

## Burdineの透水モデルの再評価

著者	関 勝寿
著者別名	Katsutoshi SEKI
雑誌名	東洋大学紀要 自然科学篇
巻	66
ページ	33-40
発行年	2022-03
URL	<a href="http://doi.org/10.34428/00013467">http://doi.org/10.34428/00013467</a>

## Burdine透水モデルの再評価

関 勝寿\*

Reevaluation of Burdine model for estimating relative hydraulic conductivity

Katsutoshi SEKI\*

### Abstract

Mualem and Burdine models to estimate unsaturated hydraulic conductivity from water retention function were compared. For the parameters  $(p, q, r)$  of the generalized Mualem model, Burdine model is  $(q, r) = (2, 1)$  and Mualem model is  $(q, r) = (1, 2)$ . As both models have common  $qr = 2$ , essential difference can be determined by the difference in  $p + r$ . Therefore the original Mualem's parameter set  $(p, q, r) = (0.5, 1, 2)$  is equivalent to the Burdine's model of  $(p, q, r) = (1.5, 2, 1)$ ; in the Brooks and Corey model, they are completely equivalent, and in the van Genuchten model, they are approximately equivalent.

**Keywords** : Capillary model, hydraulic conductivity, Burdine model, Mualem model

**要旨**：土壌水分特性関数から相対透水係数を導く土壌の毛管モデルであるMualemとBurdineのモデルを比較した。一般化Mualem式におけるパラメータ  $(p, q, r)$  により、Burdineモデルは  $(q, r) = (2, 1)$ 、Mualemモデルは  $(q, r) = (1, 2)$  とあらわすことができ、両者は  $qr = 2$  が共通しているため、 $p + r$  が等しければ同等のモデルであるとみなすことができる。実際に、Brooks and Coreyモデルでは  $(p, q, r) = (0.5, 1, 2)$  のMualemモデルと  $(p, q, r) = (1.5, 2, 1)$  のBurdineモデルが完全に一致する。van Genuchtenモデルでは式の上では完全な一致はしないものの近似的に等しく、 $mn$ の値によって $p$ を補正することでさらによく近似できる。

---

\*) 東洋大学自然科学研究室 〒112-8606 文京区白山 5-28-20  
Natural Science Laboratory, Toyo University, 5-28-20, Hakusan, Bunkyo-ku, Tokyo, 112-8606

## 1. 序論

土壌間隙構造の毛管モデルから水分特性（保水特性）と透水係数の関係を導くことは、不飽和土壌中の水分移動解析をする上で重要であり、Mualem（1976）の透水モデルがそのようなモデルとしてよく使われている。Mualem（1976）モデルと並んでBurdine（1953）モデルも有名であるが、MualemはBurdineの式と比較した上でMualemの式の方がより透水性をよく予測できるとした。本稿では改めてBurdineとMualemのモデルを比較する。

BurdineとMualemのモデルについては、小杉（2007）および関（2017）において解説されているため、本稿では簡潔に記す。関（2017）の記号に従い、マトリックサクションを  $h \geq 0$ 、体積含水率を  $\theta$ 、飽和体積含水率を  $\theta_s$ 、残留体積含水率を  $\theta_r$ 、有効水分  $S_e$  を

$$S_e = \frac{\theta - \theta_r}{\theta_s - \theta_r} \quad (1)$$

透水係数を  $K$ 、飽和透水係数を  $K_s$ 、相対透水係数  $K_r$  を

$$K_r = K/K_s \quad (2)$$

とする。Burdine（1953）の透水モデルは、間隙分布を反映する水分特性関数  $S_e(h)$  の逆関数  $h(S_e)$  から相対透水係数  $K_r$  を計算する次のような式である。

$$K_r = S_e^2 \left[ \frac{\int_0^{S_e} h(S_e)^{-2} dS_e}{\int_0^1 h(S_e)^{-2} dS_e} \right] \quad (3)$$

式（3）において、積分をする変数  $S_e$  と定積分区間にあらわれる  $S_e$  については、別の変数で表記しても良いが、両者を同じ変数で表記した。

Mualem（1976）は、Burdineの式を改良して、次のような式を作成した。

$$K_r = S_e^p \left[ \frac{\int_0^{S_e} h(S_e)^{-1} dS_e}{\int_0^1 h(S_e)^{-1} dS_e} \right]^2 \quad (4)$$

ここで、 $p$  は土壌間隙の屈曲度を反映する間隙結合係数（tortuosity factor）である。Mualemは文献から45種類の土壌に対して検証したところ、 $p=0.5$  の時が最善であったとしているため、式（4）に  $p=0.5$  を代入した式をMualemの式とすることもあり、 $p$  を自由変数として水分移動シミュレーションによって最適化することもある。

Burdineの式（3）とMualemの式（4）を一般化すると

$$K_r = S_e^p \left[ \frac{\int_0^{S_e} h(S_e)^{-q} dS_e}{\int_0^1 h(S_e)^{-q} dS_e} \right]^r \quad (5)$$

となる（Kosugi, 1999）。Burdineの式では  $p=2$ ,  $q=2$ ,  $r=1$  であり、Mualemの式では（ $p=0.5$ ）,  $q=1$ ,  $r=2$  である。Mualem（1976）は式（4）において  $p=0.5$  としたモデルについて、4つのモデルと比較し、Mualemのモデルが45種類の土壌に対して誤差の平均値を最も小さくしていることを示した。小杉（2007）によれば、この議論はいささか公平さを欠いている。（4）式の  $p=0.5$  は、この45種類の土壌に対する誤差の平均を最小にするように定

められたのであるから、同様に経験パラメータである (3) 式の  $S_e$  のべき数 2、すなわち (5) 式における  $p$  についても、最適値を探索した上でモデル間の比較を行うべきであると指摘している。

そこで本稿では、Burdine式を (5) 式において  $(q, r) = (2, 1)$  とした式であり、Mualem式を (5) 式において  $(q, r) = (1, 2)$  とした (4) 式であるとして、 $p$  は自由変数であるとして両者を一般化Mualem式 (5) の下で比較する。水分特性関数については、広く用いられている Brooks and Corey (1964) と van Genuchten (1980) の水分特性モデルを検証に用いる。

## 2. 理論

### 2.1. Brooks and Coreyモデル

Brooks and Corey (1964) の水分特性モデル (BCモデル) は、次の式である。

$$S_e = \begin{cases} (h/h_b)^\lambda & \text{if } h > h_b \\ 1 & \text{if } h \leq h_b \end{cases} \quad (6)$$

ここで、 $h_b$  と  $\lambda$  は正の定数で、 $h_b$  は空気侵入値である。

式 (6) から、式 (5) の一般化Mualemモデルによる不飽和透水係数の式を導く。 $S_e(h)$  の逆関数  $h(S_e) = h_b S_e^{-\frac{1}{\lambda}}$  に対して、式 (5) の分子は

$$\begin{aligned} \int_0^{S_e} h(S_e)^{-q} dS_e &= h_b^{-q} \int_0^{S_e} S_e^{\frac{q}{\lambda}} dS_e \\ &= h_b^{-q} \left( \frac{q}{\lambda} + 1 \right)^{-1} S_e^{\frac{q}{\lambda} + 1} \end{aligned} \quad (7)$$

と計算され、式 (5) の分母については式 (7) に  $S_e = 1$  を代入して

$$\int_0^1 h(S_e)^{-q} dS_e = h_b^{-q} \left( \frac{q}{\lambda} + 1 \right)^{-1} \quad (8)$$

となることから、式 (5) は

$$K_r = S_e^p [S_e^{\frac{q}{\lambda} + 1}]^r = S_e^{p+r+\frac{qr}{\lambda}} \quad (9)$$

と計算され、 $K_r$  が  $S_e$  の関数としてあらわされる。式 (6) を代入して

$$K_r = \begin{cases} (h/h_b)^{-(p+r)\lambda - qr} & \text{if } h > h_b \\ 1 & \text{if } h \leq h_b \end{cases} \quad (10)$$

とすれば、 $K_r$  が  $h$  の関数としてあらわすことができる。

したがって、BCモデルの水分特性関数のパラメータ  $(h_b, \lambda)$  と一般化Mualemモデルの  $(p+r, qr)$  の組が等しければ、式 (9) (10) による  $K_r$  の関数形が等しくなる。そして

BurdineモデルとMualemモデルはいずれも $qr=2$ であるから、 $p+r$ が等しければ、等しい透水性曲線となる。

Mualem式では、間隙結合係数 $p$ はMualem (1976) によって経験的に $p=0.5$ と定めたが、 $p$ を自由変数とすることも多い。Mualemモデルにおける $(p, q, r) = (p, 1, 2)$ の組と、Burdineモデルにおける $(p, q, r) = (p+1, 2, 1)$ の組では、式(9)(10)によってまったく同じ透水係数の関数形が得られることから、BCモデルにおいてはBurdineモデルもMualemモデルもまったく等価であると結論される。

特に、Mualem式における $p=0.5$ は、Burdineモデルにおける $p=1.5$ に相当し、Burdine式の $p=2$ (式3)は、Mualem式の $p=1$ に相当する。

## 2.2 van Genuchten モデル

van Genuchten (1980) の水分特性モデル (VGモデル) は、次の式である。

$$S_e = [1 + (\alpha h)^n]^{-m}, n = \frac{q}{1-m} \quad (11)$$

ここで、 $\alpha > 0$ 、 $m > 0$ であり、 $\alpha h$ は無次元である。

このVG式には、式(5)の $q$ が変数として入っている。一般的には $q=1$ とした式が示されることが多く、そのことは序論に記したように透水モデルとしてMualem式がよく使われることと関係している。本稿では一般化Mualem式を用いることから、 $q$ が自由変数となる。透水モデルとしてBurdine式を用いるのかMualem式を用いるのかによって、 $q$ の値が異なり水分特性の関数形が変わるため、BCモデルのようにBurdine式とMualem式が「完全に一致する」ことはあり得ないが、近似的に一致することをこれから示す。

式(11)を順次変形して $h^{-q}$ の式を得る。

$$S_e^{-\frac{1}{m}} = 1 + (\alpha h)^n \quad (12)$$

$$(\alpha h)^n = S_e^{-\frac{1}{m}} - 1 \quad (13)$$

$$(\alpha h)^{-q} = \left(S_e^{-\frac{1}{m}} - 1\right)^{-\frac{q}{n}} \quad (14)$$

式(11)より $q/n=1-m$ であるから、

$$h^{-q} = \alpha^q \left(S_e^{-\frac{1}{m}} - 1\right)^{m-1} \quad (15)$$

$S_e = x^m$ とすれば

$$h^{-q} = \alpha^q (x^{-1} - 1)^{m-1} = \alpha^q \left(\frac{1-x}{x}\right)^{m-1} \quad (16)$$

となるため、式(5)の分子の積分を計算すると

$$\begin{aligned}
\int_0^{S_e} h^{-q} dS_e &= \alpha^q \int_0^{S_e^{1/m}} \left( \frac{1-x}{x} \right)^{m-1} m x^{m-1} dx \\
&= \alpha^q \int_0^{S_e^{1/m}} m(1-x)^{m-1} dx \\
&= -\alpha^q \left[ (1-x)^m \right]_0^{S_e^{1/m}} \\
&= \alpha^q \left[ 1 - (1 - S_e^{\frac{1}{m}})^m \right]
\end{aligned} \tag{17}$$

$S_e=1$ を代入すれば

$$\int_0^1 h^{-q} dS_e = \alpha^q \tag{18}$$

式 (5) , (17) , (18) より

$$K_r = S_e^p \left[ 1 - (1 - S_e^{\frac{1}{m}})^m \right]^r \tag{19}$$

となる。これが、VGモデルと一般化Mualemモデルによる相対透水係数の式である。

ここで、 $1 - (1 - S_e^{\frac{1}{m}})^m$ を $x = S_e^{\frac{1}{m}}$ と変数変換して、 $f(x) = 1 - (1-x)^m$ としてから $x=0$ においてマクローリン展開すると、 $f'(x) = m(1-x)^{m-1}$ より $f'(0) = m$ であるから、 $f(x) = f(0) + f'(0)x = mx$ と近似できる。したがって、 $S_e \approx 0$ のときに

$$1 - (1 - S_e^{\frac{1}{m}})^m \approx m S_e^{\frac{1}{m}} \tag{20}$$

となる。よって式 (19) は

$$K_r \approx m^r S_e^{p + \frac{r}{m}} \tag{21}$$

と近似される。式 (11) より $n = mn + q$ 、すなわち $nr = mnr + qr$ となるため、

$$\frac{r}{m} = \frac{nr}{mn} = \frac{mnr + qr}{mn} = r + \frac{qr}{mn} \tag{22}$$

となることから、式 (21) は

$$K_r \approx m^r S_e^{p+r+\frac{qr}{mn}} \tag{23}$$

と変形できる。VGモデルにおいて、 $h \rightarrow \infty$ 、 $S_e \rightarrow 0$ では $\lambda = mn$ のBC式に近似されることから、 $\lambda = mn$ とすれば $\log S_e - \log K_r$ グラフの傾きは $S_e$ が小さいところではBC式 (式9) もVG式もともに $p+r+\frac{qr}{\lambda}$ となり一致する。また、 $\alpha h \gg 1$ において $S_e \approx (\alpha h)^{-mn}$ より

$$K_r \approx m^r \alpha h^{-(p+r)mn-qr} \tag{24}$$

より、 $\log h - \log K_r$ グラフの傾きは $-(p+r)mn - qr$ となる。

すなわち、VGモデルにおいてもBCモデルと同様に、Mualem式の $p$ に1を足せばBurdine式に対応し、Mualem式の $p=0.5$ とBurdine式の $p=1.5$ は近似的に一致する。ここで、BC式においては完全に一致していたのに対して、VG式においては $q$ が異なることによって水分特性の式 (11) で決定されるパラメータ $\alpha, m, n$ が異なり、 $m^r$ 及び $mn$ が異なること、また式 (23)、(24) は近似式であることから、近似的な一致にとどまる。

### 3. 計算

不飽和水分特性データベースUNSODA (Nemes et al., 2001) の、ID 4661の砂 (Bordenan, Hannover, Germany) の水分特性曲線から、MualemモデルとBurdineモデルによって相対透水係数の曲線を描いて比較する。BCモデルについてはBurdineモデルとMualemモデルが完全に一致することが示されたので、VGモデルについてのみ比較をする。まずは、式 (11) の水分特性モデルによって、最小二乗法によって実測データと最もよくあう水分特性パラメータ ( $\theta_s, \theta_r, \alpha, m$ ) の組を決定する。ここで、MualemモデルとBurdineモデルに対応して、それぞれ $q=1$ と $q=2$ で異なるパラメータの組が得られ、得られた水分特性パラメータと  $(p, q, r)$  の値から、式 (19) によりMualemモデルとBurdineモデルによる相対透水係数を計算する。

その結果、図1の曲線が得られた。ここで、Mualemモデルは  $(p, q, r) = (0.5, 1, 2)$  であり、Burdineについては  $(p, q, r) = (1.5, 2, 1)$  と  $(p, q, r) = (1.89, 2, 1)$  について計算した。Burdineモデルの $p$ については、次の段落で理由を述べる。

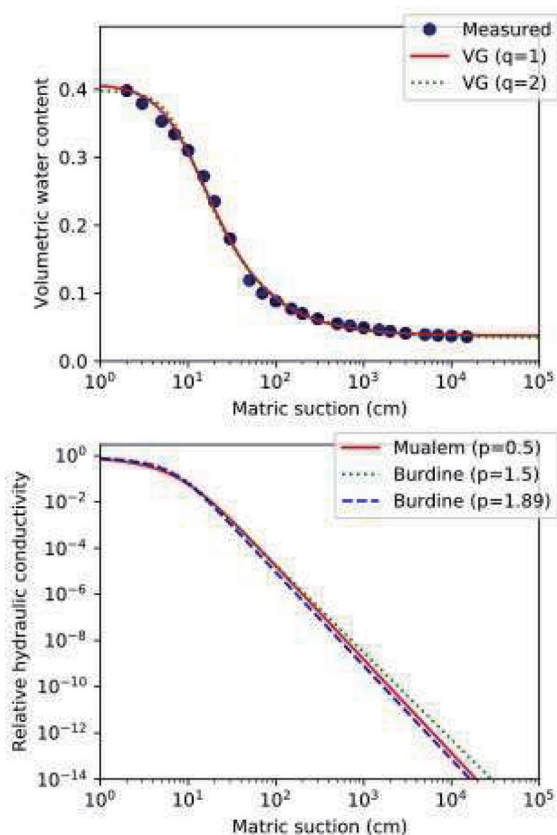


図1. UNSODA 4661 (砂) の水分特性データのVGモデル ( $q=1,2$ ) によるフィッティングと、Mualemモデル ( $p=0.5$ ) およびBurdineモデル ( $p=1.5, 1.89$ ) による透水性予測

このように、MualemモデルとBurdineモデルにおいてかなり近い曲線が得られた。Mualemモデルの $p=0.5$ とBurdineモデルの $p=1.5$ については、前章で考察したように近似曲線が得られることが期待されていたが、透水性グラフの傾きが異なるのは、 $mn$ の値が異なるためである。水分特性パラメータは $q=1$ においては $\theta_s=0.408$ 、 $\theta_r=0.037$ 、 $\alpha=0.101\text{cm}^{-1}$ 、 $m=0.450$ 、 $q=2$ においては $\theta_s=0.398$ 、 $\theta_r=0.034$ 、 $\alpha=0.1271\text{cm}^{-1}$ 、 $m=0.264$ という値が得られ、 $mn$ の値はそれぞれ0.819と0.709となった。そのため、相対透水係数の両対数グラフの傾き $-(p+r)mn-qr$ は、Mualemモデル( $p=0.5$ )においては $-4.05$ 、Burdineモデル( $p=1.5$ )においては $-3.77$ とわずかに異なった。Burdineモデルにおいて $-(p+r)mn-qr=-4.05$ とするために $p=1.89$ とすることでMualemモデルと傾きが一致し、よりMualemモデルに近くなった。このように、 $p$ を自由変数として扱えば、MualemモデルであってもBurdineモデルであっても、ほぼ同等の透水性曲線を得ることができる。

#### 4. おわりに

本報では、不飽和透水係数モデルのBurdine式とMualem式を比較した。間隙結合係数を自由変数とする場合には、Brooks and Corey式においてBurdine式とMualem式は完全に一致し、van Genuchten式においてもほぼ一致することが示された。以上の結果をふまえて、MualemモデルとBurdineモデルのどちらを選択すれば良いかという点について、いくつかの視点から比較する。

(1) 透水性曲線の適合度については、 $p$ を自由変数とする限りにおいては、どちらを選んでも優劣はないことを本報で示した。

(2) 水分特性曲線の適合度については、van Genuchten and Nielsen (1985) は、さまざまなデータセットで検討した結果、 $q=1$ と $q=2$ で比較すると多くの土壌では $q=1$ でよりよくフィットするが、 $q=2$ の方が良い土壌もあるとしている。水分特性曲線のデータがあるのであれば、適合度を比較して選択することが可能である。図1のように、いずれを選択しても大差がない場合が多いであろう。

(3) MualemモデルはBurdineモデルと比べてより広く使われている。このことは、モデルのパラメータを既往の研究と比較して考えやすいというメリットがある。

(4) Mualemモデルにおいてはしばしば $p<0$ となるが、BurdineモデルにおいてはMualemモデルの $p$ に1を足したものが等価となるため、 $p$ がマイナスとはなりにくい。間隙結合係数が負の値とはならないBurdineモデルの方がより自然である。

(5) Burdineモデルでは $r=1$ となるため、Seki et al. (2022) のマルチモデル(サブ関数を線型結合するモデル)のサブ関数においては、透水性関数が線型結合で表現でき、そのために透水性曲線の間隙結合係数をサブ関数ごとに独立で与えることができる、という利点があるため、積極的にBurdineモデルを選択する理由となる。



## 引用文献

- Brooks, R. H. and A. T. Corey (1964) : Hydraulic properties of porous media. Hydrol. Paper 3. Colorado State Univ., Fort Collins, CO, USA.
- Burdine, N. T. (1953) : Relative permeability calculations from pore-size distribution data. Petr. Trans. Am. Inst. Mining Metall. Eng. 198 : 71-77. doi : 10.2118/225-G
- Kosugi, K. (1999) : General model for unsaturated hydraulic conductivity for soils with lognormal pore-size distribution. Soil Sci. Soc. Am. J. 63:270-277. <https://doi.org/10.2136/sssaj1999.03615995006300020003x>
- 小杉賢一郎 (2007) : 古典を読む. Y. Mualem著「不飽和多孔質体の透水係数を推定する新たなモデルについて」ならびにM. Th. Van Genuchten著「不飽和土壌の透水係数を推定する閉形式解について」. 土壌の物理性 106 : 47-60.
- Mualem, Y. (1976) : A new model for predicting the hydraulic conductivity of unsaturated porous media. Water Resour. Res. 12 : 513-522. doi : 10.1029/WR012i003p00513
- Nemes, A., M. G. Shaap, F. J. Leij and J. H. M. Wosten (2001) : Description of the unsaturated soil hydraulic database UNSODA version 2.0. J. Hydrol. (Amsterdam) 251 : 151-162. [https://doi.org/10.1016/S0022-1694\(01\)00465-6](https://doi.org/10.1016/S0022-1694(01)00465-6)
- van Genuchten, M. (1980) : A closed-form equation for predicting the hydraulic conductivity of unsaturated soils. Soil Sci. Soc. Am. J. 44 : 892-898.
- van Genuchten, M. and D. R. Nielsen (1985) : On describing and predicting the hydraulic properties of unsaturated soils. Annales Geophysicae 3 (5) : 615-628.
- 関勝寿 (2017) 水分特性曲線の回帰プログラム SWRC Fit (1) - 水分特性モデル -. 東洋大学紀要自然科学篇 61 : 41-65.
- Seki K., N. Toride and M.T. van Genuchten (2022) : Closed-form hydraulic conductivity equations for multimodal unsaturated soil hydraulic properties. Vadose Zone J. 21 : e20168. <https://doi.org/10.1002/vzj2.20168>