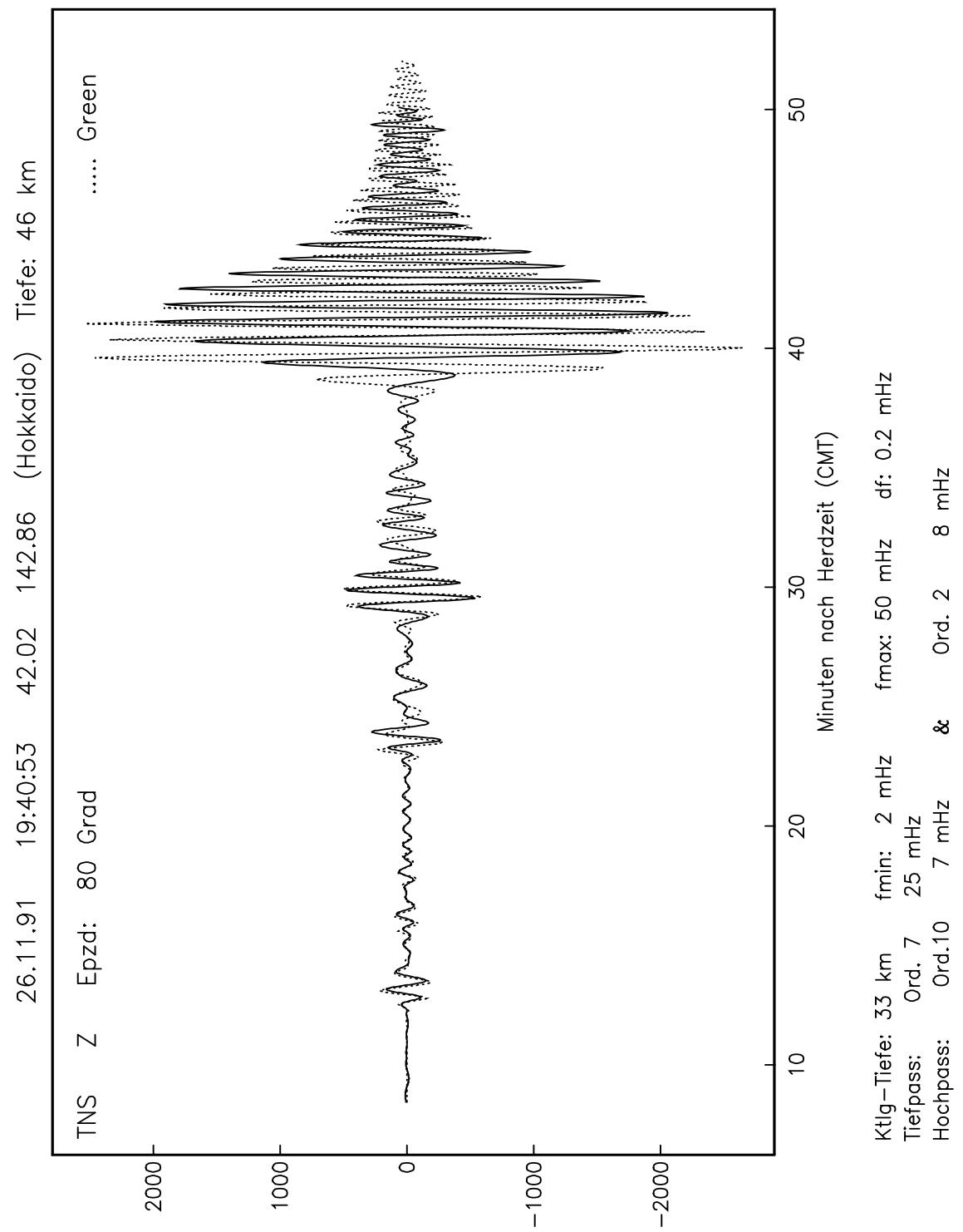


Abbildung 6.2: Vergleich mit echtem Seismogramm. Sowohl der Verlauf der Raumwellen wie auch die Amplituden stimmen gut überein.

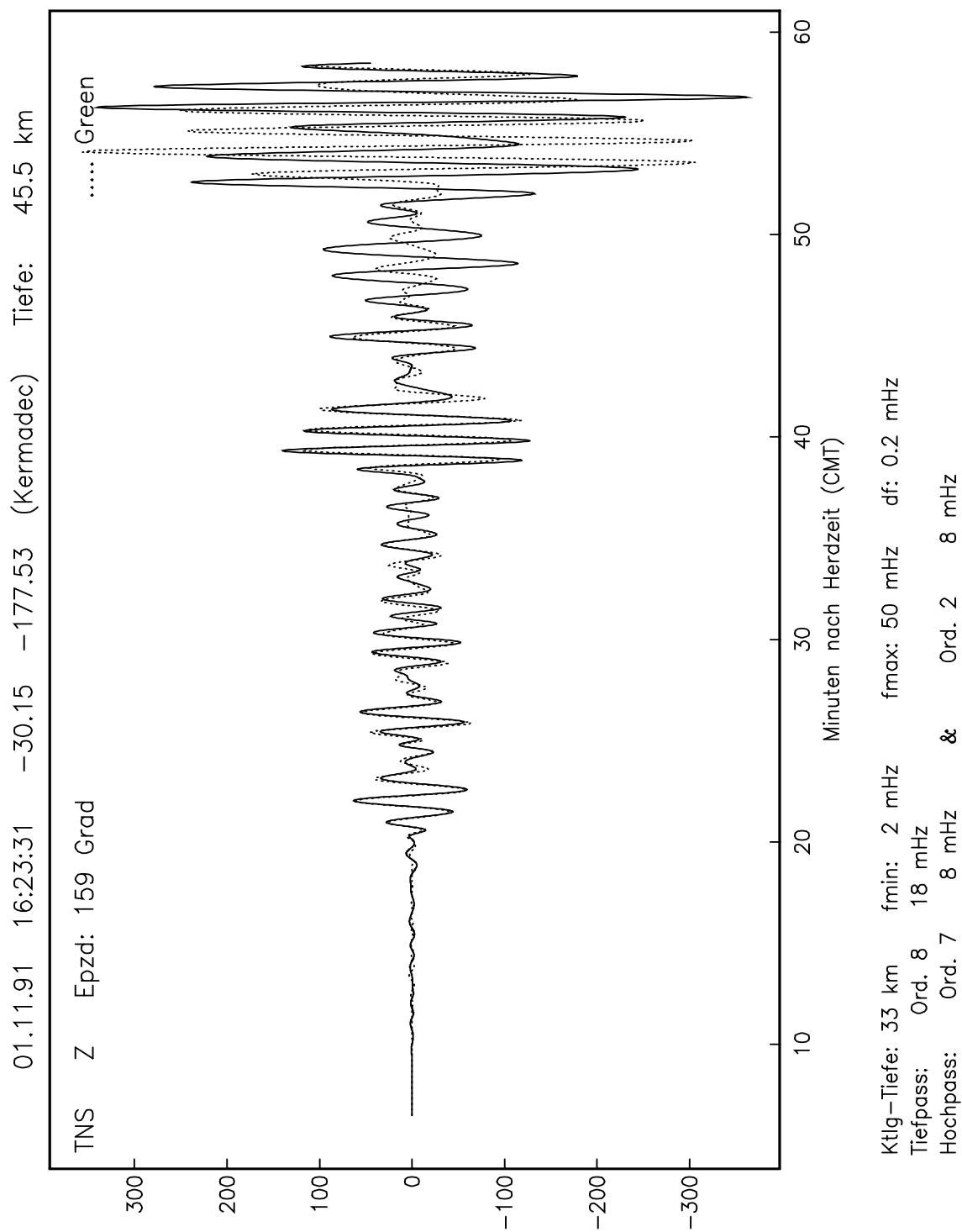


Abbildung 6.3: Vergleich mit dem Seismogramm eines Bebens großer Epizentraldistanz.

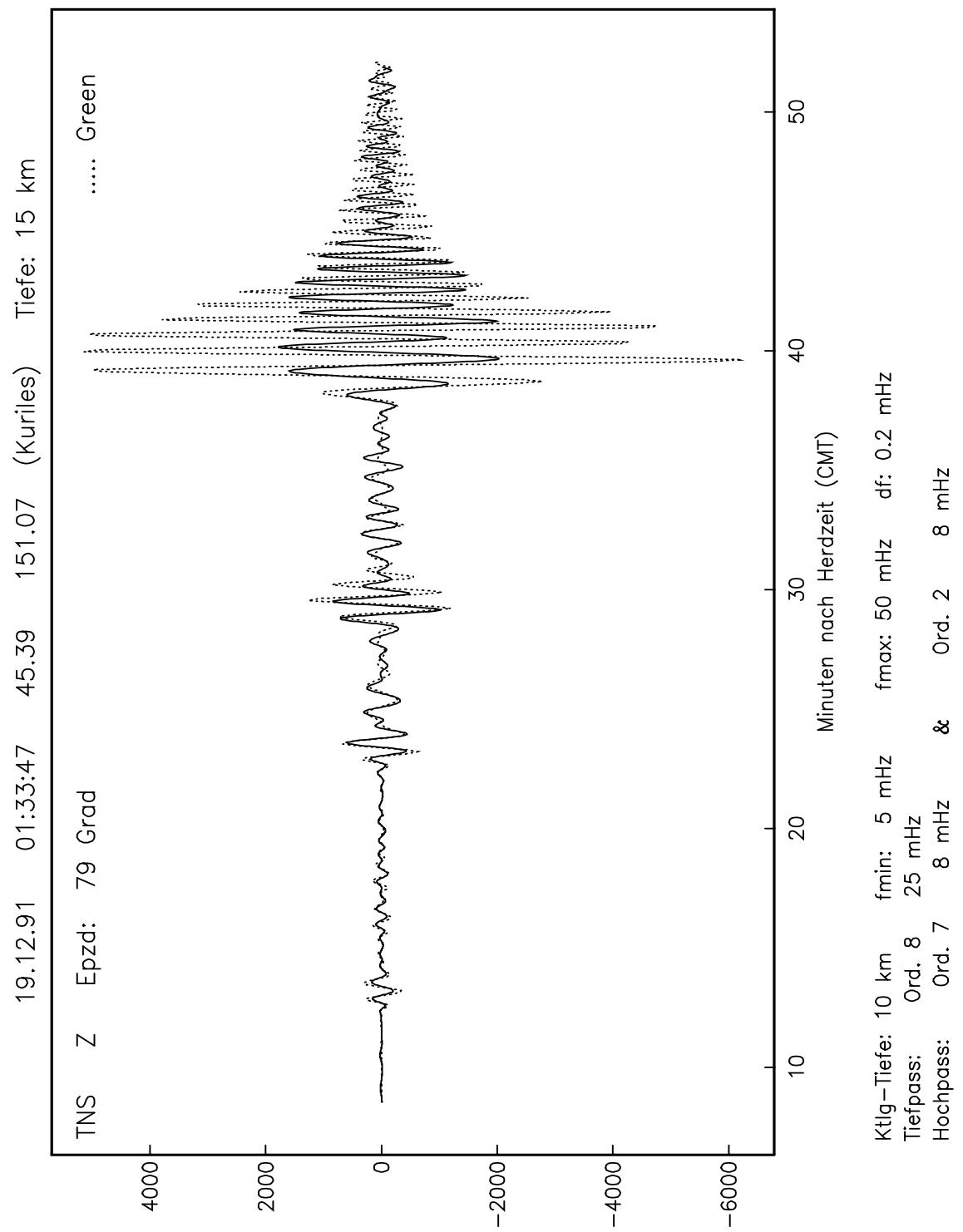


Abbildung 6.4: Seismogrammvergleich mit guter Übereinstimmung der Raumwellen. Amplituden der Oberflächenwelle bei den *Synthetics* zu groß.

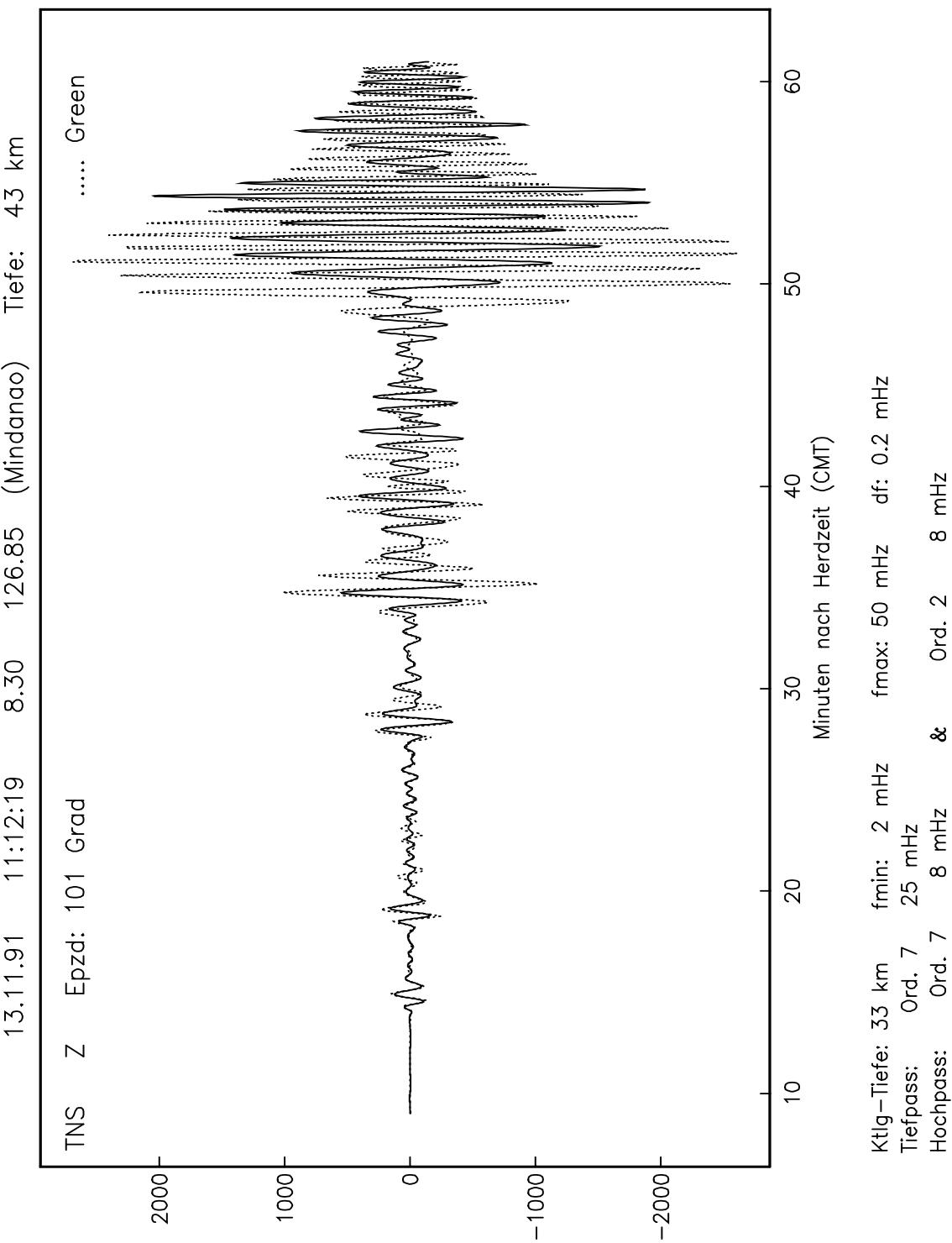


Abbildung 6.5: Gute Übereinstimmung beim zeitlichen Verlauf der Raumwellen. Die Amplituden bewegen sich auch bei der Oberflächenwelle in der gleichen Größenordnung.

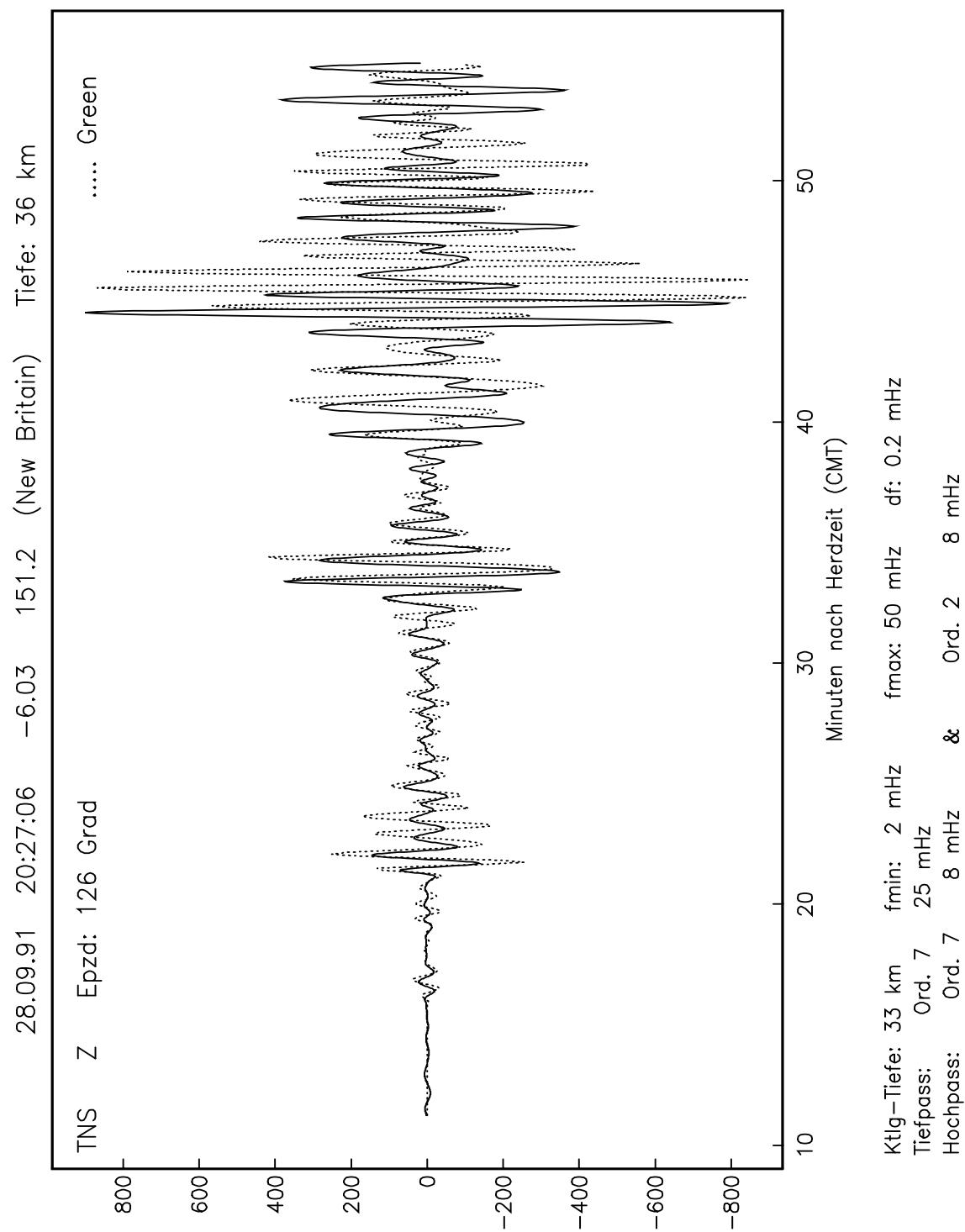


Abbildung 6.6: Seismogrammvergleich mit befriedigendem Ergebnis bis ca. 40 min nach Herdzeit.

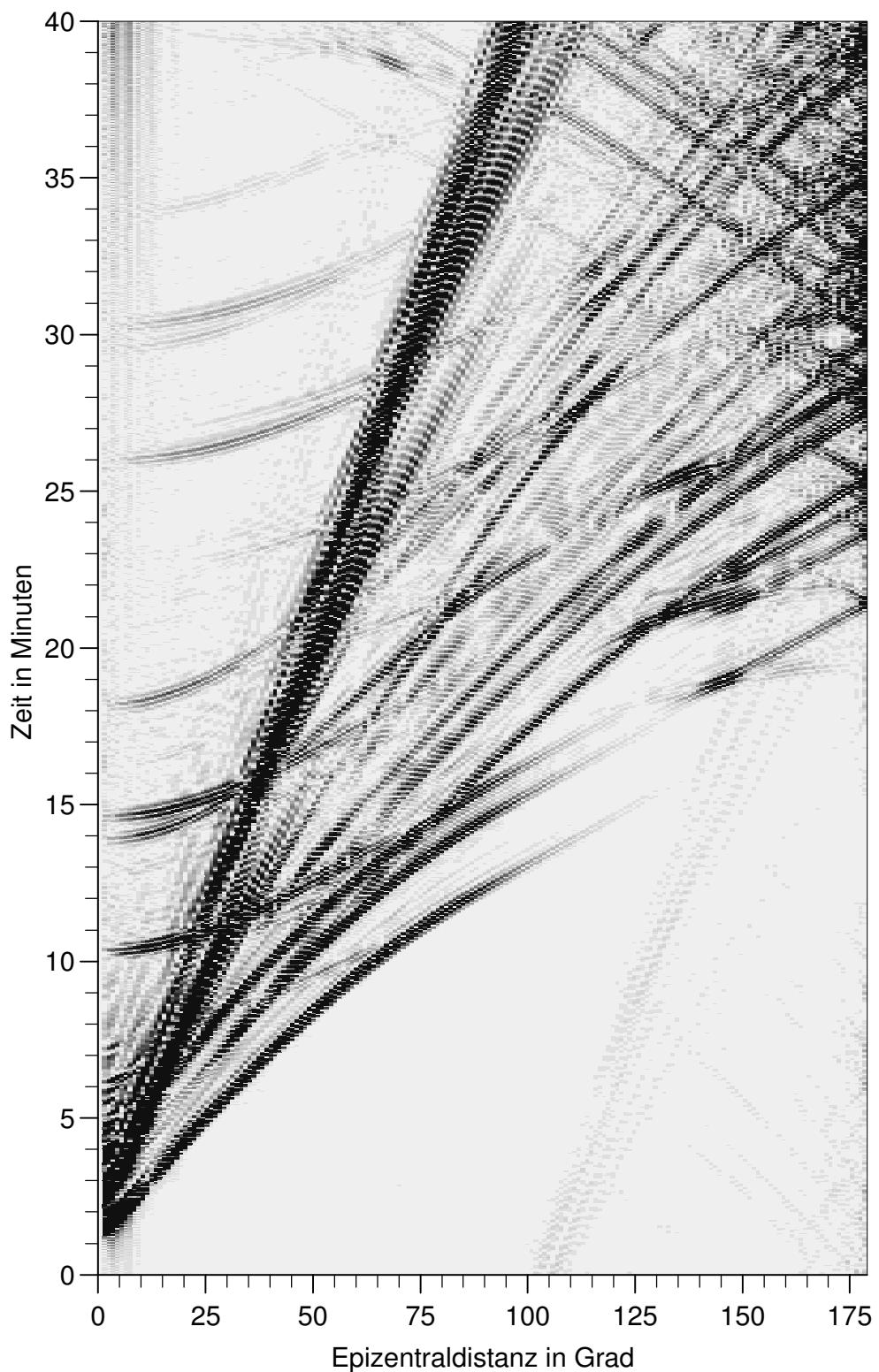


Abbildung 6.7: Seismogrammmontage aus 180 Seismogrammen im Abstand 1° von 0 – 179° Epizentraldistanz. Aufgetragen ist der Betrag der Amplitude. Quelle ist 1 double couple ($M^{r\theta}$, daher kein Ausschlag bei $\Delta = 0$).

6.4 Vergleich mit durch Überlagerung von Eigenschwingungen erzeugten Seismogrammen

Der Vergleich mit Moden–Seismogrammen ist sozusagen die „Nagelprobe“ der Funktionsstüchtigkeit unserer Methode. Wir nehmen diese Seismogramme als Maßstab, da das Verfahren der Überlagerung von Eigenschwingungen vor allem im langperiodischen Bereich im Vergleich mit echten Seismogrammen sehr gute Übereinstimmungen liefert. Das den Rechnungen zugrundeliegende Erdmodell ist *stuprem* (siehe Einleitung).

Der Frequenzbereich der *Synthetics* liegt zwischen 2 und 20 mHz; die Quelltiefe beträgt 10 km. Als geographische Lage der Quelle nehmen wir die eines tatsächlichen Erdbebens vom 23.5.1989 10:55:12 südlich von Australien. Die Koordinaten der Empfänger stammen von Stationen eines weltweiten Seismographennetzes. Diese Stationen registrieren jedoch *Beschleunigungsseismogramme*, und da die Ergebnisse des Moden–Programms normalerweise mit den Daten dieser Stationen verglichen werden, hat sein „output“ die Einheit m/s². Um unsere Seismogramme direkt mit den Moden–Seismogrammen vergleichen zu können, müssen wir das *Ableitungs–Theorem der Fouriertransformation* verwenden:

$$\mathcal{F} \left[\frac{d}{dt} f(t) \right] = i\omega \mathcal{F}[f(t)] = i\omega \tilde{f}(\omega).$$

Da wir unser Spektrum bei komplexen Frequenzen $\omega - i\sigma$ berechnet haben, haben wir es auch mit der komplexen Frequenz zu multiplizieren:

$$i(\omega - i\sigma)\tilde{U}.$$

Das Ergebnis hat dann die Einheit nm/s². Da wir bei dieser Einheit bleiben wollen, multiplizieren wir die Moden–Seismogramme mit 10⁹.

Um etwaige konzeptionelle oder programmtechnische Fehler leichter erkennen zu können, wählen wir für den Momententensor in den Quelltermen (3.9) jeweils nur eine Komponente von Null verschieden. So sind wir eher in der Lage, einen Fehler in den Quelltermen oder in der Summation über die Kugelflächenfunktionen zu entdecken.

Die folgenden Diagramme 6.8 bis 6.13 zeigen die Ergebnisse einiger Vergleiche (zur Beschriftung der Diagramme siehe Abschnitt 6.2). Wir haben für 16 Stationen je 6 Seismogramme entsprechend der 6 unabhängigen Komponenten des Momententensors berechnet. Die Auslenkungen ganz am Anfang der Moden–Seismogramme sind Abschneideeffekte und haben mit dem sonstigen Verlauf nichts zu tun.

Wie die Diagramme zeigen, stimmen unsere *Synthetics* mit den Moden–Seismogrammen praktisch überein.

6.5 Zusammenfassung für die Test– und Vergleichsrechnungen

Die Rechnungen haben gezeigt, daß unsere Methode zur Ermittlung der Greenschen Funktion an der Erdoberfläche zumindest für Frequenzen bis 100 mHz und Quelltiefen bis 600 km offensichtlich keine numerischen Schwierigkeiten bereitet. Rechnungen für eine Explosionsquelle

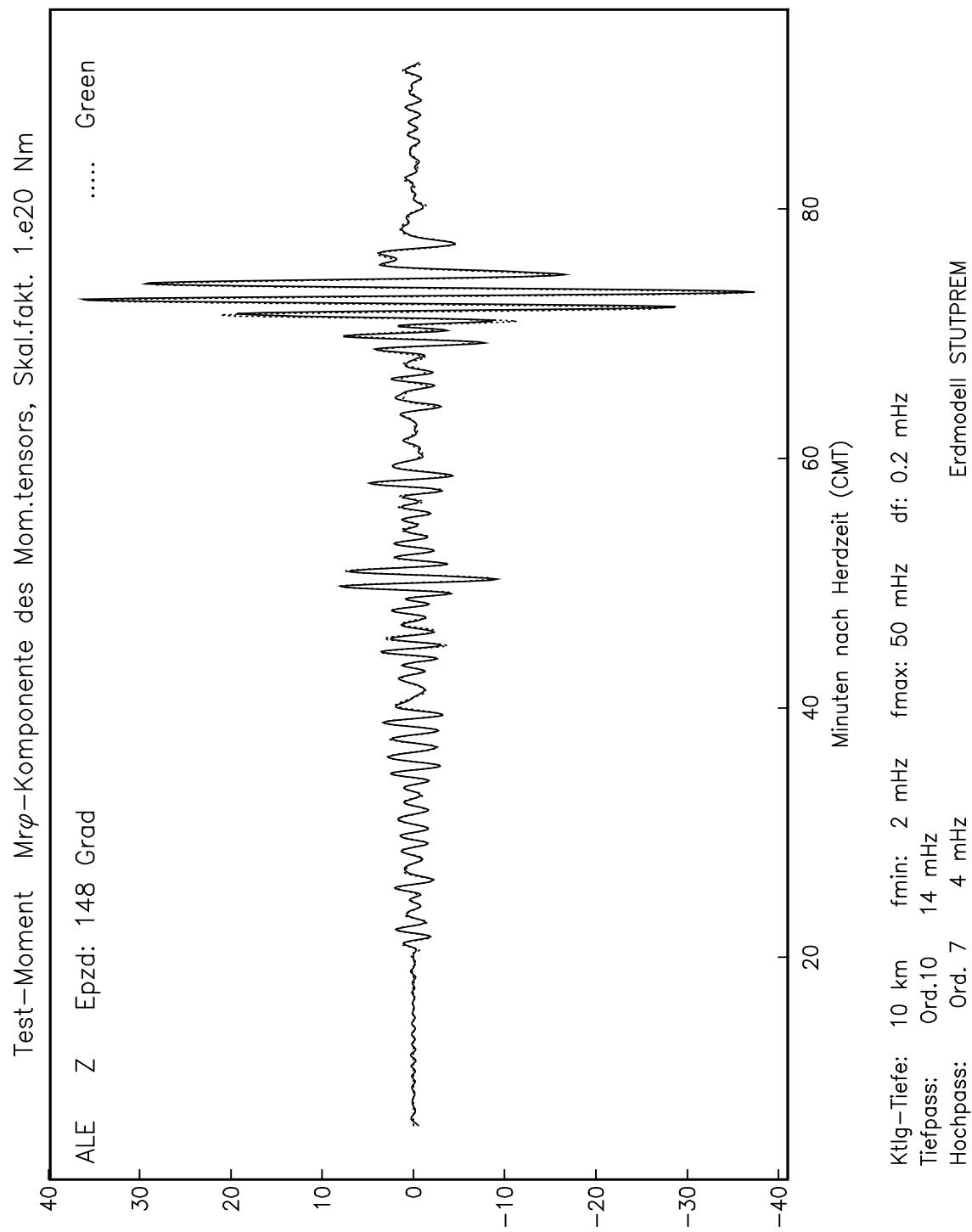


Abbildung 6.8: „Wettstreit der Synthetics“. Man sieht nur minimale Abweichungen im Ergebnis von unserer Methode und dem Eigenschwingungsverfahren.

unter Verwendung des *iasp91*-Modell für Wellengeschwindigkeiten haben gute Übereinstimmung mit den Laufzeitkurven dieses Modells ergeben.

Ein Vergleich von mit dem Regionalnetz aufgezeichneten Seismogrammen mit den synthetischen zeigte eine befriedigende Übereinstimmung bezüglich Amplitudengröße und Amplitudenverhältnisse der einzelnen seismischen Phasen, sowie deren Einsatzzeiten. Überdies hinaus besteht für die Raumwellen teilweise eine völlige Übereinstimmung im zeitlichen Verlauf der einzelnen Phasen.

Die Gegenüberstellung unserer *Synthetics* und der durch Überlagerung von Eigenschwingungen erzeugten *Synthetics* ergab eine praktisch völlige Übereinstimmung der Zeitreihen, weshalb wir auf eine Äquivalenz der in dieser Arbeit vorgestellten Methode zu der Eigenschwingungs-Methode schließen.

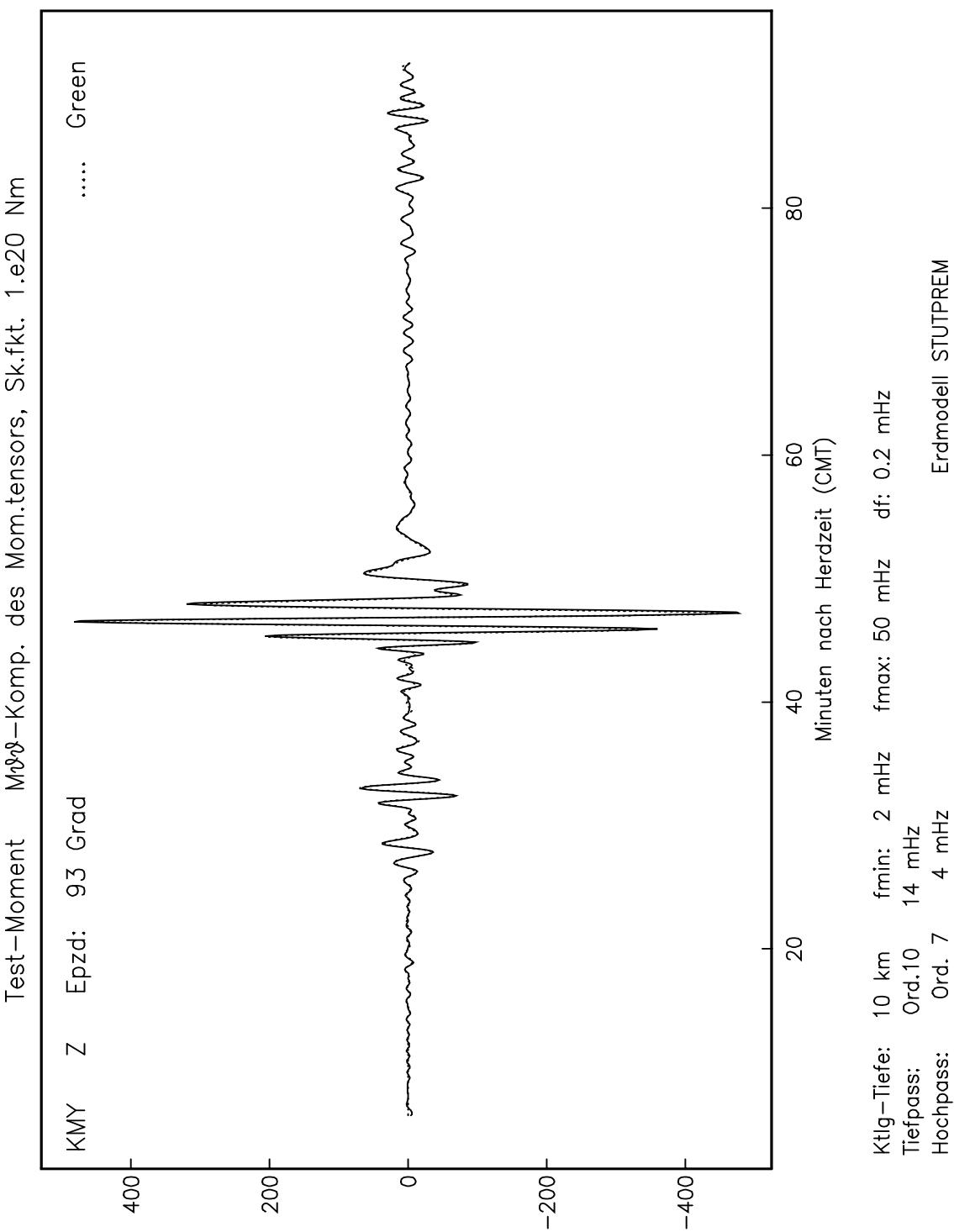


Abbildung 6.9: „Wettstreit der Synthetics“.

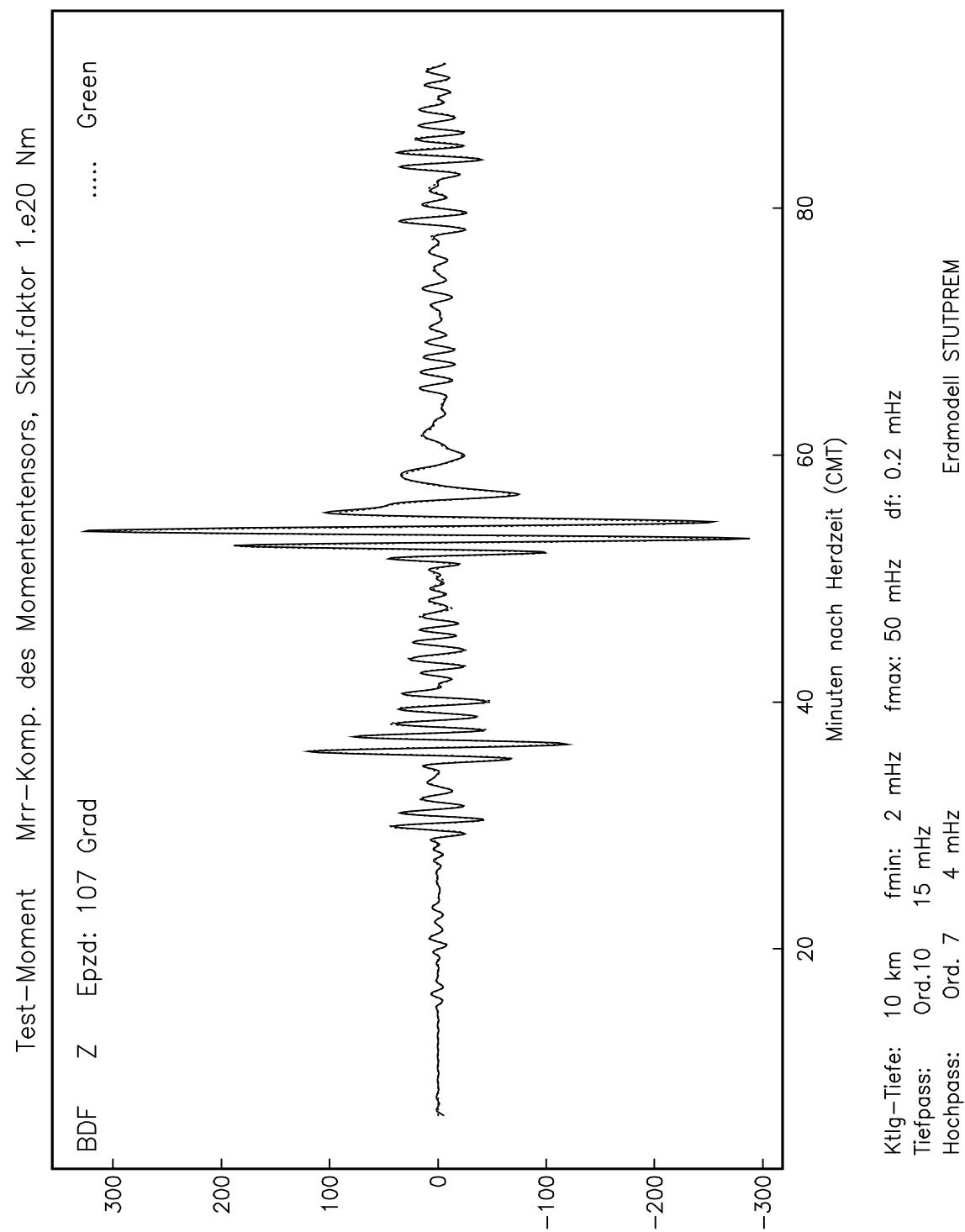


Abbildung 6.10: „Wettstreit der Synthetics“.

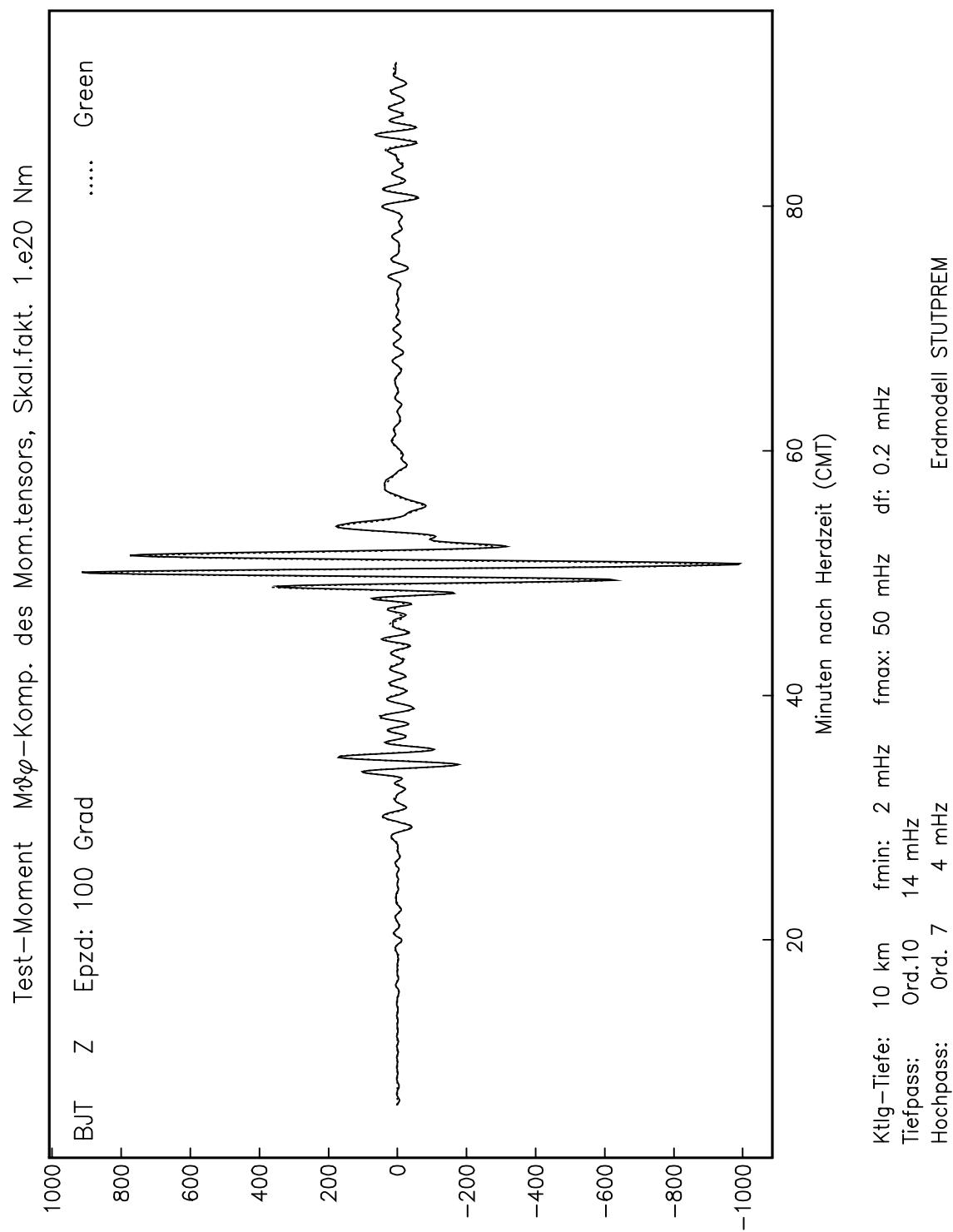


Abbildung 6.11: „Wettstreit der Synthetics“.

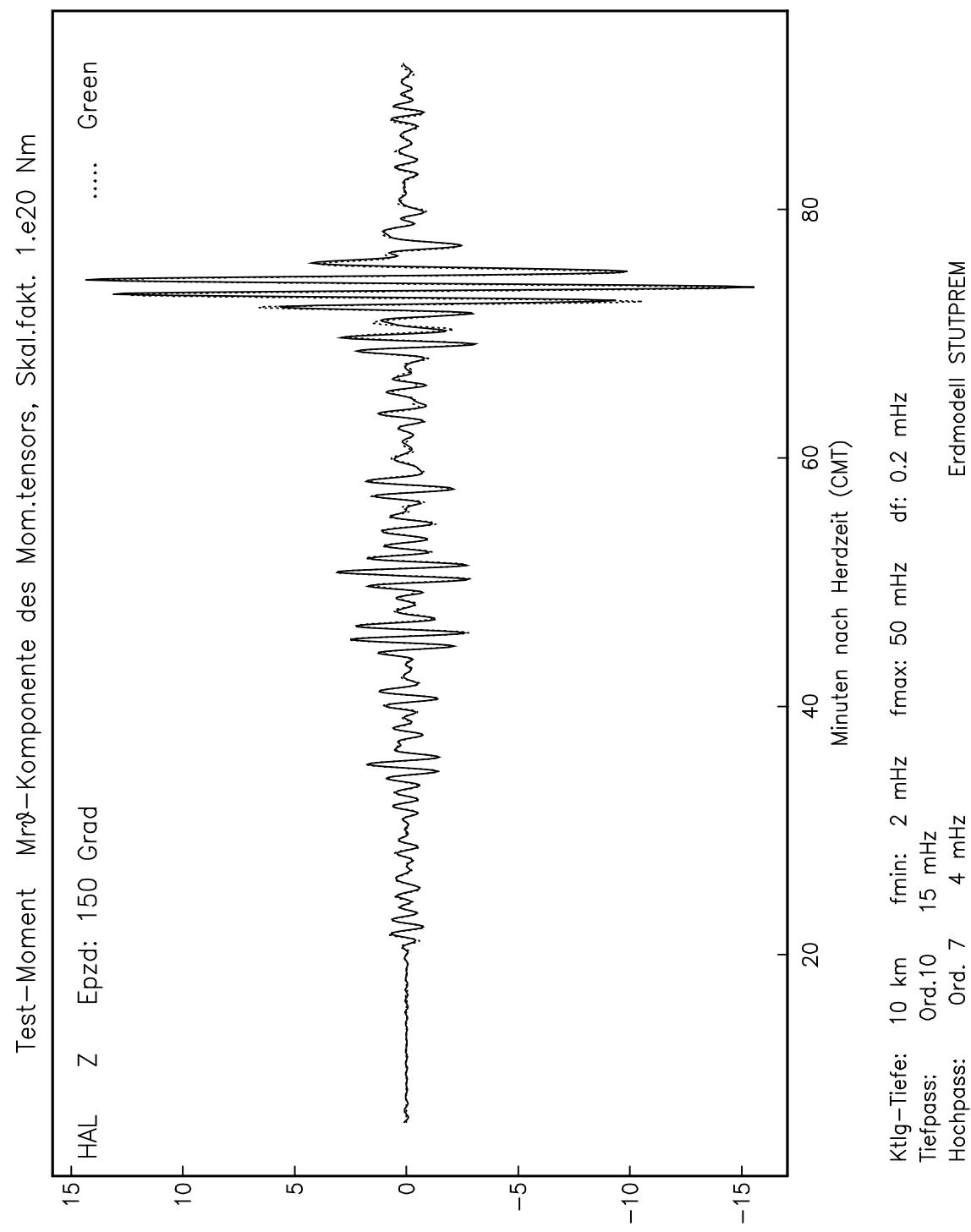


Abbildung 6.12: „Wettstreit der Synthetics“.

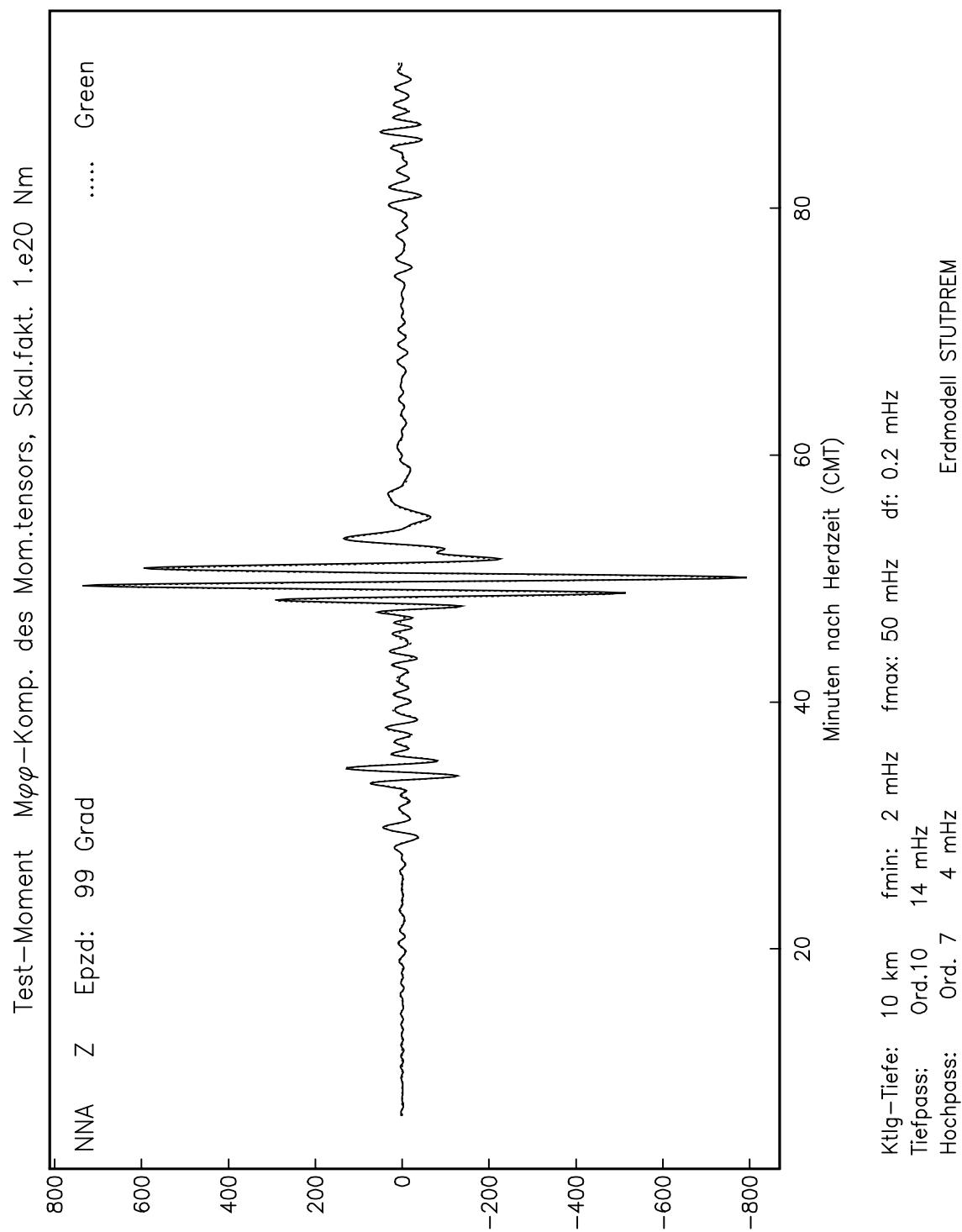


Abbildung 6.13: „Wettstreit der Synthetics“.

Literaturhinweise

- Aki, K. und Richards, P.** *Quantitative Seismology*, Freeman 1980.
- Backus, G.** *Converting Vector and Tensor Equations to Scalar Equations in Spherical Coordinates*, Geophys. J. Roy. Astr. Soc. (1967), **13**, 71–101.
- Ben-Menahem, A. und Singh, S. J.** *Seismic Sources and Waves*, Springer 1981.
- Becker, E. und Bürger, W.** *Kontinuumsmechanik*, Teubner Stuttgart 1990.
- Buttkus, B.** *Spektralanalyse und Filtertheorie*, Springer 1991.
- Collatz, L.** *Differentialgleichungen*, 7. Aufl., Teubner Stuttgart 1990.
- Dziewonski, A. M. und Anderson, D. L.** *Preliminary reference Earth model*, Phys. Earth Planet. Inter.(1981), **25**, 297–356.
- Dziewonski, A. M. Chou, T.-A. und Woodhouse, J. H.** *Determination of earthquake source parameters from waveform data for studies of global and regional seismicity.*, J. Geophys. Res., (1981), **86**, 2825–2852.
- Dziewonski, A. M., Ekström, G. und Salganik, M. P.** *Centroid-moment tensor solutions for July – September 1991*, Phys. Earth Planet. Inter.(1992), **72**, 1–11.
- Dziewonski, A. M., Ekström, G. und Salganik, M. P.** *Centroid-moment tensor solutions for October – December 1991*, Phys. Earth Planet. Inter.(1992), **74**, 89–100.
- Friederich, W.** *Elastische Welle in der Erde*, Vorlesungsmanuskript (1992).
- Kennett, B. L. N. und Engdahl, E. R.** *Traveltimes for global earthquake location and phase identification*, Geophys. J. Int. (1991) **105**, 429–465.
- Klingbeil, E.** *Tensorrechnung für Ingenieure*, 2. Aufl. 1989, B. I. Hochschultaschenbücher.
- Müller, G.** *Rheological properties and velocity dispersion of a medium with power-law dependence of Q on frequency*, Journal of Geophys. (1983) **54**, 20–29.
- Pekeris, C. L. und Jarosh, H.** *The free oscillations of the earth* in „Contributions in Geophys.“, Int. Ser. Monogr. Earth Sci., Vol. I, 171, Pergamon Press 1958.
- Press, W. H., Flannery, B. P., Teukolsky, S. A., Vetterling, W. T.** *Numerical recipes*, Kap. 15., Cambridge Univ. Press 1986.
- Stoer, J. und Bulirsch, R.** *Numerische Mathematik*, Springer 1989, 1990.

Takeuchi, H. und Saito, M. *Seismic surface waves*, Methods in computational physics, **11**, 217–295, Academic Press 1972.

Wasow, W. *Asymptotic expansions for ordinary differential equations*, **14**, Pure and Applied Mathematics, Interscience Publishers 1965.

Woodhouse, J. H. *The calculation of Eigenfrequencies and Eigenfunctions of the free oscillations of the Earth and the Sun*, 1988, Seismological Algorithms, Academic Press.

Danksagung

Ich bedanke mich bei Pr. E. Wielandt für die Übernahme des Hauptberichts und die freundliche Aufnahme in sein Institut.

Für die Übernahme des Mitberichts danke ich Pr. A. Seeger.

Mein besonderer Dank gilt meinem Betreuer Dr. Wolfgang Friederich, auf dessen Ideen diese Arbeit basiert, der wesentliche Anregungen bezgl. Inhalt und Strukturierung lieferte, und der immer Zeit für meine Fragen und Probleme hatte.

Ruedi Widmer von der Universität Karlsruhe danke ich für die Bereitstellung und Installation der Programme zur Berechnung synthetischer Seismogramme durch Überlagerung von Eigenschwingungen.

Ich möchte mich bei allen Angehörigen des Instituts für Geophysik herzlichst bedanken. Die von ihnen geschaffene, überaus gelöste und freundliche Arbeitsatmosphäre hat mir zu einem rundum gelungenen Abschluß meines Physik-Studiums verholfen.

Anhang A

A.1 Güte Q und komplexe, elastische Parameter

Dissipative Prozesse bei Ausbreitung von Wellen werden oft mit linearen Gesetzen beschrieben, d.h. die Spannungs–Dehnungs–Beziehung (SDB) ist immer noch von linearer Form wie beim völlig elastischen Material. Nur treten jetzt Phasenverschiebungen zwischen Verzerrung und Spannung auf, was dazu führt, daß die elastischen Module frequenzabhängige Größen sind, und die SDB die Form einer Faltung im Zeitbereich annimmt. Im einfachsten Fall schreiben wir dafür

$$p(t) = \int_0^t M(t-\tau)\epsilon(\tau) d\tau, \quad (\text{A.1})$$

und nach der Fouriertransformation

$$\tilde{p}(\omega) = \tilde{M}(\omega)\tilde{\epsilon}(\omega), \quad (\text{A.2})$$

mit \tilde{p} als der Spannung, \tilde{M} als dem elastischen Modul und $\tilde{\epsilon}$ als der Verzerrung.

Die Güte Q definiert man als Quotient von Realteil und Imaginärteil der komplexen Größe $\tilde{M}(\omega)$

$$Q \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\Re \tilde{M}(\omega)}{\Im \tilde{M}(\omega)} = \frac{\tilde{M}_1(\omega)}{\tilde{M}_2(\omega)}, \quad (\text{A.3})$$

wenn $\tilde{M} = \tilde{M}_1 + i\tilde{M}_2$.

In der Exponentialdarstellung für komplexe Zahlen schreiben wir für \tilde{M} :

$$\tilde{M}(\omega) = A(\omega)e^{i\phi(\omega)}. \quad (\text{A.4})$$

Für die Phase $\phi(\omega)$ von \tilde{M} erhalten wir dann

$$\tan \phi(\omega) = \frac{\tilde{M}_2}{\tilde{M}_1} = \frac{1}{Q} =: q. \quad (\text{A.5})$$

Wir sind nun in der Lage mit Hilfe der *Dispersions–* oder auch *Kramers–Kronig–*Relationen im Falle $Q = \text{const.}$ nähere Aussagen über $\tilde{M}(\omega)$ zu machen.

Mit unserer Definition der Fouriertransformation

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(\omega)e^{i\omega t} d\omega \quad , \quad \tilde{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt, \quad (\text{A.6})$$

haben die Dispersions–Relationen, angewandt auf $\tilde{M}(\omega)$, die Form (Ben–Menahem u. Singh, 1981)

$$\tilde{M}_1(\omega) = \tilde{M}_1(\infty) - \frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\tilde{M}_2(\omega')}{\omega' - \omega} d\omega' \quad (\text{A.7})$$

$$\tilde{M}_2(\omega) = \tilde{M}_2(\infty) + \frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\tilde{M}_1(\omega')}{\omega' - \omega} d\omega'. \quad (\text{A.8})$$

Hierin bedeutet $P \int_{-\infty}^{+\infty} \dots$ der *Cauchysche Hauptwert*.

Da wir in unserem Erdmodell ein frequenzunabhängiges Q verwenden, können wir in diesem Fall aus den Dispersions–Relationen die Frequenzabhängigkeit von $A(\omega)$ ermitteln.

Konstantes Q bedeutet konstante Phase ϕ . Um dies auszunützen, wenden wir die Dispersionsrelationen auf $\ln \tilde{M}$ an (Müller, 1983), d.h. auf

$$\ln \tilde{M}(\omega) = \ln A(\omega) + i\phi \quad (+n2\pi i), \quad n = 1, 2, \dots, \quad (\text{A.9})$$

den Summanden in Klammern berücksichtigen wir nicht.

Damit haben wir für den Realteil von $\ln \tilde{M}$

$$\ln A(\omega) = \ln A(\infty) - \frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\phi}{\omega' - \omega} d\omega'. \quad (\text{A.10})$$

Da $M(t)$ eine reelle Größe ist, gilt für dessen Fouriertransformierte die Symmetriebeziehung

$$\tilde{M}_1(-\omega) = \tilde{M}_1(\omega) \quad (\text{A.11})$$

$$\tilde{M}_2(-\omega) = -\tilde{M}_2(\omega), \quad (\text{A.12})$$

und deshalb für die Phase ϕ

$$\phi(-\omega) = -\phi(\omega). \quad (\text{A.13})$$

Wir wollen die Konstanten bei positiven Frequenzen haben und spalten daher das Hauptwertintegral mit Hilfe von Beziehung (A.13) in folgender Weise auf:

$$\ln A(\omega) = \ln A(\infty) + \frac{\phi}{\pi} \int_{-\infty}^0 \frac{d\omega'}{\omega' - \omega} - \frac{\phi}{\pi} P \int_0^{+\infty} \frac{d\omega'}{\omega' - \omega}. \quad (\text{A.14})$$

Man kann nachrechnen, daß sich obiger Ausdruck auch schreiben läßt als

$$\ln A(\omega) = \ln A(\infty) + \frac{2\phi}{\pi} \int_{-\infty}^0 \frac{d\omega'}{\omega' - \omega}. \quad (\text{A.15})$$

Diese Formel ist nur weiter auswertbar für die Differenz

$$\ln A(\omega) - \ln A(\omega_r) = \ln \frac{A(\omega)}{A(\omega_r)}, \quad (\text{A.16})$$

wobei ω_r eine Referenzfrequenz sein soll.

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} \ln \frac{A(\omega)}{A(\omega_r)} &= \frac{2\phi}{\pi} \int_{-\infty}^0 \left(\frac{1}{\omega' - \omega} - \frac{1}{\omega' - \omega_r} \right) d\omega' \\ &= \frac{2\phi}{\pi} \ln \frac{\omega' - \omega}{\omega' - \omega_r} \Big|_{-\infty}^0 \\ &= \frac{2\phi}{\pi} \ln \frac{\omega}{\omega_r}, \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

und somit für $A(\omega)$

$$A(\omega) = A(\omega_r) \left(\frac{\omega}{\omega_r} \right)^{\frac{2\phi}{\pi}}. \quad (\text{A.18})$$

Damit bekommen wir schließlich für unseren komplexen Modul:

$$\tilde{M}(\omega) = A(\omega) e^{i\phi} = A(\omega_r) \left(\frac{\omega}{\omega_r} \right)^{\frac{2\phi}{\pi}} e^{i\phi}. \quad (\text{A.19})$$

Meistens ist die Güte ziemlich groß, auf jeden Fall aber

$$Q \gg 1, \quad (\text{A.20})$$

dann ist $\phi \ll 1$, und wir nähern

$$\begin{aligned} \tilde{M}(\omega) &= A(\omega_r) e^{\frac{2\phi}{\pi} \ln \frac{\omega}{\omega_r} + i\phi} \\ &\approx A(\omega_r) \left(1 + \frac{2\phi}{\pi} \ln \frac{\omega}{\omega_r} + i\phi \right) \\ &\approx A(\omega_r) \left(1 + \frac{2q}{\pi} \ln \frac{\omega}{\omega_r} + iq \right), \end{aligned} \quad (\text{A.21})$$

da $q = \tan \phi \approx \phi$ ist. Obige Beziehung verwenden wir bei den Berechnungen.

Die Referenzfrequenz ist bei den von uns benutzten Modellen 1 Hz. Dort sind jedoch nur P- und S-Wellengeschwindigkeiten angegeben, für welche die Beziehungen

$$v_P^2 = \alpha^2 = \frac{\tilde{\lambda}(\omega_r) + 2\tilde{\mu}(\omega_r)}{\rho} \quad (\text{A.22})$$

$$v_S^2 = \beta^2 = \frac{\tilde{\mu}(\omega_r)}{\rho} \quad (\text{A.23})$$

gelten. Unser Erdmodell erlaubt uns also die Berechnung von $\tilde{\lambda}(\omega_r)$ und $\tilde{\mu}(\omega_r)$. Dort aufgeführt sind aber nicht Q_μ und Q_λ , sondern Q_μ und Q_κ , wobei κ die Kompressibilität ist, für die gilt

$$\tilde{\kappa} = \tilde{\lambda} + \frac{2}{3}\tilde{\mu}. \quad (\text{A.24})$$

Das heißt, wir konstruieren $\tilde{\kappa}(\omega_r)$ aus $\tilde{\lambda}(\omega_r)$ und $\tilde{\mu}(\omega_r)$, erweitern danach auf den komplexen Wert mittels

$$\tilde{\kappa}(\omega) = \tilde{\kappa}(\omega_r) \left(1 + \frac{2q_\kappa}{\pi} \ln \frac{\omega}{\omega_r} + iq_\kappa \right) \quad (\text{A.25})$$

$$\tilde{\mu}(\omega) = \tilde{\mu}(\omega_r) \left(1 + \frac{2q_\mu}{\pi} \ln \frac{\omega}{\omega_r} + iq_\mu \right), \quad (\text{A.26})$$

bestimmen dann $\tilde{\lambda}(\omega)$ aus Gleichung (A.24), und setzen abschließend

$$\tilde{A} = \tilde{C} = \tilde{\lambda}(\omega) + 2\tilde{\mu}(\omega) \quad (\text{A.27})$$

$$\tilde{L} = \tilde{N} = \tilde{\mu}(\omega) \quad (\text{A.28})$$

$$\tilde{F} = \tilde{\lambda}(\omega). \quad (\text{A.29})$$

A.2 Time-aliasing, was tun?

Aus der Tatsache, daß wir das Spektrum nur an diskreten Stützstellen berechnen können, ergibt sich das Problem des *Aliasing*.

Nehmen wir an, wir können ein an sich kontinuierliches Spektrum $\tilde{f}(\nu)$ nur an diskreten (äquidistanten) Stellen erfassen und erhalten dadurch die diskrete Folge \tilde{f}_i . Wir können diese Folge als kontinuierliches Spektrum $\tilde{f}_s(\nu)$ auffassen, welches an den Stützstellen die Funktionswerte von $\tilde{f}(\nu)$ annimmt und sonst verschwindet (Buttkus, 1991). $\tilde{f}_s(\nu)$ läßt sich darstellen als Produkt der Funktion $\tilde{f}(\nu)$ mit der *Kammfunktion* $\text{III}(\nu)$, welche wir in der Form

$$\text{III}(\nu) = \Delta\nu \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(\nu - n\Delta\nu) \quad (\text{A.30})$$

benutzen. Wir erhalten für $\tilde{f}_s(\nu)$

$$\tilde{f}_s(\nu) = \tilde{f}(\nu) \text{III}(\nu) = \tilde{f}(\nu) \Delta\nu \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(\nu - n\Delta\nu). \quad (\text{A.31})$$

Die Funktion $f_s(t)$ bekommen wir durch Fouriertransformation, abgekürzt durch $\mathcal{F}[\dots]$, und Benutzung des Faltungstheorems zu

$$\begin{aligned} f_s(t) &= \mathcal{F}[\tilde{f}_s(\nu)] = \mathcal{F}[\tilde{f}(\nu) \text{III}(\nu)] \\ &= f(t) * \text{III}(t) = f(t) * \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - \frac{n}{\Delta\nu}) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(t - \frac{n}{\Delta\nu}) \\ &= f(t) + \sum_{n=1}^{\infty} \left[f(t - \frac{n}{\Delta\nu}) + f(t + \frac{n}{\Delta\nu}) \right]. \end{aligned} \quad (\text{A.32})$$

Wir sehen, daß zum „eigentlichen“ Wert $f(t_0)$ an der Stelle $t_0 < \frac{1}{\Delta\nu}$ auch noch Funktionswerte an den Stellen $t_0 \pm \frac{n}{\Delta\nu}$, $n = 1, 2, \dots$ beitragen, welche $f_s(t)$ gegenüber $f(t)$ verfälschen.

$\Delta\nu$ ist in unserem Fall bestimmt durch die Länge T des Zeitfensters, in welchem wir das Seismogramm berechnen wollen:

$$\Delta\nu = \frac{1}{T}, \quad (\text{A.33})$$

dabei ist $\Delta\nu$ die Fundamentalfrequenz der Fourierreihe, welche das Seismogramm im Intervall $0 < t < T$ darstellt.

Die Seismogramme fangen frühestens zur *Herdzeit* $t = 0$ an, das bedeutet für $f(t)$ in den obigen Gleichungen

$$f(t) = 0 \quad \text{für} \quad t < 0, \quad (\text{A.34})$$

wir erhalten daher für einen Zeitpunkt in unserem „Beobachtungsfenster“:

$$f_s(t) = f(t) + \sum_{n=1}^{\infty} f(t + nT), \quad 0 < t < T. \quad (\text{A.35})$$

Obiges Resultat bedeutet für uns folgendes:

Da unser Seismogramm im Intervall $[0, T)$ durch Beiträge aus $[T, \infty)$ verfälscht werden könnte, sollten wir dafür sorgen, daß $|f(t)|$ für $t > T$ nur noch sehr wenig von Null verschieden ist. Wir erzwingen dies, indem wir statt $f(t)$ ein exponentiell gedämpftes Seismogramm

$$f_a(t) \stackrel{\text{def}}{=} f(t)e^{-\frac{t}{\tau}} = f(t)e^{-\sigma t}, \quad \sigma = \frac{1}{\tau}, \quad t > 0 \quad (\text{A.36})$$

ermitteln. Um zu sehen, wie dies zu bewerkstelligen ist, betrachten wir die Fouriertransformierte von $f_a(t)$:

$$\begin{aligned} \tilde{f}_a(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-\sigma t}e^{-i\omega t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i(\omega-i\sigma)t} dt \\ &= \tilde{f}(\omega - i\sigma). \end{aligned} \quad (\text{A.37})$$

Ermitteln wir die Fouriertransformierte von $f(t)$ bei komplexen Frequenzen $\omega - i\sigma$, σ fest, erhalten wir nach der Rücktransformation von $\tilde{f}(\omega - i\sigma)$ die exponentiell gedämpfte Funktion $f(t)e^{-\sigma t}$. Bei genügend großem σ haben wir dann bei

$$f_{a,s}(t) = f_a(t) + \sum_{n=1}^{\infty} f_a(t + nT), \quad 0 < t < T \quad (\text{A.38})$$

für $t + nT$ kaum noch störende Beiträge $f_a(t + nT)$. Um das gewünschte, nicht künstlich gedämpfte Seismogramm zu erlangen, müssen wir $f_{a,s}(t)$ im Intervall $0 < t < T$ mit dem Faktor $e^{\sigma t}$ „aufblasen“.

Wir haben

$$f_{a,s}(t) = f(t)e^{-\sigma t} + \sum_{n=1}^{\infty} f(t + nT)e^{-\sigma(t+nT)}, \quad 0 < t < T, \quad (\text{A.39})$$

und bilden

$$f_{a,s}(t)e^{\sigma t} = f(t) + \sum_{n=1}^{\infty} f(t + nT)e^{-\sigma nT}, \quad 0 < t < T, \quad (\text{A.40})$$

worin der Faktor $e^{-\sigma nT}$ die Störanteile auf ein erträgliches Maß (bei passendem σ) unterdrücken sollte.

Üblicherweise wählt man τ etwa 20–40% der Beobachtungsdauer T . In einer unserer Rechnungen hatten wir z.B. $T = 5120s$ und $\tau = 1000s$, also $\sigma = 10^{-3}/s$; damit ist $e^{-\sigma nT}$ maximal

$$e^{-\sigma T} \approx 6 \cdot 10^{-3} \quad < 1\%.$$

A.3 Verhalten der $P_l^m(\cos \vartheta)$ für $\vartheta \rightarrow 0$

Bei den Berechnungen der Entwicklungskoeffizienten G_l^m und H_l^m für die Quelle f hatten wir das Koordinatensystem so gedreht, daß f im Pol zu liegen kam. Hierfür benötigten wir das Verhalten von $P_l^{|m|}(\cos \vartheta)$ bei kleinen Winkeln ϑ .

Wir lassen im folgenden die Betragsstriche bei m fort, und betonen nochmals, daß $m \geq 0$, d.h. wir verwenden die zugeordneten Legendrepolygone mit der Definition

$$P_l^m(x) \stackrel{\text{def}}{=} (1 - x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m}{dx^m} P_l(x), \quad m > 0,$$

mit

$$P_l(x) = \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{dx^l} (x^2 - 1)^l \quad \text{Formel von Rodrigues}$$

und $x = \cos \vartheta$, also

$$P_l^m(x) = \frac{1}{2^l l!} (1 - x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^{l+m}}{dx^{l+m}} (x^2 - 1)^l. \quad (\text{A.41})$$

Wir setzen nun

$$u = x - 1,$$

und bekommen dann

$$x^2 - 1 = u^2 + 2u.$$

Für die Potenz $(x^2 - 1)^l$ erhalten wir mit Hilfe der *Binomialentwicklung*:

$$\begin{aligned} (x^2 - 1)^l &= (u^2 + 2u)^l \\ &= \sum_{j=0}^l \binom{l}{j} (2u)^{l-j} u^{2j} \\ &= 2^l \sum_{j=0}^l \frac{1}{2^j} \binom{l}{j} u^{l+j}. \end{aligned} \quad (\text{A.42})$$

Dies müssen wir $(l + m)$ -mal ableiten; dadurch bekommen wir

$$\begin{aligned} \frac{d^{l+m}}{dx^{l+m}} (x^2 - 1)^l &= \frac{d^{l+m}}{du^{l+m}} (u^2 + 2u)^l \\ &= 2^l \sum_{j=m}^l \frac{1}{2^j} \binom{l}{j} \frac{(l+j)!}{(l+j-(l+m))!} u^{j-m}. \end{aligned} \quad (\text{A.43})$$

Wir betrachten nun kleine Winkel $\vartheta = \epsilon$, mit $\epsilon \ll 1$. Dann nähern wir

$$u = x - 1 = \cos \epsilon - 1 \approx -\frac{\epsilon^2}{2}$$

und

$$(1 - x^2)^{\frac{m}{2}} = \sin^m \epsilon \approx (\epsilon - \frac{1}{3!} \epsilon^3)^m,$$

womit die P_l^m lauten:

$$P_l^m(\cos \epsilon) \approx \frac{1}{l!} (\epsilon - \frac{1}{3!} \epsilon^3)^m \sum_{j=m}^l \frac{1}{2^j} \binom{l}{j} \frac{(l+j)!}{(l+j-(l+m))!} \left(-\frac{\epsilon^2}{2}\right)^{j-m}. \quad (\text{A.44})$$

Wir benötigen Terme bis zur Ordnung ϵ^2 , dafür nehmen wir noch einmal die Binomialentwicklung

$$\begin{aligned} (\epsilon - \frac{1}{3!}\epsilon^3)^m &= \sum_{k=0}^l \binom{m}{k} \epsilon^{m-k} \left(-\frac{\epsilon^3}{3!}\right)^k \\ &\approx \epsilon^m - \frac{m}{3!} \epsilon^{m+2} \end{aligned} \quad (\text{A.45})$$

zu Hilfe, und erhalten schließlich

$$\begin{aligned} P_l^m(\cos \epsilon) &\approx \frac{1}{2^m m!} \frac{(l+m)!}{(l-m)!} \epsilon^m \\ &\quad - \left(\frac{m}{3! 2^m m!} \frac{(l+m)!}{(l-m)!} + \frac{1}{2^{m+2} (m+1)!} \frac{(l+m+1)!}{(l-m-1)!} \right) \epsilon^{m+2}. \end{aligned} \quad (\text{A.46})$$

A.4 Analytische Lösung der Bewegungsgleichungen für eine homogene, isotrope Erde

Im Falle einer homogenen, isotropen Erde kann man das Differentialgleichungssystem (1.116) für $\tilde{G}_l^m = \tilde{H}_l^m = 0$ analytisch lösen. Die 5 elastischen Konstanten A, \dots, N gehen dann über in die 2 *Laméschen Konstanten* λ und μ :

$$\begin{aligned}\tilde{A} &= \tilde{C} = \tilde{\lambda} + 2\tilde{\mu} \\ \tilde{F} &= \tilde{\lambda} \\ \tilde{L} &= \tilde{N} = \tilde{\mu} \\ \tilde{\lambda} &= \text{const}, \quad \tilde{\mu} = \text{const.}\end{aligned}$$

Für die folgenden Rechnungen schenken wir uns den oberen Index für die Ordnung m und behalten nur noch den für den Grad l .

Jetzt setzen wir die erste Gleichung von (1.116)ff wieder in die zweite, und die dritte Gleichung wieder in die vierte ein. Wir erhalten dann mit der Abkürzung

$$\frac{d}{dr}(\quad) = (\quad)'$$

die Gleichungen

$$\begin{aligned}\rho_0 \omega^2 \tilde{U}_l &- \frac{\tilde{\lambda} + 2\tilde{\mu}}{r^2} [2\tilde{U}_l - l(l+1)\tilde{V}_l - r^2 \tilde{U}_l'' + l(l+1)r\tilde{V}_l' - 2r\tilde{U}_l'] \\ &+ \frac{l(l+1)}{r^2} \tilde{\mu} (r\tilde{V}_l' + \tilde{V}_l - \tilde{U}_l) = 0\end{aligned}\tag{A.47}$$

und

$$\rho_0 \omega^2 \tilde{V}_l + \frac{\tilde{\mu}}{r} (r\tilde{V}_l'' + 2\tilde{V}_l' - \tilde{U}_l') + \frac{\tilde{\lambda} + 2\tilde{\mu}}{r^2} [2\tilde{U}_l + r\tilde{U}_l' - l(l+1)\tilde{V}_l] = 0.\tag{A.48}$$

Wir bezeichnen mit \tilde{X}_l den Ausdruck

$$\tilde{U}_l' + \frac{2}{r} \tilde{U}_l - \frac{l(l+1)}{r} \tilde{V}_l =: \tilde{X}_l,\tag{A.49}$$

(Pekeris u. Jarosch, 1958) welcher, wie man nachrechnen kann, den Entwicklungskoeffizienten der Divergenz des Verschiebungsvektors darstellt (bzw. die Fouriertransformierte davon):

$$X_l^m = \iint d\Omega (\nabla \cdot \mathbf{u}) \bar{Y}_l^m.$$

Desweiteren definieren wir

$$\tilde{D}_l := \tilde{V}_l' + \frac{\tilde{V}_l}{r} - \frac{\tilde{U}_l}{r}.\tag{A.50}$$

Um die Bedeutung dieses Term zu erläutern gehen wir zurück zur Repräsentation (1.86) und setzen dort, da wir uns nur für die sphäroidale Bewegung interessieren, den Skalar W identisch Null. Die Verschiebung ist dann allein bestimmt durch

$$u^r = U, \quad u^\vartheta = \frac{\partial V}{\partial \vartheta}, \quad u^\varphi = \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial V}{\partial \varphi}.$$

Bilden wir nun die Rotation der Verschiebung, erhalten wir für deren Komponenten in Kugelkoordinaten (bez. normierter Basisvektoren)

$$\begin{aligned}(\nabla \times \mathbf{u})^r &= \frac{1}{r} \frac{\partial u^\varphi}{\partial \vartheta} - \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial u^\vartheta}{\partial \varphi} + \frac{\cot \vartheta}{r} u^\varphi \\(\nabla \times \mathbf{u})^\vartheta &= \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial u^r}{\partial \varphi} - \frac{\partial u^\varphi}{\partial r} - \frac{1}{r} u^\varphi \\(\nabla \times \mathbf{u})^\varphi &= \frac{\partial u^\vartheta}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial u^r}{\partial \vartheta} + \frac{1}{r} u^\vartheta.\end{aligned}$$

Setzt man die Skalar-Repräsentation ein, folgt

$$\begin{aligned}(\nabla \times \mathbf{u})^r &= 0 \\(\nabla \times \mathbf{u})^\vartheta &= \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{U}{r} - \frac{\partial V}{\partial r} - \frac{V}{r} \right) = -\frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \varphi} D \\(\nabla \times \mathbf{u})^\varphi &= \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\frac{\partial V}{\partial r} + \frac{V}{r} - \frac{U}{r} \right) = \frac{\partial}{\partial \vartheta} D.\end{aligned}$$

Wir sehen also, daß die Rotation des zur rein sphäroidalen Bewegung ($W = 0$) gehörenden Verschiebungsfeldes keine Radialkomponente hat; die Horizontalkomponente ergibt sich aus dem Skalar D nach obiger Vorschrift. Somit ist auch die Bedeutung von \tilde{D}_l etwas erhellt.

Mit \tilde{X}_l und \tilde{D}_l schreiben wir die Bewegungsgleichungen kürzer:

$$\rho_0 \omega^2 \tilde{U}_l + (\tilde{\lambda} + 2\tilde{\mu}) \tilde{X}'_l + \frac{l(l+1)}{r} \tilde{\mu} \tilde{D}_l = 0 \quad (\text{A.51})$$

$$\rho_0 \omega^2 \tilde{V}_l + \frac{\tilde{\mu}}{r} \left(r \tilde{V}_l'' + 2\tilde{V}_l' - \tilde{U}_l' \right) + \frac{\tilde{\lambda} + 2\tilde{\mu}}{r} \tilde{X}_l = 0. \quad (\text{A.52})$$

Wir können aus diesen zwei Gleichungen je eine für \tilde{X}_l und eine für \tilde{D}_l machen, indem wir bilden

$$\left(\frac{d}{dr} + \frac{1}{r} \right) \text{Glg. (A.52)} - \frac{1}{r} \text{Glg. (A.51)}$$

und

$$\left(\frac{d}{dr} + \frac{2}{r} \right) \text{Glg. (A.51)} - \frac{l(l+1)}{r} \text{Glg. (A.52)}.$$

Die Ergebnisse dieser Operationen lassen sich kurz und bündig schreiben:

$$\mathcal{B}_\alpha \tilde{X}_l = 0, \quad \mathcal{B}_\beta \tilde{D}_l = 0, \quad (\text{A.53})$$

mit den von uns als „Bessel–Operatoren“ bezeichneten Ausdrücken

$$\begin{aligned}\mathcal{B}_\alpha &:= \frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d}{dr} + \left(\frac{\omega^2}{\alpha^2} - \frac{l(l+1)}{r^2} \right) \\ \mathcal{B}_\beta &:= \frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d}{dr} + \left(\frac{\omega^2}{\beta^2} - \frac{l(l+1)}{r^2} \right),\end{aligned}$$

wobei

$$\alpha = \sqrt{\frac{\tilde{\lambda} + 2\tilde{\mu}}{\rho_0}} \quad \text{bzw.} \quad \beta = \sqrt{\frac{\tilde{\mu}}{\rho_0}}. \quad (\text{A.54})$$

Dies sind die Phasengeschwindigkeiten einer ebenen Longitudinal- bzw. Transversalwelle im elastischen, homogenen und isotropen Vollraum.

Die Lösungen der Gleichungen (A.53) für \tilde{X}_l und \tilde{D}_l sind dann *sphärische Besselfunktionen*, und zwar 1. Art, weil diese bei $r = 0$ regulär sind:

$$\tilde{X}_l(r) = c_\alpha j_l(k_\alpha r), \quad k_\alpha^2 = \frac{\omega^2}{\alpha^2} \quad (\text{A.55})$$

$$\tilde{D}_l(r) = c_\beta j_l(k_\beta r), \quad k_\beta^2 = \frac{\omega^2}{\beta^2}, \quad (\text{A.56})$$

mit den beliebigen Konstanten c_α und c_β .

Damit haben wir aber noch nicht die Startwerte für \tilde{U}_l^m, \dots . Hierfür müssen wir zurück zu den Definitionen (A.49) und (A.50) von \tilde{X}_l und \tilde{D}_l , die dort die Störfunktionen eines Systems zweier gekoppelter linearer Differentialgleichungen für \tilde{U}_l und \tilde{V}_l darstellen. Die Lösung dieses Systems liefert uns über die zweite und die vierte Gleichung von (1.116)ff auch \tilde{R}_l und \tilde{S}_l .

Wir machen aus den zwei Gleichungen (A.49) und (A.50) durch $\tilde{X}_l = \tilde{D}_l \equiv 0$ eine Gleichung für \tilde{V}_l :

$$\tilde{V}_l'' + \frac{4}{r}\tilde{V}_l' + \frac{2 - l(l+1)}{r^2}\tilde{V}_l = 0. \quad (\text{A.57})$$

Diese hat die allgemeine Lösung

$$\tilde{V}_l^{\text{hom}} = \frac{c_1}{r^{l+2}} + c_2 r^{l-1}. \quad (\text{A.58})$$

Damit haben wir auch die Lösung für \tilde{U}_l :

$$\tilde{U}_l^{\text{hom}} = -c_1 \frac{l+1}{r^{l+2}} + c_2 l r^{l-1}. \quad (\text{A.59})$$

Wir bilden nun das Fundamentalsystem aus den Lösungen:

$$\mathbf{Y}(r) = \begin{pmatrix} -\frac{l+1}{r^{l+2}} & lr^{l-1} \\ \frac{1}{r^{l+2}} & r^{l-1} \end{pmatrix}, \quad (\text{A.60})$$

und können für die homogene Lösung dann schreiben:

$$\begin{pmatrix} \tilde{U}_l \\ \tilde{V}_l \end{pmatrix}^{\text{hom}} =: \mathbf{y}^{\text{hom}}(r) = \mathbf{Y}(r) \cdot \mathbf{c}. \quad (\text{A.61})$$

Durch Variation der Konstanten gelangen wir zur allgemeinen Lösung

$$\mathbf{y}_{\text{allg}}(r) = \mathbf{Y}(r) \cdot \mathbf{c} + \mathbf{Y}(r) \cdot \int_{r_0}^r \mathbf{Y}^{-1}(s) \cdot \mathbf{z}(s) \, ds, \quad (\text{A.62})$$

$$\text{mit } \mathbf{z}(s) = \begin{pmatrix} c_\alpha j_l(k_\alpha s) \\ c_\beta j_l(k_\beta s) \end{pmatrix}.$$

Die Inverse von \mathbf{Y} ist

$$\mathbf{Y}^{-1}(r) = \frac{1}{2l+1} \begin{pmatrix} -r^{l+2} & lr^{l+2} \\ r^{1-l} & (l+1)r^{1-l} \end{pmatrix}, \quad (\text{A.63})$$

und somit lautet das Integral in der allgemeinen Lösung

$$\int_{r_0}^r \mathbf{Y}^{-1}(s) \cdot \mathbf{z}(s) ds = \frac{1}{2l+1} \int_{r_0}^r ds \begin{pmatrix} -c_\alpha s^{l+2} j_l(k_\alpha s) + l c_\beta s^{l+2} j_l(k_\beta s) \\ c_\alpha s^{1-l} j_l(k_\alpha s) + (l+1) c_\beta s^{1-l} j_l(k_\beta s) \end{pmatrix}. \quad (\text{A.64})$$

In den obigen Beziehungen haben wir Integrale der Form

$$\int_{r_0}^r s^{l+2} j_l(ks) ds \quad \text{und} \quad \int_{r_0}^r s^{1-l} j_l(ks) ds. \quad (\text{A.65})$$

Durch die Variablentransformation $x = ks$ gehen diese über in

$$\left(\frac{1}{k}\right)^{l+3} \int_{kr_0}^{kr} x^{l+2} j_l(x) dx \quad \text{und} \quad \left(\frac{1}{k}\right)^{2-l} \int_{kr_0}^{kr} x^{1-l} j_l(x) dx. \quad (\text{A.66})$$

Nun gelten für sphärische Besselfunktionen die Beziehungen

$$\frac{d}{dx} (x^{n+1} j_n) = x^{n+1} j_{n-1}, \quad \text{und} \quad (\text{A.67})$$

$$\frac{d}{dx} (x^{-n} j_n) = -x^{-n} j_{n+1}. \quad (\text{A.68})$$

Wir setzen $n = l+1$ für das linke, $n = l-1$ für das rechte Integral in Gleichung (A.66), und können diese dann sofort auswerten. Wir bekommen

$$\int_{r_0}^r s^{l+2} j_l(ks) ds = \frac{1}{k} [r^{l+2} j_{l+1}(kr) - r_0^{l+2} j_{l+1}(kr_0)] \quad (\text{A.69})$$

$$\int_{r_0}^r s^{1-l} j_l(ks) ds = -\frac{1}{k} [r^{1-l} j_{l-1}(kr) - r_0^{1-l} j_{l-1}(kr_0)]. \quad (\text{A.70})$$

Damit wird

$$\int_{r_0}^r \mathbf{Y}^{-1}(s) \cdot \mathbf{z}(s) ds = \frac{1}{2l+1} \begin{pmatrix} -\frac{c_\alpha}{k_\alpha} (r^{l+2} j_{l+1}(k_\alpha r) - r_0^{l+2} j_{l+1}(k_\alpha r_0)) \\ -\frac{c_\alpha}{k_\alpha} (r^{1-l} j_{l-1}(k_\alpha r) - r_0^{1-l} j_{l-1}(k_\alpha r_0)) \\ +\frac{l c_\beta}{k_\beta} (r^{l+2} j_{l+1}(k_\beta r) - r_0^{l+2} j_{l+1}(k_\beta r_0)) \\ -\frac{(l+1) c_\beta}{k_\beta} (r^{1-l} j_{l-1}(k_\beta r) - r_0^{1-l} j_{l-1}(k_\beta r_0)) \end{pmatrix}. \quad (\text{A.71})$$

Obigen Ausdruck müssen wir in die allgemeine Lösung (A.62) einsetzen. Durch die Matrixmultiplikation mit \mathbf{Y} und anschließender Addition der homogenen Lösung erhalten wir die allgemeine Lösung als Formel, welche ausgeschrieben eine halbe Seite füllt. Wir sparen uns das explizite Hinschreiben, und weisen nur darauf hin, daß diese Lösung zwei frei wählbare Konstanten c_1 und c_2 enthält. Mit Hilfe von c_1 sorgen wir dafür daß die Lösung bei $r = 0$ regulär bleibt, d.h. die Terme $\propto \frac{1}{r^{l+2}}$ verschwinden; außerdem beseitigen wir noch die Abhängigkeit von r_0 durch geeignete Wahl von c_2 .

Jetzt sind wir in der Lage, zwei linear unabhängige Basislösungen anzugeben, welche im Ursprung regulär sind:

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_1(r) &= \frac{c_\alpha}{k_\alpha(2l+1)} \begin{pmatrix} (l+1) j_{l+1}(k_\alpha r) - l j_{l-1}(k_\alpha r) \\ -j_{l+1}(k_\alpha r) - j_{l-1}(k_\alpha r) \end{pmatrix} \\ \mathbf{y}_2(r) &= \frac{c_\beta}{k_\beta(2l+1)} \begin{pmatrix} -l(l+1) (j_{l+1}(k_\beta r) + j_{l-1}(k_\beta r)) \\ l j_{l+1}(k_\beta r) - (l+1) j_{l-1}(k_\beta r) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Wir benutzen noch die für sphärische Besselfunktionen gültige Rekursionsformel

$$\frac{2l+1}{kr} j_l(kr) = j_{l-1}(kr) + j_{l+1}(kr), \quad (\text{A.72})$$

um das Ergebnis etwas zu verschönern:

$$\mathbf{y}_1(r) = \frac{c_\alpha}{k_\alpha x_\alpha} \begin{pmatrix} x_\alpha j_{l+1}(x_\alpha) - l j_l(x_\alpha) \\ -j_l(x_\alpha) \end{pmatrix} \quad (\text{A.73})$$

$$\mathbf{y}_2(r) = \frac{c_\beta}{k_\beta x_\beta} \begin{pmatrix} -l(l+1) j_l(x_\beta) \\ -(l+1) j_l(x_\beta) + x_\beta j_{l+1}(x_\beta) \end{pmatrix}, \quad (\text{A.74})$$

mit $x_\alpha = k_\alpha r$, $x_\beta = k_\beta r$.

Die beiden Zeilen in den obigen Lösungen stellen die Startwerte für \tilde{U}_l und \tilde{V}_l dar, die für \tilde{R}_l und \tilde{S}_l erhalten wir aus der 1. und 3. Gleichung des Systems (1.116)ff. Wir setzen nun noch $c_\alpha = k_\alpha^2$ und $c_\beta = k_\beta^2$ und erhalten dann die in Abschnitt 3.3 aufgeführten Basislösungen.