SAYISAL ANALİZ

Yrd. Doç.Dr. Abdullah SEVİN

SAYISAL ANALİZ

EĞRİ UYDURMA

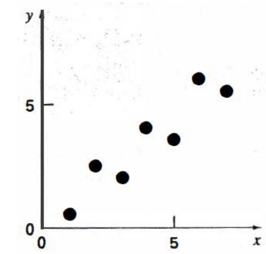
(Curve Fitting)

İÇİNDEKİLER

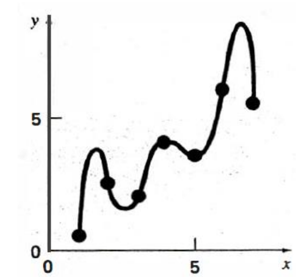
Eğri Uydurma (Curve Fitting)

- Çoğu mühendislik probleminin çözümünde
  - Bağımsız değişkenlerden oluşan fonksiyonlara ya da
  - x_i, y_i noktalarına verilmiş veri (değer) gruplarına ihtiyaç duyulur.
- Eldeki verilerin hatalı olduğu durumlarda, ara değer tahmininde (interpolasyon), polinom interpolasyonu iyi sonuçlar vermez.
- Sayısal değerler ile ortaya konan bir fonksiyona ait en doğru eğrinin elde edilebilmesi o fonksiyona ait en uygun fonksiyon ifadesinin tanımlanmasına bağlıdır.
- İhtiyaç duyulan bu verileri sağlayacak polinomların katsayılarını bulmak için çeşitli yöntemler geliştirilmiştir.
  - En sık kullanılan yöntem eğri uydurmadır.
  - Fonksiyonlar polinomlara eğri uydurma için kullanılır.

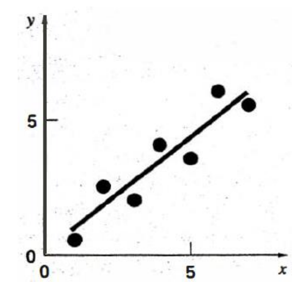
$$P_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$$



Hatalı veriler

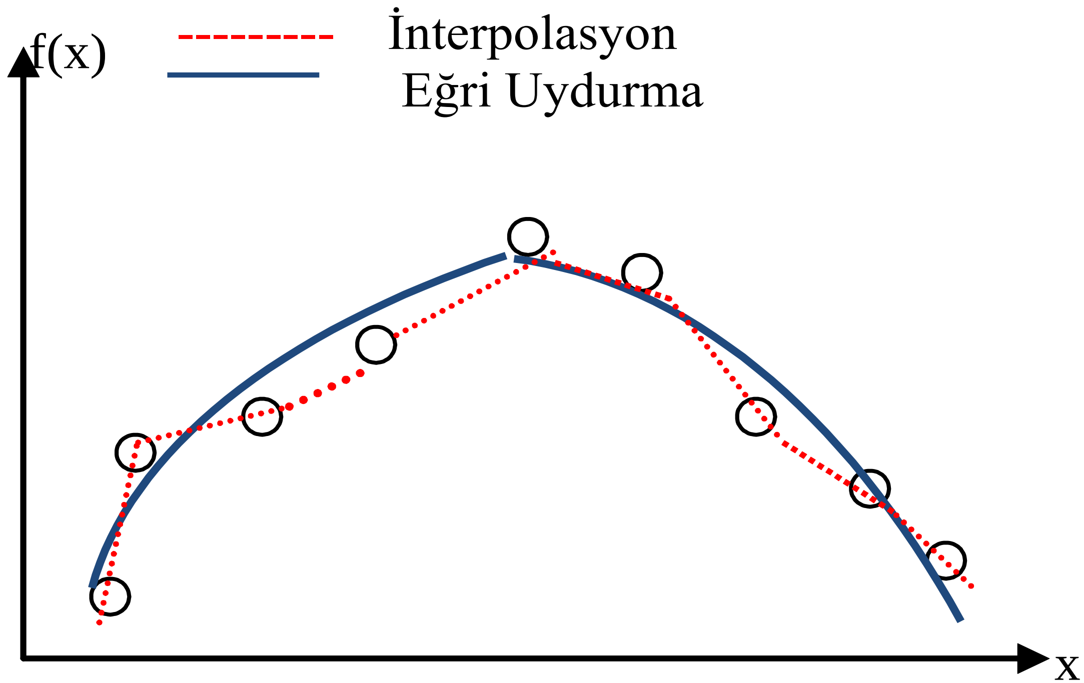


Veri aralığı dışında salınan polinom



Eğri Uydurma

Eğri Uydurma ile Ara Değer Bulma Arasındaki İlişki



Eğri Uydurma (Curve Fitting)

- **En Küçük Kareler Yöntemi**
  - Yaklaşık olarak elde edilen (uydurulan) fonksiyon değerleri ile ölçülerek elde edilen gerçek fonksiyon değerleri arasındaki farkların kareleri toplamı minimum yapılmaya çalışılır.
  - Hedef, bilinen ölçüm sonuçlarına ait değerlere mesafe olarak en az hatalı eğriyi veren fonksiyon ifadesini elde etmektir.

- **Örnek:**
  - $y_i \Rightarrow$ bilinen sonuçlar
  - $f(x_i) \Rightarrow$ işlem sonucunda elde edilecek fonksiyon
  - Bilinen n nokta için;

$$\sum_{i=1}^{n}\left[f(x_i)-y_i\right]^2$$

formülünün minimum yapılmasını sağlayan $f(x_i)$ fonksiyon katsayılarını elde etme işlemidir.

  - İşlem sonucunda elde edilecek olan katsayıların dizilişi fonksiyona ait polinom formun derecesini belirler.

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$$

Eğri Uydurma (Curve Fitting)

- En Küçük Kareler Yöntemi
- **Örnek:** Bir doğru denklemi (birinci dereceden polinom form)

$f(x) = a_0 + a_1 x$

- Burada amaç, en küçük kareler yöntemi ile a_0 ve a_1 katsayılarını bulmaktır.

- Katsayıların adedi (örnekte 2) en küçük kareler yönteminde kullanılacak matrislerin satır sayısını belirler.

$$\sum_{i=1}^{n}\left[f(x_i)-y_i\right]^2=\sum_{i=1}^{n}\left[a_0+a_1x_i-y_i\right]^2$$

- Burada elde edilecek olan farkların karelerinin toplamının a_0 ve a_1 katsayılarına göre minimum olmalıdır.

- Bunun için yukarıda eşitliğin a_0 ve a_1 katsayılarına göre türevleri alınarak sıfıra eşitlenir.

Eğri Uydurma (Curve Fitting)

- Eşitliğin a_0 ve a_1 katsayılarına göre türevleri alınarak sıfıra eşitlenir.

$$\frac{d\sum_{i=1}^{n}[a_0 + a_1 x_i - y_i]^2}{a_0} = 2\sum_{i=1}^{n}[a_0 + a_1 x_i - y_i] = 0$$

$$\frac{d\sum_{i=1}^{n}[a_0 + a_1 x_i - y_i]^2}{a_1} = 2\sum_{i=1}^{n}[a_0 + a_1 x_i - y_i]x_i = 0$$

- İşlemler düzenlenirse,

$$a_0 n + a_1 \sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} y_i$$

$$a_0 \sum_{i=1}^{n} x_i + a_1 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} n & \sum_{i=1}^{n} x_i \\ \sum_{i=1}^{n} x_i & \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \end{bmatrix} x \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n} y_i \\ \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \end{bmatrix}$$

Eğri Uydurma (Curve Fitting)

- **Örnek:** Aşağıdaki tablo da verilen sayısal değerleri kullanarak en küçük kareler metodu ile $f(x) = a_0 + a_1 x$ fonksiyonunu elde ediniz?

Tablo: x ve y'ye ait sayısal değerler

x	-2	0	1	2	4
y	-3	1	3	5	9

- **Çözüm:**

  - Üretilmesi istenen polinomun derecesi 1
  - Bulunacak katsayılar a_0 ve a_1 olduğundan en küçük kareler yöntemindeki eşitliklerde kullanılacak matrislerin satır sayısı 2 olacak.

Tablo: x ve y değerlerine göre gerekli hesaplama sonuçları

	x	y	x_i^2	$x_i y_i$
	-2	-3	4	6
	0	1	0	0
	1	3	1	3
	2	5	4	10
	4	9	16	36
Toplam	5	15	25	55

$$\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n & \sum_{i=1}^{n} x_i \\ \sum_{i=1}^{n} x_i & \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \end{bmatrix}^{-1} x \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n} y_i \\ \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 5 \\ 5 & 25 \end{bmatrix}^{-1} x \begin{bmatrix} 15 \\ 55 \end{bmatrix}$$

Eğri Uydurma (Curve Fitting)

Örnek (Devam):

$$A=\begin{bmatrix}5 & 5\\ 5 & 25\end{bmatrix} \Rightarrow \quad ek(A)=\begin{bmatrix}25 & -5\\ -5 & 5\end{bmatrix} \Rightarrow \quad A^{-1}=\frac{1}{100}\begin{bmatrix}25 & -5\\ -5 & 5\end{bmatrix}$$

$$|A|=\begin{vmatrix}5 & 5\\ 5 & 25\end{vmatrix}=100$$

$$\begin{bmatrix}a_0\\ a_1\end{bmatrix}=\frac{1}{100}\begin{bmatrix}25 & -5\\ -5 & 5\end{bmatrix}x\begin{bmatrix}15\\ 55\end{bmatrix}=\frac{1}{100}\begin{bmatrix}100\\ 200\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ 2\end{bmatrix}$$

$$f(x)=a_0+a_1x=1+2x$$

Eğri Uydurma (Curve Fitting)

- **Örnek:** **Aşağıda verilen tablodaki sayısal değerleri kullanarak en küçük kareler metodu ile $f(x) = a_0 + a_1x$ fonksiyonunu elde ediniz.**

x	-1	1	2	3
y	-2	0	2	5

Eğri Uydurma (Curve Fitting)

- **<u>En Küçük Kareler Yöntemi</u>**
- **Eğer elde edilmesi gereken fonksiyonun karşılığı birinci dereceden değil de ikinci dereceden olsaydı bu durumda fonksiyon;**

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$$

- **Burada amaç, en küçük kareler yöntemi ile a_0 , a_1 ve a_2 katsayılarını bulmaktır.**
- **Katsayıların adedi (örnekte 3) en küçük kareler yönteminde kullanılacak matrislerin satır sayısını belirler.**

$$\begin{bmatrix} n & \sum_{i=1}^{n} x_i & \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \\ \sum_{i=1}^{n} x_i & \sum_{i=1}^{n} x_i^2 & \sum_{i=1}^{n} x_i^3 \\ \sum_{i=1}^{n} x_i^2 & \sum_{i=1}^{n} x_i^3 & \sum_{i=1}^{n} x_i^4 \end{bmatrix} x \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n} y_i \\ \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \\ \sum_{i=1}^{n} x_i^2 y_i \end{bmatrix}$$

MATLAB İle Eğri Uydurma

- **polyfit (x, y, n)**
  - n: üretilecek olan polinom formun derecesini tanımlar
  - y: bilinen Y değerlerinden oluşan **sütun vektörü**
  - x: bilinen X değerlerinden oluşan **sütun vektörü**

- **Örnek:** Önceki sorudaki işlemi MATLAB'ta polyfit komutu ile çözünüz?

```
>> X = [-2 0 1 2 4];

>> Y = [-3 1 3 5 9];

>> p=polyfit(X,Y,1)

p =

     2.0000    1.0000
```

Eğri Uydurma (Curve Fitting)

En Küçük Kareler Yöntemi

- Regresyon Katsayısı
  - Eğri uydurma da kullanılacak olan polinom forma sahip fonksiyonun **doğruluğu** r ile tanımlanan regresyon katsayısı ile belirlenir.
  - Regresyon katsayısının $0 < r \le 1$ aralığında değer alması istenir.
    - $r \approx 0 \Rightarrow$ uydurulan fonksiyon iyi değildir.
    - $r \approx 1 \Rightarrow$ uydurulan fonksiyon iyidir.

- Regresyon katsayısının hesabı için ilk olarak ölçüm sonucu elde edilen sayısal değerlerin aritmetik ortalaması bulunur.

$$\bar{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i$$

- Sonra ölçüm değerleri ve uydurulan fonksiyona ait hata hesabı için şu işlemler yapılır.

$$\delta_y = \sum_{i=1}^{n}\left[y_i - \bar{y}\right]^2 \quad \text{ve} \quad \delta_f = \sum_{i=1}^{n}\left[f(x_i) - \bar{y}\right]^2$$

$$r = \sqrt{\frac{\delta_f}{\delta_y}}$$

ÖDEV

- Tablo da verilen sayısal değerleri kullanarak en küçük kareler metodu aşağıda istenenleri bulunuz.

Tablo: x ve y'ye ait sayısal değerler

x	0	2	5	7	9
y	2	6	8	11	15

❶ $f(x) = a_0 + a_1x$ **fonksiyonunu elde ediniz. Regresyon katsayısını hesaplayınız.**

❷ $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$ **fonksiyonunu elde ediniz. Regresyon katsayısını hesaplayınız.**

Not: Ödevi hem el ile hem de matlab ile çözünüz. Matlab çözümünde polyfit komutunun kullanımının yanısıra grafik çizimi de gerçekleştiriniz. (Kaynakçadaki İlyas Beyin kitabından yararlanabilirsiniz)

KAYNAKLAR

- **İlyas ÇANKAYA, Devrim AKGÜN, Sezgin KAÇAR "*Mühendislik Uygulamaları İçin MATLAB*", Seçkin Yayıncılık**
- **Steven C. Chapra, Raymond P. Canale (Çev. H. Heperkan ve U. Kesgin), "*Yazılım ve Programlama Uygulamalarıyla Mühendisler İçin Sayısal Yöntemler*", Literatür Yayıncılık.**
- **Serhat YILMAZ, "*Bilgisayar İle Sayısal Çözümleme*", Kocaeli Üniv. Yayınları, No:168, Kocaeli, 2005.**
- **Yüksel YURTAY, Sayısal Analiz Ders Notları, Sakarya Üniversitesi**