

# Ayrık İşlemsel Yapılar

---

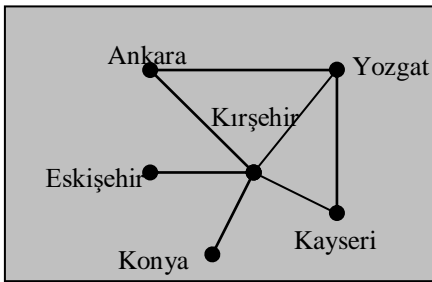
## Hafta 10

Doç.Dr. Nilüfer YURTAY

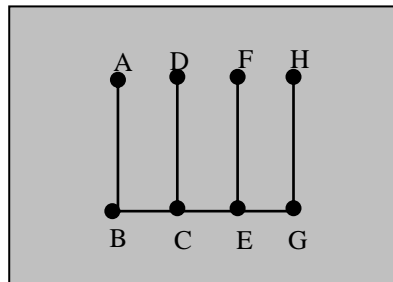
## Graflar

### 10.1 Graflara Giriş

Objelerin durumunu ve aralarındaki bağıntıyı göstermek için diyagram çizmek oldukça yaygındır. Bu diyagramlarda elemanlar noktalar, aralarındaki bağıntılar da, noktalar arasını birleştiren çizgilerle temsil edilirler. Şekil 10.1 şehirlerarası bir yol haritasını göstermektedir. Bu yol haritasında şehirler noktalarla, bu şehirler arasındaki yollar çizgilerle temsil edilebilir.



Şekil 10.1 Yol haritası



Şekil 10.2 Bilgisayar ağı

Şekil 10.2'de A,B,C,D,E,F,G,H ile gösterilen bilgisayarların oluşturduğu ağ ve bunlar arasındaki bilgi akışı graf modeli ile gösterilmiştir.

#### **Tanım**

*Bir graf, boş olmayan sonlu bir  $V$  kümesi ile  $V$  kümesinin 2 elemanlı alt kümelerinin bir  $E$  kümesinden oluşur. Burada  $V$  kümesinin elemanlarını köşeler (vertices) ve  $E$  kümesinin elemanlarını da kenarlar (edges) oluşturmaktadır.*

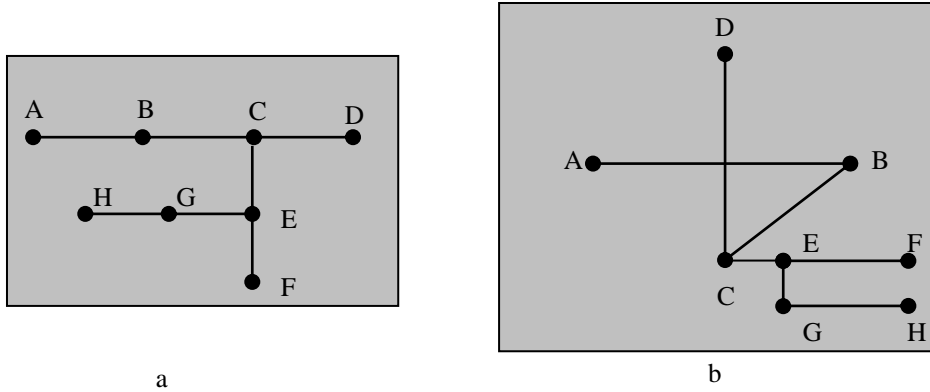
Şekil 10.2'de A,B,C,D,E,F,G,H düğüm ve

$\{A,B\}, \{B,C\}, \{C,D\}, \{C,E\}, \{E,F\}, \{E,G\}, \{G,H\}$  kenarlardır. O halde bir graf, bir diyagramla ya da kümelerle tanımlanabilir.

Burada graf tanımında dikkat edilmesi gereken bazı noktalar bulunmaktadır. Bazı literatüre göre graf tanımında köşelerin sonlu bir küme olması gerekmez. Yine buradaki tanımda herhangi bir kenar aynı düğümü geri dönemez ve iki düğüm arasında farklı kenarlar olamaz.

$e = \{U,V\}$  gösteriminde,  $e$  kenarının  $U$  ve  $V$  düğümlerini birleştirdiği anlaşılır.  $U$  ve  $V$  komşu köşelerdir. Ayrıca  $e$  kenarının  $U$  düğümüne ait olduğu (incident) ve  $U$  düğümünün  $e$  kenarına ait olduğu söylenir. Şekil 10.2 'ye göre  $A, B$  köşeleri komşudur,  $A, D$  köşeleri ise aralarında bir kenar olmadığı için komşu değildir.

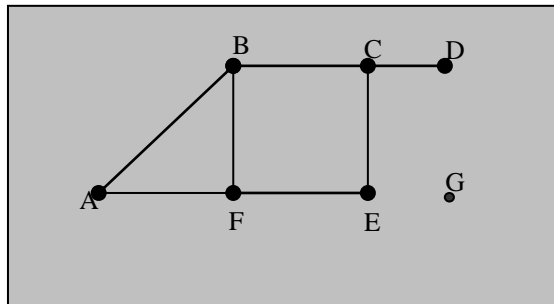
Aynı grafın farklı bir biçimde çizilmesi de mümkündür. Sadece düğümleri ve bağlantı biçimleri önemlidir. Örneğin şekil 10.3a'daki grafı şekil 10.3b'deki biçimde de çizebiliriz.



**Şekil 10.3**

Şekil 10.3(b)'de dikkat edilmesi gereken nokta,  $AB$  kenarı ile  $CD$  kenarının kesim noktasında yeni bir köşe düğümü olup olmadığıdır. Grafı mümkünse yanlış anlamaya neden olmayacak biçimde çizmek önemlidir. Bazı durumlarda böyle kesişmeler olmadan grafı çizmek çok zor olabilir. Bir grafta bir  $V$  düğümüne bağlı olan kenar sayısı  $V$ 'nin derecesidir (degree of  $V$ ) ve  $\deg(V)$  ile gösterilir. Şekil 10.4'te verilen grafta her bir düğümün dereceleri;

$\deg(A) = 2, \deg(B) = 3, \deg(C) = 3, \deg(D) = 1, \deg(E) = 2, \deg(F) = 3, \deg(G) = 0$  olacaktır.

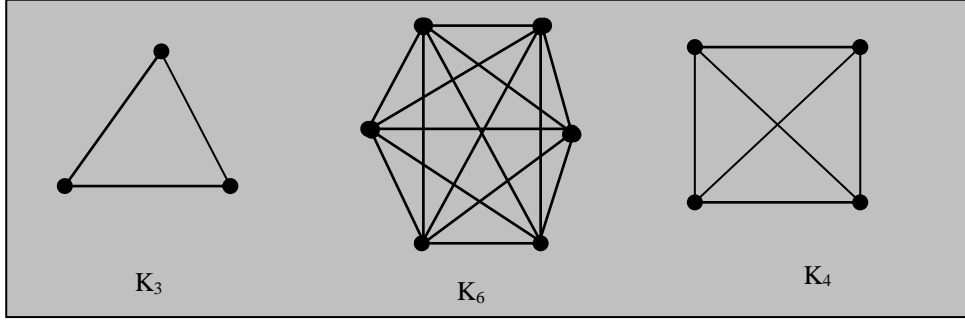


**Şekil 10.4**

**Tanım**

Bir grafta,  $n$  adet düğümün hepsi diğer düğümlerle bağlı ise bu grafa tam graftır denir. Böyle bir graf  $K_n$  ile gösterilir.

Şekil 10.5’de  $K_3$ ,  $K_4$  ve  $K_6$  grafları gösterilmiştir.



Şekil 10.5

**Tanım**

Bir  $G(V,E)$  grafinda, eğer  $V$  düğümleri boş olmayan kümelerin parçalı birleşimleri olarak ifade edilebiliyorsa  $G(V,E)$ ’ye iki parçalı graf denir.  $V=A \cup B$  ve her bir kenar  $\{a,b\}$  biçiminde olup  $a \in A$  ve  $b \in B$ ’dir. Eğer her  $a \in A$  ve  $b \in B$ ,  $\{a,b\} \in E$  için,  $A$ ,  $m$  düğüm ve  $B$ ,  $n$  düğüm içeriyorsa parçalı grafa  $K_{m,n}$  tam parçalı graf denir.

**Örnek 10.1**

Aşağıdaki graf gösterimlerini çiziniz.

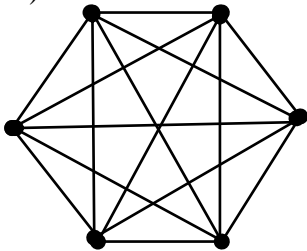
a)  $K_6$

b)  $K_{1,3}$

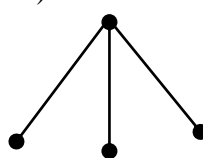
c)  $K_{1,4}$

d)  $K_{3,4}$

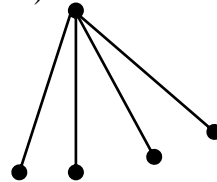
a)



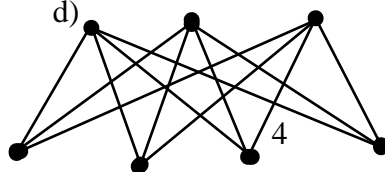
b)



c)



d)



### Teorem

Bir grafta düğümlerin derecelerinin toplamı , kenar sayısının iki katına eşittir.

### İspat

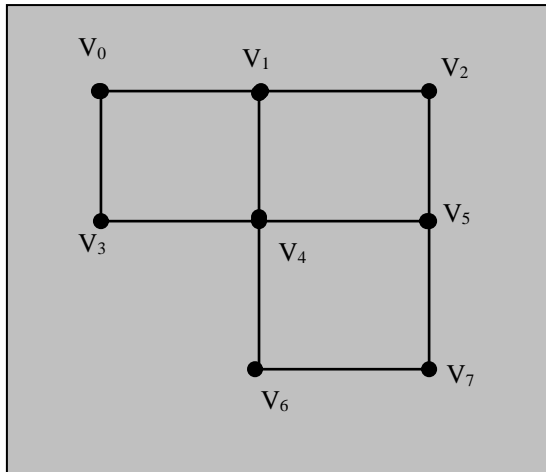
Her bir kenar iki düğüme bağlıdır. Buna göre toplam dereceyi hesaplarken bir kenarı iki kez göz önüne almış oluyoruz. Bu nedenle de toplam derece kenar sayısının iki katıdır.

## 10.2 Grafların Gösterilimi

### 10.2.1 Matris Gösterilimi

Bir grafin çok sayıda kenar ve düğüm içermesi durumunda graf işlemlerinin bilgisayarla yapılması daha uygun olacaktır. Grafi bilgisayarda temsil etmenin bir yolu, matris gösterimidir.

Bir  $G$  grafinin  $V_1, V_2, \dots, V_n$  düğümleri olsun. Bu grafi bir  $n \times n$  kare matrisi ile göstermek istersek  $V_i$  düğümü ile  $V_j$  düğümü arasında bir kenar varsa matrisin  $i, j$  elemanı 1, yoksa 0 olacaktır. Bu matrise  $G$ 'nin komşuluk matrisi ( adjacency matrix) denir ve  $A(G)$  ile gösterilir. Şekil 10.6a ve şekil 10.6b'de sırası ile  $G_1$  ve  $G_2$  grafları ve komşuluk matrisleri gösterilmiştir.

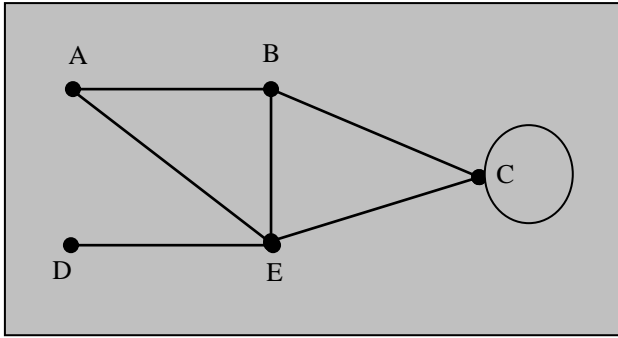


Şekil 10.6 (a)  $G_1$  grafi

Komşuluk matrisi de aşağıdaki biçimde elde edilir.

$$A(G_1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A(G_2) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$



Şekil 10.6 (b)  $G_2$  grafi

Graf matrisi incelendiğinde görüleceği gibi,  $A(G_1)$  'in 2. Satırının elemanlarının toplamı 3 olup  $V_1$  düğümünün derecesini göstermektedir.

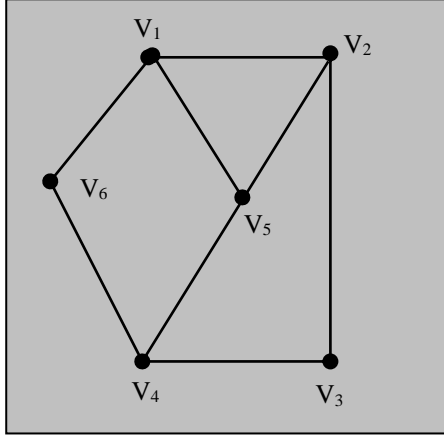
#### Teorem

**Bir grafin komşuluk matrisinin i. satır elemanlarının toplamı,  $V_i$  düğümünün derecesine eşittir.**

#### 10.2.2 Komşuluk listesi ile gösterim

Grafları bilgisayarda modellemek için farklı yöntemler de bulunmaktadır. Komşuluk matrisini oluşturmak zor olmadığı halde  $n \cdot n = n^2$  bir saklama alanı kullanmak, özellikle büyük  $n$  değerleri ve

çok sayıda 0 elemanın olması halinde verimsiz bir yol almaktadır. Bu nedenle komşuluk listesi gösterilimi daha iyi olmaktadır. Komşuluk listesinde her bir düğüm ve ona komşu olan düğümler listelenir. Şekil 10.7 de örnek bir graf ile komşuluk listesi verilmiştir.



$V_1: V_2, V_5, V_6$

$V_2: V_1, V_3, V_5$

$V_3: V_2, V_4$

$V_4: V_3, V_5, V_6$

$V_5: V_1, V_2, V_4$

$V_6: V_1, V_4$

Şekil 10.7

Şekil 10.6a'daki  $G_1$  grafının komşuluk listesi ise aşağıdaki gibi olacaktır.

$V_0: V_1, V_3$

$V_1: V_0, V_2, V_4$

$V_2: V_1, V_5$

$V_3: V_0, V_4$

$V_4: V_1, V_3, V_5, V_6$

$V_5: V_2, V_4, V_7$

$V_6: V_4, V_7$

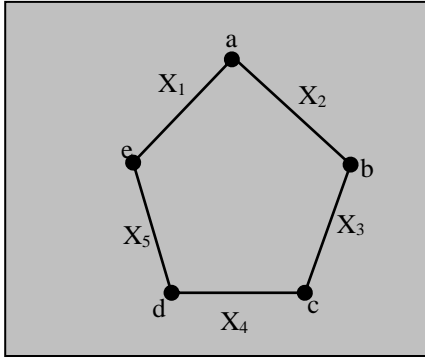
$V_7: V_5, V_6$

### 10.3 İzomorfizm

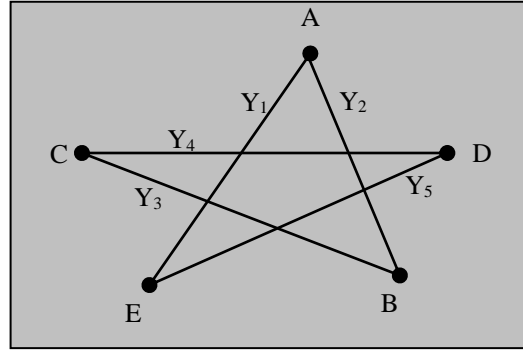
#### Tanım

$G_1$  grafının düğümlerinden  $G_2$  grafının düğümlerine bire-bir bir  $f$  fonksiyonu ve  $G_1$ 'in kenarlarından  $G_2$ 'nin kenarlarına bire-bir bir  $g$  fonksiyonu bulunuyorsa ve  $e$  kenarı  $G_1$  grafindaki  $v$  ve  $w$  düğümlerine ait ise, ancak ve ancak  $g(e)$  kenarının  $f(v)$  ve  $f(w)$ 'ya ait olması halinde  $G_1$  ve  $G_2$  grafları izomorfiktir denir.  $f$  ve  $g$  fonksiyonlarına ise  $G_1$  ve  $G_2$ 'nin izomorfizmi denir.

Şekil 10.8a ve b'de verilen grafları ele alalım.



(a)  $G_1$

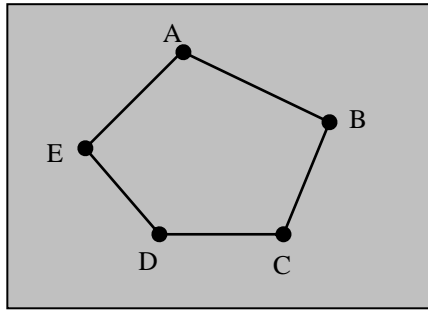


(b)  $G_2$

Şekil 10.8

Her iki grafta 5 düğüm ve 5 kenar bulunmaktadır. Şimdi yapmak istediğimiz, bu iki grafin birbirine eşdeğer olup olmadığını bulmaktır. Düğüm sayıları eşit olduğuna göre iki grafin düğümleri karşılıklı eşlersek, şöyleki ikinci (10.8b) yeniden (10.8a) daki düğüm biçiminde düğümleri yerleştirerek çizdiğimizde, birinci grafla aynı olduğunu görürüz (Şekil 10.9).

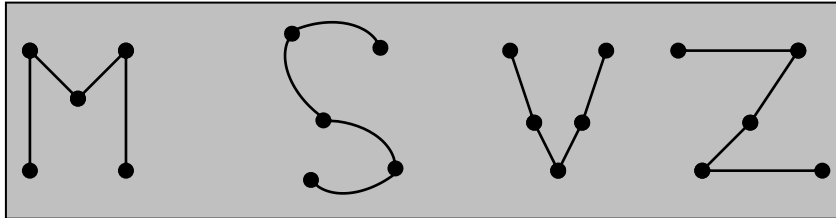
a – A  
b – B  
c – C  
d – D  
e – E



$f(a)=A$   
 $f(b)=B$   
 $f(c)=C$   
 $f(d)=D$   
 $f(e)=E$   
 $g(x_i)=y_i \quad i=1,...,5$

Şekil 10.9

Aşağıdaki grafların hepsi izomorfiktir.

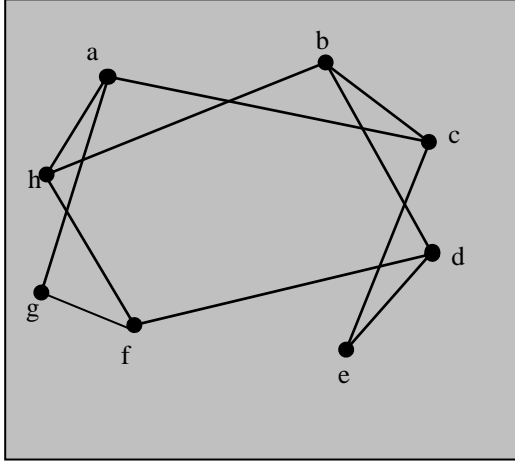


#### Teorem

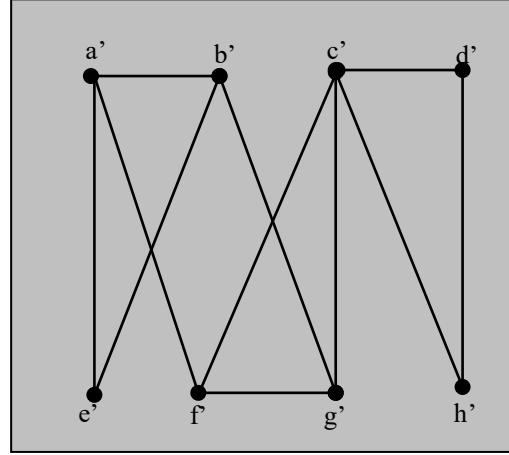
$G_1$  ve  $G_2$  grafları arasında bir  $f$  izomorfizmi varsa  $G_1$  de ki herhangi bir  $V$  düğümü için  $\deg(V) = \deg(f(v))$  olmalıdır.



Buna göre iki graf arasında izomorfizmin var olması için düğüm sayıları ile kenar sayıları eşit olmalı ve her düğümün dereceleri de eşit olmalıdır.



Şekil 10.10  $G_1$  grafi



Şekil 10.11  $G_2$  grafi

$G_1$

Düğüm sayısı = 8  
 Kenar sayısı = 10  
 $\deg(a)=3$   
 $\deg(b)=3$   
 $\deg(c)=3$   
 $\deg(d)=3$   
 $\deg(e)=2$   
 $\deg(f)=3$   
 $\deg(g)=2$   
 $\deg(h)=3$

$G_2$

Düğüm sayısı = 8  
 Kenar sayısı = 10  
 $\deg(a')=3$   
 $\deg(b')=3$   
 $\deg(c')=4$   
 $\deg(d')=2$   
 $\deg(e')=2$   
 $\deg(f')=3$   
 $\deg(g')=3$   
 $\deg(h')=2$

$G_2$  grafında  $c'$  düğümünün derecesi 4'tür. Fakat  $G_1$  grafında 4 dereceli düğüm yoktur. Bu yüzden  $G_1$  ve  $G_2$  izomorfik değildir.

#### 10.4 Yollar ve Halkalar (Paths And Circuits)

Graflar birçok durumu tanımlamak için kullanılabilir. Çoğu zaman graf üzerinde bir düğümden başlayıp bir başka düğüme kenarları izleyerek gitmek isteriz. Bazı durumlarda graf üzerinde bir

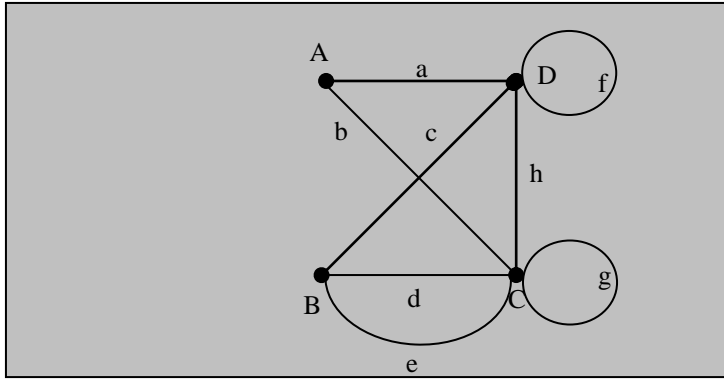
düğümünden başlayıp bütün düğümleri dolaşabileceğimiz bir yolun olup olmadığını öğrenmek isteriz. Birçok olayın graflarla temsil etmek istediğimizde başlangıçta graf tanımında yasakladığımız , bir düğümün kendisine dönen bir kenarın olması , iki düğüm arasında birden fazla kenarın olması durumlarına izin vermeliyiz. Örneğin şehirlerarası yolları grafla gösterdiğimizde iki şehir arasında iki ayrı yol olabilir. Bu durumları tanımlayabilmek için graf kavramını genişletmemiz gerekecektir.

#### Tanım

Sonlu sayıda düğüm ( $V$ ) ve kenar ( $E$ ) kümesinden ve  $E$ 'den  $\{\{u,v\} | u,v \in V, u \neq v\}$ 'ye bir  $f$  fonksiyonundan oluşan  $G(V,E)$  grafına çoklu graf denir.

Bir çoklu graf (multi graph) sonlu sayıda düğüm ve kenar kümesinden oluşur. Bir çoklu grafa iki düğüm arasında birden fazla kenar olabildiği gibi (paralel kenarlar) bir düğümünden çıkıp tekrar kendisine dönen kenarlar da (çevrim, loop) olabilir. Bu durumda graf, çoklu grafın bir özel durumu olup çoklu graf için yapılan tüm tanımlamalar graf içinde geçerli olacaktır.

Şekil 10.12'de bir çoklu graf gösterilmiştir. B ve C düğümleri arasında d,e paralel kenarları ve D düğümünde bir çevrim vardır.



Şekil 10.12

Çoklu grafa bir düğüme bağlı kenar sayısı düğümün derecesidir ve  $\deg(V)$  ile gösterilir.  $V$  düğümünde bir çevrim varsa derecesi iki olarak sayılır. Şekilde  $\deg(B) = 3$  ,  $\deg(C) = 6$  dır.

$G$  bir çoklu graf ,  $U$  ve  $V$  bu grafa ait düğümler olsun.  $U$  ve  $V$  in ayrık düğümler olması gerekli değildir. Bir U-V yolu (U-V path) ya da U dan V ye yol düğüm ve kenarların  $V_1, e_1, V_2, e_2, \dots, V_n, e_n, V_{n+1}$  biçimindeki bir alternatif dizisidir. Burada  $V_1$  düğümü  $U$  düğümü ,  $V_{n+1}$  ise  $V$  düğümüdür.  $e_i$  kenarı  $V_i$  ve  $V_{i+1}$  (  $i = 1, 2, \dots, n$ ) düğümlerini birleştiren kenardır. Bu yolun uzunluğu ( length)  $n$  ise, yol üzerindeki kenarların sayısıdır. Bir  $U$  düğümünün kendisine olan yolun uzunluğu 0 dır.

Şekil 10.12'de AaDcBdC yolu , A-C yolu olup uzunluğu 3 dür. Benzer biçimde acdg yolu da A-C yolu olup uzunluğu 4 olacaktır. AaDaA yolu 2 uzunluklu A'dan A'ya bir yoldur. BdC yolu sadece

B,C düğümleri ile tanımlanamaz. Çünkü B,D düğümleri arasında birde e kenarı vardır. Yol, bir düğümden bir başka düğüme nasıl gidebileceğimizi tarif etmektedir. Bir U-V yolunun etkin bir yol olması gerekli değildir. Yani bir yol üzerinde düğümler ve kenarlar tekrarlanabilir.

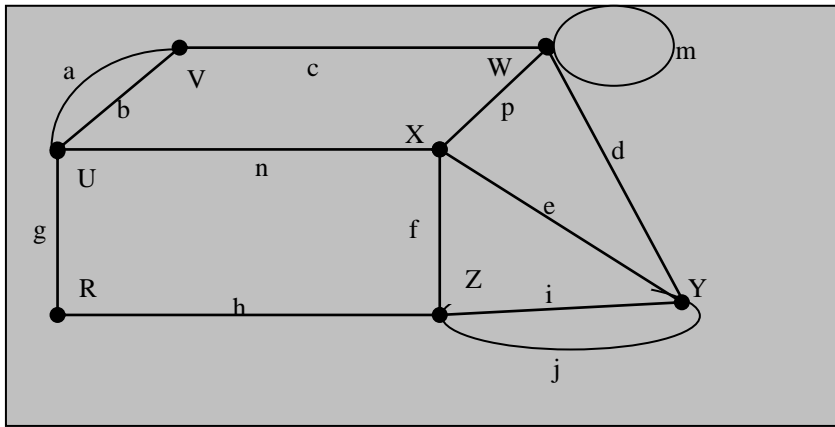
#### **Tanım**

*U dan V ye giden , ancak hiçbir düğüm ve kenarın tekrarlanmadığı yola U-V basit yolu denir.*

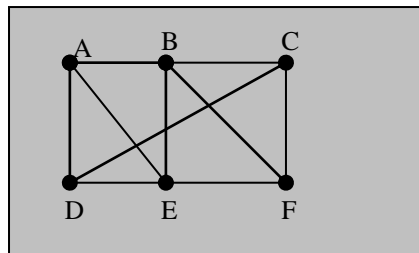
Buna göre , bir basit yolda çevrimler ve paralel kenarlar olamaz. Bu durumda basit yol , etkin bir yol olmaktadır.

#### **Örnek 10.2**

Şekil 10.13a'da acdj U- Z ye basit yoldur. acmdj yolu ise bir basit yol değildir. Çünkü W düğümü tekrarlanmaktadır. Benzer şekilde X den Z ye ei yolu basit yol olup, fij yolu, basit yol değildir. Benzer şekilde cpfien yolu bir basit yol değildir. Ancak bu yoldan fie çıkarılırsa kalan cpn yolu V'den U'ya bir basit yol olacaktır.



Şekil 10.13a



Şekil 10.13b

Şekil 10.13b'deki grafta ADCFE yolu 4 uzunluklu A'dan F'ye bir basit yoldur. Buna karşılık ABEDAB yolu AB kenarı iki kez tekrar edildiğinden basit yol değildir.

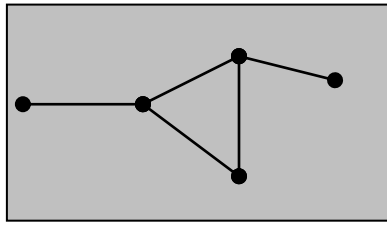
#### Teorem

**Her U -V yolu bir U-V basit yolu içerir.**

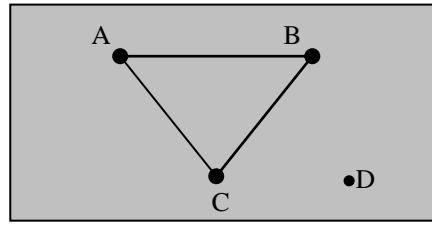
#### Tanım

Eğer bir  $G$  grafinde, grafin bütün düğümleri bir yol ile birbirine ulaşabiliyorsa  $g$  grafi bağlıdır. Bir çoklu grafta her düğüm çifti arasında bir yol var ise bu grafa bağlantılı (connected) çoklu graf denir.

Şekil 10.14a bir bağlantılı çoklu graftır. Şekil 10.14b ise D'ye giden bir yol olmadığından bağlı değildir.



(a)

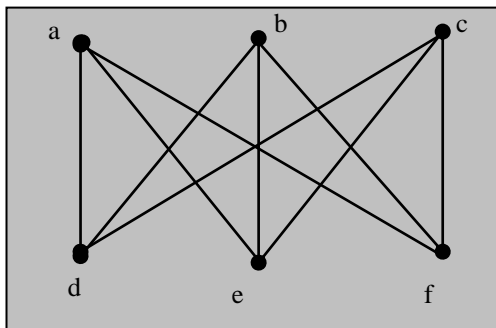


(b)

Şekil 10.14

Bir döngüde ( cycle ),  $n > 0$  olmak üzere  $V_1, e_1, V_2, e_2, \dots, V_n, e_n, V_{n+1}$  yolunda  $V_1 = V_{n+1}$  olup tüm düğüm ve kenarlar ayrıktır. Şekil 10.13b'de ABEDA bir döngü oluşturur. Benzer biçimde ABCFEA yolu da bir döngüdür. Ancak ABCFEBA yolu B düğümünden 2 kez geçildiği için bir döngü değildir.

#### Örnek 10.3

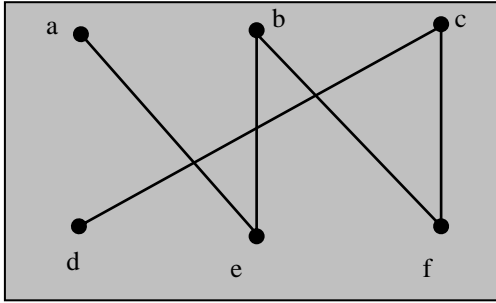


Şekil 10.15'de verilen graf için, aşağıda tanımlananların hangisi bir yoldur. Bu yolların hangisi basit yoldur. Uzunluklarını belirleyiniz.

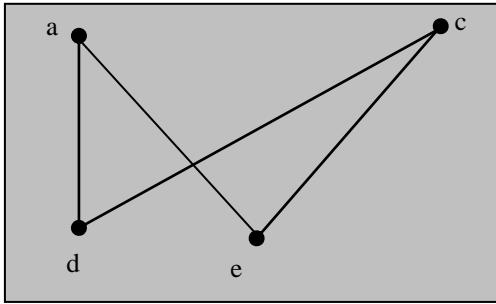
- a) aebfcd      b) aecdaec      c) aebecefb  
d) aecfbdafe

Sekil 10.15

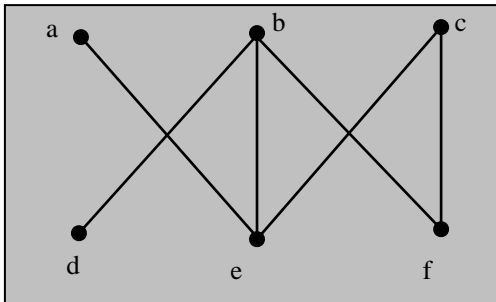
a) aebfcd yolu, a-d tanımlanan graf için bir yoldur. Bu yol üzerinde çevrim ve paralel yol bulunmadığından basit yoldur. Yolun uzunluğu 5 dir.



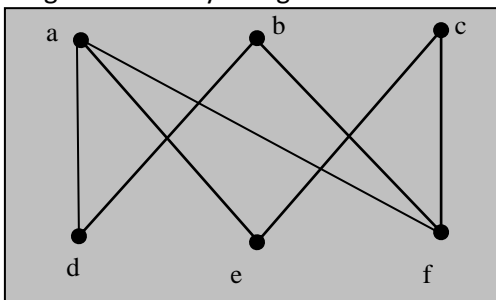
b) aecdaec yolu, a ile c arasında bir yoldur. Fakat tekrarlanan düğümler olduğundan basit yol değildir. Yolun uzunluğu 6 dir.



c) aebecfbd yolu ise a ile d arasında bir yoldur. be kenarı, b ile e düğümü tekrarlanmaktadır. Bu yüzden basit yol değildir. Yolun uzunluğu 7 dir.

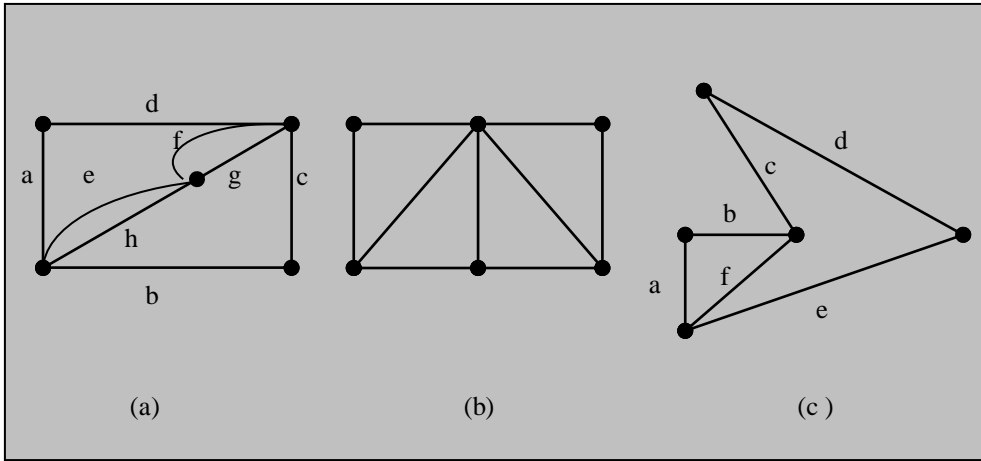


d) aecfbdafe de a ile c arasında bir yoldur. uzunluğu 8 dir. Tekrarlanan yollar ve düğümler olduğundan basit yol değildir.



## 10.5 Euler Halkası Ve Yolu

Bir haberleşme ağında, linklerin hepsinin çalışıp çalışmadığının test edilmesi gerektiğinde maliyeti düşürmek için öyle bir yol istenir ki her bir kenardan sadece bir kez geçilsin. Bu kavramla ilk uğraşan matematikçi Leonhard Euler anısına bir çoklu grafta tüm kenarlardan sadece bir kez geçilmek suretiyle oluşan , başlangıç ve bitiş düğümleri farklı olan yola Euler Yolu , başlangıç bitiş düğümleri aynı olan yola Euler Halkası ( Euler Circuit) adı verilmiştir. Şekil 10.16'daki grafları ele alalım.



Şekil 10.16

Şekil 10.16a grafiğinde, dfhegcba bir Euler Halkasıdır. Şekil 10.16b'de ise Euler yolu ve halkası yoktur. Şekil 10.16c'de ise a,b,c,d,e,f bir Euler yoludur ancak Euler halkası değildir.

### Euler Halkası Algoritması

Bu algoritma , her düğümü çift dereceli olan bağlantılı çoklu graf için bir Euler Halkası oluşturur. Algoritma aşağıdaki adımlardan oluşmaktadır.

#### Adım 1 ( başlangıç yolu )

(a) *g* grafiğinin kenar kümesini , *E* yap.

(b) Bir düğüm seç ve *C* yi bu tek düğümü içeren yol yap. ( *C* Euler Halkası olacak ! )

#### Adım 2 ( yolu genişlet)

while ( *E* boş değil)

Adım 2.1 ( genişletmek için bir başlangıç noktası seç )

(a)  $A$  yı  $C$  de  $E'$  deki bir kenara bağı olan bir düğüme set et.

(b)  $P$  yi sadece  $A$  yı içeren yol olarak ata.

Adım 2.2 (  $P$  yi  $A$  dan  $A$  ya bir yol olarak genişlet )

(a) set  $B = A$

(b) while (  $E$  de  $B$  ye bağı bir  $e$  kenarı var )

(a)  $e$  yi  $E$  den çıkar.

(b)  $B$  yi  $e$  nin diğr düğümü ile yer değıştir.

(c)  $e$  kenarını ve  $B$  düğümünü  $P$  ye ekle.

endwhile.

Adım 2.3 (  $C$  yi genişlet )

$C$  de bulunan  $A$  yerine  $P$  yi yerleştir.

endwhile

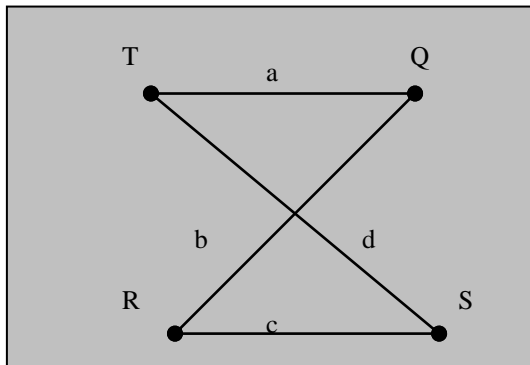
Adım 3  $C$  yolu Euler Halkasıdır.

### Euler algoritmasının karmaşıklığı ;

Algoritmada bir elemanter işlem için bir kenar ele alıyoruz. O halde her bir kenar bir kez ele alındığına göre karmaşıklık en fazla  $e$  kadar olacaktır.  $n$  düğümlü bir graf için  $e \leq \frac{1}{2} n (n-1) = \frac{1}{2} (n^2 - n)$ , burada  $C(n, 2) = \frac{1}{2} n (n-1)$  düğümler arası olan bağlantı sayısıdır. Buna göre  $n$  düğümlü bir graf için karmaşıklık  $n^2$  mertebesindedir.

### Örnek 10.4

Şekil 10.17'de verilen grafta Euler halkası var mıdır? Euler algoritmasını uygulayarak bulunuz.



### Çözüm:

T, Q, R ve S düğümlerinin dereceleri çift olduğundan bu grafta Euler halkası vardır. Algoritmayı adım adım uygulayalım.

Şekil 10.17

Adım 1

(a)  $E=\{a,b,c,d\}$  ,

(b)  $C=T$

Adım 2

While (1)

2.1 (a)  $A=T$  (b)  $P=T$

2.2 (a)  $B=T$

While (2)(b) a ve d kenarları T ye bağlı .

(a) a kenarını seç  $E=\{b,c,d\}$  (b)  $B=Q$

(c)  $P=T,a,Q$

(2)(b) b kenarı ( $B=Q$ ) ya bağlı

(a) b kenarını seç  $E=\{c,d\}$  (b)  $B=R$

(c)  $P=T,a,Q,b,R$

(3)(b) c kenarı R ye bağlı

(a) c kenarını seç  $E=\{d\}$  (b)  $B=S$

(c)  $P=T,a,Q,b,R,c,S$

(4)(b) d kenarı S ye bağlı

(a) d kenarını seç  $E=\{\emptyset\}$  (b)  $B=T$

(c)  $P=T,a,Q,b,R,c,S,d,T$

endWhile (1)

Adım 2.3

$C= T,a,Q,b,R,c,S,d,T$

End While(2)  $E=\{\emptyset\}$

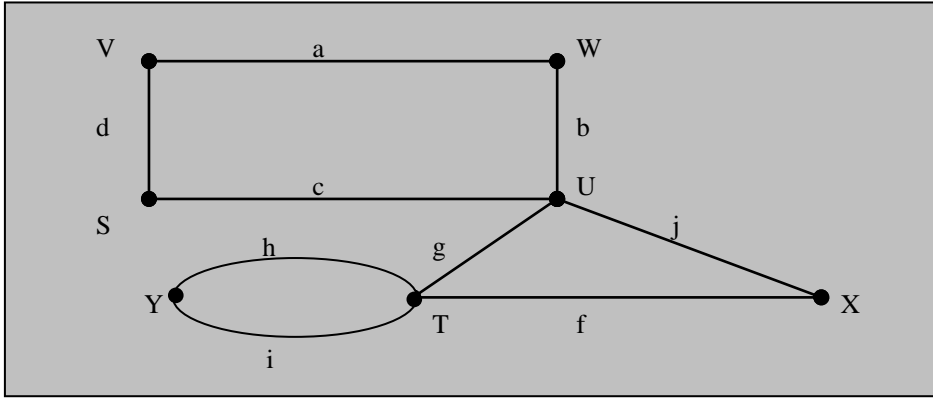
Adım 3

$C= T,a,Q,b,R,c,S,d,T$  olur.

### Örnek 10.5

Şekil 10.18' deki çoklu grafta Euler halkasını bulalım.





**Şekil 10.18**

**Çözüm:**

$E=\{a,b,c,d,g,f,j,h,i\}$   $V=\{V,W,U,S,X,T,Y\}$  her bir düğümün derecesi çift ve bağlantılı bir çoklu graf olduğuna göre Euler algoritmasını uygulayabiliriz.

Adım 1 (a)  $E=\{a,b,c,d,g,f,j,h,i\}$

(b)  $C=V$

Adım 2 While  $E=\{a,b,c,d,g,f,j,h,i\}$  boş değil

2.1 (a)  $A=V$  (b)  $P=V$

2.2 (a)  $B=V$

While  $E'$ 'da  $B=V'$ 'ye bağlı  $a,d$  kenarları var

(a)  $a'$ 'yı seç  $E=\{b,c,d,g,f,j,h,i\}$

(b)  $B=W$  (c)  $P=V,a,W$

While  $E'$ 'da  $B=W'$ 'ye bağlı  $b$  kenarları var

(a)  $b'$ 'yi seç  $E=\{c,d,g,f,j,h,i\}$

(b)  $B=U$  (c)  $P=V,a,W,b,U$

While  $E'$ 'da  $B=U'$ 'ye bağlı  $c,g,j$  kenarları var

(a)  $c'$ 'yi seç  $E=\{d,g,f,j,h,i\}$

(b)  $B=S$  (c)  $P=V,a,W,b,U,c,S$

While  $E'$ 'da  $B=S'$ 'ye bağlı  $d$  kenarları var

(a)  $d'$ 'yi seç  $E=\{g,f,j,h,i\}$

(b) B=V (c) P=V,a,W,b,U,c,S,d,V

End while (2) E'da V ye bağı kenar yok

Adım 2.3 C= V,a,W,b,U,c,S,d,V

Adım 2 While 1 E={g,f,j,h,i} boş değı

Adım 2.1 (a) A=U ε'da U 'ya bağı kenar var

(b) P=U

Adım 2.2 (a) B=U

While 2 E'da B=U'ya bağı g,j kenarları var

(a) g'yi seç E={f,j,h,i}

(b) B=T (c) P=U,g,T

While 2 E'da B=T'ya bağı f,h,i kenarları var

(a) f'yi seç E={j,h,i}

(b) B=X (c) P=U,g,T,f,X

While 2 E'da B=X'e bağı j kenarları var

(a) j'yi seç E={h,i}

(b) B=U (c) P= U,g,T,f,X,j,U

End while (2) E'da U ya bağı kenar yok

Adım 2.3 C= V,a,W,b,U,g,T,f,X,j,U,c,S,d,V

Adım 2 While (1) E={h,i} boş değı

Adım 2.1 (a) A=T E'da T 'ye bağı kenar var

(b) P=T

Adım 2.2 (a) B=T

While 2 E'da B=T'ye bağı h,i kenarları var

(a) h'yi seç E={i}

(b) B=Y (c) P=T,h,Y

While 2 E'da B=Y'ye bağı i kenarları var

(a) i'yi seç E={∅}

(b) B=T (c) P=T,h,Y,i,T

End while (2) E'da T ya bağı kenar yok

Adım 2.3 C= V,a,W,b,U,g,T,h,Y,i,T,f,X,j,U,c,S,d,V

EndWhile (1) E boş

Adım 3

C= V,a,W,b,U,g,T,h,Y,i,T,f,X,j,U,c,S,d,V

### Teorem

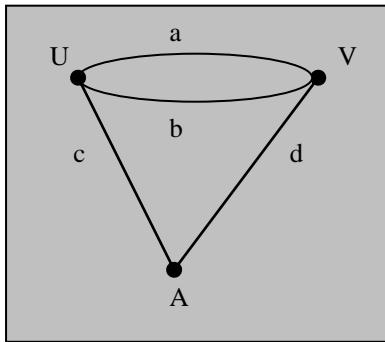
**G bir bağlantılı çoklu graf olsun. Bu durumda eğer her düğüm çift dereceli ise G'nin bir Euler halkası mevcuttur. Buna ek olarak ,eğer G' nin iki düğümü tek dereceli ve diğer bütün düğümleri çift dereceli ise bir Euler Yolu vardır. Bu durumda Euler yolu bu tek dereceli düğümlerin birinde başlar ve diğerinde sona erer.**

Böyle bir graf için Euler Yolunu bulmak istersek önceki algoritmada yapılacak değişiklik şöyle olacaktır;

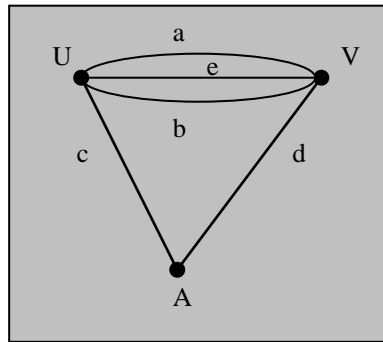
- Tek dereceli iki düğüm arasında bir kenar ekle
- Elde edilen grafa Euler halkası algoritması uygula (Bu kenarı eklediğin düğümlerden birini başlangıç düğümü seç)
- Elde ettiğin Euler halkalarından eklediğin kenarı çıkar.

### Örnek 10.6

Şekil 10.19'daki grafi ele alalım. U ve V düğümlerinin dereceleri 3, geri kalan A düğümü ise 2. derecedendir. O halde bir Euler yolu vardır. Bunun için U,V düğümleri arasında bir e kenarı ekleyelim. Euler halkasını bulalım. U dan başlarsak C=e,a,d,c,b Euler halkasıdır. Bundan e' yi çıkarırsak, a,d,c,b Euler Yolu olacaktır.



Şekil 10.19



Şekil 10.20

## Kaynaklar

- F.Selçuk,N.Yurtay,N.Yumuşak,Ayrık İşlemsel Yapılar, Sakarya Kitabevi,2005.
- İ.Kara, Olasılık, Bilim Teknik Yayınevi, Eskişehir, 2000.
- “Soyut Matematik”, S.Aktaş,H.Hacısalıhoğlu,Z.Özel,A.Sabuncuoğlu, Gazi Üniv.Yayınları,1984,Ankara.
- “Applied Combinatorics”, Alan Tucker, John Wiley&Sons Inc, 1994.
- “Applications of Discrete Mathematics”, John G. Michaels, Kenneth H. Rosen, McGraw-Hill International Edition, 1991.
- “Discrete Mathematics”, Paul F. Dierker and William L.Voxman, Harcourt Brace Jovanovich International Edition, 1986.
- “Discrete Mathematic and Its Applications”, Kenneth H. Rosen, McGraw-Hill International Editions, 5<sup>th</sup> Edition, 1999.
- “Discrete Mathematics”, Richard Johnson Baugh, Prentice Hall, Fifth Edition, 2001.
- “Discrete Mathematics with Graph Theory” , Edgar G. Goodaire, Michael M. Parmenter, Prentice Hall, 2nd Edition, 2001.
- “Discrete Mathematics Using a Computer”, Cordelia Hall and John O'Donnell, Springer, 2000.
- “Discrete Mathematics with Combinatorics”, James A. Anderson, Prentice Hall, 2000.
- “Discrete and Combinatorial Mathematics”, Ralph P. Grimaldi, Addison-Wesley, 1998.
- “Discrete Mathematics”, John A. Dossey, Albert D. Otto, Lawrence E. Spence, C. Vanden Eynden, Pearson Addison Wesley; 4th edition 2001.
- “Essence of Discrete Mathematics”, Neville Dean, Prentice Hall PTR, 1st Edition, 1996.
- “Mathematics:A Discrete Introduction”, Edvard R. Schneiderman, Brooks Cole; 1st edition, 2000.
- “Mathematics for Computer Science”, A.Arnold and I.Guessarian, Prentice Hall, 1996.
- “Theory and Problems of Discrete Mathematics”, Seymour Lipschuts, Marc. L. Lipson, Shaum's Outline Series, McGraw-Hill Book Company, 1997.
- “2000 Solved Problems in Discrete Mathematics”, Seymour Lipschuts, McGraw- Hill Trade, 1991.