SAKARYA ÜNİVERSİTESİ

Ayrık İşlemsel Yapılar

Hafta 8

Doç.Dr. Nilüfer YURTAY

Bağıntı

8.1 Giriş

A ve B herhangi iki küme olmak üzere A x B nin her alt kümesine A dan B ye bağıntı denir.

Bağıntı genellikle β biçiminde gösterilir.

$\beta \subset A \times B$ ise, $\beta = \{(x, y) : (x, y) \in A \times B\}$ dir.

s(A) = m ve s(B) = n ise,

A dan B ye $2^{m.n}$ tane bağıntı tanımlanabilir.

$\beta \subset A \times B$ olmak üzere,

$\beta = \{(x, y) : (x, y) \in A \times B\}$ bağıntısının tersi

$\beta^{-1} \subset B \times A$ dır.

Buna göre, β bağıntısının tersi

$\beta^{-1} = \{(y, x) : (x, y) \in \beta\}$ dır.

8.2 Bağıntının Özellikleri

β, A da tanımlı bir bağıntı olsun.

Yansıma Özelliği

A kümesinin bütün x elemanları için $(x, x) \in \beta$ ise, β yansıyandır.

$\forall x \in A$ için, $(x, x) \in \beta \rightarrow \beta$ yansıyandır.

Simetri Özelliği

β bağıntısının bütün (x, y) elemanları için $(y, x) \in \beta$ ise, β simetriktir.

$\forall (x, y) \in \beta$ için $(y, x) \in \beta \rightarrow \beta$ simetriktir.

β bağıntısı simetrik ise $\beta = \beta^{-1}$ dir.

s(A) = n olmak üzere, A kümesinde tanımlanabilecek simetrik bağıntı sayısı

$2^{\left(\frac{n^2+n}{2}\right)}$ dir.

s(A) = n olmak üzere, A kümesinde tanımlanabilecek yansıyan bağıntı sayısı $2^{(n^2 - n)}$ dir.

Ters Simetri Özelliği

β bağıntısı A kümesinde tanımlı olsun.

$x \neq y$ iken $\forall (x, y) \in \beta$ için $(y, x) \notin \beta$ ise, β ters simetriktir.

β bağıntısında (x, x) elemanın bulunması ters simetri özelliğini bozmaz.

Geçişme Özelliği

β, A da tanımlı bir bağıntı olsun.

$\forall[(x, y) \in \beta$ ve $(y, z) \in \beta]$ için $(x, z) \in \beta$ ise,

olmalı

β bağıntısının geçişme özelliği vardır.

8.3 Denklik Bağıntısı

β bağıntısı A kümesinde tanımlı olsun.

β; Yansıma, Simetri, Geçişme özelliğini sağlıyorsa denklik bağıntısıdır. β denklik bağıntısı ve $(x, y) \in \beta$ ise, x denktir y ye denir.

$x \equiv y$ biçiminde gösterilir.

10 tane toptan oluşan bir X kümesini ele alalım. Bu toplar ya kırmızı, ya mavi ya da yeşil renktedirler. Bu topları renklerine göre gruplayarak K, M ve Y kümelerine bölelim. (K,M,Y) ailesi X kümesinin bölmelenmesidir.

Bir bölmelenme bir bağıntıyı tanımlamak için kullanılabilir. Eğer *S*, X kümesinin bir bölmelenmesi ise, bazı S∈*S* kümeleri için hem x hem y S'ye ait olacak şekilde xRy bağıntısı tanımlanabilir. Örneğimizi ele alırsak, "aynı renkte olan toplar" şeklinde bir bağıntı tanımlanabilir.

Örnek 8.1

X={1,2,3,4,5,6} kümesinin ***S*** ={{1,3,5},{2.6},{4}} bölmelenmesini ele alalım. X üzerinde tanımlanan R bağıntısı (1,1), (1,3) ve (1,5) şeklinde düzenli parçalar içerir. Çünkü {1,3,5} ***S*** kümesindedir. Bu kompleks ilişki

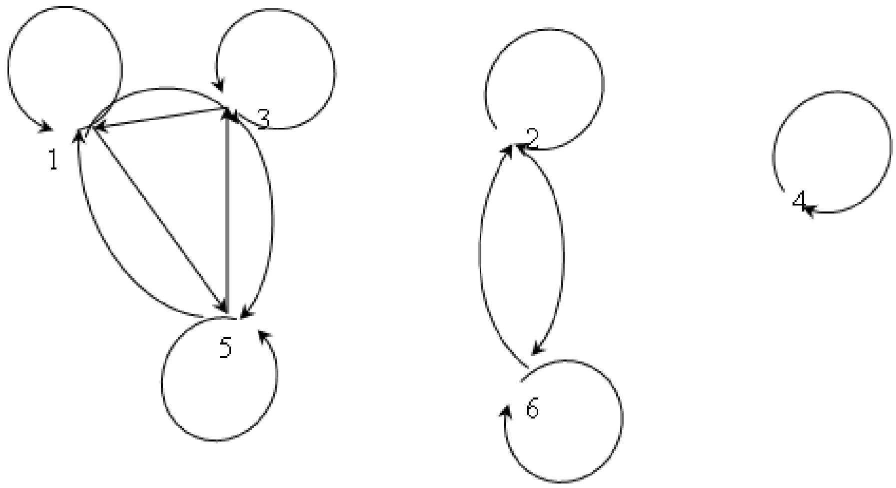
R={(1,1),(1,3),(1,5),(3,1),(3,3),(3,5),(5,1),(5,3),(5,5), (2,2),(2,6),(6,2),(6,6),(4,4)} biçimindedir

Eğer S∈ ***S*** ise, S 'nin elemanlarını R bağıntısına denk olarak kabul edebiliriz. Buradan da şu sonucu çıkarabiliriz ki, refleksif, simetrik ve transitif bağıntılar denklik bağıntısı olarak isimlendirilirler. Örneğimizdeki "aynı renkte olan toplar" bağıntısı bu nedenle "aynı renkte olan toplar" denktir anlamındadır. Bu bölmelenmedeki her bir küme diğerlerinden renk olarak farklı olan toplardan meydana gelir.

X kümesi üzerindeki bir bağıntı refleksif, simetrik ve transitif ise bu bağıntı X kümesi üzerinde bir **denklik bağıntısı** (eşdeğer bağıntı) olarak isimlendirilir.

Örnek 8.2

X={1,2,3,4,5,6} kümesi üzerinde tanımlanan
S ={{1,3,5},{2.6},{4}} için bir
R={(1,1),(1,3),(1,5),(3,1),(3,3),(3,5),(5,1),(5,3),(5,5), (2,2),(2,6),(6,2),(6,6),(4,4)} biçiminde olsun. R bağıntısı bir eşdeğer bağıntısıdır. Şekil 8.1'de R bağıntısının temsili grafı yer almaktadır. Açıklayacak olursak R bağıntısı refleksifdir çünkü her noktada bir döngü vardır. R simetrikdir çünkü v'den w'ye her yönlü kenar için w'den v'ye yine bir yönlü kenar vardır. Son olarak transitifdir çünkü eğer x'den y'ye ve y'den z'ye birer yönlü kenar varsa x'den z'ye de bir yönlü kenar bulunmaktadır.



Şekil 8.1

Örnek 8.3

X={1,2,3,4,5}üzerinde R={(1,1),(1,3),(1,5),(2,2),(2,4),(3,1),(3,3),(3,5),(4,2), (4,4),(5,1),(5,3),(5,5)} bağıntısını ele alalım. R refleksifdir. Çünkü (1,1), (2,2), (3,3),(4,4) ve (5,5)∈R dir. R simetrikdir çünkü R'deki her (x.y) için (y,x)∈ R'dir. Son olarak R transitifdir çünkü R'deki her (x,y) ve (y,z) için (x,z)∈R'dir. Bu durumda R bir eşdeğer bağıntıdır.

Örnek 8.4

Bir üniversitedeki öğrenciler arasında bir bağıntı şöyle olsun."Bir öğrenci, bir diğer öğrenci ile eğer soyadları aynı harfle başlıyorsa bağıntılıdır" şeklinde tanımlandığında hemen bu bağıntının eşdeğer bağıntı olduğu görülebilir

Örnek 8.5

XRY bağıntısını X in Y ile aynı anne yada babaya sahip olduğunu göstersin.Bu bağıntının refleksif ve simetrik olduğu hemen söylenebilir.Ancak R, transitif değildir.Çünkü X ve Y aynı anneye ,Y ve Z de aynı babaya sahip olsalar, X ve Z nin ebeveynlerinin aynı olması gerekmez.Bu nedenle R eşdeğer bağıntı değildir.

Eğer R, *S* üzerinde bir eşdeğer bağıntı ve X∈*S* ise ,*S* nin X ile bağıntılı elemanlarının kümesi X 'i içeren bir **eşdeğer sınıf** olacaktır ve [X] ile gösterilir.Yani, [X]={y∈S :yRx }biçiminde ifade edilir.

Teorem

R, S üzerine bir eşdeğer bağıntı olsun.

(a) X ve Y, *S* nin elemanları ise, XRY ancak ve ancak [X]=[Y] ise geçerlidir.

(b)R ' nin iki eşdeğer sınıfı ya aynı olur yada ayrıktır.

Bu teoremin sonucu olarak *S* kümesi ,R eşdeğer bağıntısı nedeniyle ayrık alt kümelere bölünür.Bu alt küme ailesi şu özellikleri sağlar.

(a) Hiç bir alt küme boş değildir.

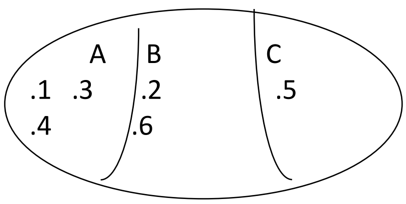
(b) *S* nin her bir elemanı bir alt kümeye aittir.

(c) İki farklı alt küme ayrıktır.

Bu alt küme ailesi , *S* kümesinin bir bölmelenmesi (partitıon) olarak adlandırılır.

Örnek 8.6

A={1,3,4}, B={2,6}, C={5} olsun. P={A,B,C} kümesi, S={1,2,3,4,5,6} kümesinin bir bölmelenmesi dir.



Görülüyor ki bir S kümesi üzerine R eşdeğer bağıntısının, eşdeğer sınıfları S kümesinin bölmelerine yol açar.Tersine bir P bölmelenmesi varsa, bir R bağıntısı tanımlayabiliriz. Öyleki XRY deX ve Y,P nin aynı üyesinin elemanıdır.

Örneği tekrar ele alırsak,

{(1,1),(1,3),(1,4),(3,1),(3,3),(3,4),(4,1),(4,3),(4,4), (2,2),(2,6),(6,2),(6,6),(5,5)} bağıntısını elde edebiliriz. Bu arada R nin bir eşdeğer bağıntı olduğu açıktır.R nin eşdeğer sınıflarının da P nin üyesi olduğu görülmektedir.

Örnek 8.7

X={1,2,3,4,5,6} kümesinin

S={{1,3,5},{2.6},{4}} bölmelenmesini ele alalım. Tanımlanan aşağıdaki bağıntı için 1'in eşdeğer sınıfını bulalım.

R={(1,1),(1,3,(1,5),(3,1),(3,3),(3,5),(5,1),(5,3),(5,5),(2,2),(2,6),(6,2),(6,6),(4,4)}

[1]={x∈X | xRa}

[1]={1,3,5}

benzer şekilde [3]=[5]={1,3,5}, [2]=[6]={2,6}, [4]={4}

Örnek 8.8

X={1,2,3,4,5}üzerinde R={(1,1),(1,3),(1,5),(2,2),(2,4),(3,1),(3,3),(3,5),(4,2),(4,4),(5,1),(5,3),(5,5)} bağıntısı için iki eşdeğer sınıf aşağıdaki gibidir.

[1]=[3]=[5]={1,3,5}, [2]=[4]={2,4]

Teorem

Sonlu bir X kümesi üzerinde R bağıntısı tanımlı olsun. Eğer her bir eşdeğer sınıfı r elemana sahipse bu durumda | X | /r tane eşdeğer sınıf vardır.

İspat

X1,X2,…,Xk farklı denklik sınıflarını belirtsin. Bunlar X'in bölmelenmesi olduklarından dolayı

| X | = | X 1| + | X2 | +…+| Xk | = r+r+…+r=kr

8.4 Benzeşimler (Congruence)

Tamsayılar kümesi üzerinde tanımlanmış R_3 bağıntısı aşağıdaki gibi veriliyor olsun.

R3={(a,b):a-b=5k bazı k tamsayıları için}. Örnek olarak (7,2)$\in$ R3'dür. Çünkü 7-2=5=5.1 ve benzer şekilde (-11,4)$\in$R3 ve -11-4= -15= 5.(-3) dür. Bu bağıntı refleksif, simetrik ve transitifdir. R3 bağıntısı bu nedenle eşdeğer bağıntısıdır. Elde edilen eşdeğer bağıntı modül 5'e göre benzeşim olarak isimlendirilir.

Pozitif bir n tamsayısını ele alalım. a tamsayısının n moduna göre b tamsayına benzer olabilmesi için, a$\equiv$b (mod n), n tamsayısının (a-b) tamsayısını bölmesi gerekmektedir.

Teorem

Sabit bir n için tanımlanan bir benzeşim tamsayılar kümesi üzerinde bir eşdeğer bağıntıdır, öyleki

a) a$\equiv$a (mod n) her a tamsayısı için doğrudur.

b) Eğer a$\equiv$b (mod n) ise, b$\equiv$a (mod n) benzeşimi a ve b tamsayıları için sağlanır.

c) Eğer a$\equiv$b (mod n) ve b$\equiv$c (mod n) ise a$\equiv$c (mod n) yazılabilir.

Pozitif bir n tamsayısı için, n modunun tüm denklik sınıflarının kümesi Zn ile gösterilebilir ve n modundaki tamsayıların kümesi olarak isimlendirilir. n modundaki tamsayılar denklik sınıflarıdır. Her bir denklik sınıfını elemanları mod n'e göre benzeşim özelliğine sahiptir. Örnek olarak n=3 alalım. mod 3 benzeşimine göre 3 denklik sınıfı vardır ve

Z_3= {[0],[1],[2]} kümesidir.

Z_3'ün elemanları denklik sınıflarıdır. Bu denklik sınıflarının her birinde , elemanların hepsi diğer mod 3 elemanına benzerdir. Öyleki a$\equiv$b (mod 3), eğer a ve b aynı eşdeğer sınıflarında yer alıyorsa doğrudur. Böylece

[0]={…,-6,-3,0,3,6,…}

[1]={…,-8,-5,-2,1,4,7,…}

[2]={…,-7,-4,-1,2,5,8,…}

Teorem

a) Eğer a≡b (mod n) ve c≡d (mod n) ise, a+c≡b+d (mod n) ve a.c≡b.d (mod n) dir

b) Eğer a≡b (mod mn) ise, a≡b (mod m) ve a≡b (mod n) dir.

Örnek 8.9

n=3 , 1≡7 mod(3) ve 2≡-4 (mod 3) alalım. Yukarıdaki teoremin a şıkkına göre

1+2≡7+(-4) (mod 3)

1.2≡7.(-4) (mod 3)

anlamındadır ve bu benzeşim 2-(-28)=30=3.10=3.k oluğu sürece doğrudur.

Teorem

Verilen bir pozitif n tamsayısı için

Eğer r≡r′ (mod n) ise, 0 ≤ r < n ve 0 ≤ r′ <n için r≡r′ dür.

Eğer a ve n herhangi iki tamsayı ise, 0 ≤ r < n olacak şekilde bir r tamsayısı vardır ki a≡r (mod n) yazılabilir. Buradaki r tamsayısı, a'nın n ile bölünmesi sonucunda artan sayıdır.

a= nq+r

Teorem

Verilen bir pozitif n tamsayısını ele alalım. Zn, mod n tamsayılarının kümesini göstermek üzere tanımlansın. Buna göre Zn, tamamen n'in farklı eşdeğer sınıflarından meydana gelir. Bunlar [0], [1], [2], …,[n-1] dir. Buradan yola çıkarak, 0 ≤ r <n için, [r] eşdeğer sınıfı tamamen a≡r (mod n) biçimindeki a tamsayılarından oluşmaktadır.

Teorem

Eğer 0 ≤ r < n , 0 ≤ r′ < n için a=nq+r ve b=nq′+r′ ise r=r′ eşitliği sadece ve sadece a≡b (mod n) durumunda yazılabilir.

Z_n, n moduna göre denklik sınıflarının kümesini göstermek üzere, verilen herhangi bir m tamsayısı için $0 \leq r \leq n-1$ olacak şekilde bir r tamsayısı vardır ki, $[m]=[r]$ ya da $m \equiv r \pmod n$ yazılabilir. Bu durum $[[m]]_n=r$ ile de gösterilir.

n=5 için, $Z_5 = \{[0],[1],[2],[3],[4]\}$

$= \{[r] : 0 \leq r < 5\}$ yazılabilir.

Zn kümesinde toplama ve çarpma işlemlerini tanımlayabiliriz. [a] ve [b], mod n benzeşiminin eşdeğer sınıfları olsun. Toplam ve çarpma işlemlerini aşağıdaki gibi tanımlamak mümkündür.

$[a]\oplus[b]=[a+b]=[[a+b]]_n$

$[a]\otimes[b]=[a.b]=[[a.b]]_n$

Örnek 8.10

n=5, $Z_5=\{[0],[1],[2],[3],[4]\}$ alalım.

$[2]\oplus[4] = [2+4] = [6] = [1]$, $6\equiv1 \pmod 5$

$[2]\otimes[4] = [2.4] = [8] = [3]$, $8\equiv3 \pmod 5$

Aşağıda mod 5'e göre toplama ve çarpma tabloları verilmiştir.

[a]⊕[b]	[0]	[1]	[2]	[3]	[4]
[0]	[0]	[1]	[2]	[3]	[4]
[1]	[1]	[2]	[3]	[4]	[0]
[2]	[2]	[3]	[4]	[0]	[1]
[3]	[3]	[4]	[0]	[1]	[2]
[4]	[4]	[0]	[1]	[2]	[3]

[a]⊗[b]	[0]	[1]	[2]	[3]	[4]
[0]	[0]	[0]	[0]	[0]	[0]
[1]	[0]	[1]	[2]	[3]	[4]
[2]	[0]	[2]	[4]	[1]	[3]
[3]	[0]	[3]	[1]	[4]	[2]
[4]	[0]	[4]	[3]	[2]	[1]

8.5 Sıralama Bağıntısı

A kümesinde tanımlı β bağıntısında; Yansıma, Ters simetri, Geçişme özelliği varsa bağıntı sıralama bağıntısıdır.

Örnek 8.11

$A = \{a, b, c\}$ kümesinin kuvvet kümesi

$$P(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, A\}$$

üzerinde tanımlanan "$\subseteq$" bağıntısını düşünelim. Bağıntı sıralama bağıntısıdır,

(i) Her $X \in P(A)$ için $X \subseteq X$ olup bağıntı yansıyandır.

(ii) $X \subseteq Y$ ve $Y \subseteq X$ ise $X = Y$ olup bağıntı ters simetriktir.

(iii) $X \subseteq Y$ ve $Y \subseteq Z$ ise $X \subseteq Z$ olup bağıntı geçişkendir.

Bu bağıntı bir tam sıralama bağıntısı değildir, çünkü, örneğin, { a, b } kümesi ile { b, c } kümesi karşı laştırılamaz.

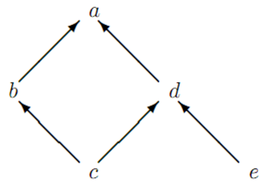
Bir $\leq$ sıralama bağıntısının şeması $x \leq y$ ve $x = y$ için x den y ye yukarı yönde bir ok çizilerek elde edilen şekildir. Ayrıca $x \leq y$ ve $y \leq z$ ise x den z ye ok çizilmez. Yani $x \leq y$ olması " x den y ye yukarı yönde okları takip ederek gidilebilir" anlamına gelmektedir.

Örnek 8.12

$A = \{a, b, c, d, e\}$ kümesi üzerinde tanımlanan

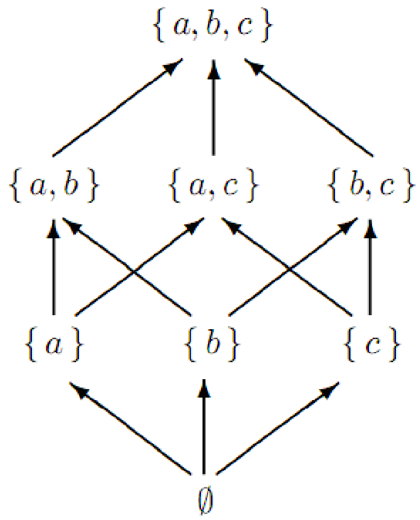
$$\beta = \{(a, a), (b, b), (c, c), (d, d), (e, e), (c, d), (d, a), (c, a), (c, b), (b, a), (e, d), (e, a)\}$$

sıralama bağıntısının şeması:



Örnek 8.13

A = **{** a, b, c **}** kümesinin kuvvet kümesi üzerinde verilen ⊆ sıralama bağıntılarının şemaları şöyledir:



Kaynaklar

F.Selçuk,N.Yurtay,N.Yumuşak,Ayrık İşlemsel Yapılar, Sakarya Kitabevi,2005.
İ.Kara, Olasılık, Bilim Teknik Yayınevi, Eskişehir, 2000.
"Soyut Matematik", S.Aktaş,H.Hacısalihoğlu,Z.Özel,A.Sabuncuoğlu, Gazi Ünv.Yayınları,1984,Ankara.
"Applied Combinatorics", Alan Tucker, John Wiley&Sons Inc, 1994.
"Applications of Discrete Mathematics", John G. Michaels, Kenneth H. Rosen, McGraw-Hill International Edition, 1991.
"Discrete Mathematics", Paul F. Dierker and William L.Voxman, Harcourt Brace Jovanovich International Edition, 1986.
"Discrete Mathematic and Its Applications", Kenneth H. Rosen, McGraw-Hill International Editions, 5th Edition, 1999.
"Discrete Mathematics", Richard Johnson Baugh, Prentice Hall, Fifth Edition, 2001.
"Discrete Mathematics with Graph Theory" , Edgar G. Goodaire, Michael M. Parmenter, Prentice Hall, 2nd Edition, 2001.
"Discrete Mathematics Using a Computer", Cordelia Hall and John O'Donnell, Springer, 2000.
"Discrete Mathematics with Combinatorics", James A. Anderson, Prentice Hall, 2000.
"Discrete and Combinatorial Mathematics", Ralph P. Grimaldi, Addison-Wesley, 1998.
"Discrete Mathematics", John A. Dossey, Albert D. Otto, Lawrence E. Spence, C. Vanden Eynden, Pearson Addison Wesley; 4th edition 2001.
"Essence of Discrete Mathematics", Neville Dean, Prentice Hall PTR, 1st Edition, 1996.
"Mathematics:A Discrete Introduction", Edvard R. Schneiderman, Brooks Cole; 1st edition, 2000.
"Mathematics for Computer Science", A.Arnold and I.Guessarian, Prentice Hall, 1996.
"Theory and Problems of Discrete Mathematics", Seymour Lipschuts, Marc. L. Lipson, Shaum's Outline Series, McGraw-Hill Book Company, 1997.
"2000 Solved Problems in Discrete Mathematics", Seymour Lipschuts, McGraw- Hill Trade, 1991.