

SAYISAL ANALİZ

Yrd. Doç. Dr. Abdullah SEVİN



SAYISAL ANALİZ

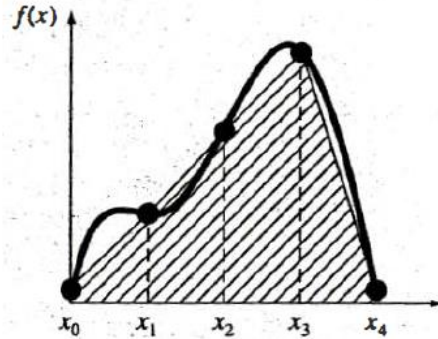
SAYISAL İNTEGRAL

(Numerical Integration)

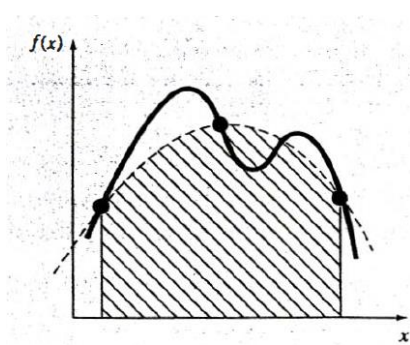
İÇİNDEKİLER

□ Sayısal İntegral

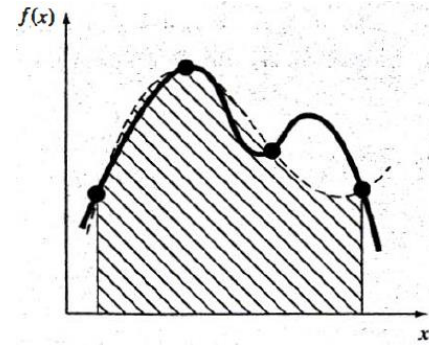
□ Trapez (Yamuk) Yöntemi



□ Simpson Yöntemi



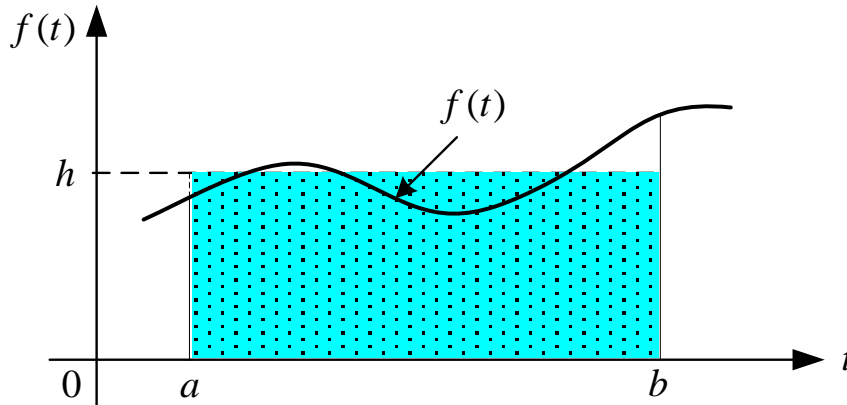
1/3 Kuralı



3/8 Kuralı

Sayısal İntegral

- ❑ Mühendisler değişen sistemler ve süreçlerle sürekli olarak uğraşmak zorunda oldukları için türev ve integral kavramları mesleklerinin temel araçlarındandır.
- ❑ **Sayısal integral**, integrali alınacak fonksiyonun grafiği çizildiğinde grafiğin altında kalan alanın yaklaşık olarak hesaplanması prensibine dayanır.



$$\text{Alan} = \int_a^b f(t) dt$$

$$h \times (b - a) = \int_a^b f(t) dt$$

Sayısal İntegral

❑ İntegral hesabı, mesleki olarak nerelerde karşımıza çıkar.

❑ Ortalama değer hesabı,

$$h = \frac{\int_a^b f(t) dt}{(b-a)} = \frac{1}{(b-a)} \int_a^b f(t) dt$$

$$i_{ort} = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} i(t) dt$$

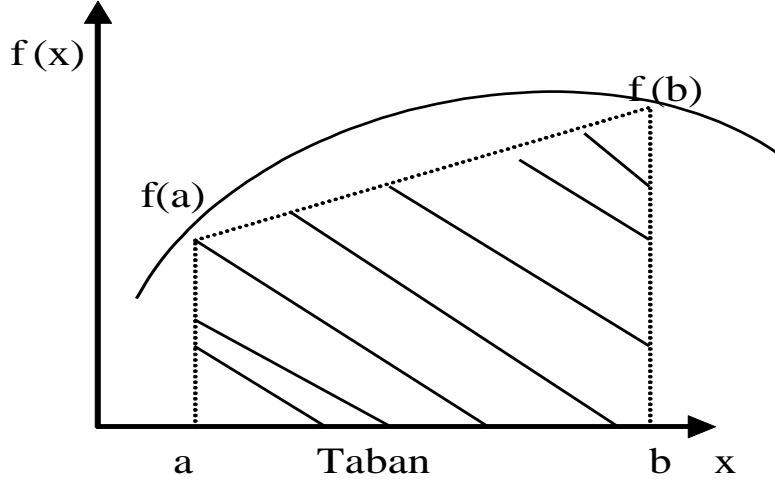
$$i_{ort} = \frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_2} i(t) dt$$

❑ Etkin değer (rms-root mean square/karelerinin ortalamasının karekökü) hesabı,

$$f_{etk} = \sqrt{\frac{1}{(b-a)} \int_a^b f(t)^2 dt}$$

Trapez (Yamuk) Kuralı

- ❑ Fonksiyonun integrali, yamuğun alanına eşittir.

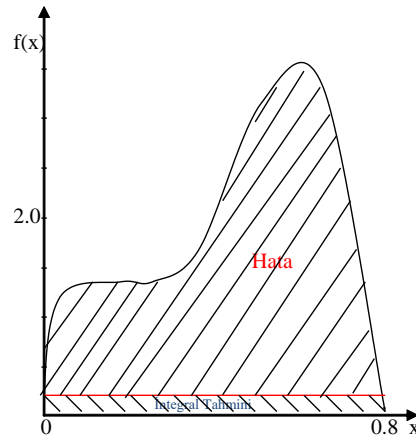


Bir yamuğun alanı,

Alan = Yükseklik x Ortalama Genişlik

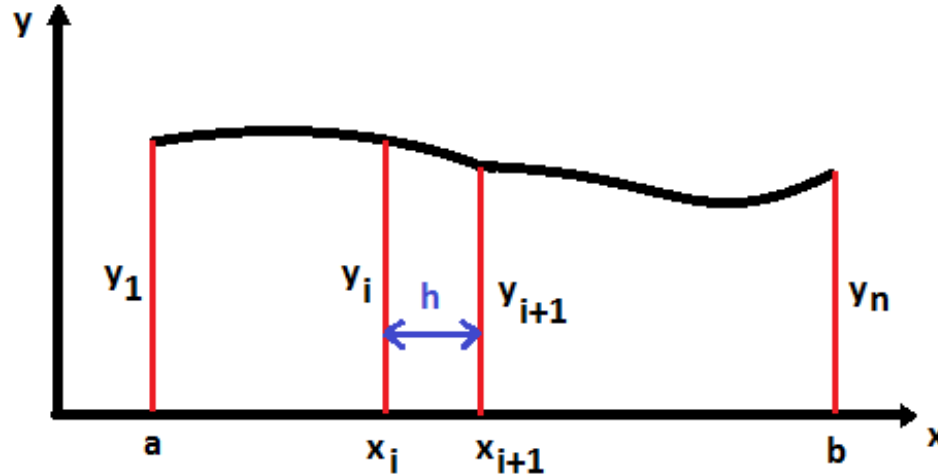
$$Integral = (b - a) * \frac{f(b) + f(a)}{2}$$

- ❑ Başlangıç ve bitiş noktalarının seçimi, hata açısından oldukça önemlidir.



Trapez (Yamuk) Yöntemi ile Sayısal İntegral

- ❑ Trapez yönteminde, şekilde görüldüğü gibi **a** ve **b** olarak sınırları belirlenen **x** eksenindeki aralığın **h** olarak adlandırılan eşit uzunlukta parçalara bölünmesi gerekir.
- ❑ Parçaların adedi ne kadar fazla olursa (h ne kadar küçük olursa) elde edilecek alan hesabının doğruluğu da o kadar yüksek olur.



$$\text{Alan} \cong h \left(\frac{y_1 + y_2}{2} \right) + h \left(\frac{y_2 + y_3}{2} \right) + h \left(\frac{y_3 + y_4}{2} \right) + \dots + h \left(\frac{y_{n-1} + y_n}{2} \right)$$

$$\text{Alan} \cong \frac{h}{2} [y_1 + 2(y_2 + y_3 + y_4 + \dots + y_{n-1}) + y_n]$$

Trapez Yöntemi ile Sayısal İntegral

- ❑ **Örnek:** $y(x) = e^{-x^2}$ fonksiyonunun $0 < x < 1$ aralığı için $h=0.25$ kullanarak fonksiyona ait değer hesaplamaları aşağıdaki tabloda görülmektedir. Fonksiyonun integralini trapez yöntemi ile hesaplayınız.

n	x	$y(x) = e^{-x^2}$
1	0	1.0000
2	0.25	0.9394
3	0.5	0.7788
4	0.75	0.5698
5	1	0.3679

- ❑ **Çözüm:**

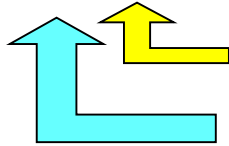
$$Alan \cong \frac{h}{2} [y_1 + 2(y_2 + y_3 + y_4 + \dots + y_{n-1}) + y_n]$$

$$Alan \cong \frac{0.25}{2} [1 + 2(0.9394 + 0.7788 + 0.5698) + 0.3679] = 0.7430$$

trapz komutu ile alan (integral) hesabı



trapz (x, f(x))



alanı (integrali) hesaplanacak fonksiyon

integralin sınırları içerisinde h aralığına göre oluşan vektör



```
% fonksiyonun aralığını tanımla
>> a=0; b=1; h=0.25;

>> x = a:h:b;

% trapz komutu ile integral hesabı
>> alan = trapz (x, exp(-x.^2))

alan =

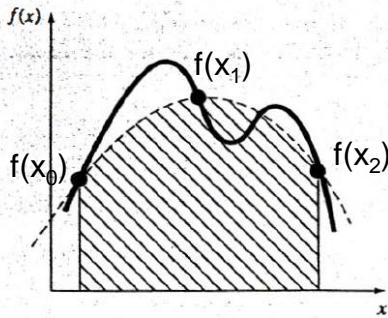
    0.7430
```

Simpson Yöntemi ile Sayısal İntegral

- ❑ Trapez yöntemine göre alan hesabı daha sık aralıklarla yapılır.
- ❑ Trapez yöntemine göre daha doğru sonuçlar verir.
- ❑ **Simpson yöntemi** daha doğru integral hesabı için, noktaları birleştirmek amacıyla daha yüksek dereceli polinomlar kullanmaktır.

❑ 1/3 Kuralı

- **f(a)** ve **f(b)** noktaları arasında bilinen ek bir nokta var ise, bu üç nokta bir parabol ile birleştirilebilir.

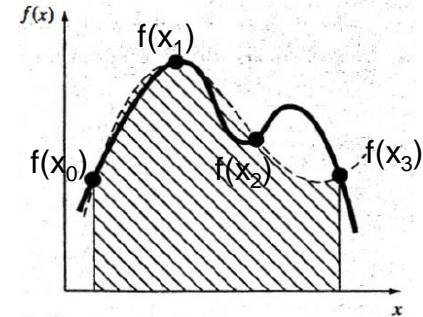


$$I \cong \frac{h}{3} [f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)]$$

$$I \cong \underbrace{(b-a)}_{\text{Taban}} \underbrace{\frac{[f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)]}{6}}_{\text{Ortalama yükseklik}}$$

❑ 3/8 Kuralı

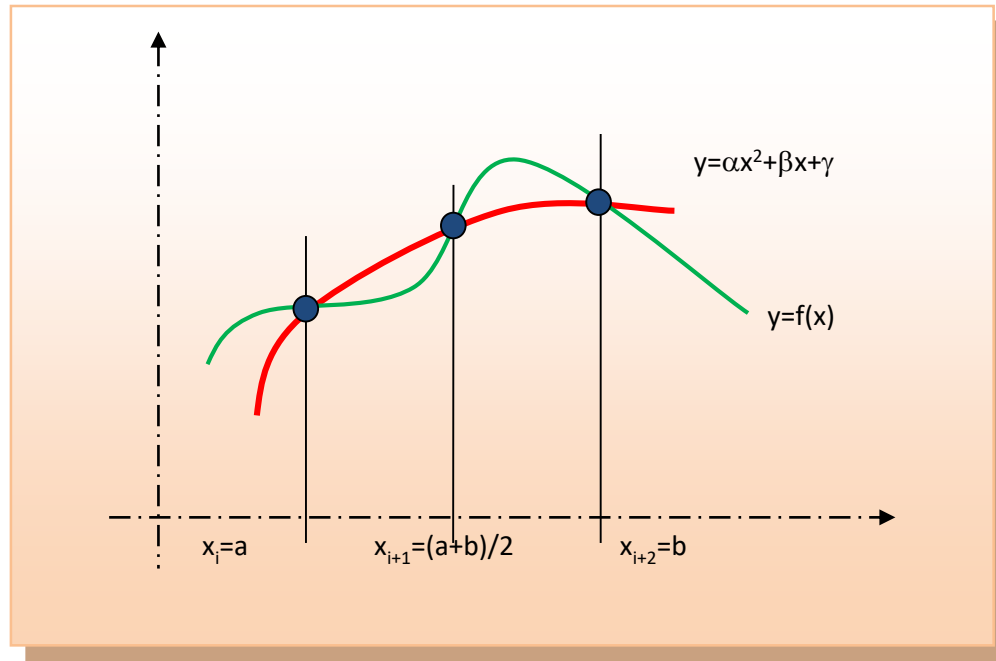
- **f(a)** ve **f(b)** noktaları arasında eşit aralıklı iki nokta var ise, bu dört nokta üçüncü dereceden (kübik) bir polinom ile birleştirilebilir.



$$I \cong \frac{3h}{8} [f(x_0) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + f(x_3)]$$

$$I \cong \underbrace{(b-a)}_{\text{Taban}} \underbrace{\frac{[f(x_0) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + f(x_3)]}{8}}_{\text{Ortalama yükseklik}}$$

Simpson Yöntemi ile Sayısal İntegral



Şimdi çok fazla indis yazmamak için $a = x_i$, $b = x_{i+2}$ yazalım; bu durumda $x_{i+1} = (a+b)/2$ olacaktır. Buna göre $y = f(x)$ in yerini almasını istediğimiz parabol şu şartları sağlamalıdır.

$$x = a \quad \rightarrow \quad y = \alpha a^2 + \beta a + \gamma$$

$$x = (a+b)/2 \quad \rightarrow \quad y = \alpha (a+b)^2 / 4 + \beta (a+b)/2 + \gamma$$

$$x = b \quad \rightarrow \quad y = \alpha b^2 + \beta b + \gamma$$

Simpson Yöntemi ile Sayısal İntegral(1/3 Kuralı)

$$\int_a^b [\alpha x^2 + \beta x + \gamma] dx = \left[\alpha \frac{x^3}{3} + \beta \frac{x^2}{2} + \gamma x \right]_a^b = \frac{1}{3} \left\{ \alpha(b^3 - a^3) + \frac{3}{2} \beta(b^2 - a^2) + 3\gamma(b - a) \right\}$$

Bu denklemde yer alan α , β , γ da hesaplanıp yerlerine konulursa, hesaplamalardan sonra, şu sonuca ulaşılır.

$$\int_a^b f(x) dx \cong \frac{b-a}{6} \left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right]$$

$$\int_{x_i}^{x_{i+2}} f(x) dx \cong \frac{h}{3} [f(x_i) + 4f(x_{i+1}) + f(x_{i+2})]$$

Simpson Yöntemi ile Sayısal İntegral

❑ **Örnek:** $f(x)=0.2+25x-200x^2+675x^3-900x^4+400x^5$ fonksiyonunu $a=0$ 'dan $b=0.8$ 'e kadar

1- Simpson'un 1/3 kuralıyla

2- Simpson'un 3/8 kuralıyla sayısal integralini hesaplayınız.

❑ **Çözüm 1:**

$$f(0)=0.2, \quad f(0.4)=2.456, \quad f(0.8)=0.232 \text{ 'dir.}$$

$$\text{Integral değeri} \quad I \cong 0.8 \frac{[0.2 + 4(2.456) + 0.232]}{6} = 1.367467$$

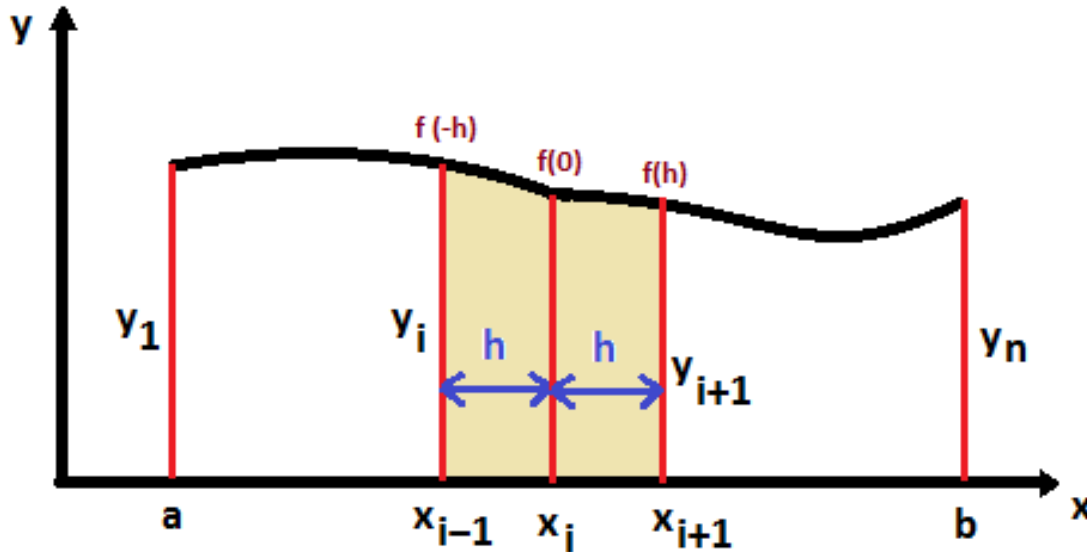
❑ **Çözüm 2:**

$$f(0)=0.2, \quad f(0.2667)=1.432724, \quad f(0.5333)=3.487177, \quad f(0.8)=0.232 \text{ 'dir.}$$

$$\text{Integral değeri} \quad I \cong 0.8 \frac{[0.2 + 3(1.432724 + 3.487177) + 0.232]}{8} = 1.51917$$

Simpson 1/3 Yönteminin Çoklu Uygulaması

- ❑ Simpson yönteminde, şekilde görüldüğü gibi **a** ve **b** olarak sınırları belirlenen **x** eksenindeki aralığın **h** olarak adlandırılan eşit uzunlukta **fakat çift sayıdan oluşan n adet parçalara** bölünmesi gerekir.
- ❑ Parçaların adedi ne kadar fazla olursa (h ne kadar küçük olursa) elde edilecek alan hesabının doğruluğu da o kadar yüksek olur.
- ❑ Trapez yöntemine göre daha doğru sonuçlar verir.



$$I = (b - a) \left(\frac{f_0 + f_n + 4 \sum_{i=1}^{n/2} f_{2i-1} + 2 \sum_{i=1}^{(n-2)/2} f_{2i}}{3n} \right)$$

$$\text{Alan} \cong \frac{h}{3} [y_1 + 4(y_2 + y_4 + \dots + y_{n-1}) + 2(y_3 + y_5 + \dots + y_{n-2}) + y_n]$$

Simpson 1/3 Yönteminin Çoklu Uygulaması

- ❑ x_{i-1} ile x_{i+1} arasında kalan eğri, $y_{i-1}=f(-h)$, $y_i=f(0)$ ve $y_{i+1}=f(h)$ noktalarından geçen $f(x)=ax^2+bx+c$ doğrusu ile tanımlanır.

- ❑ a , b ve c katsayıları

$$y_{n-1} = f(-h) = ah^2 - bh + c$$

$$y_n = f(0) = c$$

$$y_{n+1} = f(h) = ah^2 + bh + c$$



$$c = y_n$$

$$b = \frac{y_{n+1} - y_{n-1}}{2h}$$

$$a = \frac{1}{2h^2} (y_{n+1} + y_{n-1} - 2y_n)$$

- ❑ $y(x)$ fonksiyonunun x_{i-1} ve x_{i+1} arasındaki değeri

$$\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} y(x) dx = \int_{-h}^h f(x) dx$$

$$\text{Alan} \cong \frac{h}{3} [y_1 + 4(y_2 + y_4 + \dots + y_{n-1}) + 2(y_3 + y_5 + \dots + y_{n-2}) + y_n]$$

Simpson 1/3 Yönteminin Çoklu Uygulaması

- ❑ **Örnek:** $y(x) = e^{-x^2}$ fonksiyonunun $0 < x < 1$ aralığı için $h=0.25$ kullanarak fonksiyona ait değer hesaplamaları aşağıdaki tabloda görülmektedir. Fonksiyonun integralini Simpson 1/3 yöntemi ile hesaplayınız.

n	x	$y(x) = e^{-x^2}$
1	0	1.0000
2	0.25	0.9394
3	0.5	0.7788
4	0.75	0.5698
5	1	0.3679

- ❑ **Çözüm:**

$$Alan \cong \frac{h}{3} [y_1 + 4(y_2 + y_4) + 2(y_3) + y_5]$$

$$Alan \cong \frac{0.25}{3} [1 + 4(0.9394 + 0.5698) + 2(0.7788) + 0.3679] = 0.7469$$

MATLAB Kodu

% Sayısal İntegral

```
a=0; b=2*pi; h=0.5;
```

```
x=a:h:b;
```

```
y=1+2*sin(x);
```

```
n=length(x);
```

%trapez yöntemi

```
alant=(y(1)+2*sum(y(2:n-1))+y(n))*h/2
```

%trapz komutu

```
alant2=trapz(x,y)
```

%simpson yöntemi

```
alans=(y(1)+4*sum(y(2:2:n-1))+2*sum(y(3:2:n-1))+y(n))*h/3
```

```
area(x,y)
```

%sembolik çözüm

```
syms x
```

```
alan=double(int(1+2*sin(x),x,0,2*pi))
```



- $f(x) = e^{2x}$ fonksiyonunun $0 < x < 2$ için, $h=0.2$ adımlar ile gördüğünüz tüm yöntemleri kullanarak integralini hesaplayınız.

KAYNAKLAR

- İlyas ÇANKAYA, Devrim AKGÜN, Sezgin KAÇAR “*Mühendislik Uygulamaları İçin MATLAB*”, Seçkin Yayıncılık
- Steven C. Chapra, Raymond P. Canale (Çev. H. Heperkan ve U. Kesgin), “*Yazılım ve Programlama Uygulamalarıyla Mühendisler İçin Sayısal Yöntemler*”, Literatür Yayıncılık.
- Serhat YILMAZ, “*Bilgisayar İle Sayısal Çözümleme*”, Kocaeli Üniv. Yayınları, No:168, Kocaeli, 2005.
- Yüksel YURTAY, Sayısal Analiz Ders Notları, Sakarya Üniversitesi