Facultad de Ciencias, UNAM
Febrero 2023-2

TEMAS SELECTOS DE ANÁLISIS NUMÉRICO

Proyecto No. 1

Cuadratura Numérica

Prof. César Carreón Otañez
Ayud: Jesús Iván Coss Calderón

Ciudad Universitaria
2023

Ejercicios Escritos.

1. Dada la siguiente función:

$$g(t) = f(t) - P(t) - [f(x) - P(x)]\frac{(t-x_0)(t-x_1)\cdots(t-x_n)}{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)}$$

calcular $g'(t)$.

2. Deducir la regla del punto medio para aproximar la integral en un intervalo $[a, b]$.

Idea geométrica. En el intervalo $[a, b]$ se aproxima el área bajo la curva de f con el rectángulo que se forma de lados $b - a$ (base) y $f(x_m)$ (altura). Donde x_m es el punto medio del intervalo.

Redactar el método y la fórmula en términos de f, a, b, x_m. Figura 1.

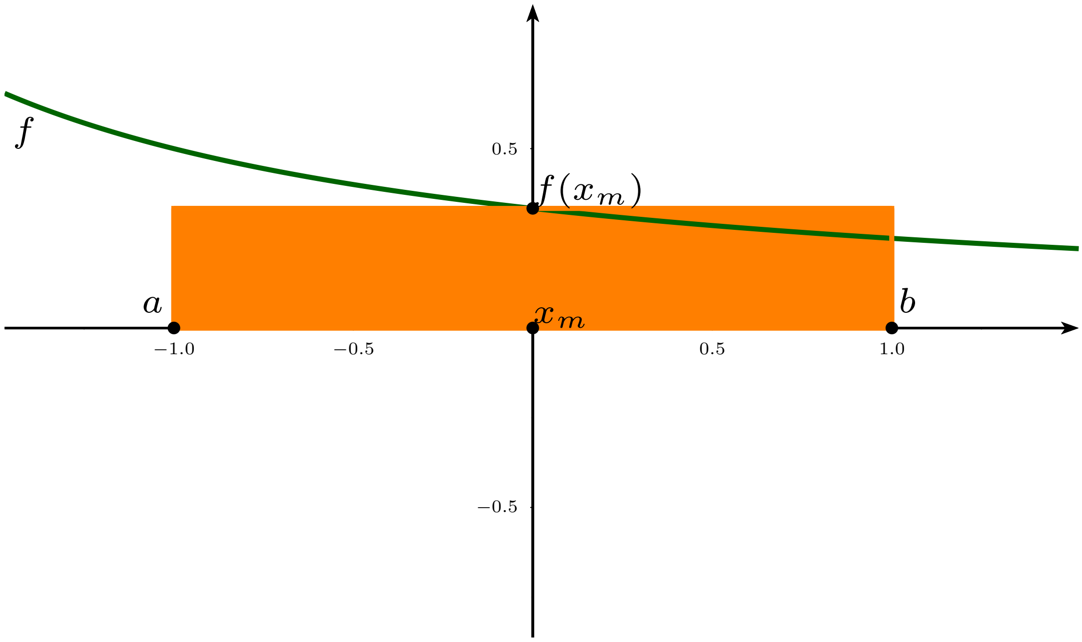

Figure 1: Regla del Punto Medio

3. Deducir la regla del punto medio compuesta para aproximar la integral en un intervalo $[a, b]$.

Idea geométrica. En el intervalo $[a, b]$ y una partición $x_0, x_1, \cdots, x_n$ aproximar el área bajo la curva tomando en cada subintervalo $[x_i, x_{i+1}]$ el punto medio x_{mi} para aplicar el método del punto medio para cada i.

Redactar el método y la fórmula en términos de f, a, b, x_i, x_{mi}. Figura 2.

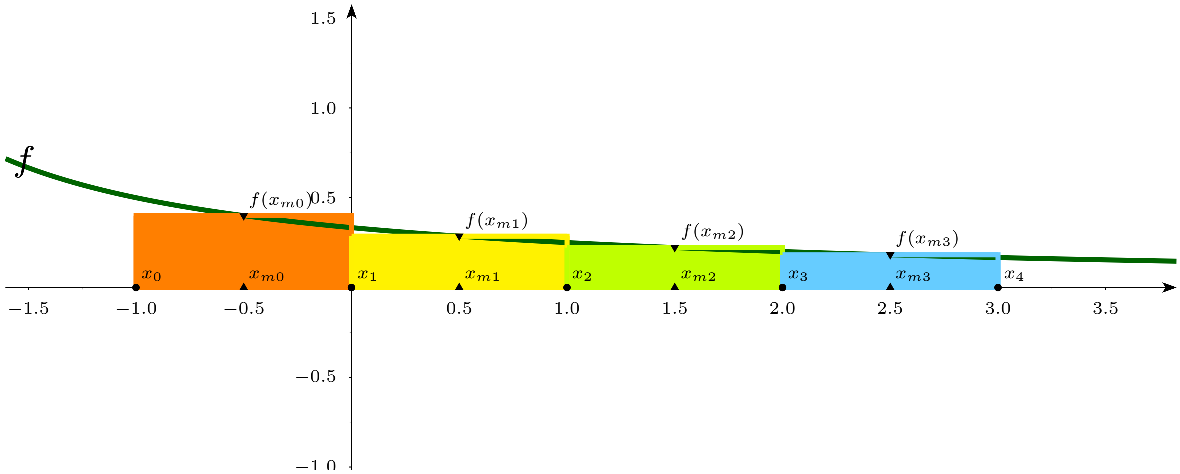

Figure 2: Regla del Punto Medio Compuesta

4. Aproximar las siguientes integrales con la regla del punto medio.

$$\int_1^{1.5} x^2 \ln(x)dx, \quad \int_0^{\pi/4} e^{3x}\sin(2x)dx$$

5. Completar la Tabla 1 en el intervalo $[0,2]$:

$\int f(x)dx$	$\int x^2$	$\int x^4$	$\int 1/(x+1)$	$\int \sqrt{1+x^2}$	$\int \sin(x)$	$\int e^x$
Val. Exactos	2.667	6.400				
Punto Medio	2.0	2.0				
Trapecio	4.000	16.000				
Simpson	2.667	6.667				
Gauss						

Tabla 1: Cuadratura Simple.

Anexar todos los cálculos, usar las reglas simples de todos los métodos.

6. Aproximar la integral

$$\int_{1.8}^{2.6} f(x)dx$$

usando la regla de cuadratura apropiada. (Elección Libre).

Dados los valores siguientes de f:

x	1.8	2.0	2.2	2.4	2.6
$f(x)$	3.12014	4.42569	6.04241	8.03014	10.46675

7. Usar integración de Romberg para aproximar explícitamente la integral:

$$\int_0^{0.35} \frac{2}{x^2-4}dx$$

hasta el término $I_{2,2}$.

8. Dada la función $f(x) = \sin(x)$ en el intervalo $[0, \pi]$. Usando integración de Romberg completar la siguiente tabla:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[dr] & & & \\
1.5708 \arrow[r] \arrow[dr] & 2.0944 \arrow[dr] & & \\
1.8961 \arrow[r] \arrow[dr] & 2.0046 \arrow[r] \arrow[dr] & 1.9986 \arrow[dr] & \\
I_{3,0} \arrow[r] & I_{3,1} \arrow[r] & I_{3,2} \arrow[r] & I_{3,3}
\end{tikzcd}$$

Calcular explícitamente los valores $I_{3,0}, I_{3,1}, I_{3,2}$ y $I_{3,3}$.

Ejercicios Computacionales.

9. Programar:

- Regla del Punto Medio y Regla del Punto Medio Compuesta.
- Regla del Trapecio y Regla del Trapecio Compuesta.
- Regla de Simpson y Regla de Simpson Compuesta.
- Cuadratura de Gauss.
- Integración de Romberg.
- Método de Monte Carlo.

[5 puntos]

10. Evaluar los siguientes incisos:

(a) Usar cualquier regla de cuadratura simple para evaluar las siguientes integrales:

$$I_k = e^{-1}\int_0^1 x^k e^x dx$$

para $k = 0, 1, \cdots, 20$.

(b) Probar que la integral definida en el inciso anterior satisface:

$$I_k = 1 - kI_{k-1}$$

usar la recurrencia para calcular I_k, con $k = 0, 1, \cdots, 20$ tomando $I_0 = 1 - e^{-1}$.

(c) Usar la siguiente recurrencia

$$I_{k-1} = \frac{1 - I_k}{k}$$

comenzando con $I_n = 0$ para algún valor de $n > 20$. Hacer 20 iteraciones.

(d) Comparar los resultados en los tres métodos y comentar.

11. Aproximar la integral:

$$4\pi\sqrt{\alpha}\int_0^{1/\sqrt{\beta}} \sqrt{1 - Kx^2}dx$$

donde $\beta = 100, \alpha = (3 - 2\sqrt{2})/\beta$ y $K = \beta\sqrt{1 - \alpha\beta}$.

Usar

- Trapecio Simple.
- Simpson Simple.
- Gauss.

Comentar los resultados y comparar con la integral exacta dada por:

$$\pi\sqrt{\alpha/K}(\pi + \sin(2\theta) - 2\theta)$$

donde $\theta = \arccos(\sqrt{K/\beta})$.

12. La Regla de cuadratura de Gauss en el intervalo $[-1, 1]$ con tres nodos (x_i) y pesos (c_i) está dada como:

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx c_1 f(x_1) + c_2 f(x_2) + c_3 f(x_3)$$

donde:

$$\begin{array}{rcc} x_1 = & -0.7745966692 & c_1 = 0.555555556 \\ x_2 = & 0 & c_2 = 0.888888888 \\ x_3 = & 0.7745966692 & c_3 = 0.555555556 \end{array}$$

Programar la regla de cuadratura. Calcular las siguientes integrales:

$$\int_{-1}^{1} x^3 e^x dx, \quad \int_{-1}^{1} \cos(x)^2 dx$$

13. La Regla de cuadratura de Gauss en el intervalo $[-1, 1]$ con cuatro nodos (x_i) y pesos (c_i) está dada como:

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx c_1 f(x_1) + c_2 f(x_2) + c_3 f(x_3) + c_4 f(x_4)$$

donde:

$$\begin{aligned} x_1 &= -0.86111363116 & c_1 &= 0.3478548451 \\ x_2 &= -0.3399810436 & c_2 &= 0.6521451549 \\ x_3 &= 0.3399810436 & c_3 &= 0.6521451549 \\ x_4 &= 0.86111363116 & c_4 &= 0.3478548451 \end{aligned}$$

Programar la regla de cuadratura. Calcular las siguientes integrales:

$$\int_{-1}^{1} \sin(x)^2 - 2x + 1 \; dx, \qquad \int_{-1}^{1} \frac{1}{x+4} dx$$

14. Completar la Tabla 2, utilizando los códigos programados en el intervalo dado, con la partición sugerida: donde n indica el tamaño de la partición, es decir, $x_0, x_1, \cdots, x_n$.

$\int f(x)dx$	$\int 1/x$	$\int 1/x^2$	$\int x^3 - 3x^2 + 7x - 5$	$\int \sin(x)$
	$[1,3]$, $n = 6$	$[1,2]$, $n = 8$	$[1,3]$, $n = 6$	$[0,\pi]$, $n = 8$
Val. Exactos				
Punto Medio Compuesta				
Trapecio Compuesta				
Simpson Compuesta				
Monte Carlo				

Tabla 2: Cuadraturas Compuestas.

15. Usar integración de Romberg para calcular hasta el término $I_{5,5}$ de las siguientes integrales.

(a)

$$\int_{-1}^{1} \cos^2(x) dx$$

(b)

$$\int_{1}^{4} \sin^2(x) - 2x\sin(x) + 1dx$$

(c)

$$\int_{e}^{2e} \frac{1}{x\ln(x)} dx$$

Número de integrantes: a lo más 3.

Formato de Entrega:

- Todos los programas deberán ser **subidos al classroom** de la clase, el día fijado como entrega en un archivo zip.
- **Cada pregunta computacional, es decir, que se resuelva mediante un programa, requiere una reseña comentando los resultados en un script que sea ejecutable, NO SE TOMARAN EN CUENTA CÓDIGOS SIN SUS COMENTARIOSCORRESPONDIENTES**.
- Recuerden, de encontrarse códigos o tareas iguales causa baja del curso.

Fecha de Entrega: