*선형대수 정리(Essence of linear algebra 시리즈)
출처 : https://youtube.com/playlist?list=PLZHQObOWTQDPD3MizzM2xVFitgF8hE_ab
https://hyeshinoh.github.io/2018/10/24/math-lin_alg-001/

E1. Vectors, what even are they?

1. vector를 보는 세 가지 관점

1) 물리학 관점

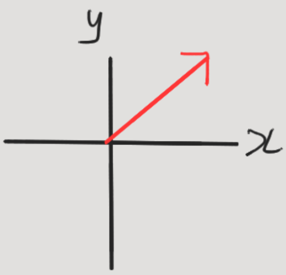
- 벡터는 공간에서의 화살표
- 길이와 방향을 가짐

2) 컴퓨터 사이언스 관점

- 벡터는 순차 숫자 리스트 (ordered lists of numbers)
- 차원 = 리스트의 길이

3) 수학의 관점

- 벡터의 합과 벡터에 숫자를 곱한다는 개념에 맞으면 벡터
  ⇨ 수학의 관점은 시리즈 마지막에 제대로 정의함



2. vector에 대한 새로운 개념을 배울 때는

- ‘벡터’라 함은 xy평면 같은 좌표계 안에 있으며 꼬리는 원점인 화살표로 떠올리자
- 이 화살표가 가리키는 좌표가 컴퓨터 사이언스 관점의 벡터인 ‘숫자 리스트’가 됨

3. 벡터의 연산

- 벡터 합(vector addition): 한 화살표의 끝에서 다음 화살표를 이어서 최종적으로 가리키는 곳
- multiplication by number(scalar): scaling

E2. Linear combinations, span, and basis vectors

1. Basis vectors (기저 벡터)

- basis: the basis of a vector is a set of linearly independent vectors that span the full space
- xy coordinate system의 basis vector는 $\hat{i}$과 $\hat{j}$
  - $\hat{i} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\hat{j} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$
- vector의 coordinate(좌표)은 scalar
  - basis vectors $\hat{i}$와 $\hat{j}$를 scale함
  - e.g. $\begin{bmatrix} -5 \\ 2 \end{bmatrix} = (-5)\hat{i} + (2)\hat{j}$ $= \vec{v}$

2. Linear combination (선형 조합)

a & b는 스칼라

- linear combination of $\vec{v}$ and $\vec{w}$: $a\vec{v} + b\vec{w}$

3. Span

생성 공간

- $\vec{v}$와 $\vec{w}$의 span이란 두 벡터의 모든 가능한 linear combination 조합
- 선형독립인 두개의 2차원 벡터의 span은 2차원 평면 전체가 되고, 두 벡터가 일직선상에 놓인 경우, 즉 선형종속인 경우 두 벡터의 span은 직선이 됨

4. Linearly dependent(선형 종속)

- 선형종속: 한 벡터가 다른 두 벡터의 선형조합으로 표현될 경우
  - $\vec{u} = a\vec{v} + b\vec{w}$
  - 선형종속인 벡터는 redundant함 (중복) (이 벡터를 없애도 span이 줄어들지 않음) 공간
- 선형독립: 한 벡터가 다른 두 벡터의 선형조합으로 표현되지 않는 경우
  - $\vec{u} \neq a\vec{v} + b\vec{w}$

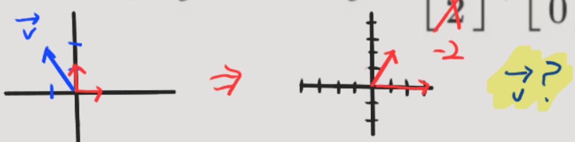
E3. Linear transformation and matrices

1. Linear transformation란

- 특정 벡터를 다른 벡터로 바꾸는 변환 (input vector → output vector)
- Linear 변환의 속성
  - Lines remain lines
  - Origin remains fixed   원점 그대로
  - Grid lines remain parallel and evenly spaced

2. Linear transformation 계산

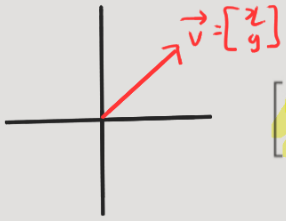
- 기저벡터 $\hat{i}$와 $\hat{j}$의 변형위치를 알면 임의의 벡터 $\vec{v}$를 추론할 수 있음
  - e.g. $\vec{v} = -1\hat{i} + 2\hat{j}$에서 $\hat{i}$와 $\hat{j}$가 $\begin{bmatrix} 1 \\ \cancel{2} \end{bmatrix}$ -2, $\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}$로 변형된 경우 변환된 $\vec{v}$ 구하기



$\vec{v} = -1\hat{i} + 2\hat{j}$
$= -1\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$
$= \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$
$\vec{v}' = -1\hat{i}' + 2\hat{j}'$
$= -1\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}$
$= \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}$

$$\vec{v} = -1(Transformed\ \hat{i}) + 2(Transformed\ \hat{j}) \tag{1}$$
$$= -1\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{2}$$
$$= \begin{bmatrix} -1(1) + 2(3) \\ 1(2) + 2(0) \end{bmatrix} \tag{3}$$
$$= \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix} \tag{4}$$

- 일반화: $\vec{v} = x\hat{i} + y\hat{j} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$에서 $\hat{i}$와 $\hat{j}$가 $\begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}$로 변형된 경우 변환된 벡터 구하기



"선형변환"
기존의 벡터를 뒤틀어서 선형 변환을 시키는 것

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = x\begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix} + y\begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{bmatrix}$$

⇒ 행렬-벡터 곱셈은 선형 변환을 계산하는 방법이라고 할 수 있음

E4. Matrix multiplication as composition

1. Composition of linear transformation

- 선형변환을 한 번 하고 다시 선형변환을 하면 그 결과는 새로운 하나의 선형변환이 됨
- 이를 행렬의 곱으로 나타낼 수 있음, 단 함수의 합성처럼 식의 왼쪽으로 곱해나가야 함
- e.g. 첫번째 선형변환을 $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$(rotation), 두번째 선형변환을 $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ (shear)라고 할 때 그 composition (합성)

shear rotation composition = 두 행렬의 곱

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\text{shear}}\left(\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}_{\text{rotation}}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}_{\text{composition}}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

- 이 때 composition 행렬을 두 원본 행렬의 곱(product)이라고 할 수 있음

2. Matrix multiplication (곱셈)

- $M_1 = \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}$과 $M_2 = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$의 곱:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ae + bg & af + bh \\ ce + dg & cf + dh \end{bmatrix}$$

- 교환법칙은 성립하지 않음: $AB \neq BA$ (곱하는 순서는 중요하다!)
- 결합법칙은 성립함: $(AB)C = A(BC)$ (Associativity)

E5. Three-dimentional linear transformations

1. 3차원의 선형변환

- 3차원 기저벡터: $\hat{i} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \hat{j} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \hat{k} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$
- 2차원에서와 마찬가지로 각 기저벡터들이 어디로 이동하는지 좌표값을 알면 특정 벡터 $\vec{v} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$가 어떤 벡터로 변형되는지 파악할 수 있음
- e.g. 기저벡터: $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$가 $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$로 이동한다고 할 때의 선형변환
  - 각 이동한 좌표값이 행렬의 열을 구성함

3 X3 3x1 =3 x1

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = x \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{1}$$

$$= \begin{bmatrix} 1x + 1y + 0z \\ 0x + 1y + 0z \\ 1x + 0y + 1z \end{bmatrix} \tag{2}$$

E6. The determinant (행렬식)

1. Determinant of transformation의 개념

- Determinant(행렬식): 선형변형 후 단위면적을 scaling하는 factor 인자
  - 2차원 변환의 determinant 값이 3이라면 특정 면적의 크기는 3배가 됨
  - 2차원 변환의 determinant 값이 0이라면 차원을 축소시켜 직선이나 점이 됨 (면적은 0이됨)
  - determinant 값이 음수인 경우는 방향(orientation)이 뒤집히는 것으로 볼 수 있음
- 3차원의 determinant는 단위정육면체의 부피를 scaling하는 factor
  - determinant 값이 음수인 경우 오른손의 규칙의 방향이 뒤집히는 것(왼손으로)으로 볼 수 있음
    - 오른손의 규칙: 오른손의 엄지, 검지, 중지를 폈을 때 각각 $\hat{k}, \hat{i}, \hat{j}$에 대응함

2. Determinant computation (계산)

- 2차원 행렬의 determinant: $det\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = ad - cd$

3 = 3배의 면적크기
0 = 차원축소 직선or점
-xx : 방향이 뒤집힘

E7. Inverse matrices, column space and null space

1. Usefulness of matrices

- 특정 방정식계(system of equations)를 풀 수 있음 ⇦ Linear system of equations

  방정식
- system of equations: unknown variables & equations

$$\begin{aligned} 2x+5y+3z&=-3 \\ 4x+0y+8z&=0 \\ 1x+3y+0z&=2 \end{aligned} \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 4 & 0 & 8 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \rightarrow A\vec{x} = \vec{v}$$

A (선형변환) $\vec{x}$ 변환전 벡터 $\vec{v}$ 변환후 벡터

2. $A\vec{x} = \vec{v}$의 해 $\vec{x}$를 구하는 방법

$A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 4 & 0 & 8 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}^{-1}$

1) when $det(A) \neq 0$: A의 역행렬이 존재 ⇨ Inverse transformation

↳ 차원축소가 아니면,

- Inverse matrices(역행렬) A^{-1}: $A^{-1}A = I$ $= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

  ↳ 다시 시작한 점

$A\vec{x} = \vec{v}$ 에서 $\vec{x}$는?

$A^{-1}A\vec{x} = A^{-1}\vec{v}$

$\vec{x} = A^{-1}\vec{v}$

$$A^{-1}A\vec{x} = A^{-1}\vec{v} \quad (1)$$
$$\vec{x} = A^{-1}\vec{v} \quad (2)$$

↳ $\vec{v}$에 역변환을 해서 구함

2) when $det(A) = 0$: A의 역행렬이 존재하지 않음

- rank: number of dimensions in the output of transformation
  - 변환의 결과가 선, 즉 1차원이라면 rank = 1   ↳ 열공간의 차원수   = 변환결과의 차원의 수
  - 변환의 결과가 평면 상의 벡터들이라면 rank = 2
- $n \times n$ 행렬에서 rank가 n보다 작을 경우, 즉 full rank가 아닐 경우, 공간이 더 작은 차원으로 축소했음을 의미

$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$

- Column space of A: set of all possible outputs of $A\vec{v}$
  - span of columns ⇔ column space   행렬의 열들의 확장공간
- Null space(Kernel): 차원이 축소할 때 원점으로 이동되는 벡터들의 집합
- $A\vec{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$인 경우 null space 모두가 해가 될 수 있음

E8. Nonsquare matrices as transformation between dimensions

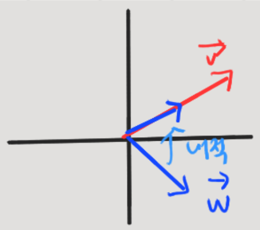
m (기저벡터 수)

$$\text{n (차원수)}\left\{\begin{array}{cc} \hat{i} & \hat{j} \\ \left[\begin{array}{cc} 2 & 0 \\ -1 & 1 \\ -2 & 1 \end{array}\right] \end{array}\right. \Rightarrow \text{3차원에서 } \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}\text{인 } \hat{i}\ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\text{인 } \hat{j}$$

- $n \times m$ 행렬에서 column m은 입력 기저벡터의 수, row n은 기저벡터의 변환 후 좌표값 개수(차원수)를 나타냄
- 2차원에서 3차원으로 가는 3×2 matrix 곱은 평면이 3차원상에서 비틀려 나타나는 것과 유사하고, 3차원에서 2차원으로 가는 ~~3×2~~ 2×3 matrix 곱은 3차원을 투사해서 평면으로 찌그러트려보는 것과 유사

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 1 & 5 & 9 \end{bmatrix}_{\hat{i}\ \hat{j}\ \hat{k}} \Rightarrow \text{2차원에서 } \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}\text{인 } \hat{i}\ \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix}\text{인 } \hat{j}\ \begin{bmatrix} 4 \\ 9 \end{bmatrix}\text{인 } \hat{k}$$

E9. Dot products and duality



내적한 $\vec{w} \times \vec{v}$ (투영)

1. Dot product(내적): $\vec{v} \cdot \vec{w}$

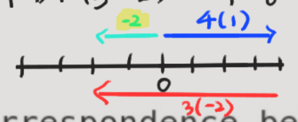
- Dot product 개념: 두 벡터 $\vec{v}, \vec{w}$의 같은 위치의 원소끼리 곱해 더함, 결과는 scalar

X

- 기하학적인 의미: $\vec{w}$를 $\vec{v}$에 project(투영)한 벡터의 길이와 $\vec{v}$의 길이를 곱합
  - $\vec{v} \cdot \vec{w} = (length\ of\ projected\ \vec{w})(length\ of\ \vec{v})$
  - 이때 (투영) 순서는 중요하지 않음($\vec{w}$에 $\vec{v}$를 투사해도 결과는 같음)
- $\vec{w}$가 $\vec{v}$의 방향과 반대이면 dot product는 음수
- $\vec{w}$가 $\vec{v}$의 방향과 비슷하면 dot product는 양수
- $\vec{w}$가 $\vec{v}$의 방향과 수직(perpendicular)이면 dot product는 0

2. Duality

$$\underset{\text{(transform)}}{\begin{bmatrix} 1 & -2 \end{bmatrix}} \underset{\text{(vector)}}{\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}} = (4 \cdot 1) + (3 \cdot -2) = 4 - 6 = -2$$



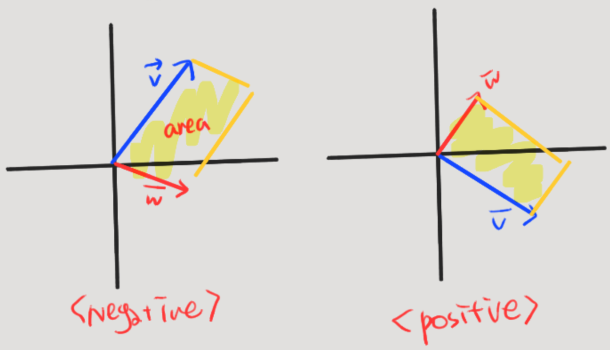
- Duality(이중성): natural-but-surprising correspondence between two mathematical things
- matrix-vector product ⇔ dot product
  - $1 \cdot 2$ matrix와 2차원 vector를 생각할 것

E10. Cross products: $\vec{v} \times \vec{w}$
(외적)

1. What is cross product?

- 2차원 벡터의 경우, $\vec{v} \times \vec{w} = Area\ of\ parallelogram$
- $\vec{v}$가 $\vec{w}$의 오른쪽에 위치하면 $\vec{v} \times \vec{w} > 0$
- $\vec{v}$가 $\vec{w}$의 왼쪽에 위치하면 $\vec{v} \times \vec{w} < 0$
- $\vec{v} \times \vec{w} = -\ \vec{w} \times \vec{v}$

ex) $\hat{i} \cdot \hat{j}$ = positive
$\hat{j} \cdot \hat{i}$ = negative



2. Cross product computation

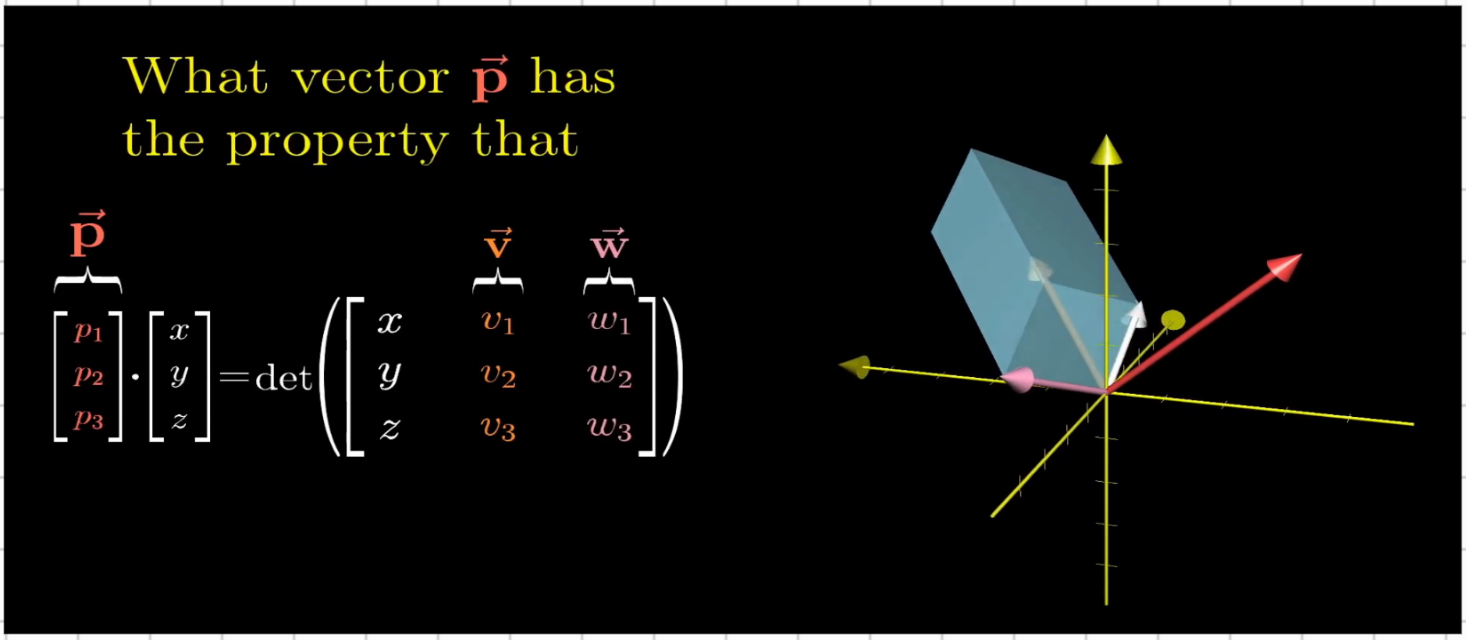
- $\vec{v}$와 $\vec{w}$의 좌표를 행렬의 column으로 넣고 행렬식 계산
- e.g. $\vec{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\vec{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ 일 경우: $\vec{v} \times \vec{w} = det\left(\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\right)$
- 두 벡터가 직교에 가까울수록 외적값이 커짐

$= (3 \times -1) - (2 \times 1)$
$= -3 - 2 = -5$

3. 외적의 정확한 의미: $\vec{v} \times \vec{w} = \vec{p}$

외적

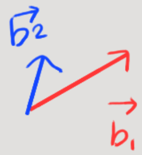
- 개념적으로는 두 벡터가 이루는 평행사변형의 면적이라고 볼 수 있지만 정확한 외적의 개념은 두 개의 3차원 벡터로 새로운 3차원 벡터를 만들어내는 것(결과가 면적이 아닌 벡터임)
- $\vec{p}$의 길이가 두 벡터의 면적과 같고, $\vec{p}$의 방향은 평행사변형에 직교함 (perpendicular)
  - 직교의 규칙: 오른손 규칙 (엄지, 검지, 중지가 $\vec{p}, \vec{v}, \vec{w}$) ↱ $\vec{v} \times \vec{w}$



E12. Change of basis

1. 개념

- 우리의 basis vector(표준 좌표계): $\hat{i}, \hat{j}$
  - $\hat{i}, \hat{j}$에 scalar를 곱하고 서로 더해(scaling) 특정 벡터를 나타낼 수 있음
- Jennifer의 basis vector(alternative coordinate system) $\hat{b}_1, \hat{b}_2$를 이용해 특정 벡터를 나타내면 좌표값이 완전히 달라짐



2. 좌표계 변환

- Jennifer가 말하는 좌표를 우리의 좌표계로 표현/이해하려면?
  - 우리의 basis vector에서 Jennifer의 basis vector로의 “선형변환”
  - e.g. Jennifer의 basis vector가 표준좌표계에서 $\underset{b_1}{\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}}, \underset{b_2}{\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}}$일 경우 ($A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$) 제니퍼가 말하는 벡터 $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$는 표준좌표계의 어떤 벡터인가?

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

제니퍼가 말하는 좌표 표준좌표계

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}$$

- 우리의 좌표계의 벡터(좌표)가 Jennifer의 좌표계에서는 어떻게 표현/이해되나?
  - 위의 “선형변환” matrix의 역을 취함 (Inverse change of basis matrix)
  - e.g. 우리 표준좌표계의 $\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$는 Jennifer의 좌표계에서는 어떤 벡터인가?

우리의 좌표계 제니퍼의 좌표계

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1}}_{(\text{제니퍼 기저벡터})^{-1}} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5/3 \\ 1/3 \end{bmatrix}$$

우리 좌표계의 행렬 변환 ⇆ Jennifer의 행렬 변환: $A^{-1}MA$

관점변화

선형변환

우리에게 90°회전된걸 제니퍼 언어로 제공

$$\underset{\text{제니퍼 기저벡터의 역}}{\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1}} \underset{\text{변환행렬}}{\overset{90^\circ\text{ 회전}}{\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}} \overbrace{\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}}^{\text{표준(우리의)}} \underset{\text{제니퍼}}{\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}} = \text{제니퍼의 언어로 90° 회전한 값}$$

E13. Eigenvectors and eigenvalues(고유벡터와 고유값)

1. 개념

- eigenvector와 eigenvalue를 이해하려면 앞에서 다룬 개념들에 대한 시각적 이해, 특히 행렬을 선형변환으로 생각하는 방법에 대한 이해가 선행되어야 함
- 2차원 선형변환에서 대부분의 경우 특정 벡터는 그 벡터의 span을 벗어나게 되지만, 변형 후에도 고유한 span을 벗어나지 않는 경우가 있음
    - 행렬을 곱하는 것이 마치 scalar처럼 vector를 늘이고 줄이기(scaling)만 하는 것
- 이 span에 놓여있는 벡터를 변환의 eigenvectors (고유벡터), 변환 도중 원래 벡터를 scaling하는 배수를 eigenvalue (고유값)라고 함
- 3차원 rotation에서 eigenvector를 찾을 수 있다면 그것이 바로 회전축이 됨

2. 계산

- 계산식: $A\vec{v} = \lambda\vec{v}$ 스칼라니까 벡터로 바꿔준다 임의변환× 고유벡터 = 고유값 × 고유벡터
    - A: 임의의 변환을 나타내는 행렬(transformation matrix)
    - $\vec{v}$: 고유벡터(eigenvector)
    - λ: 고유값(eigenvalue)
- $scaling\ by\ \lambda \Leftrightarrow Matrix\ multiplication\ by \boxed{\begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}} (= \lambda I)$ 고유값은 3차원에서 이렇게 쓸 수 있지
- 풀이

$$A\vec{v} = \lambda\vec{v} \tag{1}$$
$$A\vec{v} = (\lambda I)\vec{v} \quad \Rightarrow A\vec{v} - \lambda I\vec{v} = 0 \tag{2}$$
$$(A - \lambda I)\vec{v} = 0 \quad \text{행렬× 벡터 =0 이려면 차원축소 해야함} \tag{3}$$
$$det(A - \lambda I) = 0 \quad (squishification) \tag{4}$$

차원축소

3. Eigenbasis(고유기저)

- Eigenbasis: 기저벡터이기도 한 고유벡터의 쌍

E14. Abstract vector space

- Formal definition of Linearity
  - Linear transformations preserve addition and scalar multiplication
  - Additivity: $L(\vec{v}+\vec{w}) = L(\vec{v}) + L(\vec{w})$
    - 두 벡터를 더한 후에 변환한 것과 두 벡터를 각각 변환 후 더한 것이 같음
  - Scaling: $L(c\vec{v}) + cL(\vec{v})$
    - 벡터를 scaling하고 변환한 것과 벡터를 변환하고 scaling한 것이 같음

- Vector space: linearity의 조건을 만족하는 모든 것들 (추상적인 개념)
  (공리)

- determinant : 변환이 면적을 얼마나 스케일링 하는지
- 고유벡터 : 변환이 일어나도 span을 벗어나지 않는 벡터

→ 공간의 성질