Numerisk utrekning av fourier-koeffisientane

Vi startar med ein $2L$-periodisk funksjon

$$f(x) = \begin{cases} -1 & , -L \le x < 0 \\ 1 & , 0 \le x < L \end{cases}$$

$$f(x + 2L) = f(x)$$

Formlane for fourier-koeffisientane

$$a_0 = \frac{1}{2L} \int_{-L}^{L} f(x) dx$$

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \cdot \cos\left(\frac{\pi n}{L} x\right) dx$$

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \cdot \sin\left(\frac{\pi n}{L} x\right) dx$$

I desse formlane står L for halve perioden. Vi skal bruke ein funksjon med periode 2π og formlane dermed kan forenklast betrakteleg. Vi skal likevel bruke desse meir generelle versjonane slik at vi etterpå også kan bruke funksjonar med andre perioder.

Vi skal bruke numerisk integrasjon til å bestemme tilnærmingsverdiar for fourier-koeffisientane. Til dette skal vi bruke trapesmetoden. Dette blir faktisk meir nøyaktig enn ein skulle tru. Vi skal ikkje gå inn på kvifor dette er godt nok.

Vi startar med å definere ein hjelpefunksjon som skal gjere det enklare å plotte periodiske funksjonar. Dette er ikkje nødvendig.

```
% Helping function to turn a regular function into a periodic function
% periodic   = @(f,p) @(x) f(mod(x-p(1),p(2)-p(1))+p(1));
PeriodicFunction = @(f,p) @(x) f(x - (p(2)-p(1))*floor((x-p(1))/(p(2)-p(1))));
```

Vi definerer først funksjonen og så intervallet som skal repeterast. Perioden må sjølvsagt vere lik breidda av dette intervallet.

```
% Definition of the function
f           = @(x) -1+2*heaviside(x);

% Repeating x-interval
Interval    = [-pi pi];

% Calculating period p, and half period L.
p           = Interval(2)-Interval(1);
L           = p/2;
```

Definerer deretter ein periodisk funksjon ved hjelp av hjelpefunksjonen. Dette er unødvendig.

```
% Periodic version of function f, repeating the interval P
f_periodic = PeriodicFunction(f,Interval);
```

Vi bestemmer deretter ein del parameter for utrekningane. Vi må bestemme kor mange koeffisientar vi vil rekne ut, og vi må bestemme kor nøyaktig integreringa skal vere. Vi må passe på at antall koeffisientar ikkje overstig halvparten av antall samplar (antall punkt i x-verdi lista vår).

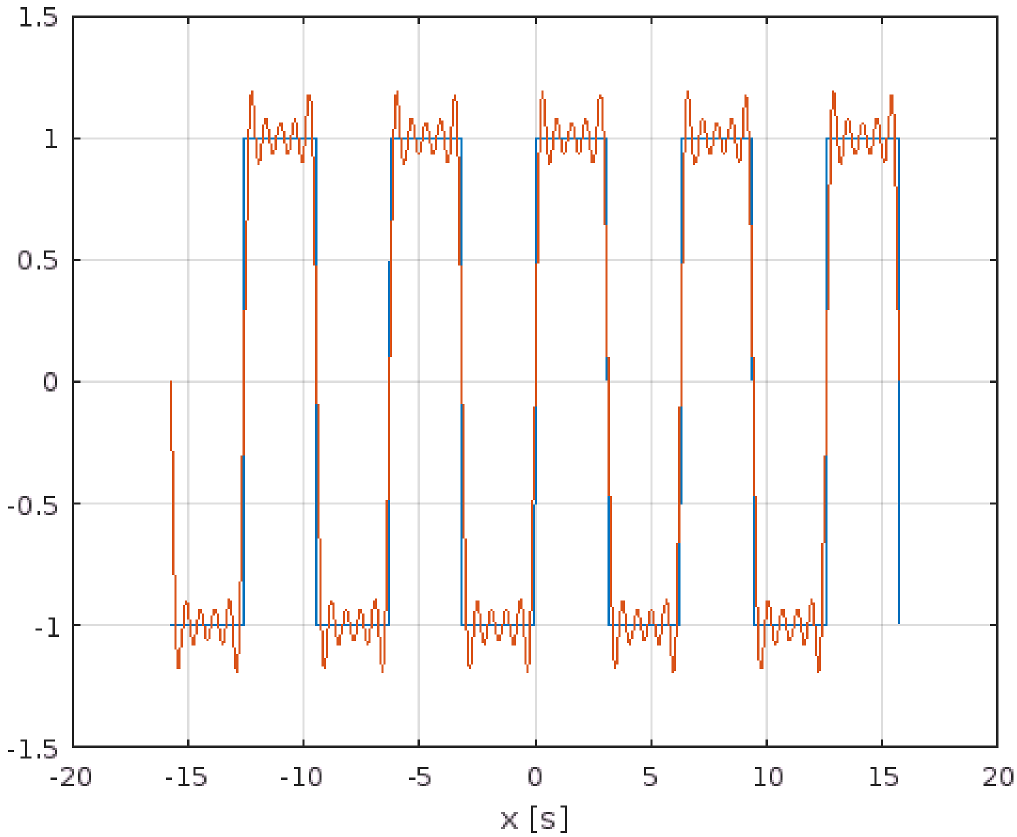
```
% Number of coefficients to calculate. N should be less than half the
% number of samples:  2*N < samples
N = 10;
samples = 100;
```

Vi reknar så ut koeffisientane ved hjelp av integral-formlane. I staden for symbolsk integrasjon brukar vi numerisk integrasjon nærmare bestemt trapes-motoden.

```
% Calculating the coefficients with trapezoid-method.
x  = linspace(Interval(1),Interval(2),samples);
a  = zeros(1,N);
b  = zeros(1,N);

a0 = 1/(2*L)*trapz(x,f(x));

for n = 1:N
    a(n) = 1/L*trapz(x,f(x).*cos(pi*n/L*x));
    b(n) = 1/L*trapz(x,f(x).*sin(pi*n/L*x));
end
```

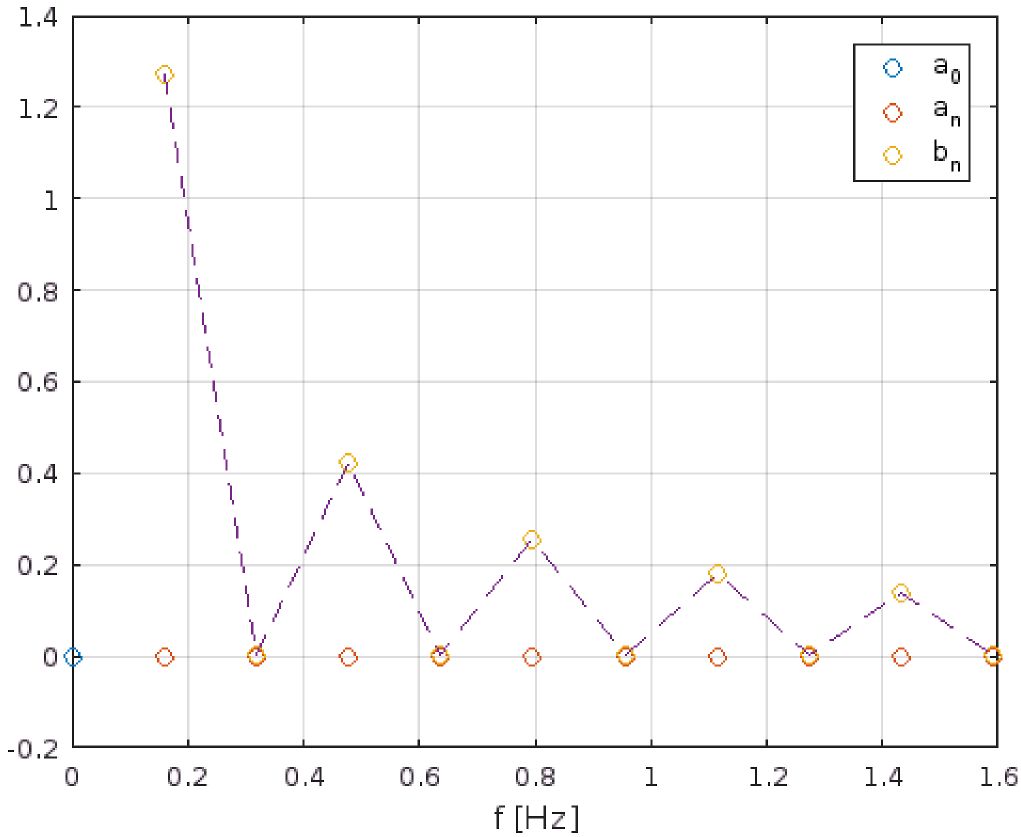
Når vi no har koeffisientane kan vi regenerere funksjonen vår ved å rekne ut summen av dei første N ledda i fourierrekka. I dette eksempelet plottar eg 3 periodar av funksjonen.

```
% Using the coefficients to generate a plot with the repeated function
% and the fourier series in the same coordinate system.

% The plot-interval.
W = 5*Interval;

X = linspace(W(1),W(2),1001);
Y = a0*ones(size(X));

for n = 1:N
    Y = Y + a(n)*cos(pi*n/L*X) + b(n)*sin(pi*n/L*X);
end

figure(1)
plot(X,f_periodic(X),X,Y), grid on, xlabel('x [s]')
```



Til slutt tek vi med ein graf som viser størrelsen til dei ulike koeffisientane. Det er viktig å merke seg at n-verdien eigentleg svarar til ein frekvens. n = 1 er grunnfrekvensen medan n = 2 er første overtone. Den stipla linja er amplituden til summen av sinus og cosinus leddet for kvar frekvens.

```
figure(2)
A     = sqrt(a.^2+b.^2);
freqs = (1:N)/p;

plot(0,a0,'o',freqs,a,'o',freqs,b,'o',freqs,A,'--'), grid on, xlabel('f [Hz]')
legend('a_0','a_n','b_n')
```



1.4
1.2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
1.2
1.4
1.6
f [Hz]
a_0
a_n
b_n