J. Jpn. Soc. Soil Phys.
土壌の物理性
No. 154, p.19 ～ 27 (2023)

解　説
Lectures

一般化透水モデルによる不飽和透水係数の閉形式解

関 勝寿 [1]· 取出伸夫 [2]

Closed-form equations of unsaturated hydraulic conductivity with general hydraulic conductivity model

Katsutoshi SEKI[1] and Nobuo TORIDE[2]

1. はじめに

土壌の不飽和水分移動を解析する際には，マトリックポテンシャル水頭 h と体積含水率 θ との関係をあらわす水分保持関数 $\theta(h)$ と，h および θ に依存する土壌の不飽和透水係数 K をそれぞれ関数として表現することが重要である．

水分保持関数 $\theta(h)$ は，飽和体積含水率 θ_s と残留体積含水率 θ_r によって定義される飽和度 S によって，

$$S(h) = \frac{\theta(h) - \theta_r}{\theta_s - \theta_r} \tag{1}$$

と表記できる．なお，本稿では表記の簡便さのために負圧を $h > 0$ とする表記（いわゆるサクション）を用いる．

1950 ～ 1970 年代に水分保持曲線から不飽和透水係数を導出するモデルが多く提唱された．Burdine（1953）は，$S(h)$ と透水性の間に

$$K_r(h) = \frac{K(h)}{K_s} = S(h)^2 \left[\frac{\int_0^{S(h)} h(S)^{-2} dS}{\int_0^1 h(S)^{-2} dS} \right] \tag{2}$$

という関係が成立することを土壌間隙径分布のモデルとハーゲン・ポアズイユの法則によって導いた．ここで，K_s は飽和透水係数，K_r は相対透水係数である．Mualem（1976）は Burdine のモデルをベースとして，異なる間隙径の毛管が連結しているときの等価間隙径（equivalent pore radius）の仮定から，

$$K_r(h) = \frac{K(h)}{K_s} = S(h)^p \left[\frac{\int_0^{S(h)} h(S)^{-1} dS}{\int_0^1 h(S)^{-1} dS} \right]^2 \tag{3}$$

を導いた．ここで p は間隙結合係数（tortuosity factor）とよばれるパラメータであり，多くの土壌における平均的な値として $p = 0.5$ を求め，

$$K_r(h) = \frac{K(h)}{K_s} = S(h)^{0.5} \left[\frac{\int_0^{S(h)} h(S)^{-1} dS}{\int_0^1 h(S)^{-1} dS} \right]^2 \tag{4}$$

も示した．Burdine と Mualem モデルそれぞれの物理的な意味合いについては，小杉（2007）に詳しく解説されている．

Hoffmann-Riem et al.（1999）と Kosugi（1999）は，Burdine モデルと Mualem モデルを一般化した Mualem and Dagan（1978）に基づき次の一般化透水モデルを提案した．

$$K_r(h) = \frac{K(h)}{K_s} = S(h)^p \left[\frac{\int_0^{S(h)} h(S)^{-q} dS}{\int_0^1 h(S)^{-q} dS} \right]^r \tag{5}$$

ここで，p，q，r はパラメータである．特定の水分保持関数に対してこの一般化透水モデルの積分を解析的に解いたものは，不飽和透水係数の閉形式解（closed-form solution）とよばれ，Burdine モデル（$p = 2$, $q = 2$, $r = 1$）や Mualem モデル（$p = 0.5$，$q = 1$，$r = 2$）をまとめて表現できる．本稿では，水分保持曲線 − 不飽和透水係数連結モデルの透水モデルを区別する場合は，式（2）は Burdine，式（3）は Mualem，式（5）は General と表記し，表記のない場合は式（5）の一般化透水モデルとする．

閉形式解による水分保持曲線 − 不飽和透水係数連結モデルの代表格が Mualem-van Genuchten モデルである（van Genuchten, 1980）．閉形式解の連結モデルは，少ないパラメータで保水性と透水性の両方を表現できるため，特に不飽和水分移動のシミュレーションにおいて有用である．しかし，透水モデルの閉形式解の導出過程は，モデルの仮定を確認したり，より利用のしやすいモデルへと改良したりする際に重要であるが，数学的な煩雑さ

[1]Natural Science Laboratory, Toyo University, 5-28-20 Hakusan, Bunkyo-ku, Tokyo 112-8606, Japan. Corresponding author. 関 勝寿，東洋大学自然科学研究室
[2]Graduate School of Bioresources, Mie University, 1577 Kurimamachiya-cho Tsu, Mie 514-8507, Japan.
2023 年 5 月 8 日受稿　2023 年 6 月 25 日受理

もあり，最近では閉形式解の導出を確認する機会は減っていると思われる．

そこで本稿では，van Genuchten モデルを中心とした基本的な水分保持関数 $S(h)$ に対する式（5）の水分保持曲線－不飽和透水係数連結モデルの閉形式解の導出方法を解説する．そして，閉形式解の応用例として，著者らの取り組んだ線型結合モデルを紹介する．

2. 基本モデル

Brooks and Corey（1964）モデル（以下，BC モデル），van Genuchten モデル（VG モデル），Kosugi（1996）モデル（KO モデル）の 3 つを基本モデルとして, それぞれについて式（5）の閉形式解を導出する．

$$A(h) = \int_0^{S(h)} h(S)^{-q} dS \tag{6}$$

とすると，

$$S(0) = \frac{\theta(0)-\theta_r}{\theta_s-\theta_r} = \frac{\theta_s-\theta_r}{\theta_s-\theta_r} = 1$$

より

$$B = A(0) = \int_0^1 h(S)^{-q} dS \tag{7}$$

であるので式（5）は，

$$K_r(h) = S(h)^p \left[\frac{A(h)}{B}\right]^r \tag{8}$$

と書くことができる．

2.1 BC モデル

BC モデルの水分保持関数は，

$$S(h) = \begin{cases} \left(\dfrac{h}{h_b}\right)^{-\lambda} & (h > h_b) \\ 1 & (h \le h_b) \end{cases} \tag{9}$$

ここで，h_b，λ はパラメータであり，$h_b > 0$，$\lambda > 0$ である． $h > h_b$ において h を S の関数として求めると，

$$h(S) = h_b S^{-\frac{1}{\lambda}} \tag{10}$$

となるため，式（6）の $A(h)$ を計算すると，

$$\begin{aligned} A(h) &= h_b{}^{-q} \int_0^{S(h)} S^{\frac{q}{\lambda}} dS \\ &= h_b{}^{-q}\left(\frac{q}{\lambda}+1\right)^{-1} S(h)^{\frac{q}{\lambda}+1} \\ &= h_b{}^{-q}\left(\frac{q}{\lambda}+1\right)^{-1}\left(\frac{h}{h_b}\right)^{-\lambda-q} \end{aligned} \tag{11}$$

これを式（7）に代入して，

$$B = A(0) = h_b{}^{-q}\left(\frac{q}{\lambda}+1\right)^{-1} \tag{12}$$

したがって，式（8）より $h > h_b$ では，

$$\begin{aligned} K_r(h) &= S(h)^p \left(\frac{h}{h_b}\right)^{-r(\lambda+q)} \\ &= \left(\frac{h}{h_b}\right)^{-p\lambda-r(\lambda+q)} \\ &= \left(\frac{h}{h_b}\right)^{-(p+r)\lambda-qr} \end{aligned} \tag{13}$$

また，$h \le h_b$ では $K_r(h) = 1$ である．これが，General－BC モデルの閉形式解である．式（9）と式（13）から K を S の関数であらわすと，

$$K_r(S) = \frac{K(S)}{K_s} = S^{p+r+\frac{qr}{\lambda}} \tag{14}$$

Brooks and Corey（1964）では，この式に $p = 2$，$q = 2$，$r = 1$ を代入した Burdine–BC モデルの $K_r = S^{3+2/\lambda}$ が導出されている．Mualem–BC モデルでは，$q = 1$，$r = 2$ を代入した $K_r = S^{p+2+2/\lambda}$ となる．

2.2 VG モデル

次に，VG モデルの水分保持関数は，

$$S(h) = \left[\frac{1}{1+(\alpha h)^n}\right]^m \tag{15}$$

ここで，α, m, n はパラメータであり，$\alpha > 0$, $0 < m < 1$, $n > 0$ である．

まずは式（15）を変形して h^{-q} の式を得る．$S(h)$ を S と表して，

$$\begin{aligned} 1+(\alpha h)^n &= \frac{1}{S^{1/m}} \\ (\alpha h)^n &= \frac{1-S^{1/m}}{S^{1/m}} \\ (\alpha h)^{-q} &= \left[\frac{S^{1/m}}{1-S^{1/m}}\right]^{\frac{q}{n}} \\ h^{-q} &= \alpha^q \left[\frac{S^{\frac{1}{m}}}{1-S^{\frac{1}{m}}}\right]^{\frac{q}{n}} \end{aligned} \tag{16}$$

この式から式（6）の積分を計算する．

ここで，一般に定積分の積分変数を y から x に変換するには，$y = g(x)$ として，

$$\int_{g(a)}^{g(b)} f(y)dy = \int_a^b f(g(x))\frac{dy}{dx}dx \tag{17}$$

が成立することを使う．$S = x^m$ と変数変換をすると式（6）と式（16）から，

$$\begin{aligned} A(h) &= \int_0^{S(h)} \alpha^q \left[\frac{S^{1/m}}{1-S^{1/m}}\right]^{\frac{q}{n}} dS \\ &= \alpha^q \int_0^{S(h)^{\frac{1}{m}}} \left[\frac{x}{1-x}\right]^{\frac{q}{n}} \frac{dS}{dx}dx \\ &= \alpha^q \int_0^{S(h)^{\frac{1}{m}}} \left[\frac{x}{1-x}\right]^{\frac{q}{n}} mx^{m-1}dx \\ &= \alpha^q \int_0^{S(h)^{\frac{1}{m}}} mx^{\frac{q}{n}+m-1}(1-x)^{-\frac{q}{n}}dx \end{aligned} \tag{18}$$

この式はこのままでは解析的に解くことはできないが，$q/n+m-1$ がゼロ, すなわち $m=1-q/n$ ならば x の指数部がゼロになり容易に積分できることを van Genuchten（1980）は示した．このときに，$n > q$ となる．なお，$m = 1-q/n$ の制限は数学的な利便性によるものであって物理的な意味はない（Hoffmann-Riem et al., 1999）．$m = 1-q/n$ と定めたことにより，式（18）は

$$\begin{aligned} A(h) &= \alpha^q \int_0^{S(h)^{\frac{1}{m}}} m(1-x)^{m-1}dx \\ &= \alpha^q \left[-(1-x)^m\right]_0^{S(h)^{\frac{1}{m}}} \\ &= \alpha^q \left[1-(1-S(h)^{\frac{1}{m}})^m\right] \end{aligned} \tag{19}$$

したがって，

$$B = A(0) = \alpha^q \tag{20}$$

式（8）より General–VG モデルは，

$$K_r(h) = S(h)^p\left[1-\left(1-S(h)^{\frac{1}{m}}\right)^m\right]^r \tag{21}$$

ここで $m=1-q/n$ であることから式（15）の S，式（21）の K_r ともに q の関数である．General–VG の $K_r(S)$ 表記は

$$K_r(S) = S^p\left[1-\left(1-S^{\frac{1}{m}}\right)^m\right]^r \tag{22}$$

van Genuchten（1980）は，$m = 1-1/n$ の Mualem–VG モデルとして

$$K_r(h) = S(h)^p\left[1-\left(1-S(h)^{\frac{1}{m}}\right)^m\right]^2 \tag{23}$$

（$p = 0.5$ の式が示されている），$m = 1-2/n$ の Burdine–VG モデルとして，

$$K_r(h) = S(h)^2\left[1-\left(1-S(h)^{\frac{1}{m}}\right)^m\right] \tag{24}$$

の閉形式解を示した．現在では Mualem–VG モデルが広く使われていることから，Mualem–VG モデルのことを単に VG モデルとよぶことが多い．

VG モデルにおいて，$\alpha h \gg 1$ では水分保持関数の式（15）は $\lambda = mn$ の BC モデルに近似され, また式（21）は,

$$K_r(h) \approx m^r \alpha h^{-(p+r)mn-qr} \tag{25}$$

と近似される．すなわち．$\alpha h \gg 1$ において $\log h$ – $\log K$ グラフの傾きは $-(p+r)mn-qr$ となって $\lambda = mn$ としたときに BC 式と一致する（関，2022）．

2.3 KO モデル

間隙径（間隙を毛管とみなしたときの半径）を r_a として（一般化透水モデルの r と区別するために r_a とした），水分量変化に基づく間隙径分布関数（volumetric pore-size distribution function）$f(r_a)$ を

$$f(r_a) = d\theta/dr_a \tag{26}$$

によって定義する（Mualem, 1976）．すなわち，$f(r_a)dr_a$ は間隙径が r_a 以上 r_a+dr_a 以下の間隙の単位体積あたりの体積である．KO モデルは，Brutsaert（1966）のように間隙径分布を対数正規分布で表現したモデルである．すなわち，

$$f(r_a) = \frac{\theta_s-\theta_r}{r_a\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\frac{[\ln(r_a/r_m)]^2}{2\sigma^2}\right] \tag{27}$$

このときに，γ を水と空気の間の表面張力，β を接触角，ρ_w を水の密度，g を重力加速度として，定数 C を $C = 2\gamma\cos\beta/\rho_w g$ と定めれば，間隙径 r_a と間隙水のマトリックポテンシャル h の間には，毛管上昇のジュレンの式より（宮﨑ら，2005）

$$h = \frac{C}{r_a} \tag{28}$$

という関係があるため，付録 A で示すように，KO モデルの水分保持関数

$$S(h) = Q\left[\frac{\ln\left(\dfrac{h}{h_m}\right)}{\sigma}\right] \tag{29}$$

が導かれる．ここで，h_m，σ はパラメータで，$h_m > 0$,

$\sigma > 0$，$Q(x)$ は標準正規分布の x から上側の確率（上側確率）

$$Q(x) = 1 - \phi(x) = \int_x^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx \tag{30}$$

ただし $\phi(x)$ は標準正規分布の累積分布関数である（東京大学教養学部統計学教室, 1991）．$Q(x)$ は Microsoft Excel の norm.dist 関数で $Q(x) = 1-$norm.dist(x, 0, 1, TRUE) と計算できる．また，$Q(x)$ を誤差関数

$$\mathrm{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \exp\left(x^2\right) dx \tag{31}$$

によってあらわすと，

$$Q(x) = \frac{1}{2}\left[1 - \mathrm{erf}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)\right] \tag{32}$$

式（6）の積分変数を

$$y = \frac{\ln\left(\dfrac{h}{h_\mathrm{m}}\right)}{\sigma} \tag{33}$$

によって S から y に変換すると，$S = Q(y)$ であり．$S = 0$ において $y = \infty$ であるので，

$$A(h) = \int_\infty^{y(h)} h^{-q} \frac{dS}{dy} dy \tag{34}$$

式（33）より

$$h = h_\mathrm{m} \exp(\sigma y) \tag{35}$$

であることと，式（30）から

$$\frac{dS}{dy} = \frac{dQ(y)}{dy} = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right) \tag{36}$$

であることから，式（35）と式（36）を式（34）に代入すると，

$$\begin{aligned} A(h) &= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_\infty^{y(h)} h_m{}^{-q} \exp(-q\sigma y) \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right) dy \\ &= -\frac{h_m{}^{-q}}{\sqrt{2\pi}} \int_\infty^{y(h)} \exp\left(-q\sigma y - \frac{y^2}{2}\right) dy \end{aligned} \tag{37}$$

さらに，

$$z = \frac{y + q\sigma}{\sqrt{2}} \tag{38}$$

とおいて z^2 を計算すると，

$$-q\sigma y - \frac{y^2}{2} = \frac{q^2\sigma^2}{2} - z^2 \tag{39}$$

が得られ，これを式（37）に代入して積分変数を y から z に変換すると，$dy/dz = \sqrt{2}$ より，

$$\begin{aligned} A(h) &= -\frac{h_m{}^{-q}}{\sqrt{2\pi}} \int_\infty^{z(h)} \exp\left(\frac{q^2\sigma^2}{2} - z^2\right) \frac{dy}{dz} dz \\ &= -\frac{h_m{}^{-q}}{\sqrt{\pi}} \exp\left(\frac{q^2\sigma^2}{2}\right) \int_\infty^{z(h)} \exp\left(-z^2\right) dy \end{aligned} \tag{40}$$

式（31）と $\mathrm{erf}(\infty) = 1$ の関係を用いると，

$$A(h) = \frac{h_m{}^{-q}}{2} \exp\left(\frac{q^2\sigma^2}{2}\right) [1 - \mathrm{erf}(z(h))] \tag{41}$$

さらに式（32）より，

$$A(h) = h_m{}^{-q} \exp\left(\frac{q^2\sigma^2}{2}\right) Q(\sqrt{2}z(h)) \tag{42}$$

式（38）と式（33）を順に代入すると，

$$A(h) = h_m{}^{-q} \exp\left(\frac{q^2\sigma^2}{2}\right) Q\left[\frac{\ln(h/h_\mathrm{m})}{\sigma} + q\sigma\right] \tag{43}$$

したがって，

$$B = A(0) = h_m{}^{-q} \exp\left(\frac{q^2\sigma^2}{2}\right) \tag{44}$$

式（8）より General–KO モデルの閉形式解は，

$$K_\mathrm{r}(h) = S(h)^p \left[Q\left[\frac{\ln(h/h_\mathrm{m})}{\sigma} + q\sigma\right]\right]^r \tag{45}$$

また，K_r を S の関数であらわすためには，Q の逆関数 Q^{-1} が利用できる．式（29）の逆関数は，

$$Q^{-1}(S) = \frac{\ln\left(\dfrac{h}{h_\mathrm{m}}\right)}{\sigma} \tag{46}$$

式（45）に代入すると，

$$K_{\mathrm{r}}(S) = S^p \left[Q \left[Q^{-1}(S) + q\sigma \right] \right]^r \tag{47}$$

Q^{-1} は Microsoft Excel の正規分布の累積分布関数の逆関数 norm.inv 関数を用いて計算することができ，$Q^{-1}(S) = \mathrm{norm.inv}(1-S, 0, 1)$ である．なお，Kosugi（1996）は Mualem モデルと Burdine モデル，Kosugi（1999）は式（5）の一般化透水モデルに対して間隙径の対数正規分布から式（45），式（47）を導出しているので参照されたい．

3. 線型結合モデル

ここまで示した基本モデルの閉形式解は，それぞれの水分保持関数を足し合わせた線形結合モデルに応用することが可能である．Durner（1994）は，複数の VG モデルの水分保持関数の重み付き線形和

$$S(h) = \sum_{i=1}^{k} w_i S_i(h) \tag{48}$$

によって柔軟な水分保持曲線を表現した．ここで，k は使用する基本モデル（以降サブモデル）の数，i はサブモデル番号，w_i は重み係数（$0 < w_i < 1\ \sum w_i = 1$），$S_i(h)$ は i 番目のサブモデルである．サブモデルにおける VG モデルの式（15）は，それぞれのパラメータがサブモデルで異なるため，それぞれにサブモデル番号 i をつけて，

$$S_i(h) = \left[\frac{1}{1+(\alpha_i h)^{n_i}} \right]^{m_i} \tag{49}$$

と表記される．ここで，それぞれのサブモデルにおいて $m_i = 1 - q/n_i$ である．

Priesack and Durner（2006）は，式（48）と式（49）の線形和の水分保持関数に対して，式（5）の一般化透水モデルによる不飽和透水係数の閉形式解を導いた．式（6）は積分変数の変換によって，

$$\begin{aligned} A(h) &= \int_0^{S(h)} h(S)^{-q} dS \\ &= \int_\infty^h h^{-q} \frac{dS}{dh} dh \\ &= \int_\infty^h h^{-q} \left(\sum_{i=1}^k w_i \frac{dS_i}{dh} \right) dh \\ &= \sum_{i=1}^k w_i \int_\infty^h h^{-q} \frac{dS_i}{dh} dh \\ &= \sum_{i=1}^k w_i \int_0^{s_i(h)} h(S_i)^{-q} dS_i \end{aligned} \tag{50}$$

と変形できることから，

$$A_i(h) = \int_0^{s_i(h)} h(S_i)^{-q} dS_i \tag{51}$$

$$B_i = A_i(0) = \int_0^1 h(S_i)^{-q} dS_i \tag{52}$$

としたときに，式（8）より

$$K_{\mathrm{r}}(h) = \frac{K(h)}{K_{\mathrm{s}}} = S(h)^p \left[\frac{\sum_{i=1}^k w_i A_i(h)}{\sum_{i=1}^k w_i B_i} \right]^r \tag{53}$$

サブモデルの式（51）と式（52）は，式（6）と式（7）と等しい．そのため，2.2 節の VG モデルと同様に式（49）から $A_i(h)$ の計算ができ，式（53）の閉形式解を得ることができる．また，Priesack and Durner（2006）は，式（53）において $r = 1$ とすると，

$$K_{\mathrm{r}}(h) = S(h)^p \eta^{-1} \left[\sum_{i=1}^k w_i A_i(h) \right] \tag{54}$$

のように，透水性関数がサブモデルの関数 A_i の重み付き線形和となることを指摘した．ここで $\eta = \sum_{i=1}^k w_i B_i$ であり，式（49）では $\eta = \sum_{i=1}^k w_i \alpha_i$ である．

Seki et al.（2022）は，式（53）を発展させ，式（48）において BC モデル，VG モデル，KO モデルの水分保持関数の任意の組み合わせの線形モデルに対して，不飽和透水係数の閉形式解を示した．Table 1 にその計算結果をまとめる．それぞれのサブモデルの $A_i(h)$，B_i は，対応する基本モデルの $A(h)$，B と等しい．そのため，BC モデル，VG モデル，KO モデルのそれぞれのパラメータに対しては，サブモデル番号 i をつけて表示してある．

たとえば，VG モデルと BC モデルの水分保持関数の線形和は，サブモデル番号を下付き文字で示して VG_1BC_2 モデルと表記する．特に 2 つの同じモデルを重ねる場合は dual-モデルと称する．たとえば VG_1VG_2 モデルは dual-VG モデルと表記する．

4. 一般化透水モデルの有用性

一般化透水モデルは，Burdine モデルと Mualem モデルの積分の式にあらわれる指数を共通の変数で与えるため，不飽和透水係数の閉形式解を統一して記述できる利点がある．一方，Burdine モデルや Mualem モデルにおけるパラメータ値は，それぞれの物理的な考察に基づくものである．そのため，式（5）の p，q，r を変数とすることは，本来のパラメータ値の持つ物理的な意味を失うことにはなる．しかし，変数が増えることにより透水モデルの自由度を上げることでき，より実用的な式となる利点がある．

Table 1　Brooks-Corey（BC），van Genuchten（VG），小杉（KO）モデルのサブ関数 $S_i(h)$ と $A_i(h)$ と B_i.
Sub-retention functions $S_i(h)$, and expression for $A_i(h)$ and B_i for the BC, VG and KO models.

サブモデル	$S_i(h)$	$A_i(h)$	B_i
BC	$\left(\dfrac{h}{h_{\mathrm{b}_i}}\right)^{-\lambda_i}$ $(h > h_{\mathrm{b}_i})$ 1 $(h \le h_{\mathrm{b}_i})$	$B_i\left(\dfrac{h}{h_{\mathrm{b}_i}}\right)^{-\lambda_i-q}$ $(h > h_{\mathrm{b}_i})$ B_i $(h \le h_{\mathrm{b}_i})$	${h_{\mathrm{b}_i}}^{-q}\left(\dfrac{q}{\lambda_i}+1\right)^{-1}$
VG	$[1+(\alpha_i h)^{n_i}]^{-m_i}$ $m_i = 1-q/n_i$	$B_i\left[1-\left(1-S(h)^{1/m_i}\right)\right]^{m_i}$	${\alpha_i}^q$
KO	$Q\left[\dfrac{\ln(h/h_{\mathrm{m}_i})}{\sigma_i}\right]$	$B_i Q\left[\dfrac{\ln(h/h_{\mathrm{m}_i})}{\sigma_i}+q\sigma_i\right]$	${h_{\mathrm{m}_i}}^{-q}\exp\left(\dfrac{q^2{\sigma_i}^2}{2}\right)$

Hoffmann-Riem et al.（1999）は，式（23）の Mualem–VG モデルや式（24）の Burdine–VG モデルのように q, r を固定するよりも，式（21）の General–VG モデルにおいて p, r を自由パラメータとすることで精度良く透水性を表現できるとした．Kosugi（1999）は，General–KO モデルにおいて p，q を自由パラメータとする有用性を示している．Seki et al.（2023）は，$\mathrm{KO_1BC_2}$ モデルでは p と q，dual-VG モデルでは p と r を自由パラメータとすれば，多くの土壌の広い圧力範囲における不飽和透水係数に対して，どちらのモデルでも精度良くあらわせることを示した．なお，実測値からモデルのパラメータを決定するときは，水分保持曲線，不飽和透水係数の順に決定することが多い．dual-VG モデルを含む General–VG モデルでは，$S(h)$ と $K(h)$ の両者が q の関数であるため，$S(h)$ で q を決めると透水性関数の q を自由パラメータとできなくなることに注意が必要である．

5. 修正モデル

$q = 1$ の Mualem–VG モデルにおいて，n が 1 に近いとき，飽和近傍で透水性曲線の傾きが極めて大きくなり，不飽和透水係数が飽和透水係数に対して不自然に小さくなる問題がある．Vogel et al.（2001）は，仮想的な空気侵入値 h_b を与えて，$h < h_\mathrm{b}$ において一定の飽和透水係数を与える修正 VG モデルを提案した．修正モデルでは，h_b に 1 cm 程度の小さな値を与えると，VG モデルの水分保持曲線の形はほぼ変えずに，透水性曲線の $h < h_\mathrm{b}$ における急激な変化を抑制することができる．

Seki et al.（2023）は，線型結合モデルにおいても n_i が小さいときあるいは σ_i が大きいときには同様の問題が生じ得るため，この修正モデルを線型結合モデルに適用した式を示した．さらに一般的に，任意の水分保持関数 $S(h)$ と透水性関数 $K_\mathrm{r}(h)$ に対する修正モデルは，次の修正水分保持関数 S' (h) と修正透水性関数 $K_\mathrm{r}'(h)$ で与えられる．

$$S'(h) = \begin{cases} \dfrac{S(h)}{S(h_\mathrm{b})} & (h > h_\mathrm{b}) \\ 1 & (h \le h_\mathrm{b}) \end{cases} \tag{55}$$

$$K_\mathrm{r}'(h) = \begin{cases} \dfrac{K_\mathrm{r}(h)}{K_\mathrm{r}(h_\mathrm{b})} & (h > h_\mathrm{b}) \\ 1 & (h \le h_\mathrm{b}) \end{cases} \tag{56}$$

修正関数では，$h \le h_\mathrm{b}$ において飽和となり，$h > h_\mathrm{b}$ における S' と K_r' が $h = h_\mathrm{b}$ で連続となるように修正前の関数全体を定数倍して補正する．式（55），式（56）の修正モデルは，Vogel et al.（2001）の Mualem–VG モデル，Seki et al.（2023）の線型結合モデルの修正モデルを与えることを付録 B に示す．

6. おわりに

本稿では，水分保持曲線－不飽和透水係数連結モデルの一般化透水モデルに対して，広く用いられている BC モデル，VG モデル，KO モデルの水分保持関数から不飽和透水性係数の閉形式解を導出する方法を示した．本稿で示した計算手順にしたがえば，たとえば Excel によって様々なモデルの水分保持曲線と透水性曲線を計算することができる．また，著者が作成して公開している SWRC Fit や unsatfit といったプログラムにより実測されたデータからパラメータを決定することができる (Seki et al., 2023).

現在の不飽和水分移動のシミュレーションにおいては，Mualem–VG モデルが最も広く用いられている．HYDRUS に代表される汎用水分移動解析プログラム（Šimůnek et al., 2022）が手軽に利用できるようになった反面，透水モデルの仮定や限界などが検討されることは

少なくなったと思われる．本稿で示した基本モデルの閉形式解の導出過程を確認すると同時に，本稿で引用した文献の議論を再確認することは，不飽和水分移動モデルのさらなる改良において重要と考える．

付録 A

KO モデルの間隙径分布の式（27）を導き，さらに式（28）を用いて水分保持関数の式（29）を導く．KO モデルは，間隙径の自然対数 $\ln(r_a)$ を R としたときに，R が平均 $\ln(r_m)$，標準偏差 σ の正規分布に従う，すなわち $R \sim N(\ln(r_m), \sigma^2)$ としたモデルである．このときに r_a の確率分布を対数正規分布（lognormal distribution）と呼び（東京大学教養学部統計学教室, 1991），r_m はその中央値で $S(r_m) = 0.5$ となる．R と r_a の確率密度関数（probability density function）をそれぞれ $P_R(R)$，$P_r(r_a)$ とすると，

$$P_R(R) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{[R - \ln r_m]^2}{2\sigma^2}\right] \tag{57}$$

$$\begin{aligned} P_r(r_a) &= P_R(R)\frac{dR}{dr_a} \\ &= \frac{1}{r_a\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{[\ln(r_a/r_m)]^2}{2\sigma^2}\right] \end{aligned} \tag{58}$$

ここで，式（26）より θ は積分によって，

$$\theta(r_a) = \theta_r + \int_0^{r_a} f(r_a)dr_a \tag{59}$$

と計算できる． $\int_0^1 f(r_a)dr_a = \theta_s - \theta_r$ かつ $\int_0^1 P_r(r_a)dr_a = 1$ であるから，

$$f(r_a) = (\theta_s - \theta_r)P_r(r_a) \tag{60}$$

式（58）を式（60）に代入すると式（27）が得られる．

次に式（28）を用いて式（29）を導く．式（28）の両辺の対数を取ると，$H = \ln(h)$ とおいて，

$$H = \ln(C) - R \tag{61}$$

ここで正規分布に従う変数 R の一次関数であらわされる変数 H も正規分布に従い（東京大学教養学部統計学教室, 1991），その平均は $\ln(C) - \ln(r_m) = \ln(C/r_m) = \ln(h_m)$（$h_m$ は r_m に対応する圧力水頭），標準偏差は σ，すなわち $H \sim N(\ln(h_m), \sigma^2)$ である（式（57）に式（61）を代入することで確かめられる）．また，H の標準化変数 x

$$x = \frac{H - \ln(h_m)}{\sigma} = \frac{\ln(h/h_m)}{\sigma} \tag{62}$$

は標準正規分布 N(0,1) に従う（東京大学教養学部統計学教室, 1991）．

さて，式（1）と式（59）から，

$$S(r_a) = \frac{1}{\theta_s - \theta_r}\int_0^{r_a} f(r_a)dr_a \tag{63}$$

式（60）を式（63）に代入すると

$$S(r_a) = \int_0^{r_a} P_r(r_a)dr_a \tag{64}$$

この式の右辺は対数正規分布 r_a の下側確率（累積分布関数）であるから，対応する正規分布 $R \sim N(\ln(r_m), \sigma^2)$ の下側確率と等しく，

$$S(R) = \int_0^R P_R(R)dR \tag{65}$$

この式の変数 R を H に変換すると，H の確率密度関数を $P_H(H)$ と書けば，

$$\begin{aligned} S(H) &= \int_\infty^H P_H(H)\frac{dR}{dH}dH \\ &= -\int_\infty^H P_H(H)dH \\ &= \int_H^\infty P_H(H)dH \end{aligned} \tag{66}$$

さらに変数 H を x に変換すると，x の確率密度関数を $P_x(x)$ と書けば，

$$S(x) = \int_x^\infty P_x(x)dx \tag{67}$$

この式は標準正規分布の上側確率であるから式（30）の $Q(x)$ の定義と合致し，

$$S(x) = Q(x) \tag{68}$$

したがって式（62）を代入すれば式（29）が導かれる．ここで h の分布，すなわち間隙水圧分布関数（pore capillary pressure distribution function）（Kosugi, 1994）は，r_a と同様に対数正規分布となり，h_m がその中央値で $S(h_m) = 0.5$ となる．

以上をまとめると，KO モデルは，間隙径の自然対数 R が正規分布に従うと定めることにより，間隙水圧の自然対数 H は R の一次関数であるため正規分布に従い，その標準化変数 x が標準正規分布に従う，というモデルである．

付録 B

式（55）と式（56）の修正モデルの一般形に対して Vogel et al.（2001）の Mualem–VG モデルと Seki et al.（2023）の線型結合モデルの修正モデルを確認する．

まずは，VG モデルの修正モデルでは，$h > h_\mathrm{b}$ において，式（1），式（55）から，

$$\theta'(h) = \theta_\mathrm{r} + \frac{\theta_\mathrm{s} - \theta_\mathrm{r}}{S(h_\mathrm{b})} S(h) \tag{69}$$

ここで θ_m を

$$\theta_\mathrm{m} = \theta_\mathrm{r} + \frac{\theta_\mathrm{s} - \theta_\mathrm{r}}{S(h_\mathrm{b})} \tag{70}$$

すなわち $S(h_\mathrm{b}) = 1$ としたときの仮想的な θ_s の値として定義すると，式（69），式（70）から，

$$\theta'(h) = \theta_\mathrm{r} + (\theta_\mathrm{m} - \theta_\mathrm{r}) S(h) \tag{71}$$

したがって．VG モデルにおいては式（15）から，

$$\theta'(h) = \theta_\mathrm{r} + \frac{\theta_\mathrm{m} - \theta_\mathrm{r}}{[1 + (\alpha h)^n]^m} \tag{72}$$

また，

$$F(h) = \left[1 - S(h)^{\frac{1}{m}}\right]^m \tag{73}$$

とすると式（21）より，

$$K_\mathrm{r}(h) = S(h)^p [1 - F(h)]^r \tag{74}$$

となるから，この式と式（55），式（56）より $h > h_\mathrm{b}$ において，

$$K_\mathrm{r}{}'(h) = S'(h)^p \left[\frac{1 - F(h)}{1 - F(h_\mathrm{b})}\right]^r \tag{75}$$

ここで，K_r’ と F をそれぞれ S’ の関数とみなすと，$S'(h_\mathrm{b}) = 1$ であるため，

$$K_\mathrm{r}{}'(S') = S'^p \left[\frac{1 - F(S')}{1 - F(1)}\right]^r \tag{76}$$

そして，式（72）と式（76）は Vogel et al.（2001）の式と一致する．

次に線型結合モデルにおいては，式（48），式（70）を式（55）に代入すれば $h > h_\mathrm{b}$ において，

$$\begin{aligned} S'(h) &= \frac{\sum_{i=1}^{k} w_i S_i(h)}{S(h_\mathrm{b})} \\ &= \frac{\theta_\mathrm{m} - \theta_\mathrm{r}}{\theta_\mathrm{s} - \theta_\mathrm{r}} \sum_{i=1}^{k} w_i S_i(h) \end{aligned} \tag{77}$$

式（53）を式（56）に代入すれば $h > h_\mathrm{b}$ において，

$$K_\mathrm{r}{}'(h) = S'(h)^p \left[\frac{\sum_{i=1}^{k} w_i A_i(h)}{\sum_{i=1}^{k} w_i A_i(h_\mathrm{b})}\right]^r \tag{78}$$

式（77）と式（78）は Seki et al.（2022）の式と一致する．

引用文献

Brooks, R.H. and Corey, A.T. (1964): Hydraulic properties of porous media. Hydrology Papers 3. Colorado State University, Fort Collins, CO, USA.

Brutsaert, W. (1966): Probability laws for pore-size distributions. Soil Science, 101(2): 85–92.

Burdine, N.T. (1953): Relative permeability calculations from pore-size distribution data. Petroleum Transactions of the American Institute of Mining and Metallurgical Engineers, 198: 71–77.

Durner, W. (1994): Hydraulic conductivity estimation for soils with heterogeneous pore structure. Water Resources Research, 30(2): 211–223.

Hoffmann-Riem, H., van Genuchten, M.Th. and Flühler, H. (1999): A general model of the hydraulic conductivity of unsaturated soils. In van Genuchten et al. (ed.) Proceedings of the International Workshop, Characterization and measurement of the hydraulic properties of unsaturated porous media., Riverside, CA. 22–24 Oct. 1997. University of California, Riverside.

Kosugi, K. (1994): Three-parameter lognormal distribution model for soil water retention. Water Resources Research, 30(4): 891–901.

Kosugi, K. (1996): Lognormal distribution model for unsaturated soil hydraulic properties. Water Resources Research, 32(9): 2697–2703.

Kosugi, K. (1999): General model for unsaturated hydraulic conductivity for soils with lognormal pore-size distribution. Soil Science Society of America Journal, 63(2): 270–277.

小杉賢一郎 (2007): 古典を読む Y. Mualem 著 「不飽和多孔質体の透水係数を推定する新たなモデルについて」 ならびに M.Th. van Genuchten 著 「不飽和土壌の透水係数を推定する閉形式解について」. 土壌の物理性, 106: 47–60.

宮﨑 毅, 長谷川周一, 粕渕辰昭 (2005): 土壌物理学, pp. 19–20. 朝倉書店, 東京.

Mualem, Y. (1976): A new model for predicting the hydraulic conductivity of unsaturated porous media. Water Resources Research, 12(3): 513–522.

Mualem, Y. and Dagan, G. (1978): Hydraulic conductivity of soils: Unified approach to the statistical models. Soil Science Society of America Journal, 42(3):392–395.

Priesack, E. and Durner, W. (2006): Closed-form expression for the multi-modal unsaturated conductivity function. Vadose Zone Journal, 5(1): 121–124.

関 勝寿 (2022): Burdine 透水モデルの再評価. 東洋大学紀要 自然科学篇, 66: 33–40.

Seki, K., Toride, N. and van Genuchten, M.Th. (2022): Closed-form hydraulic conductivity equations for multimodal unsaturated soil hydraulic properties. Vadose Zone Journal, 21(1): e20168.

Seki, K., Toride, N. and van Genuchten, M.Th. (2023): Evaluation of a general model for multimodal unsaturated soil hydraulic properties. Journal of Hydrology and Hydromechanics, 71(1): 22–34.

Šimůnek, J., Šejna, M., Brunetti, G. and van Genuchten, M.Th. (2022): The HYDRUS Software Package for Simulating the One-, Two, and Three-Dimensional Movement of Water, Heat, and Multiple Solutes in Variably Saturated Media, Technical Manual I, Hydrus 1D, Version 5.0, pp. 334. PC Progress, Prague, Czech Republic.

東京大学教養学部統計学教室編 (1991): 統計学入門, pp.106–107, p.121, p.128, p.280, 東京大学出版会, 東京.

van Genuchten, M.Th. (1980): A closed-form equation for predicting the hydraulic conductivity of unsaturated soils. Soil Science Society of America Journal, 44(5): 892–898.

Vogel, T., van Genuchten, M.Th. and Cislerova, M. (2001): Effect of the shape of the soil hydraulic functions near saturation on variably-saturated flow predictions, Advances in Water Resources, 24(2): 133–144.

要　　旨

水分保持曲線－不飽和透水係数連結モデルの Mualem モデルと Burdine モデルを一般化した一般化透水モデルに対して，Brooks and Corey モデル，van Genuchten モデル，Kosugi モデルの水分保持関数から不飽和透水性係数の閉形式解を導出する方法を解説した．さらに，線型結合モデルに対する不飽和透水係数の閉形式解の導出方法を示した．関連する議論として，一般化透水モデルの有用性を示し，また，飽和近傍で透水性曲線の傾きが極めて大きくなり，不飽和透水係数が飽和透水係数に対して不自然に小さくなることを避けるための修正式の一般式を示した．

キーワード：水分保持関数，透水性関数，閉形式解，一般化透水モデル，線型結合モデル