UNIVERZITET U SARAJEVU

ELEKTROTEHNIČKI FAKULTET SARAJEVO

Zadaća 2

Student: Šejla Pljakić

Broj indeksa: 17751

Zadatak 1

Potrebno je transportovati određenu količinu robe iz 6 skladišta S_1, S_2, S_3, S_4, S_5 i S_6 u 3 prodavnice P_1, P_2 i P_3. Kapaciteti skladišta iznose 49, 42, 33, 49, 32 i 43 težinskih jedinica respektivno. Potrebe prodavnica iznose 37, 60 i 52 težinskih jedinica respektivno. Jedinične cijene transporta između pojedinih skladišta i prodavnica date su u sljedećoj tabeli:

	P_1	P_2	P_3
S_1	5	11	15
S_2	20	15	13
S_3	14	3	12
S_4	17	19	19
S_5	6	8	12
S_6	11	15	10

Vaš zadatak je da uradite sljedeće:

a. Pronađete dopustivi plan transporta primjenom metoda sjeverozapadnog ugla; **[0.2 poena]**
b. Pronađete dopustivi plan transporta primjenom metoda minimalnih jediničnih troškova; **[0.2 poena]**
c. Pronađete dopustivi plan transporta primjenom Vogelovog aproksimativnog metoda; **[0.3 poena]**
d. Pronađete optimalni plan transporta primjenom stepping-stone metoda na polazni dopustivi plan transporta dobijen Vogelovim aproksimativnim metodom; **[0.5 poena]**
e. Pronađete optimalni plan transporta primjenom MODI metoda na polazni dopustivi plan transporta dobijen metodom minimalnih jediničnih troškova; **[0.6 poena]**

Obavezno prodiskutirajte da li će biti neka od prodavnica čije potrebe neće biti zadovoljene, i ako hoće, u kolikom iznosu, kao i da li će u nekom skladištu ostati zaliha, i ako hoće, u kolikom iznosu.

a. Dopustivi plan transporta primjenom metoda sjeverozapadnog ugla

Budući da je ukupna ponuda veća od ukupne potražnje tj. 248 > 149, uvodimo fiktivnog potrošača P_4 koji na sebe „preuzima“ višak ponude u odnosu na potražnju.

	P_1	P_2	P_3	P_4	Kapacitet
S_1	5	11	15	0	49
S_2	20	15	13	0	42
S_3	14	3	12	0	33
S_4	17	19	19	0	49
S_5	6	8	12	0	32
S_6	11	15	10	0	43
Potrebe	37	60	52	99	

min{49,37}= 37

	P_1	P_2	P_3	P_4	Kapacitet
S_1	37 / 5	11	15	0	12
S_2	20	15	13	0	42
S_3	14	3	12	0	33
S_4	17	19	19	0	49
S_5	6	8	12	0	32
S_6	11	15	10	0	43
Potrebe	0	60	52	99	

min{12, 60}= 12

	P_1	P_2	P_3	P_4	Kapacitet
S_1	37 / 5	12 / 11	15	0	0
S_2	20	15	13	0	42
S_3	14	3	12	0	33
S_4	17	19	19	0	49
S_5	6	8	12	0	32
S_6	11	15	10	0	43
Potrebe	0	48	52	99	

min{42,48}= 42

	P_1	P_2	P_3	P_4	Kapacitet
S_1	37 / 5	12 / 11	15	0	0
S_2	20	42 / 15	13	0	0
S_3	14	3	12	0	33
S_4	17	19	19	0	49
S_5	6	8	12	0	32
S_6	11	15	10	0	43
Potrebe	0	6	52	99	

min{6,33}= 6

	P_1	P_2	P_3	P_4	Kapacitet
S_1	37 / 5	12 / 11	15	0	0
S_2	20	42 / 15	13	0	0
S_3	14	6 / 3	12	0	27
S_4	17	19	19	0	49
S_5	6	8	12	0	32
S_6	11	15	10	0	43
Potrebe	0	0	52	99	

min{52,27}= 27

	P_1	P_2	P_3	P_4	Kapacitet
S_1	37 / 5	12 / 11	15	0	0
S_2	20	42 / 15	13	0	0
S_3	14	6 / 3	27 / 12	0	0
S_4	17	19	19	0	49
S_5	6	8	12	0	32
S_6	11	15	10	0	43
Potrebe	0	0	25	99	

min{25,49}= 25

	P_1	P_2	P_3	P_4	Kapacitet
S_1	37 5	12 11	15	0	0
S_2	20	42 15	13	0	0
S_3	14	6 3	27 12	0	0
S_4	17	19	25 19	0	24
S_5	6	8	12	0	32
S_6	11	15	10	0	43
Potrebe	0	0	0	99	

min{99,24}= 24

	P_1	P_2	P_3	P_4	Kapacitet
S_1	37 5	12 11	15	0	0
S_2	20	42 15	13	0	0
S_3	14	6 3	27 12	0	0
S_4	17	19	25 19	24 0	0
S_5	6	8	12	0	32
S_6	11	15	10	0	43
Potrebe	0	0	0	75	

min{75,32}= 24

	P_1	P_2	P_3	P_4	Kapacitet
S_1	37 / 5	12 / 11	15	0	0
S_2	20	42 / 15	13	0	0
S_3	14	6 / 3	27 / 12	0	0
S_4	17	19	25 / 19	24 / 0	0
S_5	6	8	12	32 / 0	0
S_6	11	15	10	0	43
Potrebe	0	0	0	43	

min{43,43}=43

	P_1	P_2	P_3	P_4	Kapacitet
S_1	37 / 5	12 / 11	15	0	0
S_2	20	42 / 15	13	0	0
S_3	14	6 / 3	27 / 12	0	0
S_4	17	19	25 / 19	24 / 0	0
S_5	6	8	12	32 / 0	0
S_6	11	15	10	43 / 0	0
Potrebe	0	0	0	0	

Dobijamo početno bazno rješenje u kojem je
$x_{1,1} = 37$ $x_{1,2} = 12$ $x_{2,2} = 42$ $x_{3,2} = 6$ $x_{3,3} = 27$ $x_{4,3} = 25$ $x_{4,4} = 24$ $x_{5,4} = 32$ $x_{6,4} = 43$ dok su sve ostale vrijednosti $x_{i,j}$ nule. Troškovi transporta za ovakvo rješenje iznose
$Z = 37\cdot5 + 12\cdot11 + 42\cdot15 + 6\cdot3 + 27\cdot12 + 25\cdot19 + 24\cdot0 + 32\cdot0 + 43\cdot0 = 1764$

Potrebe svih prodavnica će biti zadovoljene, dok će u skladištima S_4, S_5 S_6 ostati zaliha i one iznose 24 ,32,43 težinskih jedinica respektivno.

b. Metoda minimalnih jediničnih troškova

	P_1	P_2	P_3	P_4	Kapacitet
S_1	5	11	15	0	49
S_2	20	15	13	0	42
S_3	14	3	12	0	33
S_4	17	19	19	0	49
S_5	6	8	12	0	32
S_6	11	15	10	0	43
Potrebe	37	60	52	99	

	P_1	P_2	P_3	P_4	Kapacitet
S_1	5	11	15	0	49
S_2	20	15	13	0	42
S_3	14	3	12	0	33
S_4	17	19	19	49 0	0
S_5	6	8	12	0	32
S_6	11	15	10	0	43
Potrebe	37	60	52	50	

	P_1	P_2	P_3	P_4	Kapacitet
S_1	5	11	15	0	49
S_2	20	15	13	42 / 0	0
S_3	14	3	12	0	33
S_4	17	19	19	49 / 0	0
S_5	6	8	12	0	32
S_6	11	15	10	0	43
Potrebe	37	60	52	8	

min{ 8, 43}=8

	P_1	P_2	P_3	P_4	Kapacitet
S_1	5	11	15	0	49
S_2	20	15	13	42 / 0	0
S_3	14	3	12	0	33
S_4	17	19	19	49 / 0	0
S_5	6	8	12	0	32
S_6	11	15	10	8 / 0	35
Potrebe	37	60	52	0	

min{33,60}=33

	P_1	P_2	P_3	P_4	Kapacitet
S_1	5	11	15	0	49
S_2	20	15	13	42 / 0	0
S_3	14	33 / 3	12	0	0
S_4	17	19	19	49 / 0	0
S_5	6	8	12	0	32
S_6	11	15	10	8 / 0	35
Potrebe	37	27	52	0	

min {37,49}=37

	P_1	P_2	P_3	P_4	Kapacitet
S_1	37 / 5	11	15	0	12
S_2	20	15	13	42 / 0	0
S_3	14	33 / 3	12	0	0
S_4	17	19	19	49 / 0	0
S_5	6	8	12	0	32
S_6	11	15	10	8 / 0	35
Potrebe	0	27	52	0	

min {27,32}=27

	P_1	P_2	P_3	P_4	Kapacitet
S_1	37 / 5	11	15	0	12
S_2	20	15	13	42 / 0	0
S_3	14	33 / 3	12	0	0
S_4	17	19	19	49 / 0	0
S_5	6	27 / 8	12	0	5
S_6	11	15	10	8 / 0	35
Potrebe	0	0	52	0	

min {52,35}=35

	P_1	P_2	P_3	P_4	Kapacitet
S_1	37 / 5	11	15	0	12
S_2	20	15	13	42 / 0	0
S_3	14	33 / 3	12	0	0
S_4	17	19	19	49 / 0	0
S_5	6	27 / 8	12	0	5
S_6	11	15	35 / 10	8 / 0	0
Potrebe	0	0	17	0	

min {17,5}=5

	P_1	P_2	P_3	P_4	Kapacitet
S_1	37 5	11	15	0	12
S_2	20	15	13	42 0	0
S_3	14	33 3	12	0	0
S_4	17	19	19	49 0	0
S_5	6	27 8	5 12	0	0
S_6	11	15	35 10	8 0	0
Potrebe	0	0	12	0	

min {17,5}=5

	P_1	P_2	P_3	P_4	Kapacitet
S_1	37 5	11	12 15	0	0
S_2	20	15	13	42 0	0
S_3	14	33 3	12	0	0
S_4	17	19	19	49 0	0
S_5	6	27 8	5 12	0	0
S_6	11	15	35 10	8 0	0
Potrebe	0	0	0	0	

Dobijamo početno bazno rješenje u kojem je

$x_{1,1} = 37$ $x_{1,3} = 12$ $x_{2,4} = 42$ $x_{3,2} = 33$ $x_{3,2} = 41$ $x_{4,4} = 49$ $x_{5,2} = 27$ $x_{5,3} = 5$ $x_{6,3} = 35$ $x_{6,4} = 8$ dok su sve ostale vrijednosti $x_{i,j}$ nule. Troškovi transporta za ovakvo rješenje iznose $Z = 37 \cdot 5 + 12 \cdot 15 + 42 \cdot 0 + 33 \cdot 3 + 49 \cdot 0 + 27 \cdot 8 + 55 \cdot 12 + 35 \cdot 10 + 8 \cdot 0 = 1090$

Potrebe svih prodavnica će biti zadovoljene, dok će u skladištima S_2, S_4, S_6 ostati zaliha i one iznose 42,49,8 težinskih jedinica respektivno (sva roba iz skladišta S_6 će ostati u njemu).

c) Vogelov aproksimativni metod

Žaljenje razlika 2 najmanja elementa

Početna tabela

	P_1	P_2	P_3	P_4	Kapacitet
S_1	5	11	15	0	49
S_2	20	15	13	0	42
S_3	14	3	12	0	33
S_4	17	19	19	0	49
S_5	6	8	12	0	32
S_6	11	15	10	0	43
Potrebe	37	60	52	99	

Iteracija 1

	P_1	P_2	P_3	P_4	Kapacitet	Žaljenje
S_1	5	11	15	0	49	5
S_2	20	15	13	0	42	13
S_3	14	3	12	0	33	3
S_4	17	19	19	0	49	17
S_5	6	8	12	0	32	6
S_6	11	15	10	0	43	10
Potrebe	37	60	52	99		
Žaljenje	1	5	2	0		

Maksimalno žaljenje je u redu S_4.

Minimalna vrijednost $c_{i,j}$ u tom redu je $c_{4,4} = 0$.

min{99,49}=49

Iteracija 2

	P_1	P_2	P_3	P_4	Kapacitet	Žaljenje
S_1	5	11	15	0	49	5
S_2	20	15	13	0	42	13

S_3	14	3	12	0	33	3
S_4	17	19	19	49 0	0	17
S_5	6	8	12	0	32	6
S_6	11	15	10	0	43	10
Potrebe	37	60	52	50		
Žaljenje	1	5	2	0		

Maksimalno žaljenje je u redu S_2
Minimalna vrijednost $c_{i,j}$ u tom redu je $c_{2,4} = 0$.

min{50,42}=42

Iteracija 3

	P_1	P_2	P_3	P_4	Kapacitet	Žaljenje
S_1	5	11	15	0	49	5
S_2	20	15	13	42 0	0	13
S_3	14	3	12	0	33	3
S_4	17	19	19	49 0	0	17
S_5	6	8	12	0	32	6
S_6	11	15	10	0	43	10
Potrebe	37	60	52	8		
Žaljenje	1	5	2	0		

Maksimalno žaljenje je u redu S_6
Minimalna vrijednost $c_{i,j}$ u tom redu je $c_{6,4} = 0$.

min{8,43}=8

Iteracija 4

	P_1	P_2	P_3	P_4	Kapacitet	Žaljenje
S_1	5	11	15	0	49	6
S_2	20	15	13	42 0	0	13
S_3	14	3	12	0	33	9
S_4	17	19	19	49 0	0	17
S_5	6	8	12	0	32	2
S_6	11	15	10	8 0	35	10
Potrebe	37	60	52	0		
Žaljenje	1	5	0	0		

Maksimalno žaljenje je u redu S_6
Minimalna vrijednost $c_{i,j}$ u tom redu je $c_{6,3}$ = 10.

min{52,35}=35

Iteracija 5

	P_1	P_2	P_3	P_4	Kapacitet	Žaljenje
S_1	5	11	15	0	49	6
S_2	20	15	13	42 0	0	13
S_3	14	3	12	0	33	9
S_4	17	19	19	49 0	0	17
S_5	6	8	12	0	32	2
S_6	11	15	35 10	8 0	0	10
Potrebe	37	60	17	0		
Žaljenje	1	5	0	0		

Maksimalno žaljenje je u redu S_3
Minimalna vrijednost $c_{i,j}$ u tom redu je $c_{3,2}$ = 3.

min{52,35}=35

Iteracija 6

	P_1	P_2	P_3	P_4	Kapacitet	Žaljenje
S_1	5	11	15	0	49	6
S_2	20	15	13	42 0	0	13
S_3	14	33 3	12	0	0	9
S_4	17	19	19	49 0	0	17
S_5	6	8	12	0	32	2
S_6	11	15	35 10	8 0	0	10
Potrebe	37	27	17	0		
Žaljenje	1	3	3	0		

Maksimalno žaljenje je u redu S_1
Minimalna vrijednost $c_{i,j}$ u tom redu je $c_{1,1}$= 5.

min{37,49}=37

Iteracija 7

	P_1	P_2	P_3	P_4	Kapacitet	Žaljenje
S_1	37 5	11	15	0	12	4
S_2	20	15	13	42 0	0	13
S_3	14	33 3	12	0	0	9
S_4	17	19	19	49 0	0	17
S_5	6	8	12	0	32	4
S_6	11	15	35 10	8 0	0	10
Potrebe	0	27	17	0		
Žaljenje	1	3	3	0		

Maksimalno žaljenje je u redu S_1 i S_5 , a to je 4, posto je najmanja vrijednost u redu S_5, zato ću izabrati S_5
Minimalna vrijednost $c_{i,j}$ u tom redu je $c_{5,2}$= 8.

min { 27,32}=27

Iteracija 8

	P_1	P_2	P_3	P_4	Kapacitet	Žaljenje
S_1	37 / 5	11	15	0	12	0
S_2	20	15	13	42 / 0	0	13
S_3	14	33 / 3	12	0	0	9
S_4	17	19	19	49 / 0	0	17
S_5	6	27 / 8	12	0	5	0
S_6	11	15	35 / 10	8 / 0	0	10
Potrebe	0	0	17	0		
Žaljenje	1	3	3	0		

Sada imamo samo jednu neoznacenu kolonu pa zaljenje za redove postaje 0 jer nemamo sta zaliti.

Maksimalno žaljenje je u koloni P_3 , a to je 3.
Minimalna vrijednost $c_{i,j}$ u tokoloni je $c_{5,3}$= 12.

min { 5,17}=5

Iteracija 9

	P_1	P_2	P_3	P_4	Kapacitet	Žaljenje
S_1	37 / 5	11	15	0	12	0
S_2	20	15	13	42 / 0	0	13
S_3	14	33 / 3	12	0	0	9
S_4	17	19	19	49 / 0	0	17
S_5	6	27 / 8	5 / 12	0	0	0
S_6	11	15	35 / 10	8 / 0	0	10
Potrebe	0	0	12	0		
Žaljenje	1	3	3	0		

Maksimalno žaljenje je u koloni P_3 , a to je 3.
Minimalna vrijednost $c_{i,j}$ u tokoloni je $c_{5,3}$= 15.

min { 12,12}=12

Iteracija 10

	P_1	P_2	P_3	P_4	Kapacitet	Žaljenje
S_1	37 / 5	11	12 / 15	0	0	0
S_2	20	15	13	42 / 0	0	13
S_3	14	33 / 3	12	0	0	9
S_4	17	19	19	49 / 0	0	17
S_5	6	27 / 8	5 / 12	0	0	0
S_6	11	15	35 / 10	8 / 0	0	10
Potrebe	0	0	0	0		
Žaljenje	1	3	0	0		

Dosli smo do kraja algoritma.

	P_1	P_2	P_3	P_4	Kapacitet
S_1	37 / 5	11	12 / 15	0	0
S_2	20	15	13	42 / 0	0
S_3	14	33 / 3	12	0	0
S_4	17	19	19	49 / 0	0
S_5	6	27 / 8	5 / 12	0	0
S_6	11	15	35 / 10	8 / 0	0

Dobijamo početno bazno rješenje u kojem je

$x_{1,1} = 37$ $x_{1,3} = 12$ $x_{2,4} = 42$ $x_{3,2} = 33$ $x_{4,4} = 49$ $x_{5,2} = 27$ $x_{5,3} = 5$ $x_{6,3} = 35$ $x_{6,4} = 8$

dok su sve ostale vrijednosti $x_{i,j}$ nule. Troškovi transporta za ovakvo rješenje iznose

$Z = 37 \cdot 5 + 12 \cdot 15 + 42 \cdot 0 + 33 \cdot 3 + 49 \cdot 0 + 27 \cdot 8 + 5 \cdot 12 + 35 \cdot 10 + 8 \cdot 0 = 1090$

Potrebe svih prodavnica će biti zadovoljene, dok će u skladištima S_2 S_4 i S_6 ostati zaliha i one iznose 42, 49 i 8 težinskih jedinica respektivno (sva roba iz S_2 S_4 i S_6 će ostati u njima).

Rješenje je nedegenerirano jer je $m + n – 1 = 6 + 4 – 1 = 9 = 9$ koliko mi imamo polja.

d)Primjena stepping-stone metoda na polazni dopustivi plan transporta dobijen Vogelovim aproksimativnim metodom;

It 1

	P_1	P_2	P_3	P_4	Kapacitet
S_1	37 5	11	12 15	0	0
S_2	20	15	13	42 0	0
S_3	14	33 3	12	0	0
S_4	17	19	19	49 0	0
S_5	6	27 8	5 12	0	0
S_6	11	15	35 10	8 0	0

Potrebno je pronaći koeficijente $d_{1,2}$, $d_{1,4}$, $d_{2,1}$, $d_{2,2}$, $d_{2,3}$, $d_{3,1}$, $d_{3,3}$ $d_{3,4}$, $d_{4,1}$, $d_{4,2}$, $d_{4,3}$, $d_{5,1}$, $d_{5,4}$, $d_{6,1}$, $d_{6,2}$..

$d_{1,2}= c_{1,2} – c_{1,3} + c_{5,3} - c_{5,2}= 11-15+12-8= 0$

$d_{1,4}= c_{1,4} – c_{1,3} + c_{6,3} - c_{6,4}= 0-15+10-0= -5$

$d_{2,1}= c_{2,1} – c_{2,4} + c_{6,4} - c_{6,3}+c_{1,3} – c_{1,1}= 20-0+0-10+15-5=20$

$d_{2,2}= c_{2,2} – c_{2,4} + c_{6,4} - c_{6,3}+c_{5,3} – c_{5,2}=15-0+0-10+12-8=9$

$d_{2,3}= c_{2,3}– c_{2,4} + c_{6,4} - c_{6,3}=13-0+0-10=3$

$d_{3,1}= c_{3,1}– c_{3,2} + c_{5,2} - c_{5,3} +c_{1,3}– c_{1,1} =14-3+8-12+15-5=17$

$d_{3,3}= c_{3,3}– c_{3,2} + c_{5,2} - c_{5,3} =12-3+8-12=5$

$d_{3,4}= c_{3,4}– c_{3,2} + c_{5,2} - c_{5,3} +c_{6,3}– c_{6,4} =0-3+8-12+10-0=3$

$d_{4,1}= c_{4,1} – c_{4,4} + c_{6,4} - c_{6,3}+c_{1,3} – c_{1,1}=17-0+0-10+15-5=17$

$d_{4,2}= c_{4,2} – c_{4,4} + c_{6,4} - c_{6,3}+c_{5,3} – c_{5,2}=19-0+0-10+12-8=13$

$d_{4,3}= c_{4,3} – c_{4,4} + c_{6,4} - c_{6,3}= 19-0+0-10=9$

$d_{5,1}= c_{5,1} – c_{5,3} + c_{1,3} - c_{1,1}= 6-12+15-5=4$

$d_{5,4}= c_{5,4} – c_{5,3} + c_{6,3} - c_{6,4}=0-12+10-0= -2$

$d_{6,1}= c_{6,1} – c_{6,3} + c_{1,3} - c_{1,1}=11-10+15-5=11$

$d_{6,2}= c_{6,2}– c_{6,3} + c_{5,3} - c_{5,2}=15-10+12-8=9$

Najnegativniji element je $d_{1,4}$=-5 pa ciklus ide od $x_{1,4} – x_{1,3} - x_{6,3} - x_{6,4}$

t_{max}= min { 12,8}= 8 pa ćemo napraviti preraspodjelu sa t_{max} i povecati/smanjiti nove vrijednosti transporta.

$x_{1,4}$=8 $x_{1,3}$= 4 $x_{6,3}$=43 $x_{6,4}$=0

Pa imamo sljedeću tabelu

It 2

	P_1	P_2	P_3	P_4	Kapacitet
S_1	37 / 5	11	4 / 15	8 / 0	0
S_2	20	15	13	42 / 0	0
S_3	14	33 / 3	12	0	0
S_4	17	19	19	49 / 0	0
S_5	6	27 / 8	5 / 12	0	0
S_6	11	15	43 / 10	0	0

Ponovo računamo sljedeće koeficijente $d_{1,2}$, $d_{2,1}$, $d_{2,2}$, $d_{2,3}$, $d_{3,1}$, $d_{3,3}$ $d_{3,4}$, $d_{4,1}$, $d_{4,2}$, $d_{4,3}$, $d_{5,1}$, $d_{5,4}$, $d_{6,1}$, $d_{6,2}$., $d_{6,4}$

$d_{1,2}= c_{1,2} – c_{1,3} + c_{5,3} - c_{5,2}$= 11-15+12-8= 0

$d_{2,1}= c_{2,1} – c_{2,4} + c_{1,4} – c_{1,1}$= 20-0+0-5=15

$d_{2,2}= c_{2,2} – c_{2,4} + c_{1,4} - c_{1,3} + c_{5,3} – c_{5,2}$=15-0+0-15+12-8=4

$d_{2,3}= c_{2,3} – c_{2,4} + c_{1,4} - c_{1,3}$=13-0+0-15= -2

$d_{3,1}= c_{3,1} – c_{3,2} + c_{5,2} - c_{5,3} + c_{1,3} – c_{1,1}$ =14-3+8-12+15-5=17

$d_{3,3}= c_{3,3} – c_{3,2} + c_{5,2} - c_{5,3}$ =12-3+8-12=5

$d_{3,4}= c_{3,4} – c_{3,2} + c_{5,2} - c_{5,3} + c_{1,3} – c_{1,4}$ =0-3+8-12+15-0=8

$d_{4,1}= c_{4,1} – c_{4,4} + c_{1,4} – c_{1,1}$=17-0+0-5=12

$d_{4,2}= c_{4,2} – c_{4,4} + c_{1,4} - c_{1,3} + c_{5,3} – c_{5,2}$=19-0+0-15+12-8=8

$d_{4,3}= c_{4,3} – c_{4,4} + c_{1,4} - c_{1,3}$= 19-0+0-15=4

$d_{5,1}= c_{5,1} – c_{5,3} + c_{1,3} - c_{1,1}$= 6-12+15-5=4

$d_{5,4}= c_{5,4} – c_{5,3} + c_{1,3} - c_{1,4}$=0-12+15-0= 3

$d_{6,1}= c_{6,1} – c_{6,3} + c_{1,3} - c_{1,1}$=11-10+15-5=11

$d_{6,2}= c_{6,2} – c_{6,3} + c_{5,3} - c_{5,2}$=15-10+12-8=9

$d_{6,4}= c_{6,4} – c_{6,3} + c_{1,3} - c_{1,4}$=0-10+15-0=5

Najnegativni je $d_{2,3}$= -2 pa ćemo ponovo izvršiti preraspodjelu na osnovu ciklusa $x_{2,3} – x_{2,4} - x_{1,4} - x_{1,3}$

t_{max}= min {42,4}=4 pa ce vrijednosti biti $x_{2,3}$= 4 $x_{2,4}$ = 38 $x_{1,4}$=12 $x_{1,3}$=0

Tabela dobiva sljedeći oblik

It 3

	P_1	P_2	P_3	P_4	Kapacitet
S_1	37 5	11	15	12 0	0
S_2	20	15	4 13	38 0	0
S_3	14	33 3	12	0	0
S_4	17	19	19	49 0	0
S_5	6	27 8	5 12	0	0
S_6	11	15	43 10	0	0

Ponovo računamo sljedeće koeficijente $d_{1,2}$, $d_{1,3}$, $d_{2,1}$, $d_{2,2}$, $d_{3,1}$, $d_{3,3}$ $d_{3,4}$, $d_{4,1}$, $d_{4,2}$, $d_{4,3}$, $d_{5,1}$, $d_{5,4}$, $d_{6,1}$, $d_{6,2}$., $d_{6,4}$

$d_{1,2}= c_{1,2} – c_{1,4} + c_{2,4} – c_{2,3} +c_{5,3} – c_{5,2}=11-0+0-13+12-8=2$

$d_{1,3}= c_{1,2} – c_{1,4} + c_{2,4} – c_{2,3} =15-0+0-13=2$

$d_{2,1}= c_{2,1} – c_{2,4} + c_{1,4} – c_{1,1}= 20-0+0-5=15$

$d_{2,2}= c_{2,2} – c_{2,3} + c_{5,3} – c_{5,2}=15-13+12-8=6$

$d_{3,1}= c_{3,1}– c_{3,2} + c_{5,2} -c_{5,3} +c_{2,3}– c_{2,4} +c_{1,4} - c_{1,1} =14-3+8-12+13-0+0-5=15$

$d_{3,3}= c_{3,3}– c_{3,2} + c_{5,2} -c_{5,3} =12-3+8-12=5$

$d_{3,4}= c_{3,4}– c_{3,2} + c_{5,2} -c_{5,3} +c_{2,3}– c_{2,4} =0-3+8-12+13-0=6$

$d_{4,1}= c_{4,1} – c_{4,4} + c_{1,4} – c_{1,1}=17-0+0-5=12$

$d_{4,2}= c_{4,2} – c_{4,4} + c_{2,4} -c_{2,3}+c_{5,3} – c_{5,2}=19-0+0-13+12-8=10$

$d_{4,3}= c_{4,3} – c_{4,4} + c_{2,4} -c_{2,3}= 19-0+0-13=6$

$d_{5,1}= c_{5,1} – c_{5,3} + c_{2,3} – c_{2,4} + c_{1,4} -c_{1,1}= 6-12+13-0+0-5=2$

$d_{5,4}= c_{5,4} – c_{5,3} + c_{2,3} – c_{2,4} =0-12+13-0= 1$

$d_{6,1}= c_{6,1} – c_{6,3} + c_{2,3} – c_{2,4} + c_{1,4} -c_{1,1}=11-10+13-0+0-5=9$

$d_{6,2}= c_{6,2}– c_{6,3} + c_{5,3} -c_{5,2}=15-10+12-8=9$

$d_{6,4}= c_{6,4}– c_{6,3} + c_{2,3} -c_{2,4}=0-10+13-0=3$

Budući da je svako $d_{i,j} > 0$, tekuće rješenje je ujedno i optimalno.

$Z= Z = 37·5 + 12·0 + 4·13 +38·0 + 33·3 + 49·0 + 27·8 + 5·12+43·10 = 1042$

Dobijamo početno bazno rješenje u kojem je

$x_{1,1} = 37$ $x_{1,4} = 12$ $x_{2,3} = 4$ $x_{2,4} = 38$ $x_{3,2} = 33$ $x_{4,4} = 49$ $x_{5,2} = 27$ $x_{5,3} = 5$

$x_{6,3} = 43$ dok su sve ostale vrijednosti $x_{i,j}$ nule.

Potrebe svih prodavnica će biti zadovoljene, dok će u skladištima S_1, S_2, i S_4 ostati zaliha i one iznose 12 38 i 49 težinskih jedinica respektivno (sva roba iz skladišta S_1, S_2, i S_4 će ostati u njima).

e) Primjena MODI metoda na polazni dopustivi plan transporta dobijen metodom minimalnih jediničnih troškova

	P_1	P_2	P_3	P_4
S_1	37 5	11	12 15	0
S_2	20	15	13	42 0
S_3	14	33 3	12	0
S_4	17	19	19	49 0
S_5	6	27 8	5 12	0
S_6	11	15	35 10	8 0

Sada dodajemo novu kolonu i novi red u_i i v_j respektivno.

	P_1	P_2	P_3	P_4	u_i
S_1	37 5	11	12 15	0	
S_2	20	15	13	42 0	
S_3	14	33 3	12	0	
S_4	17	19	19	49 0	
S_5	6	27 8	5 12	0	
S_6	11	15	35 10	8 0	
v_j					

Osnovne dualne promjenljive zadovoljavaju sljedeći sistem jednačina:

$u_1 + v_1 = 5$ $u_1 + v_3 = 15$ $u_2 + v_4 = 0$ $u_3 + v_2 = 3$ $u_4 + v_4 = 0$ $u_5 + v_2 = 8$ $u_5 + v_3 = 12$

$u_6 + v_3 = 10$ $u_6 + v_4 = 0$

Dobijene vrijednosti uvrštavamo u tabelu i imamo:
Postavljanjem $v_3 = 0$ dobijamo:

$u_1 = 15\text{-}v_3=15$ $u_6=10\text{-}v_3=10$ $u_5=12\text{-}v_3=12$ $u_2= \text{-}v_4= 10$ $u_3= 3\text{-}v_2= 3\text{-} (\text{-}4)=7$

$u_4= \text{-}v_4= 10$

$v_1= \text{-}10$ $v_4=\text{-}10$ $v_3=0$ $v_2=8\text{-} u_5= 8\text{-}12= \text{-}4$

Nakon uvrštavanja imamo:

	P_1	P_2	P_3	P_4	u_i
S_1	37 5	11	12 15	0	15
S_2	20	15	13	42 0	10
S_3	14	33 3	12	0	7
S_4	17	19	19	49 0	10
S_5	6	27 8	5 12	0	12
S_6	11	15	35 10	8 0	10
v_j	-10	-4	0	-10	

Sada računamo $d_{i,j}$ po formuli: $d_{i,j} = c_{i,j} – u_i - v_j$

$d_{1,2}= c_{1,2} - u_1 – v_2 = 11-15+4=0$

$d_{1,4}= c_{1,4} - u_1 – v_4 = 0-15+10= -5$

$d_{2,1}= c_{2,1} - u_2 – v_1 = 20-10+10=20$

$d_{2,2}= c_{2,2} - u_2 – v_2 =15-10+4=9$

$d_{2,3}= c_{2,3} - u_2 – v_3 = 13-10-0 = 3$

$d_{3,1}= c_{3,1} – u_3 – v_1 = 14-7+10=17$

$d_{3,3}= c_{3,3} – u_3 – v_3 = 12-7-0=5$

$d_{3,4}= c_{3,4} – u_3 – v_4 = 0-7+10 = 3$

$d_{4,1}= c_{4,1} – u_4 – v_1 = 17-10+10 = 17$

$d_{4,2}= c_{4,2} – u_4 – v_2 = 19-10+4 = 13$

$d_{4,3}= c_{4,3} – u_4 – v_3 = 19-10+0 = 9$

$d_{5,1}= c_{5,1} – u_5 – v_1 = 6-12+10 = 4$

$d_{5,4}= c_{5,4} – u_5 – v_4 = 0-12+10 = -2$

$d_{6,1}= c_{6,1} – u_6 – v_1 = 11-10+10 = 11$

$d_{6,2}= c_{6,2} – u_6 – v_2 = 15-10+4 = 9$

Najnegativniji relativni koeficijent troškova je $d_{1,4}$. Polju $x_{1,4}$ na koje ćemo preraspodijeliti transport odgovara ciklus: $x_{1,4} – x_{1,3} – x_{6,3} – x_{6,4} – x_{1,4}$ Ovdje se umanjuju polja $x_{1,3}$, i $x_{6,4}$ tako da je:

t_{max} = min{12,8} = 8

Nove vrijednosti transporta su $x_{1,4} = 8$, $x_{1,3}$=4 $x_{6,3}$ =43 $x_{6,4}$ =0. Također ćemo izmijeniti vrijednosti u i v:

$u_1 + v_1 = 5$ $u_1 + v_3 = 15$ $u_1 + v_4 = 0$ $u_2 + v_4 = 0$ $u_3 + v_2 =3$ $u_4 + v_4 = 0$

$u_5 + v_2 = 8$ $u_5 + v_3 = 12$ $u_6 + v_3 = 10$

v_3=0 pa će vrijednosti promjenjivih biti sljedeće:

u_5= 12 u_6= 10 v_2= 8-12= -4 u_3= 3-v_2= 3+4=7 u_1=15 v_4=-15 v_1=-10 u_2=15 u_4=15

Ovim se dobija rješenje prikazano u sljedećoj tabeli:

	P_1	P_2	P_3	P_4	u_i
S_1	37 5	11	4 15	8 0	15
S_2	20	15	13	42 0	15
S_3	14	33 3	12	0	7
S_4	17	19	19	49 0	15
S_5	6	27 8	5 12	0	12
S_6	11	15	43 10	0	10
v_j	-10	-4	0	-15	

$d_{1,2}= c_{1,2} - u_1 – v_2$ = 11-15+4=0

$d_{2,1}= c_{2,1} - u_2 – v_1$ = 20-15+10=15

$d_{2,2}= c_{2,2} - u_2 – v_2$ =15-15+4=4

$d_{2,3}= c_{2,3} - u_2 – v_3$ = 13-15-0 = -2

$d_{3,1}= c_{3,1} – u_3 – v_1$ = 14-7+10=17

$d_{3,3}= c_{3,3} – u_3 – v_3$ = 12-7-0=5

$d_{3,4}= c_{3,4} – u_3 – v_4$ = 0-7+15 = 8

$d_{4,1}= c_{4,1} – u_4 – v_1$ = 17-15+10 = 12

$d_{4,2}= c_{4,2} – u_4 – v_2$ = 19-15+4 = 8

$d_{4,3}= c_{4,3} – u_4 – v_3 = 19-15+0 = 4$

$d_{5,1}= c_{5,1} – u_5 – v_1 = 6-12+10 = 4$

$d_{5,4}= c_{5,4} – u_5 – v_4 = 0-12+15 = 3$

$d_{6,1}= c_{6,1} – u_6 – v_1 = 11-10+10 = 11$

$d_{6,2}= c_{6,2} – u_6 – v_2 = 15-10+4 = 9$

$d_{6,4}= c_{6,4} – u_6 – v_4 = 0-10+15 = 5$

Najnegativniji relativni koeficijent troškova je $d_{2,3}$. Polju $x_{2,3}$ na koje ćemo preraspodijeliti transport odgovara ciklus: $x_{2,3} – x_{2,4} – x_{1,4} – x_{1,3} – x_{2,3}$ Ovdje se umanjuju polja $x_{2,4}$, i $x_{1,3}$ tako da je:

$t_{max} = \min\{42,4\} =4$

Nove vrijednosti transporta su $x_{2,3}=4$, $x_{2,4} =38$ $x_{1,4} =12$ $x_{1,3} =0$. Također ćemo izmijeniti vrijednosti u i v:

$u_1 + v_1 = 5$ $u_1 + v_4 = 0$ $u_2 + v_3 = 13$ $u_2 + v_4 = 0$ $\mathbf{u_3 + v_2 =3}$ $u_4 + v_4 = 0$

$u_5 + v_2 = 8$ $u_5 + v_3 = 12$ $u_6 + v_3 = 10$

$v_3=0$ pa će vrijednosti promjenjivih biti sljedeće:

$u_5= 12$ $u_6= 10$ $v_2= 8-12= -4$ $u_3= 3-v_2= 3+4=7$ $u_2=13$ $u_1=13$ $v_4=-13$ $v_1=-8$

$u_4=13$

	P_1	P_2	P_3	P_4	u_i
S_1	37 5	11	15	12 0	13
S_2	20	15	4 13	38 0	13
S_3	14	33 3	12	0	7
S_4	17	19	19	49 0	13
S_5	6	27 8	5 12	0	12
S_6	11	15	43 10	0	10
v_j	-8	-4	0	-13	

$d_{1,2} = c_{1,2} - u_1 - v_2 = 11-13+4=2$

$d_{1,3} = c_{1,3} - u_1 - v_3 = 15-13+0=2$

$d_{2,1} = c_{2,1} - u_2 - v_1 = 20-13+8=15$

$d_{2,2} = c_{2,2} - u_2 - v_2 =15-13+4=6$

$d_{3,1} = c_{3,1} - u_3 - v_1 = 14-7+8=15$

$d_{3,3} = c_{3,3} - u_3 - v_3 = 12-7-0=5$

$d_{3,4} = c_{3,4} - u_3 - v_4 = 0-7+13 = 6$

$d_{4,1} = c_{4,1} - u_4 - v_1 = 17-13+8 =12$

$d_{4,2} = c_{4,2} - u_4 - v_2 = 19-13+4 = 10$

$d_{4,3} = c_{4,3} - u_4 - v_3 = 19-13+0 = 6$

$d_{5,1} = c_{5,1} - u_5 - v_1 = 6-12+8 = 2$

$d_{5,4} = c_{5,4} - u_5 - v_4 = 0-12+13 = 1$

$d_{6,1} = c_{6,1} - u_6 - v_1 = 11-10+8 = 9$

$d_{6,2} = c_{6,2} - u_6 - v_2 = 15-10+4 = 9$

$d_{6,4} = c_{6,4} - u_6 - v_4 = 0-10+13 = 3$

Budući da je svako $d_{i,j} > 0$, tekuće rješenje je ujedno i optimalno, koraci su isti kao i pod c) samo sto je računanje $d_{i,j}$ bilo lakse

$Z = 37\cdot5 + 12\cdot0 + 4\cdot13 +38\cdot0 + 33\cdot3 + 49\cdot0 + 27\cdot8 + 5\cdot12+43\cdot10 = 1042$

Dobijamo početno bazno rješenje u kojem je

$x_{1,1} = 37$ $x_{1,4} = 12$ $x_{2,3} = 4$ $x_{2,4} = 38$ $x_{3,2} = 33$ $x_{4,4} = 49$ $x_{5,2} = 27$ $x_{5,3} = 5$

$x_{6,3} = 43$ dok su sve ostale vrijednosti $x_{i,j}$ nule.

Potrebe svih prodavnica će biti zadovoljene, dok će u skladištima S_1, S_2, i S_4 ostati zaliha i one iznose 12 38 i 49 težinskih jedinica respektivno (sva roba iz skladišta S_1, S_2, i S_4 će ostati u njima).

Zadatak 2 [1.8 poena]

Neka fabrika je nabavila 5 različitih mašina M_1, M_2, M_3, M_4 i M_5 za proizvodnju pojedinih dijelova jednog proizvoda. Pošto jednom mašinom može da jednovremeno rukuje samo jedan radnik, potrebno je zaposliti 5 radnika. Od prijavljenih 5 radnika R_1, R_2, R_3, R_4 i R_5, svi su zadovoljili opće uvjete konkursa, pa je izvršena provjera njihove stručne sposobnosti. Za proizvodnju svakog od dijelova proizvoda na pojedinačnim mašinama, radnicima je bilo potrebno vrijeme prikazano u sljedećoj tabeli (vrijeme je izraženo u minutama):

	M_1	M_2	M_3	M_4	M_5
R_1	30	8	29	29	21
R_2	10	20	34	6	33
R_3	8	10	12	34	30
R_4	8	12	9	18	32
R_5	27	6	11	27	32

Vaš zadatak je da primjenom mađarskog algoritma raspoređivanja pronađete optimalni raspored radnika na mašine koji će garantirati minimalni ukupni utrošak vremena na mašinama potreban za proizvodnju jednog proizvoda. Rješenje nađite na više različitih načina:

a. Redukcijom matrice **C** prvo po redovima, a zatim po kolonama prije ulaska u glavni ciklus algoritma; **[0.3 poena]**
b. Redukcijom matrice **C** prvo po kolonama, a zatim po redovima prije ulaska u glavni ciklus algoritma; **[0.3 poena]**
c. Redukcijom matrice **C** samo po redovima (bez redukcije po kolonama) prije ulaska u glavni ciklus algoritma (ovo će kasnije tražiti više iteracija nego što je uobičajeno); **[0.4 poena]**
d. Varijantom mađarskog algoritma prilagođenom za izvedbu za računaru. Ukoliko pri rješavanju na način a) niste dobili optimalno rješenje odmah nakon redukcije, obavite ovaj dio zadatka tako što ćete prvo odrediti dualne promjenljive u_i a zatim v_j (pandan redukcije prvo po redovima). U suprotnom, ukoliko pri rješavanju na način b) niste dobili optimalno rješenje odmah nakon redukcije, obavite ovaj dio zadatka tako što ćete prvo odrediti dualne promjenljive v_j a zatim u_i (pandan redukcije prvo po kolonama). Ukoliko ste bili te sreće da ste dobili problem kod kojeg i pod a) i pod b) dobijate optimalno rješenje odmah nakon obavljenih redukcija, obavite ovaj dio zadatka tako što ćete prvo odrediti dualne promjenjive u_i, a zatim uzeti da su sve dualne promjenljive v_j jednake nuli (pandan redukcije samo po redovima). **[0.8 poena]**

a. Početna matrica

	M_1	M_2	M_3	M_4	M_5
R_1	30	8	29	29	21
R_2	10	20	34	6	33
R_3	8	10	12	34	30
R_4	8	12	9	18	32
R_5	27	6	11	27	32

Najmanji elementi redova R_1-R_5 su respektivno 8,6,8,8,6 tako da nakon ovog koraka (redukcija po redovima) dobijamo sljedeću tablicu:

	M_1	M_2	M_3	M_4	M_5
R_1	22	0	21	21	13
R_2	4	14	28	0	27
R_3	0	2	4	26	22
R_4	0	4	1	10	24
R_5	21	0	5	21	26

Najmanji elementi kolona K_1-K_5 su respektivno 0, 0, 1, 0 i 13, tako da nakon ovog koraka (redukcija po kolonama) dobijamo sljedeću tablicu:

	M_1	M_2	M_3	M_4	M_5
R_1	22	0	20	21	0
R_2	4	14	27	0	14
R_3	0	2	3	26	9
R_4	0	4	0	10	11
R_5	21	0	4	21	13

Sada je potrebno razvrstati sve nule u tablici na zavisne i nezavisne (nezavisne nule ćemo označavati znakom ●, a zavisne nule znakom ø).

	M_1	M_2	M_3	M_4	M_5
R_1	22	ø	20	21	●
R_2	4	14	27	●	14
R_3	●	2	3	26	9
R_4	ø	4	●	10	11
R_5	21	●	4	21	13

Imamo tačno 5 nezavisnih nula, pronađeno je optimalno rješenje. Ovo rješenje glasi $x_{1,5} = x_{2,4} = x_{3,1} = x_{4,3} = x_{5,2} = 1$, dok su ostale promjenjive jednake nuli. Optimalan raspored radnika na mašine je:

$R_1 – M_5$ $R_2 – M_4$ $R_3 – M_1$ $R_4 – M_3$ $R_5 – M_2$

Optimalna vrijednost funkcije cilja iznosi

$Z = c_{1,5} + c_{2,4} + c_{3,1} + c_{4,3} + c_{5,2} = 21 + 6 + 8 + 9 +6 =50$

b) Početna matrica

	M_1	M_2	M_3	M_4	M_5
R_1	30	8	29	29	21
R_2	10	20	34	6	33
R_3	8	10	12	34	30
R_4	8	12	9	18	32
R_5	27	6	11	27	32

Najmanji elementi kolona K_1-K_5 su respektivno 8, 6, 9, 6 i 21, tako da nakon ovog koraka (redukcija po kolonama) dobijamo sljedeću tablicu.

	M_1	M_2	M_3	M_4	M_5
R_1	22	2	20	23	0
R_2	2	14	25	0	12
R_3	0	4	3	28	9

R_4	0	6	0	22	11
R_5	19	0	2	21	11

Najmanji elementi redova R_1-R_5 su respektivno 0, 0, 0, 0 i 0, tako da nakon ovog koraka (redukcija po redovima) dobijamo sljedeću tablicu:

	M_1	M_2	M_3	M_4	M_5
R_1	22	2	20	23	0
R_2	2	14	25	0	12
R_3	0	4	3	28	9
R_4	0	6	0	22	11
R_5	19	0	2	21	11

Sada je potrebno razvrstati sve nule u tablici na zavisne i nezavisne (nezavisne nule ćemo označavati znakom ●, a zavisne nule znakom ø).

	M_1	M_2	M_3	M_4	M_5
R_1	22	2	20	23	●
R_2	2	14	25	●	12
R_3	●	4	3	28	9
R_4	ø	6	●	22	11
R_5	19	●	2	21	11

Imamo tačno 5 nezavisnih nula, pronađeno je optimalno rješenje. Ovo rješenje glasi $x_{1,5} = x_{2,4} = x_{3,1} = x_{4,3} = x_{5,2} = 1$, dok su ostale promjenjive jednake nuli. Optimalan raspored radnika na mašine je:

$R_1 – M_5$ $R_2 – M_4$ $R_3 – M_1$ $R_4 – M_3$ $R_5 – M_2$

Optimalna vrijednost funkcije cilja iznosi

$Z = c_{1,5} + c_{2,4} + c_{3,1} + c_{4,3} + c_{5,2} = 21 + 6 + 8 + 9 +6 =50$

c) Redukcija samo po redovima

	M_1	M_2	M_3	M_4	M_5
R_1	30	8	29	29	21
R_2	10	20	34	6	33
R_3	8	10	12	34	30
R_4	8	12	9	18	32
R_5	27	6	11	27	32

Najmanji elementi redova R_1-R_5 su respektivno 8,6,8,8,6 tako da nakon ovog koraka (redukcija po redovima) dobijamo sljedeću tablicu:

	M_1	M_2	M_3	M_4	M_5
R_1	22	0	21	21	13
R_2	4	14	28	0	27
R_3	0	2	4	26	22
R_4	0	4	1	10	24
R_5	21	0	5	21	26

Sada je potrebno razvrstati sve nule u tablici na zavisne i nezavisne (nezavisne nule ćemo označavati znakom ●, a zavisne nule znakom ø).

	M_1	M_2	M_3	M_4	M_5
R_1	22	●	21	21	13
R_2	4	14	28	●	27
R_3	●	2	4	26	22
R_4	ø	4	1	10	24
R_5	21	ø	5	21	26

Budući da imamo 3 nezavisne nule, nemamo optimalno rješenje pa nastavljamo dalje sa algoritmom. Sada je potrebno precrtati sve nule u tablici sa 3 linije.

	M_1	M_2	M_3	M_4	M_5
R_1	22	•	21	21	13
R_2	4	14	28	•	27
R_3	•	2	4	26	22
R_4	ø	4	1	10	24
R_5	21	ø	5	21	26

Sada nalazimo najmanji neprecrtani element i to je k = 1 (na poziciji (4,3)). Njega oduzimamo od svih neprecrtanih elemenata, a dodajemo na dvostruko precrtane elemente. Nakon ovoga dobija se sljedeća tablica:

	M_1	M_2	M_3	M_4	M_5
R_1	22	0	20	20	12
R_2	5	15	28	0	27
R_3	0	2	3	25	21
R_4	0	4	0	9	23
R_5	21	0	4	20	25

Sada ponovo treba izvršiti razvrstavanje nula na zavisne i nezavisne.

	M_1	M_2	M_3	M_4	M_5
R_1	22	•	20	20	12
R_2	5	15	28	•	27
R_3	•	2	3	25	21
R_4	ø	4	•	9	23
R_5	21	ø	4	20	25

Budući da imamo 4 nezavisne nule, nemamo optimalno rješenje pa nastavljamo dalje sa algoritmom. Sada je potrebno precrtati sve nule u tablici sa 4 linije.

	M_1	M_2	M_3	M_4	M_5
R_1	22	●	20	20	12
R_2	5	15	28	●	27
R_3	●	2	3	25	21
R_4	ø	4	●	9	23
R_5	21	ø	4	20	25

Sada nalazimo najmanji neprecrtani element i to je k = 4 (na poziciji (5,3)). Njega oduzimamo od svih neprecrtanih elemenata, a dodajemo na dvostruko precrtane elemente. Nakon ovoga dobija se sljedeća tablica:

	M_1	M_2	M_3	M_4	M_5
R_1	18	0	16	16	8
R_2	5	19	28	0	27
R_3	0	6	3	25	21
R_4	0	8	0	9	23
R_5	17	0	0	16	21

Sada je potrebno razvrstati sve nule u tablici na zavisne i nezavisne (nezavisne nule ćemo označavati znakom ●, a zavisne nule znakom ø).

	M_1	M_2	M_3	M_4	M_5
R_1	18	●	16	16	8
R_2	5	19	28	●	27
R_3	●	6	3	25	21
R_4	ø	8	●	9	23
R_5	17	ø	ø	16	21

Budući da imamo 4 nezavisne nule, nemamo optimalno rješenje pa nastavljamo dalje sa algoritmom. Sada je potrebno precrtati sve nule u tablici sa 4 linije. Krećemo od nerazvrstanih nula tj. prvo pronalazimo minimalan broj nula u redovima ili kolonama.

	M_1	M_2	M_3	M_4	M_5
R_1	18	●	16	16	8
R_2	5	19	28	●	27
R_3	●	6	3	25	21
R_4	ø	8	●	9	23
R_5	17	ø	ø	16	21

Sada nalazimo najmanji neprecrtani element i to je k = 8 (na poziciji (1,5)). Njega oduzimamo od svih neprecrtanih elemenata, a dodajemo na dvostruko precrtane elemente. Nakon ovoga dobija se sljedeća tablica:

	M_1	M_2	M_3	M_4	M_5
R_1	18	0	16	8	0
R_2	13	27	36	0	27
R_3	0	6	3	17	13
R_4	0	8	0	1	15
R2 R_5	17	0	0	8	13

Sada je potrebno razvrstati sve nule u tablici na zavisne i nezavisne (nezavisne nule ćemo označavati znakom ●, a zavisne nule znakom ø). Prvo sam za nezavisne nule označila redove R_2 i R_3 jer imaju samo jednu nulu u redu, zatim redove R_4, R_5 i R_1 što možemo vidjeti u sljedećoj tablici

	M_1	M_2	M_3	M_4	M_5
R_1	18	ø	16	8	●
R_2	13	27	36	●	27
R_3	●	6	3	17	13
R_4	Ø	8	●	1	15
R_5	17	●	ø	8	13

Kako sada imamo tačno 5 nezavisnih nula, pronađeno je optimalno rješenje. Ovo rješenje glasi $x_{1,5} = x_{2,4} = x_{3,1} = x_{4,3} = x_{5,2} = 1$, dok su ostale promjenjive jednake nuli. Optimalan raspored radnika na mašine je:

$R_1 – M_5$ $R_2 – M_4$ $R_3 – M_1$ $R_4 – M_3$ $R_5 – M_2$

Optimalna vrijednost funkcije cilja iznosi

$Z = c_{1,5} + c_{2,4} + c_{3,1} + c_{4,3} + c_{5,2} = 21+6+8+9+6=50$

d)Kako sam ja imala sreću da i pod a) i b) odmah nakon obavljenih redukcija dobijem optimalno rješenje, prvo ću odrediti dualne promjenjive u_i, a zatim uzeti da su sve dualne promjenljive v_j jednake nuli u_i je jednako najmanjem elementu u reda

Početna matrica

	M_1	M_2	M_3	M_4	M_5
R_1	30	8	29	29	21
R_2	10	20	34	6	33
R_3	8	10	12	34	30
R_4	8	12	9	18	32
R_5	27	6	11	27	32

u_1= min {30,8,29,29,21}=8

u_2= min {10,20,34,6,33}=6

u_3= min {8,10,12,34,30}=8

u_4= min {8,12, 9,18,32}=8

u_5= min {27,6,11,27,32}=6

$v_1= v_2= v_3= v_4= v_5=0$

Tablicu popunjavamo sa vrijednostima $d_{i,j} = c_{i,j} - u_i - v_j$

	M_1	M_2	M_3	M_4	M_5
R_1	22	0	21	21	13
R_2	4	14	28	0	27
R_3	0	2	4	26	22
R_4	0	4	1	10	24
R_5	21	0	5	21	26

Sada razvrstavamo nule na nezavisne i zavisne.

	M_1	M_2	M_3	M_4	M_5
R_1	22	●	21	21	13
R_2	4	14	28	●	27
R_3	●	2	4	26	22
R_4	Ø	4	1	10	24
R_5	21	ø	5	21	26

Budući da imamo 3 nezavisne nule, nemamo optimalno rješenje pa nastavljamo dalje sa algoritmom. Sada označavamo redove i kolone.

	M_1	M_2	M_3	M_4	M_5
R_1	22	●	21	21	13
R_2	4	14	28	●	27
R_3	●	2	4	26	22
R_4	Ø	4	1	10	24
R_5	21	ø	5	21	26

Nakon sto smo oznacili red koji ima nezavisnu nulu i vidjeli da nemamo vise kolona koje imaju zavisnu nulu prelazimo na korak trazenja delte medju vrijednostima unutar oznacenih redova i neoznacenih kolona.

Kod nas je to delta = 1.

Sada uvećavamo dualne promjenljive u_1, u_3, u_4 i u_5 (koje odgovaraju označenim redovima) za k, a umanjimo dualnu promjenljivu v_1 i v_2 (koja odgovara označenoj koloni) za k. Nove vrijednosti dualnih promjenljivih su:

$u_1 = 7$, $u_2 = 6$, $u_3 = 7$, $u_4 = 7$, $u_5 = 5$, $v_1 = -1$, $v_2 = -1$, $v_3 = 0$, $v_4 = 0$, $v_5 = 0$

Nove vrijednosti izravnavajućih dualnih promjenljivih prikazane su u sljedećoj tabeli.

Nova nula ce donijeti neke promjene tako da sada imamo sljedece oznake

	M_1	M_2	M_3	M_4	M_5
R_1	22	●	20	20	12
R_2	5	15	28	●	27
R_3	●	2	3	25	21
R_4	Ø	4	●	9	23
R_5	21	ø	4	20	25

Sada je potrebno ponovo naći najmanji element delta među vrijednostima izravnavajućih dualnih promjenljivih koje pripadaju označenim redovima i neoznačenim kolonama.

Kod nas je to delta=4.

Sada uvećavamo dualne promjenljive u_1, i u_5 (koje odgovaraju označenim redovima) za delta, a umanjimo dualnu promjenljivu v_2 (koja odgovara označenoj koloni) za delta. Nove vrijednosti dualnih promjenljivih su:

$u_1 = 3$, $u_2 = 6$, $u_3 = 7$, $u_4 = 7$, $u_5 = 2$, $v_1 = -1$, $v_2 = -4$, $v_3 = 0$, $v_4 = 0$, $v_5 = 0$

Nove vrijednosti izravnavajućih dualnih promjenljivih prikazane su u sljedećoj tabeli kao i razvrstavanje nula na nezavisne i zavisne.

	M_1	M_2	M_3	M_4	M_5
R_1	18	●	16	16	8
R_2	5	16	28	●	27
R_3	●	3	3	25	21
R_4	ø	5	●	9	23
R_5	17	ø	ø	16	21

Sada je potrebno ponovo naći najmanji element delta među vrijednostima izravnavajućih dualnih promjenljivih koje pripadaju označenim redovima i neoznačenim kolonama.

Kod nas je to delta=8.

Sada uvećavamo dualne promjenljive u_1, u_3, u_4 i u_5 (koje odgovaraju označenim redovima) za delta, a umanjimo dualnu promjenljivu v_1, v_2, v_3(koja odgovara označenoj koloni) za delta. Nove vrijednosti dualnih promjenljivih su:

$u_1 = 11$, $u_2 = 6$, $u_3 = 15$, $u_4 = 15$, $u_5 = 10$, $v_1 = -9$, $v_2 = -12$ $v_3 = -8$, $v_4 = 0$, $v_5 = 0$

Nove vrijednosti izravnavajućih dualnih promjenljivih prikazane su u sljedećoj tabeli kao i razvrstavanje nula na nezavisne i zavisne. Nakon što smo oznacavanje zavrsili u koloni idemo na potragu povecajavuceg lanca

	M_1	M_2	M_3	M_4	M_5
R_1	18	●	16	8	ø
R_2	13	24	36	●	27
R_3	●	3	3	17	13
R_4	ø	5	●	1	15
R_5	17	ø	ø	8	13

Promijenimo zavisne u nezavisne nule i obratno.

	M_1	M_2	M_3	M_4	M_5
R_1	18	ø	16	8	●
R_2	13	24	36	●	27
R_3	●	3	3	17	13
R_4	ø	5	●	1	15
R_5	17	●	ø	8	13

Kako sada imamo tačno 5 nezavisnih nula, pronađeno je optimalno rješenje. Ovo rješenje glasi $x_{1,5} = x_{2,4} = x_{3,1} = x_{4,3} = x_{5,2} = 1$, dok su ostale promjenjive jednake nuli. Optimalan raspored radnika na mašine je:

$R_1 – M_5$ $R_2 – M_4$ $R_3 – M_1$ $R_4 – M_3$ $R_5 – M_2$

Optimalna vrijednost funkcije cilja iznosi

$Z = c_{1,5} + c_{2,4} + c_{3,1} + c_{4,3} + c_{5,2} = 21+6+8+9+6=50$

Zadatak 4 [0.4 poena]

Funkcija transport implementirana je na sljedeći način:

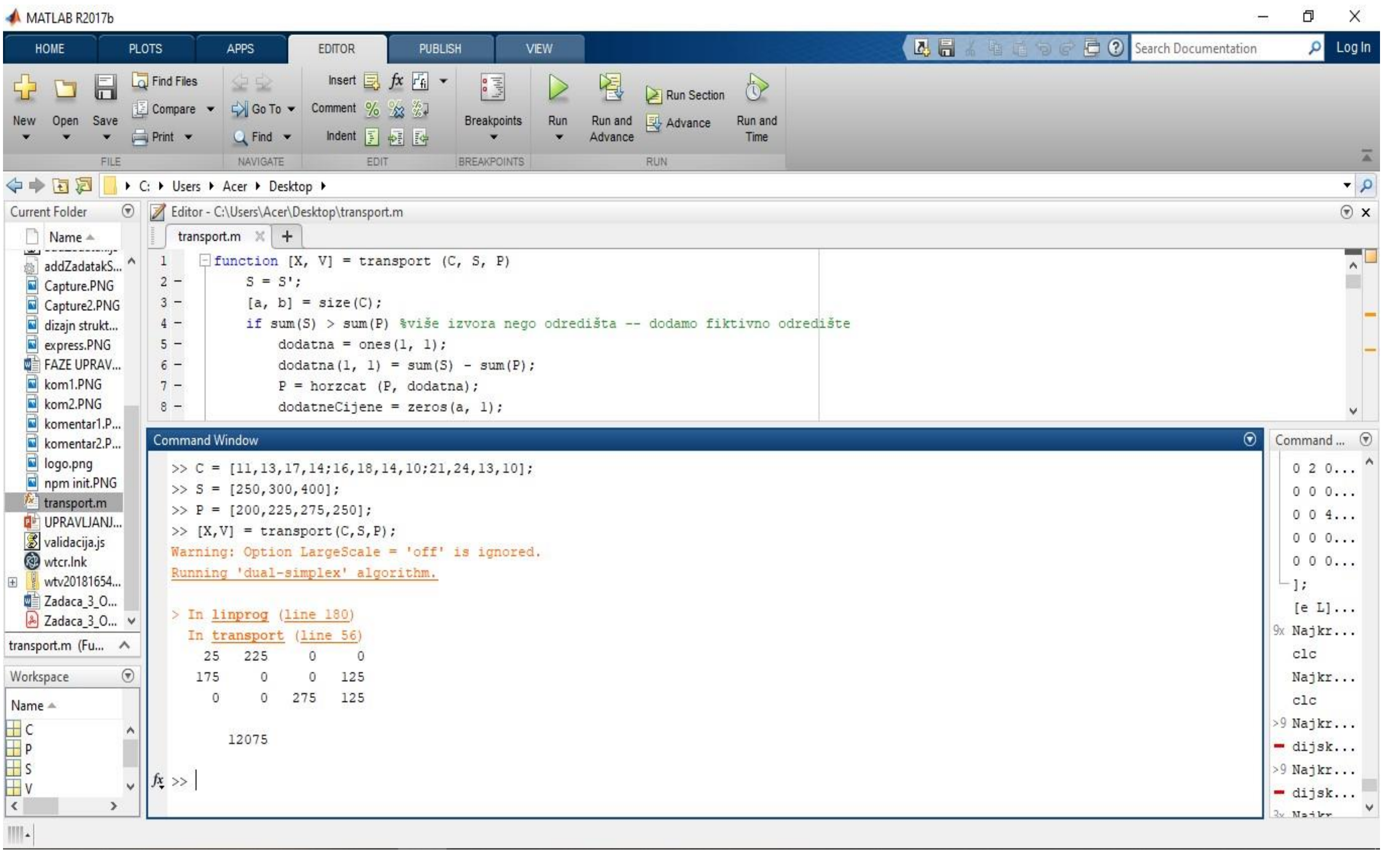
1. Ukoliko je problem otvoren, moguća su dva slučaja:
    a. Veća je potražnja nego ponuda – u tom slučaju u vektor izvora dodaje se jedan element koji je jednak razlici između ponude i potražnje i dodaje se jedan red u matrici cijena čiji su svi elementi jednaki nuli;
    b. Veća je ponuda nego potražnja – u tom slučaju u vektor odredišta dodaje se jedan element koji je jednak razlici između ponude i potražnje i dodaje se jedna kolona u matrici cijena čiji su svi elementi jednaki nuli.
2. Formira se funkcija cilja – za funkciju linprog potrebni su nam samo koeficijenti uz varijable, a to su njihove cijene, te je zbog toga funkcija cilja jedan vektor koji se sastoji od svih redova u matrici cijena.
3. Formira se matrica koeficijenata za ograničenja tipa jednakosti. Budući da su sva ograničenja tog tipa (jer je svaki problem zatvoren), potrebni su nam svi koeficijenti za sve varijable, koje se numerišu redom kako se pojavljuju u matrici cijena. Prvo ograničenje ima koeficijente jednake 1 samo uz varijable iz prvog reda, i tako analogno za sve redove. Postoje i ograničenja za kolone, te za ta ograničenja samo varijable koje se pojavljuju u respektivnim kolonama imaju koeficijent jednak 1.
4. Formira se vektor vrijednosti ograničenja tipa jednakosti. Ovaj vektor sastoji se iz vrijednosti izvora i vrijednosti transponovanih odredišta.
5. Potrebno je postaviti opcije tako da se na ekranu ne prikazuju iteracije algoritma i da se ne koristi metod unutrašnje tačke, već simplex algoritam.
6. Pozove se funkcija linprog s parametrima koji su prethodno formirani ili koji imaju tipične vrijednosti (matrice ograničenja tipa manje ili jednako su prazne, donje granice varijabli su jednake nuli, a gornje $+\infty$), te se dobiju rezultati varijabli – traženi transporti i vrijednost funkcije cilja.
7. Budući da je dobiveni rezultat varijabli vektor, on se pretvori u matricu kako bi bilo jednostavnije očitati rješenje.

Testiranje funkcije na primjerima Primjer br. 1

Prvi odabrani primjer transportnog problema za testiranje je dat u tabeli ispod:

	P1	P2	P3	P4	Zalihe
S1	11	13	17	14	250
S2	16	18	14	10	300
S3	21	24	13	10	400
Potrebe	200	225	275	250	

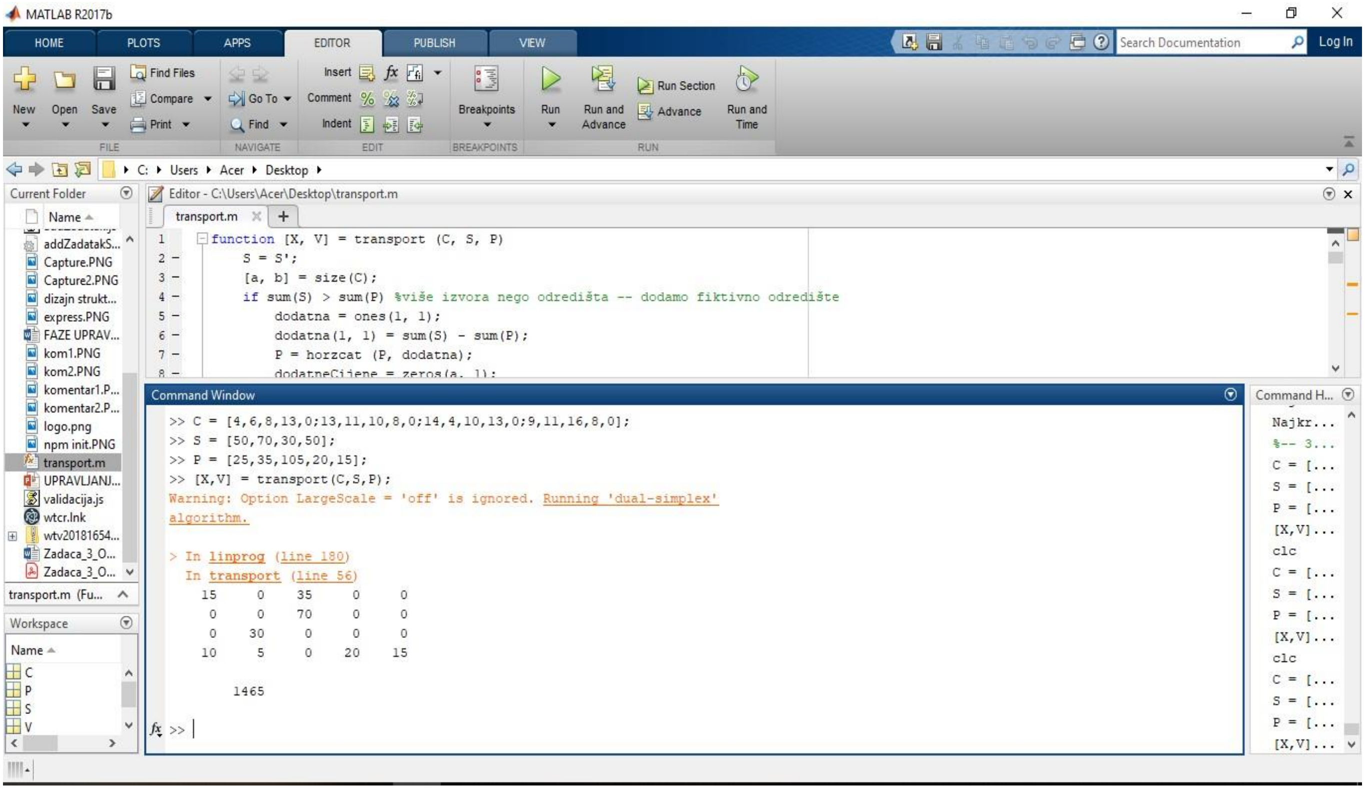
Rješenje dobiveno korištenjem funkcije *transport*:



Primjer br. 2

	P1	P2	P3	P4	P5	Zalihe
S1	4	6	8	13	0	50
S2	13	11	10	8	0	70
S3	14	4	10	13	0	30
S4	9	11	16	8	0	50
Potrebe	25	35	105	20	15	

Rješenje dobiveno korištenjem funkcije *transport*:



Primjer br. 3

Primjer br. 3 izabran je iz knjige sa stranice 26.

	P1	P2	P3	P4	P5	Zalihe
S1	3	10	4	2	3	200
S2	7	5	8	4	10	200
S3	5	8	15	7	12	150
S4	10	12	10	8	4	200
S5	7	1	1	6	5	250
Potrebe	100	200	400	200	100	

Rješenje dobiveno korištenjem funkcije *transport*: