

SAYISAL ANALİZ # 4

Ana Başlıklar:

1- Matlab

2- Matrisler

3- Determinant

4- Chio Yöntemi

5- Gauss Yöntemi

6- Gauss Jordan Yönt.

7- Cramer Yöntemi

8- Ters matris Yöntemi

9- LU Yöntemi

10- Jacobî Yönt.

11- Gauss-Seidel Yönt.

12- Aitken İterasyon Yönt.

13- Bisek İterasyon Yöntemi.

14- Yarılama (Bisection) Yönt.

15- Kısıp (Secant) Yönt.

16- En küçük kareler Yönt.

17- Newton Raphson

18- Regula Falsi Yönt.

19- Kuadratik Enterpo.

20- George-Newton

21- Sonlu Farklar

22- Doğrusal Enterpolasyon

23- Ağı Değer Yöntemi.

- Polinom Enterpo.

- Lagrange Enterpo.

24- Sayısal İntegral

- Yonuk (Trapez)

- Simpson Kuralı.

25- Sayısal Türev

YARILAMA YÖNTEMİ:

* $f(x)$ ile $f(x_0)$ zıt işaretli olmalıdır.

* İşlemler $|x_n - x_{n-1}| \leq \epsilon$ olduğunda işlem sonlandırılır ve kök değeri x_n olduğuna kabul edilir.

ÖR $f(x) = x^3 + 2x^2 + 6x + 3 = 0$ denkleminin $[-1, 0]$ aralığında bir kök olup olmadığı bilinmektedir. $\epsilon = 0,06$ hatası ile hesaplayınız.

$$\begin{aligned} f(-1) &= -2 \\ f(0) &= 3 \end{aligned} \Rightarrow \text{zıt işaretli devam...} \quad -1 < x < 0$$

$$c_1 = \frac{-1+0}{2} = -0,5 \Rightarrow f(c_1) = f(-0,5) = 0,375$$

→ yeni kök işaretine bakılır. (pozitif)

$$c_2 = \frac{-0,5+1}{2} = -0,75 \Rightarrow f(-0,75) = -0,79688$$

(negatif) $\Rightarrow -0,75 < x < -0,5$

$$c_3 = \frac{-0,75-0,5}{2} = -0,625 \Rightarrow f(-0,625) = -0,21289$$

(negatif) $\Rightarrow -0,75 < x < -0,625$

$$c_4 = \frac{-0,625-0,5}{2} = -0,5625 \Rightarrow f(-0,5625) = 0,0758$$

(pozitif) $\Rightarrow -0,625 < x < -0,5625$

KIRIL YÖNTEMİ :

$$x_{i+1} = x_i - \frac{(x_i - x_{i-1})^2}{(y_i - y_{i-1})} \cdot y_i$$

5R $f(x) = e^{-x} - x = 0$ denkleminin köklerini (0,1) aralığında Kiril yönt. hesap.

$$f(0) = 1$$

$$f(1) = -0,632120599$$

> zıt işaretli deyim

$$x_0 = 0$$

$$x_1 = 1$$

$$f(x) \leftarrow x_1 = 1 \quad f(1) \quad y_1 = -0,632120599$$

$$x_2 = x_1 - \frac{x_1 - x_0}{y_1 - y_0} \cdot y_1 = 1 - \frac{1 - 0}{-0,63212 - 1} \cdot (-0,63212) = 0,612699$$

$$x_1 = 1 \quad y_1 = -0,63212$$

$$x_3 = x_2 - \frac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1} \cdot y_2 = 0,612699 - \frac{(0,612699 - 1)}{(-0,0708127 + 0,63212)} \cdot (-0,0708127) = 0,563838$$

$$|x_3 - x_2| = |0,563838 - 0,612699| = 0,048861$$

devam

$$x_2 = 0,612699 \quad y_2 = -0,0708127$$

$$x_3 = 0,563838 \quad y_3 = 0,0058293$$

$$x_4 = 0,567170$$

$$|x_4 - x_3| = |0,567170 - 0,563838| = 0,003332$$

$$x_5 = 0,567143$$

$$|x_5 - x_4| = |0,567143 - 0,567170| = 2,7 \cdot 10^{-5}$$

$$x_6 = 0,567143$$

$$|x_6 - x_5| = 0$$

EN KÜÇÜK KARELER YÖNTEMİ :

5R

x	2	5	6	9
y	4	6	7	8

Çözüm 1 : (Bilin)

$$\begin{array}{l} mx+b : 2m+b \quad 5m+b \quad 6m+b \quad 9m+b \\ y-mx-b : 4-2m-b \quad 6-5m-b \quad 7-6m-b \quad 8-9m-b \end{array}$$

$$f(m,b) = (4-2m-b)^2 + (6-5m-b)^2 + (7-6m-b)^2 + (8-9m-b)^2$$

$$f'_m(m,b) = 2(4-2m-b)(-2) + 2(6-5m-b)(-5) + 2(7-6m-b)(-6) + 2(8-9m-b)(-9) = 0$$

$$f'_b(m,b) = 2(4-2m-b)(-1) + 2(6-5m-b)(-1) + 2(7-6m-b)(-1) + 2(8-9m-b)(-1) = 0$$

$$146m + 72b = 152 \Rightarrow m = 0,58$$

$$22m + 4b = 25 \Rightarrow b = 3,06$$

$$\Rightarrow y = 0,58x + 3,06$$

Çözüm 2 : (Araba)

$$m = \frac{n(\sum_{k=1}^n x_k y_k) - (\sum_{k=1}^n x_k)(\sum_{k=1}^n y_k)}{n(\sum_{k=1}^n x_k^2) - (\sum_{k=1}^n x_k)^2}$$

$$b = \frac{\sum_{k=1}^n y_k - m(\sum_{k=1}^n x_k)}{n}$$

$$m = \frac{4(152) - 22 \cdot 25}{4(146) - 22^2} = 0,58$$

$$b = \frac{25 - 0,58 \cdot 22}{4} = 3,06$$

$$\Rightarrow y = 0,58x + 3,06$$

NEWTON RAPHSON YSNTEMİ

$$\Rightarrow x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \dots$$

$$f(x) = 2x^2 + 12x + 13$$

$x^2 + 6x^2 + 13x - 20$ bir kökünü $x_0 = 2$ abade N-R ile arastiririz

$$x_1 = 2 - \frac{f(2)}{f'(2)} = 2 - \frac{38}{49} = 1,224$$

$$\begin{aligned} f(2) &= 38 > 0 \\ f'(2) &= 49 \\ f''(2) &= 24 > 0 \end{aligned} \quad \text{(iterasyon sayisi=3)}$$

$$x_2 = 1,224 - \frac{f(1,224)}{f'(1,224)} = 1,224 - \frac{6,734}{32,182} = 1,014$$

$$x_3 = 1,014 - \frac{f(1,014)}{f'(1,014)} = 1,014 - \frac{0,893}{28,25} = 1,00006383 \approx 1$$

GEORGE-NEWTON ENTERPOLASYONU

$$*P(x) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{h \cdot 1!} (x-x_0) + \frac{\Delta^2 y_0}{h^2 \cdot 2!} (x-x_0)(x-x_1) + \dots + \frac{\Delta^n y_0}{n! \cdot h^n} (x-x_0) \dots (x-x_{n-1})$$

SR

$h=2$

	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4
x	2	4	6	8	10
y	10	50	122	226	362

$$x=3 \quad P(x)=?$$

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
2	10	40	32	0
4	50	72	32	
6	122	104	32	0
8	226	136		
10	362			

ileri enter.

$$P(x) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{h} (x-x_0) + \frac{\Delta^2 y_0}{2 \cdot h^2} (x-x_0)(x-x_1)$$

$$= 10 + \frac{40}{2} (x-2) + \frac{32}{2 \cdot 4} (x-2)(x-4)$$

$$= 10 + 20x - 20 + 4(x^2 - 6x + 8)$$

$$P(x) = 4x^2 - 4x + 2$$

$$\begin{aligned} P(3) &= 36 - 12 + 2 \\ &= 26 \end{aligned}$$

LİNEER (Döğrusal) ENTERPOLASYON :

ör $f(x) = x^4$

x	0	1	2	3	4
y	0	1	16	81	256

$x = 2.7$ için

$$P(x) = f(x_i) - \left[\frac{f(x_i) - f(x_{i+1})}{x_i - x_{i+1}} \right] \cdot x_i + \left[\frac{f(x_i) - f(x_{i+1})}{x_i - x_{i+1}} \right] \cdot x$$

$$P(x) = 16 - \left[\frac{16 - 81}{2 - 3} \right] \cdot 2 + \left[\frac{16 - 81}{2 - 3} \right] \cdot x$$

$$= 114x + 65x \Rightarrow P(2.7) = 61.5$$

Gercek değeri

$$(2.7)^4 = 53.14$$

Gercek değeri ile hata oranı % 28

LANGRANGE ENTERPOLASYON :

ör

x	0	1	2	3	4
y	10	4	-8	-14	-2

$x = 2.3$

$$L_0(x) = \frac{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)}{(0-1)(0-2)(0-3)(0-4)} = +0.019 \cdot 10 = 0.19$$

$$L_1(x) = \frac{(x-0)(x-2)(x-3)(x-4)}{(1-0)(1-2)(1-3)(1-4)} = -0.136 \cdot 4 = -0.544$$

$$L_2(x) = \frac{(x-0)(x-1)(x-3)(x-4)}{(2-0)(2-1)(2-3)(2-4)} = +0.889 \cdot -8 = -7.112$$

$$L_3(x) = \frac{(x-0)(x-1)(x-2)(x-4)}{(3-0)(3-1)(3-2)(3-4)} = +0.254 \cdot -14 = -3.556$$

$$L_4(x) = \frac{(x-0)(x-1)(x-2)(x-3)}{(4-0)(4-1)(4-2)(4-3)} = -0.026 \cdot -2 = 0.052$$

$f = P(x)$

$$P(x) = 10 \cdot L_0(x) + 4 \cdot L_1(x) + 8 \cdot L_2(x) - 14 \cdot L_3(x) - 2 \cdot L_4(x)$$

$$= 0.19 - 0.544 - 7.112 - 3.556 + 0.052$$

$$= -10.97$$

TRAPEZ (Trapez) KURALI :

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^{x_1} f(x) dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx + \dots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x) dx$$

$$I = I_1 + I_2 + \dots + I_n$$

$$I = \frac{h}{2} (y_0 + y_1) + \frac{h}{2} (y_1 + y_2) + \dots + \frac{h}{2} (y_{n-1} + y_n)$$

$$\Rightarrow I = \frac{h}{2} [y_0 + y_n + 2(y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1})] \Rightarrow \underline{\underline{\text{formül}}}$$

ör

$$\int_0^{\pi} \sin(x) dx$$

İntegralinin $n=4$ olarak trapez yöntemi ile bulunuz.

$$h = \frac{\pi - 0}{4} = \frac{\pi}{4}$$

$$I \approx \frac{h}{2} [y_0 + y_n + 2(y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1})]$$

$$I \approx \frac{\pi}{8} [0 + 0 + 2(\sin \frac{\pi}{4} + \sin \frac{2\pi}{4} + \sin \frac{3\pi}{4})] = \underline{\underline{1,9}}$$

SIMPSON KURALI :

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{6} [f(a) + 4f(\frac{a+b}{2}) + f(b)]$$

$$\Rightarrow \int_{x_i}^{x_{i+2}} f(x) dx \approx \frac{h}{3} [f(x_i) + 4f(x_{i+1}) + f(x_{i+2})]$$

$$\text{Ya da } I \approx \frac{h}{3} [y_0 + y_n + 2(y_2 + y_4 + \dots + y_{n-2}) + 4(y_1 + y_3 + \dots + y_{n-1})]$$

ör

$$\int_2^8 \frac{x}{\sqrt{x^2+9}} dx$$

$n=6$ Simpson yöntemi ile bulunuz.

$$I \approx \frac{1}{3} [1 + 1,955 + 2(1,473 + 1,754) + 4(1,275 + 1,627 + 1,863)]$$

$$I \approx \frac{1}{3} [2,955 + 5,8026 + 19,06]$$

$$\underline{\underline{I \approx 9,273}}$$

$$\frac{8-2}{6} = 1$$

$$h=1$$

$$\begin{aligned} y_0 &= f(2) = 1 \\ y_1 &= f(3) = 1,473 \\ y_2 &= f(4) = 1,754 \\ y_3 &= f(5) = 1,955 \end{aligned}$$

$$y_1 = f(3) = 1,275$$

$$y_2 = f(4) = 1,627$$

$$y_3 = f(5) = 1,863$$