可交换函数及其应用

Sekift　574919797@qq.com

1 问题的提出

在求多元函数的极值或证明多元函数不等式时，其所使用的方法一般都是利用偏导数法或基础不等式求解，这是通用的方法，但是对于某些函数，可以具有更简捷的解法，并不必求解全部元素的偏导数方程，也不必利用基础不等式。以下就给出这类函数的性质及应用。

2 可交换函数

定义 1：若 n 元函数某两个自变量交换位置后，函数同等，则称此两自变量对该函数可交换，该函数称为可交换函数；若函数中任意两个自变量都可以交换，则称此函数为全交换函数。

如函数 $f(x_1,x_2)=x_1+x_2$，x_1、x_2 交换后有 $f(x_2,x_1)=x_2+x_1$，明显 $f(x_1,x_2)=f(x_2,x_1)$，称 x_1、x_2 对于函数 $f(x_1,x_2)$ 可交换，函数 $f(x_1,x_2)$ 称为可交换函数，而且是全交换函数。

定理 1：n 元函数 $f_1: f(x_1,\cdots,x_u,\cdots,x_v,\cdots,x_n)$ 与 n-1 元函 $f_2: f(x_1,\cdots,x_u,\cdots,x_n)$ (即 $x_u=x_v$)取得相同极值的充要条件是：

$$x_u\text{、}x_v \text{对于} f_1 \text{可交换。}$$

证明：必要性。对于 n 元函数 f_1，其有偏导数 $\frac{\partial f_1}{\partial x_u}$、$\frac{\partial f_1}{\partial x_v}$，由于 f_1 与 f_2 取得相同极值，此时 $x_u=x_v$，有 $\frac{\partial f_1}{\partial x_u}=\frac{\partial f_1}{\partial x_v}$，则在 f_1 中 x_u、x_v 可交换。

充分性。f_1 对 x_u、x_v 的偏导数为：

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_u}=\frac{\partial f(x_1,\cdots,x_u,\cdots,x_v,\cdots,x_n)}{\partial x_u}\text{、}\frac{\partial f_1}{\partial x_v}=\frac{\partial f(x_1,\cdots,x_u,\cdots,x_v,\cdots,x_n)}{\partial x_v}$$

又由于 x_u、x_v 对于 f_1 可交换，即 $f(x_1,\cdots,x_u,\cdots,x_v,\cdots,x_n)=f(x_1,\cdots,x_v,\cdots,x_u,\cdots,x_n)$，而且

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_v}=\frac{\partial f(x_1,\cdots,x_u,\cdots,x_v,\cdots,x_n)}{\partial x_v}=\frac{\partial f(x_1,\cdots,x_v,\cdots,x_u,\cdots,x_n)}{\partial x_u}$$

$$=\frac{\partial f(x_1,\cdots,x_u,\cdots,x_v,\cdots,x_n)}{\partial x_u}=\frac{\partial f_1}{\partial x_u}$$

此时有 $x_u=x_v$，即是函数 f_2，故两者极值必然相同，得证。

定理 2：在 n 元函数 $f:f(x_1,\cdots,x_u,\cdots,x_v,\cdots,x_w,\cdots,x_n)$ 中，若 x_u、x_v 可交换，而且 x_u、x_w 可交换，则 x_v、x_w 也可交换。

证明：根据定理 1 可知，可交换时有 $x_u=x_v$，$x_u=x_w$，则必有 $x_v=x_w$。

定理 3：若 n 元函数 f_1 是全交换函数，则 f_1 与函数 $f(x)$（$x_1=x_2=\cdots\cdots=x_n=x$）取得相同极值。

证明：此定理是定理 1 的推论。

引理 1：若函数 f 只有一个极值，则此极值为该函数的最值。

根据定理 2，对于 n 元函数 f，若其他所有变量都与第一个变量可交换，则此函数就是全交换函数；根据定理 3，可以知道全交换函数在自变量全等时取得极值；根据引理 1，若函数只有一个极值，则求得的值即是函数 f 的最值。

对于带系数或差一个常数的自变量，可以先用代换法(线性代换：$x_u=ax_v+b$)将函数变为可变换函数，再求解。

3 可交换偏导函数

由定理 1 可知，一个函数是可交换函数的条件是其偏导函数是可交换函数，因此证明偏导函数是可交换函数也可以快捷求函数的极值。同样，对于偏导函数的自变量也可以先作线性变换：$x_u=ax_v+b$ 将其变为可交换偏导函数，再求极值。

考虑带条件极值问题：

$$f:f(x_1,\cdots\cdots,x_n) \tag{1}$$

在条件：

$$g:g(x_1,\cdots\cdots x_n)=0 \tag{2}$$

下的极值。设

$$L(x_1,\cdots\cdots,x_n,\lambda)=f(x_1,\cdots\cdots,x_n)+\lambda g(x_1,\cdots\cdots x_n) \tag{3}$$

为相应的拉格朗日函数，设 x_i 、 x_j (i，j=1、2、……、n)是两个自变量，则在求极值时有：

$$\frac{\partial L}{\partial x_i}=\frac{\partial f}{\partial x_i}+\lambda\frac{\partial g}{\partial x_i}=0 \text{、} \frac{\partial L}{\partial x_j}=\frac{\partial f}{\partial x_j}+\lambda\frac{\partial g}{\partial x_j}=0 \tag{4}$$

则可以求得：

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}=(\frac{\partial g}{\partial x_j}\div\frac{\partial g}{\partial x_i})\cdot\frac{\partial f}{\partial x_i} \tag{5}$$

由公式(5)可以求出 x_j 关于 x_i 的方程 $x_j=ax_i+b$ (如果存在这种关系)，再将此值代入条件公式(2)即可以求解函数 f 的极值。

若条件的形式如：

$$g:g(x_1,\cdots\cdots x_n)=\sum_{k=1}^{n}c_k x_k-c=0 \tag{6}$$

则公式(5)为：

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}=(\frac{c_j}{c_i})\cdot\frac{\partial f}{\partial x_i} \tag{7}$$

这说明对于求有条件函数极值的问题，用可交换偏导函数先求出各自变量的关系，再求函数极值的方法与拉格朗日函数法完全等价。

由于可交换偏导函数也是可交换函数，则将其统称可交换函数，但在应用时，可以根据问题和条件确定是证明原函数可交换性还是证明偏导函数的可交换性。

4 可交换函数的应用

由可交换函数的定义及定理可知，此方法适用于求函数极值和最值，以及证明不等式等问题中，以下即为一些具体应用。

4.1 求函数极值及最值

4.1.1 求表面积为 a^2 而体积为最大的长方体的体积。

解：即求函数 $V(x,y,z)=xyz(x>0,y>0,z>0)$ ，在条件 $g(x,y,z)=2xy+2yz+2xz-a^2=0$ 下的最大值。明显 $V(x,y,z)=V(y,x,z)=V(z,y,z)$ ，是全交换函数，则 $V(x,y,z)$ 极值与函数 $f(x)=x^3(x=y=z)$ 的极值相同，由条件得 $x=y=z=\frac{\sqrt{6}a}{6}$ ，极值为 $f(x)=\frac{\sqrt{6}}{36}a^3$ ，由于只有一个极值，此值即最值，故

$\max V=\dfrac{\sqrt{6}}{36}a^3$。

4.1.2 求条件极值：$f(x_1,\cdots\cdots,x_n)=\sum\limits_{i=1}^{n}a_ix_i^m$，s.t $\sum\limits_{i=1}^{n}c_ix_i=c$。

解：由于$\dfrac{\partial f}{\partial x_u}=ma_ux_u^{m-1}$、$\dfrac{\partial f}{\partial x_v}=ma_vx_v^{m-1}$，设$x_v=a_{uv}x_u$，若$\dfrac{\partial f}{\partial x_u}=\dfrac{\partial f}{\partial x_v}$，求得

$a_{uv}=\sqrt[m-1]{\dfrac{a_u}{a_v}}$，即$x_v=\sqrt[m-1]{\dfrac{a_u}{a_v}}x_u$，由条件得$x_i=\dfrac{c}{\sum\limits_{i=1}^{n}c_i\sqrt[m-1]{\dfrac{a_1}{a_i}}}\cdot\sqrt[m-1]{\dfrac{a_1}{a_i}}$，那么极值为：

$$\min\ f=\sum_{i=1}^{n}a_i\Big(\frac{c}{\sum\limits_{i=1}^{n}c_i\sqrt[m-1]{\frac{a_1}{a_i}}}\cdot\sqrt[m-1]{\frac{a_1}{a_i}}\Big)^m。$$

由此，若 n=2，$a_1=a_2=1$，$c_1=c_2=1$，即$f(x_1,x_2)=x_1^2+x_2^2$，s.t $x_1+x_2=c$，明显x_1、x_2可以交换，即$x_1=x_2$，则求得极值为 $\min f(x_1,x_2)=\dfrac{c^2}{2}$。

4.1.3 求如下形式的最值

(1) $f(x,y)=\sqrt{x^2+1}+\sqrt{y^2+1}$ s.t $c_1x+c_2y=c$

解：由于$f(y,x)=\sqrt{y^2+1}+\sqrt{x^2+1}=f(x,y)$，则取极值时$x=y$，则有

$x=y=\dfrac{c}{c_1+c_2}$,$\min\ f(x,y)=\dfrac{2}{c_1+c_2}\sqrt{c^2+(c_1+c_2)^2}$。

(2) $f(x,y)=\sqrt{x^2+1}+\sqrt{y^2+b_2}$ s.t $c_1x+c_2y=c$

解：由于 $\dfrac{\partial f}{\partial x}=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$、$\dfrac{\partial f}{\partial y}=\dfrac{y}{\sqrt{y^2+b_2}}$，设$y=ax$，则有$\dfrac{\partial f}{\partial y}=\dfrac{ax}{\sqrt{(ax)^2+b_2}}$，若要使$\dfrac{\partial f}{\partial x}=\dfrac{\partial f}{\partial y}$，则需$\dfrac{ax}{\sqrt{(ax)^2+b_2}}=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$，求得$a=\sqrt{b_2}$（可简写为$\dfrac{\partial f}{\partial y}\begin{pmatrix}y\to\sqrt{b_2}x\\ \sqrt{b_2}x\to y\end{pmatrix}=\dfrac{\partial f}{\partial x}$），则得$x=\dfrac{c}{c_1+\sqrt{c_2}}$，$y=\sqrt{b_2}x$，

$\min\ f(x,y)=\dfrac{1+\sqrt{b_2}}{c_1+c_2\sqrt{b_2}}\sqrt{c^2+(c_1+c_2\sqrt{b_2})^2}$。

(3) $f(x,y)=\sqrt{x^2+a_2}+\sqrt{y^2+b_2}$ s.t $c_1x+c_2y=c$

解：由于 $\dfrac{\partial f}{\partial x}=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+a_2}}$、$\dfrac{\partial f}{\partial y}=\dfrac{y}{\sqrt{y^2+b_2}}$，设 $y=\alpha x$，则有 $\dfrac{\partial f}{\partial y}=\dfrac{ax}{\sqrt{(ax)^2+b_2}}$，若要 $\dfrac{\partial f}{\partial x}=\dfrac{\partial f}{\partial y}$，则需 $\dfrac{ax}{\sqrt{(ax)^2+b_2}}=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+a_2}}$，求得 $a=\sqrt{\dfrac{b_2}{a_2}}$，则 $x=\dfrac{a_2c}{a_2c_1+\sqrt{a_2b_2}c_2}$，$y=\sqrt{\dfrac{b_2}{a_2}}x$，$\min\ f(x,y)=\dfrac{\sqrt{a_2}+\sqrt{b_2}}{c_1\sqrt{a_2}+c_2\sqrt{b_2}}\sqrt{c^2+(c_1\sqrt{a_2}+c_2\sqrt{b_2})^2}$。

(4) $f(x,y)=\sqrt{a_1x^2+a_2}+\sqrt{b_1y^2+b_2}$ s.t $c_1x+c_2y=c$

解：求此方程的极值，要解四次方程，再解极值，其表达式因为过于复杂，现在没有解出。

4.1.4 求解以下问题

(1) 等腰直角三角形中求一点到顶点的距离之和最短

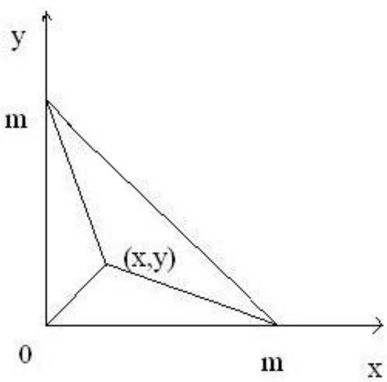

图 1 三角形

求如图所示的等腰直角三角形，在其中求一点到三个顶点的距离之和最短。根据图及定义，题可转化为，求：

$$\min f: f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{x^2+(m-y)^2}+\sqrt{(m-x)^2+y^2}\quad x,y\in[0,m] \tag{8}$$

明显 $f(y,x)$ $f($，则函数 f 为全交换函数，其极值与 $f(z)=\sqrt{2}z+2\sqrt{2z^2-2mz+m^2}$ (x=y=z)的极值相同，求得 $z=\dfrac{m}{2}(1-\dfrac{\sqrt{3}}{3})$，则其极值为 $\min f=\dfrac{m}{2}(\sqrt{2}+\sqrt{6})$。两直角边之和为 2m，可以证明 $\min f$ 小于 2m，表明等腰直角三角形中存在一点，这点到三个顶点的距离之和小于三角形任意两边之和。同时可以证明此点即为三角形的重心，此式还可以加以推广。

(2) 求 n 维边长为 m 的标准体的重心(即 n 维体中找一点到各顶点的距离之和最短)。

此问题等价于在超平面$\sum_{i=1}^{n} y_i = m$与坐标构成的体中求下式的极值：

$$\min f : f(x_1,\cdots\cdots,x_n) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} + \sum_{j=1}^{n} \sqrt{(m - x_j)^2 + \sum_{i=1,i\neq j}^{n} x_i^2}$$

$$= \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} + \sum_{j=1}^{n} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 2mx_j + m^2} \qquad \text{i，j=1,2，……，n} \quad (9)$$

设 x_u、 x_v 两个自变量，则可以证明 $f(x_u, x_v) = f(x_v, x_u)$，则函数 f 是全交换函数，其极值与函数 $f(x) = \sqrt{n}x + n\sqrt{nx^2 - 2mx + m^2}\,(x_1 = x_2 = \cdots\cdots = x_n = x)$ 的极值相同，求解 $f(x)$ 得：

$$x = \frac{m}{n}\left(1 - \frac{\sqrt{n+1}}{n+1}\right) \qquad (10)$$

$$\min f(x) = \frac{m\sqrt{n}}{n}[(n-1)\sqrt{n+1} + 1] \qquad (11)$$

式(11)为公式(9)的解，同样可以证明这个点到各顶点距离之和比直角边之和小，即：

$$\frac{m\sqrt{n}}{n}[(n-1)\sqrt{n+1} + 1] < mn \qquad (12)$$

4.2 证明不等式

4.2.1 基本不等式

(1) $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$ (a、b≥0)

(2) $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$ (a、b 同号)

(3) $2ab \leq a^2 + b^2$ (a、b 为实数)

证明：设函数 $f(a,b) = a^2 + b^2 - 2ab$，有 $f(b,a) = b^2 + a^2 - 2ba$，明显有 $f(a,b) = f(b,a)$，此函数为全交换函数，则与 $f(x) = x^2 + x^2 - 2xx = 0$ (a=b=x)同极值，那么 $f(a,b)$ 的极值为 0，而 $f(x)$ 只有一个极值，则为最值，即 $f(a,b)$ 的最值为 0。再设 $b = a + \delta$，则 $f(a,b) = a^2 + (a+\delta)^2 - 2a(a+\delta) = \delta^2 \geq 0$，故 0 为 $f(a,b)$ 的最小值，则 $f(a,b) = a^2 + b^2 - 2ab \geq 0$，即 $a^2 + b^2 \geq 2ab$。

4.2.2 Bernoul(伯努利)不等式

$$\prod_{i=1}^{n}(1+x_i)\ge 1+\sum_{i=1}^{n}x_i \qquad x_i > -1,\ i=1,2,\cdots,n,\quad 且\ x_i\ 同号 \tag{13}$$

证明：设方程

f： $f(x_u,x_v)=(1+x_1)\cdots(1+x_u)\cdots(1+x_v)\cdots(1+x_n)-1-(x_1+\cdots+x_u+\cdots+x_v+\cdots x_n)$，

则 $f(x_v,x_u)=(1+x_1)\cdots(1+x_v)\cdots(1+x_u)\cdots(1+x_n)-1-(x_1+\cdots+x_v+\cdots+x_u+\cdots x_n)$，

明显 $f(x_u,x_v)=f(x_v,x_u)$，则 f 是全交换函数，其极值与 $f(x)=(1+x)^n-1-nx$

($x_1=x_2=\cdots\cdots=x_n=x$)的极值相同，而 $f(x)$ 在 x=0 处取得极值为 0，而且唯一，

则是最值，故有 $f(x)\ge 0$， $f\ge 0$，得证。

5 结论

根据讨论，可以得出用可交换函数的充要条件，以下给出应用可交换函数解题的步骤：

(1) 对于函数 $f:f(x_1,\cdots\cdots,x_n)$， x_u 、 x_v 为其中两个自变量，写出 $f(x_u,x_v)$ 、 $f(x_v,x_u)$ 的值，并观察两者；

(2) 若有 $f(x_u,x_v)=f(x_v,x_u)$，则函数 f 为全交换函数；

(3) 求出函数 $f(x)(x_1=x_2=\cdots\cdots=x_n=x)$ 的 x 取值及其极值；

(4) 讨论此值是否最值，则解出函数 f 的最值(或证明不等式)。

在其中若有 $\partial f(x_u,x_v)=a_{uv}\,\partial f(x_v,x_u)$，求出 a_{uv}，则此可称为可交换偏导函数，解题也比用拉格朗日函数法方便得多。