

# SAYISAL ANALİZ

**Yrd.Doç.Dr. Abdullah SEVİN**



# SAYISAL ANALİZ

## DENKLEM ÇÖZÜMLERİ (Açık Yöntemler)

# İÇİNDEKİLER

## 1. Denklem Çözümleri

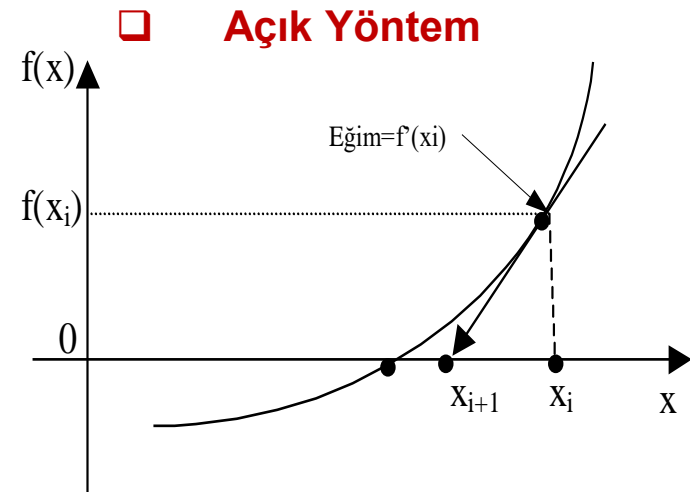
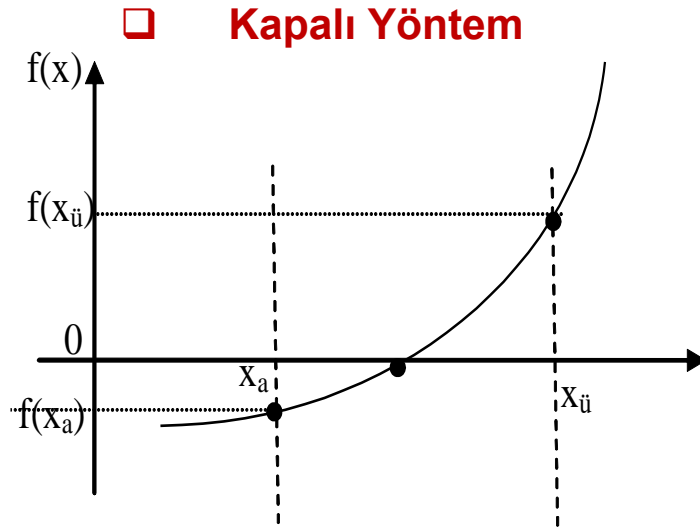
### A. Doğrusal Olmayan Denklem Çözümleri

#### □ Açık Yöntemler

- Basit Sabit Noktalı İterasyon
- Newton-Raphson Yöntemi
- Kiriş (Secant) Yöntemi

# Denklem Çözümünde Açık Yöntemler

- ❑ Bu yöntem, **x'in yalnızca başlangıç değeri kullanılan** ya da **kökü kapsayan bir aralık kullanılması** gerekmez.
- ❑ Açık yöntemler hızlı sonuç vermesine karşın, başlangıç değeri uygun seçilmediğinde ıraksayabilir.
- ❑ Kökü iki başlangıç değeri arasında kısıpaca alma (  $f(x_a) \cdot f(x_{\bar{u}}) < 0$  ) sorgulaması yoktur.
- ❑ Tüm açık yöntemler, **kökün bulunması için matematiksel bir formül kullanır.**



# Basit Sabit Noktalı İterasyon Yöntemi

❶  $f(x)$  fonksiyonu  $f(x)=0$  denklği  $x=g(x)$  formuna getirilir.

❑ **Örnek:**  $f(x)=x^2 - x + 3 = 0 \Rightarrow x = x^2 + 3$

$$f(x)=\cos x = 0 \Rightarrow x = \cos x + x$$

❑ Bu eşitliğin anlamı  $y=x$  doğrusu ile  $y=g(x)$  fonksiyonunun kesişim noktasını bulmaktır.

❷ Bir  $x_0$  başlangıç değeri seçilir,

❑  $x_0$  ,  $|g'(x_0)| < 1$  şartını sağlar ise köke yakınsama olur.

❸  $x_{n+1} = g(x_n)$  formu ile iterasyon gerçekleştirilir.

❑  $x_1=g(x_0)$

❑  $x_2=g(x_1)$

❑ ...

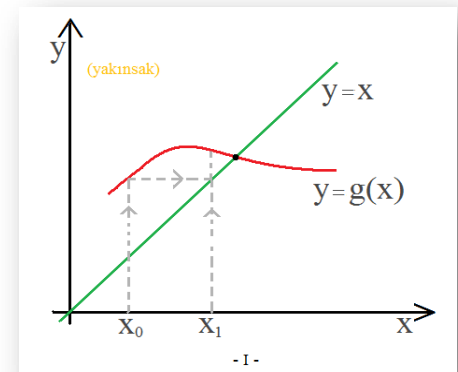
❑  $x_n=g(x_{n-1})$

❹ **Durdurma şartı**

❑  $|x_{n+1} - x_n| < \varepsilon_s$  sağlanıncaya kadar

❑ Ya da belirli iterasyonda durdurulabilir

$$\% \varepsilon = \frac{|x_{i+1} - x_i|}{x_{i+1}} * 100$$



# Basit Sabit Noktalı İterasyon Yöntemi

❑ **Örnek:**  $f(x) = 3e^{-0.5x} - x$  fonksiyonunun kökünü mutlak hata  $\varepsilon_a = 0.07$  sınırlamasına göre  $x_0 = 8$  değerinden başlayarak hesaplayınız.

❑ Her adım (iterasyon) için yeni  $x$ ,  $g(x)$  ve hatayı hesaplayınız.

❶  $f(x)=0$  denkliği  $x=g(x)$  formuna getirilir.

▪  $x = 3e^{-0.5x}$

❷  $g(x) = 3e^{-0.5x}$  fonksiyonu  $x_0 = 8$  başlangıç değeri ve  $\varepsilon_a = 0.07$  hata sınırlamasına göre iterasyona tabi tutuluyor.

❸ 13. iterasyondan sonra  $\varepsilon_a = 0.07$  hata ile kök değeri  $x=1.4$  elde edilir.

( Yakınsak iterasyon )

iterasyon sayısı	$x$	$g(x)$	$h =  x_n - x_{n-1} $
1	8	0,054946917	7,945053083
2	0,054946917	2,918701514	2,863754597
3	2,918701514	0,697161304	2,221540209
4	0,697161304	2,117066992	1,419905688
5	2,117066992	1,040892786	1,076174206
6	1,040892786	1,782765652	0,741872867
7	1,782765652	1,230264839	0,552500813
8	1,230264839	1,621707926	0,391443087
9	1,621707926	1,333435008	0,288272918
10	1,333435008	1,540173057	0,206738049
11	1,540173057	1,388919019	0,151254038
12	1,388919019	1,498032798	0,109113779
13	1,498032798	1,418494205	<b>0,079538593</b>
14	1,418494205	1,476043484	

# Basit Sabit Noktalı İterasyon Yöntemi

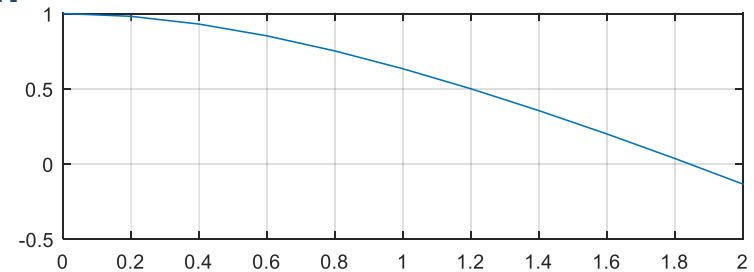
❑ **Örnek:**  $f(x) = 2 - x - e^{-x}$  denklemi için  $0 < x < 2$  aralığı için

- Denklemin kökünü **grafik** ve **iki eğriliği grafik** yöntemi ile kabaca bulunuz.
- Basit sabit noktalı köküne  $x_0 = 0$  değerinden başlayarak **2 iterasyon** yaklaşınız. Her iterasyon da **yaklaşık mutlak hatayı** hesaplayınız.

➤ **Çözüm: (a)**

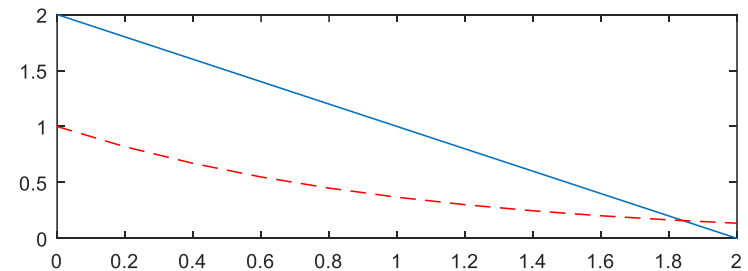
❶ Denklemin kökü grafik yöntemi ile bulunur.

```
x=0:0.2:2;
y=2-x-exp(-x);
subplot(2,1,1); plot(x,y);
grid on;
```



❷  $f(x)$  denklemi iki kısma ayrılır.  $2 - x = e^{-x}$

```
f1=2-x;
f2=exp(-x);
subplot(2,1,2); plot(x,f1,x,f2, '-- r');
```



# Basit Sabit Noktalı İterasyon Yöntemi

❑ **Örnek (devam):**  $f(x) = 2 - x - e^{-x}$  denklemini için

**b)** Basit sabit noktalı iterasyon yöntemini kullanarak köke  $x_0 = 0$  değerinden başlayarak **2 iterasyon** yaklaşınız. Her iterasyon da **yaklaşık mutlak hatayı** hesaplayınız.

➤  $f(x)=0$  denkliği  $x=g(x)$  formuna getirilir.

$$\blacksquare x = 2 - e^{-x}$$

➤  $x_{n+1} = g(x_n)$

❖ **1. iterasyon**  $x_0 = 0$

$$x_1 = g(x_0) = 2 - e^{-x} \Rightarrow x_1 = 2 - e^0 = 2 - 1 = 1$$

$$\varepsilon = |x_{n+1} - x_n| = |1 - 0| = 1$$

❖ **2. iterasyon**  $x_1 = 1$

$$x_2 = g(x_1) = 2 - e^{-x} \Rightarrow x_2 = 2 - e^{-1} = 2 - 0.3678 = 1.6321$$

$$\varepsilon = |x_{n+1} - x_n| = |1.6321 - 1| = 0.6321$$



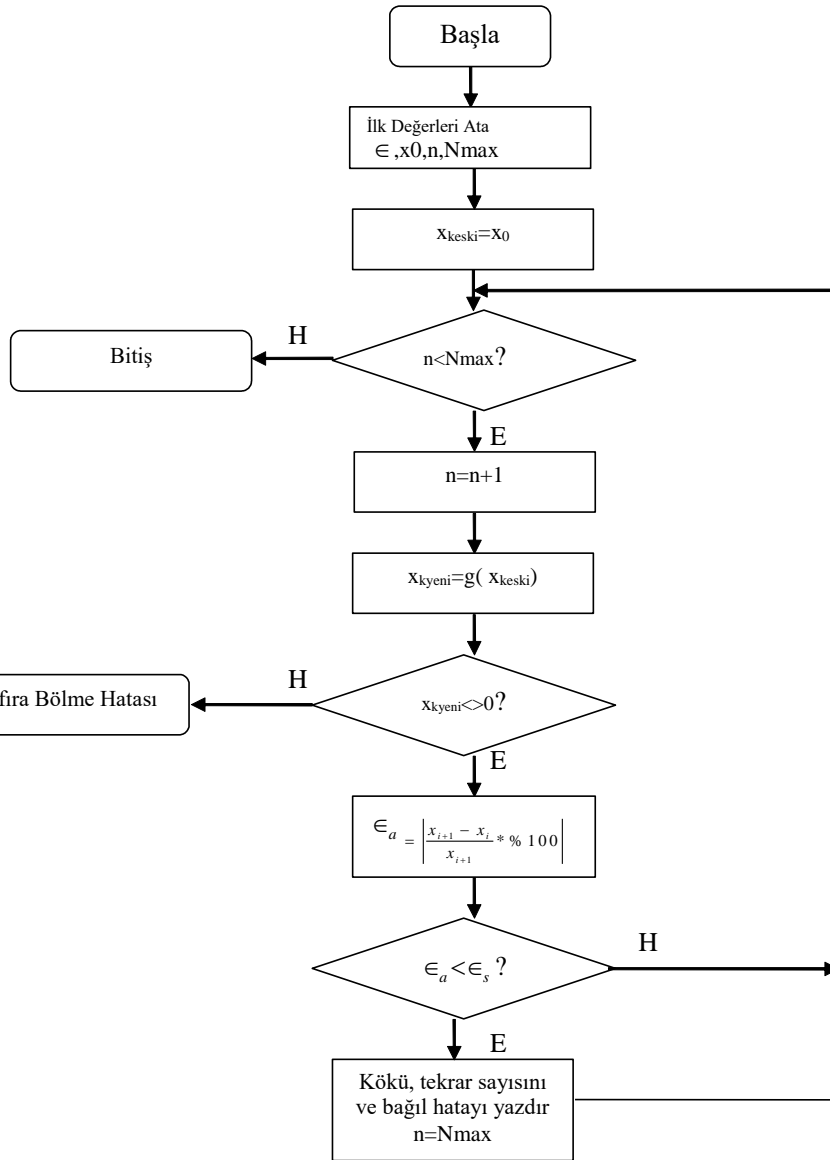


# Basit Sabit Noktalı İterasyon Yöntemi

- ❑ **Örnek:**  $f(x) = xe^x - 1$  denkleminin kökünü Basit Sabit Noktalı İterasyon yöntemini kullanarak yaklaşık mutlak hata  $\varepsilon_s = 0.005$  sınırlamasının altına ininceye kadar  $x_0 = 0.7$  değerinden başlayarak hesaplayınız. Başlangıç değeri için yakınsama şartını kontrol ediniz.



# Basit Sabit Noktalı İterasyon Yöntemi Algoritması ve Matlab Kodu



% f(x)=(e<sup>-x</sup>)-x

% g(x)=(e<sup>-x</sup>)-x

%%

x0=1; es=0.01; n=0; Nmax=100;

gtx=-1\*exp(-x0);

if abs(gtx)<1

xkeski=x0;

while (n<Nmax)

xkyeni=exp(-xkeski); %g(xkeski)

if xkyeni~=0

ea=abs((xkyeni-xkeski))

if ea<es

disp('Kök='); disp(xkyeni);

disp('Tekrar Sayisi='); disp(n);

disp('Mutlak Hata=');

disp(ea);

n=Nmax;

end

else

disp('Sifira bolme hatasi');

end

xkeski=xkyeni;

n=n+1;

end

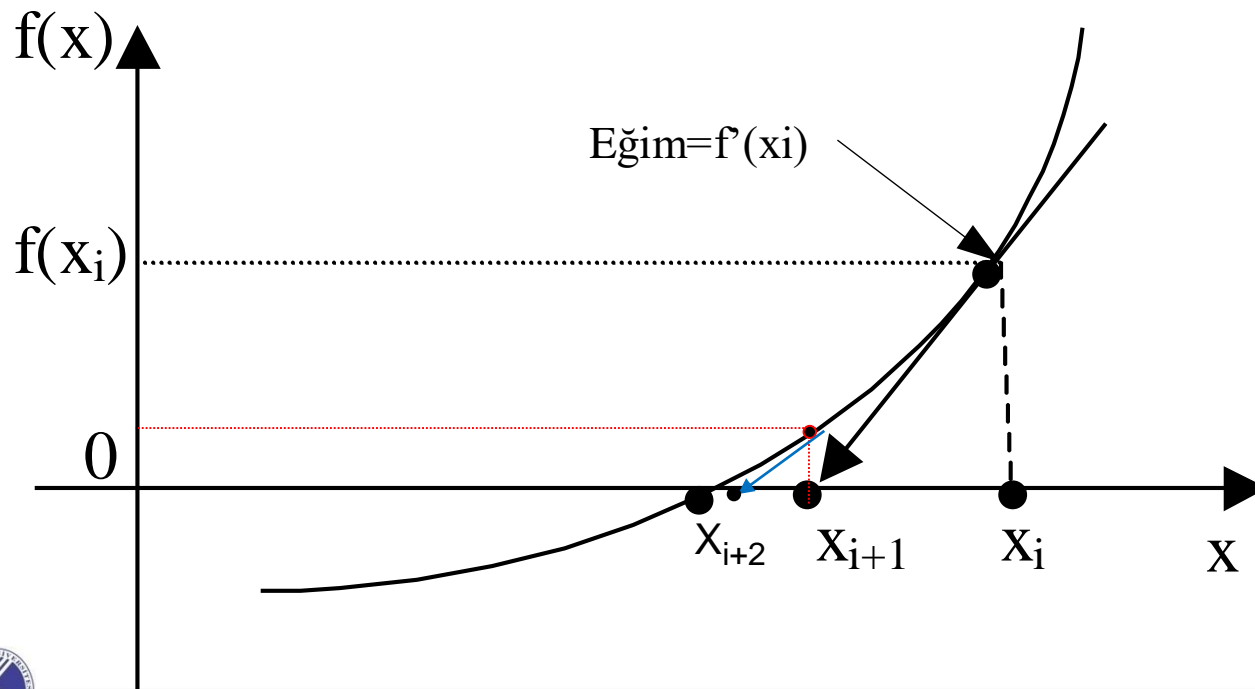
else

disp('yakinsama olmaz!!')

end

# Newton-Raphson Yöntemi

- ❑ En çok kullanılan yöntemlerden biridir.
- ❑ Köke, teğetler ile yaklaşılr.
- ❑ Başlangıç değerin fonksiyonu kestiği noktadan, çizilen teğetin yatay eksen kestiği yeni nokta başlangıç değeri ile değiştirilerek köke yaklaştırmaya çalışmaktır.
- ❑ Bir noktadaki türev, o noktadan geçen teğetin eğimine eşittir.



$$f'(x_i) = \frac{f(x_i) - 0}{x_i - x_{i+1}}$$

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$

# Newton-Raphson Yöntemi

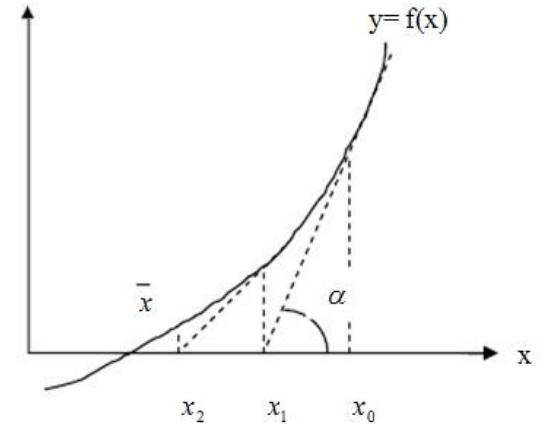
## ❖ Yakınsaklık Koşulu

### ❶ Başlangıç noktasındaki türev ile köke yaklaşma

$$\tan(\alpha_1) = \frac{f(x_0)}{(x_0 - x_1)} = f'(x_0)$$

### ❷ $x_i$ yalnız bırakılırsa, ifade basit iterasyondaki gibi $x_{n+1} = g(x_n)$ formuna dönüştürülür

$$x_1 = x_0 - \underbrace{\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}}_{g(x_0)}$$



### ❸ Yakınsaklık koşulu,

$$|g'(x_0)| < 1$$

$$g'(x_0) = \left( x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \right)' = \left| \frac{f''(x_0) \cdot f(x_0)}{(f'(x_0))^2} \right| < 1$$

# Newton-Raphson Yöntemi

❖ **Örnek :**  $f(x) = x^2 - 10$  denklemini Newton-Raphson yöntemini kullanarak  $x_0 = 3$  değerinden başlayarak, **iki iterasyon için** çözünüz?

❶  $f(x) = x^2 - 10 \Rightarrow f'(x) = 2x$

❷  $x_0 = 3$  'ten başlayarak köke doğru yaklaşalım

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 3 - \frac{(-1)}{6} = \frac{19}{6} = 3,166$$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 3,166 - \frac{(0,023556)}{6,332} = 3,162$$

❸ **Durdurma Kriteri (Hata Sınırlaması)**

$$|x_{i+1} - x_i| < \varepsilon_s \text{ yada iterasyon}$$

$$|x_1 - x_0| = |3,166 - 3| = 0.166$$

$$|x_2 - x_1| = |3,162 - 3,166| = 0.004$$

# Newton-Raphson Yöntemi

- ❖ **Örnek :**  $f(x) = e^{-2x} - x + 2$  denkleminin kökünü Newton-Raphson yöntemini kullanarak  $x_0 = 1$  değerinden başlayarak, **3 iterasyon için** çözünüz?

**Not:** Her iterasyonda yaklaşık bağıl hata yüzdesini de hesaplayınız. Tüm değerler virgülden sonra 4 basamak alınacak.

$$\textcircled{1} \quad f(x) = e^{-2x} - x + 2 \quad \Rightarrow \quad f'(x) = -2e^{-2x} - 1 \quad x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)} \quad \% \varepsilon_r = \frac{|x_{i+1} - x_i|}{x_{i+1}} * 100$$

- 2**  $x_0 = 1$  'den başlayarak köke doğru yaklaşalım

## 1. iterasyon

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 1 - \frac{(0.1353 - 1 + 2)}{-0.2706 - 1} = 1 - \frac{1.1353}{-1.2706} = 1 - (-0.8935) = 1.8935 \quad \% \varepsilon_r = \frac{|1.8935 - 1|}{1.8935} * 100 = \% 47.18$$

## 2. iterasyon

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 1.8935 - \frac{(0.0226 - 1.8935 + 2)}{-0.0452 - 1} = 2.017 \quad \% \varepsilon_r = \frac{|2.017 - 1.8935|}{2.017} * 100 = \% 6.12$$

## 3. iterasyon

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} = 2.017 - \frac{(0.0177 - 2.017 + 2)}{-0.0354 - 1} = 2.0176 \quad \% \varepsilon_r = \frac{|2.0176 - 2.017|}{2.0176} * 100 = \% 0.06$$



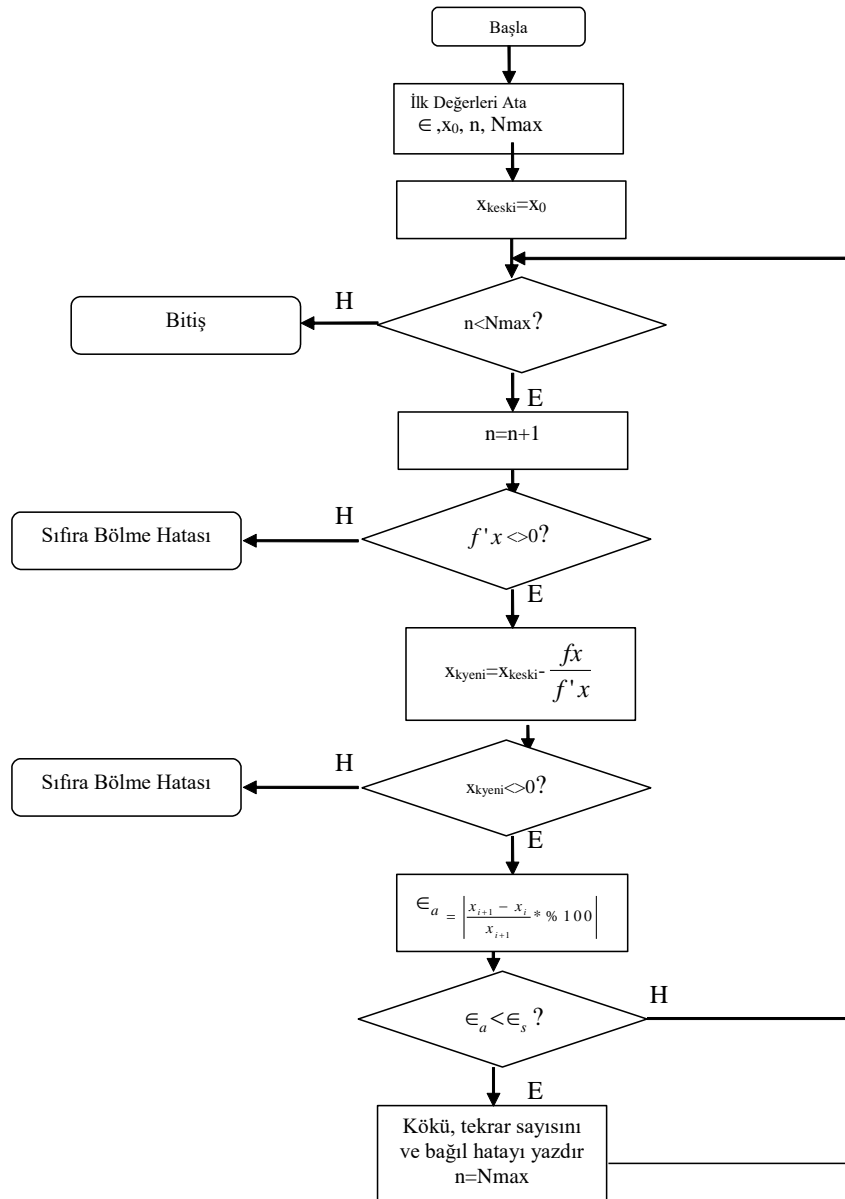
# Newton-Raphson Yöntemi

- ❖ **Örnek :**  $f(x) = x - e^{-x}$  denkleminin kökünü Newton-Raphson yöntemini kullanarak  $x_0 = 2$  değerinden başlayarak, yaklaşık yüzde bağıl hata değeri, **en az 1 anlamlı basamak veren hata sınırlaması altına ininceye** kadar hesaplayınız?

**Not:** Tüm değerler virgülden sonra 4 basamak alınacak.



# Newton-Raphson Yöntemi Algoritması

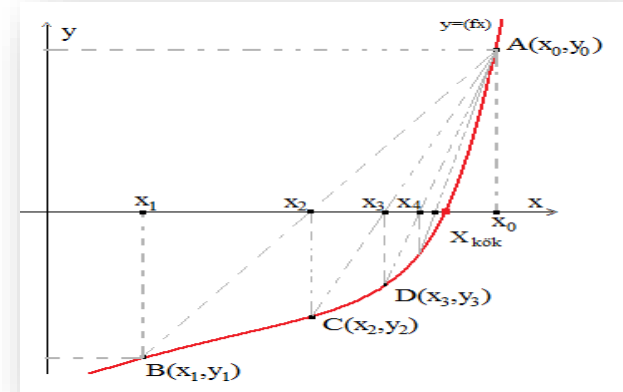




# Kiriş (Secant) Yöntemi

- Newton-Raphson yönteminin en büyük problemlerinden biri, bazı fonksiyonların/denklemelerin türevini almanın oldukça zor olabileceğidir. Bu işlemler uzun zaman alabilir.
- Türev almadan çözüm için Kiriş (secant) yönteminden yararlanılır.
- Şekildeki A-B noktaları arasında,  $x_0$  ve  $x_1$  başlangıç değerleri kullanılarak türev alınmadan gerçek köke daha yakın bir kök bulunabilir.

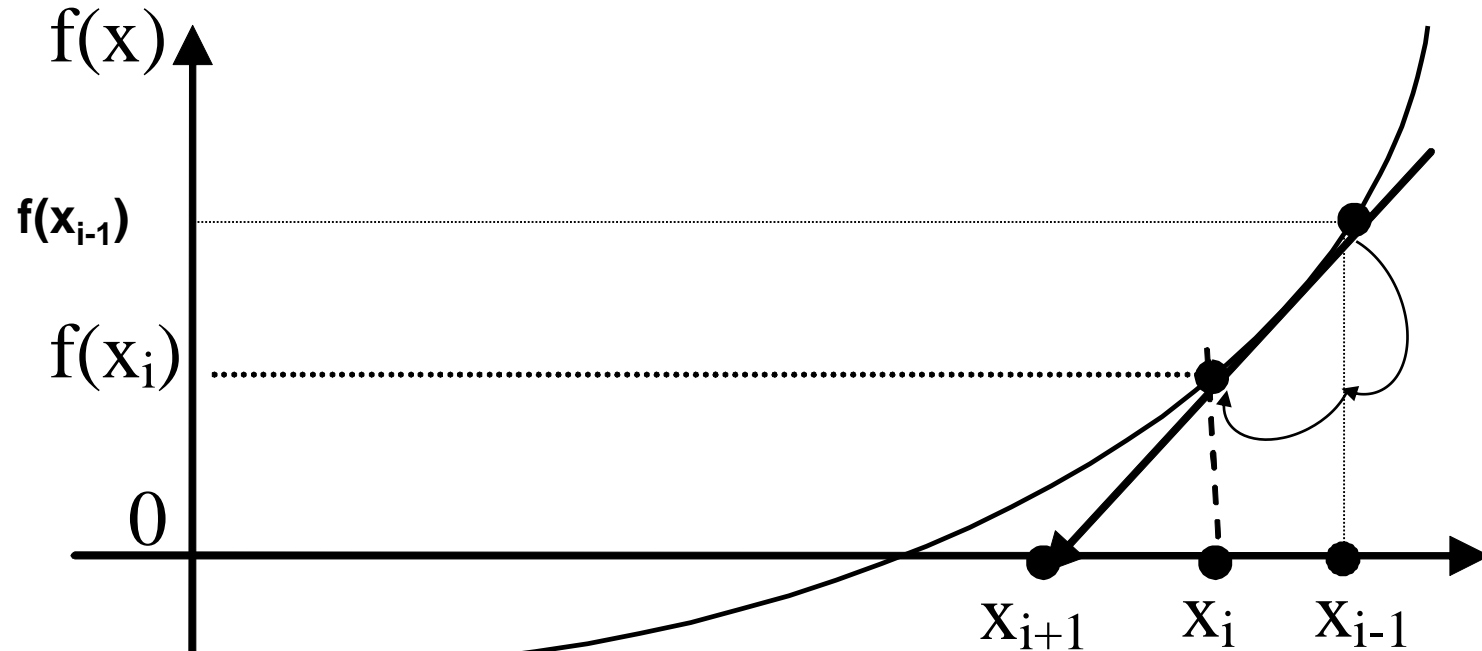
$$x_{i+1} = x_i - \frac{(x_i - x_{i-1})}{(y_i - y_{i-1})} y_i$$



- Kirişin x eksenini kestiği nokta köke yakın noktadır.
- Her yeni iterasyonda yeni bir kiriş noktaları bulunarak kirişlerin x eksenini kestiği yeni noktalar ile köke yaklaşılr.
- Bu işlem diğer yöntemlerdeki gibi belirli bir hata sınırlamasına kadar tekrar edilir.
- $y=f(x)$

# Kiriş (Secant) Yöntemi

## □ Secant Yöntemi ile Newton-Raphson Yönteminin İlişkisi



Newton R

$$f'(x_i) = \frac{f(x_i) - 0}{x_i - x_{i+1}}$$

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$

$$f'(x_i) = \frac{f(x_{i-1}) - f(x_i)}{x_{i-1} - x_i}$$

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)(x_{i-1} - x_i)}{f(x_{i-1}) - f(x_i)}$$

# Kiriş (Secant) Yöntemi

## □ Secant Yönteminin Regula-Falsi Yöntemi İle Karşılaştırılması

İkisinde de iki ilk tahmin değeri var

$$x_r = x_{\bar{u}} - \frac{f(x_{\bar{u}})(x_a - x_{\bar{u}})}{f(x_a) - f(x_{\bar{u}})}$$

**Regula Falsi**

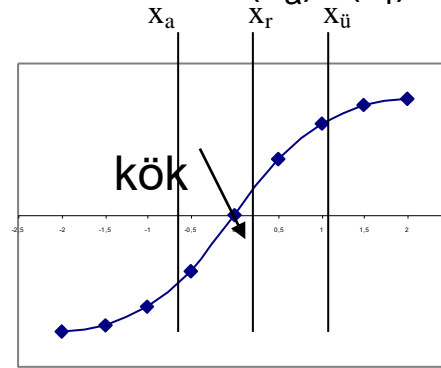
•  $f(x_a) \cdot f(x_r) < 0$   $x_a$  ile  $x_r$  farklı bölgelerde

Güncellenecek sınır

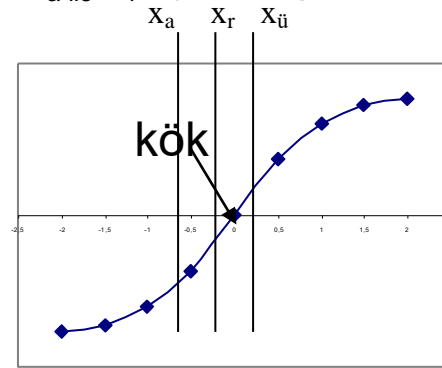
$x_{\bar{u}}(\text{yeni}) = x_r$

•  $f(x_a) \cdot f(x_r) > 0$   $x_a$  ile  $x_r$  aynı bölgelerde

$x_a(\text{yeni}) = x_r$



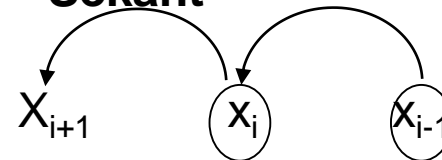
Kök,  $x_a$ ,  $x_r$  arasında



Kök,  $x_r$ ,  $x_{\bar{u}}$  arasında

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)(x_{i-1} - x_i)}{f(x_{i-1}) - f(x_i)}$$

**Sekant**



# Kiriş (Secant) Yöntemi

- ❖ **Örnek :**  $f(x) = e^{-x} - x$  denkleminin köklerini  $x_0 = 0$  ve  $x_1 = 1$  ilk tahminlerinden başlayarak Secant Yöntemi ile çözünüz?

$$f(0) = 1.0 \quad f(1) = -0.632\,120\,559 \Rightarrow f(0)f(1) < 0 \quad \text{olduğundan aralıkta kök vardır.}$$

$$x_0 = 0, \quad y_0 = f(x_0) = 1 \quad x_1 = 1 \quad y_1 = f(x_1) = -0.632\,120\,559$$

$$\bullet \quad x_2 = x_1 - \frac{x_1 - x_0}{y_1 - y_0} y_1 = 1 - \frac{1 - 0}{-0.632120559 - 1} (-0.632120559) = 0.612\,699 ,$$

$$f(0.612\,699) = y_2 = -0.07\,081\,27$$

$$\bullet \quad x_3 = x_2 - \frac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1} y_2 = 0.612\,699 - \frac{(0.612\,699 - 1)}{(-0.07\,081\,27 + 0.632\,120)} (-0.07\,081\,27) = 0.563\,838$$

$$|x_3 - x_2| = |0.563\,838 - 0.612\,699| = 0.048\,861$$

$$f(0.563\,838) = y_3 = 0.00518297,$$

$$\bullet \quad x_4 = 0.567170 \quad |x_4 - x_3| = |0.567170 - 0.563\,838| = 0.003\,332$$

$$\bullet \quad x_5 = 0.567143 \quad |x_5 - x_4| = |0.567143 - 0.567170| = 2.7 \times 10^{-5}$$

$$\bullet \quad x_6 = 0.567143 \quad |x_6 - x_5| = |0.567143 - 0.567143| = 0$$

O halde verilen denklemin yaklaşık kökü  $x = 0.567143$  dir.

# Kiriş (Secant) Yöntemi

- ❖ **Örnek :**  $f(x) = x^3 - 3x^2 - x + 9$  denkleminin köklerini  $x_0 = -2$  ve  $x_1 = -1$  ilk tahminlerinden başlayarak Secant Yöntemi ile çözünüz?

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)(x_{i-1} - x_i)}{f(x_{i-1}) - f(x_i)}$$

$$x_0 = -2 \Rightarrow f(x_0) = (-2)^3 - 3*(-2)^2 - (-2) + 9 = -9$$

$$x_1 = -1 \Rightarrow f(x_1) = (-1)^3 - 3*(-1)^2 - (-1) + 9 = 6$$

1. iterasyon

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)(x_0 - x_1)}{f(x_0) - f(x_1)} = -1 - \frac{6*(-2 - (-1))}{-9 - 6} = -1 - 0.4 = -1.4$$

2. iterasyon

$$x_2 = -1.4 \Rightarrow f(x_2) = (-1.4)^3 - 3*(-1.4)^2 - (-1.4) + 9 = 1.776$$

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)(x_1 - x_2)}{f(x_1) - f(x_2)} = -1.4 - \frac{1.776*(-1 - (-1.4))}{6 - 1.776} = -1.4 - 0.1681 = -1.5681$$

- ❑  $f(x) = \sin(x) - x.e^x + 3$  denkleminin köküne Newton Raphson yöntemini kullanarak  $x_0 = 1$  değerinden başlayarak yaklaşık yüzde bağıl hata  $\varepsilon_s = \%3$  'ün altına ininceye kadar yaklaşınız.

## Ödev Hakkında Bilgilendirme:

- ❑ Ödev çıktı olarak teslim edilecektir.
- ❑ Ödev hem program dosyasını (MATLAB) hem de el ile çözümünü içerecektir.

# KAYNAKLAR

- Serhat YILMAZ, “*Bilgisayar İle Sayısal Çözümleme*”, Kocaeli Üniv. Yayınları, No:168, Kocaeli, 2005.
- Steven C. Chapra, Raymond P. Canale (Çev. H. Heperkan ve U. Kesgin), “*Yazılım ve Programlama Uygulamalarıyla Mühendisler İçin Sayısal Yöntemler*”, Literatür Yayıncılık.
- İlyas ÇANKAYA, Devrim AKGÜN, Sezgin KAÇAR “*Mühendislik Uygulamaları İçin MATLAB*”, Seçkin Yayıncılık
- Prof.Dr. Asaf Varol, Sayısal Analiz Ders Notları, Fırat Üniversitesi
- Fahri VATANSEVER, “*İleri Programlama Uygulamaları*”,Seçkin Yayıncılık
- Yüksel YURTAY, Sayısal Analiz Ders Notları, Sakarya Üniversitesi