

HAFTA 2

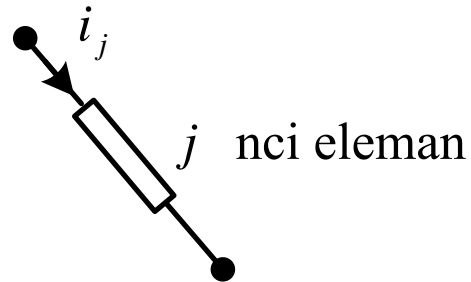
DEVRE ÇÖZÜM YÖNTEMLERİ

KİRCHOFF UN AKIM DENKLEMLERİ

- Döğümler için akım denklemleri

$$\sum_{j=1}^{n_e} a_{kj} \cdot i_j = 0 \quad k = 1, 2, 3, \dots, n_d$$

•
 k nci döğüm



- j nci eleman k ncı düğüme bağlı değil ise, $a_{kj} = 0$
- j nci eleman k ncı düğüme bağlı ve eleman akım yönü düğümden dışarı doğru ise, $a_{kj} = +1$
- j nci eleman k ncı düğüme bağlı ve eleman akım yönü düğümden dışarı doğru ise, $a_{kj} = -1$

$$a_{kj} = \begin{cases} 0 \\ +1 \\ -1 \end{cases}$$

Aynı denklemleri vektörel bir biçimde ifade edecek olursak aşağıdaki bağıntıları yazabiliriz.

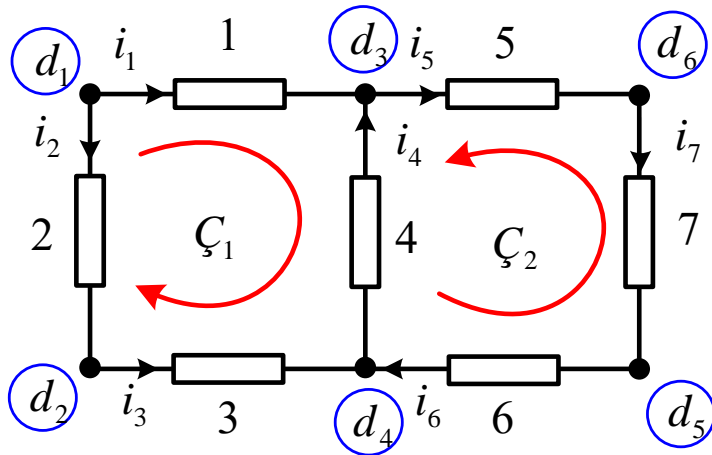
$$A_b \cdot I_e(t) = \Theta$$

$$A_b = [a_{kj}]_{n_d \times n_e}$$

$$I_e(t) = \begin{bmatrix} i_1(t) \\ i_2(t) \\ \vdots \\ i_{n_e}(t) \end{bmatrix}_{n_e \times 1}$$

$$\Theta = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}_{n_d \times 1}$$

Örnek: Aşağıdaki devrede düğümler akım denklemlerini yazınız.



$$d_1 : i_1 + i_2 = 0$$

$$d_2 : -i_2 + i_3 = 0$$

$$d_3 : i_5 - i_1 - i_4 = 0$$

$$d_4 : i_4 - i_3 - i_6 = 0$$

$$d_5 : -i_7 + i_6 = 0$$

$$d_6 : i_7 - i_5 = 0$$

KİRCHOFF UN GERİLİM DENKLEMLERİ

$$\sum_{j=1}^{n_e} b_{kj} \cdot v_j = 0 \quad k = 1, 2, 3, \dots, n_\zeta \quad b_{kj} = \begin{cases} 0 \\ +1 \\ -1 \end{cases}$$

- j nci eleman ζ nci çevreye girmiyorsa, $b_{kj} = 0$
- j nci eleman, ζ nci çevreye giriyor ve eleman gerilim referans yönü çevre yönünde ise, $b_{kj} = +1$
- j nci eleman ζ nci çevreye giriyor ve eleman gerilim referans yönü çevre yönünün tersinde ise, $b_{kj} = -1$

Aynı denklemleri vektörel bir biçimde ifade edecek olursak aşağıdaki bağıntıları yazabiliriz.

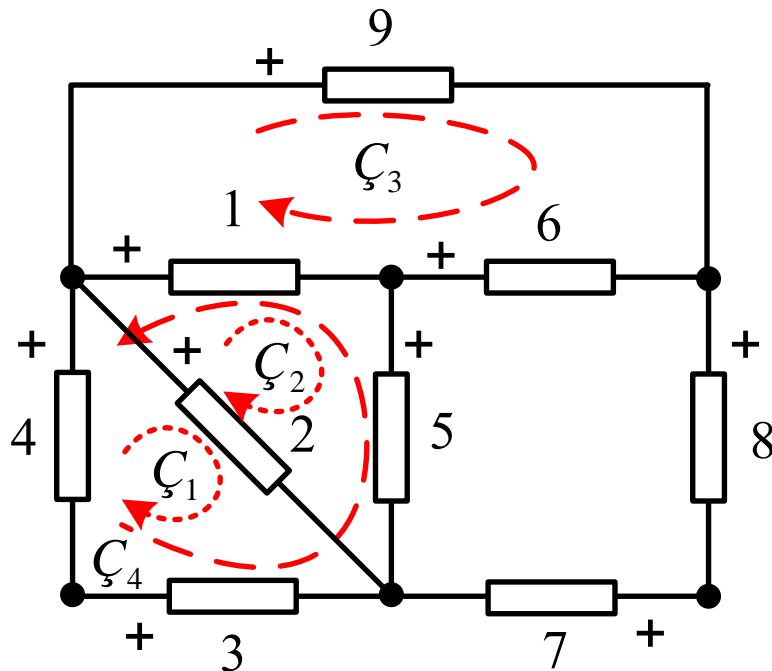
$$B_b.V_e(t) = \Theta$$

$$B_b = [b_{kj}]_{n_\zeta \times n_e}$$

$$V_e(t) = \begin{bmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \\ \vdots \\ v_{n_e}(t) \end{bmatrix}_{n_e \times 1}$$

$$\Theta = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}_{n_\zeta \times 1}$$

Örnek: Aşağıdaki devrenin ζ_1 , ζ_2 ve ζ_4 çevreleri için akım denklemlerini yazınız.



$$\zeta_1 : v_2 - v_3 - v_4 = 0$$

$$\zeta_2 : v_1 - v_2 + v_5 = 0$$

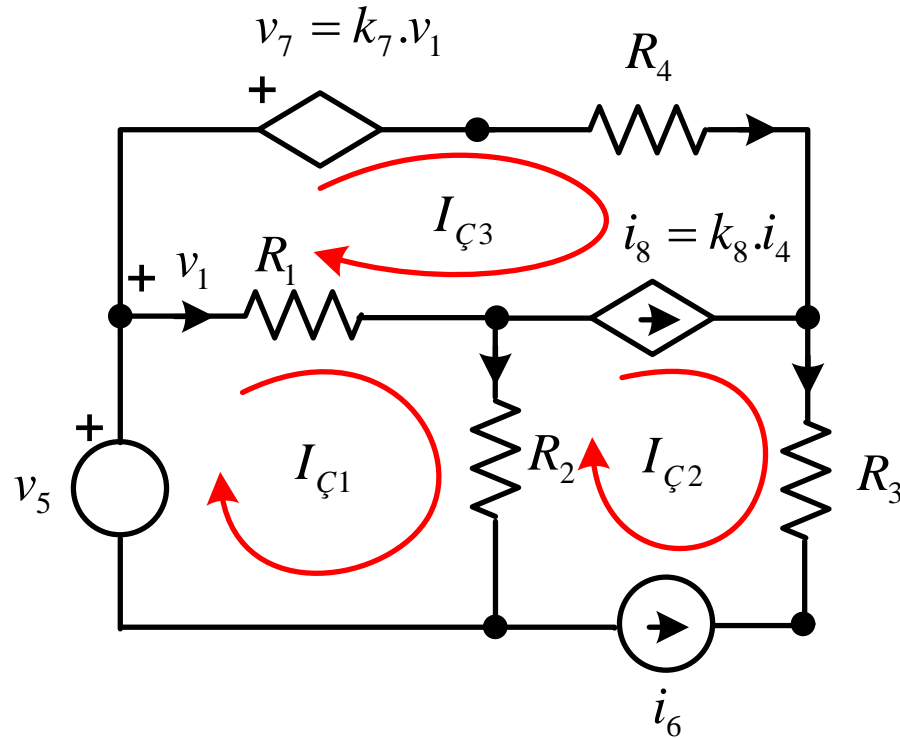
$$\zeta_4 : -v_1 + v_3 + v_4 - v_5 = 0$$

$$\zeta_1 + \zeta_2 : v_1 - v_3 - v_4 + v_5 = 0$$

$$\zeta_1 + \zeta_2 = -\zeta_4$$

Bağımsız çevrelere ilişkin çevre denklemleri

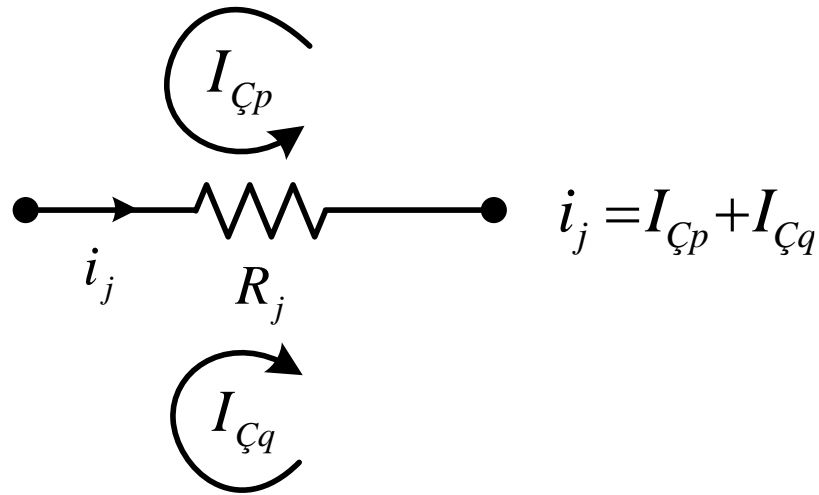
Örnek: Aşağıdaki devrenin çevre denklemlerini bağımsız çevreler için adım adım yazınız.



1. Bağımsız çevrelere ilişkin çevre denklemleri ve ardından direnç elemanlarının gerilimleri yerine tanım bağıntıları aşağıdaki gibi yazılır.

$$\begin{array}{ll} v_1 + v_2 - v_5 = 0 & \Rightarrow R_1.i_1 + R_2.i_2 - v_5 = 0 \\ -v_2 + v_3 - v_6 + v_8 = 0 & \Rightarrow -R_2.i_2 + R_3.i_3 - v_6 + v_8 = 0 \\ -v_1 + v_4 - v_8 + v_7 = 0 & \Rightarrow -R_1.i_1 + R_4.i_4 - v_8 + v_7 = 0 \end{array}$$

Açıklama: Herhangi bir devre elemanının (direnç, endüktans, kapasite, bağımlı ve bağımsız gerilim ve akım kaynağı v.b) akımı, çevre akımları cinsinden, çevre akımlarının yönleri esas alınmak suretiyle, aşağıdaki şekilde gösterildiği gibi ifade edilir.



2. Daha sonra, direnç elemanının akımları çevre akımları cinsinden ifade edilir ve hemen ardından çevre akımları parantezine alındıklarında denklemler aşağıdaki hale gelir.

$$\begin{aligned} R_1 \cdot (I_{\zeta 1} - I_{\zeta 3}) + R_2 \cdot (I_{\zeta 1} - I_{\zeta 2}) &= v_5 & \Rightarrow & (R_1 + R_2) \cdot I_{\zeta 1} - R_2 \cdot I_{\zeta 2} - R_1 \cdot I_{\zeta 3} = v_5 \\ -R_2 \cdot (I_{\zeta 1} - I_{\zeta 2}) + R_3 \cdot I_{\zeta 2} &= v_6 - v_8 & \Rightarrow & -R_2 \cdot I_{\zeta 1} + (R_2 + R_3) \cdot I_{\zeta 2} + 0 \cdot I_{\zeta 3} = v_6 - v_8 \\ -R_1 \cdot (I_{\zeta 1} - I_{\zeta 3}) + R_4 \cdot I_{\zeta 3} &= v_8 - v_7 & \Rightarrow & -R_1 \cdot I_{\zeta 1} + 0 \cdot I_{\zeta 2} + (R_1 + R_4) \cdot I_{\zeta 3} = v_8 - v_7 \end{aligned}$$

Sonuçta elde edilen denklemleri matrisel forma sokacak olursak aşağıdaki sonuca ulaşırız.

$$\begin{bmatrix} R_1 + R_2 & -R_2 & -R_1 \\ -R_2 & R_2 + R_3 & 0 \\ -R_1 & 0 & R_1 + R_4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_{\zeta 1} \\ I_{\zeta 2} \\ I_{\zeta 3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_5 \\ v_6 - v_8 \\ v_8 - v_7 \end{bmatrix}$$

Burada üç adet bağımsız denkleme sahibiz. Bununla birlikte $I_{\zeta 1}$, $I_{\zeta 2}$, $I_{\zeta 3}$, v_6 , v_7 ve v_8 bilinmiyor. Yani altı adet bilinmeyenimiz var. Bu nedenle üç adet ek denkleme daha ihtiyaç duyarız. Bu ek denklemler aşağıda verilmiştir.

v_5 bilinen bir fonksiyondur.

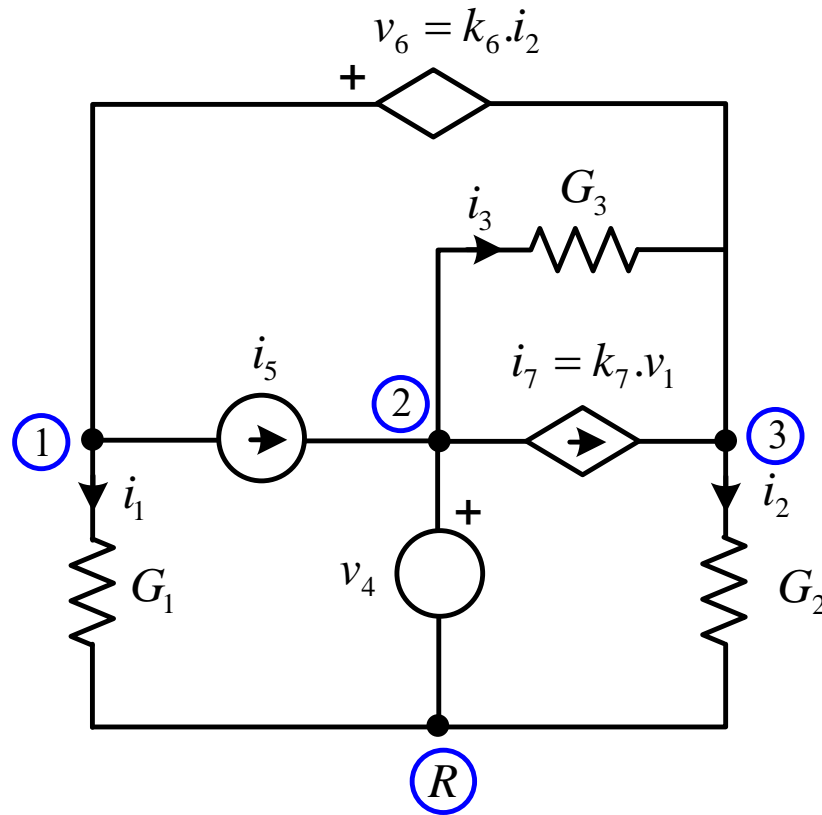
$i_6 = i_k(t) = -I_{\zeta 2}$ olur. Bu nedenle $I_{\zeta 2}$ artık biliniyor demektir.

$$v_7 = k_7.v_1 = k_7.R_1.i_1 = k_7.R_1.(I_{\zeta 1} - I_{\zeta 3})$$

$$i_8 = k_8.i_4 \Rightarrow I_{\zeta 2} - I_{\zeta 3} = k_8.I_{\zeta 3} \Rightarrow I_{\zeta 2} = (1 + k_8).I_{\zeta 3}$$

Düğüm Denklemleri

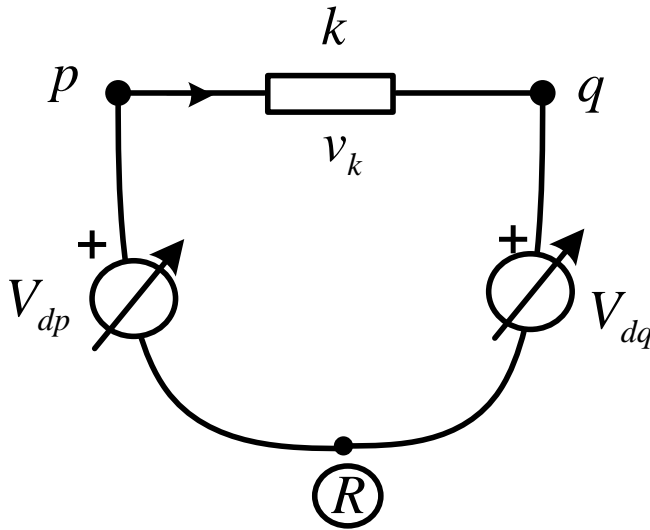
Örnek: Aşağıdaki devrenin düğüm denklemlerini bağımsız düğümler için adım adım yazınız.



1. Bağımsız düğümlere ilişkin düğüm denklemleri ve ardından direnç elemanlarının akımları yerine tanım bağıntıları aşağıdaki gibi yazılır.

$$\begin{array}{ll} i_1 + i_5 + i_6 = 0 & \Rightarrow G_1.v_1 = -i_5 - i_6 \\ -i_5 + i_4 + i_3 + i_7 = 0 & \Rightarrow G_3.v_3 = i_5 - i_4 - i_7 \\ i_2 - i_3 - i_6 - i_7 = 0 & \Rightarrow G_2.v_2 - G_3.v_3 = i_6 + i_7 \end{array}$$

Açıklama: Herhangi bir devre elemanının (direnç, endüktans, kapasite, bağımlı ve bağımsız gerilim ve akım kaynağı v.b) gerilimi, düğüm gerilimleri cinsinden, eleman akımlarının yönleri esas alınmak suretiyle, aşağıdaki şekilde gösterildiği gibi ifade edilir.



$$v_k = V_{dp} - V_{dq}$$

q referans düğümü ise $v_k = V_{dp}$

p referans düğümü ise $v_k = -V_{dq}$

2. Daha sonra, direnç elemanının gerilimleri düğüm gerilimleri cinsinden ifade edilir ve hemen ardından düğüm gerilimleri parantezine alındıklarında denklemler aşağıdaki hale gelir.

$$G_1.V_{d1} = -i_5 - i_6$$

$$G_3.V_{d2} - G_3.V_{d3} = i_5 - i_4 - i_7$$

$$G_2.V_{d3} - G_3.V_{d2} + G_3.V_{d3} = i_6 + i_7$$

$$\Rightarrow G_1.V_{d1} + 0.V_{d2} + 0.V_{d3} = -i_5 - i_6$$

$$\Rightarrow 0.V_{d1} + G_3.V_{d2} - G_3.V_{d3} = i_5 - i_4 - i_7$$

$$\Rightarrow 0.V_{d1} - G_3.V_{d2} + (G_2 + G_3).V_{d3} = i_6 + i_7$$

Sonuçta elde edilen denklemleri matrisel forma sokacak olursak aşağıdaki sonuca ulaşırız.

$$\begin{bmatrix} G_1 & 0 & 0 \\ 0 & G_3 & -G_3 \\ 0 & -G_3 & G_2 + G_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_{d1} \\ V_{d2} \\ V_{d3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -i_5 - i_6 \\ i_5 - i_4 - i_7 \\ i_6 + i_7 \end{bmatrix}$$

3. Ek denklemler

$$i_7 = k_7.v_1 = k_7.V_{d1} \quad \text{bilinir hale gelir.}$$

$$V_{d2} = v_4 \quad \text{bilinir hale gelir.}$$

$$\begin{aligned} v_6 = k_6.i_2 &\Rightarrow V_{d1} - V_{d3} = k_6.G_2.v_2 \Rightarrow V_{d1} - V_{d3} = k_6.G_2.V_{d3} \\ &\Rightarrow V_{d1} = (1 + k_6.G_2).V_{d3} \end{aligned}$$

4. Bilinmeyenler

$$i_6$$

$$V_{d3}$$

$$i_4$$

5. Bilinenler

$$V_{d2} = v_4$$

$$i_7 = k_7.v_1 = k_7.V_{d1}$$

$$\begin{aligned} v_6 = k_6.i_2 &\Rightarrow V_{d1} - V_{d3} = k_6.G_2.v_2 \Rightarrow V_{d1} - V_{d3} = k_6.G_2.V_{d3} \\ &\Rightarrow V_{d1} = (1 + k_6.G_2).V_{d3} \end{aligned}$$

Tellegen Teoremi

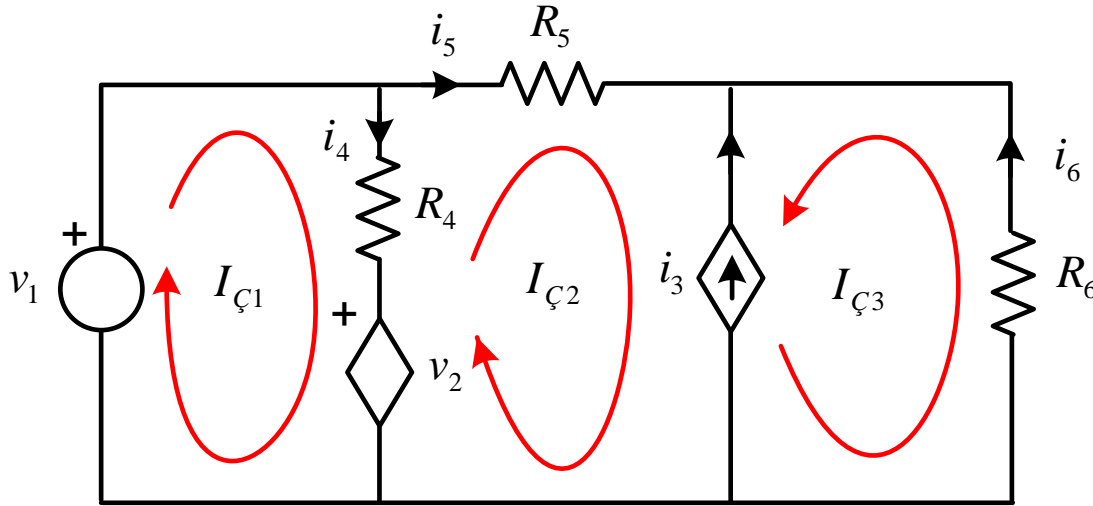
Bir elektrik devresindeki tüm elemanların güçlerinin cebirsel toplamı sıfırdır.

$$\sum_{k=1}^{n_e} p_k(t) = \sum_{k=1}^{n_e} v_k(t) \cdot i_k(t) = 0$$

Örnek 1. Aşağıdaki devrenin;

- a) Çevre denklemlerini adım adım çıkarınız.
- b) Bu denklemleri çözerek çevre akımlarını bulunuz.
- c) Çevre akımlarından yararlanarak eleman akım ve gerilimlerini bulunuz.

- d) Tellegen teoreminin yani $\sum_{i=1}^{n_e=6} p_i(t) = 0$ ifadesinin sağlandığını gösteriniz.



$$v_1 = 2 \text{ Volt}$$

$$v_2 = \mu \cdot v_6$$

$$i_3 = \beta \cdot i_4$$

$$\mu = 2$$

$$\beta = 10$$

$$R_4 = 5 \Omega$$

$$R_5 = 4 \Omega$$

$$R_6 = 1 \Omega$$

a.) Her üç çevreye ait çevre denklemleri aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$-v_1 + v_4 + v_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad -v_1 + R_4 \cdot i_4 + v_2 = 0$$

$$-v_2 - v_4 + v_5 - v_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad -v_2 - R_4 \cdot i_4 + R_5 \cdot i_5 - v_3 = 0$$

$$v_6 - v_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad R_6 \cdot i_6 - v_3 = 0$$

Eleman akımları çevre akımları cinsinden aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$i_4 = I_{\zeta 1} - I_{\zeta 2}$$

$$i_5 = I_{\zeta 2}$$

$$i_6 = I_{\zeta 3}$$

Çevre akımları cinsinden yazılan bu eleman akımları, yukarıdaki çevre denklemlerinde yerine konacak ve matrisel bir biçime sokulacak olursa aşağıdaki sonuca gelinir.

$$-v_1 + R_4.(I_{\zeta 1} - I_{\zeta 2}) + v_2 = 0$$

$$-v_2 - R_4.(I_{\zeta 1} - I_{\zeta 2}) + R_5.I_{\zeta 2} - v_3 = 0$$

$$R_6.I_{\zeta 3} - v_3 = 0$$

$$\begin{bmatrix} R_4 & -R_4 & 0 \\ -R_4 & R_4 + R_5 & 0 \\ 0 & 0 & R_6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_{\zeta 1} \\ I_{\zeta 2} \\ I_{\zeta 3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 - v_2 \\ v_2 + v_3 \\ v_3 \end{bmatrix}$$

b) Ek denklemleri yeniden düzenlemek suretiyle aşağıdaki ifadeleri elde ederiz.

$$i_3 = \beta.i_4 \Rightarrow -(I_{\zeta 2} + I_{\zeta 3}) = \beta.(I_{\zeta 1} - I_{\zeta 2}) \Rightarrow I_{\zeta 3} = -10.I_{\zeta 1} + 9.I_{\zeta 2}$$

$$v_2 = \mu.v_6 = \mu.R_6.i_6 = \mu.R_6.I_{\zeta 3} = 2.I_{\zeta 3} = -20.I_{\zeta 1} + 18.I_{\zeta 2}$$

Bu ifadeleri ve eleman değerlerini çevre denklemlerinde yerine yazmak ve matrisel bir biçime sokmak suretiyle aşağıdaki sonuçlara gelinir.

$$-2 + 5.(I_{\zeta 1} - I_{\zeta 2}) - 20.I_{\zeta 1} + 18.I_{\zeta 2} = 0$$

$$20.I_{\zeta 1} - 18.I_{\zeta 2} - 5.(I_{\zeta 1} - I_{\zeta 2}) + 4.I_{\zeta 2} - v_3 = 0$$

$$-10.I_{\zeta 1} + 9.I_{\zeta 2} - v_3 = 0$$

$$\begin{bmatrix} -15 & 13 & 0 \\ 15 & -9 & -1 \\ -10 & 9 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_{\zeta 1} \\ I_{\zeta 2} \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Yukarıdaki denklem takımından görüleceği üzere artık elimizde üç bilinmeyen ve üç denklem vardır. Bu denklem takımı çözülmek suretiyle bilinmeyenler aşağıdaki gibi bulunur.

$$I_{\zeta_1} = 0.655 \text{ Amper}$$

$$I_{\zeta_2} = 0.909 \text{ Amper}$$

$$v_3 = 1.636 \text{ Volt}$$

Bu değerlerden faydalanmak suretiyle,

$$I_{\zeta_3} = -10.I_{\zeta_1} + 9.I_{\zeta_2} = -10 \times 0.655 + 9 \times 0.909 \quad I_{\zeta_3} = 1.636 \text{ Amper}$$

olarak bulunur.

c.) Eleman akım ve gerilimleri aşağıdaki gibi bulunur.

$$i_1 = -I_{\zeta 1} = -0.655 \text{ Amper}$$

$$v_1 = 2 \text{ Volt}$$

$$i_2 = I_{\zeta 1} - I_{\zeta 2} = 0.655 - 0.909 = -0.254 \text{ Amper}$$

$$v_2 = -20.I_{\zeta 1} + 18.I_{\zeta 2} = -20 \times 0.655 + 18 \times 0.909 = -3.272 \text{ Volt}$$

$$i_3 = 10.(I_{\zeta 1} - I_{\zeta 2}) = 10.(0.655 - 0.909) = -2.545 \text{ Amper}$$

$$v_3 = 1.636 \text{ Volt}$$

$$i_4 = I_{\zeta 1} - I_{\zeta 2} = 0.655 - 0.909 = -0.254 \text{ Amper}$$

$$v_4 = R_4 \cdot i_4 = 5 \times (-0.254) = -1.27 \text{ Volt}$$

$$i_5 = I_{\zeta 2} = 0.909 \text{ Amper}$$

$$v_5 = R_5 \cdot i_5 = 4 \times (0.909) = 3.636 \text{ Volt}$$

$$i_6 = I_{\zeta 3} = 1.636 \text{ Amper}$$

$$v_6 = R_6 \cdot i_6 = 1 \times (1.636) = 1.636 \text{ Volt}$$

d.) Aşağıdaki tabloya bakarak Tellegen teoremini sağlandığını gösterebiliriz.

Eleman	i (Amper)	v (Volt)	p (Watt)
1	-0.655	2	-1.31
2	-0.254	3.272	-0.83
3	-2.545	1.636	-4.163
4	-0.254	-1.27	0.323
5	0.909	3.636	3.305
6	1.636	1.636	2.676
Toplam			0.0014