

SAYISAL ANALİZ

Yrd. Doç. Dr. Abdullah SEVİN

SAYISAL ANALİZ

1. Hafta

SAYISAL ANALİZE GİRİŞ

AMAÇ

- ❑ Mühendislik problemlerinin çözümünde kullanılan sayısal analiz yöntemlerinin **algoritmik olarak çözümü** ve bu çözümlemelerin MATLAB ile bilgisayar ortamında gerçekleştirilmesine ilişkin temel yeterlikleri kazandırmaktır.
- ❑ Uygulamalı bilim dallarında ortaya çıkan problemleri basit aritmetik işlemlerle yaklaşık olarak çözme metotlarını öğretmektir.

Öğrenme Çıktısı

- ❑ Teorik derslerde el ile yapılan tüm hesaplamaların bilgisayar ortamına nasıl taşınabileceği ve bu problemlerin bilgisayarlara nasıl çözdürülebileceği hakkında beceriler kazandırmak.
- ❑ Sayısal çözüm yaklaşımlarının mutlaka bir algoritma yapısına dayandığının anlaşılması.
- ❑ Bilgisayar ve yazılım dillerinin mühendislik hayatında nasıl bir fonksiyon icra ettiğinin anlaşılması.

Sayısal Analiz Nedir?

❑ Sayısal Analiz

- Nümerik Analiz (**Numeric Analysis**)
- Sayısal Çözümleme
- Mühendislikte Sayısal Yöntemler
olarak ta bilinir.

❑ Genel olarak sayısal analiz;

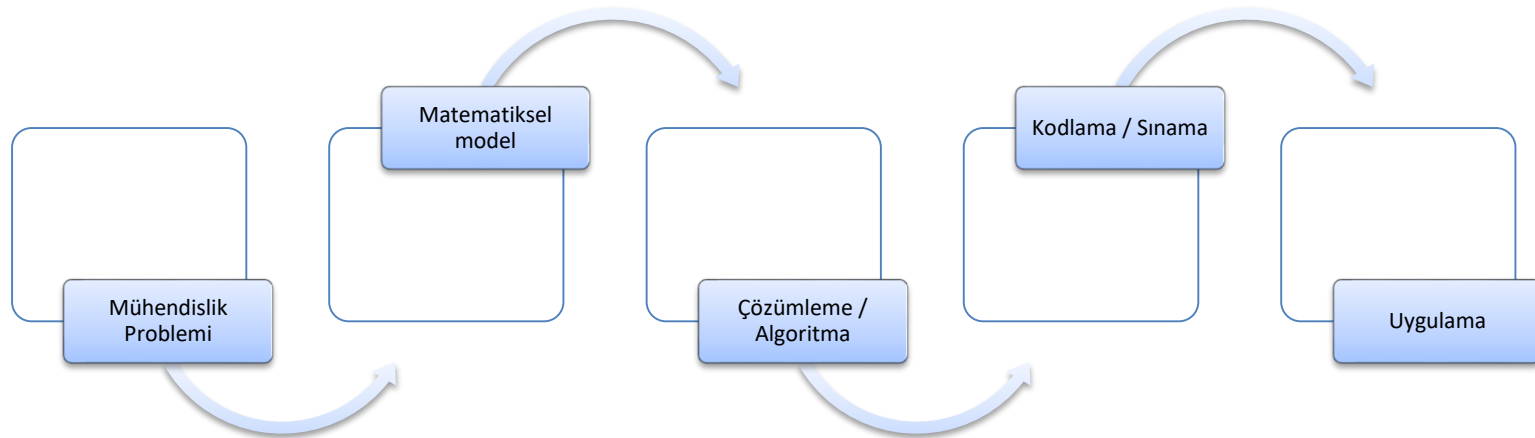
- Matematiksel (analitik) yöntemlere karşı **tekrarlı (temel aritmetik)** işlemler ile sonuca ulaşılan alternatif bir yöntemdir.
- **Örnek:**

❑ Analitik hesaplama: $5*5= 25$

❑ Bilgisayarlı hesaplama (tekrarlı yapı): $5*5=5+5+5+5+5=25$

Sayısal Analiz Nedir?

- ❑ Bir işlevin veya çözüm yönteminin tekrar tekrar uygulanması işlemi ardışık yaklaşım (iterasyon) olarak bilinir.



- ❑ Şüphe yok ki hataları en az olan algoritma verilen problemin çözümü için kullanılacaktır.

Sayısal Analizin Amacı

- ❑ Matematiksel hesaplamaları ve problemleri tekrarlı (**aritmetik**) işlemler ile bilgisayarlar (**programlar**) aracılığı ile çözmektir.
- ❑ Belirli bir sıra ve sayıdaki işlemler bilgisayar programları aracılığı ile çözülür.
- ❑ Özellikle, yüksek dereceli integral, türev ya da çok bilinmeyenli denklemler gibi analitik olarak çözümleri çok zor ya da imkansız olan problemleri, istenilen hassasiyette (**hata oranları içerisinde**) çözmektir.

Sayısal Analizde Temel Kavramlar

- ❑ Rasyonel, irrasyonel vb. sayı kavramı yerine sonlu basamak ile ifade edilen sayılar vardır.
 - π gibi sayılar bilgisayar kelime uzunluğuna bağlı olarak ilgili basamak sayısına kadar yuvarlatılarak hesaplama gerçekleştirilir.
- ❑ Sonsuz şeklinde bir ifade yoktur.
- ❑ Bir problemin bağımsız değişken ve parametrelere bağlı genel çözümünü değil, verilen değerler için çözümünü verir.
- ❑ Çözümün kesinliği ile değil, istenilen hassasiyette (verilen sınırlar içerisinde) yaklaşık çözümler ile uğraşır.

Neden Sayısal Analiz

- ❑ Sayısal analiz yöntemleri güçlü ve esnek problem çözme araçlarıdır.
- ❑ Platform ve programlama dili bağımsız olarak uygulanabilir. Ayrıca hazır paket programlar şeklinde örnekleri de mevcuttur. Programlama becerisini geliştirir.
- ❑ Matematiksel bilgi, yetenek ve anlayışınızı geliştirir.
- ❑ Birçok problemin çözümü sayısal analiz yöntemleri olmadan oldukça zor ya da mümkün değildir.

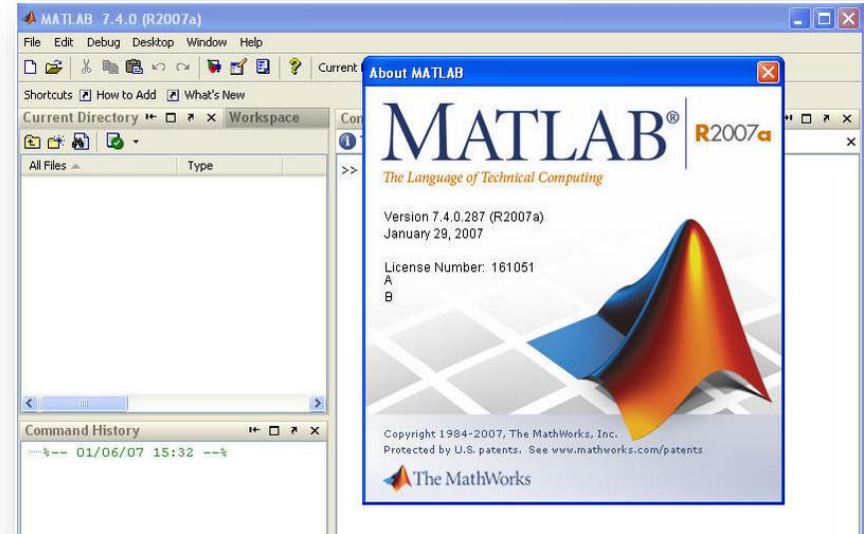
Sayısal Analiz Nereelerde Kullanılabilir?

Çok geniş bir kullanım alanına sahiptir:

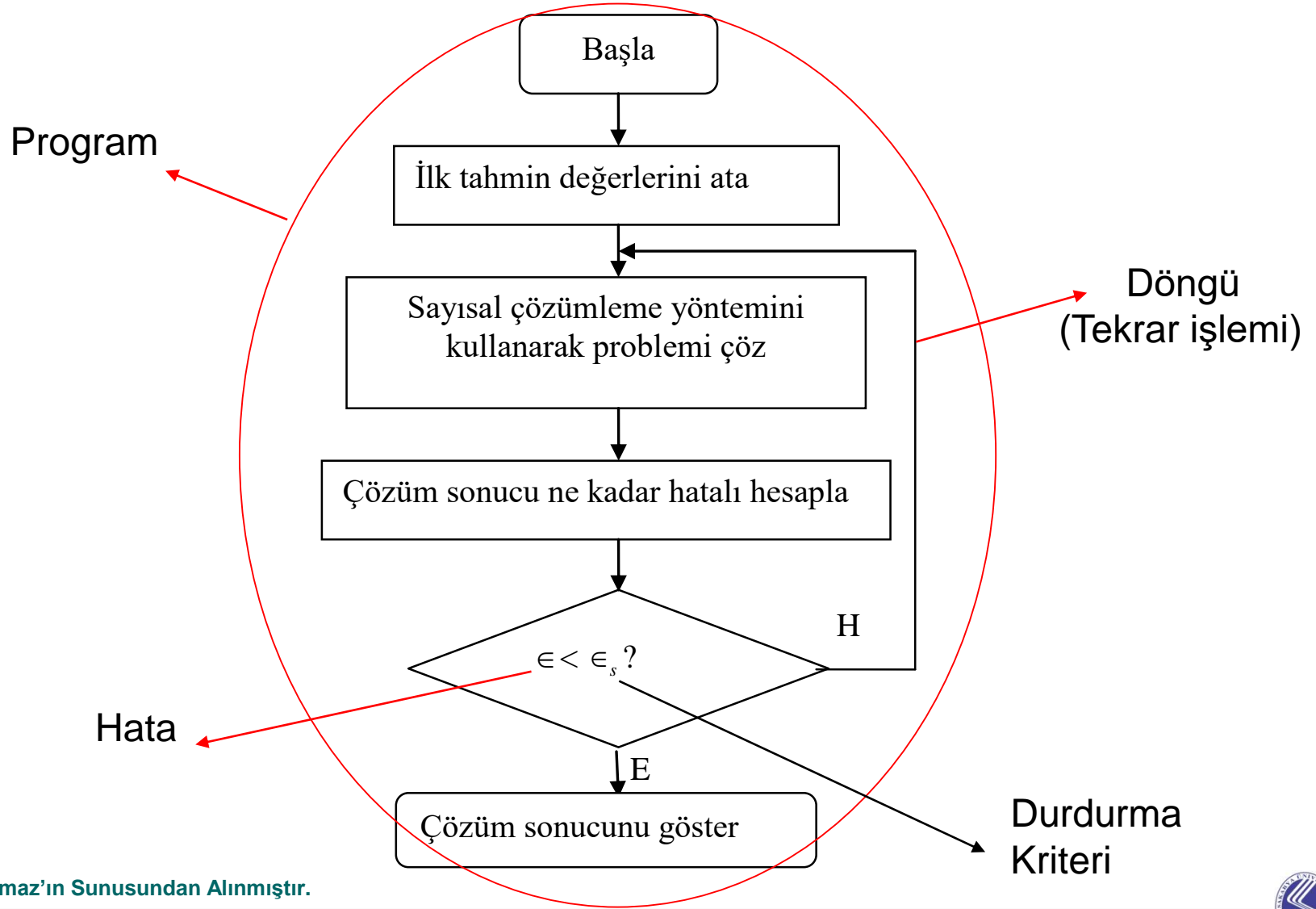
- ☐ Sayısal işaret işleme,
- ☐ Sistem Analizi ve tahminlerinde
- ☐ Modelleme ve Simülasyon
- ☐ Veri Analizi
- ☐ Oyun programlama
- ☐ Bilgisayarlı ve sayısal görüntü işleme,
- ☐ Bilgisayarlı sayısal kontrol,
- ☐ Bilgisayar destekli tasarım ve analiz, vb.

Sayısal Analiz Nereelerde Kullanılabilir?

- ❑ Bu alandaki çalışmaların sonunda elde edilen veya geliştirilen sayısal yöntemler bilgisayar yardımıyla çok çeşitli mühendislik problemlerinin ve bazı temel bilimlerin çözümünü kolaylaştırır.
- ❑ Bilgisayarlarda problemlerin modellenmesi ve çözümleri için genel amaçlı programlama dilleri kullanılabileceği gibi ticari paket programlar, MatLab, MathCAD, veya Mathematica gibi matematiksel işlemler yapmak için geliştirilmiş programlarda kullanılabilir.



Tüm Sayısal Analiz Yöntemlerinde İzlenilecek Genel Yol



HATALAR VE HATALARIN KAYNAKLARI

- ❑ Fiziksel veya sosyal olayların matematiksel olarak çözümlerinde yapılan hatalar genellikle üç ana başlıkta toplanır. Bunlar **modelleme hataları, ölçme hataları ve sayısal hatalardır**;

- ❑ **Modelleme hatası** bir olayın formüle edilmesi esnasında varsayımlardan kaynaklanan hatalardır.

Örnek olarak serbest düşme problemlerinin modellenmesinde, hava ile cisim arasındaki sürtünme kuvvetinin ihmal edilmesinden dolayı meydana gelen hatalar bu tür hatalar grubuna girer.

- ❑ **Ölçme hatası**, deney ve gözlemede ölçmelerden dolayı meydana gelen hatalardır.

Örnekte eğer serbest düşme yapan cismin, düştüğü mesafe veya havada düşerken geçen süre eğer yanlış ölçülürse bu tür hatalar ölçme hatası olarak tanımlanabilir.

- ❑ **Sayısal hatalar** veya diğer bir deyimle modelin çözümlemesinde yapılan hatalardır.

HATALAR VE HATALARIN KAYNAKLARI

- ❑ Sayısal hatalar, matematiksel işlemler ve değerlerin yaklaşık kullanımlarından ortaya çıkan farklar olarak tanımlanabilir.
- ❑ Bu hataların bir kısmı kullanıcılardan, bir kısmı elektronik hesaplayıcılardan , bir kısmı da yazılımlardan kaynaklanır.
- ❑ Belirli bir ondalıktan sonra gelecek sayılar kestirilemez. Gözlemlenen değer, noktadan sonra dört basamaklı ise beşinci basamak için bir şey söylenemez. Bu durumda gözlemlenen veya ölçülen değerlerin binlerce aritmetik işlemin bulunduğu bir algorithmada kullanılacağı varsayılırsa, her bir işlemde sonra, sonucun daha az doğru olduğu kanısına varabiliriz.

HATALAR VE HATALARIN KAYNAKLARI

❑ Örnek vermek gerekirse,

❑ $\pi = 3,141592653589793...$ $\pi == 4 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}$ (Yaklaşık 158 hesaplama Yönt. biri)

❑ $\sqrt{2} = 1,41421356237...$

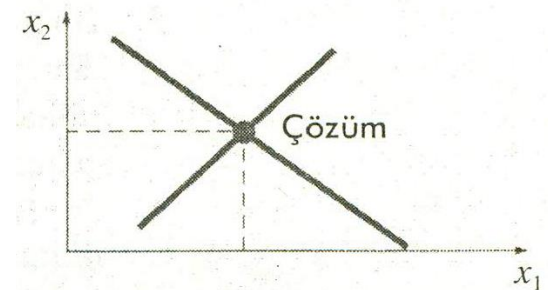
❑ $\frac{2}{3} = 0,6666666666...$

❑ Bu sayılarla işlem yapıldığında hataların büyük olacağı açıktır.

❑ Verilen reel sayı ise ondalık kısmının iki tabanında tam karşılığı olup olmadığı araştırılmalıdır.

Sayısal Analiz Dersinde Neler Göreceğiz

1. Sayısal Analize Giriş
2. Sayısal Analiz İçin Gerekli MATLAB İşlemleri
 - ☐ Temel MATLAB işlemleri
 - ☐ Dizi (vektör) işlemleri (linspace, logspace,)
 - ☐ Grafik Çizimleri (plot, subplot, fplot)
 - ☐ Matris İşlemleri (size, length, sum, zeros, inv)
3. Sayısal Hesaplamalarda Hata Kavramı ve Analizi
 - ☐ Hata Kavramı
 - ☐ Hatanın Sebepleri
 - ☐ Sayısal Hata ve Türleri (Mutlak, Bağıl, Yüzde,...)
 - ☐ Anlamlı Basamak
4. Doğrusal Denklem Takımlarının Çözümü
 - ☐ Cramer yöntemi
 - ☐ Gauss yöntemi
 - ☐ LU (Ayrıştırma, Cholesky) yöntemi



Sayısal Analiz Dersinde Neler Göreceğiz

❑ Linear Denklem

$a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ ve x_1, x_2, \dots, x_n bilinmeyenler olmak üzere,

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b$$

denklemine n - bilinmeyenli bir linear denklem denir.

Bir linear denklemde a_1, a_2, \dots, a_n sayılarına denklemin katsayıları, b sayısına da denklemin sabiti denir.

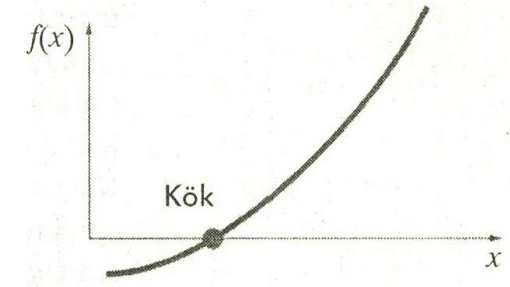
❑ Linear olmayan Denklem

İçerisinde trigonometrik ($\sin, \cos, \tan, \arcsin$ gibi) ifadeler, kübik ve katları terimler vb. ifadeler ile lineerliği bozulan denklemlerdir.

Sayısal Analiz Dersinde Neler Göreceğiz

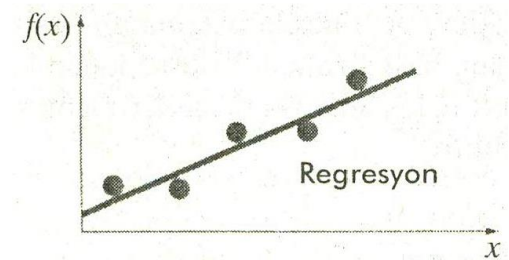
5. Doğrusal Olmayan Denklem Takımlarının Çözümü

- ☐ Bisection (yarılama) metodu,
- ☐ Regula falsi metodu,
- ☐ Newton-Raphson metodu,
- ☐ Secant metodu



6. Eğri Uydurma

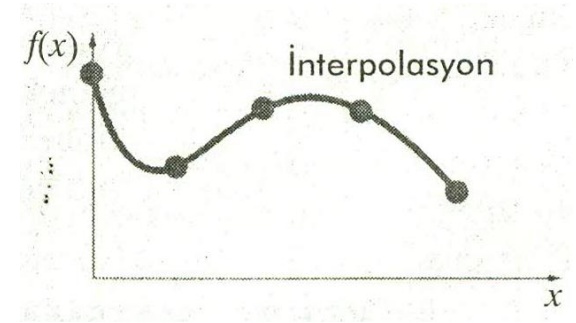
- ☐ En küçük kareler metodu ile doğrusal eğri uydurma
- ☐ Genelleştirilmiş eğri uydurma
- ☐ Doğrusal olmayan eğri uydurma



Sayısal Analiz Dersinde Neler Göreceğiz

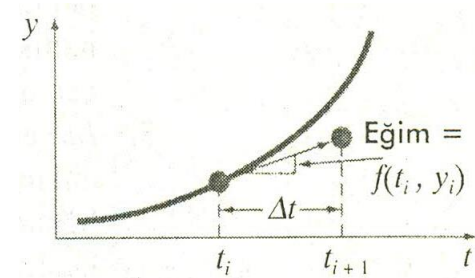
7. Ara Değer Bulma Yöntemleri

- ☐ Lagrange polinom interpolasyonu
- ☐ Newton-farklar bölümü yöntemi,
- ☐ Kübik-spline interpolasyonu
- ☐ Ekstrapolasyon



8. Sayısal Türev

- ☐ Geri farklar yöntemi,
- ☐ Merkezi farklar yöntemi,
- ☐ İleri farklar yöntemi

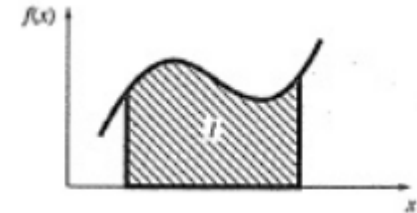


- ✓ **Türev**, bağımlı bir değişkenin bağımsız bir değişkene göre değişme miktarıdır.
- ✓ **Sayısal türev**, bir fonksiyonun bağlı olduğu değişkenlere göre değişim hızının bir ölçüsüdür.

Sayısal Analiz Dersinde Neler Göreceğiz

9. Sayısal İntegral

- ☐ Trapez (yamuklar) yöntemi,
- ☐ Simpson yöntemi,



- ✓ **Sayısal integral**, integrali alınacak fonksiyonun grafiği çizildiğinde grafiğin altında kalan alanın yaklaşık olarak hesaplanması prensibine dayanır.

10. Difrensiyel Denklemlerin Çözümü

- ☐ Taylor seri açılımı,
- ☐ Euler yöntemi,
- ☐ Runge-Kutta yöntemi,

11. Kompleks Sayılar

DEĞERLENDİRME

Yarıyıl İçi Çalışmaları:

	Sayısı	Yıl içine katkı oranı
Ara Sınav	1	% 70
Kısa Sınav	2	% 10
Ödev	1	% 10

Başarı Notu: Yarıyıl içi (% 50) + Yarıyıl Sonu Sınavı (% 50)

KAYNAKLAR

❖ Temel Kaynaklar

- Ders Notları – Sunular

❖ Diğer Kaynaklar

- Steven C. Chapra, Raymond P. Canale (Çev. H. Heperkan ve U. Kesgin), “*Yazılım ve Programlama Uygulamalarıyla Mühendisler İçin Sayısal Yöntemler*”, Literatür Yayıncılık.
- Serhat YILMAZ, “*Bilgisayar İle Sayısal Çözümleme*”, Kocaeli Üniv. Yayınları, No:168, Kocaeli, 2005.
- İlyas ÇANKAYA, Devrim AKGÜN, Sezgin KAÇAR “*Mühendislik Uygulamaları İçin MATLAB*”,Seçkin Yayıncılık
- Mehmet Bakioğlu, “*Sayısal Analiz*”, Birsen Yayınevi, 2004.
- Yüksel YURTAY, Sayısal Analiz Ders Notları, Sakarya Üniversitesi
- Fahri VATANSEVER, “*İleri Programlama Uygulamaları*”,Seçkin Yayıncılık
- İrfan Karagöz, “*Sayısal Analiz ve Mühendislik Uygulamaları*”, VİPAŞ Yayınevi, 2001.