

DERS NOTLARI

Yard. Doç. Dr. Namık AKÇAY
İstanbul Üniversitesi
Fen Fakültesi

DERS-4 → 07.03.2016

Standart Formlar (Canonical Forms)



- Lojik ifadeler, çarpımlar toplamı ya da toplamlar çarpımı formunda ifade edilebilir ve aralarında dönüşümleri yapılabilir.
- **Çarpımlar Toplamı Formu:** Çarpımlar toplamı formu, değişkenlerin çarpımlarından ve bu çarpımların toplamlarından oluşur. Değişkenlerin ise ya normal ya da tümleyen formları olur. Çarpım terimleri, değişkenlerin tamamını içermek zorunda değildir.

$ABC + A'B + BC'D'$ veya $A' + AB + BC'$ ifadeleri çarpımlar toplamı formundadır.

Oysa birden fazla değişkenin tümleyenini içeren terimler varsa çarpımlar toplamı formundadır diyemeyiz; örneğin lojik ifade $(ABC)'$ terimini içeriyorsa...

Verilen lojik bir ifadeyi çarpımlar toplamı formuna dönüştürmek için Boole cebrinin kuralları kullanılır.

Standart Formlar (Canonical Forms)



Örnek: $A'B(C+BD')$ lojik ifadesini çarpımlar toplamı formuna dönüştürebilmek için dağılma kuralını uygulayabiliriz;

$$A'B(C+BD') = A'BC + A'BD'$$

Standart Çarpımlar Toplamı: Çarpımlar toplamı formunda ifade edilen bir lojik ifadenin içerdiği terimler, tüm değişkenleri içermeyebilir. Çarpımlar toplamı olarak elde edilmiş bir lojik ifadeyi standart çarpımlar toplamı biçiminde yazmak istiyorsak, lojik ifadedeki her terimin, tüm değişkenleri içerecek şekilde düzenlenmesi gerekir.

Örnek: $F(A,B,C)=A.B'+A.C$ lojik ifadesini standart çarpımlar toplamı biçiminde elde etmek istersek, ifadedeki birinci terimi $(C+C')$ ile ikinci terimde $(B+B')$ ile genişletmemiz gerekir.

$$\begin{aligned} AB' + AC &= AB'(C+C') + A(B+B')C = \underline{AB'C} + AB'C' + ABC + \underline{AB'C} \\ &= AB'C + AB'C' + ABC \end{aligned}$$

Standart Formlar (Canonical Forms)



Örnek: $F(A,B,C)=A+BC+A'C$ lojik ifadesini pratik olarak standart forma getirmek için aşağıdaki gibi bir tablo hazırlanabilir.

A	BC	$A'C$
<u>ABC</u>	<u>ABC</u>	<u>ABC</u>
100	011	001
101	111	011
110		
111		

$$F(A,B,C)=AB'C'+AB'C+ABC'+\underline{ABC}+\underline{A'BC}+\underline{ABC}+\underline{A'B'C}+\underline{A'BC}$$
$$=AB'C'+AB'C+ABC'+ABC+A'BC+A'B'C$$

- Standart çarpımlar toplamı formu özellikle doğruluk tablosu oluşturmada ve ileride göreceğimiz Karnaugh haritası yardımıyla sadeleştirme işlemlerinde gerekli olacaktır.

Minterm Kavramı

- Standart çarpımlar toplamı şeklinde ifade edilmiş bir lojik ifade deki her terim **minterm** ismiyle anılır.
- Üç değişken içeren bir lojik ifade, 8 adet minterm (2^3) içerir.
- Bu mintermler, girişlerin sadece belli bir kombinasyonunda 1 değerini alırlar. Mintermler m_{indis} ile ifade edilirler. İndis, mintermin değerini 1 yapan değişken kombinasyonunun decimal değeridir.

Değişkenler			Mintermler	
A	B	C	Terim	Simge
0	0	0	$A'B'C'$	m_0
0	0	1	$A'B'C$	m_1
0	1	0	$A'BC'$	m_2
0	1	1	$A'BC$	m_3
1	0	0	$AB'C'$	m_4
1	0	1	$AB'C$	m_5
1	1	0	ABC'	m_6
1	1	1	ABC	m_7

Minterm Kavramı

Örnek: $F=A'B'C+A'BC+ABC$ standart formda verilmiş ifadenin doğruluk tablosunu oluşturmak istediğimiz de devrenin çıkışı, bu çarpım terimlerinin değerlerini 1 yapan kombinasyonlarda 1 olacaktır.

Girişler			Çıkış(F)	Mintermler
A	B	C		
0	0	0	0	
0	0	1	1	$A'B'C$
0	1	0	0	
0	1	1	1	$A'BC$
1	0	0	0	
1	0	1	0	
1	1	0	0	
1	1	1	1	ABC

$F(A,B,C)$ lojik ifadesini mintermler cinsinden ifade etmek istersek ' Σ ' sembolünü kullanırız:

$$F(A,B,C) = \Sigma(1,3,7) = m_1 + m_3 + m_7$$

Standart Formlar (Canonical Forms)



- **Toplamlar Çarpımı Formu:** Toplamlar çarpımı formu, değişkenlerin toplamlarından ve bu toplamların çarpımından oluşur.

$(A+B')(A'+B+C)$ ve ya $A(A'+B)(B+C')$ ifadeleri toplamlar çarpımı formundadır. Oysa birden fazla değişkenin tümleyenini içeren terimler varsa toplamlar çarpımı formundadır diyemeyiz; $(A+B+C)'$

Standart Toplamlar Çarpımı: Toplamlar çarpımı olarak elde edilmiş bir lojik ifadeyi, standart toplamlar çarpımı biçiminde yazmak istiyorsak, lojik ifadedeki her terimin, tüm değişkenleri içerecek şekilde düzenlenmesi gerekir.

Örnek: $F(A,B,C)=(A+B')(B+C)$ lojik ifadesini standart toplamlar çarpımı biçiminde elde etmek istersek,

$$\begin{aligned}(A+B')(B+C) &= (\underline{A+B'}+C.C')(A.A'+\underline{B+C}) \\ &= (A+B'+C).(A+B'+C').(A+B+C).(A'+B+C)\end{aligned}$$

Maxterm Kavramı

- Standart toplamlar çarpımı şeklinde ifade edilmiş bir lojik ifadedeki her terim **maxterm** ismiyle anılır.
- Üç değişkene sahip bir lojik ifade 8 adet maxterm (2^3) içerir.
- Bu maxtermmler girişlerin sadece belli bir kombinasyonunda 0 değerini alır. Maxtermmler **M_{indis}** ile ifade edilirler.
- İndis, **maxtermin değerini 0 yapan değişken** kombinasyonunun decimal değeridir. Ayrıca maxtermmler, mintermlerin **değili** olarak da düşünülebilir.

Değişkenler			Maxtermmler		Mintermler	
A	B	C	Terim	Simgesi	Terim	Simgesi
0	0	0	$A+B+C$	M_0	$A'B'C'$	m_0
0	0	1	$A+B+C'$	M_1	$A'B'C$	m_1
0	1	0	$A+B'+C$	M_2	$A'BC'$	m_2
0	1	1	$A+B'+C'$	M_3	$A'BC$	m_3
1	0	0	$A'+B+C$	M_4	$AB'C'$	m_4
1	0	1	$A'+B+C'$	M_5	$AB'C$	m_5
1	1	0	$A'+B'+C$	M_6	ABC'	m_6
1	1	1	$A'+B'+C'$	M_7	ABC	m_7

Maxterm Kavramı

Örnek: $F(A,B,C)=(A+B+C).(A+B'+C).(A'+B+C).(A'+B+C').(A'+B'+C)$
standart formda verilmiş ifadenin doğruluk tablosunu oluşturmak
istediğimizde $F(A,B,C)$ çıkışı, **bu toplam terimlerinin değerlerini 0**
yapan kombinasyonlarda **0 olacaktır**. Diğer durumlar 1'dir.

Girişler			Çıkış(F)	Maxtermler
A	B	C		
0	0	0	0	$A+B+C$
0	0	1	1	
0	1	0	0	$A+B'+C$
0	1	1	1	
1	0	0	0	$A'+B+C$
1	0	1	0	$A'+B+C'$
1	1	0	0	$A'+B'+C$
1	1	1	1	

$F(A,B,C)$ lojik ifadesini maxtermler
cinsinden ifade etmek istersek 'Π'
sembolünü kullanırız:

$$F=\Pi(0,2,4,5,6)=M_0.M_2.M_4.M_5.M_6$$

Çarpımlar Toplamı Formu ile Toplamlar Çarpımı Formu Arasındaki Dönüşüm İşlemleri



- Çarpım terimlerinin değerlerini **1** yapan kombinasyonlar bulunur,
- daha sonra bu kombinasyonların dışındaki kombinasyonlar tespit edilir ve elde edilen kombinasyonların değerini **0** yapan toplam terimleri bulunur.

Örnek: $F(A,B,C)=\Sigma(4,5,6,7)$ lojik ifadesini maxtermler cinsinden bulalım.

Girişler			F	F'
A	B	C		
0	0	0	0	1
0	0	1	0	1
0	1	0	0	1
0	1	1	0	1
1	0	0	1	0
1	0	1	1	0
1	1	0	1	0
1	1	1	1	0

F fonksiyonunun DEĞİLİ ,

$$F'(A,B,C) = \Sigma(0,1,2,3) = m_0 + m_1 + m_2 + m_3$$

F' fonksiyonunun bir daha DEĞİLİ alınırsa,

$$F(A,B,C) = (m_0 + m_1 + m_2 + m_3)' = m_0' \cdot m_1' \cdot m_2' \cdot m_3'$$

$$= M_0 \cdot M_1 \cdot M_2 \cdot M_3$$

$$= \Pi(0,1,2,3) \text{ olarak bulunur.}$$

Özetle, çarpımlar toplamı formunun içerdiği terimlerin dışında kalan kombinasyonlardan, toplamlar çarpımı formu elde edilir. Bu ifadenin terside geçerlidir.

Dönüşüm İşlemleri



Örnek: $F(A,B,C)=AB'C+A'BC+AB'C'+ABC+A'B'C$ standart çarpımlar toplamı biçiminde verilmiş lojik ifadeyi standart toplamlar çarpımı formuna dönüştürelim.

Çarpım terimlerini 1 yapan kombinasyonlar; 101,011,100,111,001 dir.

Bu kombinasyonların dışındakiler; 000, 010, 110 dir. O halde toplamları 0 yapan terimler $(A+B+C)$, $(A+B'+C)$ ve $(A'+B'+C)$ olur. Bu üç terim çarpıldığında toplamaların çarpımı formu elde edilmiş olur;

$$F(A,B,C)= (A+B+C).(A+B'+C).(A'+B'+C)$$

Ayrıca $F(A,B,C)$ fonksiyonu mintermler cinsinden $\Sigma(1,3,4,5,7)$ şeklinde de ifade edilebilir. Bu mintermler dışındaki kombinasyonlar, maxtermeleri oluşturur.

$$F(A,B,C)= \Sigma(1,3,4,5,7) = \Pi(0,2,6) \text{ yazılabilir.}$$

Sadeleştirme İşlemleri



Örnek: Aşağıda verilen doğruluk tablosuna göre F fonksiyonunu minterm ve maxterm yöntemlerini kullanarak sadeleştirelim.

A	B	C	F
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

İlk olarak F fonksiyonunu mintermler cinsinden yazarak sadeleştirelim;

$$\begin{aligned} F(A,B,C) &= \Sigma(0,2,3,5,7) = \underline{A'B'C'} + \underline{A'BC'} + A'BC + \underline{AB'C} + \underline{ABC} \\ &= A'C'(B'+B) + A'BC + AC(B'+B) = A'C' + \underline{A'BC} + \underline{AC} \\ &= A'C' + C(A'B+A) = A'C' + C(A+B) = \mathbf{A'C' + AC + BC} \end{aligned}$$

Ya da $A'C' + A'BC + AC$ terimini C değil de A' parantezine alırsak,

$$A'(C' + BC) + AC = A'(B + C') + AC = \mathbf{A'C' + AC + A'B}$$
 elde edilir.

Her iki ifade de birbirine lojik olarak eşdeğerdir.

Sadeleştirme İşlemleri



Devam: Şimdi de F fonksiyonunu maxtermler cinsinden yazarak sadeleştirelim;

A	B	C	F
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

$$\begin{aligned}
 F(A,B,C) &= \Pi (1,4,6) = (A+B+C').(A'+B+C).(A'+B'+C) \\
 &= (AA'+AB+AC+A'B+BB+BC+A'C'+BC'+C'C)(A'+B'+C) \\
 &= (\underline{AB}+\underline{AC}+\underline{A'B}+\underline{B}+\underline{BC}+A'C'+\underline{BC'})(A'+B'+C) \\
 &= (B+AC+A'C')(A'+B'+C) \\
 &= A'B+\underline{BB'}+\underline{BC}+A'\underline{AC}+AB'C+ACC+A'A'C'+A'B'C'+\underline{A'C'C} \\
 &= A'B+BC+\underline{AB'C}+AC+A'C'+\underline{A'B'C} \\
 &= A'B+B'(\underline{AC+A'C'})+\underline{AC+A'C'} = A'B+(AC+A'C')(B'+I) \\
 &= \mathbf{A'B+AC+A'C'}
 \end{aligned}$$

Sonuç olarak, doğruluk tablosundaki 1'lerden yola çıkarak mintermler cinsinden yada 0'lardan yola çıkarak maxtermler cinsinden F fonksiyonunu ifade edilir. Her iki form için sadeleştirme yapıldığında ise elde edilen lojik ifadeler birbirine denk olmaktadır.