求绝对值函数的一个解法

sekift

如今观学生在求解带绝对值的不等式或求极值时，总对绝对值困惑，认为去绝对值符号要判断许多条件。解绝对值现在多用定义法、平方法、零点分类法和图像法等方法，多数是分类讨论。主要在高年级时，求带绝对值函数的极值，鉴于未去绝对值不好求导，因此些方法并不方便。本文用符号函数将化简绝对值。

首先，符号函数定义为：

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} -1 & : \quad x < 0 \\ 0 & : \quad x = 0 \\ 1 & : \quad x > 0 \end{cases}$$

即当值大于 0 时，取为 1；等于 0 时，取为 0；小于 0 时，取为-1。

因此有：

$$x = \operatorname{sgn}(x)|x| \text{ 和 } |x| = \operatorname{sgn}(x)x$$

这样即可把绝对值函数转化为符号函数和内函数的积，达到求解过程化简的目的。

1、求 $y = x^2 - 6x + \dfrac{4}{|x-3|}(x \neq 3)$ 的极值。

解：$f(x) = x^2 - 6x + \dfrac{4}{|x-3|}$

$= x^2 - 6x + \dfrac{4\operatorname{sgn}(x-3)}{x-3}$

$f'(x) = 2x - 6 - \dfrac{4\operatorname{sgn}(x-3)}{(x-3)^2}$

当$f'(x)=0$,解得

$x=3+\sqrt[3]{2\operatorname{sgn}(x-3)}$

$=3+\sqrt[3]{2}\operatorname{sgn}(x-3)$

当$x<3$时，得$x=3-\sqrt[3]{2}$

当$x>3$时，得$x=3+\sqrt[3]{2}$

故$\min f = f(3-\sqrt[3]{2}) = f(3+\sqrt[3]{2})=3\sqrt[3]{4}-9$

2、求$\min f(x): f(x)=\sum_{i=1}^{2011}|ix-1|=|x-1|+|2x-1|+...+|2011x-1|$

$f(x)=\sum_{i=1}^{2011}|ix-1|$

$=\sum_{i=1}^{2011}(ix-1)\operatorname{sgn}(ix-1)$

$=x\sum_{i=1}^{2011}i\operatorname{sgn}(ix-1)-\sum_{i=1}^{2011}\operatorname{sgn}(ix-1)$

$f'(x)=\sum_{i=1}^{2011}i\operatorname{sgn}(ix-1)$

要求$\operatorname{mind}|f'(x)-0|$，则为

$\operatorname{mind}|2\frac{(1+m)m}{2}-\frac{(1+2011)2011}{2}|$

$=\operatorname{mind}|m^2+m-1006*2011|$

解得：$m=\frac{\sqrt{4*1006*2011+1}-1}{2}$，取$m$=1422即可求函数最小值，

此时，$x=\frac{1}{1422},\min f(x)=\frac{592043}{711}$

3、 $f(x)=\sum_{i=1}^{n}|i^k x-1|, n,k\in N^+, k<n,$ 求 $\min f(x).$

$$f(x)=\sum_{i=1}^{n}|i^k x-1|$$

$$=\sum_{i=1}^{n}(i^k x-1)\operatorname{sgn}(i^k x-1)$$

$$=x\sum_{i=1}^{n}i^k\operatorname{sgn}(i^k x-1)-\sum_{i=1}^{n}\operatorname{sgn}(i^k x-1)$$

$$f'(x)=\sum_{i=1}^{n}i^k\operatorname{sgn}(i^k x-1)$$

要求 $\min \mathrm{d}|f'(x)-0|$,则为

$$\min \mathrm{d}|2\sum_{i=1}^{m}i^k-\sum_{i=1}^{n}i^k|$$

由于 $\sum_{i=1}^{n}i^k=\prod_{i=1}^{k+1}a_i(b_i n+c_i)$,则

$$\min \mathrm{d}|2\sum_{i=1}^{m}i^k-\sum_{i=1}^{n}i^k|$$

$$=\min \mathrm{d}\,|\,2\prod_{i=1}^{k+1}a_i(b_i m+c_i)-\prod_{i=1}^{k+1}a_i(b_i n+c_i)\,|$$

$$=\min \mathrm{d}\,|\prod_{i=1}^{k+1}a_i(b_i\sqrt[k+1]{2}m+\sqrt[k+1]{2}c_i)-\prod_{i=1}^{k+1}a_i(b_i n+c_i)\,|$$

解得 $\sqrt[k+1]{2}m=n+\mathrm{o}(k,n)$,得 $m=2^{-\frac{1}{k+1}}n$,求得

$x=\dfrac{1}{\left\lceil 2^{-\frac{1}{k+1}}n\right\rceil^k}$,$\lceil\ \rceil$ 表示上取整。