

SAYISAL ANALİZ

Yrd.Doç.Dr. Abdullah SEVİN

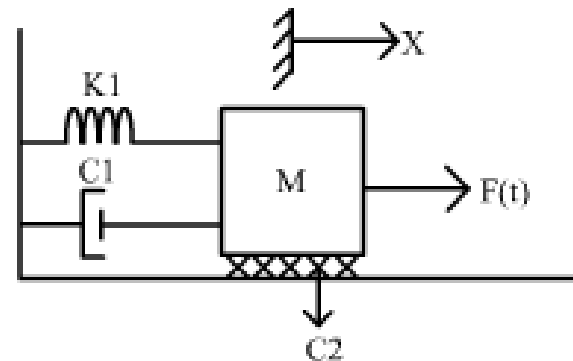
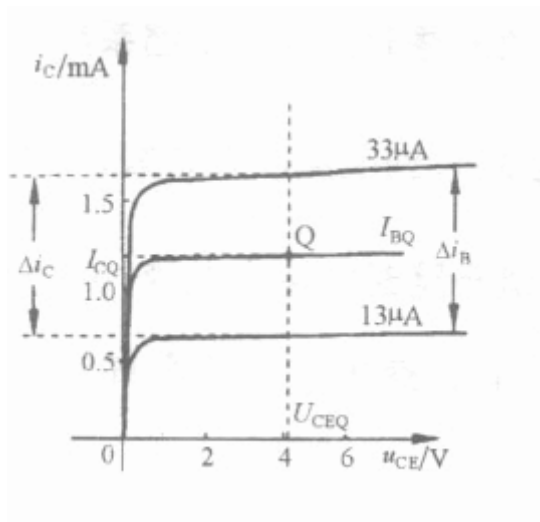


SAYISAL ANALİZ

DOĞRUSAL OLMAYAN DENKLEM SİSTEMLERİ (Systems of Non-Linear Equations)

Doğrusal Olmayan Denklemler Sistemleri

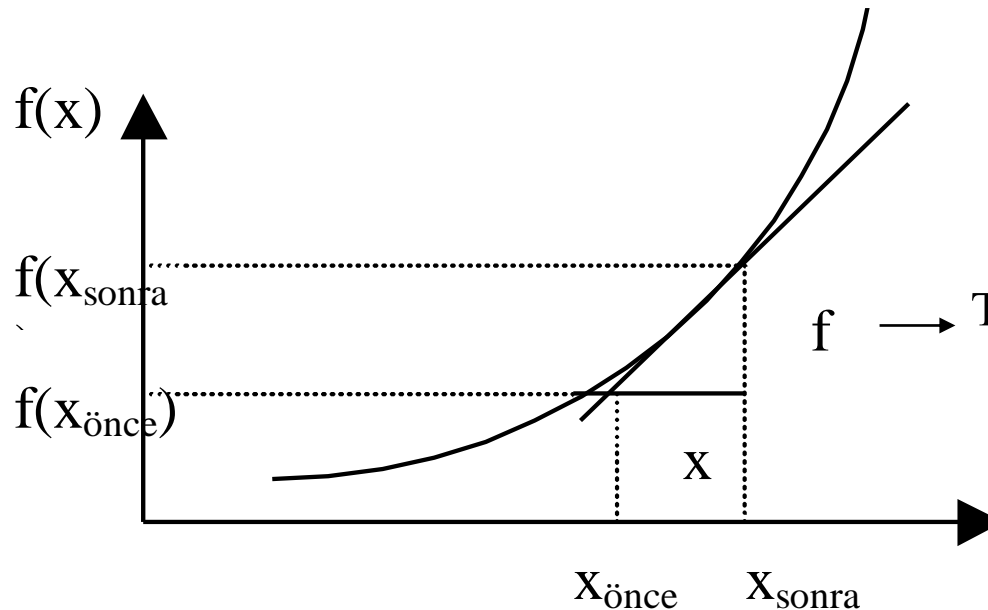
- ❑ Fiziksel sistemlerin büyük bir çoğunluğunda, sisteme ait değişken veya değişkenler **belirli bir çalışma bölgesi civarında/belirli bir noktada** doğrusal davranış gösterir.
- ❑ Ancak değişkenlerin değeri bu bölgenin dışına çıktığında doğrusal olmayan davranış kendini göstermeye başlar.



Hatırlatma: Noktasal Türev

Noktasal Türev: $f'(x) = \frac{\partial f(x)}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$

Teğetin eğimi = $\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_{\text{sonra}}) - f(x_{\text{önce}})}{x_{\text{sonra}} - x_{\text{önce}}}$



Grafikten

$$x_{\text{sonra}} = x_{\text{önce}} + \Delta x$$

ve $f(x_{\text{sonra}}) = f(x_{\text{önce}}) + \Delta f$

$f \rightarrow$ Teğetin eğimi * Δx

$$\Delta f = \frac{\partial f(x_{\text{önce}})}{\partial x} \Delta x$$

$$f(x_{\text{sonra}}) = f(x_{\text{önce}}) + \frac{\partial f(x_{\text{önce}})}{\partial x} \Delta x$$

Doğrusal Olmayan Denklem Sistemleri

- ❑ İki bilinmeyenli bir doğrusal olmayan denklem sistemi,

$$f(x_1, x_2) = 0$$

$$g(x_1, x_2) = 0$$

- ❑ Fonksiyonlar, x_1, x_2 civarında 1. kuvvetine kadar Taylor serisine açılırsa,

$$f(x_{1\text{sonra}}, x_{2\text{sonra}}) = f(x_{1\text{önce}}, x_{2\text{önce}}) + \frac{\partial f(x_{1\text{önce}}, x_{2\text{önce}})}{\partial x_1} \Delta x_1 + \frac{\partial f(x_{1\text{önce}}, x_{2\text{önce}})}{\partial x_2} \Delta x_2 = 0$$

$$g(x_{1\text{sonra}}, x_{2\text{sonra}}) = g(x_{1\text{önce}}, x_{2\text{önce}}) + \frac{\partial g(x_{1\text{önce}}, x_{2\text{önce}})}{\partial x_1} \Delta x_1 + \frac{\partial g(x_{1\text{önce}}, x_{2\text{önce}})}{\partial x_2} \Delta x_2 = 0$$

- ❑ Doğrusal olmayan denklem lineerleştirilir

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f(x_{1\text{önce}}, x_{2\text{önce}})}{\partial x_1} & \frac{\partial f(x_{1\text{önce}}, x_{2\text{önce}})}{\partial x_2} \\ \frac{\partial g(x_{1\text{önce}}, x_{2\text{önce}})}{\partial x_1} & \frac{\partial g(x_{1\text{önce}}, x_{2\text{önce}})}{\partial x_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} f(x_{1\text{önce}}, x_{2\text{önce}}) \\ g(x_{1\text{önce}}, x_{2\text{önce}}) \end{bmatrix}$$

Doğrusal Olmayan Denklem Sistemleri

- ❑ **Örnek:** Aşağıda verilen nonlinear denklem sistemini, $x_0 = 0.6$ ve $y_0 = 1.5$ başlangıç değerlerinden başlayarak yaklaşık mutlak hata $\varepsilon_s \leq 0.09$ sınırlamasını sağlayıncaya kadar çözünüz.

$$f(x, y) = x^2 + y - 3 = 0$$

$$g(x, y) = x + y^2 - 5 = 0$$

- ❑ **Denklem sistemi lineerleştirilir**

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} & \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \\ \frac{\partial g(x, y)}{\partial x} & \frac{\partial g(x, y)}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} f(x, y) \\ g(x, y) \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 1$$

$$\frac{\partial g}{\partial x} = 1$$

$$\frac{\partial g}{\partial y} = 2y$$

Doğrusal Olmayan Denklem Sistemleri

$$\begin{bmatrix} 2x & 1 \\ 1 & 2y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} x^2 + y - 3 \\ x + y^2 - 5 \end{bmatrix}$$

□ 1. iterasyon: $x_0 = 0.6$ ve $y_0 = 1.5$

$$\begin{bmatrix} 1,2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} -1,14 \\ -2,15 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} \Delta x &= 0.4885 \\ \Delta y &= 0.5538 \end{aligned}$$

$$x_1 = x_0 + \Delta x = 0.6 + 0.4885 = 1.0885$$

$$y_1 = y_0 + \Delta y = 1.5 + 0.5538 = 2.0538$$

$$\epsilon_x = \left| \frac{1.0885 - 0.6}{1.0885} \right| = 0.448$$

$$\epsilon_y = \left| \frac{2.0538 - 1.5}{2.0538} \right| = 0.2697$$

$$|\epsilon_x|, |\epsilon_y| > \epsilon_s$$

Doğrusal Olmayan Denklem Sistemleri

$$\begin{bmatrix} 2x & 1 \\ 1 & 2y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} x^2 + y - 3 \\ x + y^2 - 5 \end{bmatrix}$$

□ 2. iterasyon: $x_1 = 1.0885$ ve $y_1 = 2.0538$

$$\begin{bmatrix} 2,177 & 1 \\ 1 & 4,1076 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 0,2386 \\ 0,3065 \end{bmatrix} \Rightarrow \Delta x = -0.0848 \text{ ve } \Delta y = -0.0540$$

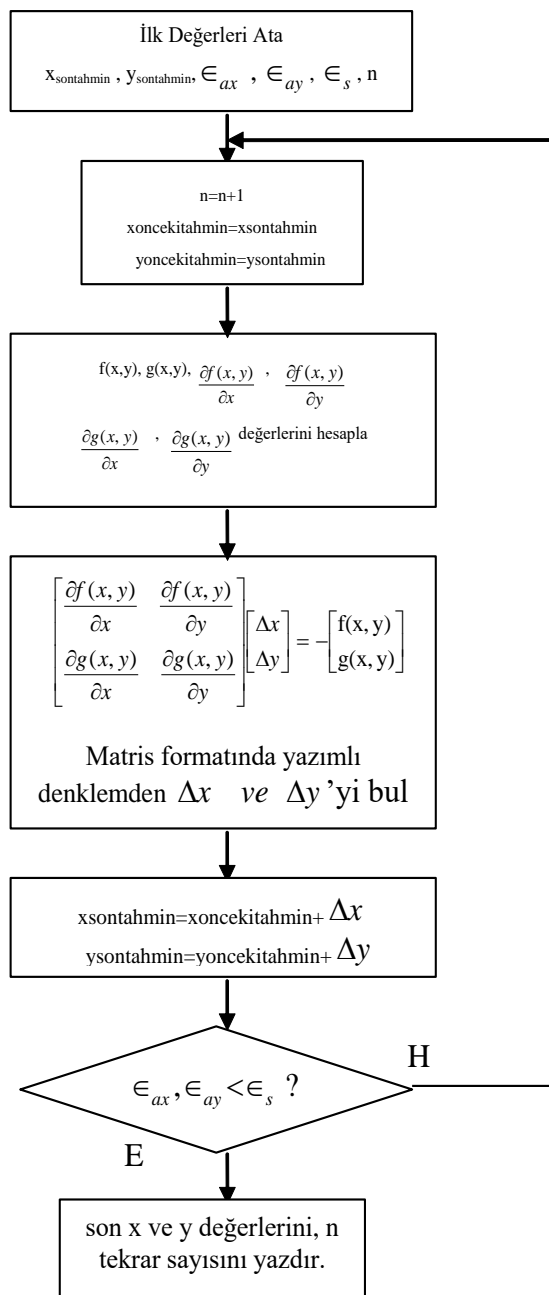
$$x_2 = x_1 + \Delta x = 1.0885 + (-0.0848) = 1.0037$$

$$y_2 = y_1 + \Delta y = 2.0538 + (-0.0540) = 1.9998$$

$$\epsilon_x = \left| \frac{1.0037 - 1.0885}{1.0037} \right| = 0.0845$$

$$\epsilon_y = \left| \frac{1.9998 - 2.0538}{1.9998} \right| = 0.0270$$

$$|\epsilon_x|, |\epsilon_y| < \epsilon_s$$



Algoritması ve Matlab Kodu

```
% f(x,y) = x^3+y^4-2
% g(x,y) = x^2+y^3+4
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
```

```
xo=-2;yo=2;e=0.00001;n=0;Nmax=100;
while n<Nmax
    fxy=xo^3+yo^4-2;
    gxy=xo^2+yo^3+4;
    fxyx=3*xo^2;fxyy=4*yo^3;
    gxyx=2*xo;gxyy=3*yo^2;
    d_xy=inv([fxyx fxyy;gxyx gxyy])*[-fxy;-gxy];
    xs=xo+d_xy(1);
    ys=yo+d_xy(2);
    ex=(xs-xo)/xs;
    ey=(ys-yo)/ys;
    if max(abs([ex ey]))<e
        x=xs
        y=ys
        es=max(abs([ex ey]))
        n
        n=Nmax;
    else
        xo=xs;
        yo=ys;
        n=n+1;
    end
end
```

Doğrusal Olmayan Denklem Sistemleri

- ❑ **Örnek:** $f(x,y) = x^2 + 4y^2 - 9 = 0$ ve $g(x,y) = 18y - 14x^2 + 45 = 0$ doğrusal olmayan denklem sisteminin köklerine $(x_0, y_0) = (1, -1)$ değerlerinden başlayarak **2 iterasyon** yaklaşınız.



- ❑ $f(x,y) = x^2 + y^2 = 9$ ve $g(x,y) = e^x + 5x - y = 0$ doğrusal olmayan denklem sisteminin köklerine $(x_0, y_0) = (0.5, 3)$ değerlerinden başlayarak **2 iterasyon** yaklaşınız.

Ödev Hakkında Bilgilendirme:

- ❑ Ödev çıktı olarak teslim edilecektir.
- ❑ Ödev hem program dosyasını (MATLAB) hem de el ile çözümünü içerecektir.

KAYNAKLAR

- Serhat YILMAZ, “*Bilgisayar İle Sayısal Çözümleme*”, Kocaeli Üniv. Yayınları, No:168, Kocaeli, 2005.
- Steven C. Chapra, Raymond P. Canale (Çev. H. Heperkan ve U. Kesgin), “*Yazılım ve Programlama Uygulamalarıyla Mühendisler İçin Sayısal Yöntemler*”, Literatür Yayıncılık.
- İlyas ÇANKAYA, Devrim AKGÜN, Sezgin KAÇAR “*Mühendislik Uygulamaları İçin MATLAB*”, Seçkin Yayıncılık