UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO.

Programa de maestría y doctorado en ciencias matemáticas.

Análisis numérico.

Tarea3.

Integrantes:

1. Coss Calderón Jesús Iván

Índice

Unidad 6.

1. Unidad 6

1.1. Ejercicio 1

Dados los puntos $(-1,6)$, $(0,1)$, $(1,2)$ determine el interpolante que pasa por los mismos utilizando el método indicado (realice sus cálculos a mano):

a) Interpolación de Vandermonde.

b) Interpolación de Newton.

c) Interpolación lineal a trozos.

a) Vandermode

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\implies \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\implies \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Entonces el polinomio con la base de Vandermode es

$$P(x) = 1 - 2x + 3x^2$$

b) Newton.

Primero se calculan las diferencias dividas con los nodos dados

$f[x_i]$	$f[x_i, x_j]$	$f[x_i, x_j, x_k]$
$f[x_1] = 6$	0	0
$f[x_2] = 1$	$\frac{f[x_2]-f[x_1]}{x_2-x_1} = -5$	0
$f[x_3] = 2$	$\frac{f[x_3]-f[x_2]}{x_3-x_2} = 1$	$f[x_1, x_2, x_3] = 3$

Entonces,

$$
\begin{aligned}
P(x) &= 6 + (-5)(x+1) + 3(x+1)(x-0) \\
P(x) &= 1 - 2x + 3x^2
\end{aligned}
$$

c) Splines Lineales.

$$
f(x) = \begin{cases} a_1 + b_1 x, & -1 \leq x \leq 0 \\ a_2 + b_2 x, & 0 \leq x \leq 1 \end{cases}
$$

Para el primer spline, en el intervalo $-1 \leq x \leq 0$ se tiene que

$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix} \\
\Longrightarrow \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix} \\
\Longrightarrow \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Para el primer spline, en el intervalo $0 \leq x \leq 1$ se tiene que

$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \\
\Longrightarrow \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \\
\Longrightarrow \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Entonces, el splines

$$
f(x) = \begin{cases} 1 - 5x, & -1 \leq x \leq 0 \\ 1 + x, & 0 \leq x \leq 1 \end{cases}
$$

1.2. Ejercicio 2.

Resuelva el siguiente ejercicio sobre diferencias divididas:

a) Dados los puntos (-1,6), (0,1), (2,3), (5,66), calcule, utilizando diferencias divididas, el polinomio de grado 3 que pasa por estos puntos.

b) Elabore un programa que realice el proceso de diferencias divididas del incisio (a), de manera que calcule los coeficientes del polinomio y que, utilizando la rutina de evaluación de Horner, permita evaluar un vector arbitrario z y grafique el interpolante.

c) Utilice el programa elaborado para generar una tabla que incluya a todas las diferencias divididas de los diferentes ordenes para el ejemplo del inciso (a).

Se utilizó el codigo U6_E2.py

a) Los coeficientes obtenidos de los puntos anteriores de grado 3 son los siguientes:

$$\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -5 \\ 2 \\ 0{,}3 \end{pmatrix}$$

b) La evaluación del polinomio utilizando la subrutina de Horner en el punto $x = -1{,}0$ es 12,66, esto es debido a que la rutina de Horner necesita que el polinomio desarrollado. Por otro lado, mediante el método de la interpolación de Newton se obtiene la función que se observa en la figura 1.

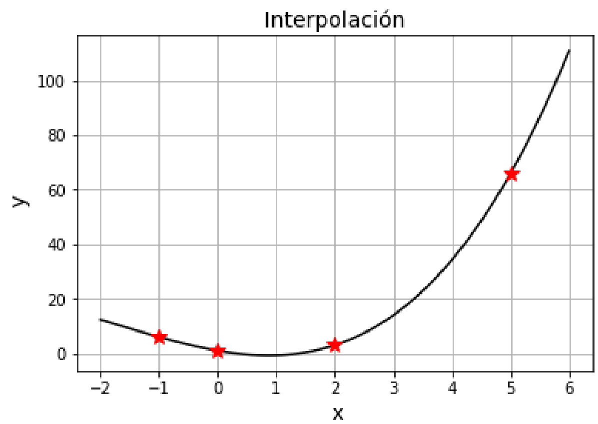


Figura 1: Ajuste polinomial de los datos.

c) Las tablas dividas de los puntos anteriores se presentan en la figura 2.

```
 Diferencias divididas

[[ 6.          0.          0.          0.        ]
 [ 1.         -5.          0.          0.        ]
 [ 3.          1.          2.          0.        ]
 [66.         21.          4.          0.33333333]]
```

Figura 2: Ajuste polinomial de los datos.

1.3. Ejercicio 3.

Polinomio interpolante de Lagrange

a) Investigue en que consiste el método de interpolación por el polinomio interpolante de Lagrange

b) Dados los puntos (-1,6), (0,1), (2,3), (5,66), calcule el polinomio interpolante de Lagrange que pasa por esos puntos.

c) ¿Qué ventajas y desventajas numéricas tiene este método de interpolación?

Nota: Esta sección se realizó con el programa U4_E3.py

a) El polinomio de Lagrange se define como

$$P_n = L_{n,0}f(x_0) + \cdots + L_{n,n}f(x_n)$$

donde

$$L_{n,k}(x) = L_k(x) = \prod_{i=1, i\neq k}^{n} \frac{x - x_i}{x_k - x_i} \tag{1}$$

se les llaman polinomios cardinales.El método de interpolación se basa en calcular cada polinomio cardinal para cada nodo x_i y posteriormente multiplicandolo por $f(x_i)$.

b) El polinomio de Lagrange interpolado con los nodos es el que se muestra en la figura 3.

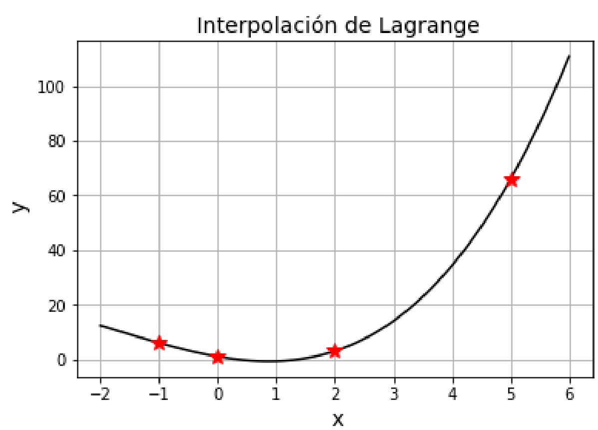


Figura 3: Ajuste polinomial de los datos.

c) Las ventajas de la interpolación de lagrange son las siguientes: es que es muy fácil de calcular y el error tiende a disminuir en orden 2^{n+1}. Con relación a las desventajas del método, es que la cantidad de veces que se opera tiende a aumentar con base en el aumento de nodos.

1.4. Ejercicio 4.

Dados los puntos $(-1, 6)$, $(0, 1)$, $(1, 2)$ determine el interpolante que pasa por los mismos utilizando el método de Lagrange (realice sus cálculos a mano) y comparar con los polinomios calculados en el Ejercicio (a), de esta unidad. Verifique que en realidad son el mismo polinomio y lo único que cambia es la base.

Primero se calculan los polinomios cardinales para encontrar el interpolante de Lagrange.

$$L_0(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} \frac{x - x_2}{x_0 - x_2}$$
$$L_1(x) = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \frac{x - x_2}{x_1 - x_2}$$
$$L_2(x) = \frac{x - x_0}{x_2 - x_0} \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

Entonces

$$L_0(x) = \frac{x - 0}{-1} \frac{x - 1}{-2} = \frac{x(x - 1)}{2}$$
$$L_1(x) = \frac{x + 1}{1} \frac{x - 1}{-1} = -(x + 1)(x - 1)$$
$$L_2(x) = \frac{x + 1}{2} \frac{x - 0}{1} = \frac{x(x + 1)}{2}$$

Entonces

$$P(x) = 6\frac{x(x - 1)}{2} - (x + 1)(x - 1) + 2\frac{x(x + 1)}{2}$$
$$P(x) = 1 - 2x + 3x^2$$

1.5. Ejercicio 5.

Dada la función

$$g(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

calcule (a mano) el interpolante cúbico de Hermite que coincide con la función g en $x = -3, -1, 0, 1, 3$

Se va a proceder a calcular el polinomio de Hermite mediante diferencias finitas

$$f(x) = \begin{cases} S_1(x), & -3 \leq x \leq -1 \\ S_2(x), & -1 \leq x \leq 0 \\ S_3(x), & -1 \leq x \leq 0 \\ S_4(x), & -1 \leq x \leq 0 \end{cases}$$

Los valores a interpolar son

x	-3	-1	0	1	3
f(x)	1/10	1/2	1	1/2	1/10
$f'(x)$	3/50	1/2	0	-1/2	-3/50

- Para $S_1(x)$

z_k	$f[z_k]$	$f[z_k, z_{k+1}]$	$f[z_k, z_{k+1}, z_{k+2}]$	$f[z_k, z_{k+1}, z_{k+2}, z_{k+3}]$
-3	1/10	0	0	0
-3	1/10	3/50	0	0
-3	1/2	1/5	7/100	0
-1	1/2	1/2	3/20	1/25

$$S_1(x) = \sum_{k=0}^{3} f[z_0, z_1, z_2, \ldots, z_k](x - z_0)\cdots(x - z_{k-1})$$

Entonces

$$S_1(x) = \frac{1}{10} + \frac{3}{10}(x+3) + \frac{7}{100}(x+3)^2 + \frac{1}{25}(x+3)^3(x+1)$$

- Para $S_2(x)$

z_k	$f[z_k]$	$f[z_k, z_{k+1}]$	$f[z_k, z_{k+1}, z_{k+2}]$	$f[z_k, z_{k+1}, z_{k+2}, z_{k+3}]$
-1	1/2	0	0	0
-1	1/2	1/2	0	0
0	1	1/2	0	0
0	1	0	-1/2	-1/2

Entonces

$$S_2(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(x+1) - \frac{1}{2}(x+1)^2 x$$

- Para $S_3(x)$

z_k	$f[z_k]$	$f[z_k, z_{k+1}]$	$f[z_k, z_{k+1}, z_{k+2}]$	$f[z_k, z_{k+1}, z_{k+2}, z_{k+3}]$
0	1	0	0	0
0	1	0	0	0
1	1/2	-1/2	-1/2	0
1	1/2	-1/2	0	1/2

Entonces

$$S_3(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}(x-1)x^2$$

- Para $S_4(x)$

z_k	$f[z_k]$	$f[z_k, z_{k+1}]$	$f[z_k, z_{k+1}, z_{k+2}]$	$f[z_k, z_{k+1}, z_{k+2}, z_{k+3}]$
1	1/2	0	0	0
1	1/2	-1/2	0	0
3	1/10	-1/5	3/20	0
3	1/10	-3/50	7/100	-1/25

Entonces

$$S_4(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(x-1) + \frac{3}{20}(x-1)^2 - \frac{1}{25}(x-1)^2(x-3)$$

por lo tanto, después de las operaciones correspondientes se tiene que

$$f(x)=\begin{cases} \frac{1}{100}(4x^3+35x^2+108x+127), & -3\leq x\leq -1\\ -\frac{1}{2}(x^3+2x^2-2), & -1\leq x\leq 0\\ \frac{1}{2}(x^3-2x^2+2), & -1\leq x\leq 0\\ -\frac{1}{100}(4x^3-35x^2+108x-127), & -1\leq x\leq 0 \end{cases}$$

1.6. Ejercicio 6.

Investigue el desarrollo en el cálculo de un spline cúbico, que debe realizarse al forzar la continuidad de la segunda derivada en dos interpolantes cúbicos de Hermite consecutivos en su punto de unión $(q_i''(x_{i+1}) = q_{i+1}''(x_{i+1}))$. Explique como obtener el sistema de ecuaciones tridiagonal para obtener las derivadas para el spline cúbico.

Considerando la forma del spline cúbico

$$S_j(x) = a_j + b_j(x-x_j) + c_j(x-x_j)^2 + d_j(x-x_j)^3$$

para todo $j=0,1,\ldots,n-1$. Cómo $S_j(x_j)=f(x_j)$, se tiene que

$$a_{j+1} = S_{j+1}(x_{j+1}) = S_j(x_{j+1}) = a_j + b_j(x_{j+1}-x_j) + c_j(x_{j+1}-x_j)^2 + d_j(x_{j+1}-x_j)^3$$

para todo $j=0,1,\ldots,n-2$.Haciendo $h_j = x_{j+1}-x_j$ para todo $j=0,1,\ldots,n-1$.

$$a_{j+1} = a_j + b_jh_j + c_jh_j^2 + d_jh_j^3 \tag{2}$$

para todo $j=0,1,\ldots,n-1$.

De la misma manera $b_n = S'(x_n)$, se tiene que

$$S_j'(x) = b_j + 2c_j(x_{j+1}-x_j) + 3d_j(x_{j+1}-x_j)^2$$

para todo $j=0,1,\ldots,n-2$.Haciendo $h_j = x_{j+1}-x_j$ para todo $j=0,1,\ldots,n-1$.

$$b_{j+1} = b_j + 2c_jh_j + 3d_jh_j^2 \tag{3}$$

para todo $j = 0, 1, \ldots, n-1$.

Otra condición que se planteará es $c_n = S''(x_n)/2$, se tiene que

$$c_{j+1} = c_j h_j + 3d_j h_j \tag{4}$$

para todo $j = 0, 1, \ldots, n-1$.

Despejando d_j de 4 y sustituyendo en ec. (2 y 3) se tiene

$$a_{j+1} = a_j + b_j h_j + \frac{h_j^2}{3}(2c_j + c_{j+1}) \tag{5}$$

y

$$b_{j+1} = b_j + h_j(2c_j + c_{j+1}) \tag{6}$$

Despejando b_j de 5 y sustituyendolo es 6 se tiene

$$b_j = \frac{a_{j+1} - a_j}{h_j} - \frac{h_j}{3}(2c_j + c_{j+1}) \tag{7}$$

Haciendo reducción de índice se tiene

$$b_{j-1} = \frac{a_j - a_{j-1}}{h_{j-1}} - \frac{h_{j-1}}{3}(2c_{j-1} + c_j) \tag{8}$$

Así, sustituyendo en 7 se tiene un sistema de ecuaciones tridiagonales

$$h_{j-1}c_{j-1} + 2(h_{j-1} + h_j) + h_{j+1}c_{j+1} = 3\frac{a_{j+1} - a_j}{h_j} - 3\frac{a_j - a_{j-1}}{h_{j-1}} \tag{9}$$

1.7. Ejercicio 7.

Determine cuales de las siguientes funciones son splines cúbicos. Justifique.

1. $f(x) = \begin{cases} 18 - \frac{75}{2}x + 26x^2 - \frac{11}{2}x^3, & 1 \leq x \leq 2 \\ -70 + \frac{189}{2}x - 40x^2 + \frac{11}{2}x^3, & 2 \leq x \leq 3 \end{cases}$

2. $f(x) = \begin{cases} 13 - 31x + 23x^2 - 5x^3, & 1 \leq x \leq 2 \\ -35 + 51x - 22x^2 + 3x^3, & 2 \leq x \leq 3 \end{cases}$

3. $f(x) = \begin{cases} 11 - 24x + 18x^2 - 4x^3, & 1 \leq x \leq 2 \\ -54 + 72x - 30x^2 + 4x^3, & 2 \leq x \leq 3 \end{cases}$

1) Al ser un polinomio a trozos, $f \in \mathscr{C}^2$.

$$f(x) = \begin{cases} 18 - \frac{75}{2}x + 26x^2 - \frac{11}{2}x^3, & 1 \leq x \leq 2 \\ -70 + \frac{189}{2}x - 40x^2 + \frac{11}{2}x^3, & 2 \leq x \leq 3 \end{cases}$$
$$f^{'}(x) = \begin{cases} -\frac{75}{2} + 52x - \frac{33}{2}x^2, & 1 \leq x \leq 2 \\ \frac{189}{2} - 80x + \frac{33}{2}x^2, & 2 \leq x \leq 3 \end{cases}$$
$$f^{''}(x) = \begin{cases} 52 - 33x, & 1 \leq x \leq 2 \\ -80 + 33x, & 2 \leq x \leq 3 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to 2^-}\Big(18-\frac{75}{2}x+26x^2-\frac{11}{2}x^3\Big)=3$$
$$\lim_{x\to 2^+}\Big(18-\frac{75}{2}x+26x^2-\frac{11}{2}x^3\Big)=3$$
$$\lim_{x\to 2^-}\Big(-\frac{75}{2}+52x-\frac{33}{2}x^2\Big)=0{,}5$$
$$\lim_{x\to 2^-}\Big(\frac{189}{2}-80x+\frac{33}{2}x^2\Big)=0{,}5$$
$$\lim_{x\to 2^-}\Big(52-33x\Big)=-14$$
$$\lim_{x\to 2^-}\Big(-80+33x\Big)=-14$$

Al comprobar todas las condiciones que debe cumplicar para ser spline cúbico y sí cumplirlas, se concluye que es un spline cúbico.

2) Al ser un polinomio a trozos, $f\in\mathscr{C}^2$.

$$f(x)=\begin{cases} 13-31x+23x^2-5x^3, & 1\le x\le 2\\ -35+51x-22x^2+3x^3, & 2\le x\le 3\end{cases}$$
$$f^{'}(x)=\begin{cases} -31+46x-15x^2, & 1\le x\le 2\\ 51-44x+9x^2, & 2\le x\le 3\end{cases}$$

$$\lim_{x\to 2^-}\Big(13-31x+23x^2-5x^3\Big)=3$$
$$\lim_{x\to 2^+}\Big(-35+51x-22x^2+3x^3\Big)=3$$
$$\lim_{x\to 2^-}\Big(-31+46x-15x^2\Big)=1$$
$$\lim_{x\to 2^-}\Big(51-44x+9x^2\Big)=-1$$

Al no cumplir con la condición de continuidad para la primera derivada, se concluye que no es spline cúbico.

3) Al ser un polinomio a trozos, $f \in \mathscr{C}^2$.

$$f(x) = \begin{cases} 11 - 24x + 18x^2 - 4x^3, & 1 \leq x \leq 2 \\ -54 + 72x - 30x^2 + 4x^3, & 2 \leq x \leq 3 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to 2^-} \left(11 - 24x + 18x^2 - 4x^3\right) = 3$$
$$\lim_{x \to 2^+} \left(-54 + 72x - 30x^2 + 4x^3\right) = 2$$

Al no cumplir con la condición de continuidad para la función, se concluye que no es spline cúbico.

1.8. Ejercicio 8

Considera la siguiente tabla de datos poblacionales.

Año	Población
1930	16 552 722
1940	19 653 552
1950	25 791 017
1960	34 923 129
1970	48 225 238
1990	81 249 645
1995	91 158 290
2000	97 014 867

Existe un único polinomio de grado siete que interpola estos ocho datos, el cual puede ser representado de diferentes maneras.

a) Usando la base canónica de los polinomios de grado 7, encuentre la matriz de Vandermonde correspondiente, llamela A_1

b) Utilizando las siguientes bases:

   (i) $(x - 1925)^j$

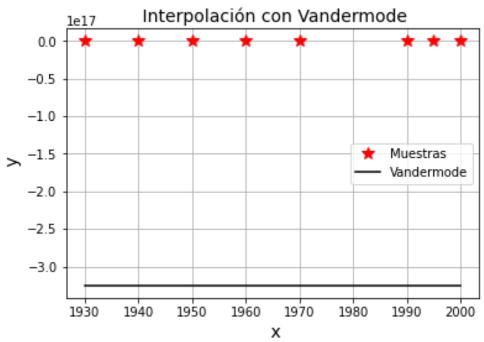
   (ii) $(x - 1960)^j$

   Encuentre la matriz de Vandermonde correspondiente a cada una de ellas, llamelas A_2 y A_3.

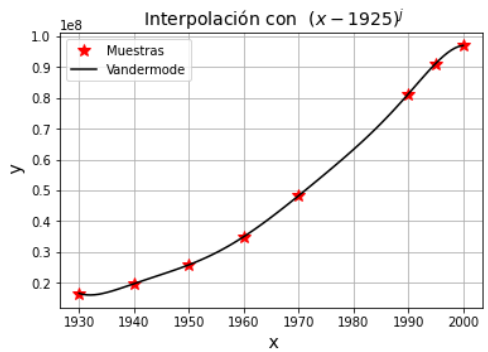
c) Calcule el polinomio interpolante en cada caso y grafíquelo (puede modificar las rutinas vistas en clase para trabajar con las bases indicadas)

d) Calcule la condición de cada matriz y concluya que base debe utilizarse para hacer una mejor aproximación.

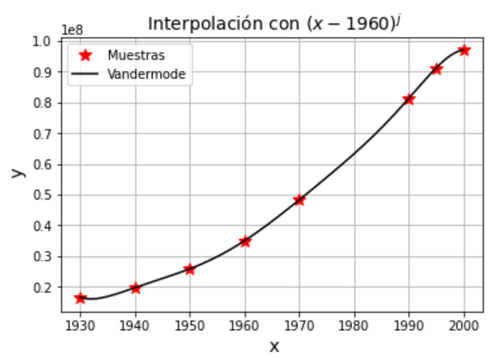
En la figura 4 se muestra el ajuste polinómica de los datos con diferentes bases monomiales. En 4(a) se visualiza el resultado con las base canónicas, sin embargo el polinomio ni siquiera pasa por los datos, implicando que la interpolación es mala. Por otro lado, en 4(b) y 4(c). Las bases monomiales cambian, y esto ocasiona que haya un mejor ajuste. Con base en lo observado se sugiere que las bases que se opten para este tipo de regresiones, sean bases monomiales centradas en la media o mediana de los datos. No obstante, las matrices de Vandermode permanecen con números de condición muy grandes lo cual puede ser perjudicial si se hace a gran escala.



(a) Vandermode



(b) $(x-1925)^j$



(c) $(x-1960)^j$

Figura 4: Ajuste polinomial de los datos. 4(a), 4(b) y 4(c) muestra el ajuste con la base ordinaria de Vandermode, y las modificaciones a la base ordinaria.

Matriz	Número de condición
A_1	7.912029453028754e+26
A_2	344500610817420.8
A_3	178792393089.5232

1.9. Ejercicio 9

El fenómeno de Runge es un problema que aparece cuando se usa interpolación polinomial con polinomios de alto grado. Fué descubierto por Carle David Tolmé Runge cuando exploraba el comportamiento de los errores al usar interpolación polinomial para aproximar determinadas funciones.

Considere la función:

$$f(x) = \frac{1}{1 + 25x^2},$$

Runge descubrió que si se interpola esta función en puntos equidistantes $x_i \in [-1, 1]$ con $i = 1, ..., n$, el interpolante resultante oscila hacia los extremos del intervalo cuando n crece, es decir, si se aumenta el grado del polinomio hay oscilaciones cerca de -1 y 1. Incluso se puede probar que el error de interpolación tiende a infinito cuando crece el grado del polinomio.

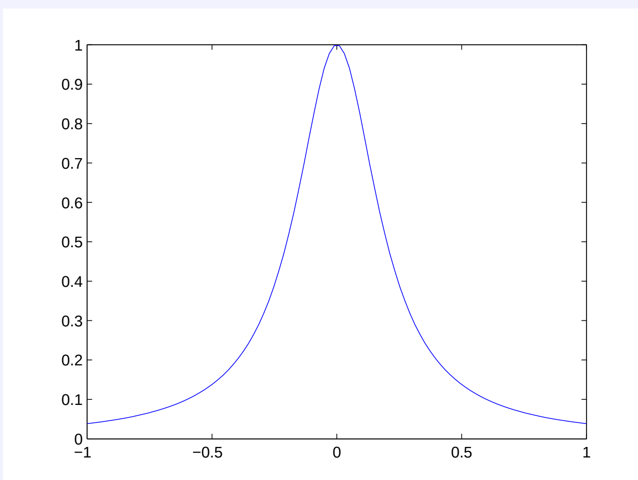


Figura 5: Diferencia divididas

a) Elabore un programa que calcule y grafique el interpolante de Newton de la función de Runge, la función debe pedirle al usuario el número de puntos de la muestra. Grafique también, junto con el interpolante, la función exacta.

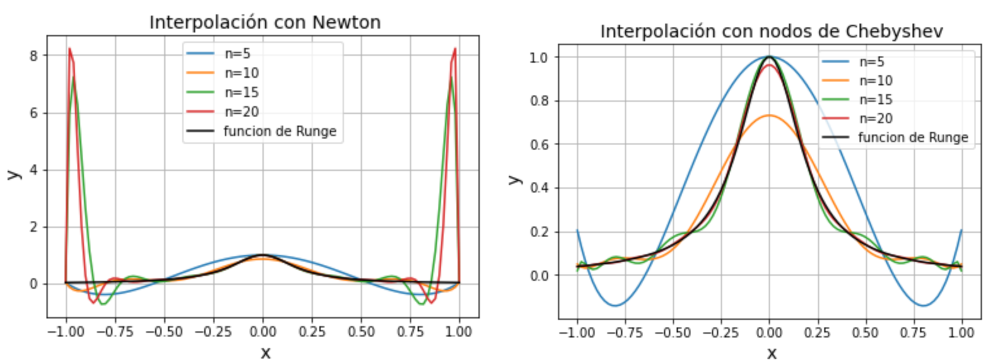
b) Corra el programa para valores de $n = 5, 10, 15, 20$ y analice el comportamiento del interpolante. ¿Qué puede concluir acerca del uso de la interpolación de Newton para interpolar la función de Runge?, ¿coincide con lo mencionado por Runge?

c) Para atacar este problema una de las alternativas consiste en utilizar los nodos de Chebyshev, los cuales (para el intervalo $[-1, 1]$) están dados por:

$$x_i = cos\left(\frac{(2i-1)\pi}{2n}\right), \quad i = 1, ..., n$$

Elabore un programa que reciba el valor de n y calcule el interpolante de Newton utilizando n nodos de Chevyshev, ¿qué pasa al ir aumentando el valor de n? Concluya.

Nota: Esta sección se realizó con el programa U6_E9.py



(a) Sin nodos de Chebyshev

(b) Con nodos de Chebyshev

Figura 6: Ajuste polinómico de los datos. 6(a) y 6(b) muestra el ajuste con la interpolación de Newton sin y con nodos de Chebyshev.

En la figura 6(a), se observa el problema de interpolación denominado como fenómeno de Runge, el cual principalmente consiste que al tener nodos equiespaciados, las oscilaciones ocasionadas en los extremos debido al incremento en el ajuste polinomial aumenta el error de interpolación. Por otro lado, en la figura 6(b), al utilizar los nodos de Chebyshev se observa que el ajuste no presenta el fenómeno de Runge y que al aumentar el grado del polinomio el ajuste se aproxima a la función original con mayor veracidad, esto sucede debido a que los nodos no se encuentran espaciados de manera similar.

1.10. Ejercicio 10

En los últimos años la fabricación de aparatos para pacientes con problemas auditivos ha cobrado gran importancia. La elaboración de estos aparatos debe ser de manera cuidadosa y el tipo o modelo de aparato depende del nivel de la capacidad auditiva del paciente. Los siguientes datos corresponden a las señales auditivas captadas por un paciente con un nivel de sordera medio:

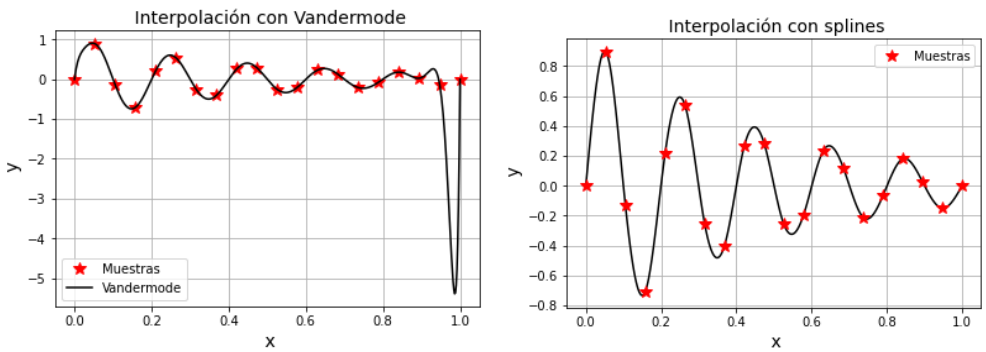
Tiempo	Señal obtenida	Tiempo	Señal obtenida
0	0	0.5263	-0.2568
0.0526	0.8970	0.5789	-0.1930
0.1053	-0.1333	0.6316	0.2367
0.1579	-0.7069	0.6842	0.1211
0.2105	0.2131	0.7368	-0.2098
0.2632	0.5410	0.7895	-0.0670
0.3158	-0.2531	0.8421	0.1799
0.3684	-0.4007	0.8947	0.0275
0.4211	0.2646	0.9474	-0.1498
0.4737	0.2853	1	0

Utilizando estos datos, el aparto auditivo debe reconstruir la señal auditiva de manera suave y acorde con el patrón que sigue la misma.

a) Calcule un polinomio interpolante de Vandermonde para los datos ilustrados y haga una gráfica de los datos y el interpolante, utilice un linspace de 500 puntos entre 0 y 1 para la evaluación en el interpolante. ¿Qué pasa en el intervalo [0.9,1], es adecuada la señal reconstruida?, ¿a que atribuye usted el comportamiento del método en ese intervalo?

b) Repita el inciso (a) utilizando splines cúbicos. ¿Cómo queda la señal reconstruida?, ¿cuál de los dos métodos recomendaría implementar en el aparato auditivo?

Nota: Esta sección se realizó con el programa U6_E10.py



(a) Vandermode (b) Splines cúbicos

Figura 7: Ajuste polinómico de los datos. 7(a) y 7(b) muestra el ajuste con la interpolación de Vandermode e interpolación con Splines cúbicos respectivamente.

En la figura 7(a), se presenta una oscilación parecida al fenómeno de runge, esto ocasiona que el error de interpolación aumente. La manera idónea de evitar este comportamiento es realizando interpolaciones de tipo splines (vea 7(b)), ya que al hacer el cómputo nodo a nodo e implantando condiciones de suavidad, el fenómeno de Runge no se presentará. Por lo tanto, entre los dos métodos vistos en este ejercicio se recomienda reconstruir la señal con la interpolación por splines.

1.11. Ejercicio 11

Hacer un programa que dibuje el perfil (contorno) de su elección (no demasiado simple) usando splines cúbicos.

1.12. Ejercicio 12

Se sabe que $H_4(x) = 4+3(x+1)-2(x+1)2(x-1)-(1/2)(x+1)2(x-1)2$ es el polinomio de interpolación de Hermite de cierta función f, basado en los datos:

$$f(-1),\ f'(-1),\ f(1),\ f'(1)\ y\ f"(1). \tag{10}$$

(a) Sin evaluar $H_4(x)$ ni sus derivadas en -1 y 1, completar la Tabla de diferencias divididas (Tabla en la Figura 2) con repetición utilizada en la construcción de $H_4(x)$.

-1	4				
-1	$f[-1]$	3			
1	$f[1]$	$f[-1,1]$	-2		
1	$f[1]$	$f[1,1]$	$f[-1,1,1]$	3/2	
1	$f[1]$	$f[1,1]$	$f[1,1,1]$	$f[-1,1,1,1]$	-1/2

Figura 8: Diferencia divididas

(b) Sin evaluar $H_4(x)$ ni sus derivadas en -1 y 1, determinar los valores de $f'(-1), f(1), f'(1) y f"(1)$.

a)

-

z_k	$f[z_k]$	$f[z_k, z_{k+1}]$	$f[z_k, z_{k+1}, z_{k+2}]$
-1	4	0	0
-1	$f[-1] = 4$	3	0
1	$f[1]$	$f[-1,1] = \frac{f[1]-4}{1+1}$	$\frac{f[-1,1]-3}{1+1} = -2$

$$f[-1,1] = (-2)2 + 3 = -1$$
$$\implies f[1] = -1(2) + 4 = 2$$

Ahora se tiene que

-

z_k	$f[z_k]$	$f[z_k, z_{k+1}]$	$f[z_k, z_{k+1}, z_{k+2}]$	$f[z_k, z_{k+1}, z_{k+2}, z_{k+3}]$
-1	4	0	0	0
-1	4	3	0	0
1	2	-1	-2	0
1	2	$f[1,1]$	$f[-1,1,1] = \frac{f[1,1]+1}{1+1}$	$\frac{f[-1,1,1]+2}{1+1} = \frac{3}{2}$

$$f[-1,1,1] = 3 - 2 = 1$$
$$\Longrightarrow f[1,1] = 2 - 1 = 1$$

Por último

-

-1	4	0	0	0	0
-1	4	3	0	0	0
1	2	-1	-2	0	0
1	2	1	1	$\frac{3}{2}$	0
1	2	1	$f[1,1,1]$	$f[-1,1,1,1] = \frac{f[1,1,1]-3/2}{1+1}$	$\frac{f[-1,1,1,1]-3/2}{1+1} = -\frac{1}{2}$

$$f[-1,1,1,1] = -1 + \frac{3}{2} = \frac{1}{2}$$
$$\Longrightarrow f[1,1,1] = 1 + 1 = 2$$

Por lo tanto la tabla deseada es

-1	4	0	0	0	0
-1	4	3	0	0	0
1	2	-1	-2	0	0
1	2	1	1	$\frac{3}{2}$	0
1	2	1	2	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$

b)

-

-1	4	0	0	0	0
-1	$f[-1]$	3	0	0	0
1	$f[1]$	$f[-1,1]$	-2	0	0
1	$f[1]$	$f[1,1]$	$f[-1,1,1]$	$\frac{3}{2}$	0
1	$f[1]$	$f[1,1]$	$f[1,1,1]$	$f[-1,1,1,1]$	$-\frac{1}{2}$

SIn evaluar se tiene que

$$f^{'}(-1) = f[-1, 1]$$
$$f(1) = f[1] = 2$$
$$f^{'}(1) = f[1, 1]$$
$$f^{''}(1) = f[1, 1, 1] = 4$$

1.13. Ejercicio 13

Si $f(x) = ln(x)$

(a) Calcular el polinomio de inteprolación de Hermite de f en $x_0 = 1$ y $x_1 = 2$

(b) Dar una estimación del error de interpolación en [1,2].

a)
Los valores a interpolar son

x	1	2
f(x)	0	ln2
f$^{'}(x)$	1	1/2

- Para $S(x)$

z_k	$f[z_k]$	$f[z_k, z_{k+1}]$	$f[z_k, z_{k+1}, z_{k+2}]$	$f[z_k, z_{k+1}, z_{k+2}, z_{k+3}]$
1	0	0	0	0
1	0	1	0	0
2	ln2	$\frac{ln2-0}{2-1} = ln2$	$\frac{ln2-1}{2-1} = ln2 - 1$	0
2	ln2	1/2	$\frac{1/2-ln2}{2-1} = \frac{1}{2} - ln2$	$\frac{1/2-ln2-ln2+1}{2-1} = \frac{3}{2} - 2ln2$

$$S(x) = \sum_{k=0}^{3} f[z_0, z_1, z_2, \ldots, z_k](x - z_0) \cdots (x - z_{k-1})$$

$$S(x) = 0 + (x - 1) + (ln2 - 1)(x - 1)^2 + (\frac{3}{2} - 2ln2)(x - 1)^2(x + 2)$$
$$S(x) \approx (x - 1) - 0{,}30685(x - 1)^2 + 0{,}11371(x - 1)^2(x + 2)$$

b) Para calcular el error en la interpolación nos tomaremos el error general de interpolación

$$e_n(x) = f(x) - P_n = \frac{f^{n+1}(\xi)}{(n+1)!} \prod_{i=0}^{n} (x - x_i)$$

Cómo P_n es un polinomio de Hermite, $n = 4$. Además f es un función continua sobre un compacto y se puede probar que en ese mismo compacto la función es localmente infinitamente difereciable. Así

$$\begin{aligned} M = max_{x\in[1,2]}\Big|f^5(x)\Big| &= \Big|\frac{-24}{x^5}\Big| = 24 \\ \Big|e_n(x)\Big| &\leq \frac{M}{5!}(x-1)^2(x-2)^2 \quad x \in [1,2] \\ &\leq \frac{24}{5!}(\frac{3}{2}-1)^2(\frac{3}{2}-2)^2 = \frac{1}{80} \end{aligned}$$

1.14. Ejercicio 14

Construir el polinomio de grado menor que interpola a la función f con los siguientes datos:

$$\begin{aligned} f(1) &= 2, \quad f'(1) = 3 \\ f(2) &= 6, \quad f'(2) = 7, \quad f''(2) = 8 \end{aligned} \tag{11}$$

- De la tabla originalpodemos obtener que

1	$f[1]$	0	0	0	0
1	$f[1]$	$f[1,1]$	0	0	0
2	$f[2]$	$f[1,2]$	$f[1,1,2]$	0	0
2	$f[2]$	$f[2,2]$	$f[1,2,2]$	$f[1,1,2,2]$	0
2	$f[2]$	$f[2,2]$	$f[2,2,2]$	$f[1,2,2,2]$	$f[1,1,2,2,2]$

Calculando

$$
\begin{aligned}
f(1) = f[1] = 2 \\
f^{'}(1) = f[1,1] = 3 \\
f(2) = f[2] = 6 \\
f^{'}(2) = f[2,2] = 7 \\
\frac{1}{2}f^{''}(2) = f[2,2,2] = 4
\end{aligned}
$$

- De la tabla originalpodemos obtener que

1	2	0	0	0	0
1	2	3	0	0	0
2	6	$f[1,2]$	$f[1,1,2]$	0	0
2	6	7	$f[1,2,2]$	$f[1,1,2,2]$	0
2	6	7	4	$f[1,2,2,2]$	$f[1,1,2,2,2]$

Calculando

$$
\begin{aligned}
f[1,2] &= \frac{6-2}{2-1} \\
\Longrightarrow f[1,1,2] &= \frac{4-3}{2-1} = 1 \\
\Longrightarrow f[1,2,2] &= \frac{7-4}{2-1} = 3 \\
f[1,1,2,2] &= \frac{3-1}{2-1} = 2 \\
f[1,2,2,2] &= \frac{4-3}{2-1} = 1 \\
\Longrightarrow f[1,1,2,2,2] &= \frac{1-2}{2-1} = -1
\end{aligned}
$$

- De la tabla originalpodemos obtener que

1	2	0	0	0	0
1	2	3	0	0	0
2	6	4	1	0	0
2	6	7	3	2	0
2	6	7	4	1	-1

Por lo tanto el polinomio es

$$P(x) = 2 + 3(x-1) + (x-1)^2 + 2(x-1)^2(x-2) - (x-1)^2(x-2)^2$$

Unidad 7.

2. Unidad 7

2.1. Ejercicio 1

Suponga que se necesitan generar $n+1$ puntos igualmente espaciados en el intervalo $[a,b]$, con espaciamiento $h = \frac{b-a}{n}$.

a) Una fórmula que puede utilizarse es:

$$x_0 = a, \quad x_k = x_{k-1} + h, \quad k = 1, ..., n.$$

Utilizando una aritmética de punto flotante de 2 dígitos con redondeo calcula una discretización de 21 puntos sobre el intervalo $[5, 15]$. ¿Qué fenómeno observas?

b) Utilice ahora la fórmula

$$x_k = a + kh, \quad k = 0, ..., n.$$

¿Qué se obtuvo en este caso?, ¿en cuál de los dos métodos tuvo más peso el efecto de la aritmética?

Este inciso se resolvió con el programa U7_E1.m

a) Al observar la discretización debida al primer modelo, se hace evidente que se acarrea un error numérico de redondeo desde la primera iteración, y esto se comprueba con el último elemento de la malla, ya que es mayor que 15 (véase figura 9 lado izquierdo).

b) En el caso del segundo modelo, el error numérico no se acarrea ya que el redondeo afecta en cada iteración de manera independiente (véase figura 9 lado derecho).

5.000000	5.000000
5.480000	5.480000
5.960000	5.950000
6.440000	6.430000
6.920000	6.900000
7.400000	7.380000
7.880000	7.860000
8.360000	8.330000
8.840000	8.810000
9.320000	9.290000
9.800000	9.760000
10.280000	10.240000
10.760000	10.710000
11.240000	11.190000
11.720000	11.670000
12.200000	12.140000
12.680000	12.620000
13.160000	13.100000
13.640000	13.570000
14.120000	14.050000
14.600000	14.520000
15.080000	15.000000

Figura 9: Tabla comparativa entre ambos modelos de mallado.

2.2. Ejercicio 2

Considera la función

$$f(x) = (e^x - 1)/x$$

a) Usa la regla de l'Hopital para probar que

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 1$$

b) Verifica este resultado empiricamente escribiendo un programa en Matlab/Octave que calcule $f(x)$ para $x = 10^{-k}$, $k = 1, ..., 16$. ¿Coinciden tus resultados con el resultado teórico?

c) Realiza el experimento del inciso (b) pero utilizando la expresión matemática equivalente

$$f(x) = (e^x - 1)/log(e^x)$$

compara los resultados hasta $k = 15$, ¿cual tiene mayor precisión? ¿Qué pasa en $k = 16$?

Este inciso se resolvió con el programa U7_E2.m

a) Para el primero inciso al aplicar la regla de l'Hopital

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x}$$
$$\lim_{x \to 0} \frac{\frac{d}{dx}(e^x - 1)}{\frac{d}{dx} x}$$
$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x}{1}$$
$$\lim_{x \to 0} e^x = 1$$

b) Al momento de calcular el límite de $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x}$ de manera numérica, la aproximación no es tan buena pero en $k = 16$ debido a que el valor de x es muy pequeño se da una cancelación numérica en el numerador $e^x - 1$ (véase figura 10).

c) Al momento de calcular el límite de $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{log(e^x)}$ de manera numérica, la aproximación es mejor que la anterior y de hecho se da la convergencia en pocas iteraciones. Sin embargo, en $k = 16$ debido a que el valor de x es muy pequeño se da una cancelación numérica en el denominador $log(e^x)$ y se hace cero, provocando una división entre cero (véase figura 10).

```
k=15 exp= 1.110223      log= 1.000000
k=16 exp= 0.000000      log= NaN
```

Figura 10: Tabla comparativa entre ambas formas de calcular el límite.

2.3. Ejercicio 4

En este ejercicio se requiere calcular los valores sucesivos de la integral

$$y_n = \int_0^1 \frac{x^n}{x+5}dx, \quad con \quad n \geq 0$$

La idea es tratar de hacerlo mediante un esquema numérico que sea sencillo, barato computacionalmente y eficiente.

1. Pruebe que $y_n = \frac{1}{n} - 5y_{n-1}$, es decir, es posible calcular las integrales sucesivas mediante un esquema iterativo sencillo.

2. Utilizando el valor de y_0 elabore un programa que calcule recursivamente los valores de las integrales hasta un valor de n dado por el usuario. Pruebe el programa con $n = 50$, ¿qué pasa con los valores de las integrales, tienen sentido los resultados?

3. Tomando a ϵ como el error entre el valor exacto de y_0 y su aproximación $\tilde{y}_0$, pruebe que el error cometido para el paso n del método es $5^n\epsilon$. Por tanto, ¿qué pasa para n grande?

4. Una forma de evitar la propagación tan grande del error consiste en reformular el esquema iterativo, realice el despeje correspondiente para notar que el esquema es análogo a:

   $$y_{n-1} = \frac{1}{5n} - \frac{1}{5}y_n$$

   Observe que este esquema también es iterativo pero ahora se calculan las integrales hacia atrás.

5. Realice un programa similar al realizado en el inciso b). Para calcular la integral inicial utiliza algún comando para el cálculo numérico de la misma (como el comando *quad* de Matlab/Octave). Pruebe también con $n = 50$, ¿Qué resultados se obtienen?

6. Tomando ahora a ϵ como el error entre el valor exacto de y_n y su aproximación $\tilde{y}_n$, realice un análisis de error similar al del inciso c). ¿Cómo se comporta ahora el error? Concluya.

Este inciso se resolvió con el programa U7$_E4.m$

Lo primero que se debe de notar en la figura 11 es que el error en la aproximación de la integral mediante el esquema $y_n = \frac{1}{n} - 5y_{n-1}$, va incrementando con base en el número de iteraciones. Mientras que para el esquema $y_{n-1} = \frac{1}{5n} - \frac{1}{5}y_n$, error es relativamente pequeño entre la solución analítica y numérica. Cabe mencionar que el programa realizado con recursividad es erróneo debido a que no da el resultado esperado, claramente es un error de programación.

Con relación al error, se comporta de mejor manera debido a que este va disminuyendo con el factor $\frac{\epsilon}{5^n}$ debido a que se puede considerar como un esquema inverso del primero. Por lo que el error es manejable y la precisión del método es aceptable.

```
 ------ Primer esquema  ---------
y n = 1/n -5 yn-1 ,
Iterativo: Valor aproximado 2419446707793185792.000000 / valor real 0.003279
Recursivo: Valor aproximado 2419446707793185792.000000 / valor real 0.003279
 ----  Segundo  esquema -----
y n-1 = 1/5n - 1/5 yn ,
Iterativo: Valor aproximado 0.182322 / valor real 0.182322
Recursivo: Valor aproximado 0.003279 / valor real 0.182322
```

Figura 11: Tabla comparativa entre ambas formas de calcular la integral

2.4. Ejercicio 5

Calcule aproximaciones a la integral

$$\int_2^3 (x^2 + 3x - 5)dx$$

utilizando tres diferentes reglas de cuadratura. Compare sus resultados con el valor exacto de la integral.
Este inciso se resolvió con el programa U7_E5.py

```
Integral de cuadratura simple
-6.164983164983164
Integral de cuadratura punto medio
-6.105008417508417
Integral de cuadratura Trapecio
-6.0
Integral de cuadratura TrapecioCompuesto
-6.16665
Simpson 1/3
-6.166666666666666
Simpson 3/3
-6.166666666666666
Cuadratura Gaussian
-6.169853436000001
 El valor analítico de la integral es:  -6.16666666666667
```

Figura 12

2.5. Ejercicio 6

Calcule una aproximación a la integral

$$\int_{1}^{2}\int_{-1}^{1}(8x-10y+2)dydx$$

utilizando alguna regla de cuadratura.
Este inciso se resolvió con el programa U7_E6.py

```
Valor de la integral con Cuadratura Gaussiana:  28.028007
 El valor analítico de la integral es:  28.0000000000000
```

Figura 13

2.6. Ejercicio 7

La distribución normal estándar se aplica a una gran cantidad de fenómenos de la vida real para calcular probabilidades y está dada por

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

Esta función no puede integrarse por métodos analíticos por lo que hay que usar alguna regla de cuadratura. Utilice tres reglas de cuadratura diferentes para aproximar el valor de la siguiente integral:

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

Este inciso se resolvió con el programa U7_E7.py

```
Integral de cuadratura simple
0.6046439650476942
Integral de cuadratura punto medio
0.5989694366284225
Integral de cuadratura Trapecio
0.5679943618334504
Integral de cuadratura TrapecioCompuesto
0.6050142356274537
Simpson 1/3
0.6053444834069444
Simpson 3/3
0.6051615414872795
Cuadratura Gaussian
0.6053445604215317
 El valor analítico de la integral es:  0.605017809655554
```

Figura 14

2.7. Ejercicio 8

La ecuación

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$$

describe el **movimiento armónico simple o movimiento libre no amortiguado.** para un sistema de resorte y masa. Utilizando esta ecuación realice lo siguiente:

a) Dada la siguiente ecuación con condiciones iniciales:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 16x = 0$$

$$x(0) = 10, \qquad x(2\pi) = 10, \qquad x'(0) = 0$$

verifique que su solución exacta es $x(t) = 10\cos(4t)$

b) Para encontrar la solución numérica es necesario discretizar el intervalo de solución, para ello defina a $n+2$ como el número de puntos que va a tener en su intervalo (incluyendo los puntos en la frontera, es decir, va a tener n puntos interiores). Definalos como t_i con $i = 0, ..., n+1$ y a h como el espaciamiento entre cada par de puntos de la discretización.

Utilizando la fórmula de diferencias centrales para la segunda derivada:

$$\frac{d^2x}{dt^2} \approx \frac{x(t+h) - 2x(t) + x(t-h)}{h^2}$$

o bien,

$$\frac{d^2x}{dt^2} \approx \frac{x(t_{i+1}) - 2x(t_i) + x(t_{i-1})}{h^2}$$

encuentre una versión discreta de la ecuación diferencial.

Hint: puede denotar a $x(t_i)$ como x_i, de tal forma que sea mas simple su expresión.

c) Plantee el sistema de ecuaciones que debe ser resuelto para encontrar los valores discretos $x_0, x_1, x_2, ...x_n, x_{n+1}$. Note que x_0 y x_{n+1} ya los tiene por las condiciones de frontera, por tanto el sistema puede ser reducido, encuentre el sistema reducido y analice su estructura.

d) De acuerdo a la estructura que tenga el sistema, elabore un programa que grafique la solución para un valor de n dado por el usuario y que compare con la grafica de la solución exacta. Concluya que pasa al aumentar el valor de n.

Este inciso se resolvió con el programa U7_E8.m

a) Dada la ecuación diferencial,

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 16x = 0$$

$$x(0) = 10, \qquad x(2\pi) = 10, \qquad x'(0) = 0$$

Tomando el polinomio característico asociado de la ecuación

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} + 16x &= 0 \\ \lambda^2 + 16 &= 0 \\ \lambda^2 &= -16 \\ \lambda &= 4i \\ x(t) &= Acos(4t) + Bsen(4t) \end{aligned}$$

Posterior a la aplicación de las condiciones iniciales se tiene que

$$x(t) = 10\cos(4t)$$

b) Dados n nodos,

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} \approx \frac{x(t_{i+1}) - 2x(t_i) + x(t_{i-1})}{h^2} + 16x_i &= 0 \\ \frac{x(t_{i+1}) + x(t_{i-1})}{h^2} + (16 - \frac{2}{h^2})x(t_i) &= 0 \\ x(t_{i+1}) + x(t_{i-1}) + (16h^2 - 2)x(t_i) &= 0 \end{aligned}$$

c) Para $i = 1$, se establece la condición inicial

$$x(t_2) + (16h^2 - 2)x(t_1) = -x(t_0) = -10$$

Para i=n, se establece la condición de frontera

$$x(t_{n+1}) + (16h^2 - 2)x(t_n) = -x(t_{n+2}) = -10$$

De esta manera se establece el sistema de ecuaciones a resolver

$$\begin{pmatrix} (16h^2-2) & 1 & \cdots & 0 \\ 1 & (16h^2-2) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & (16h^2-2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -10 \end{pmatrix}$$

La solución del sistema anterior para $n = 63$ nodos es la siguiente 15. Cabe mencionar que conforme aumentan los nodos la solución numérica tiende a aproximar de mejor manera a la analítica.

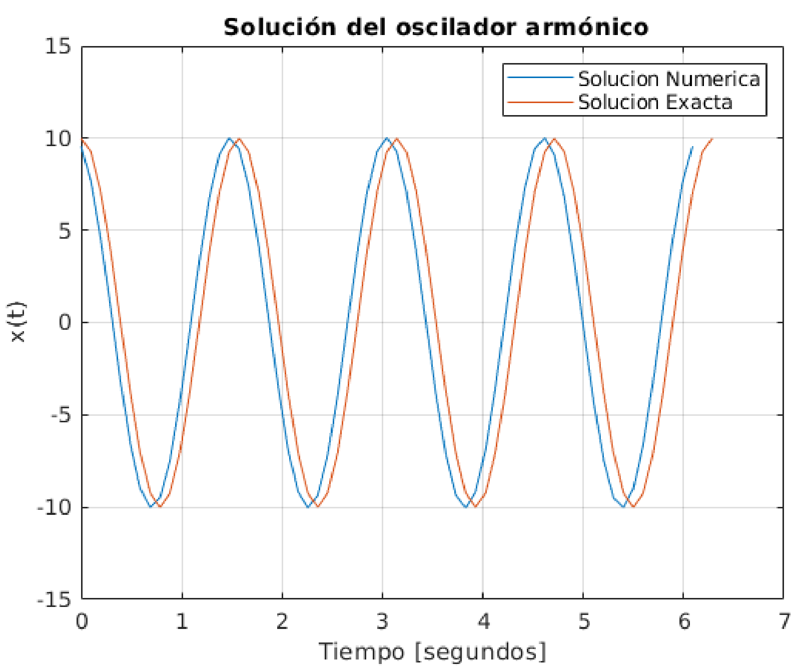


Figura 15