

Ayrık İşlemsel Yapılar

Hafta 2

Doç.Dr. Nilüfer YURTAY

Mantık, Kümeler ve Fonksiyonlar

2.1 Mantık ve Önerme

Çağdaş mantığın ve çağdaş felsefenin kurucusu Alman mantıkçısı Gottlob Frege, "Matematik mantığın uygulama alanıdır." görüşünden hareketle matematiğin, mantığın aksiyomatik sistemi üzerine kurulabileceğini düşünmüştür. Bu düşünceden hareket ederek aritmetiğin temelleri konusundaki felsefi çalışmaları için bir mantık sistemi geliştirmişti.

Daha sonra, Frege'nin çalışmalarına dayanarak, Bertrand Russell ve Alfred North Whitehead 1910-1913 yılları arasında Principia Mathematica adını verdikleri eserde matematiği mantığa indirgeyerek formel bir sistem haline getirmeye çalıştılar. Fakat matematiğin formel hale getirilemeyeceğini Kurt Gödel 1933'te yayınladığı bir kitabındaki (Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme) meşhur teoremiyle gösterdi.

John Alan Robinson, 1967'de çözüm teorem ispatlama yöntemini geliştirdi. Bu yöntem 1972'de A. Colmaurer tarafından ilk mantık programlama dilinin (Prolog) geliştirilmesine yol açtı. Bu dil 1975'te D. Warren tarafından "Warren Abstract Machine" (WAM) olarak uculandı. Kişisel bilgisayarlar üzerinde ilk uygulamalar 1980'lerde ortaya çıktı¹.

Mantıkta, öne sürülen bir ifadenin, değeri *ya doğru ya da yanlış* olmak zorunda olan içeriğine **önerme** denir. Kesin olan cümleler yanlış veya doğru da olsa önermedir. Önerme arasına bir cümlede kesinlikle soru ekleri (mi?, mı?) olmaz.

$2 < 3$ (Doğru bir önerme).

Türkiye'nin başkenti Ankara'dır. (Doğru bir önerme)

$7 = 8$ (Yanlış bir önerme).

İstanbul Amerika'nın başkenti midir?(önerme değildir)

$78=79$ (bu önerme yanlış bir önermedir)

Asal ve çift sayı olan bir tamsayı vardır (bu önerme doğru bir önermedir)

Tanımdan anlaşılacağı gibi, aynı önerme olmaları için ifadelerin aynı şekilde dile getirilmesi gerekmez.

Aşağıdaki önermelerin hepsi aynı önermedir ve değerleri aynıdır (hepsi yanlıştır).

İki kere iki beş eder.

$2 \times 2 = 5$

2'yi 2 ile çarpınca sonuç 5 çıkar.

2 multiplied by 2 equals five.

Herhangi bir önermeye doğru ise "1" yanlış ise "0" sayısı karşılık getirilir. Bu değere önermenin doğruluk değeri denir. Örneğin;

" $\pi=3,22$ " önermesinin doğruluk değeri 0, " $2+13=15$ " önermesinin doğruluk değeri 1 dir.

¹ http://tr.wikipedia.org/wiki/Matematiksel_mant%C4%B1k

Doğruluk değeri bakımından bir önerme için 2, iki önerme için 4 durum vardır.

| P |
|---|
| 1 |
| 0 |

| p | q |
|---|---|
| 1 | 1 |
| 1 | 0 |
| 0 | 1 |
| 0 | 0 |

Genel olarak birbirinden farklı n tane önerme verildiğinde, bu önermeler arasında doğruluk değerleri bakımından 2^n tane farklı durum vardır.

Doğruluk değerleri bakımından aynı olan iki önerme denk önermelerdir ve $p \equiv q$ olarak ifade edilirler. Örneğin;

“ $1+4=5$ ” ve “Adapazarı Sakarya ilinin bir ilçesidir” önermelerinin her ikisi de 1 doğruluk değerini aldığından denk önermedirler.

Bir önermenin değili ya da olumsuzu tanımlanabilir. Doğru bir önermenin değili yanlış, yanlış bir önermenin değili de doğrudur. P önermesinin değili $p', \bar{p}, \sim p, \neg p$ gösterimlerinden biri ile ifade edilebilir. Örneğin;

“ $5 < 8$ ” önermesinin değili “ $5 \geq 8$ ” dir.

Formel mantığın tanımlanmamış terimleri olarak, basit önerme (P) ve mantıksal bağlar (değil, ve, veya, eğer-ise, eğer ve ancak-ise) gösterilebilir. İki ya da daha çok önermenin mantıksal bağ ya da bağlarla birbirine bağlanması ile oluşan yeni önermelere bileşik önerme denir.

“bugün gemiler 9'da veya 10 da sefer yapacak.”
“arkadaşlarım sınıftadır veya arkadaşlarım bahçededir.”
“Eğer yağmur yağıyor ise, hava bulutludur.”
“Yağmurun yağıyor olması havanın bulutlu olmasını gerektirir.”
“Eğer ve ancak çalışanlar ücretlerde aşırı artış talep ederlerse enflasyon düşmez.”

“p ve q” ifadesi, p ve q önermelerinin her ikisi de doğru olduğunda doğru, diğer durumlarda yanlıştır. Bu önermeye p ve q önermelerinin kesişimi denir. $p \wedge q$ olarak da gösterilir ve doğruluk değeri aşağıdaki tablodaki gibidir:

| p | q | $p \wedge q$ |
|---|---|--------------|
| 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 |
| 0 | 0 | 0 |

Örnek olarak $p = "3+3=5"$, $q = "1+6=8"$ olsun. $p \wedge q = 0$ dir. Çünkü p nin ve q nun doğruluk değerleri 0 dir.

" p veya q " ifadesi, p ve q önermelerinin her ikisi de yanlış olduğunda yanlış, diğer durumlarda doğrudur. Bu önermeye p ve q önermelerinin birleşimi denir. $p \vee q$ olarak da gösterilir ve doğruluk değeri aşağıdaki tablodaki gibidir:

| p | q | $p \vee q$ |
|---|---|------------|
| 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 0 |

Örnek olarak $p = "3+3=5"$, $q = "1+6=7"$ olsun. $p \vee q = 1$ dir. Çünkü p nin doğruluk değeri 0 ve q nun doğruluk değeri 1 dir.

" p ise q " ifadesi p doğru, q yanlış olduğu durumda yanlış, diğer durumlarda doğru olan bileşik bir önermedir ve koşullu önerme olarak adlandırılır. Burada p önermesi koşullu önermenin hipotezi, q önermesi ise hükümü(yargı) adını alır. " p ise q " koşullu önermesi " $p \Rightarrow q$ " biçimde ifade edilir ve doğruluk tablosu aşağıdaki gibidir:

| p | q | $p \Rightarrow q$ |
|---|---|-------------------|
| 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 1 |

Örnek olarak "sakarya Türkiye'de ise $1+1=3$ dür" önermesinin doğruluk değerini araştıralım:

$P = "Sakarya Türkiye'dedir"$

$q = "1+1=3"$

p doğru, q yanlış olduğundan verilen koşullu önerme yanlıştır.

$p \Rightarrow q$ bir koşullu önerme olsun. Buradaki p önermesine q için yeter koşul, q önermesine de p için gerek koşul denilmektedir.

$p \Rightarrow q$ bir koşullu önerme olsun. Aşağıdaki tanımlamalar bu koşullu önerme için geçerlidir:

- $P' \Rightarrow q'$; $p \Rightarrow q$ koşullu önermesinin tersidir.
- $q \Rightarrow p$; $p \Rightarrow q$ koşullu önermesinin karşıtıdır.
- $q' \Rightarrow p'$; $p \Rightarrow q$ koşullu önermesinin karşıt tersidir.

Doğru oldukları önceden ispatlanmış olan önermelere teorem adı verilir.

P ve q herhangi iki önerme olsun.

$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$ bileşik önermesine iki yönlü koşullu önerme denir ve $p \Leftrightarrow q$ biçiminde gösterilerek, " p ise ve yalnız böyle ise q dur" biçimde okunur. $p \Leftrightarrow q$ için doğruluk tablosu aşağıdaki gibidir:

| p | q | $p \Rightarrow q$ | $q \Rightarrow p$ | $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$ | $p \Leftrightarrow q$ |
|---|---|-------------------|-------------------|--|-----------------------|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |

Örneğin;

“Sakarya Türkiye’de ise ve yalnız böyle ise $12+12=26$ dır” önermesinin doğruluk değerini bulalım.

p =“Sakarya Türkiye’dedir”

q =“ $12+12=26$ dır”

p doğru, q yanlış olduğundan tablodan hemen verilen iki yönlü koşullu önermenin de yanlış olduğunu görürüz.

p, q, r, s gibi harflerle gösterilen önermeler yerine, değişmez önermeler konduğunda önermeye dönüşen ifadeler önerme formülü denir. Örneğin p ve q değişken önermeleri göstermek üzere $p' \wedge q$, $p' \Rightarrow q$, $(p' \Leftrightarrow q) \vee q'$ ifadelerinden her biri önerme formülüdür.

Örnek olarak $(p \wedge q)'$ önerme formülü için doğruluk çizelgesi oluşturalım:

| p | q | q' | $p \wedge q'$ | $(p \wedge q)'$ |
|---|---|----|---------------|-----------------|
| 1 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 1 |

Eğer bir önerme formülünde değişkenleri yerine yazılan her önerme için doğru değeri söz konusu ise bu önerme formülüne totoloji, değişkenleri yerine yazılan her önerme için yanlış değeri söz konusu ise çelişme denmektedir. Örnek olarak $p \vee p'$ önerme formülünün totoloji, $p \wedge p'$ önerme formülünün de çelişme olduğunu gösterelim:

| p | \vee | p' | | p | \wedge | p' |
|---|--------|----|--|---|----------|----|
| 1 | 1 | 0 | | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 2 | 1 | | 1 | 2 | 1 |

Totolojinin tersi çelişme, çelişmenin tersi de totolojidir.

Değişkenler yerine yazılacak olan her önerme için aynı doğruluk değerinde önermeler veren iki önerme formülüne mantıkça denk veya kısaca denk önerme formülleri denir.

Örnek olarak $(p \vee q)' \equiv (p' \wedge q')$ olduğunu gösterelim:

| $(p \vee q)' \equiv (p' \wedge q')$ için doğruluk tablosu | | | | | | |
|---|---|--------------|---------------|----|----|------------------|
| p | q | $(p \vee q)$ | $(p \vee q)'$ | p' | q' | $(p' \wedge q')$ |
| 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |

Bir diğer örnek olarak $p' \vee q \equiv p \Rightarrow q$ olduğunu gösterelim:

| $p' \vee q \equiv p \Rightarrow q$ için doğruluk tablosu | | | | |
|--|---|----|-------------|-------------------|
| p | q | p' | $p' \vee q$ | $p \Rightarrow q$ |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 0 |

Aşağıdaki tabloda bazı önemli denklikler gösterilmektedir. D ile gösterilen ifadeler doğru değişken önermeleri, Y ile gösterilenler de yanlış değişken önermeleri ifade etmektedir.

| Mantıksal denklikler | |
|--|------------------------|
| Denklik | Adı |
| $p \wedge D \equiv p$ $p \vee Y \equiv p$ | özdeşlik özelliği |
| $p \vee D \equiv D$ $p \wedge Y \equiv Y$ | Baskınlık özelliği |
| $p \vee p \equiv p$ $p \wedge p \equiv p$ | Eşkuvvetlilik özelliği |
| $(p')' \equiv p$ | Tamlama özelliği |
| $p \vee q \equiv q \vee p$ $p \wedge q \equiv q \wedge p$ | Değişme özelliği |
| $(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$ $(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$ | Birleşme özelliği |
| $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ | Dağılma özelliği |
| $(p \vee q)' \equiv p' \wedge q'$ $(p \wedge q)' \equiv p' \vee q'$ | De Morgan Özelliği |

2.2 Kümeler

Önceki bölümde, ayrık matematiğin, sonlu olasılık problemlerin çözümü ile ilgilendiğini gördük. Bazı problemlerde olası tüm durumların incelenmesi gerekmektedir. Böyle durumlarda kümelerin kullanılması işimizi kolaylaştıracaktır. Bazı durumlarda da küme elemanları arasındaki ilişkileri göz önüne almamız gerekmektedir. Bu ilişkiler de matematik olarak bağıntılar (relations) ve fonksiyonlarla ifade edileceklerdir.

2.1 Küme Teorisi; Evrensel Küme, Boş küme, Venn Diyagramları, Kapsam

A ve B gibi iki kümenin elemanlarını içeren kümeye A ve B 'nin birleşim (Union) kümesi denir ve $A \cup B$ ile gösterilir. Buna göre $A \cup B$ kümesindeki bir X elemanı ,

$$(1) X \in A \text{ ve } X \notin B$$

$$(2) X \notin A \text{ ve } X \in B$$

$$(3) X \in A \text{ ve } X \in B$$

özelliklerinden birini taşıyacaktır.

$$A \cup B = \{ X: X \in A \text{ ve/veya } X \in B \}$$

A ve B kümelerinin , her ikisinde de ortak olan elemanlar kümesi , bu iki kümenin kesişimidir ve $A \cap B$ ile gösterilir.

$$A \cap B = \{ X: X \in A \text{ ve } X \in B \}$$

İki kümenin kesişimi \emptyset ise bu kümelere ayrık kümeler (disjoint) denir ve A-B ile gösterilir.

$$A - B = \{ x: x \in A \text{ ve } x \notin B \} \quad A - B \text{ ifadesi A'nın B'den farkı diye okunur.}$$

$$A - B \neq B - A$$

Örnek 2.1

$$A = \{ 1, 3, 5, 8 \}, B = \{ 4, 5, 6, 7 \} \text{ ve } C = \{ 3, 10 \} \text{ ise}$$

$$A \cup B = \{ 1, 3, 4, 5, 6, 7, 8 \} \quad A \cap B = \{ 5 \}$$

$$A \cup C = \{ 1, 3, 5, 8, 10 \} \quad A \cap C = \{ 3 \}$$

$$B \cup C = \{ 3, 4, 5, 6, 7, 10 \} \quad B \cap C = \emptyset \text{ dır.}$$

Yukarıdaki örnek için $A-B=\{1,3,8\}$ ve $B-A=\{4,6,7\}$ dir.

Özel bir durum için olası tüm elemanları içeren kümeye evrensel küme denir ve E ile gösterilir.

Bir A kümesinin tümleyeni (complement) ise $\bar{A}=E-A$ olarak tanımlanır .

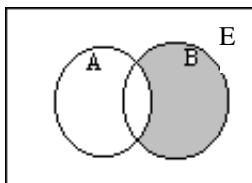
Teorem 2.1

E evrensel küme ve A,B,C alt kümeleri olsun buna göre tablo 2.1’deki ilişkiler söz konusudur.

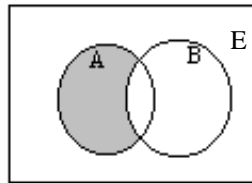
Tablo 2.1

| | |
|--|------------|
| $A \cup B = B \cup A$ ve $A \cap B = B \cap A$ | (Değişme) |
| $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ ve $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ | (Birleşme) |
| $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ ve $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ | (Dağılma) |
| $\bar{\bar{A}} = A$ | |
| $A \cup \bar{A} = E$ | |
| $A \cap \bar{A} = \emptyset$ | |
| $A \cap B \subseteq A$ ve $A \cap B \subseteq B$ | |
| $A - B = A \cap \bar{B}$ | |

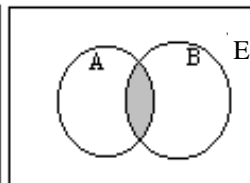
Kümeler arasındaki ilişkiler Venn şemasıyla gösterilir. Venn diyagramlarında evrensel küme bir dikdörtgen ile alt kümeleri ise bu dikdörtgenin içine çizilen dairelerle temsil edilirler.



Taralı alan B-A



Taralı alan A-B



Taralı alan $A \cap B$

Teorem 2.2

De Morgan Yasası ;

E evrensel küme ve A,B bunun alt kümeleri ise ,

$$1. \quad \overline{(A \cup B)} = \bar{A} \cap \bar{B}$$

$$2. \quad \overline{(A \cap B)} = \bar{A} \cup \bar{B}$$

İspat

$\overline{(A \cup B)} = \bar{A} \cap \bar{B}$ eşitliğini ispatlamak için her bir kümenin diğerinin alt kümesi olduğunu göstermemiz yeterlidir. {Çünkü $X \subseteq Y$ ve $Y \subseteq X$ ise $X=Y$ dir.}

$X \in \overline{(A \cup B)}$ olsun.

$X \in \overline{(A \cup B)} \Rightarrow X \notin A$ ve $X \notin B \Rightarrow X \in \bar{A}$ ve $X \in \bar{B}$ yazılabilir.

$X \in \bar{A} \cap \bar{B} \Rightarrow \overline{(A \cup B)} \subseteq (\bar{A} \cap \bar{B})$ olacaktır. (1)

Şimdi de $X \in (\bar{A} \cap \bar{B})$ olsun.

$X \in \bar{A}$ ve $X \in \bar{B} \Rightarrow X \notin A$ ve $X \notin B \Rightarrow X \notin (A \cup B)$

$X \in (\bar{A} \cap \bar{B}) \Rightarrow \bar{A} \cap \bar{B} \subseteq \overline{(A \cup B)}$ elde edilir. (2)

(1) ve (2) nolu sonuçlara göre $\overline{(A \cup B)} = \bar{A} \cap \bar{B}$ olduğu ispatlanmıştır.

Teoremin (b) şıkkıda benzer biçimde ispatlanabilir. Bir kümenin elemanlarının sırası önemli değildir. Yani $\{1,2,3\}=\{2,1,3\}=\{3,1,2\}$ dir. Ancak bazı durumlarda iki elemanın yazılış sırası önem kazanmaktadır. Örneğin sıralı çiftlerde (a,b) a ve b elemanlarının sırası önem kazanmaktadır. Bu durumda $(1,2) \neq (2,1)$ olacak (a,b)=(c,d) durumu yalnız ve yalnız a=c ve b=d ise geçerlidir.

Son olarak ele alacağımız küme işlemi olan Kartezyen çarpımı işlemi sıralı çiftler oluşturacaktır.

A ve B kümelerinin kartezyen çarpımı , $a \in A, b \in B$ olmak üzere tüm sıralı (a,b) çiftlerinin oluşturduğu kümelerdir. Kartezyen çarpım $A \times B$ ile gösterilir.

$$A \times B = \{(a,b) : a \in A \text{ ve } b \in B\}$$

R reel sayılar kümesi ise $R \times R$ tüm sıralı reel sayı çiftleri kümesi olup öklit düzlemini tanımlar.

Örnek 2.2

$A = \{a,b,c\}$ ve $B = \{d,e\}$ ise

$$A \times B = \{(a,d), (a,e), (b,d), (b,e), (c,d), (c,e)\}$$

$$B \times A = \{(d,a), (d,b), (d,c), (e,a), (e,b), (e,c)\} \text{ olur.}$$

$$A \times B \neq B \times A$$

Kartezyen çarpım kümesinin eleman sayısı $|A \times B| = |A| \cdot |B|$ dir

2.3 Eşdeğer Bağlılıklar (Equivalence Relations)

10 tane toptan oluşan bir X kümesini ele alalım. Bu toptlar ya kırmızı, ya mavi ya da yeşil renktedirler. Bu toptları renklerine göre gruplayarak K, M ve Y kümelerine bölelim. (K,M,Y) ailesi X kümesinin bölmelenmesidir.

Bir bölmelenme bir bağıntıyı tanımlamak için kullanılabilir. Eğer S, X kümesinin bir bölmelenmesi ise, bazı $S \in S$ kümeleri için hem x hem y S'ye ait olacak şekilde xRy bağıntısı tanımlanabilir. Örneğimizi ele alırsak, "aynı renkte olan toptlar" şeklinde bir bağıntı tanımlanabilir.

Teorem 2.6

Bir S kümesi üzerine R bağıntısı aşağıdaki özellikleri sağlar.

- (1) Eğer S 'in her X elemanı için $X R X$ doğru ise, R refleksif olarak anılır.
- (2) Eğer $X R Y$ doğru olduğunda $Y R X$ de doğru oluyorsa ,R Simetriktir denir.
- (3) $X R Y$ doğru , $Y R Z$ doğru ise $X R Z$ doğru oluyorsa ,R Transitiftir denir.

Örnek 2.3

$X = \{1,2,3,4,5,6\}$ kümesinin $S = \{\{1,3,5\}, \{2,6\}, \{4\}\}$ bölmelenmesini ele alalım. X üzerinde tanımlanan R bağıntısı yukarıdaki teoremden dolayı (1,1), (1,3) ve (1,5) şeklinde düzenli parçalar içerir. Çünkü $\{1,3,5\} \in S$ kümesindedir. Bu kompleks ilişki

$$R = \{(1,1), (1,3), (1,5), (3,1), (3,3), (3,5), (5,1), (5,3), (5,5), (2,2), (2,6), (6,2), (6,6), (4,4)\} \text{ biçimindedir}$$

Eğer $S \in S$ ise, S 'nin elemanlarını R bağıntısına denk olarak kabul edebiliriz. Buradan da şu sonucu çıkarabiliriz ki, refleksif, simetrik ve transitif bağıntılar denklik bağıntısı olarak isimlendirilirler.

Örneğimizdeki “aynı renkte olan toplar” bağıntısı bu nedenle “aynı renkte olan toplar” denktir anlamındadır. Bu bölmelenmedeki her bir küme diğerlerinden renk olarak farklı olan toplardan meydana gelir.

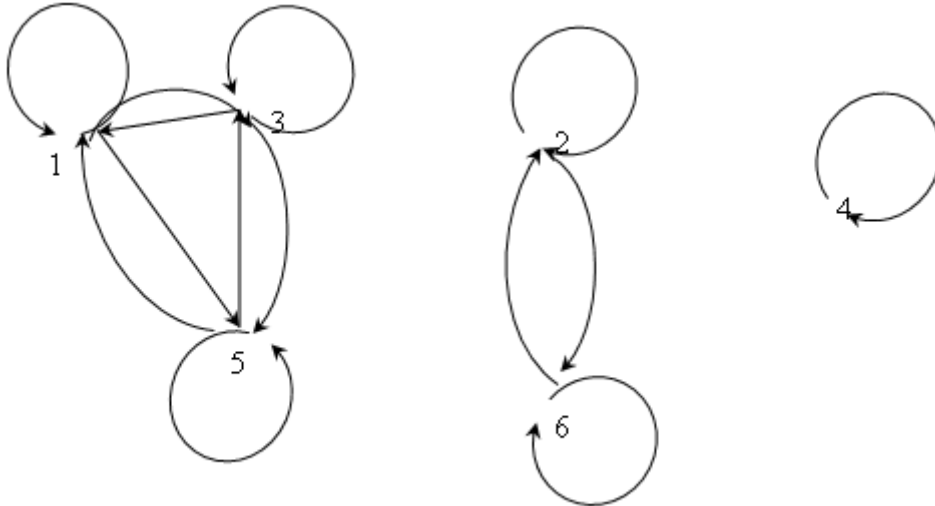
X kümesi üzerindeki bir bağıntı refleksif, simetrik ve transitif ise bu bağıntı X kümesi üzerinde bir **eşdeğer bağıntısı** olarak isimlendirilir.

Örnek 2.4

$X=\{1,2,3,4,5,6\}$ kümesi üzerinde tanımlanan

$S=\{\{1,3,5\},\{2,6\},\{4\}\}$ için bir

$R=\{(1,1),(1,3),(1,5),(3,1),(3,3),(3,5),(5,1),(5,3),(5,5), (2,2),(2,6),(6,2),(6,6),(4,4)\}$ biçiminde olsun. R bağıntısı bir eşdeğer bağıntısıdır. Şekil 2.1’de R bağıntısının temsili grafi yer almaktadır. Açıklayacak olursak R bağıntısı refleksifdir çünkü her noktada bir döngü vardır. R simetrikdir çünkü v’den w’ye her yönlü kenar için w’den v’ye yine bir yönlü kenar vardır. Son olarak transitiftir çünkü eğer x’den y’ye ve y’den z’ye birer yönlü kenar varsa x’den z’ye de bir yönlü kenar bulunmaktadır.



Şekil 2.1

Örnek 2.5

$X=\{1,2,3,4,5\}$ üzerinde $R=\{(1,1),(1,3),(1,5),(2,2),(2,4),(3,1),(3,3),(3,5),(4,2), (4,4),(5,1),(5,3),(5,5)\}$ bağıntısını ele alalım. R refleksifdir. Çünkü $(1,1), (2,2), (3,3), (4,4)$ ve $(5,5) \in R$ dir. R simetrikdir çünkü R' deki her (x,y) için $(y,x) \in R'$ dir. Son olarak R transitifdir çünkü R' deki her (x,y) ve (y,z) için $(x,z) \in R'$ dir. Bu durumda R bir eşdeğer bağıntıdır.

Örnek 2.6

Bir üniversitedeki öğrenciler arasında bir bağıntı şöyle olsun. "Bir öğrenci, bir diğer öğrenci ile eğer soyadları aynı harfle başlıyorsa bağıntılıdır" şeklinde tanımlandığında hemen bu bağıntının eşdeğer bağıntı olduğu görülebilir

Örnek 2.7

XRY bağıntısını X in Y ile aynı anne yada babaya sahip olduğunu gösterebilir. Bu bağıntının refleksif ve simetrik olduğu hemen söylenebilir. Ancak R , transitif değildir. Çünkü X ve Y aynı anneye, Y ve Z de aynı babaya sahip olsalar, X ve Z nin ebeveynlerinin aynı olması gerekmez. Bu nedenle R eşdeğer bağıntı değildir.

Eğer R, S üzerinde bir eşdeğer bağıntı ve $X \in S$ ise, S nin X ile bağıntılı elemanlarının kümesi X 'i içeren bir **eşdeğer sınıf** olacaktır ve $[X]$ ile gösterilir. Yani, $[X]=\{y \in S : yRx\}$ biçiminde ifade edilir.

Teorem 2.7

R, S üzerine bir eşdeğer bağıntı olsun.

(a) X ve Y, S nin elemanları ise, XRY ancak ve ancak $[X]=[Y]$ ise geçerlidir.

(b) R ' nin iki eşdeğer sınıfı ya aynı olur yada ayrıktır.

Bu teoremin sonucu olarak S kümesi, R eşdeğer bağıntısı nedeniyle ayrık alt kümelere bölünür. Bu alt küme ailesi şu özellikleri sağlar.

(a) Hiç bir alt küme boş değildir.

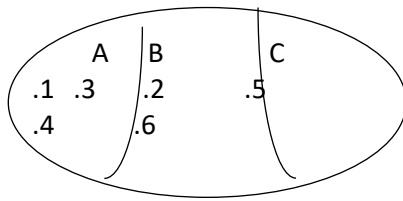
(b) S nin her bir elemanı bir alt kümeye aittir.

(c) İki farklı alt küme ayrıktır.

Bu alt küme ailesi, S kümesinin bir bölmelenmesi (partition) olarak adlandırılır.

Örnek 2.8

$A=\{1,3,4\}$, $B=\{2,6\}$, $C=\{5\}$ olsun. $P=\{A,B,C\}$ kümesi, $S=\{1,2,3,4,5,6\}$ kümesinin bir bölmelenmesi dir.



Görülüyor ki bir S kümesi üzerine R eşdeğer bağıntısının, eşdeğer sınıfları S kümesinin bölmelerine yol açar. Tersine bir P bölmelenmesi varsa, bir R bağıntısı tanımlayabiliriz. Öyleki XRY de X ve Y , P nin aynı üyesinin elemanıdır.

Örneği tekrar ele alırsak,

$\{(1,1),(1,3),(1,4),(3,1),(3,3),(3,4),(4,1),(4,3),(4,4), (2,2),(2,6),(6,2),(6,6),(5,5)\}$

bağıntısını elde edebiliriz. Bu arada R nin bir eşdeğer bağıntı olduğu açıktır. R nin eşdeğer sınıflarının da P nin üyesi olduğu görülmektedir.

Örnek 2.9

$X=\{1,2,3,4,5,6\}$ kümesinin

$S=\{\{1,3,5\},\{2,6\},\{4\}\}$ bölmelenmesini ele alalım. Tanımlanan aşağıdaki bağıntı için 1'in eşdeğer sınıfını bulalım.

$R=\{(1,1),(1,3),(1,5),(3,1),(3,3),(3,5),(5,1),(5,3),(5,5),(2,2),(2,6),(6,2),(6,6),(4,4)\}$

$[1]=\{x \in X \mid xRa\}$

$[1]=\{1,3,5\}$

benzer şekilde $[3]=[5]=\{1,3,5\}$, $[2]=[6]=\{2,6\}$, $[4]=\{4\}$

Örnek 2.10

$X=\{1,2,3,4,5\}$ üzerinde $R=\{(1,1),(1,3),(1,5),(2,2),(2,4),(3,1),(3,3),(3,5),(4,2), (4,4),(5,1),(5,3),(5,5)\}$ bağıntısı için iki eşdeğer sınıf aşağıdaki gibidir.

$$[1]=[3]=[5]=\{1,3,5\}, \quad [2]=[4]=\{2,4\}$$

Teorem 2.8

Sonlu bir X kümesi üzerinde R bağıntısı tanımlı olsun. Eğer her bir eşdeğer sınıfı r elemana sahipse bu durumda $|X|/r$ tane eşdeğer sınıf vardır.

İspat

X_1, X_2, \dots, X_k farklı denklik sınıflarını belirtsin. Bunlar X 'in bölmelenmesi olduklarından dolayı

$$|X| = |X_1| + |X_2| + \dots + |X_k| = r + r + \dots + r = kr$$

2.4 Benzeşimler (Congruence)

Tamsayılar kümesi üzerinde tanımlanmış R_3 bağıntısı aşağıdaki gibi veriliyor olsun.

$R_3=\{(a,b):a-b=5k \text{ bazı } k \text{ tamsayıları için}\}$. Örnek olarak $(7,2) \in R_3$ 'dür. Çünkü $7-2=5=5.1$ ve benzer şekilde $(-11,4) \in R_3$ ve $-11-4= -15= 5.(-3)$ dür. Bu bağıntı refleksif, simetrik ve transitiftir. R_3 bağıntısı bu nedenle eşdeğer bağıntısıdır. Elde edilen eşdeğer bağıntı modül 5'e göre benzeşim olarak isimlendirilir.

Pozitif bir n tamsayısını ele alalım. a tamsayısının n moduna göre b tamsayısına benzer olabilmesi için, $a \equiv b \pmod{n}$, n tamsayısının $(a-b)$ tamsayısını bölmesi gerekmektedir.

Teorem 2.9

Sabit bir n için tanımlanan bir benzeşim tamsayılar kümesi üzerinde bir eşdeğer bağıntıdır, öyleki

a) $a \equiv a \pmod{n}$ her a tamsayısı için doğrudur.

b) Eğer $a \equiv b \pmod{n}$ ise, $b \equiv a \pmod{n}$ benzeşimi a ve b tamsayıları için sağlanır.

c) Eğer $a \equiv b \pmod{n}$ ve $b \equiv c \pmod{n}$ ise $a \equiv c \pmod{n}$ yazılabilir.

Pozitif bir n tamsayısı için, n modunun tüm denklik sınıflarının kümesi Z_n ile gösterilebilir ve n modundaki tamsayıların kümesi olarak isimlendirilir. n modundaki tamsayılar denklik sınıflarıdır. Her bir denklik sınıfını elemanları mod n 'e göre benzeşim özelliğine sahiptir. Örnek olarak $n=3$ alalım. mod 3 benzeşimine göre 3 denklik sınıfı vardır ve

$Z_3 = \{[0], [1], [2]\}$ kümesidir.

Z_3 'ün elemanları denklik sınıflarıdır. Bu denklik sınıflarının her birinde, elemanların hepsi diğer mod 3 elemanına benzerdir. Öyleki $a \equiv b \pmod{3}$, eğer a ve b aynı eşdeğer sınıflarında yer alıyorsa doğrudur. Böylece

$$[0] = \{\dots, -6, -3, 0, 3, 6, \dots\}$$

$$[1] = \{\dots, -8, -5, -2, 1, 4, 7, \dots\}$$

$$[2] = \{\dots, -7, -4, -1, 2, 5, 8, \dots\}$$

Teorem 2.10

a) Eğer $a \equiv b \pmod{n}$ ve $c \equiv d \pmod{n}$ ise, $a+c \equiv b+d \pmod{n}$ ve $a.c \equiv b.d \pmod{n}$ dir

b) Eğer $a \equiv b \pmod{mn}$ ise, $a \equiv b \pmod{m}$ ve $a \equiv b \pmod{n}$ dir.

Örnek 2.11

$n=3$, $1 \equiv 7 \pmod{3}$ ve $2 \equiv -4 \pmod{3}$ alalım. Yukarıdaki teoremin a) şıkkına göre

$$1+2 \equiv 7+(-4) \pmod{3}$$

$$1.2 \equiv 7.(-4) \pmod{3}$$

anlamındadır ve bu benzeşim $2 - (-28) = 30 = 3 \cdot 10 = 3 \cdot k$ oluğu sürece doğrudur.

Teorem 2.11

Verilen bir pozitif n tamsayısı için

- a) Eğer $r \equiv r' \pmod{n}$ ise, $0 \leq r < n$ ve $0 \leq r' < n$ için $r = r'$ dür.
- b) Eğer a ve n herhangi iki tamsayı ise, $0 \leq r < n$ olacak şekilde bir r tamsayısı vardır ki $a \equiv r \pmod{n}$ yazılabilir. Buradaki r tamsayısı, a 'nın n ile bölünmesi sonucunda artan sayıdır.
- $$a = nq + r$$

Teorem 2.12

Verilen bir pozitif n tamsayısını ele alalım. Z_n , mod n tamsayılarının kümesini göstermek üzere tanımlansın. Buna göre Z_n , tamamen n 'in farklı eşdeğer sınıflarından meydana gelir. Bunlar $[0], [1], [2], \dots, [n-1]$ dir. Buradan yola çıkarak, $0 \leq r < n$ için, $[r]$ eşdeğer sınıfı tamamen $a \equiv r \pmod{n}$ biçimindeki a tamsayılarından oluşmaktadır.

Teorem 2.13

Eğer $0 \leq r < n$, $0 \leq r' < n$ için $a = nq + r$ ve $b = nq' + r'$ ise $r = r'$ eşitliği sadece ve sadece $a \equiv b \pmod{n}$ durumunda yazılabilir.

Z_n , n moduna göre denklik sınıflarının kümesini göstermek üzere, verilen herhangi bir m tamsayısı için $0 \leq r \leq n-1$ olacak şekilde bir r tamsayısı vardır ki, $[m] = [r]$ ya da $m \equiv r \pmod{n}$ yazılabilir. Bu durum $[[m]]_n = r$ ile de gösterilir.

$n=5$ için, $Z_5 = \{[0], [1], [2], [3], [4]\}$
 $= \{[r] : 0 \leq r < 5\}$ yazılabilir.

Z_n kümesinde toplama ve çarpma işlemlerini tanımlayabiliriz. $[a]$ ve $[b]$, mod n benzeşiminin eşdeğer sınıfları olsun. Toplam ve çarpma işlemlerini aşağıdaki gibi tanımlamak mümkündür.

$$[a] \oplus [b] = [a+b] = [[a+b]]_n$$

$$[a] \otimes [b] = [a.b] = [[a.b]]_n$$

Örnek 2.12

$n=5$, $Z_5=\{[0],[1],[2],[3],[4]\}$ alalım.

$$[2] \oplus [4] = [2+4] = [6] = [1] \text{ , } 6 \equiv 1 \pmod{5}$$

$$[2] \otimes [4] = [2.4] = [8] = [3] \text{ , } 8 \equiv 3 \pmod{5}$$

Aşağıda mod 5'e göre toplama ve çarpma tabloları verilmiştir.

| $[a] \oplus [b]$ | [0] | [1] | [2] | [3] | [4] |
|------------------|-----|-----|-----|-----|-----|
| [0] | [0] | [1] | [2] | [3] | [4] |
| [1] | [1] | [2] | [3] | [4] | [0] |
| [2] | [2] | [3] | [4] | [0] | [1] |
| [3] | [3] | [4] | [0] | [1] | [2] |
| [4] | [4] | [0] | [1] | [2] | [3] |

| $[a] \otimes [b]$ | [0] | [1] | [2] | [3] | [4] |
|-------------------|-----|-----|-----|-----|-----|
| [0] | [0] | [0] | [0] | [0] | [0] |
| [1] | [0] | [1] | [2] | [3] | [4] |
| [2] | [0] | [2] | [4] | [1] | [3] |
| [3] | [0] | [3] | [1] | [4] | [2] |
| [4] | [0] | [4] | [3] | [2] | [1] |

2.5 Fonksiyonlar

A ve B gibi iki küme ele alalım. A kümesinin her bir elemanını Y kümesinin sadece bir elemanına eşleyen bağıntıya fonksiyon denir. A kümesi tanım (domain), B kümesi de değer (codomain) olarak adlandırılır ve aşağıdaki gibi gösterilir.

$$f:A \rightarrow B$$

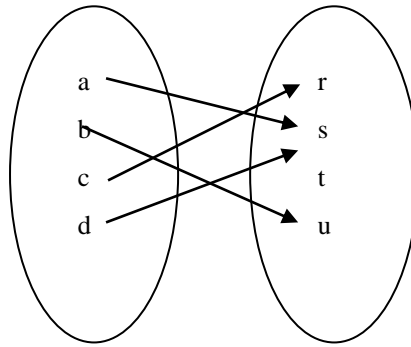
Eğer $a \in A$ ise, B kümesinde f fonksiyonu altında oluşan tek bir görüntü vardır ki bu $f(a)$ olarak gösterilir. Bir f fonksiyonunu matematiksel olarak ifade etmenin çeşitli yolları vardır. Örneğin reel sayılar kümesi üzerinde tanımlanan fonksiyon,

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) = x^2 \text{ ya da } x \rightarrow x^2 \text{ yahut ta } y = x^2 \text{ biçimlerinde ifade edilebilir.}$$

Örnek 2.13

$A = \{a, b, c, d\}$ $B = \{r, s, t, u\}$ ve $f: A \rightarrow B$ $f(a) = s, f(b) = u, f(c) = r, f(d) = s$ olarak verilsin. f fonksiyonun görüntü kümesi $\{r, s, u\}$ değerlerinden oluşacaktır (şekil 2.2).



Şekil 2.2

$f: A \rightarrow B$ ile tanımlanan fonksiyonun grafiği

$$f_{\text{graf}} = \{(a, b) : a \in A \text{ ve } b = f(a)\} \text{ olarak tanımlanır.}$$

$f: A \rightarrow B$ ve $g: A \rightarrow B$ fonksiyonları eşit olarak tanımlanırsa $f = g$ olabilmesi için her $a \in A$ için $f(a) = g(a)$ olmalıdır. Eşit fonksiyonların grafları da eşittir.

Örnek 2.14

$A = \{a, b, c, d\}$ $B = \{r, s, t, u\}$ ve $f: A \rightarrow B$ $f(a) = s, f(b) = u, f(c) = r, f(d) = s$ olarak verilen fonksiyonun grafi $\{(a, s), (b, u), (c, r), (d, s)\}$ olarak tanımlanan düzenli ikililerin bir kümesidir.

Örnek 2.15

$A=\{1,2,3\}$ kümesinde tanımlı olan

$$f=\{(1,3),(2,3),(3,1)\}$$

$$g=\{(1,2),(3,1)\}$$

$$h=\{(1,3),(2,1),(1,2),(3,1)\}$$
 kümelerini ele alalım.

f , A kümesindeki her bir elemanı yine A kümesindeki sadece bir elemana eşlediğinden dolayı bir fonksiyondur. Ancak g bir fonksiyon değildir. Çünkü $2 \in A$ 'nin g altında görüntüsü yoktur. A kümesinde tanımlı olan h bir fonksiyon değildir, çünkü $2 \in A$ ve $3 \in A$ için $h(2)=h(3)$ söz konusudur.

Örnek 2.16

X reel sayılar kümesi, Y negatif olmayan reel sayılar kümesi olsun.

$g: X \rightarrow Y, g(x) = |x|$ olarak tanımlanan g bağıntısı bir fonksiyondur.

Bir f fonksiyonunun tanım kümesinin herhangi iki farklı elemanı değer kümesinin aynı elemanına gitmiyorsa bu fonksiyona bire-bir fonksiyon denir. Bire-bir fonksiyonda tanım kümesinin farklı iki elemanının görüntüleri de farklıdır. Bu nedenle $f: X \rightarrow Y$ fonksiyonunun bire-bir olduğunu belirlemek için $f(x_1)=f(x_2)$ iken $x_1=x_2$ olduğunu göstermek yeterlidir.

Bazı durumlarda değer kümesinin tüm elemanları için tanım kümesindeki elemanların görüntüleri elde edilemeyebilir. Bu durumda değer kümesinde eşlenmeyen elemanlar kalacaktır. $f: X \rightarrow Y$ fonksiyonunun Y kümesi üzerindeki eşleme elemanlarının kümesine bu fonksiyonun görüntüsü (range) denir. Bir fonksiyonun görüntüsü değer kümesine eşit ise o fonksiyona örten fonksiyon adı verilir. Bir fonksiyonun örten olduğunu göstermek için, $\forall y \in Y$ için $y=f(x)$ eşitliğini sağlayan en az bir $x \in X$ varlığını ispat etmek yeterlidir. Hem bire-bir hem de örten fonksiyona da bire-bir-örten fonksiyon denir. Bire-bir-örten fonksiyonda $\forall y \in Y$ için $y=f(x)$ eşitliğini sağlayan sadece bir $x \in X$ söz konusudur.

Örnek 2.17

X reel sayılar kümesini ele alalım. $f: X \rightarrow X, f(x)=2x-3$ olarak tanımlanan fonksiyon hem bire-bir hem de örtendir.

f fonksiyonunu bire-bir olduğunu göstermek için $f(x_1)=f(x_2)$ iken $x_1=x_2$ koşulunu sağlamamız gereklidir.

$$f(x_1)=f(x_2) \Rightarrow 2x_1-3=2x_2-3$$

$$2x_1=2x_2$$

$$x_1=x_2 \text{ elde edilir.}$$

Şimdi de fonksiyonun örten olduğunu gösterelim. Hem tanım hem de değer kümesi reel sayılar olduğu için, her bir y reel sayı için $y=f(x)$ olacak şekilde bir x reel sayısının bulunması gereklidir.

$$x = \frac{1}{2}(y+3) \text{ alalım.}$$

$$f(x) = f\left(\frac{1}{2}(y+3)\right)$$

$$f(x) = 2\left(\frac{1}{2}(y+3)\right) - 3$$

$$f(x) = (y+3) - 3$$

$$f(x) = y \text{ elde edilir ki bu da fonksiyonun örten olması demektir.}$$

$f:A \rightarrow B$ ve $g:B \rightarrow C$ fonksiyonlarını ele alalım. f fonksiyonun görüntüsü g fonksiyonun tanım kümesi olmaktadır. Burada A kümesinden C kümesine tanımlanan yeni fonksiyon f ve g fonksiyonlarının bileşkesi olarak isimlendirilir ve $g \circ f$ olarak gösterilir.

$$(g \circ f)(a) = g(f(a))$$

Teorem 2.14

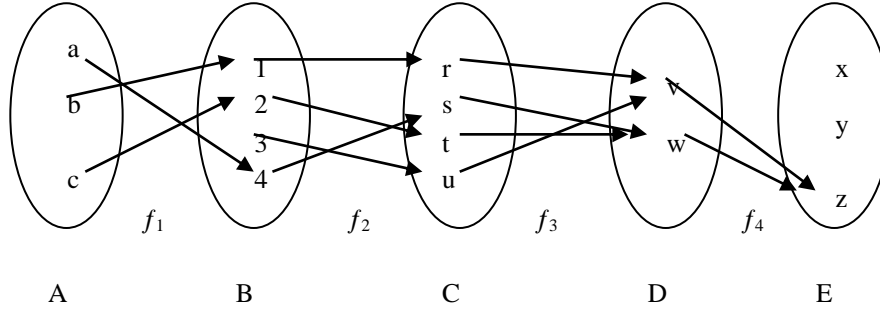
$f:X \rightarrow Y$ bire-bir-örten bir fonksiyon olsun. Bu durumda

(1) $f^{-1}:Y \rightarrow X$ ters fonksiyonu da bire-bir-örtendir.

(2) Tüm $x \in X'$ ler için $f^{-1}f(x)=x$ dir; tüm $y \in Y'$ ler için de $ff^{-1}(y)=y$ dir.

Örnek 2.18

$f_1:A \rightarrow B$, $f_2:B \rightarrow C$, $f_3:C \rightarrow D$ ve $f_4:D \rightarrow E$ fonksiyonları şekil 2.3'eki diyagramlardaki gibi tanımlanmış olsun.



Şekil 2.3

f_1 ve f_2 fonksiyonları bire-bir fonksiyonlardır. f_3 ve f_4 fonksiyonları ise bire-bir değildir. Çünkü $f_3(r) = f_3(u)$ ve $f_4(v) = f_4(w)$ olduğu görülmektedir.

Şimdi indeks fonksiyonu olarak adlandırılan özel bir fonksiyondan bahsedeceğiz. I boş olmayan herhangi bir küme ve S de kümelerin bir sınıfı olsun. I kümesinden S 'e tanımlanan indeks fonksiyonu

$$f:I \rightarrow S \text{ olarak yazılır, her bir } i \in I \text{ için } f(i) \text{ değerleri}$$

$\{A_i : i \in I\}$ ya da $\{A_i\}_{i \in I}$ veyahut da sadece $\{A_i\}$ şeklinde tanımlanan A_i 'lerden oluşmaktadır. I kümesi **indeks kümesi** ve I kümesinin elemanları da **indisler** olarak isimlendirilir. Eğer f indeks fonksiyonu bire-bir ve örten ise S I kümesi tarafından indekslenmiştir deriz. Bir indekslenmiş sınıf için birleşme ve kesişme işlemlerini tanımlamak mümkündür.

$$\cup_{i \in I} A_i = \{x : x \in A_i \text{ bazı } i \in I\}$$

$$\cap_{i \in I} A_i = \{x : x \in A_i \text{ tüm } i \in I\}$$

Örnek 2.19

I kümesi tamsayıların Z kümesi olsun. Her bir n tamsayısı için aşağıdaki R altkümelerini oluşturabiliriz.

$$A_n = \{x : x \leq n\}$$

Bir başka deyişle, $A_n (-\infty, n]$ aralığında sonsuzdur. Her bir a reel sayısı için $n_1 < a < n_2$ olacak şekilde n_1 ve n_2 tamsayıları mevcuttur. Bu nedenle $a \in A_{n_2}$ olmasına karşın $a \notin A_{n_1}$ dir. Bunlardan yola çıkarak aşağıdaki ifadeler yazılabilir.

$a \in \bigcup_n A_n$ olmasına rağmen $a \notin \bigcap_n A_n$

$\bigcup_n A_n = \mathbb{R}$ olmasına rağmen $\bigcap_n A_n = \emptyset$ dir.



Ödev

1. $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ olduğunu gösteriniz.
2. $A \cap B \cap C = \overline{A \cup B \cup C}$ olduğu küme ile ilgili tanımları kullanarak çözünüz (Venn şeması ile değil!!!)
3. Tamsayılar kümesinde tanımlı f ve g fonksiyonları veriliyor.
 $f(x) = 2x + 3$
 $g(x) = 3x + 2$ olduğuna göre $f \circ g$ ve $g \circ f$ nedir?
4. $\sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^3 ij$ değerini bulunuz.

Kaynaklar

F.Selçuk, N.Yurtay, N.Yumuşak, Ayrik İşlemsel Yapılar, Sakarya Kitabevi, 2005.

İ.Kara, Olasılık, Bilim Teknik Yayınevi, Eskişehir, 2000.

“Soyut Matematik”, S.Aktaş, H.Hacısalihoğlu, Z.Özel, A.Sabuncuoğlu, Gazi Üniv.Yayınları, 1984, Ankara.

“Applied Combinatorics”, Alan Tucker, John Wiley & Sons Inc, 1994.

“Applications of Discrete Mathematics”, John G. Michaels, Kenneth H. Rosen, McGraw-Hill International Edition, 1991.

“Discrete Mathematics”, Paul F. Dierker and William L. Voxman, Harcourt Brace Jovanovich International Edition, 1986.

“Discrete Mathematic and Its Applications”, Kenneth H. Rosen, McGraw-Hill International Editions, 5th Edition, 1999.

“Discrete Mathematics”, Richard Johnson Baugh, Prentice Hall, Fifth Edition, 2001.

“Discrete Mathematics with Graph Theory” , Edgar G. Goodaire, Michael M. Parmenter, Prentice Hall, 2nd Edition, 2001.

“Discrete Mathematics Using a Computer”, Cordelia Hall and John O’Donnell, Springer, 2000.

“Discrete Mathematics with Combinatorics”, James A. Anderson, Prentice Hall, 2000.

“Discrete and Combinatorial Mathematics”, Ralph P. Grimaldi, Addison-Wesley, 1998.

“Discrete Mathematics”, John A. Dossey, Albert D. Otto, Lawrence E. Spence, C. Vanden Eynden, Pearson Addison Wesley; 4th edition 2001.

“Essence of Discrete Mathematics”, Neville Dean, Prentice Hall PTR, 1st Edition, 1996.

“Mathematics:A Discrete Introduction”, Edvard R. Schneiderman, Brooks Cole; 1st edition, 2000.

“Mathematics for Computer Science”, A.Arnold and I.Guessarian, Prentice Hall, 1996.

“Theory and Problems of Discrete Mathematics”, Seymour Lipschuts, Marc. L. Lipson, Shaum’s Outline Series, McGraw-Hill Book Company, 1997.

“2000 Solved Problems in Discrete Mathematics”, Seymour Lipschuts, McGraw- Hill Trade, 1991.