ZADAĆA 1

Osnove operacionih istraživanja

Student: Šejla Pljakić

Indeks: 17751

Zadatak 1

Fabrika može proizvoditi dva proizvoda (P_1 i P_2) na tri grupe mašina (M_1, M_2 i M_3). Grupa mašina M_1 smije raditi najviše 75 h sedmično, grupa mašina M_2 smije raditi najviše 57 h sedmično, dok grupa mašina M_3 smije raditi najviše 87 h sedmično. Za proizvodnju 1 kg proizvoda P_1 potrebno je 1 h rada na mašini M_1, 5 h rada na mašini M_2, te 2 h na mašini M_3. Za proizvodnju 1 kg proizvoda P_2 potrebno je 6 h rada na mašini M_1, 5 h rada na mašini M_2, te 2 h na mašini M_3. Dobit od proizvoda P_1 je 29 KM/kg, a od proizvoda P_2 38 KM/kg.

a. Uz pomoć simpleks metoda pronađite optimalni sedmični plan proizvodnje koji će fabrici obezbijediti najveću moguću dobit pod zadanim uvjetima. Sve podatke koji se ne mogu tačno izraziti kao cijeli brojevi ili decimalni brojevi sa konačno mnogo i relativno malo decimala vodite u simpleks tabelama kao razlomke. Obavezno prodiskutirajte ne samo koliko treba proizvesti kilograma proizvoda P_1 i P_2 da bi se dobila optimalna dobit, nego i koliko ostaje eventualno neiskorištenih radnih sati mašina M_1, M_2 i M_3, te koja su ograničenja "uska grla" koja sprečavaju da se ostvari veća dobit od postignute optimalne dobiti. Problem riješite na dva načina: koristeći Dantzigovo pravilo pivotiranja, te koristeći pravilo maksimalnog prirasta funkcije cilja. **[1 poen]**

b. Rješenje dobijeno pod a. provjerite putem grafičkog metoda. **[0.4 poena]**

c. Rješenje dobijeno pod a. provjerite uz pomoć "linprog" funkcije u MATLAB-u (potrebno je navesti šta su bili ulazni podaci i šta je dobijeno kao izlaz). **[0.2 poena]**

a)

$$\arg\max Z = 29\,x_1 + 38\,x_2$$

p.o.

$$x_1 + 6x_2 \leq 75$$

$$5x_1 + 5x_2 \leq 57$$

$$2x_1 + 2X_2 \leq 87$$

$$x_1 \geq 0 \; x2 \geq 0$$

Normalni oblik:

$$\arg\max Z = 29\,x_1 + 38\,x_2$$

p.o.

$$x_1 + 6x_2 + x_3 = 75$$

$$5x_1 + 5x_2 + x_4 = 57$$

$$2x_1 + 2x_2 + x_5 = 87$$

$$x_1 \geq 0 \; x2 \geq 0 \; x_3 \geq 0 \; x_4 \geq 0 \; x_5 \geq 0$$

Korištenjem Dantzigovog pravila pivotiranja:

B	b_i	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_3	75	1	6	1	0	0
x_4	57	5	5	0	1	0
x_5	87	2	2	0	0	1
	0	29	38	0	0	0

X2 ulazi u bazu zato što ima najvecu vrijednost u funkciju cilja 38, dok x4 izlazi iz baze jer ima najmanju vrijednost 57/5=11.4 tako da dolazimo do pivota koji je 5. Kako bi izvršili transformacije I napravili matričnu jedinicu citav red ćemo podijeliti sa 5, pa nastaviti dalje transformacije

B	b_i	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_3	33/5	-5	0	1	-6/5	0
x_1	57/5	1	1	0	1/5	0
x_5	321/5	0	0	0	-2/5	1
	-2166/5	0	0	0	-38/5	0

Nakon što smo dobili red u kojem sus vi elementi <=0 završavamo algoritam. Pogledajmo šta ćemo dobiti koristeći pravilo maksimalnog prirastaja.

b) Korištenjem pravila maksimalnog priraštaja:

B	b_i	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_3	75	1	6	1	0	0
x_4	57	5	5	0	1	0
x_5	87	2	2	0	0	1
	0	29	38	0	0	0

bi/x1 -> 75/1=75; 57/5=11.4; 87/2=43.5; 11.4*29=330.6
bi/x2 -> 75/6=12.5; 57/5=11.4; 87/2=43.5 11.4*38=433.2 (uzimamo jer ostavarujemo maksimalniju dobit) Tako da na osnovu proračuna x2 ulazi u bazu, a x4 izlazi pivot je 5.

Bira se isti vodeći element kao i u Dantzigovom pravilu pivotiranja tako da su iteracije iste:
U narednoj iteraciji smo izvršili metode transformacije pa imamo:

B	b_i	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_3	33/5	-5	0	1	-6/5	0
x_1	57/5	1	1	0	1/5	0
x_5	321/5	0	0	0	-2/5	1
	-2166/5	-9	0	0	-38/5	0

Tako da možemo očitati rješenje koje smo dobili i na prvi i na drugi način.

X^t = (0, $\frac{57}{5}$, $\frac{33}{5}$, 0, $\frac{321}{5}$) Z= $\frac{2116}{5}$ $\approx 433.2KM$

Diskusija

Potrebno je proizvesti 11.4 kg proizvoda P_2, dok proizvod P_1 ne treba proizvoditi kako bi se ostvarila maksimalna zarada od 433.2KM.

Mašina M_2 je u potpunosti iskorištena i predstavlja „usko grlo" zbog kojeg nije moguće dalje povećanje zarade. Mašina M_1 ima 6.6 neiskorištenih sati, a mašina M_3 ima 64.2 neiskorištenih sati.

b. Grafički metod

$\arg\max Z = 29\, x_1 + 38\, x_2$

Tako da imamo tačke

(0, 0) (0, 12.5) (75, 0)   (0, 11.4) (11.4, 0) (0, 43.5) (43.5, 0)

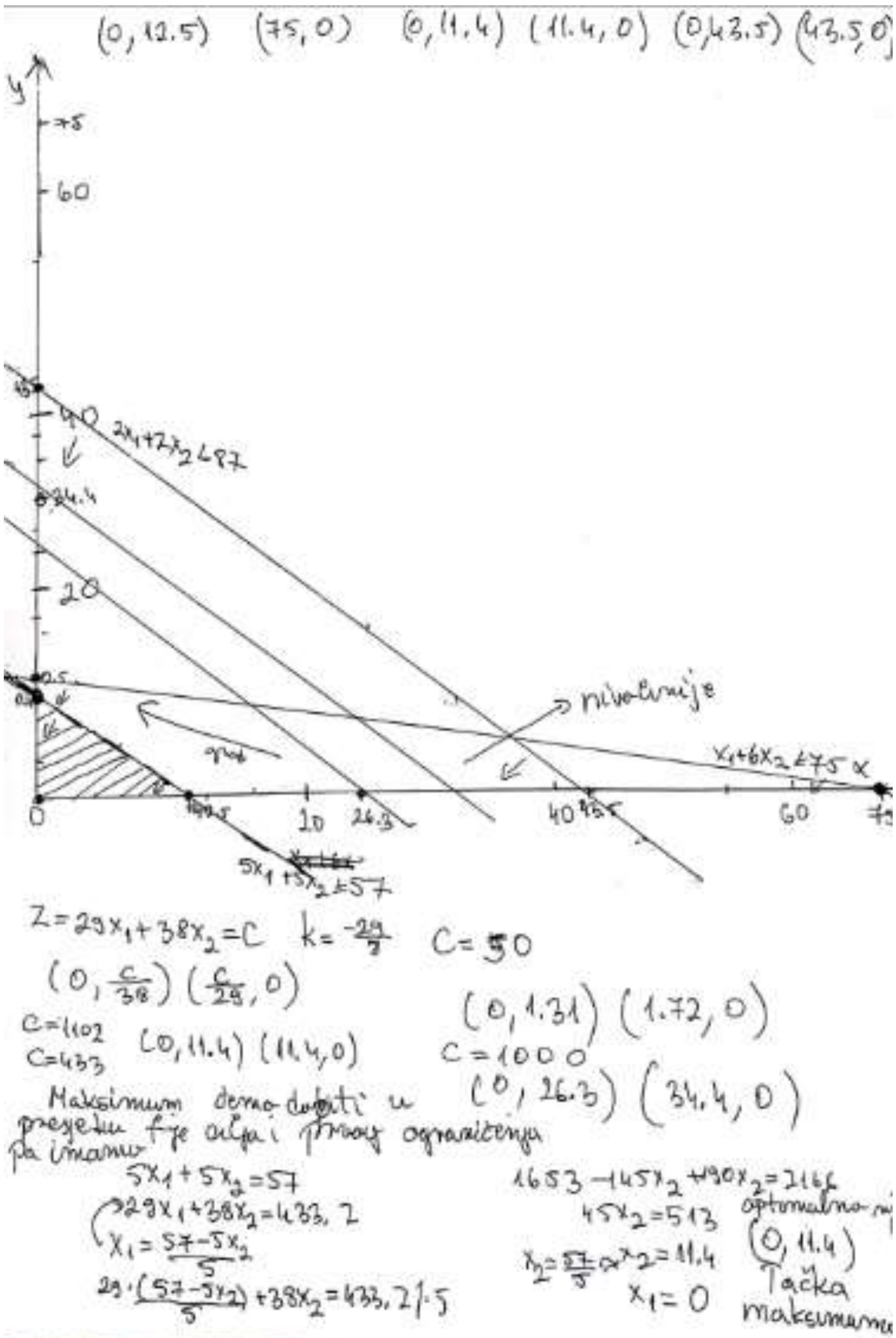
p.o.

$x_1 + 6x_2 \leq 75$

$5x_1 + 5x_2 \leq 57$

$2x_1 + 2X_2 \leq 87$

$x_1 \geq 0\ x2 \geq 0$



Optimalna vrijednost se treba nalaziti u jednoj od graničnih tačaka. Ova rješenja se poklapaju sa onima koje smo dobili simplex algoritmom.

c.

Za potrebe rješavanja ovog zadatka unijela sam matricu A koeficijenta uz ograničenja, matrica b vektor slobodnih clanova i c parametri funkcije cilja. Pošto linprog radi sa minimizacijom, funkciju Z treba negirati, zato je c negirano i krajnji rezultat se isto treba negirat da bi se dobila optimalna vrijednost, tako da je optimalna vrijednost 433.2 što se poklapa sa prethodnim rezultatima.

Command Window

```
>> A=[ 1 6; 5 5; 2 2];
b=[75; 57; 87];
c=[ 29 38];
>> [x,fval]= linprog(-c, A,b, [],[], [0 0], [inf inf])
Optimization terminated.

x =

    0.0000
   11.4000


fval =

 -433.2000

>>
```

Zadatak 2 [1 poen]

Tri proizvoda pakuju se u jednu kutiju zapremine 15 m^3. Gustine ovih proizvoda su 2.4 kg/m^3, 2.2 kg/m^3 i 2.3 kg/m^3 respektivno, a njihove prodajne cijene su 5 EUR/kg, 8 EUR/kg i 9 EUR/kg respektivno. Potrebno je odrediti koliko svakog od proizvoda (u kubnim metrima) treba smjestiti u kutiju da bi se ostvarila maksimalna vrijednost kutije, a da se pri tome ispoštuje dodatno ograničenje da težina kutije ne smije preći 15 kg.

a. Riješite postavljeni problem uz pomoć simpleks metoda. Sve podatke koji se ne mogu tačno izraziti kao cijeli brojevi ili decimalni brojevi sa konačno mnogo I relativno malo decimala vodite u simpleks tabelama kao razlomke. Obavezno prodiskutirajte ne samo koliko treba kubnih metara proizvoda smjestiti u kutiju nego I koliko iznose “6eserve”, odnosno koliko se još zapreminskih odnosno težinskih jedinica moglo još eventualno smjestiti u kutiju. Također istaknite koja su ograničenja “uska grla” koja sprečavaju da se postigne veća vrijednost kutije od dobijene optimalne vrijednosti. Problem riješite na dva načina: koristeći Dantzigovo pravilo pivotiranja, te koristeći pravilo maksimalnog prirasta funkcije cilja. **[0.8 poena]**

b. Rješenje dobijeno pod a. provjerite uz pomoć "`linprog`" funkcije u MATLAB-u (potrebno je navesti šta su bili ulazni podaci I šta je dobijeno kao izlaz). **[0.2 poena]**

$$\text{arg max } Z = 2.4\text{ kg/m}^3\text{*5EUR/kg } x_1\text{ m}^3 + 2.2\text{kg/ m}^3\text{ *8EUR/kg } x_2\text{ m}^3 + 2.3\text{ kg/ m}^3\text{ *9EUR/kg } x_2\text{ m}^3 x_3$$

arg max $Z=12x_1+17.6x_2+20.7x_3$

p.o.

$$x_1 + x_2 + x_3 \leq 15$$

$$2.4x_1 + 2.2x_2 + 2.3x_3 \leq 15$$

$$x_1 \geq 0 x_2 \geq x_3 \geq 0$$

Normalni oblik:

$$\text{arg max } Z = 12x_1 + 176/10 x_2 + 207/10 x_3$$

p.o.

$$24/10 x_1 + 22/10 x_2 + 23/10 x_3 + x_4 = 15$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_5 = 15$$

$$x_1 \geq 0 x_2 \geq x_3 \geq 0\ x_4 \geq 0\ x_5 \geq 0$$

Simplex algoritam korištenjem Dantzigovog pravila pivotiranja:

B	b_i	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_4	15	24/10	22/10	23/10	1	0
x_5	15	1	1	1	0	1
	0	12	176/10	207/10	0	0

Najveca vrijednost je 207/10 tako da x_3 ulazi, a x_4 izlazi

B	b_i	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_3	150/23	24/23	22/23	1	10/23	0
x_5	195/23	-1/23	1/23	0	-10/23	1
	-1500/17	-96/10	-22/10	0	-9	0

Budući da smo došli do reda gdje su svi elementi negativni ili 0, algoritam je završio.

Provjerimo da li ćemo i koištenjem pravila maksimalnog prirasta funkcije doći do istog rješenja.

Simplex algoritam korištenjem pravila maksimalnog prirasta funkcije:

B	b_i	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_4	15	24/10	22/10	23/10	1	0
x_5	15	1	1	1	0	1
	0	12	176/10	207/10	0	0

ako izračunamo bi/xi imat ćemo sljedeće

bi/x_1	bi/x_2	bi/x_3
15/2.4=6.25	15/2.2=6.81	15/2.3=6.92
15/1=15	15/1=15	15/1=15

Zaključujemo da je najmanja vrijednost 6.25, tako daje vodeća kolona x_1 i x_1 izlazi iz baze, a ulazi x_4 sto je vodeći red..

I po ovom pravilu se opet bira isti vodeći element tako da je i sljedeca iteracija tj zadnja iteracija ista:

B	b_i	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_3	150/23	24/23	22/23	1	10/23	0
x_5	195/23	-1/23	1/23	0	-10/23	1
	-1500/17	-96/10	-22/10	0	-9	0

Iz tabele vidimo da su rješenja:

$X^t = (0, 0, \frac{150}{23}, 0, \frac{195}{23})$ Z= 135

Diskusija

Potrebno je proizvesti 6.5 m^3 ili $\frac{150}{23}$ m^3 proizvoda broj 3, proizvode broj 1 i 2 uopće ne treba proizvoditi kako bi se ostvarila maksimalna zarada od 135 eura. Težina kutije predstavlja „usko grlo“ to znači da ona sprječava da se postigne veća vrijednost kutije od dobijene optimalne vrijednosti. Zapremina nije usko grlo u kutiji se josš moglo smjestiti 8.5 zapreminskih jedinica i to su „rezerve“.

b. Nakon što smo unijeli potrebne vrijednosti u Matlab komandnom prozoru vidimo da smo dobili istra rješenja kao i simpleks metodom.

```
>> A=[ 2.4 2.2 2.3 ; 1 1 1];
>> b=[15; 15];
>> c=[ 12 17.6 20.7];
>> [x,z,f]=linprog(-c, A,b, [],[], [0 0 0], [inf inf inf])
Optimization terminated.

x =

    0.0000
    0.0000
    6.5217


z =

  -135.0000


f =

     1
```

Zadatak 3 [2.4 poena]

Kod radio terapije, doza radijacije treba biti dovoljno velika da uništi maligne ćelije i dovoljno mala da poštedi zdrave ćelije u organizmu. Nakon analize utvrđeni su potrebni parametri za konkretnu terapiju. Uzimaju se četiri oblasti: zdrava anatomija, kritično tkivo, region tumora i centar tumora. Koriste se dvije vrste zraka. U tački ulaska prve zrake, sa jediničnim nivoom radijacije, prosječna apsorpcija zdrave anatomije je 0.38 kilorada, kritičnog tkiva 0.3 kilorada, regiona tumora 0.5 kilorada i centra tumora 0.63 kilorada. Analogni parametri za drugi tip zrake su 0.49, 0.14, 0.46 i 0.43 kilorada respektivno. Za kritično tkivo nivo apsorpcije ne smije prelaziti 2.8 kilorada, za regiju tumora mora biti tačno 6 kilorada, a za centar tumora barem 6 kilorada.

a. Uz pomoć simpleks metoda pronađite koliko trebaju iznositi doze obje zrake u ulaznoj tački (u kiloradima) tako da se minimizira ukupna apsorpcija u zdravoj anatomiji. Sve podatke koji se ne mogu tačno izraziti kao cijeli brojevi ili decimalni brojevi sa konačno mnogo i relativno malo decimala vodite u simpleks tabelama kao razlomke. Obavezno prodiskutirajte ne samo kolike su optimalne doze obje zrake, nego i koliko iznose "rezerve" i "viškovi", odnosno koliko je pri optimalnim dozama još dozvoljeno zračiti kritično tkivo, odnosno koliki je premašaj doze zračenja centra tumora u odnosu na minimalno propisanu. Koristite Dantzigovo pravilo pivotiranja. **[0.8 poena]**
b. Rješenje dobijeno pod a. provjerite putem grafičkog metoda. **[0.4 poena]**
c. Rješenje dobijeno pod a. provjerite uz pomoć "`linprog`" funkcije u MATLAB-u (potrebno je navesti šta su bili ulazni podaci i šta je dobijeno kao izlaz). **[0.2 poena]**
d. Ponovite ponovo rješavanje problema pod a. ukoliko se želi smanjiti apsorpcija u kritičnom tkivu sa 2.8 na 1.5 kilorada. **[0.5 poena]**
e. Rješenje dobijeno pod d. provjerite putem grafičkog metoda. **[0.3 poena]**
f. Rješenje dobijeno pod d. provjerite uz pomoć "`linprog`" funkcije u MATLAB-u (potrebno je navesti šta su bili ulazni podaci i šta je dobijeno kao izlaz). **[0.2 poena]**

a.

arg min Z = $0.38x_1 + 0.49x_2$

p.o.

$0.3x_1+0.14x_2 <= 2.8$

$0.5x_1+0.46x_2 = 6$

$0.63x_1+0.43x_2 >= 6$

$x_1 \geq 0 \; x_2 \geq 0$

Prošireni model:

arg min Z = $0.38x_1 + 0.49x_2 + Mx_5 + Mx_6$

p.o

$0.3x_1+0.14x_2 + x_3 = 2.8$

$0.5x_1+0.46x_2 + x_5 = 6$

$0.63x_1+0.43x_2 - x_4 + x_6 = 6$

$x_1 \geq 0 \; x_2 \geq 0 \; x_3 \geq 0 \; x_4 \geq 0 \; x_5 \geq 0 \; x_6 \geq 0$

Bazu će činiti dvije vještačke promjenljive x_5 i x_6 i jedna dopunska promjenljiva x_3:

B=(x_3, x_5, x_6)

Izražavamo vješračke promjenljive:

$$x_5 = 6 - 0.5x_1 - 0.46x_2$$

$$x_6 = 6 - 0.63x_1 - 0.43x_2 + x_4$$

Z = 0.38x_1 +0.49x_2 +M(6$- 0.5x_1 - 0.46x_2$) +M(6 $- 0.63x_1 - 0.43x_2 + x_4$)

$$Z = x_1(0.38 - 1.13M) + x_2(0.49 - 0.89M) + Mx_4 + 12M$$

Množi se Z sa -1 da bi se problem sveo na maximizaciju:

arg max –Z = $x_1(- 0.38 - 1.13M) + x_2(-0.49 + 0.89M) - Mx_4 - 12M$

0.3x_1+0.14x_2 +x_3 =2.8

0.5x_1+0.46x_2 + x_5 =6

0.63x_1+0.43x_2 -x_4 +x_6 =6

$x_1 \geq 0$ $x_2 \geq 0$ $x_3 \geq 0$ $x_4 \geq 0$ $x_5 \geq 0$ $x_6 \geq 0$

Formirajmo simpleks tabelu

B	b_i	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_3	2.8	0.3	0.14	1	0	0	0
x_5	6	0.5	0.46	0	0	1	0
x_6	6	0.63	0.43	0	-1	0	1
M	12	1.13	0.89	0	-1	0	0
	0	-0.38	-0.49	0	0	0	0

x_1 ulazi u bazu zato sto M je tada najvece 1.13, a x_3 izlazi iz baze jer ima najmanju vrijednost.

B	b_i	x_1	x_2	x_4	x_5	x_6
x_1	28/3	1	7/15	0	0	0
x_5	4/3	0	17/75	0	1	0
x_6	3/25	0	17/125	-1	0	1
M	109/75	0	136/375	-1	0	0
	266/75	0	-469/1500	0	0	0

x_2 ulazi u bazu, a x_6 izlazi iz baze, pa nakon izvršenih transformacija imamo:

B	b_i	x_1	x_2	x_4	x_5
x_1	455/51	1	0	175/51	0
x_5	17/15	0	0	5/3	1
x_2	15/17	0	1	- 125/17	0
M	17/15	0	0	5/3	0
	3899/1020	0	0	-469/204	0

Nakon izvršenih transformacija imamo

B	b_i	x_1	x_2	x_4
x_1	112/17	1	0	0
x_4	17/25	0	0	1
x_2	190/17	0	1	0
M	0	0	0	0
	20601/3825	0	0	0

Nakon sto su svi elementi M<=0 i nakon što više nemamo elemenata za proračun, zaključujemo da je algoritam završen. Sve vještačke promjenjive su izašle iz baze pa imamo optimalno rješenje.

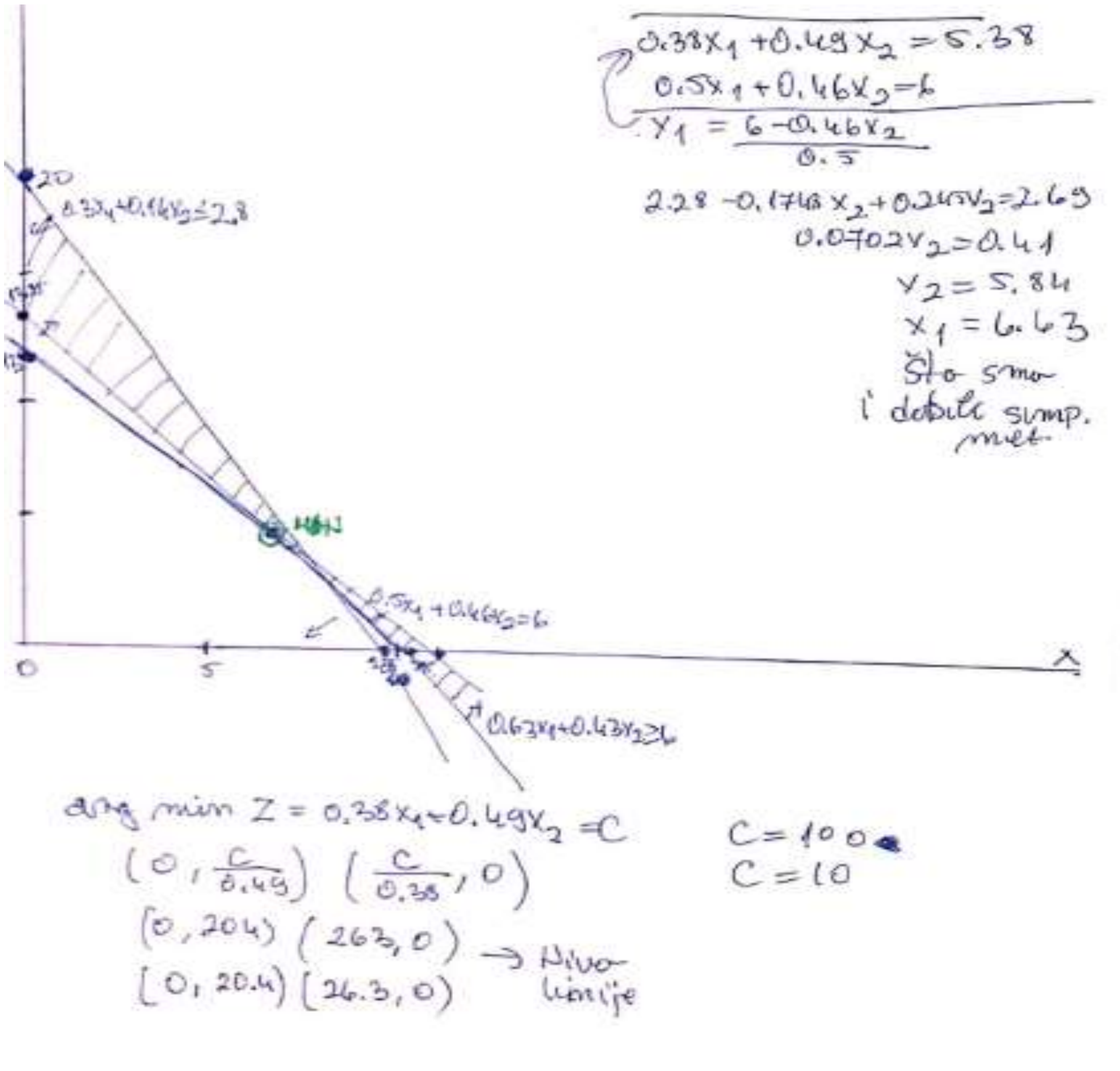
Optimalno rješenje je:

$$x_1 = 112/17 \approx 6.58$$

$$x_2 = 90/17 \approx 5.84$$

$$Z = 20601/3825 \approx 5.38$$

b. Grafički metod nakon što smo nacrtali prave i odredili dopustivi prostor, odredili smo i nas minimum tj. optimalno rjesenje i dobili da je to tacka (6.63, 5.84) što smo odredili i simpleks metodom.



Vrijednosti x1 i x2 se poklapaju sa onima dobijenim iz simplexa, tako da se i optimalna vrijednost poklapa

c) Unosom potrebnih vrijednosti u Matalab kod dobili smo identičan rezultat, kao i korištenjem simpleks metode i grafičke metode.

```
>>
>> A = [0.3, 0.14; -0.63, -0.43];
>> b = [2.8; -6];
>> f = [0.38; 0.49];
>> Aeq = [0.5, 0.46];
>> beq = [6];
>> lb = [0;0];
>> [x,fval] = linprog(f, A, b, Aeq, beq, lb)
Optimization terminated.

x =

    6.5882
    5.8824


fval =

    5.3859

>>
```

d.

arg min Z = $0.38x_1 + 0.49x_2$

p.o.

$0.3x_1+0.14x_2 <=1.5$

$0.5x_1+0.46x_2 =6$

$0.63x_1+0.43x_2 >=6$

$x_1 \geq 0 \; x_2 \geq 0$

Prošireni model:

arg min Z = $0.38x_1 + 0.49x_2 + Mx_5 + Mx_6$

p.o

$0.3x_1+0.14x_2 + x_3 = 2.8$

$0.5x_1+0.46x_2 + x_5 = 6$

$0.63x_1$+$0.43x_2$ -x_4 +x_6 =6

$x_1 \geq 0$ $x_2 \geq 0$ $x_3 \geq 0$ $x_4 \geq 0$ $x_5 \geq 0$ $x_6 \geq 0$

B	b_i	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_3	1.5	0.3	0.14	1	0	0	0
x_5	6	0.5	0.46	0	0	1	0
x_6	6	0.63	0.43	0	-1	0	1
M	12	1.13	0.89	0	-1	0	0
	0	-0.38	-0.49	0	0	0	0

U bazu ulazi x_1, a izlazi x_3

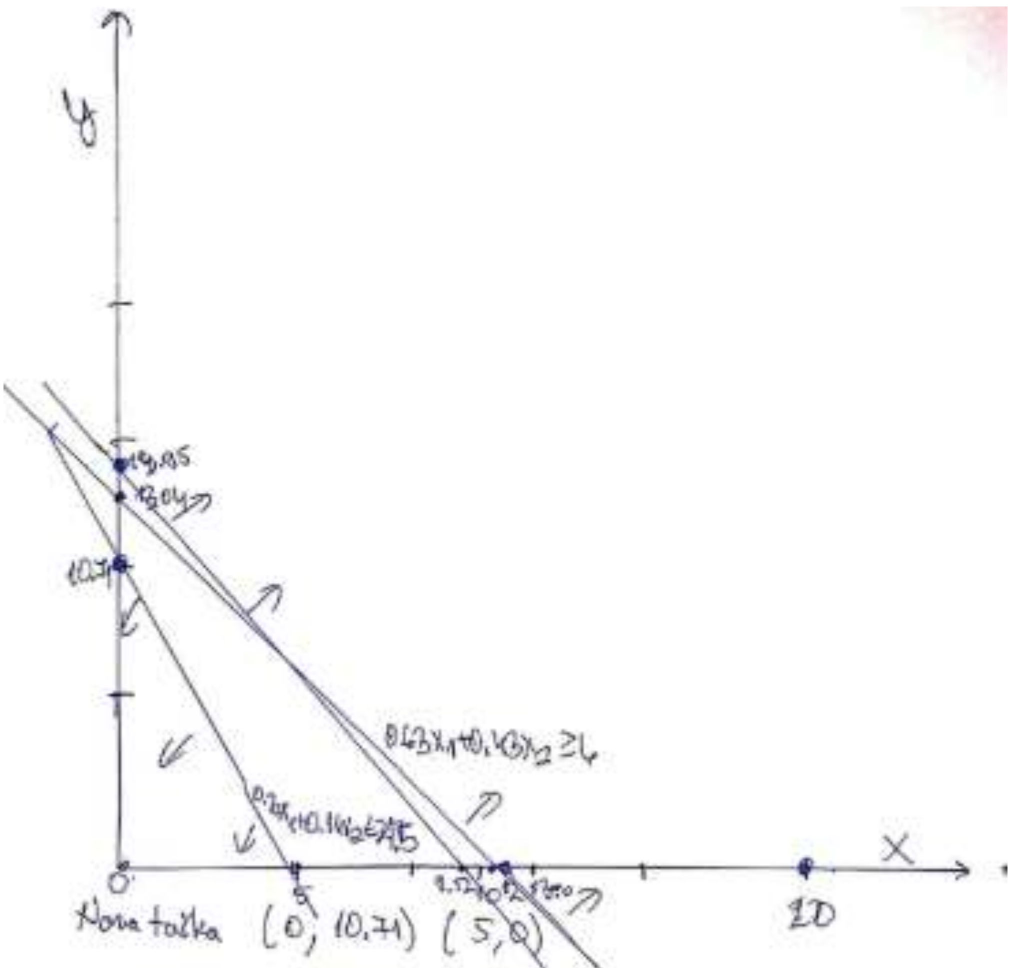
B	b_i	x_1	x_2	x_4	x_5	x_6
x_1	5	1	7/15	0	0	0
x_5	7/2	0	17/75	0	1	0
x_6	57/20	0	17/125	-1	0	1
M	127/20	0	136/375	-1	0	0
	19/10	0	-469/1500	0	0	0

x_2 ulazi, x_1 izlazi iz baze

B	b_i	x_1	x_2	x_4	x_5	x_6
x_2	75/7	15/7	1	0	0	0
x_5	15/14	-17/35	0	0	1	0
x_6	39/28	-51/75	0	-1	0	1
M	69/28	-136/175	0	-1	0	0
	21/4	67/100	0	0	0	0

Svi elementi c_{ij} su <=0 pa je simplex algoritam završen, međutim u bazi se nalazi vještačka promjenljiva x_6, to znači da su početna ograničenja bila kontradiktorna tj problem nije dopustiv.

e) graficki metod nakon sto uvrstimo x_1=0 i x_2=0 u jednačinama dobijemo tačke koje će imati sljedeći izgleda na brojnoj osi zajedno sa dopustivim oblastima.



Dopustivi prostor je prazan skup pa nema rješenja

Iz grafa vidimo da nema presjeka ograničenja, tako da nema dopustivog rješenja.

f) Isti zaključak mozemo donijeti i nakon pokretanja koda u Matlab komandnom prozoru gdje su rješenja prazan skup.

Command Window

```
>> A=[0.3 0.14; -0.63 -0.43];
>> b=[-1.5 6];
>> c=[0.38 0.49];
>> Aeq=[0.5 0.46];
>> beq=6

beq =

     6

>> lb=[ 0 0]

lb =

     0     0

>> [x,fval]=linprog(-c,A,b,Aeq,beq,lb)

No feasible solution found.

Linprog stopped because no point satisfies the constraints.


x =

     []


fval =

     []
```