TABLE DES MATIÈRES

Introduction

La théorie de l'estimation vise à apporter les bases théoriques nécessaires à la construction d'estimateurs à l'intérieur de modèles probabilistes généraux, ainsi que la compréhension des techniques en aval de la statistique mathématique. Cinq (05) exercices proposés ont été traités dans ce projet.

Exercice 1

Soient $X_1, \cdots, X_n$ des variables aléatoires i.i.d. ayant le moment d'ordre 4 fini et de variance σ^2. On pose :

$$s_n^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \bar{X}\right)^2.$$

On suppose que les X_i sont centrées.

1. Démontrons que $s_n^2 = \frac{n-1}{n^2}\sum_{i=1}^n X_i^2 - \frac{2}{n^2}\sum_{k=1}^n \sum_{l=1,l>k}^n X_k X_l$:

$$\begin{aligned}
s_n^2 &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \bar{X}\right)^2 \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \bar{X}^2 \text{ (D'après la formule de König-Huygens.)} \\
&= \frac{n}{n^2}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right)^2 \\
&= \frac{n-1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 + \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \frac{1}{n^2}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) \\
&= \frac{n-1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 + \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \frac{1}{n^2}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i^2 + 2\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1,l>k}^{n} X_k X_l\right) \\
&= \frac{n-1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 + \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \frac{2}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1,l>k}^{n} X_k X_l \\
s_n^2 &= \frac{n-1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \frac{2}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1,l>k}^{n} X_k X_l
\end{aligned}$$

   D'où le résultat.

2. Montrons que :

   (a) $Cov\left(\sum_{i=1}^n X_i^2, \sum_{k=1}^n \sum_{l=1,l>k}^n X_k X_l\right) = 0$

$$Cov\left(\sum_{i=1}^{n} X_i^2, \sum_{k=1}^{n}\sum_{\substack{l=1\\l>k}}^{n} X_k X_l\right) = \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i^2 \sum_{k=1}^{n}\sum_{\substack{l=1\\l>k}}^{n} X_k X_l\right) - \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i^2\right)\mathbb{E}\left(\sum_{k=1}^{n}\sum_{\substack{l=1\\l>k}}^{n} X_k X_l\right)$$

• Par ailleurs, on a :

$$\mathbb{E}\left(\sum_{k=1}^{n}\sum_{\substack{l=1\\l>k}}^{n} X_k X_l\right) = \sum_{k=1}^{n}\mathbb{E}\left(\sum_{\substack{l=1\\l>k}}^{n} X_k X_l\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\sum_{\substack{l=1\\l>k}}^{n}\mathbb{E}\left(X_k X_l\right)$$

$$\mathbb{E}\left(\sum_{k=1}^{n}\sum_{\substack{l=1\\l>k}}^{n} X_k X_l\right) = 0 \text{ car les } X_k \text{ sont centrées.}$$

On a donc $\mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i^2\right)\mathbb{E}\left(\sum_{k=1}^{n}\sum_{\substack{l=1\\l>k}}^{n} X_k X_l\right) = 0.$

• De plus, on a :

$$\mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i^2 \sum_{k=1}^{n}\sum_{\substack{l=1\\l>k}}^{n} X_k x_l\right) = \sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i^2 \sum_{k=1}^{n}\sum_{\substack{l=1\\l>k}}^{n} X_k X_l\right)$$

- En supposant que $k \neq i$ et $l \neq i$, on a ce qui suit :

$$\mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i^2 \sum_{k=1}^{n}\sum_{\substack{l=1\\l>k}}^{n} X_k X_l\right) = \sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}\left(X_i^3 \sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n} X_j + \sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n} X_i^2 \sum_{\substack{l=1\\l>k\\l\neq i}}^{n} X_k X_l\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\left[\mathbb{E}\left(X_i^3 \sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n} X_j\right) + \underbrace{\mathbb{E}\left(\sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n} X_i^2 \sum_{\substack{l=1\\l>k\\l\neq i}}^{n} X_k X_l\right)}_{A}\right]$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}\left(X_i^3\right)\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}\mathbb{E}\left(X_i\right) + \sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}\left(X_i^2\right)\sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n}\sum_{\substack{l=1\\l>k\\l\neq i}}^{n}\mathbb{E}\left(X_k\right)\mathbb{E}\left(X_l\right)$$

$$= 0 + 0$$

$$\mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i^2 \sum_{k=1}^{n}\sum_{\substack{l=1\\l>k}}^{n} X_k X_l\right) = 0$$

- Dans le cas où $l = i$, le terme A devient :

$$\mathbb{E}\left(\sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n} X_i^2 \sum_{\substack{l=1\\l>k}}^{n} X_k X_l\right) = \sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n} \mathbb{E}\left(X_i^2 \sum_{\substack{l=1\\l>k}}^{n} X_k X_l\right)$$

$$= \sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n} \mathbb{E}\left(X_i^3 X_k + X_i^2 X_k \sum_{\substack{l=1\\l>k\\l\neq i}}^{n} X_k X_l\right)$$

$$= \sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n} \left[\mathbb{E}\left(X_i^3\right)\mathbb{E}\left(X_k\right) + \mathbb{E}\left(X_i^2\right)\mathbb{E}\left(X_k\right) \sum_{\substack{l=1\\l>k\\l\neq i}}^{n} \mathbb{E}\left(X_k\right)\mathbb{E}\left(X_l\right)\right]$$

$$\mathbb{E}\left(\sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n} X_i^2 \sum_{\substack{l=1\\l>k}}^{n} X_k X_l\right) = 0$$ (Car les X_k sont centrées.)

Finalement, on obtient dans tous les cas :

$Cov\left(\sum_{i=1}^{n} X_i^2, \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1,l>k}^{n} X_k X_l\right) = 0$

(b) $\mathbb{V}\left(\sum_{k=1}^{n} \sum_{\substack{l=1\\l>k}}^{n} X_k X_l\right) = \frac{n(n-1)\sigma^4}{2}$

$$\mathbb{V}\left(\sum_{k=1}^{n} \sum_{\substack{l=1\\l>k}}^{n} X_k X_l\right) = Cov\left(\sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1,l>k}^{n} X_k X_l, \sum_{k=1}^{n} \sum_{\substack{l=1\\l>k}}^{n} X_k X_l\right)$$

$$= \mathbb{E}\left[\left(\sum_{k=1}^{n} \sum_{\substack{l=1\\l>k}}^{n} X_k X_l\right)\left(\sum_{k=1}^{n} \sum_{\substack{l=1\\l>k}}^{n} X_k X_l\right)\right] - \mathbb{E}\left(\sum_{k=1}^{n} \sum_{\substack{l=1\\l>k}}^{n} X_k X_l\right)\mathbb{E}\left(\sum_{k=1}^{n} \sum_{\substack{l=1\\l>k}}^{n} X_k X_l\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \sum_{\substack{l=1\\l>k}}^{n} \mathbb{E}\left[X_k X_l \sum_{k=1}^{n} \sum_{\substack{l=1\\l>k}}^{n} X_k X_l\right] - \sum_{k=1}^{n} \sum_{\substack{l=1\\l>k}}^{n} \mathbb{E}\left(X_k\right)\mathbb{E}\left(X_l\right) \sum_{k=1}^{n} \sum_{\substack{l=1\\l>k}}^{n} \mathbb{E}\left(X_k\right)\mathbb{E}\left(X_l\right)$$

$$\mathbb{V}\left(\sum_{k=1}^{n} \sum_{\substack{l=1\\l>k}}^{n} X_k X_l\right) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{\substack{l=1\\l>k}}^{n} \mathbb{E}\left[X_k X_l \sum_{k=1}^{n} \sum_{\substack{l=1\\l>k}}^{n} X_k X_l\right] - 0$$

$$\mathbb{V}\left(\sum_{k=1}^{n}\sum_{\substack{l=1\\l>k}}^{n} X_kX_l\right) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{\substack{l=1\\l>k}}^{n} \mathbb{E}\left[X_kX_l \sum_{k=1}^{n}\sum_{\substack{l=1\\l>k}}^{n} X_kX_l\right]$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\sum_{\substack{l=1\\l>k}}^{n} \mathbb{E}\left[X_k^2X_l^2 + X_kX_l \sum_{\substack{i=1\\i\notin\{k,l\}}}^{n} \sum_{\substack{j=1\\j>i\\j\notin\{k,l\}}}^{n} X_kX_l\right]$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\sum_{\substack{l=1\\l>k}}^{n} \mathbb{E}\left(X_k^2X_l^2\right)$$

$$\mathbb{V}\left(\sum_{k=1}^{n}\sum_{\substack{l=1\\l>k}}^{n} X_kX_l\right) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{\substack{l=1\\l>k}}^{n} \mathbb{E}\left(X_l^2\right)$$

Or, $\mathbb{E}\left(X_k^2\right) = \mathbb{V}\left(X_k\right) + \underbrace{\left[\mathbb{E}\left(X_k\right)\right]^2}_{=0} = \sigma^2$ donc on a :

$$\mathbb{V}\left(\sum_{k=1}^{n}\sum_{\substack{l=1\\l>k}}^{n} X_kX_l\right) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{\substack{l=1\\l>k}}^{n} \sigma^4$$

$$= \sigma^4 \sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{\substack{l=1\\l>k}}^{n}(1)\right)$$

$$= \sigma^4 n\left[\frac{1}{2}\left(n-2+1\right)\right]$$

$$\mathbb{V}\left(\sum_{k=1}^{n}\sum_{\substack{l=1\\l>k}}^{n} X_kX_l\right) = \frac{n\left(n-1\right)\sigma^4}{2}$$

D'où le résultat.

3. Déduisons-en que $\mathbb{V}\left(s_n^2\right) = \frac{n-1}{n^3}\left[\left(n-1\right)\mathbb{E}\left(X_1^4\right) - \left(n-3\right)\left(\mathbb{E}\left(X_1^2\right)\right)^2\right]$

$$\mathbb{V}\left(s_n^2\right) = \mathbb{V}\left(\frac{n-1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \frac{2}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1,l>k}^{n} X_kX_l\right)$$

$$= \mathbb{V}\left(\frac{n-1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} X_i^2\right) + \mathbb{V}\left(\frac{2}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1,l>k}^{n} X_kX_l\right) - \underbrace{2Cov\left(\frac{n-1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} X_i^2, \frac{2}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1,l>k}^{n} X_kX_l\right)}_{=0}$$

$$= \left(\frac{n-1}{n^2}\right)^2 \sum_{i=1}^{n}\mathbb{V}\left(X_i^2\right) + \left(\frac{2}{n^2}\right)^2 \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1,l>k}^{n}\mathbb{V}\left(X_kX_l\right)$$

$$\mathbb{V}\left(s_n^2\right) = \left(\frac{n-1}{n^2}\right)^2 \sum_{i=1}^{n}\left[\mathbb{E}\left(X_i^4\right) - \left(\mathbb{E}\left(X_i^2\right)\right)^2\right] + \left(\frac{2}{n^2}\right)^2 \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1,l>k}^{n}\left[\mathbb{E}\left(X_k^2X_l^2\right) - \left(\mathbb{E}\left(X_kX_l\right)\right)^2\right]$$

$\bullet \mathbb{E}\left(X_k X_l\right)=\mathbb{E}\left(X_k\right) \mathbb{E}\left(X_l\right)=0$

$\bullet \mathbb{E}\left(X_k^2 X_l^2\right)=\mathbb{E}\left(X_k^2\right) \mathbb{E}\left(X_l^2\right)=0$

Ainsi, on a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}\left(s_n^2\right) &= \left(\tfrac{n-1}{n^2}\right)^2\left[n\mathbb{E}\left(X_1^4\right)-n\left(\mathbb{E}\left(X_1^2\right)\right)^2\right]+\left(\tfrac{2}{n^2}\right)^2 \textstyle\sum_{k=1}^n\left(\sum_{l=1,l>k}^n \mathbb{E}\left(X_k^2\right)\mathbb{E}\left(X_l^2\right)\right)\\
&= \tfrac{(n-1)^2}{n^3}\left[\mathbb{E}\left(X_1^4\right)-\left(\mathbb{E}\left(X_1^2\right)\right)^2\right]+\left(\tfrac{2}{n^2}\right)^2 \textstyle\sum_{k=1}^n \mathbb{E}\left(X_k^2\right)\left(\sum_{l=1,l>k}^n \mathbb{E}\left(X_l^2\right)\right)\\
&= \tfrac{(n-1)^2}{n^3}\left[\mathbb{E}\left(X_1^4\right)-\left(\mathbb{E}\left(X_1^2\right)\right)^2\right]+\left(\tfrac{2}{n^2}\right)^2\left(n\mathbb{E}\left(X_1^2\right)\right)\left[\tfrac{1}{2}(n-1)\mathbb{E}\left(X_1^2\right)\right]\\
&= \tfrac{n-1}{n^3}\left[(n-1)\mathbb{E}\left(X_1^4\right)\right]-\tfrac{(n-1)^2}{n^3}\left(\mathbb{E}\left(X_1^2\right)\right)^2+\tfrac{2}{n^3}(n-1)\left(\mathbb{E}\left(X_1^2\right)\right)^2\\
&= \tfrac{n-1}{n^3}\left[(n-1)\mathbb{E}\left(X_1^4\right)-(n-1)\left(\mathbb{E}\left(X_i^2\right)\right)^2+2\left(\mathbb{E}\left(X_1^2\right)\right)^2\right]\\
\mathbb{V}\left(s_n^2\right) &= \tfrac{n-1}{n^3}\left[(n-1)\mathbb{E}\left(X_1^4\right)-(n-3)\left(\mathbb{E}\left(X_1^2\right)\right)^2\right].
\end{aligned}$$

D'où le résultat.

4. Explicitons $\mathbb{V}\left(s_n^2\right)$ quand $X_1 \sim \mathcal{N}\left(0, \sigma^2\right)$:

   On sait déjà que $\mathbb{V}\left(s_n^2\right)=\frac{n-1}{n^3}\left[(n-1)\mathbb{E}\left(X_1^4\right)-(n-3)\left(\mathbb{E}\left(X_1^2\right)\right)^2\right]$. De plus, on a :

$$\bullet \mathbb{E}\left(X_1^2\right)=\sigma^2$$

$$\begin{aligned}
\bullet \mathbb{E}\left(X_1^4\right) &= \int_{\mathbb{R}} x_1^4 f_{X_1}\left(x_1\right) d x_1\\
&= \int_{\mathbb{R}} x_1^4 \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}x_1^2} d x_1\\
\mathbb{E}\left(X_1^4\right) &= -\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}}\left(x_1^3\right)\left(-x_1 e^{-\frac{1}{2\sigma^2}x_1^2}\right) d x_1
\end{aligned}$$

Posons $u\left(x_1\right)=x_1^3$ et $v'\left(x_1\right)=-x_1 e^{-\frac{1}{2\sigma^2}x_1^2}$

On a : $u'\left(x_1\right)=3x_1^2$ et on peut prendre $v\left(x_1\right)=\sigma^2 e^{-\frac{1}{2\sigma^2}x_1^2}$.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(X_1^4\right) &= -\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\left(\left[x_1^3\sigma^2 e^{-\frac{1}{2\sigma^2}x_1^2}\right]_{\mathbb{R}}-3\sigma^2\int_{\mathbb{R}} x_1^2 e^{-\frac{1}{2\sigma^2}x_1^2} d x_1\right)\\
\mathbb{E}\left(X_1^4\right) &= \frac{3\sigma^2}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} x_1^2 e^{-\frac{1}{2}x_1^2} d x_1\\
&= 3\sigma^2\int_{\mathbb{R}} x_1^2\left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x_1^2}\right) d x_1\\
&= 3\sigma^2\mathbb{E}\left(X_1^2\right)\\
\mathbb{E}\left(X_1^4\right) &= 3\sigma^4
\end{aligned}$$

Finalement, on obtient :

$$\mathbb{V}\left(s_n^2\right) = \frac{n-1}{n^3}\left[(n-1)\left(3\sigma^4\right) - (n-3)\left(\sigma^2\right)^2\right]$$
$$\mathbb{V}\left(s_n^2\right) = \frac{n-1}{n^3}\left[3(n-1)\sigma^4 - (n-3)\sigma^4\right]$$

$\boxed{\mathbb{V}\left(s_n^2\right) = \frac{2(n-1)}{n^2}\sigma^4}$

5. Calculons $\mathbb{V}\left(s_n^2\right)$ lorsque X_1 n'est pas centrée :

   Si X_1 n'est pas centrée, supposons que $\mathbb{E}(X_1) = \mu$. On a donc $\mathbb{E}\left(X_1^2\right) = \sigma^2 + \mu^2$.

   Calculons $\mathbb{E}\left(X_1^4\right)$:

$$\mathbb{E}\left(X_1^4\right) = \int_{\mathbb{R}} x_1^4 f_{X_1}(x_1)\, dx_1 \text{ avec} f, \text{ la fonction de densité de } X_1.$$

Puisque $X_1 \sim \mathcal{N}\left(\mu, \sigma^2\right)$, on a :

$$\mathbb{E}\left(X_1^4\right) = \int_{\mathbb{R}} x_1^4 \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x_1-\mu}{\sigma}^2\right)^2} dx_1$$
$$= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} x_1^3 (x_1 - \mu + \mu)\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x_1-\mu}{\sigma}^2\right)^2} dx_1$$
$$\mathbb{E}\left(X_1^4\right) = \underbrace{\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} x_1^3 (x_1 - \mu)\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x_1-\mu}{\sigma}^2\right)^2} dx_1}_{B} + \underbrace{\frac{\mu}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} x_1^3 e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x_1-\mu}{\sigma}^2\right)^2} dx_1}_{C}$$

Calculons maintenant B et C :

$$B = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} x_1^3 (x_1 - \mu)\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x_1-\mu}{\sigma}^2\right)^2} dx_1$$
$$B = \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} x_1^3 \left(\frac{x_1 - \mu}{\sigma^2}\right) e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x_1-\mu}{\sigma}^2\right)^2} dx_1$$

En vue de procéder à une intégration par parties, posons :

$$\begin{cases} u'(x_1) & = \frac{x_1-\mu}{\sigma^2} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x_1-\mu}{\sigma}^2\right)^2} \\ v(x_1) & = x_1^3 \end{cases}$$

$$v(x_1) = x_1^3 \Rightarrow v'(x_1) = 3x_1^2 \text{ et on peut prendre } u(x_1) = -e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x_1-\mu}{\sigma}^2\right)^2}$$

Par suite :

$$\begin{aligned}
B &= \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \underbrace{\left[-x_1^3 e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x_1-\mu}{\sigma}\right)^2}\right]_{\mathbb{R}}}_{=0} + \frac{3\sigma}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} x_1^2 e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x_1-\mu^2}{\sigma}\right)^2} dx_1 \\
&= \frac{3\sigma}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} x_1^2 e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x_1-\mu^2}{\sigma}\right)^2} dx_1 \\
&= 3\sigma^2 \underbrace{\int_{\mathbb{R}} x_1^2 \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x_1-\mu^2}{\sigma}\right)^2} dx_1}_{=\mathbb{E}\left(X_1^2\right)} \\
&= \frac{3\sigma}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} x_1^2 e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x_1-\mu^2}{\sigma}\right)^2} dx_1 \\
B &= 3\sigma^2 \left(\mu^2 + \sigma^2\right)
\end{aligned}$$

Passons au calcul de la quantité C :

$$\begin{aligned}
C &= \frac{\mu}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} x_1^3 e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x_1-\mu^2}{\sigma}\right)^2} dx_1 \\
&= \frac{\mu}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} x_1^2 \left(x_1 - \mu + \mu\right) e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x_1-\mu^2}{\sigma}\right)^2} dx_1 \\
C &= \underbrace{\frac{\mu}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} x_1^2 \left(x_1 - \mu\right) e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x_1-\mu^2}{\sigma}\right)^2} dx_1}_{C_1} + \underbrace{\frac{\mu^2}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} x_1^2 e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x_1-\mu^2}{\sigma}\right)^2} dx_1}_{C_2}
\end{aligned}$$

• Calcul de C_1 :

$$\begin{aligned}
C_1 &= \frac{\mu}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} x_1^2 \left(x_1 - \mu\right) e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x_1-\mu^2}{\sigma}\right)^2} dx_1 \\
C_1 &= \frac{\mu\sigma}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} x_1^2 \left(\frac{x_1 - \mu}{\sigma^2}\right) e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x_1-\mu^2}{\sigma}\right)^2} dx_1
\end{aligned}$$

En vue de procéder à une intégration par parties, posons :

$$\begin{cases}
u'\left(x_1\right) & = \frac{x_1-\mu}{\sigma^2} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x_1-\mu^2}{\sigma}\right)^2} \\
v\left(x_1\right) & = x_1^2
\end{cases}$$

$v\left(x_1\right) = x_1^3 \Rightarrow v'\left(x_1\right) = 2x_1$ et on peut prendre $u\left(x_1\right) = -e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x_1-\mu^2}{\sigma}\right)^2}$

$$C_1 = \frac{\mu\sigma}{\sqrt{2\pi}} \underbrace{\left[-x_1^2 e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x_1-\mu}{\sigma}\right)^2}\right]_{\mathbb{R}}}_{=0} + \frac{2\mu\sigma}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} x_1 e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x_1-\mu^2}{\sigma}\right)^2} dx_1$$

$$
\begin{aligned}
C_1 &= \frac{2\mu\sigma}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} x_1 e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x_1-\mu^2}{\sigma}\right)^2} dx_1 \\
&= 2\mu\sigma^2 \underbrace{\int_{\mathbb{R}} x_1 \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x_1-\mu^2}{\sigma}\right)^2} dx_1}_{\mathbb{E}(X_1)} \\
&= 2\mu\sigma^2 \mathbb{E}\left(X_1\right) \\
C_1 &= 2\mu^2\sigma^2
\end{aligned}
$$

- Calcul de C_2 :

$$
\begin{aligned}
C_2 &= \frac{\mu^2}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} x_1^2 e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x_1-\mu^2}{\sigma}\right)^2} dx_1 \\
&= \mu^2 \underbrace{\int_{\mathbb{R}} x_1^2 \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x_1-\mu^2}{\sigma}\right)^2} dx_1}_{\mathbb{E}\left(X_1^2\right)} \\
C_2 &= \mu^2\left(\mu^2+\sigma^2\right)
\end{aligned}
$$

Finalement, on :

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(X_1^4\right) &= B + C \\
&= B + C_1 + C_2 \\
&= 3\sigma^2\left(\mu^2+\sigma^2\right) + 2\mu^2\sigma^2 + \mu^2\left(\mu^2+\sigma^2\right) \\
\mathbb{E}\left(X_1^4\right) &= \mu^4 + 3\sigma^4 + 6\mu^2\sigma^2
\end{aligned}
$$

Ce qui nous permet d'avoir :

$$
\begin{aligned}
\mathbb{V}\left(s_n^2\right) &= \frac{n-1}{n^3}\left[(n-1)\,\mathbb{E}\left(X_1^4\right) - (n-3)\left(\mathbb{E}\left(X_1^2\right)\right)^2\right] \\
&= \frac{n-1}{n^3}\left[(n-1)\left(\mu^4+3\sigma^4+6\mu^2\sigma^2\right) - (n-3)\left(\mu^2+\sigma^2\right)^2\right] \\
&= \frac{n-1}{n^3}\left[(n-1)\left(\mu^4+3\sigma^4+6\mu^2\sigma^2\right) - (n-3)\left(\mu^4+\sigma^4+2\mu^2\sigma^2\right)\right] \\
&= \frac{n-1}{n^3}\left[(n-1-n+3)\,\mu^4 + (3n-3-n+3+)\,\sigma^4 + (6n-6-2n+6)\,\mu^2\sigma^2\right] \\
&= \frac{n-1}{n^3}\left(2\mu^4+2n\sigma^4+4n\mu^2\sigma^2\right) \text{ D'où on obtient :}
\end{aligned}
$$

$$\boxed{\mathbb{V}\left(s_n^2\right) = 2\frac{(n-1)}{n^3}\left(\mu^4+n\sigma^4+2n\mu^2\sigma^2\right)}$$

Exercice 2

Soient $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n$ des variables aléatoires i.i.d. de densité f et soit $X_i \in \mathbb{R}, i \in \{1, \cdots, n\}$. On observe les couples $(X_i, Y_i), i \in \{1, \cdots, n\}$, issus du modèle de régression linéaire

$$Y_i = \theta X_i + \varepsilon_i$$

où $\theta \in \mathbb{R}$ est un paramètre inconnu.

1. On suppose d'abord que les X_i sont déterministes.

   (a) Explicitons la densité jointe de $Y_1, \cdots, Y_n$.

   Soit $x \in \mathbb{R}$ et F, la fonction de répartition de Y_i, $\forall i \in \{1, \ldots, n\}$.

$$\begin{aligned} F_{Y_i}(x) &= \mathbb{P}(Y_i \leqslant x) \\ &= \mathbb{P}(\theta x_i + \varepsilon_i \leqslant x) \\ &= \mathbb{P}(\varepsilon_i \leqslant x - \theta x_i) \\ F_{Y_i}(x) &= F_{\varepsilon_i}(x - \theta x_i), \forall x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

   Par suite, on a :

$$\begin{aligned} f_{Y_i}(x) &= \frac{\partial F_{\varepsilon_i}(x - \theta x_i)}{\partial x} \\ &= (1) \cdot f_{\varepsilon_i}(x - \theta x_i) \\ f_{y_i}(x) &= f_{\varepsilon_i}(x - \theta x_i), \forall x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

   Posons $g(\varepsilon_i) = \theta X_i + \varepsilon_i = Y_i$.

   $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = \theta X_i + x$.

   La fonction $x \mapsto g(x)$ est mesurable. Alors, Y_i est une variable aléatoire. Les variables aléatoires réelles ε_i sont i.i.d., donc les Y_i sont aussi i.i.d. et, on a :

$$\begin{aligned} f_{(Y_1,\cdots,Y_n)}(x_1, \cdots, x_n) &= \prod_{i=1}^{n} f_{Y_i}(x_i) \\ f_{(Y_1,\cdots,Y_n)}(x_1, \cdots, x_n) &= \prod_{i=1}^{n} f_{\varepsilon_i}(x_i - \theta X_i) \end{aligned}$$

C'est la densité jointe de $Y_1, \cdots, Y_n$.

(b) Montrons que si la loi de ε_1 est $\mathcal{N}(0,1)$, la densité du vecteur $(Y_1, \cdots, Y_n)$ est définie par :

$f_{(Y_1,\cdots,Y_n)}(y_1, \cdots, y_n) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} e^{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(y_i-\theta X_i)^2}$

On sait que $\varepsilon_1 \sim \mathcal{N}(0,1)$ et $f_{(Y_1,\cdots,Y_n)}(x_1, \cdots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} f_{\varepsilon_i}(x_i - \theta X_i)$.

Pour $x \in \mathbb{R}$, $f_{\varepsilon_i}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}$ donc $f_{\varepsilon_i}(x_i - \theta X_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(x_i-\theta X_i)^2}$.

Par suite,

$$\begin{aligned}
f_{(Y_1,\cdots,Y_n)}(y_1, \cdots, y_n) &= \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(y_i-\theta X_i)^2} \\
f_{(Y_1,\cdots,Y_n)}(y_1, \cdots, y_n) &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(y_i-\theta X_i)^2}
\end{aligned}$$

On a ainsi la densité du vecteur $(Y_1, \cdots, Y_n)$.

(c) Déduisons-en l'estimateur du maximum de vraisemblance $\hat{\theta}_n$ de θ :

Soit L, la fonction de vraisemblance associée à l'échantillon $Y_1, \cdots, Y_n$. On a :

$L(y, \theta) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(y_i-\theta X_i)^2}$.

La fonction de log-vraisemblance correspondante est :

$$\begin{aligned}
\ln L(y, \theta) &= \ln\left(\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(y_i-\theta X_i)^2}\right) \\
\ln L(y, \theta) &= -\frac{n}{2}\ln(2\pi) - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \theta X_i)^2
\end{aligned}$$

Posons $l(\theta) = \ln L(Y, \theta)$.

La fonction l est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall \theta \in \mathbb{R}$, on a :

$l'(\theta) = \sum_{i=1}^{n} X_i (Y_i - \theta X_i)$.

Posons $l'\left(\hat{\theta}\right) = 0$

$$\begin{aligned}
l'\left(\hat{\theta}\right) = 0 &\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} X_i \left(Y_i - \hat{\theta} X_i\right) = 0 \\
&\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} X_i Y_i - \sum_{i=1}^{n} \hat{\theta} X_i^2 = 0 \\
l'\left(\hat{\theta}\right) = 0 &\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} X_i Y_i = \sum_{i=1}^{n} \hat{\theta} X_i^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
l'\left(\hat{\theta}\right)=0 &\Rightarrow \hat{\theta}=\frac{\sum_{i=1}^{n} X_iY_i}{\sum_{i=1}^{n} X_i^2}\\
&\Rightarrow \hat{\theta}=\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i\left(\theta X_i+\varepsilon_i\right)}{\sum_{i=1}^{n} X_i^2}\\
&\Rightarrow \hat{\theta}=\frac{\theta\sum_{i=1}^{n} X_i^2+\sum_{i=1}^{n} X_i\varepsilon_i}{\sum_{i=1}^{n} X_i^2}\\
l'\left(\hat{\theta}\right)=0 &\Rightarrow \hat{\theta}=\theta+\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i\varepsilon_i}{\sum_{i=1}^{n} X_i^2}
\end{aligned}$$

La fonction l' est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall\theta\in\mathbb{R}$, on a :
$l''\left(\hat{\theta}\right)=-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} X_i^2<0$. D'où $\boxed{\hat{\theta}^{EMV}=\theta+\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i\varepsilon_i}{\sum_{i=1}^{n} X_i^2}}$

(d) Déterminons la loi de $\hat{\theta}_n$:

On a : $\hat{\theta}=\frac{\sum_{i=1}^{n} X_iY_i}{\sum_{i=1}^{n} X_i^2}$. De plus,
$f_{(Y_1,\cdots,Y_n)}\left(y_1,\cdots,y_n\right)=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}e^{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(y_i-\theta X_i)^2}$.

Cette densité révèle que chaque variable aléatoire Y_i suit la loi normale de paramètres $(\theta X_i,1)$. De plus, les Y_i sont i.i.d. (Car ε_i i.i.d. et X_i déterministe).

$\hat{\theta}_n=\sum_{i=1}^{n}\frac{X_i}{\sum_{i=1}^{n} X_i^2}Y_i$. Posons $W_i=\frac{X_i}{\sum_{i=1}^{n} X_i^2}$, on obtient donc : $\hat{\theta}_n=\sum_{i=1}^{n} W_iY_i$.
Ainsi, $\hat{\theta}_n$ est une variable gaussienne de paramètres $\left(\mathbb{E}_\theta\left(\hat{\theta}_n\right),\mathbb{V}_\theta\left(\hat{\theta}_n\right)\right)$.

$$\begin{aligned}
\bullet\mathbb{E}_\theta\left(\hat{\theta}_n\right)&=\mathbb{E}\left(\theta+\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i\varepsilon_i}{\sum_{i=1}^{n} X_i^2}\right)\\
&=\mathbb{E}\left(\theta\right)+\mathbb{E}\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i\varepsilon_i}{\sum_{i=1}^{n} X_i^2}\right)\\
&=\theta+\frac{1}{\sum_{i=1}^{n} X_i^2}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\mathbb{E}\left(\varepsilon_i\right)\right) \text{ Car les } \varepsilon_i \text{sont centrées.}\\
&=\theta+\frac{1}{\sum_{i=1}^{n} X_i^2}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\left(0\right)\right)\\
\mathbb{E}_\theta\left(\hat{\theta}_n\right)&=\theta
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bullet\mathbb{V}_\theta\left(\hat{\theta}_n\right)&=\mathbb{V}\left(\theta+\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i\varepsilon_i}{\sum_{i=1}^{n} X_i^2}\right)\\
&=\frac{1}{\left(\sum_{i=1}^{n} X_i^2\right)^2}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i^2\mathbb{V}\left(\varepsilon_i\right)\right)\\
\mathbb{V}_\theta\left(\hat{\theta}_n\right)&=\frac{1}{\sum_{i=1}^{n} X_i^2}
\end{aligned}$$

D'où on a : $\hat{\theta}_n \sim \mathcal{N}\left(\theta, \frac{1}{\sum_{i=1}^n X_i^2}\right)$.

(e) Déterminons le risque quadratique de cet estimateur $\hat{\theta}_n$ de θ :

$$EQM\left(\hat{\theta}_n\right) = \mathbb{V}_\theta\left(\hat{\theta}_n\right) + \mathbb{B}\left(\hat{\theta}_n\right)$$

$$\begin{aligned}
\bullet\mathbb{V}_\theta\left(\hat{\theta}_n\right) &= \frac{1}{\sum_{i=1}^n X_i^2} \\
\bullet\mathbb{B}\left(\hat{\theta}_n\right) &= \mathbb{E}_\theta\left(\hat{\theta}_n\right) - \theta \\
&= \theta - \theta \\
\mathbb{B}\left(\hat{\theta}_n\right) &= 0
\end{aligned}$$

On obtient ainsi : $\boxed{EQM\left(\hat{\theta}_n\right) = \frac{1}{\sum_{i=1}^n X_i^2}}$

2. On suppose maintenant que les X_i sont des variables aléatoires stochastiques i.i.d. et que X_i est indépendantes de ε_i. On note f_X la fonction de densité de X_1

(a) Explicitons la densité conditionnelle de $(Y_1, \cdots, Y_n)$ sachant $(X_1, \cdots, X_n)$:

Soit $(x_1, \cdots, x_n)$, une réalisation de $(X_1, \cdots, X_n)$. On a :

$$f_{(Y_1,\cdots,Y_n/X_1=x_1,\cdots,X_n=x_n)}(y_1, \cdots, y_n) = f_{(Y_1,\cdots,Y_n)}(y_1 = \theta x_1 + \varepsilon_1, \cdots, y_n = \theta x_n + \varepsilon_n)$$

Les X_i et ε_i sont indépendantes, $\forall i \in \{1, \cdots, n\}$. Donc les $\theta X_i + \varepsilon_i$ sont aussi indépendantes et on a :

$$\begin{aligned}
f_{(Y_1,\cdots,Y_n)}(y_1 = \theta x_1 + \varepsilon_1, \cdots, y_n = \theta x_n + \varepsilon_n) &= \prod_{i=1}^n f_{Y_i}(\theta x_i + \varepsilon_i) \\
f_{(Y_1,\cdots,Y_n)}(y_1 = \theta x_1 + \varepsilon_1, \cdots, y_n = \theta x_n + \varepsilon_n) &= \prod_{i=1}^n f_{\theta X_i + \varepsilon_i}(y_i)
\end{aligned}$$

Par ailleurs,

$$\begin{aligned}
f_{\theta X_i + \varepsilon_i}(y_i) &= \int_{\mathbb{R}} f_{(X_i,Y_i)}(x_i, y_i)\, dx_i \\
&= \int_{\mathbb{R}} f_{(X_i,Y_i)}(X_i = x_i, Y_i = y_i)\, dx_i \\
&= \int_{\mathbb{R}} f_{(X_i,Y_i)}(X_i = x_i, \theta x_i + \varepsilon_i = y_i)\, dx_i \\
&= \int_{\mathbb{R}} f_{(X_i,Y_i)}(X_i = x_i, \varepsilon_i = y_i - \theta x_i)\, dx_i \\
f_{\theta X_i + \varepsilon_i}(y_i) &= \int_{\mathbb{R}} f_{X_i}(x_i)\, f_{\varepsilon_i}(y_i - \theta x_i)
\end{aligned}$$

D'où

$$f_{(Y_1,\cdots,Y_n/X_1=x_1,\cdots,X_n=x_n)}\left(y_1,\cdots,y_n\right)=\prod_{i=1}^{n}\int_{\mathbb{R}} f_{X_i}\left(x_i\right)f_{\varepsilon_i}\left(y_i-\theta x_i\right)$$

(b) Explicitons la densité de $(X_1,\cdots,X_n,Y_1,\cdots,Y_n)$:

$$\begin{aligned}f_{(X_1,\cdots,X_n,Y_1,\cdots,Y_n)}\left(x_1,\cdots,x_n,y_1,\cdots,y_n\right)&=f_{(X_1,\cdots,X_n)}\left(x_1,\cdots,x_n\right)\times\\&\qquad f_{(Y_1,\cdots,Y_n/X_1=x_1,\cdots,X_n=x_n)}\left(y_1,\cdots,y_n\right)\\f_{(X_1,\cdots,X_n,Y_1,\cdots,Y_n)}\left(x_1,\cdots,x_{ns},y_1,\cdots,y_n\right)&=\left(\prod_{i=1}^{n}f_{X_i}\left(x_i\right)\right)\left(\prod_{i=1}^{n}\int_{\mathbb{R}}f_{X_i}\left(x_i\right)f_{\varepsilon_i}\left(y_i-\theta x_i\right)\right)\\f_{(X_1,\cdots,X_n,Y_1,\cdots,Y_n)}\left(x_1,\cdots,x_{ns},y_1,\cdots,y_n\right)&=\prod_{i=1}^{n}\left(f_{X_i}\left(x_i\right)\int_{\mathbb{R}}f_{X_i}\left(x_i\right)f_{\varepsilon_i}\left(y_i-\theta x_i\right)\right)\end{aligned}$$

C'est la densité de $(X_1,\cdots,X_n,Y_1,\cdots,Y_n)$.

(c) Démontrons que l'estimateur du maximum de vraisemblance $\hat{\theta}_n$ de θ ne dépend pas de la loi de X_1 :

La vraisemblance de θ sur un échantillon $(Y_1,\cdots,Y_n)$ de réalisation $(y_1,\cdots,y_n)$ est donnée par :

$$\begin{aligned}L\left(Y_1,\cdots,Y_n,\theta\right)&=\prod_{i=1}^{n}f_{Y_i}\left(y_i,\theta\right)\\L\left(Y_1,\cdots,Y_n,\theta\right)&=\prod_{i=1}^{n}\int_{\mathbb{R}}f_{X_i}\left(x_i\right)f_{\varepsilon_i}\left(y_i-\theta x_i\right)dx_i\end{aligned}$$

La log-vraisemblance associée est :

$$\begin{aligned}l\left(y_1,\cdots,y_n,\theta\right)&=\ln L\left(Y_1,\cdots,Y_n,\theta\right)\\&=\ln\left(\prod_{i=1}^{n}\int_{\mathbb{R}}f_{X_i}\left(x_i\right)f_{\varepsilon_i}\left(y_i-\theta x_i\right)dx_i\right)\\l\left(y_1,\cdots,y_n,\theta\right)&=\sum_{i=1}^{n}\ln\left[\int_{\mathbb{R}}f_{X_i}\left(x_i\right)f_{\varepsilon_i}\left(y_i-\theta x_i\right)dx_i\right]\end{aligned}$$

La fonction $\theta\mapsto f_{X_i}\left(x_i\right)f_{\varepsilon_i}\left(y_i-\theta x_i\right)$ est continue et positive sur $\mathbb{R}$, alors on a :

$$l\left(y_1,\cdots,y_n,\theta\right)=\sum_{i=1}^{n}\int_{\mathbb{R}}\left[\ln f_{X_i}\left(x_i\right)+\ln f_{\varepsilon_i}\left(y_i-\theta x_i\right)\right]dx_i$$

La fonction l est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall\theta\in\mathbb{R}$, on a :

$$l'\left(y_1,\cdots,y_n,\theta\right)=\sum_{i=1}^{n}\int_{\mathbb{R}}\frac{\partial f_{\varepsilon_i}\left(y_i-\theta x_i\right)}{\partial\theta}dx_i$$

$$l'(y_1, \cdots, y_n, \theta) = \sum_{i=1}^{n} \int_{\mathbb{R}} \frac{-x_i f'_{\varepsilon_i}(y_i - \theta x_i)}{f_{\varepsilon_i}(y_i - \theta x_i)} dx_i$$

Posons $l'(y_1, \cdots, y_n, \theta) = 0, \forall \theta \in \mathbb{R}$.

$$l'(y_1, \cdots, y_n, \theta) = 0 \Longleftrightarrow \sum_{i=1}^{n} \int_{\mathbb{R}} \frac{-x_i f'_{\varepsilon_i}(y_i - \theta x_i)}{f_{\varepsilon_i}(y_i - \theta x_i)} dx_i = 0$$
$$l'(y_1, \cdots, y_n, \theta) = 0 \Longleftrightarrow \sum_{i=1}^{n} \int_{\mathbb{R}} \frac{x_i f'_{\varepsilon_i}(y_i - \theta x_i)}{f_{\varepsilon_i}(y_i - \theta x_i)} dx_i = 0$$

Supposons que $\frac{x_i f'_{\varepsilon_i}(y_i - \theta x_i)}{f_{\varepsilon_i}(y_i - \theta x_i)} \geqslant 0, \forall x_i$. On a alors :

$$l'(y_1, \cdots, y_n, \theta) = 0 \Longleftrightarrow f'_{\varepsilon_i}(y_i - \theta x_i) = 0, \forall x_i.$$

On constate donc que la loi de X_1 n'intervient par dans la recherche de l'estimateur du maximum de vraisemblance $\hat{\theta}_n$ de θ. D'où le résultat.

(d) Soit $\hat{\theta}_{1n}$ l'estimateur des moindres carrés de θ. En supposant que les ε_i sont centrées et de variance σ^2. On pose $\mathbb{E}(X_1^2) = \sigma_X^2$. Donnons la loi asymptotique de $\sqrt{n}\left(\hat{\theta}_{1n} - \theta\right)$ quand $n \longrightarrow +\infty$:
Posons $F(\theta) = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (Y_i - \theta X_i)^2$. La fonction F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall \theta \in \mathbb{R}$, on a :

$$\frac{\partial F(\theta)}{\theta} = \sum_{i=1}^{n} \left[-2X_i (Y_i - \theta X_i)\right]$$
$$\frac{\partial F(\theta)}{\theta} = -2 \sum_{i=1}^{n} X_i (Y_i - \theta X_i)$$

Posons $\frac{\partial F\left(\hat{\theta}_{1n}\right)}{\hat{\theta}_{1n}} = 0$.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F\left(\hat{\theta}_{1n}\right)}{\hat{\theta}_{1n}} = 0 &\Longleftrightarrow \sum_{i=1}^{n} X_i \left(Y_i - \hat{\theta}_{1n} X_i\right) \\
&\Longleftrightarrow \sum_{i=1}^{n} X_i Y_i = \hat{\theta}_{1n} \sum_{i=1}^{n} X_i^2 \\
&\Longleftrightarrow \hat{\theta}_{1n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i Y_i}{\sum_{i=1}^{n} X_i^2} \\
\frac{\partial F\left(\hat{\theta}_{1n}\right)}{\hat{\theta}_{1n}} = 0 &\Longleftrightarrow \hat{\theta}_{1n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i (\theta X_i + \varepsilon_i)}{\sum_{i=1}^{n} X_i^2}
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial F\left(\hat{\theta}_{1n}\right)}{\hat{\theta}_{1n}} = 0 \Longleftrightarrow \hat{\theta}_{1n} = \theta + \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i\varepsilon_i}{\sum_{i=1}^{n} X_i^2}$$

• Calculons $\sqrt{n}\left(\hat{\theta}_{1n} - \theta\right)$:

$$\sqrt{n}\left(\hat{\theta}_{1n} - \theta\right) = \sqrt{n}\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i\varepsilon_i}{\sum_{i=1}^{n} X_i^2}$$
$$\sqrt{n}\left(\hat{\theta}_{1n} - \theta\right) = \sqrt{n}\left(\frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\varepsilon_i}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2}\right)$$

Les variables X_i sont i.i.d. alors, les X_i^2 sont aussi i.i.d. De plus, $\mathbb{E}\left(X_i^2\right) = \sigma_{X_i}^2 = \sigma_X^2 < +\infty$. Ainsi, d'après la loi faible des grands nombres, on a :

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{P}} \mathbb{E}\left(X_1^2\right) (\mathbf{a}).$$

Les variables X_i sont i.i.d., de même que les ε_i alors, les variables aléatoires $X_i\varepsilon_i$ sont i.i.d. et on a :

- $\mathbb{E}\left(X_i\varepsilon_i\right) = \mathbb{E}\left(X_i\right)\mathbb{E}\left(\varepsilon_i\right) = 0$
- $\mathbb{V}\left(X_i\varepsilon_i\right) = \mathbb{E}\left(X_i^2\varepsilon_i^2\right) - \left[\mathbb{E}\left(X_i\varepsilon_i\right)\right]^2$
  $= \mathbb{E}\left(X_i^2\varepsilon_i^2\right)$
  $= \mathbb{E}\left(X_i^2\right)\mathbb{E}\left(\varepsilon_i^2\right)$

$\mathbb{V}\left(X_i\varepsilon_i\right) = \sigma_X^2\sigma^2 < +\infty$ D'après le Théorème Central Limite, on a :

$$\frac{\sqrt{n}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\varepsilon_i - \mathbb{E}\left(X_i\varepsilon_i\right)\right)}{\sigma_X\sigma} \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1)$$
$$\sqrt{n}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\varepsilon_i\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}\left(0, \sigma_X^2\sigma^2\right) (\mathbf{b}).$$

De (a) et (b), on a :

$$\frac{\sqrt{n}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\varepsilon_i\right)}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}\left(0, \frac{\sigma_X^2\sigma^2}{\sigma_X^4}\right)$$
$$\sqrt{n}\left(\hat{\theta}_{1n} - \theta\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}\left(0, \frac{\sigma^2}{\sigma_X^2}\right)$$

D'où le résultat.

(e) Déduisons-en un intervalle de confiance de niveau asymptotique $1-\alpha$ pour θ avec $\alpha \in]0,1[$:

De la question précédente, on a :

$$\sqrt{n}\left(\hat{\theta}_{1n}-\theta\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}\left(0, \frac{\sigma^2}{\sigma_X^2}\right)$$

Donc, $\sqrt{n}\frac{\left(\hat{\theta}_{1n}-\theta\right)}{\frac{\sigma}{\sigma_X}} \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1)$. Pour $\alpha \in]0,1[$, on a :

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{\sqrt{n}\sigma_X}{\sigma}\left(\hat{\theta}_{1n}-\theta\right)\right| \leqslant q_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) = 1-\alpha$$

Avec $q_{1-\frac{\alpha}{2}}$, le quantile d'ordre $1-\frac{\alpha}{2}$ de la loi normale centrée réduite. On a donc :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(-q_{1-\frac{\alpha}{2}} \leqslant \frac{\sqrt{n}\sigma_X}{\sigma}\left(\hat{\theta}_{1n}-\theta\right) \leqslant q_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) &= 1-\alpha \\
\mathbb{P}\left(-\frac{\sigma}{\sqrt{n}\sigma_X}q_{1-\frac{\alpha}{2}} \leqslant \hat{\theta}_{1n}-\theta \leqslant \frac{\sigma}{\sqrt{n}\sigma_X}q_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) &= 1-\alpha \\
\mathbb{P}\left(-\hat{\theta}_{1n}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}\sigma_X}q_{1-\frac{\alpha}{2}} \leqslant -\theta \leqslant -\hat{\theta}_{1n}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}\sigma_X}q_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) &= 1-\alpha \\
\mathbb{P}\left(\hat{\theta}_{1n}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}\sigma_X}q_{1-\frac{\alpha}{2}} \leqslant -\theta \leqslant \hat{\theta}_{1n}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}\sigma_X}q_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) &= 1-\alpha
\end{aligned}$$

Un intervalle de confiance de niveau $1-\alpha$ pour θ est donc :

$$IC_{1-\alpha} = \left[\hat{\theta}_{1n}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}\sigma_X}q_{1-\frac{\alpha}{2}} ; \hat{\theta}_{1n}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}\sigma_X}q_{1-\frac{\alpha}{2}}\right].$$

Exercice 3

Soit $X_1, \cdots, X_n$ un échantillon de variables aléatoires i.i.d. de fonction de densité f définie par

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x} 1_{\{x>0\}}$$

1. Donnons la loi de $\bar{X}_n$:

   On sait que $\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ avec $X_i \sim \varepsilon(\lambda) \quad \forall i$. Et puisque les variables aléatoires X_i sont i.i.d., $\sum_{i=1}^{n} X_i \sim \Gamma(n, \lambda)$.

   ***Preuve* :**

   Soit X, une variable suivant la loi exponentielle de paramètre λ. Sa transformée de Laplace, pour $t \geqslant 0$ est donnée par :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[e^{-tX}\right] &= \int_{\mathbb{R}^+} e^{-tx}\left(\lambda e^{-\lambda x}\right) dx \\
&= \lambda \int_{\mathbb{R}^+} e^{-(\lambda+t)x} dx \\
\mathbb{E}\left[e^{-tX}\right] &= \frac{\lambda}{\lambda+t}
\end{aligned}$$

   En considérant n variables indépendantes de même loi exponentielle de paramètre λ, la transformée de Laplace associée à leur somme pour $t \geqslant 0$ est la suivante :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[e^{-t(X_1+\cdots+X_n)}\right] &= \prod_{i=1}^{n} \mathbb{E}\left[e^{-tX_i}\right] \\
\mathbb{E}\left[e^{-t(X_1+\cdots+X_n)}\right] &= \left(\frac{\lambda}{\lambda+t}\right)^n
\end{aligned}$$

   Déterminons à présent la transformée de Laplace d'une variable Y de loi $\Gamma(n, \lambda)$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[e^{-tY}\right] &= \int_{\mathbb{R}^+} e^{-ty} \frac{\lambda^n}{(n-1)!} y^{n-1} e^{-\lambda y} dy \\
\mathbb{E}\left[e^{-tY}\right] &= \lambda^n \int_{\mathbb{R}^+} \frac{e^{-(\lambda+t)y} y^{n-1}}{(n-1)!} dy \\
\mathbb{E}\left[e^{-tY}\right] &= \frac{\lambda^n}{(\lambda+t)^n}
\end{aligned}$$

L'égalité entre les deux transformations de Laplace est la preuve que Y et $X_1 + \cdots + X_n$ sont de même loi. Autrement dit, $\sum_{i=1}^{n} X_i \sim \Gamma(n, \lambda)$.
Posons $Y = \sum_{i=1}^{n} X_i$, on a donc : $\bar{X}_n = \frac{1}{n}Y$. La fonction de densité de $\bar{X}_n$ est donnée pour tout $\bar{x}_n$ par $f_{\bar{X}_n}(\bar{x}_n)$. Par ailleurs, on sait que :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\bar{X}_n < \bar{x}_n\right) &= \mathbb{P}\left(\frac{1}{n}Y < \bar{x}_n\right) \\
&= \mathbb{P}\left(Y < n\bar{x}_n\right) \\
F_{\bar{X}_n}(\bar{x}_n) &= F_Y(n\bar{x}_n)
\end{aligned}$$

Ainsi, on obtient :

$$\begin{aligned}
f_{\bar{X}_n}(\bar{x}_n) &= \frac{dF_{\bar{X}_n}(\bar{x}_n)}{d\bar{x}_n} \\
&= nf_Y(n\bar{x}_n) \\
&= n\frac{\lambda^n}{(n-1)!}(n\bar{x}_n)^{n-1} e^{-\lambda n\bar{x}_n} \\
f_{\bar{X}_n}(\bar{x}_n) &= n^n\frac{\lambda^n}{(n-1)!}\bar{x}_n^{n-1}e^{-\lambda n\bar{x}_n}
\end{aligned}$$

On remarque que les paramètres λ et n apparaissent de la même manière comme dans la fonction de densité de Y. Les coefficients n^n et n qui apparaissent dans cette fonction de densité permettent de normaliser la fonction de densité de $\bar{X}_n$ afin que son intégrale donne 1. On conclut ainsi que la variable aléatoire $\bar{X}_n \sim \Gamma(n, \lambda)$.

2. Calculons $\mathbb{E}\left(\frac{1}{\bar{X}_n}\right)$ et $\mathbb{V}\left(\frac{1}{\bar{X}_n}\right)$:

•$\mathbb{E}\left(\frac{1}{\bar{X}_n}\right)$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(\frac{1}{\bar{X}_n}\right) &= \mathbb{E}\left(\frac{n}{\sum_{i=1}^{n} X_i}\right) \\
\mathbb{E}\left(\frac{1}{\bar{X}_n}\right) &= n\mathbb{E}\left(\frac{1}{\sum_{i=1}^{n} X_i}\right)
\end{aligned}$$

Posons $Y = \sum_{i=1}^{n} X_i$. On a : $Y \sim \Gamma(n, \lambda)$. Ainsi,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(\frac{1}{\bar{X}_n}\right) &= n\int_{\mathbb{R}^+}\frac{1}{y}f_Y(y)\,dy \\
&= n\int_{\mathbb{R}^+}\frac{1}{y}\frac{\lambda^n}{(n-1)!}y^{n-1}e^{-\lambda y}dy \\
\mathbb{E}\left(\frac{1}{\bar{X}_n}\right) &= \frac{n\lambda^n}{(n-1)!}\int_{\mathbb{R}^+} y^{n-2}e^{-\lambda y}dy
\end{aligned}$$

Posons $z = \lambda y$, on a $dy = \frac{1}{\lambda}dz$.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(\frac{1}{\bar{X}_n}\right) &= \frac{n\lambda^n}{\lambda^{n-1}(n-1)!}\int_{\mathbb{R}^+} z^{n-2}e^{-z}dz \\
&= \frac{n\lambda^n}{\lambda^{n-1}(n-1)!}(n-2)! \\
\mathbb{E}\left(\frac{1}{\bar{X}_n}\right) &= \frac{n\lambda}{n-1} \text{ D'où le résultat.}
\end{aligned}$$

$\bullet \mathbb{V}\left(\frac{1}{\bar{X}_n}\right)$

$$\mathbb{V}\left(\frac{1}{\bar{X}_n}\right) = \mathbb{E}\left[\left(\frac{1}{\bar{X}_n}\right)^2\right] - \left[\mathbb{E}\left(\frac{1}{\bar{X}_n}\right)\right]^2$$

Déterminons d'abord $\mathbb{E}\left[\left(\frac{1}{\bar{X}_n}\right)^2\right]$.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\left(\frac{1}{\bar{X}_n}\right)^2\right] &= \mathbb{E}\left(\frac{n^2}{Y^2}\right) \\
&= n^2\mathbb{E}\left(\frac{1}{Y^2}\right) \\
&= n^2\int_{\mathbb{R}^+}\frac{1}{y^2}f_Y(y)\,dy \\
&= n^2\int_{\mathbb{R}^+}\frac{1}{y^2}\frac{\lambda^n}{(n-1)!}y^{n-1}e^{-\lambda y}dy \\
&= \frac{n^2\lambda^n}{(n-1)!}\int_{\mathbb{R}^+} y^{n-3}e^{-\lambda y}dy \\
&= \frac{n^2\lambda^n}{(n-1)!\lambda^{n-2}}\int_{\mathbb{R}^+} z^{n-3}e^{-z}dz \\
&= \frac{n^2\lambda^n}{(n-1)!\lambda^{n-2}}(n-3)! \\
\mathbb{E}\left[\left(\frac{1}{\bar{X}_n}\right)^2\right] &= \frac{n^2\lambda^2}{(n-1)(n-2)}
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}\left(\frac{1}{\bar{X}_n}\right) &= \frac{n^2\lambda^2}{(n-1)(n-2)} - \left(\frac{n\lambda}{n-1}\right)^2 \\
&= \frac{n^2\lambda^2}{(n-1)}\left(\frac{1}{n-2} - \frac{1}{n-1}\right) \\
\mathbb{V}\left(\frac{1}{\bar{X}_n}\right) &= \frac{n^2\lambda^2}{(n-1)^2(n-2)}
\end{aligned}$$

3. Montrons que $\mathbb{E}\left(\frac{1}{\bar{X}_n}\right)$ tend vers λ quand n tend vers $+\infty$:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}\left(\frac{1}{\bar{X}_n}\right) &= \lim_{n\to+\infty} \frac{n\lambda}{n-1} \\ &= \lim_{n\to+\infty} \frac{n\lambda}{n} \\ \lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}\left(\frac{1}{\bar{X}_n}\right) &= \lambda\end{aligned}$$

D'où le résultat.

4. Démontrons que

$$\mathbb{E}\left[\left(\frac{1}{\bar{X}_n}-\lambda\right)^2\right] = \mathbb{V}\left(\frac{1}{\bar{X}_n}\right) + \left[\mathbb{E}\left(\frac{1}{\bar{X}_n}-\lambda\right)\right]^2$$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\left(\frac{1}{\bar{X}_n}-\lambda\right)^2\right] &= \mathbb{E}\left[\left(\frac{1}{\bar{X}_n}\right)^2 - 2\frac{\lambda}{\bar{X}_n} + \lambda^2\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\left(\frac{1}{\bar{X}_n}\right)^2\right] - 2\lambda\mathbb{E}\left(\frac{1}{\bar{X}_n}\right) + \lambda^2 \\ &= \frac{n^2\lambda^2}{(n-1)(n-2)} - \frac{2n\lambda^2}{n-1} + \lambda^2 \\ &= \frac{n^2\lambda^2 - 2n\lambda^2(n-2) + \lambda^2(n-1)(n-2)}{(n-1)(n-2)} \\ &= \frac{4n\lambda^2 - 3n\lambda^2 + 2\lambda^2}{(n-1)(n-2)} \\ &= \frac{n\lambda^2 + 2\lambda^2}{(n-1)(n-2)} \\ &= \frac{(n-1)(n+2)\lambda^2}{(n-1)^2(n-2)} \\ \mathbb{E}\left[\left(\frac{1}{\bar{X}_n}-\lambda\right)^2\right] &= \frac{n^2\lambda^2 + n\lambda^2 - 2\lambda^2}{(n-1)^2(n-2)} \quad (\mathbf{1})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{V}\left(\frac{1}{\bar{X}_n}\right) + \left[\mathbb{E}\left(\frac{1}{\bar{X}_n}-\lambda\right)\right]^2 &= \frac{n^2\lambda^2}{(n-1)^2(n-2)} + \left(\frac{n\lambda}{n-1}-\lambda\right)^2 \\ &= \frac{n^2\lambda^2}{(n-1)^2(n-2)} + \frac{\lambda^2}{(n-1)^2} \\ \mathbb{V}\left(\frac{1}{\bar{X}_n}\right) + \left[\mathbb{E}\left(\frac{1}{\bar{X}_n}-\lambda\right)\right]^2 &= \frac{n^2\lambda^2 + n\lambda^2 - 2\lambda^2}{(n-1)^2(n-2)} \quad (\mathbf{2})\end{aligned}$$

De (1) et (2), on conclut donc que $\mathbb{E}\left[\left(\frac{1}{\bar{X}_n}-\lambda\right)^2\right]=\mathbb{V}\left(\frac{1}{\bar{X}_n}\right)+\left[\mathbb{E}\left(\frac{1}{\bar{X}_n}-\lambda\right)\right]^2$

- Déduisons-en que

$$\lim_{n\to\infty}\mathbb{E}\left[\left(\frac{1}{\bar{X}_n}-\lambda\right)^2\right]=0$$

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\mathbb{E}\left[\left(\frac{1}{\bar{X}_n}-\lambda\right)^2\right] &= \lim_{n\to\infty}\frac{n^2\lambda^2+n\lambda^2-2\lambda^2}{(n-1)^2(n-2)}\\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{n^2\lambda^2}{n^3}\\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{\lambda^2}{n}\\
\lim_{n\to\infty}\mathbb{E}\left[\left(\frac{1}{\bar{X}_n}-\lambda\right)^2\right] &= 0
\end{aligned}$$

5. Démontrons que $\frac{1}{\bar{X}_n}$ tend en probabilité vers λ :

   Les variables aléatoires $X_1,\cdots,X_n$ sont i.i.d. et positives, alors :

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{P}} \mathbb{E}(X_1) \text{ avec } \mathbb{E}(X_1)=\frac{1}{\lambda}$$

$$1 \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{P}} 1$$

   Ainsi, on a :

$$\frac{1}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i} \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{P}} \frac{1}{\frac{1}{\lambda}}$$

   Finalement,

$$\frac{1}{\bar{X}_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{P}} \lambda$$

6. Donnons la loi limite de $\sqrt{n}\left(\bar{X}_n-\frac{1}{\lambda}\right)$ puis celle de $\sqrt{n}\left(\frac{1}{\bar{X}_n}-\lambda\right)$:

- Loi limite de $\sqrt{n}\left(\bar{X}_n-\frac{1}{\lambda}\right)$:

   Les variables aléatoires réelles $X_1,\cdots,X_n$ sont i.i.d. de variance $\frac{1}{\lambda^2}<+\infty$. Alors, d'après le Théorème Central Limite, on a :

$$\sqrt{n}\left(\bar{X}_n-\mathbb{E}(X_1)\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}\left(0,\frac{1}{\lambda^2}\right) \text{ D'où}$$

$$\sqrt{n}\left(\bar{X}_n-\frac{1}{\lambda}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}\left(0,\frac{1}{\lambda^2}\right)$$

• Loi limite de $\sqrt{n}\left(\frac{1}{\bar{X}_n}-\lambda\right)$:

Soit la fonction
$\begin{array}{cccc} g & : & \mathbb{R}_+^* & \rightarrow & \mathbb{R}_+^* \\ & & x & \mapsto & \frac{1}{x} \end{array}$ La fonction g est continue et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et on a :
$g'(x) = -\frac{1}{x^2} \forall x \in \mathbb{R}_+^*$. En appliquant la méthode Delta à la loi limite de $\sqrt{n}\left(\bar{X}_n - \frac{1}{\lambda}\right)$, on a :

$$\begin{aligned}
\sqrt{n}\left(g\left(\bar{X}_n\right)-g\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right) &\xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}\left(0, \frac{1}{\lambda^2}\left[g'\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right]^2\right) \\
\sqrt{n}\left(\frac{1}{\bar{X}_n}-\lambda\right) &\xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}\left(0, \frac{1}{\lambda^2}\left(-\lambda^2\right)^2\right) \text{ D'oùs} \\
\sqrt{n}\left(\frac{1}{\bar{X}_n}-\lambda\right) &\xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}\left(0, \lambda^2\right)
\end{aligned}$$

Exercice 4

Considérons $X_1, \cdots, X_n$ un échantillon de variables aléatoires i.i.d. Calculons l'estimateur du maximum de vraisemblance lorsque la loi des variables X_i est :

1. Une loi de Poisson de paramètre $\theta > 0$:

   Soit $x \in [0, +\infty[$

   $f(x, \theta) = \frac{\theta^x \cdot e^{-\theta}}{x!}$ est la densité de X. La fonction de vraisemblance associée à l'échantillon considéré est donnée par :

$$
\begin{aligned}
L(x_1, x_2, \ldots, x_n, \theta) &= \prod_{i=1}^{n} f(x_i, \theta) \\
&= \prod_{i=1}^{n} \frac{\theta^{x_i}}{x_i!} e^{-\theta} \\
L(x_1, x_2, \ldots, x_n, \theta) &= e^{n\theta} \cdot \prod_{i=1}^{n} \frac{\theta^{x_i}}{x_i!}
\end{aligned}
$$

   La fonction de log-vraisemblance correspondante est :

$$
\begin{aligned}
l(x_1, \cdots, x_n, \theta) &= \ln L(x_1, x_n, \theta) \\
&= \ln \left[e^{-n\theta} \prod_{i=1}^{n} \frac{\theta^{x_i}}{x_i!} \right] \\
l(x_1, \cdots, x_n, \theta) &= -n\theta + \sum_{i=1}^{n} \ln \left(\frac{\theta^{x_i}}{x_i} \right) \\
l(x_1, \cdots, x_n, \theta) &= -n\theta + \sum_{i=1}^{n} (x_i \ln \theta - \ln(x_i!))
\end{aligned}
$$

   Posons $l(\theta) = l(x_1, \cdots, x_n, \theta)$.

   La fonction l est continue et dérivable sur $]0, +\infty[$ et $\forall \theta > 0$, on a :

$$
\begin{aligned}
l'(\theta) &= \frac{\partial l(x_1, \cdots, x_n, \theta)}{\partial \theta} \\
l'(\theta) &= -n + \frac{1}{\theta} \sum_{i=1}^{n} x_i
\end{aligned}
$$

   Posons $l'(\theta) = -n + \frac{1}{\theta} \sum_{i=1}^{n} X_i = 0$.

$$
\begin{aligned}
l'(\theta) = 0 &\Rightarrow -n + \frac{1}{\theta} \sum_{i=1}^{n} X_i = 0 \\
l'(\theta) = 0 &\Rightarrow n = \frac{1}{\theta} \sum_{i=1}^{n} X_i
\end{aligned}
$$

$$l'(\theta) = 0 \Rightarrow \theta = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

La fonction l' est continue et dérivable sur $]0, +\infty[$ et $\forall \theta > 0$, on a :

$l"(\theta) = -\frac{1}{\theta^2}\sum_{i=1}^{n} X_i < 0$.

Ainsi, l'estimateur du maximum de vraisemblance recherché est :

$\boxed{\hat{\theta}^{EMV} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i}$

2. Une loi exponentielle $\varepsilon(\theta)$ de paramètre $\theta > 0$.

   La densité correspondante est donnée par : $f(x;\theta) = \theta e^{-\theta x}$, $\forall x \geqslant 0$.

   La fonction de vraisemblance L et celle de log-vraisemblance associée à un échantillon $(X_1, \cdots, X_1)$ sont respectivement :

$$L(x_1, \cdots, x_n, \theta) = \prod_{i=1}^{n} \theta e^{-\theta x_i} = \theta^n e^{-\sum_{i=1}^{n} \theta x_i}$$

$$l(x_1, \cdots, x_n, \theta) = \ln(x_1, \ldots, x_n,)$$

$$l(x_1, \cdots, x_n, \theta) = n\ln\theta - \sum_{i=1}^{n} \theta x_i$$

   Posons $l(\theta) = l(x_1, \cdots, x_n, \theta)$.

   La fonction l est continue et dérivable sur $]0, +\infty[$ et $\forall \theta > 0$, on a :

$$l'(\theta) = \frac{\partial l(x_1, \cdots, x_n, \theta)}{\partial \theta}$$

$$l'(\theta) = \frac{n}{\theta} - \sum_{i=1}^{n} x_i$$

   Posons $l'(\theta) = \frac{n}{\theta} - \sum_{i=1}^{n} X_i = 0$.

$$l'(\theta) = 0 \Rightarrow \frac{n}{\theta} - \sum_{i=1}^{n} X_i = 0$$

$$\Rightarrow \frac{n}{\theta} = \sum_{i=1}^{n} X_i$$

$$l'(\theta) = 0 \Rightarrow \theta = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} X_i}$$

   La fonction l' est continue et dérivable sur $]0, +\infty[$ et $\forall \theta > 0$, on a :

   $l"(\theta) = -\frac{n}{\theta^2} < 0$. D'où on obtient : $\boxed{\hat{\theta}^{EMV} = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} X_i}}$

Exercice 5

Soit la densité de probabilité f définie par

$$f(x) = 2(1-x)1_{\{0\leqslant x\leqslant 1\}}.$$

Soit $X_1, \cdots, X_n$ un échantillon de variables aléatoires i.i.d. de loi g définie par

$$g(x) = f(x-\theta)$$

où $\theta \in \mathbb{R}$ est un paramètre inconnu.

1. Déterminons l'estimateur θ_n^M par la méthode des moments :

   Calculons $\mathbb{E}\left(X\right)$ avec $g(x) = 2(1-x+\theta)1_{\{\theta\leqslant x\leqslant \theta+1\}}$.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(X\right) &= 2\int_{\theta}^{\theta+1} x\left(1-x+\theta\right)dx \\
&= 2\left[\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}\theta x^2\right]_{\theta}^{\theta+1} \\
&= 2\left[\frac{1}{2}\left(1+\theta\right)\left(1+\theta\right) - \frac{1}{3}\left(1+\theta\right)^3 - \frac{1}{2}\theta^2\left(1+\theta\right) + \frac{1}{3}\theta^3\right] \\
&= \frac{1}{3}\left[3\left(1+\theta\right)^3 - 2\left(1+\theta\right)^3 - 3\theta^2\left(1+\theta\right) + 2\theta^3\right] \\
&= \frac{1}{3}\left[\left(1+\theta\right)^3 - \theta^3 - 3\theta^2\right] \\
&= \frac{1}{3}\left(\theta^3 + 3\theta^2 + 3\theta + 1 - \theta^3 - 3\theta^2\right) \\
&= \frac{1}{3}\left(3\theta + 1\right) \\
\mathbb{E}\left(X\right) &= \theta + \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

   Soit la fonction

$$\begin{array}{cccc} \varphi & : & \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R}_+^* \\ & & \theta & \mapsto & \theta + \frac{1}{3} \end{array} \quad \text{avec} \quad \begin{array}{cccc} \varphi^{-1} & : & \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R}_+^* \\ & & t & \mapsto & t - \frac{1}{3} \end{array}$$

   Soit

$$\begin{array}{cccc} \phi & : & \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R}_+^* \\ & & x & \mapsto & x \end{array}$$

On a donc :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\phi\left(X\right)\right] &= \mathbb{E}\left(X\right)\\ &= \theta + \frac{1}{3}\\ \mathbb{E}\left[\phi\left(X\right)\right] &= \varphi\left(\theta\right)\end{aligned}$$

Ce qui nous permet d'écrire :

$$\begin{aligned}\hat{\theta}_n^M &= \varphi^{-1}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right)\\ &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{1}{3}\\ \hat{\theta}_n^M &= \bar{X}_n - \frac{1}{3}\end{aligned}$$

2. Vérifions les propriétés suivantes :

   (a) Consistance de θ_n^M On sait que les variables aléatoires $X_1, \cdots, X_n$ sont i.i.d. et positives. Alors,

$$\begin{aligned}&\bar{X}_n \xrightarrow[n\to+\infty]{p.s.} \mathbb{E}\left(X_1\right)\\ &\bar{X}_n \xrightarrow[n\to+\infty]{p.s.} \theta + \frac{1}{3}\\ &\bar{X}_n - \frac{1}{3} \xrightarrow[n\to+\infty]{p.s.} \theta\\ &\hat{\theta}_n^M \xrightarrow[n\to+\infty]{p.s.} \theta\end{aligned}$$

   D'où $\hat{\theta}_n^M$ est consistant.

   (b) Biais de θ_n^M

$$\begin{aligned}\mathbb{B}_\theta\left(\hat{\theta}_n^M\right) &= \mathbb{E}_\theta\left(\hat{\theta}_n^M\right) - \theta\\ &= \mathbb{E}\left(\bar{X}_n - \frac{1}{3}\right) - \theta\\ &= \mathbb{E}\left(\bar{X}_n\right) - \frac{1}{3} - \theta\\ &= \mathbb{E}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) - \frac{1}{3} - \theta\\ &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}\left(X_i\right) - \frac{1}{3} - \theta\\ &= \frac{1}{n}\left(n\right)\left(\theta + \frac{1}{3}\right) - \frac{1}{3} - \theta\\ \mathbb{B}_\theta\left(\hat{\theta}_n^M\right) &= 0\end{aligned}$$

Alors, $\hat{\theta}_n^M$ est un estimateur sans biais de θ.

(c) Loi asymptotique de θ_n^M

Les variables aléatoires $X_1, \cdots, X_n$ sont i.i.d. Calculons $\mathbb{V}_\theta\left(\hat{\theta}_n^M\right)$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}_\theta\left(\hat{\theta}_n^M\right) &= \mathbb{V}\left(\bar{X}_n - \frac{1}{3}\right) \\
&= \mathbb{V}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) \\
&= \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} \mathbb{V}\left(X_i\right) \\
\mathbb{V}_\theta\left(\hat{\theta}_n^M\right) &= \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} \mathbb{V}\left(X\right)
\end{aligned}$$

On peut calculer $\mathbb{V}(X)$ de la façon suivante :

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}\left(X^2\right) - \left[\mathbb{E}(X)\right]^2$$

Par ailleurs,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X) &= \theta + \frac{1}{3} \\
\mathbb{E}\left(X^2\right) &= 2\int_{\theta}^{\theta+1} x^2\left(1 - x + \theta\right) dx \\
&= 2\left[\frac{1}{3}\left(\theta+1\right)x^3 - \frac{1}{4}x^4\right]_\theta^{\theta+1} \\
&= \frac{1}{6}\left[\left(\theta+1\right)^4 - \theta^4 - 4\theta^3\right] \\
\mathbb{E}\left(X^2\right) &= \frac{1}{6}\left(6\theta^2 + 4\theta + 1\right)
\end{aligned}$$

Ce qui nous conduit à :

$$\mathbb{V}(X) = \theta^2 + \frac{2}{3}\theta + \frac{1}{6} - \theta^2 - \frac{1}{9} - \frac{2}{3}\theta = \frac{1}{18}$$

Finalement, $\mathbb{V}_\theta\left(\hat{\theta}_n^M\right) = \frac{1}{18n}$. Ce qui converge vers 0 lorsque $n \longrightarrow +\infty$.

D'après le Théorème Central Limite (TCL), on a :

$$\frac{\hat{\theta}_n^M - \mathbb{E}\left(\hat{\theta}_n^M\right)}{\sqrt{\mathbb{V}\left(\hat{\theta}_n^M\right)}} \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1)$$

$$\hat{\theta}_n^M \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}\left(\mathbb{E}\left(\hat{\theta}_n^M\right), \mathbb{V}\left(\hat{\theta}_n^M\right)\right)$$

D'où $\hat{\theta}_n^M \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}\left(\theta, \frac{1}{18n}\right)$

(d) Déterminons l'estimateur du maximum de vraisemblance de θ :

La fonction de vraisemblance associée à l'échantillon $(X_1, \cdots, X_n)$ donnée par :

$$L(x_1, \cdots, x_n, \theta) = \prod_{i=1}^{n} g(x_i)$$
$$L(x_1, \cdots, x_n, \theta) = 2^n \prod_{i=1}^{n} (1 - x_i + \theta)\, 1_{\{\theta \leqslant x_i \leqslant \theta+1\}}$$

La fonction de log-vraisemblance correspondante est :

$$\begin{aligned} l(x_1, \cdots, x_n, \theta) &= \ln L(x_1, \cdots, x_n, \theta) \\ &= \ln \left[2^n \prod_{i=1}^{n} (1 - x_i + \theta)\, 1_{\{\theta \leqslant x_i \leqslant \theta+1\}}\right] \\ l(x_1, \cdots, x_n, \theta) &= n \ln 2 + \sum_{i=1}^{n} \ln(1 - x_i + \theta)\, 1_{\{\theta \leqslant x_i \leqslant \theta+1\}} \end{aligned}$$

La fonction l est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall \theta \in \mathbb{R}$, on a :

$$\frac{\partial l(x_1, \cdots, x_n, \theta)}{\partial \theta} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(1 - x_i + \theta)} 1_{\{\theta \leqslant x_i \leqslant \theta+1\}}$$

La fonction l est continue et au moins deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall \theta \in \mathbb{R}$, on a :

$$\frac{\partial^2 l(x_1, \cdots, x_n, \theta)}{\partial \theta^2} = -\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(1 - x_i + \theta)^2} 1_{\{\theta \leqslant x_i \leqslant \theta+1\}} < 0$$

Ainsi, le paramètre θ admet bien un estimateur du maximum de vraisemblance. On a :

$$\begin{aligned} \theta \leqslant x_i \leqslant \theta + 1 &\Rightarrow -\theta - 1 \leqslant -x_i \leqslant -\theta \quad \forall i \\ &\Rightarrow -\theta - 1 \leqslant -x_i \leqslant -\theta \quad \forall i \\ &\Rightarrow 0 \leqslant 1 - x_i + \theta \leqslant 1 \quad \forall i \\ \theta \leqslant x_i \leqslant \theta + 1 &\Rightarrow x_i - 1 \leqslant \theta \leqslant x_i \quad \forall i \end{aligned}$$

On remarque que la fonction de log-vraisemblance sera à son maximum lorsqu'on aura $\theta = \max\{X_1, \cdots, X_n\}$. L'estimateur recherché est alors :

$\boxed{\hat{\theta}_n^{EMV} = \max\{X_1, \cdots, X_n\}}$

Conclusion

Ce projet permet de se familiariser avec certains termes en matières de construction d'estimateurs, ainsi que les différentes propriétés vérifiées par un bon estimateur.