

SAYISAL ANALİZ

Yrd.Doç.Dr. Abdullah SEVİN



SAYISAL ANALİZ

SAYISAL TÜREV (Numerical Differentiation)

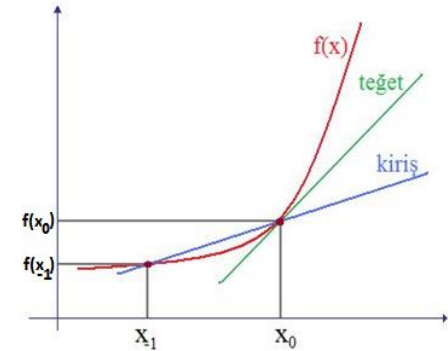
İÇİNDEKİLER

- ❑ **Sayısal Türev**
 - ❑ Geri Farklar İle Sayısal Türev
 - ❑ İleri Farklar İle Sayısal Türev
 - ❑ Merkez Farklar İle Sayısal Türev
 - ❑ Taylor Serisi İle Sayısal Türev

Sayısal Türev

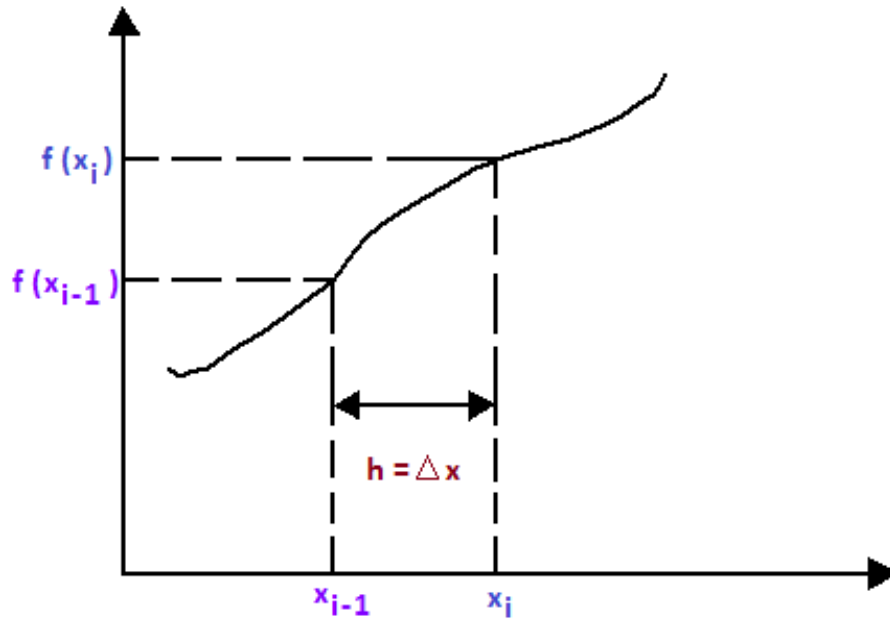
- ❑ **Türev**, bağımlı bir değişkenin bağımsız bir değişkene göre değişme miktarıdır.
- ❑ Analitik olarak türev ya da integral almanın mümkün olmadığı yerlerde **sayısal türev** veya **sayısal integral** işlemleri kullanılmalıdır. Birçok olayda değişim oranları kullanılır.
- ❑ **Örnek:** Bir firmanın yıllık satış miktarı (cirosu), bir arabanın bir saatte aldığı yol veya bir akarsuda bir saniyede akan su miktarı gibi
- ❑ Geometrik olarak **Türev**, bir fonksiyona ait eğrinin her hangi bir **x** noktasındaki yatayla yaptığı açı yada diğer bir ifadeyle **x** noktasındaki teğetinin eğimi olarak görülebilir.

$$f'(x) = \frac{\partial f(x)}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$$
$$\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{f(x_i + \Delta x) - f(x_i)}{\Delta x}$$



- ❑ **Sayısal türev**, bir fonksiyonun bağlı olduğu değişkenlere göre değişim hızının bir ölçüsüdür.

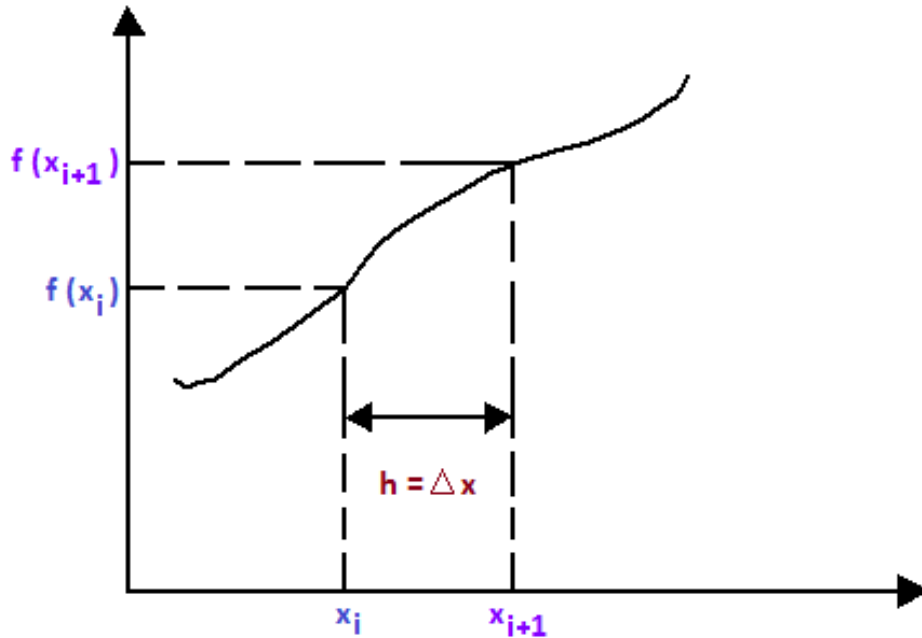
Geri Farklar İle Sayısal Türev



$$f'(x_i) = \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}$$

$$f'(x_i) = \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{f(x_i) - f(x_i - h)}{h}$$

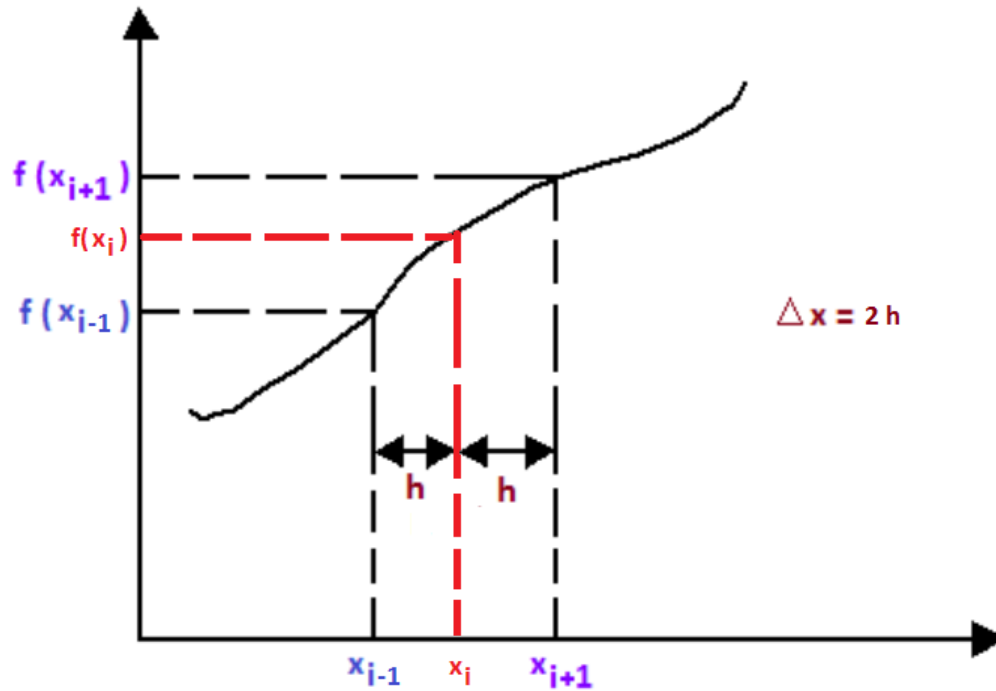
İleri Farklar İle Sayısal Türev



$$f'(x_i) = \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i}$$

$$f'(x_i) = \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{f(x_i + h) - f(x_i)}{h}$$

Merkezi Farklar İle Sayısal Türev



$$f'(x_i) = \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_{i-1}))}{x_{i+1} - x_{i-1}}$$

$$f'(x_i) = \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{f(x_i + h) - f(x_i - h)}{2h}$$

Geri Farklar İle Sayısal Türev

Birinci mertebeden türev:

$$f'(x_i) = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{h}$$

İkinci mertebeden türev:

$$f''(x_i) = \frac{f(x_i) - 2f(x_{i-1}) + f(x_{i-2}))}{h^2}$$

Üçüncü mertebeden türev:

$$f'''(x_i) = \frac{f(x_i) - 3f(x_{i-1}) + 3f(x_{i-2}) - f(x_{i-3}))}{h^3}$$

Dördüncü mertebeden türev:

$$f^{(4)}(x_i) = \frac{f(x_i) - 4f(x_{i-1}) + 6f(x_{i-2}) - 4f(x_{i-3}) + f(x_{i-4}))}{h^4}$$

İleri Farklar İle Sayısal Türev

Birinci mertebeden türev:

$$f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h}$$

İkinci mertebeden türev:

$$f''(x_i) = \frac{f(x_{i+2}) - 2f(x_{i+1}) + f(x_i)}{h^2}$$

Üçüncü mertebeden türev:

$$f'''(x_i) = \frac{f(x_{i+3}) - 3f(x_{i+2}) + 3f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h^3}$$

Dördüncü mertebeden türev:

$$f^{(4)}(x_i) = \frac{f(x_{i+4}) - 4f(x_{i+3}) + 6f(x_{i+2}) - 4f(x_{i+1}) + f(x_i)}{h^4}$$

Merkezi Farklar İle Sayısal Türev

Birinci mertebeden türev:

$$f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_{i-1}))}{2h}$$

İkinci mertebeden türev:

$$f''(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - 2f(x_i) + f(x_{i-1}))}{h^2}$$

Üçüncü mertebeden türev:

$$f'''(x_i) = \frac{f(x_{i+2}) - 2f(x_{i+1}) + 2f(x_{i-1}) - f(x_{i-2}))}{2h^3}$$

Dördüncü mertebeden türev:

$$f^{(4)}(x_i) = \frac{f(x_{i+2}) - 4f(x_{i+1}) + 6f(x_i) - 4f(x_{i-1}) + f(x_{i-2}))}{h^4}$$

Sayısal Türev

❑ **Örnek:** $f(x) = x^2$ fonksiyonunun $x=2$ noktasındaki türevini $h=0.2$ kullanarak her üç yöntemle hesaplayınız?

❑ **Çözüm:**

❑ **Geri farklar**

$$f(x_i)' = \frac{f(x_i) - f(x_i - h)}{h} = \frac{f(2) - f(2 - 0.2)}{0.2} = \frac{2^2 - 1.8^2}{0.2} = 3.8$$

❑ **İleri farklar**

$$f(x_i)' = \frac{f(x_i + h) - f(x_i)}{h} = \frac{f(2 + 0.2) - f(2)}{0.2} = \frac{2.2^2 - 2^2}{0.2} = 4.2$$

❑ **Merkezi farklar**

$$f(x_i)' = \frac{f(x_i + h) - f(x_i - h)}{2h} = \frac{f(2 + 0.2) - f(2 - 0.2)}{2 * 0.2} = \frac{2.2^2 - 1.8^2}{0.4} = 4$$

❑ **Analitik Çözüm**

Örnek

$$f(x) = \ln x$$

$$f'(5) = ?$$

$$f''(5) = ?$$

Analitik çözüm:

$$f'(x) = \frac{1}{x}$$

$$f''(x) = -\frac{1}{x^2}$$

$$f'(5) = 0,2$$

$$f''(5) = -0,04$$

Sayısal çözüm:

$$f'(5) = \frac{\ln(5 + 0,01) - \ln(5)}{5,01 - 5} = \frac{1,6114435915 - 1,609437912}{0,01} \Rightarrow f'(5) = 0,199800$$

$$\begin{aligned} f''(5) &= \frac{\ln(5,02) - 2\ln(5,01) + \ln(5)}{(0,01)^2} = \frac{1,613429934 - 2 * 1,611435915 + 1,609437912}{0,0001} \\ &= -0,0398405 \end{aligned}$$

Taylor Serisi ile Sayısal Türev

- ❑ Bir $f(x)$ fonksiyonun x_i noktasındaki türevi $f'(x_i)$ Taylor Serisi yardımıyla elde edilebilir.
- ❑ Bir fonksiyonun $x_i + \Delta x$ civarındaki değeri x_i civarındaki değerinin kuvvetleri cinsinden, Taylor Serisine açılarak bulunabilir.

$$f(x_i + \Delta x) = f(x_i) + \frac{\Delta x}{1!} f'(x_i) + \frac{\Delta x^2}{2!} f''(x_i) + \frac{\Delta x^3}{3!} f'''(x_i) + \dots + \frac{\Delta x^n}{n!} f^n(x_i)$$

- ❑ Taylor serisinde serinin kesilen noktadan sonraki hatanın mertebesi, kesilen noktadaki Δx ' in mertebesine eşit olur.
- ❑ **Örnek:** Taylor serisinde ikinci terim'den sonraki terimler atılacak olursa, yapılan hatanın mertebesi 2 olacaktır.
- ❑ Taylor Serisi ile çok noktalı türev yaklaşımı gerçekleştirilir.

Taylor Serisi ile İleri Fark Yöntemi

- $f(x)$ fonksiyonun x_i+h civarındaki ve x_i+2h civarındaki değerlerini $f(x_i)$ nin kuvvetleri cinsinden 2. kuvvetine kadar açıp, $f'(x_i)$ yi çekelim.

$$-4 \quad f(x_i + h) = f(x_i) + \frac{h^1 f'(x_i)}{1!} + \frac{h^2 f''(x_i)}{2!}$$

$$+ \quad f(x_i + 2h) = f(x_i) + \frac{(2h)^1 f'(x)}{1!} + \frac{(2h)^2 f''(x)}{2!}$$

$$-4f(x_i + h) = -4f(x_i) - 4hf'(x_i) - 4\frac{h^2 f''(x_i)}{2}$$

$$+ \quad f(x_i + 2h) = f(x_i) + 2hf'(x_i) + \frac{4h^2 f''(x)}{2}$$

$$f'(x_i) = \frac{1}{2h} [-3f(x_i) + 4f(x_i + h) - f(x_i + 2h)]$$

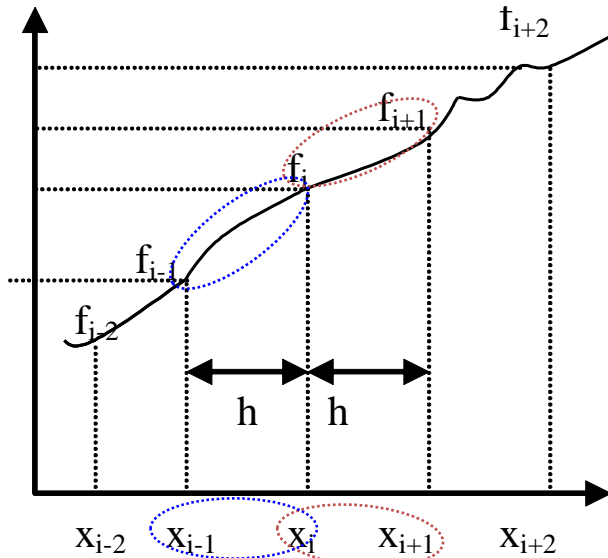
Taylor serisi için ileri fark formülü



$$f'_i = \frac{1}{2h} [-3f_i + 4f_{i+1} - f_{i+2}]$$

Taylor Serisi ile Geri Fark Yöntemi

- ❑ İleri fark yöntemindeki işlemler $f(x)$ fonksiyonun x_i-h civarındaki ve x_i-2h civarındaki değerlerini $f(x_i)$ nin kuvvetleri cinsinden 2. kuvvetine kadar açıp, $f'(x_i)$ yi çekilmesi şeklinde tekrar edilerek elde edilir.



$$f(x_i - h) = f(x_i) + \frac{(-h)^1 f'(x_i)}{1!} + \frac{(-h)^2 f''(x_i)}{2!}$$

$$f(x_i - 2h) = f(x_i) + \frac{(-2h)^1 f'(x)}{1!} + \frac{(-2h)^2 f''(x)}{2!}$$

Taylor serisi için geri fark formülü



$$f'_i = \frac{1}{2h} [3f_i - 4f_{i-1} + f_{i-2}]$$

Sayısal Türev

❑ **Örnek:** $f(x)=2x^2+1$ fonksiyonunun $x=2$ yaklaşık türevini gördüğünüz tüm yöntemlerle hesaplayınız. $h=0.1$ ve analitik çözüm $f'(2)=8$

❑ **Çözüm:**

❑ **Basit ileri farkla çözüm**

$$f(x_i)' = \frac{f(x_i + h) - f(x_i)}{h} = \frac{f(2 + 0.1) - f(2)}{0.1} = \frac{(2 * 2.1^2 + 1) - (2 * 2^2 + 1)}{0.1} = \frac{9.82 - 9}{0.1} = 8.2$$

❑ **Taylor serisi ile iki noktalı ileri farkla çözüm**

$$f_i = f(2) = 2 * 2^2 + 1 = 9$$

$$f_i' = \frac{1}{2h} [-3f_i + 4f_{i+1} - f_{i+2}]$$

$$f_{i+1} = f(2.1) = 2 * 2.1^2 + 1 = 9.82$$

$$f_{i+2} = f(2.2) = 2 * 2.2^2 + 1 = 10.68 \quad f_i' = \frac{1}{2 * 0.1} [-3 * 9 + 4 * 9.82 - 10.68] = \frac{1.6}{0.2} = 8$$

Gregory Newton bağıntıları yardımıyla sayısal türev hesaplama

- ❑ Daha önceki enterpolasyon konusunda tanımlamış olduğumuz, ileri fark enterpolasyon ifadesi:

$$Y_n = y_0 + n\Delta y_0 + [n(n-1)/2!]\Delta^2 y_0 + [n(n-1)(n-2)/3!]\Delta^3 y_0 + \dots$$

$$n' \text{ ye göre türevi } \frac{dy_n}{dn} \text{ alınır, } \frac{dy_n}{dn} = \Delta y_0 + \frac{(2n-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \frac{(3n^2-6n+2)}{3!}\Delta^3 y_0 + \dots$$

$$\text{Burada } n = \frac{x-x_0}{\Delta x}, \quad \frac{dx}{dn} = \Delta x \quad \text{ve} \quad y'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dn} \frac{dn}{dx} = \frac{1}{\Delta x} \frac{dy}{dn}$$

$$y'(x) = \frac{1}{\Delta x} \left[\Delta y_0 + \frac{(2n-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \frac{(3n^2-6n+2)}{3!}\Delta^3 y_0 + \dots \right] \quad \text{elde edilir.}$$

$$x=x_0 \text{ noktasındaki türev için } n=0 \text{ olur ve } y'_0 = \frac{1}{\Delta x} \frac{dy}{dn} \Big|_{n=0}$$

$$y'_0 = \frac{1}{\Delta x} \left[\Delta y_0 - \frac{1}{2}\Delta^2 y_0 + \frac{1}{3}\Delta^3 y_0 + \dots \right] \quad \text{olur.}$$

Gregory Newton bağıntıları yardımıyla sayısal türev hesaplama

- ❑ **Daha önceki enterpolasyon konusunda tanımlamış olduğumuz, geri fark enterpolasyon ifadesi:**

Benzer işlemi Geri yön enterpolasyon ifadesi

$$y_n = y_0 + n \nabla y_0 + [n(n+1)/2!] \nabla^2 y_0 + [n(n+1)(n+2)/3!] \nabla^3 y_0 + \dots \quad \text{ için yapılırsa,}$$

genel bir ifade olarak
$$y'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dn} \frac{dn}{dx} = \frac{1}{\Delta x} \frac{dy}{dn}$$

$$y'(x) = \frac{1}{\Delta x} \left[\nabla y_0 + \frac{1}{2} \nabla^2 y_0 + \frac{1}{3} \nabla^3 y_0 + \dots \right] \quad \text{elde edilir.}$$

Gregory Newton bağıntıları yardımıyla sayısal türev hesaplama

Örnek:

$y=e^x$, $x \in [0, 5]$ ve $\Delta x=h=1.0$ aralığında fonksiyonun ileri fark tablosunu hazırlayarak $x=2$ noktasındaki türevi ileri yön (Newton-Gregory) bağıntısı ile hesaplayınız?

İleri fark türev bağıntısı

$$y'_0 = \frac{1}{\Delta x} \left[\Delta y_0 - \frac{1}{2} \Delta^2 y_0 + \frac{1}{3} \Delta^3 y_0 + \dots \right]$$

$x_0=2$ için (temel satır)

$$Y' = (1/1)[12.7 - (1/2)21.81 + (1/3)37.5] = 14.2950$$

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
0	1.0	1.718	2.944	5.0940
1	2.718	4.662	8.038	13.7720
2	7.38	12.7	21.81	37.500
3	20.08	34.51	59.31	
4	54.59	93.82		
5	148.41			

Fonksiyonun $x=2$ noktasındaki gerçek türev değeri ise $y' = e^2 = 7.3891$ bu problemde $x=2$ noktası var olduğundan $n=0$ alınmış oldu.

Sayısal Türev

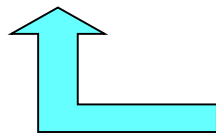
- ❑ **Örnek:** $f(x) = x^2e^x$ fonksiyonunun $x=2$ noktasındaki türevini **0.1** adımlarla ileri, geri, merkezi farklar ve taylor serisi **2. kuvvetin** sayısal türev yöntemlerini kullanarak ayrı ayrı hesaplayınız.



diff komutu ile sembolik türev alma

❑ Tanımlanan bir denklemin türevini alır.

❑ **diff** (denklem, değişken)



türev işleminde kullanılacak değişkenin adı
çözümü yapılacak sembolik ifadelerden oluşan denklem



```
% sembol tanımlama
>> syms x

% diff komutu ile sembolik türev alma
>> diff (x^2)

ans =

    2*x
```



```
% sembol tanımlama
>> syms x t

% diff komutu ile sin(2xt)nin t'ye göre türevi
>> diff (sin(2*x*t), t)

ans =

    2*x*cos(2*t*x)
```

diff komutu ile sembolik katlı türev alma

- ❑ Katlı türev alma durumu.
- ❑ `diff` (denklem, değişken, **türevderecesi**)



```
% sembol tanımlama
>> syms x

% diff komutu ile  $x^2$  nin 2. dereceden türevi
>> diff (x^2, x, 2)


ans =

    2
```

diff komutu ile bir dizinin türevini alma

- ❑ MATLAB'ta dizi elemanları arasındaki fark diff komutu ile elde edilebilir.

t (sn)	0	0.5	1	1.5
y(t)	0	0.6	1.9	2.6



```
% zaman artışını belirt
>> dt=0.5;

% diziyi belirt
>> y= [0 0.6 1.9 2.6];

% dizinin türevi
>> dydt = diff (y)/dt

dydt =

    1.2000    2.6000    1.4000
```

Sayısal Türev MATLAB Uygulama

% Sayısal Türev

%%

x=[0:0.5*pi:2*pi];

y=1+2*sin(x);

n=length(x);

%ileri farklar

dydxi=(y(2:n)-y(1:n-1))./(x(2:n)-x(1:n-1));

xi=x(1:n-1);

%geri farklar

dydxg=(y(1:n-1)-y(2:n))./(x(1:n-1)-x(2:n));

xg=x(2:n);

%merkezi farklar

dydxm=(y(3:n)-y(1:n-2))./(x(3:n)-x(1:n-2));

xm=x(2:n-1);

%analitik türev

dydx=2*cos(x);

% türev farklarının ortalaması

ileri = mean(abs(dydx(1:end-1)- dydxi))

geri = mean(abs(dydx(2:end)- dydxg))

merkezi = mean(abs(dydx(2:end-1)- dydxm))

plot(x,dydx,':rs',xi,dydxi,'-ko',xg,dydxg,'--<',xm,dydxm,'-g*')

legend('analitik','ileri','geri','merkezi',-1)

- $f(x) = e^{2x-3}$ fonksiyonunun $x=2$ için, $h=0.2$ adımlar ile gördüğünüz tüm yöntemleri kullanarak türevini hesaplayınız.

KAYNAKLAR

- İlyas ÇANKAYA, Devrim AKGÜN, Sezgin KAÇAR “*Mühendislik Uygulamaları İçin MATLAB*”, Seçkin Yayıncılık
- Steven C. Chapra, Raymond P. Canale (Çev. H. Heperkan ve U. Kesgin), “*Yazılım ve Programlama Uygulamalarıyla Mühendisler İçin Sayısal Yöntemler*”, Literatür Yayıncılık.
- Serhat YILMAZ, “*Bilgisayar İle Sayısal Çözümleme*”, Kocaeli Üniv. Yayınları, No:168, Kocaeli, 2005.
- Yüksel YURTAY, Sayısal Analiz Ders Notları, Sakarya Üniversitesi