$Ramsey$数$R(p,p)$与拉氏循环数$L(p,p)$

Sekift　574919797@qq.com

摘要：搜索循环图一直是求得小 $Ramsey$ 数的精确值或下界的一种方法，而因求解实在困难，搜索需要花费大量时间。本文通过理论，利用集合论及图论的知识将用循环图(半循环图)搜索经典 $Ramsey$ 数的问题给出彻底解决的方法。

关键词： $Ramsey$ 理论　$Ramsey$ 数　拉氏循环数　循环图　半循环图

1 引言

1928 年，$F.P.Ramsey$ 证明了一个定理[1]，后来人们称为$Ramsey$ 定理。由此开始的 $Ramsey$ 理论是组合数学中的很一个重要分支，而寻找精确的 $Ramsey$ 数是一大难题，至今找出的精确值少之又少，从而成为这一领域的经典问题。$Ramsey$ 定理的表述有很多种，这里用到其简式表述：

$Ramsey$ 定理(简式) [2]: 对任意给定的正整数 p 、$q\geq 2$,存在正整数n，使得任意一个至少有n个点的图G 中，或者含有 p 个两两有边相连的点(即 G 有一个 p 点的完全图)，或者含有q 个两两都无边相连的点(称为q 个点的无关点集)。具有上述性质的数n的最小值记为 $R(p,q)$；当 $p=q$ 时，记为 $R(p,p)$ 。

2 相关研究

由于确定大 $Ramsey$ 数实在是太困难，甚至借用计算机还是不够用，例如想将 $R(5,5)$由目前的下界 43[3]提高到 44，将有2^{903} 种情况，要全部验证的话，以现在的计算能力也要几千年。因此利用各种方法求小 $Ramsey$ 数的精确值或上下界一直受到人们的关注，主要的方法如下：

(1)　搜索循环图；

(2) 搜索 $Cayley$ 图；

(3) 用已知的 $Ramsey$ 图构造新的图；

(4) 规划方法；

(5) 智能算法。

此外，由经典 $Ramsey$ 定理延伸出了许多定理，如图的 $Ramsey$ 数、广义 2 色 $Ramsey$ 数、路与圈的 3 色 $Ramsey$ 数、$Ramsey$ 重数和 $Folkman$ 数[4]等，还有很多于 $Ramsey$ 定理有关的定理，如 $Erdos-Szekers$ 定理[5]、$Schur$ 定理[2]、$van.der.Waerden$ 定理[6]等。

3 拉氏循环数 $L(p,p)$ 与拉氏半循环数 $L^*(p,p)$

定义 1(循环图、半循环图)：所谓 n 个点的循环图，是指其点可以标记为 0,1，……，$n-1$，同时有集合 D ={1,2，……，$n-1$}的一个确定的子集 D_1，使得两点 i 和 j 有边相连的充分必要条件是 $|i-j|\in D_1$ 且 $(n-|i-j|)\in D_1$。若只满足条件 $|i-j|\in D_1$，则将这样的图称为半循环图。把 D_1 叫做这个循环图(半循环图)的决定集，因为它完全决定了这个循环图(半循环图)的结构[2]。

定义子集 $D_2=D-D_1$，明显 D_2 也是这个循环图(半循环图)的决定集，它使得两点 i 和 j 没有边相连的充分必要条件是 $|i-j|\in D_2$ (且 $(n-|i-j|)\in D_2$)。循环图(半循环图)必是 n 个点的完全图 K_n 的子图[7]。

定理 1[2]：若构造有 n 个点的循环图(半循环图) G_n，使得 G_n 中既不含有 K_p (即没有 n 个两两有边相连的点)，又不含有 p 个点的无关点集，则 $R(p,p)>n$。

定义 2：若对于数 p，具有 n 个点的图能找到循环图 G_n，其满足定理 1，而当 $n+1$ 时，找不到循环图 G_n 使其满足定理 1，则称 n 为 p 的拉氏循环数，记为 $L(p,p)$，对应的循环图 G_n 记为拉氏循环图 $G_{L(n)}$；当 G_n 为半循环图时，称 n 为 p 的拉氏半循环数，记为 $L^*(p,p)$，对应的循环图 G_n 记为拉氏半循环图 $G^*_{L(n)}$。

定理 2： $L(p,p) \le L^*(p,p) < R(p,p)$ 。

证明：由定义可知。

给定数n，n的点图$G_{n,0}$(即图G =<n，0>)用 0、1、……、 $n-1$ 标记(设为集A ={0,1, ……， $n-1$})， K_n 为其完全图，设集合D={1,2，……， $n-1$}。给定的数 p，K_p为其完全图且为K_n 的子图，将K_p的顶点标记为$k_i(i=1,2,\cdots\cdots，p)$且设$k_i < k_{i+1}$， 由于$K_p$为$K_n$ 的子图，则$k_i \in A$。显然K_p的位置由顶点k_i完全确定。

定理 3： K_p的位置由 $p-1$ 条边完全确定。

证明：由完全图的定义知，K_p一共有$C(p,2)=$ p ($p-1$)/2 条边。又知K_p的位置由顶点k_i完全确定，则可对k_i的前 p 个数作如下变换：

$$k_2-k_1=d_1、 k_3-k_2=d_2、……、 k_p-k_{p-1}=d_{p-1} \tag{1}$$

即：

$$k_{i+1}-k_i=d_i \quad i=1,2，……， p-1， d_i \in D \tag{2}$$

明显d_i是K_p的前 $p-1$ 条边，由公式(2)可推得：

$$\begin{aligned} k_{i+j}-k_i &= k_{i+j}-k_{i+j-1}+k_{i+j-1}-k_{i+j-2}+\cdots\cdots+k_{i+2}-k_{i+1}+k_{i+1}-k_i \\ &= d_{i+j-1}+d_{i+j-2}+\cdots\cdots+d_{i+1}+d_i \\ &= \sum_{l=0}^{j-1} d_{i+l} \qquad i、 j=1、2、……、 p-1，i+j \le p \end{aligned} \tag{3}$$

显然式(3)中的 $d_{i+l} \in \{d_1、d_2、\cdots\cdots、d_{p-1}\}$,而$\sum_{l=0}^{j-1} d_{i+l}$ 已是K_p所有的边,得证。

定义 3(映集运算)：将数映射成一个集合的运算称为映集运算：

$$f: x \to E \tag{4}$$

其中x是数， E为集合。

定义 4：在K_n 、 K_p中，对$d_i \in D$定义映集运算“$\circ$”如下：

$$d_1 \circ d_2 \circ \cdots \circ d_i \circ \cdots \circ d_{p-1} = \circ d_{p-1} = \{\sum_{l=0}^{j-1} d_{i+l}\} \quad i、j=1、2、……、p-1，i+j \le p \tag{5}$$

若其中所有$\sum_{l=0}^{j-1} d_{i+l} \in D$，即集合中元素$d$的范围是[1，$n-1$]，此时称$\circ d_{n-1}$为限映集；若$\{\sum_{l=0}^{j-1} d_{i+l}\}$中有元素$d>\lfloor n/2 \rfloor$则将其变换成$n-d$，并用运算$*d_{p-1}=d_1 * d_2 * \cdots\cdots * d_{p-1}$表示，称$*d_{p-1}$为对称限映集，可知$*d_{p-1}$的元素$d \le \lfloor n/2 \rfloor$。

定理 4：对于给定数p、n，使$R(p,p)>n$的充分条件是：

$*d_{p-1}$中至少有一个元素不在同一决定集D_m(m=1,2)中。

证明：由于$*d_{p-1}$中的全部元素确定了一个K_p，若$*d_{p-1}$的元素都在决定集D_1中，则表明这样的图G_n含有K_p；若$*d_{p-1}$的元素都在决定集D_2中，则表明这样的图G_n含有p个点的无关点集；若对于给定数p、n，所有的对称限映集$*d_{p-1}$至少有一个元素不在同一决定集中，则图G_n中既不含有K_p，又不含有p个点的无关点集，根据定理 1，得证。

对于映集$\circ d_{p-1}$也有同样结论：

定理 5：对于给定数p、n，使$R(p,p)>n$的充分条件是：

$\circ d_{p-1}$中至少有一个元素不在同一决定集D_m(m=1,2)中。

定义 5：由全部映集$*d_{p-1}$形成的集合$\{*d_{p-1}\}$称为$*d_{p-1}$的全集，用U表示。

定理 6：设$*d_{p-1,1} \in U$、$*d_{p-1,2} \in U$且$*d_{p-1,1} \subset *d_{p-1,2}$，若$*d_{p-1,1}$满足定理 4，则$*d_{p-1,2}$也满足定理 4。

证明：设元素$d \in *d_{p-1,1}$，且与其他元素不在同一决定集D_m，由于$*d_{p-1,1} \subset *d_{p-1,2}$，故$d \in *d_{p-1,2}$，且与($*d_{p-1,1} \cap *d_{p-1,2} - d$)的元素不在同一决定集$D_m$，得证。

定义 6： 设$*d_{p-1,1} \in U$、$*d_{p-1,2} \in U$，若$*d_{p-1} \subset *d_{p-1,2}$且不存在某个$*d_{p-1,3} \in U$，使得$*d_{p-1,3} \subset *d_{p-1,1}$，则称$*d_{p-1,1}$为$*d_{p-1}$的一个最小子集，记为$min*d_{p-1}$。$U$

的全部最小子集 $min*d_{p-1}$ 形成的集合称为最小子集之集，记为 $minU$ 。

显然 $minU \subset U$ 。根据定理 6，只要 $minU$ 的所有元素满足定理 4，那么 U 的所有元素也满足定理 4，则只需根据 $minU$ 求取决定集即可，因此 $minU$ 也叫做划分决定集。

定理 7：$d_1 \circ d_2 \circ \cdots\cdots \circ d_{p-2} \circ d_{p-1} = d_{p-1} \circ d_{p-2} \circ \cdots\cdots \circ d_2 \circ d_1$。即数列 d_i 的限映集与数列 d_i 倒序置换后的限映集相同。

证明：根据定理 3 可知，等式左边在半循环图 G_n 中代表顶点 k_i 从小到大的排列，等式右边代表顶点 k_i 从大到小的排列，是同一个完全图 K_p，故其边也相同，得证。

由置换的理论可知[8]，n 元置换有 n！个。那么 $p-1$ 元的置换有$(p-1)$！个，根据定理 7 和定义 6，在求取 $minU$ 过程中，可以只计算等式右边的映集即可，这样在当元素值相同，而排序不同时，只需求$(p-1)$！/2 个映集。

根据定义，易知对称限映集$*d_{p-1}$也满足定理 7 及结论。

定义 7：对于给定数 p 、n，集合 $D=\{1,2，\ldots\ldots，n-1\}$，将 D 二划分[7]为 D_m ($m=1,2$，即 D_1、D_2)，设 2^{D_m} 为 D_m 的幂集， $2_i^{D_m} \in 2^{D_m}$ 。设满足 $1 \le |2_i^{D_m}| \le p-1$ 的所有 $2_i^{D_m}$ 组成的集合称为限幂集，记为 $P(D_m)$，设 $P_i(D_m) \in P(D_m)$，$|P_i(D_m)|$ 为 $P_i(D_m)$ 的基数。将 $P_i(D_m)$ 中的元素排成数列$[d_1, d_2, \cdots\cdots, d_{p-1}]$， 记为 $S_{p-1}(D_m)$，设$|S_{p-1}(D_m)|$ 为数列 $S_{p-1}(D_m)$ 中不相同的元素个数，显然$|S_{p-1}(D_m)|=|P_i(D_m)|$。当$|P_i(D_m)|=p-1$ 时， $S_{p-1}(D_m)$ 有 $p-1$ 个各不相同的元素，长度为 $p-1$；当$|P_i(D_m)| \le p-1$ 时，将添加 $P_i(D_m)$ 中的元素值形成 $S_{p-1}(D_m)$，使得 $S_{p-1}(D_m)$ 的长度为 $p-1$。故 $S_{p-1}(D_m)$ 总是一个长度为 $p-1$ 的数列，且允许值相同。

定理 8：对于给定数 p 、n，集合 $D=\{1,2，\ldots\ldots，n-1\}$，将 D 二划分为决定集 D_m ($m=1,2$)，若其中所有 $S_{p-1}(D_m)=[d_1, d_2, \cdots\cdots, d_{p-1}]$ 的限对称映集$*d_{p-1}$ 至少

有一个元素不在本决定集 D_m 中，则 $R(p,p)>n$；若对于数 p 、$n+1$，不再具有这样的二划分，则由 D_m 决定的图是拉氏循环图 $G_{L(n)}$， n 为拉氏循环数 $L(p,p)$。

证明：此定理与定理 4 等价。

推论：对于数 p、n，若 $n<L(p,p)$，则对于数 n 必有拉氏半循环图 $G^*_{L(n)}$。

若能根据定理 8 找出精确的公式，使得 $L(p,p)=f(p)$，$L^*(p,p)=f^*(p)$ (其中 $f(p)$、$f^*(p)$ 是关于 p 的函数) 则利用循环图(半循环图)寻找 *Ramsey* 数下界的问题将得到彻底的解决。明显此时求得的 $f(p)\le f^*(p)$ 将也是经典 *Ramsey* 数的新公式下界[9]。

4 一些小 $L(p,p)$ 数的具体求取

根据第三节的定义及定理，对于一些小的 $L(p,p)$ 具体求取的过程如下：

(1) 给定数 p 、n；

(2) 对集合 D 求出对称限映集 $*d_{p-1}$ 的全集 U，然后求出划分决定集 $minU$；

(3) 对 n 生成全部的决定集 D_1、 D_2；

(4) 利用 $minU$ 的元素删除决定集 D_1、 D_2；

(5) 最后，若决定集有元素剩下，则这些就是循环图的决定集；若没有剩下，则表明 $L(p,p)$ 小于 n；

(6) 若步骤(5)决定集有元素剩下，则对数 $n+1$ 重复步骤(2)−(5)，直到决定集没有元素剩下，此时的 n 即为 $L(p,p)$。

4.1 L(3,3)的求取

对于给定数 p=3，n=5，其划分决定集为 $minU$ ={{1,2}，{2,4}}，而按循环图的定义 1 和 4、2 和 3 必须在同一决定集，那么决定集只可以为 D_1={1,4}，D_2={2,3}，此时可以形成循环图 G_5 使其符合定理 1。而又已知 R(3,3)=6[1]且 $L(p,p)<R(p,p)$，则求得 L(3,3)=5。

4.2 $L(4,4)$的求取

对于给定数 $p=4$，$n=17$，求得 $minU=\{\{1,2,3\}，\{1,5,6\},\{1,7,8\},\{2,4,6\},\{2,5,7\},\{3,4,7\},\{3,6,8\},\{4,5,8\},\{1,4,6,7\},\{1,5,6,7\},\{2,3,5,8\},\{2,6,7,8\}\}$，由此求出循环图的决定集 $D_1=\{1,2,4,8,9,13,15,16\}$，$D_2=\{3,5,6,7,10,11,12,14\}$，且此决定集唯一。由已知 $R(4,4)=18$[9]且 $L(p,p)<R(p,p)$，则求得 $L(4,4)=17$。

4.3 $L(5,5)$的求取

对于给定数 $p=5$，$n=41$，可以求的循环图的决定集 $D_1=\{1,2,3,5,7,10,13,15,16,17,24,25,26,28,31,34,36,38,39,40\}$，$D_2=\{4,6,8,9,11,12,14,18,19,20,21,22,23,27,29,30,32,33,35,37\}$，而对于数 $n=42$ 不再具有这样的决定集，则可知 $L(5,5)=41$。

5 结论

本文通过对决定2色 *Ramsey* 数的讨论，首次给出拉氏循环数(图)及拉氏半循环数(图)的定义以及求解的突破方法，但是对于这两个数仍然没有给出全部的数值，只给出了一些小的数值，如$L(3,3)=5$, $L(4,4)=17$, $L(5,5)=41$, $L(4,6)<35$等。对于这两个数值，一旦求出其函数式将会解决用循环图、半循环图寻找 *Ramsey* 数下界的全部问题。同时也说明当某数 n 大于 $L(p,p)$ 时，已经不能用搜索循环图的方法证明 $R(p,p)>n$，因此本文对这种方法具有很大的指导意义。此外，这里讨论的定义、证明的定理对于求其他 *Ramsey* 数下界也具有重要的意义，如在多色 *Ramsey* 数[9]中依然有相似的结论。

参考文献

[1] F. P.Ramsey, On a problem of formal logic[J], *Proc London Math Soc Series 2* , **30**(1930): 264–286.

[2] 李乔, Remsey 理论[M] ,湖南教育出版社, 1991.

[3] G.Exoo, A lower bound for R(5,5)[J], *Journal of Graph Theory* **13**(1989): 97–98.

[4] 邵泽辉, Ramsey 理论中图的构造与计算[D] ,博士学位论文, 2008.

[5] P.Erdős, Szekeres, George , A combinatorial problem in geometry[J], *Compositio Mathematica* **2**(1935): 463–470.

[6] B. L.van der Waerden, Beweis einer Baudetschen Vermutung[J] , *Nieuw Arch Wisk* **15**(1927): 212–216.

[7] 傅彦,顾小丰,离散数学及其应用[M] ,高等教育出版社, 2007.

[8] 杨子胥,近世代数,高等教育出版社[M] , 2000.

[9] S.P.Radziszowski, Small Ramsey Numbers[J] , *The Electronic Journal of Combinatorics DS*1.13(2011).