

# Contents

<b>1</b>	<b>Theory</b>	<b>4</b>
1.1	Begriffe und Klassifikation . . . . .	4
1.1.1	Ordnung . . . . .	4
1.1.2	Laplace-Operator . . . . .	4
1.1.3	Umwandlung in System niedriger Ordnung . . . . .	4
1.1.4	Notationen einer PDGL, Gebiet $\Omega$ . . . . .	4
1.1.5	Klassifikation einer PDGL . . . . .	5
1.2	Methode Charakteristiken . . . . .	5
1.3	Methode Separation . . . . .	6
1.4	Hamilton-Jacobi Theorie . . . . .	7
1.5	Transformationen . . . . .	8
1.5.1	Fourierreihe . . . . .	8
1.5.2	Beispiel: Schwingende Saite . . . . .	8
1.5.3	Inhomogene Wellengleichung . . . . .	9
1.5.4	Laplace-Transformation . . . . .	9
1.5.5	Beispiel: Wärmeleitung . . . . .	9
1.6	PDGL 2.Ordnung . . . . .	10
1.6.1	Klassifikation . . . . .	10
1.7	Elliptische PDGL . . . . .	10
1.7.1	Maximumprinzip . . . . .	10
1.7.2	Beispiel (Übungslösungen) . . . . .	10
1.7.3	Greensche Funktion . . . . .	11
1.7.4	Mittelwerteigenschaft harmonischer Funktionen . . . . .	11
1.8	Hyperbolische PDGL . . . . .	11
1.8.1	Streifen/Charakteristiken . . . . .	11
<b>2</b>	<b>Numerik</b>	<b>12</b>
2.1	Diskretisierung . . . . .	12
2.1.1	1.Ableitung . . . . .	12
2.1.2	2.Ableitung . . . . .	12
2.2	FDM . . . . .	12
2.2.1	Grundgleichung: $-u''(x) = f(x)$ . . . . .	12
2.2.2	Grundgleichung: $T''(x) - hT(x) = T_A$ . . . . .	12
2.2.3	Beispiel Hausübung 7 . . . . .	12
2.3	Konvergenz . . . . .	12
2.4	Konsistenz . . . . .	13
2.4.1	Residuum . . . . .	13
2.4.2	Taylor . . . . .	13
2.4.3	Vorwärt/Rückwärtsdifferenz . . . . .	13
2.4.4	Zentraldifferenz . . . . .	13
2.4.5	2.Ableitung . . . . .	13
2.5	Stabilität . . . . .	13
2.6	FDM für elliptisch PDGL (Poisson: $-\Delta u = f$ ) . . . . .	14
2.6.1	Irreguläre Gitter (für den Rand) . . . . .	14
2.6.2	Neumann Rand . . . . .	14
2.7	FDM für parabolische PDGL . . . . .	14
2.7.1	Explizites Verfahren (Richardson-Verfahren) . . . . .	15
2.7.2	Implizites Verfahren . . . . .	15
2.7.3	Crank Nicolson -Verfahren (gemischtes Verfahren) . . . . .	16
2.8	FDM für Hyperbolische PDGL . . . . .	16
2.8.1	Leap-Frog-Schema . . . . .	16
2.8.2	Transportgleichung . . . . .	16
2.9	FVM (Finite Volumen Methode, Verfahren von Voronoi) . . . . .	17

<b>3</b>	<b>FEM</b>	<b>19</b>
3.1	Das Verfahren von Ritz	19
3.2	Das Verfahren von Galerkin	19
3.3	Gewichtete Residuen	19
3.4	Punktkollokation	19
3.5	Bereichskollokation	20
3.6	Das Verfahren von Gauss (MSE)	20
3.7	Finite Elemente	20
3.7.1	Knotenvariablen	20
3.7.2	Formfunktionen	20
3.7.3	Elementmatrizen	21
3.7.4	Die Finite Elemente Handrechnung	22
3.7.5	h-Strategie	22
3.7.6	p-Strategie	22
3.8	Konformität und Vollständigkeit	23
3.9	Hermetische Polynome dritter Ordnung	23
<b>4</b>	<b>Fourierreihe</b>	<b>25</b>
4.1	Symmetrie	25
4.2	Spektern	25
<b>5</b>	<b>Fourier Transformation</b>	<b>26</b>
5.1	Eigenschaften	26
<b>6</b>	<b>Laplace Transformation</b>	<b>27</b>
6.1	Eigenschaften	27
6.2	Von Laplace zu Fourier	27
6.3	Rücktransformation (Komplexe Integration)	27
6.4	Vorgehen Rücktransformation	27
6.5	Rücktransformation über Tabelle	28
<b>7</b>	<b>Mathe Grundlagen</b>	<b>28</b>
7.1	Partialbruchzerlegung	28
7.1.1	Hornerschema	28
7.2	Trigonometrie	29
7.2.1	Funktionswerte für Winkelargumente	29
7.2.2	Quadrantenbeziehungen	29
7.2.3	Doppel- und Halbwinkel	29
7.2.4	Produkte	29
7.2.5	Hyperbolic	29
7.2.6	Summe und Differenz	29
7.2.7	Euler	29
7.2.8	Komplex	29
7.3	Taylor Polynom	29
7.4	Integralrechnung	29
7.5	Differentialgleichungen	31
7.5.1	Lineare Differentialgleichungen 1. Ordnung	31
7.5.2	Lineare Differentialgleichung 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten	31
7.5.3	Allgemeine Lösung einer homogenen DGL: $Y_H$	31
7.5.4	Allgemeine Lösung einer inhomogenen DGL: $y = Y_H + y_P$	31
7.5.5	Lineare Differentialgleichung n. Ordnung mit konstanten Koeffizienten	32
7.5.6	Lineare Differentialgleichungssysteme erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten	32
7.5.7	DGL mit Laplacetransformation lösen	32
7.5.8	Gängige DGLs	32
7.6	Differential-Rechnung	33
7.7	Diverses	33
7.7.1	Quadratische Lösungsformel	33
7.7.2	Determinanten	33
7.7.3	Matrizeninversion	33
7.7.4	Eigenwerte/ Eigenvektoren	33

7.7.5    TI-89    . . . . . 33

# Theory

## 1.1 Begriffe und Klassifikation

### 1.1.1 Ordnung

Wie bei gewöhnlichen Differentialgleichungen ist die Ordnung die höchste Ableitung der unbekannten Funktion, die in der Differentialgleichung vorkommt.

**PDGL 1. Ordnung:**  $F\left(x_1, \dots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}\right)$

Sie kann durch Substitution  $\frac{\partial u}{\partial x_i} \rightarrow p_i$  durch  $F(x_1, \dots, x_n, u, p_1, \dots, p_n)$ , ausgedrückt werden.

**PDGL 2. Ordnung:**  $F\left(x_1, \dots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}, \dots, \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}\right)$

Sie kann durch Substitution  $\frac{\partial u}{\partial x_i} \rightarrow p_i$ ,  $\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \rightarrow t_{ij}$  durch  $F(x_1, \dots, x_n, u, p_1, \dots, p_n, t_{11}, t_{12}, \dots, t_{n,n-1}, t_{nn})$  ausgedrückt werden.

### Beispiel Übung

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} = 0 & \Rightarrow F(t_{12}) = t_{12} = 0 & \Leftrightarrow F\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}\right) = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial x_1} = \frac{\partial u}{\partial x_2} & \Rightarrow F(p_1, p_2) = p_1 - p_2 = 0 & \Leftrightarrow F\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}\right) = 0 \\ x_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial u}{\partial x_2} = \frac{\partial u}{\partial x_3} & \Rightarrow F(x_1, x_2, p_1, p_2, p_3) = x_1 p_1 + x_2 p_2 - p_3 & \Leftrightarrow F\left(x_1, x_2, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \frac{\partial u}{\partial x_3}\right) = x_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial u}{\partial x_2} - \frac{\partial u}{\partial x_3} = 0 \end{aligned}$$

### 1.1.2 Laplace-Operator

$$\text{Kartesisch: } \Delta u(x, y, z) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \quad \text{Zylinder: } \Delta f(\rho, \phi, z) = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial f}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

$$\text{Polar: } \Delta f(r, \varphi) = \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial r} r \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} \quad \text{Kugel: } \Delta f(r, \vartheta, \phi) = \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho^2 \frac{\partial f}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\rho^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}$$

### 1.1.3 Umwandlung in System niedriger Ordnung

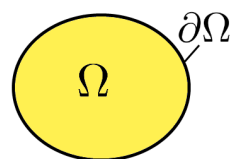
$$\text{Gegeben: } F\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) = 0.$$

$$\text{Substitution: } p = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial u}{\partial y}$$

$$\text{Für zweite Ableitungen: } \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial p}{\partial x}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial q}{\partial x}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial q}{\partial y}$$

$$\text{Gleichungssystem 1. Ordnung } p = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial u}{\partial y}, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial q}{\partial x}$$

### 1.1.4 Notationen einer PDGL, Gebiet $\Omega$

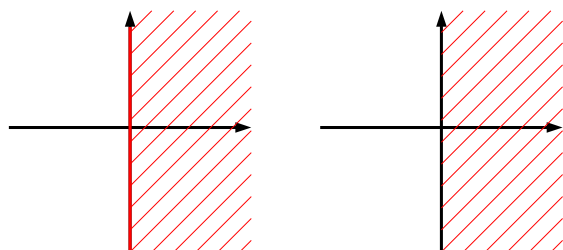


$\overset{\circ}{\Omega}$  Innere Punkte  
 $\partial\Omega$  Rand  
 $\bar{\Omega}$  Gebiet  $\Omega$  und Rand  $\partial\Omega$

Das Gebiet einer PDGL **muss** offen sein, nur dann ist die partielle Ableitung überall definiert. Das Gebiet ist offen, wenn um jeden Punkt im Gebiet  $\Omega$  ein kleiner Ball gezeichnet werden kann, welches sich auch im Gebiet  $\Omega$  befindet.

Kein Gebiet:

Gebiet:



**Lösung einer PDGL:**

Gegeben: Gebiet  $\Omega$ , PDGL, Randwerte  $\partial\Omega$

Lösung: Funktion  $u: \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ , PDGL in  $\Omega$  und Randwerte auf  $\partial\Omega$   
 'gut gestellt' wenn die Angaben die Lösung eindeutig bestimmen

**1.1.5 Klassifikation einer PDGL**

Ordnung: Höchste vorkommende partielle Ableitung

Typ: Linear: Linear in  $u, x_1, \dots, x_n, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}$

Quasilinear: Linear in  $\frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}$

Nichtlineare: Alles andere

**1.2 Methode Charakteristiken**

**Wichtig:** Als Anfangsbedingungen dürfen **keine** Charakteristiken verwendet werden, sonst ist die Charakteristik die Lösung (anstatt Fläche ergibt sich eine Kurve).

**Wichtig:** Die Charakteristik darf den Rand nur einmal durchlaufen.

Nützlich für Quasilineare PDGL 1.Ordnung. Wenn Separation möglich ist, sollte diese (einfachere) Methode verwendet werden.

Ausgangslage:

$$a(x, y, u) \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + b(x, y, u) \cdot \frac{\partial u}{\partial y} - c(x, y, u) = 0$$

Charakteristik:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ u(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a(x, y, u) \\ b(x, y, u) \\ c(x, y, u) \end{bmatrix}$$

Gebiet:  $\Omega \{ \dots | x > 0, \text{ alle } y \}$  Randbedingung:  $u(0, y_0) = g(y_0)$

Vektorielle Schreibweise:  $\begin{bmatrix} a(x, y, u) \\ b(x, y, u) \\ c(x, y, u) \end{bmatrix} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & -1 \end{bmatrix}}_{\vec{n}: \text{ Normale auf Fläche}} = 0$

Tangenten:  $\vec{t}_x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{\partial u}{\partial x} \end{bmatrix} \quad \vec{t}_y = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{\partial u}{\partial y} \end{bmatrix} \quad \vec{n} \cdot \vec{t}_x = 0 \quad \vec{n} \cdot \vec{t}_y = 0 \quad \vec{t}_x \cdot \vec{t}_y = \vec{n}$

Lösungsweg: Für jeden Anfangspunkt  $\begin{bmatrix} 0 \\ y_0 \\ g(y_0) \end{bmatrix}$  finde eine Charakteristik, diese nach  $x, y$  auflösen.

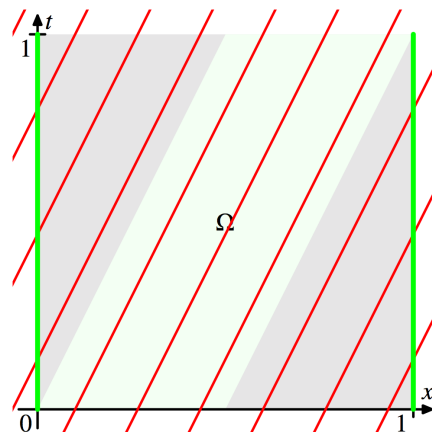
**Randbedingungen** Eine Lösungsfunktion  $u(x, y)$  muss von Charakteristiken überdeckt werden. Die Lösung wird nun durch die Randwerte bestimmt.

Für das dargestellte Gebiet  $\Omega$  sind verschiedene Fälle möglich:

1. Randwerte am *linken* und *rechten* Rand sind vorgegeben.  
Ein Gebiet in der Mitte ist nicht bestimmt.
2. Randwerte am *oberen* und *unteren* Rand sind vorgegeben.  
Ein Teil des Gebiets ist überbestimmt.
3. Randwerte am *linken* und *unteren* Rand sind vorgegeben.  
Funktion ist eindeutig bestimmt (aber nicht unbedingt überall differenzierbar).

Die Lösung ist also nicht für alle Randwerte bestimmbar.

Wenn sich zwei Charakteristiken treffen  $\rightarrow$  Singularität



**Beispiel:**

1. PDGL mit Randbedingungen und Definitionsbereich:  $\frac{\partial u}{\partial x} + 2\frac{\partial u}{\partial y} = 3, \quad u(0, y) = g(y) = \sin(y) \Rightarrow u(0, y_0) = g(y_0) = \sin(y_0)$

Terme in Matrixschreibweise: 
$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

2. Charakteristiken ausrechnen PDGL  $\rightarrow$  DGL:  $\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ u(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$

3. DGL's lösen (für Standard-DGL's, siehe 7.5.8 auf Seite 32.):  $\begin{bmatrix} x \\ y \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1t + x_0 \\ 2t + y_0 \\ 3t + u_0 \end{bmatrix}$

4. Anfangsbedingungen einsetzen:  $\begin{bmatrix} x \\ y \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1t + x_0 \\ 2t + y_0 \\ 3t + u_0 \end{bmatrix} \Big|_{t=0} = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ u_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ y_0 \\ \sin(y_0) \end{bmatrix}$

Lösung der DGL ist: 
$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \cdot t + \begin{bmatrix} 0 \\ y_0 \\ \sin(y_0) \end{bmatrix}$$

5. Eliminieren aller Variablen ausser  $u, x, y$ :  $u = 3x + \sin(y - 2x)$
6. Kontrolle: Resultat ( $u = 3x + \sin(y - 2x)$ ) ableiten und in Aufgabenstellung einsetzen  $\frac{\partial u}{\partial x} + 2\frac{\partial u}{\partial y} = 3$  und schauen ob es erfüllt.

**1.3 Methode Separation**

Wahl eines geeigneten Koordinatensystems ist wichtig.

1. **Ansatz** (Höchste Ableitung ausschlaggebend):

- Für PDGL 1.Ordnung:  $U(x, y) = X(x) + Y(y)$
- Für PDGL 2.Ordnung:  $U(x, y) = X(x) \cdot Y(y)$

2. **Einsetzen:** Ansatz in PDGL einsetzen.

3. **Separation:** Auf jeder Seite der PDGL darf nur noch eine Variable vorkommen. Die beiden jetzt gewöhnlichen DGL sind über eine Konstante gekoppelt (fixieren der Variable). Wahl der Konstante: Wenn Schwingung erwartet wird:  $-k^2$ , sonst  $k$ , ausser man weiss es besser ;-).

4. **Lösen der DGL's:** Man erhält eine Familie von Lösungen

5. **Gesamtlösung "Zusammenbasteln":** (Linearkombination der Lösungen), Randbedingungen einhalten!

**Beispiel 1:** PDGL:  $\frac{1}{x} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{y} \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{y^2}$

1. Ansatz:

$$u(x, y) = X(x) + Y(y) \quad (1. \text{ Ordnung})$$

2. Einsetzen:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = X'(x) \quad \frac{\partial u}{\partial y} = Y'(y) \quad \Rightarrow \quad \frac{X'(x)}{x} + \frac{Y'(y)}{y} = \frac{1}{y^2}$$

3. Separation:

$$\frac{X'(x)}{x} = k = \frac{1}{y^2} - \frac{Y'(y)}{y}$$

4. DGL'2 lösen:

$$X'(x) = k \cdot x \quad \Rightarrow \quad X(x) = \frac{1}{2} k x^2 + C_x$$

$$Y'(y) = \frac{1}{y} - k y \quad \Rightarrow \quad Y(y) = \ln(y) - \frac{1}{2} k y^2 + C_y$$

5. Linearkombination:

$$u(x, y) = \frac{1}{2} k x^2 - \frac{1}{2} k y^2 + \ln(y) + C$$

**Beispiel 2:** PDGL:  $x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + x \frac{\partial u}{\partial x} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + y \frac{\partial u}{\partial y} = 0$   
Randbedingungen:  $\Omega = [1, 2] \times [1, 2]$   $u = 0$  auf  $\partial\Omega$

1. Ansatz:

$$u(x, y) = X(x) \cdot Y(y) \quad (2. \text{ Ordnung})$$

2. Einsetzen:

$$x^2 X''(x) Y(y) + x X'(x) Y(y) + y^2 X(x) Y''(y) + y X(x) Y'(y) = 0$$

3. Separation: Division durch  $X(x)Y(y)$

$$\frac{x^2 X''(x)}{X(x)} + \frac{x X'(x)}{X(x)} + \frac{y^2 Y''(y)}{Y(y)} + \frac{y Y'(y)}{Y(y)} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{x^2 X''(x)}{X(x)} + \frac{x X'(x)}{X(x)} = k = -\frac{y^2 Y''(y)}{Y(y)} - \frac{y Y'(y)}{Y(y)}$$

4. DGL'2 lösen:

$$\frac{x^2 X''(x)}{X(x)} + \frac{x X'(x)}{X(x)} = k \quad \Rightarrow \quad x^2 X''(x) + x X'(x) - k X(x) = 0 \quad \text{mit } X(1) = X(2) = 0$$

$$\frac{y^2 Y''(y)}{Y(y)} - \frac{y Y'(y)}{Y(y)} = -k \quad \Rightarrow \quad y^2 Y''(y) + y Y'(y) + k Y(y) = 0 \quad \text{mit } Y(1) = Y(2) = 0$$

Lösung der DGL hier nicht gemacht.

## 1.4 Hamilton-Jacobi Theorie

Die Hamilton-Jacobi Theorie geht von einer Gesamtenergie  $H(x_i, p_i)$  in Abhängigkeit von Ort und Impuls aus. Dazu muss eine Funktion  $S(x_i, t)$  gefunden werden, für welche

$$\frac{\partial S}{\partial t} = H(x_i, p_i) = H\left(x_i, \frac{\partial S}{\partial x_i}\right)$$

$$\text{mit } p_i = \frac{\partial S}{\partial x_i}$$

Diese kann meist durch Integration gelöst werden. Dabei werden die Integrationskonstanten  $P_i$  eingeführt. Die *Bahnparameter*  $Q_i$  sind

$$Q_i = \frac{\partial S}{\partial P_i}$$

und die Bahnkurve hat die Form

$$x_i(t, Q_i, P_i)$$

**Beispiel 3:** PDGL:  $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$   $u(t=0, x) = 0$   
Randbedingungen:  $x = [0, \pi]$   
 $\frac{\partial u}{\partial t}(t=0, x) = \sin^3(x) = \frac{3}{4} \sin(x) - \frac{1}{4} \sin(3x)$

1. Ansatz:

$$u(t, x) = T(t) \cdot X(x) \quad (2. \text{ Ordnung})$$

2. Einsetzen:

$$T''(t) \cdot X(x) = X''(x) \cdot T(t)$$

3. Separation:

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\mu^2 = \frac{T''(t)}{T(t)}$$

4. DGL'2 lösen:

$$X(x) = \sin(\mu x) \quad T(t) = \sin(\mu t)$$

$$X(x) = \cos(\mu x) \quad T(t) = \cos(\mu t)$$

5. Linearkombination:

Die Randbedingungen  $x = 0$  und  $x = \pi$  können nur mit  $\sin(\mu x)$  und positivem, ganzzahligen  $\mu$  erfüllt werden.  $\cos(nx)$ -Terme fallen weg.

$$u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(nx) \sin(nt) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx) \cos(nt)$$

Die Koeffizienten  $a_n$  und  $b_n$  müssen mit Hilfe der Anfangsbedingungen zur Zeit  $t = 0$  bestimmt werden:

$$u(0, x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx) = 0 \quad \Rightarrow \quad b_n = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(\pi, x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n \sin(nx) = \sin^3(x) = \frac{3}{4} \sin(x) - \frac{1}{4} \sin(3x)$$

$$\Rightarrow \quad a_1 = \frac{3}{4} \quad a_3 = -\frac{1}{12} \quad a_k = 0 \quad \text{für } k \neq 1, 3$$

$$u(t, x) = \frac{3}{4} \sin(x) \sin(t) - \frac{1}{12} \sin(3x) \sin(3t)$$

## 1.5 Transformationen

- Der Übergang von Funktionen zu Fourierreihen verwandelt eine partielle Differentialgleichung in eine Familie gewöhnlicher Differentialgleichungen für die einzelnen Fourier-Koeffizienten.
- Integraltransformationen können eine partielle Differentialgleichung in eine Familie partieller Differentialgleichungen mit weniger Variablen oder sogar gewöhnlicher Differentialgleichungen verwandeln.
- Integraltransformationen und die Rücktransformationen können Formeln für die Lösungen gewisser partieller Differentialgleichungen liefern, und damit die Frage beantworten, für welche Randwertvorgaben die Gleichungen gut gestellt sind.

Definitionsgebiet	Transformation
$[0, \infty)$	Lapacetransformation
$\mathbb{R}$	Fouriertransformation
$[-\pi, \pi]$	Fourierreihe

### 1.5.1 Fourierreihe

$$u(t, x) = \frac{a_0(t)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k(t) \cos(kx) + b_k(t) \sin(kx)$$

### 1.5.2 Beispiel: Schwingende Saite

$$\partial_t^2 u = \partial_x^2 u$$

1. Ansatz der Fourieranalyse in PDGL einsetzen:

$$\partial_t^2(t, x) = \frac{a_0''(t)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k''(t) \cos(kx) + b_k''(t) \sin(kx) \quad \partial_x^2(t, x) = - \sum_{k=1}^{\infty} a_k(t) k^2 \cos(kx) + b_k(t) k^2 \sin(kx)$$

$$\partial_t^2(t, x) = \partial_x^2(t, x) \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{a_0''(t)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k''(t) \cos(kx) + b_k''(t) \sin(kx) = - \sum_{k=1}^{\infty} a_k(t) k^2 \cos(kx) + b_k(t) k^2 \sin(kx)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{a_0''(t)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k''(t) + a_k(t) k^2) \cos(kx) + (b_k''(t) + b_k(t) k^2) \sin(kx) = 0$$

2. Diese Gleichung ist nur lösbar wenn alle Koeffizienten verschwinden (Fourier-Theorie):

$$a_0''(t) = 0 \quad a_k''(t) = -k^2 a_k(t) \quad b_k''(t) = -k^2 b_k(t)$$

3. Durch die Fouriertransformation wurde die PDGL in ein DGL-System überführt, die Lösungen sind wohl bekannt:

$$a_0(t) = m_0(t) + c_0 \quad a_k(t) = A_k^a \cos(kt) + B_k^a \sin(kt) \quad b_k(t) = A_k^b \cos(kt) + B_k^b \sin(kt)$$

**Anfangsbedingungen:** Die Differentialgleichungen für die Koeffizienten  $a_k(t)$  und  $b_k(t)$  können erst dann vollständig gelöst werden, wenn Anfangs oder Randbedingungen gegeben sind.

- Anfangsbedingungen für Wellengleichung:

$$u(0, x) = f(x) \quad \frac{\partial u}{\partial t} = g(x)$$

- Die Funktionen  $f$  und  $g$  können auch als Fourierreihe dargestellt werden:

$$f(x) = \frac{a_0^f}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k^f \cos(kx) + b_k^f \sin(kx)$$

$$g(x) = \frac{a_0^g}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k^g \cos(kx) + b_k^g \sin(kx)$$

- Zusammen mit dem Ansatz für  $u(t, x)$  ergeben sich die Gleichungen (für  $t = 0$ ):

$$\frac{a_0(0)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k(0) \cos(kx) + b_k(0) \sin(kx) = \frac{a_0^f}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k^f \cos(kx) + b_k^f \sin(kx)$$

$$\frac{a_0'(0)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k'(0) \cos(kx) + b_k'(0) \sin(kx) = \frac{a_0^g}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k^g \cos(kx) + b_k^g \sin(kx)$$



- Koeffizientenvergleich ergibt:

$$a_k(0) = a_k^f \quad a_k'(0) = a_k^g \quad b_k(0) = b_k^f \quad b_k'(0) = b_k^g$$

- Die vollständige Lösung ist damit:

$$u(t, x) = \frac{a_0^g(t) + a_0^f}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left( a_k^f \cos(kt) + \frac{1}{k} a_k^g \sin(kt) \right) \cos(kx) + \left( b_k^f \cos(kt) + \frac{1}{k} b_k^g \sin(kt) \right) \sin(kx)$$

### 1.5.3 Inhomogene Wellengleichung

Das Verfahren lässt sich auch auf die inhomogene Wellengleichung verallgemeinern. Das Störglied wird dabei ebenfalls als Fourierreihe entwickelt.

$$\partial_t^2 u - \partial_x^2 u = f \quad \Rightarrow \quad f(t, x) = \frac{a_0^f(t)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k^f(t) \cos(kx) + b_k^f \sin(kx)$$

### 1.5.4 Laplace-Transformation

$$F(t) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt$$

Siehe auch weiter hinten in der Zusammenfassung! (in Kapitel 6.1 und Seite 27)

**Lösung einer ODGL:**

$$\dot{x}(t) + px(t) = f(t) \quad f(t) = q$$

$$\dot{x}(t) + px(t) = f(t) \quad \circ \bullet \quad sX(s) - x(0) + pX(s) = F(s) \quad f(t) \quad \circ \bullet \quad F(s) = \frac{q}{s}$$

$$\Rightarrow X(s) = \frac{F(s) + x(0)}{s+p} = \frac{q + x(0)}{s(s+p)} \Big|_{x(0)=0} \quad \bullet \circ \quad x(t) = \frac{q}{p} (1 - e^{-pt})$$

**Lösung einer PDGL:**

$$\frac{\partial u}{\partial t} + x \frac{\partial u}{\partial x} = x \quad t \geq 0, \quad x \geq 0 \quad u(x, 0) = 0, \quad u(0, t) = 0 \quad x, t > 0$$

$$\text{Transformation: } \frac{\partial u}{\partial t} + x \frac{\partial u}{\partial x} = x \quad \circ \bullet \quad sU(s, x) - u(x, 0) + x \frac{\partial U(s, x)}{\partial x} = \frac{x}{s} \quad \Rightarrow \quad U(s, x) = \frac{x}{s(s+1)}$$

$$U(s, x) \quad \bullet \circ \quad x(1 - e^{-t})$$

### 1.5.5 Beispiel: Wärmeleitung

Stab zur Zeit  $t = 0$ : Temperaturen  $-1$  bei  $x = -\frac{\pi}{2}$  und  $1$  bei  $x = \frac{\pi}{2}$  -> stationärer Zustand. Zur Zeit  $t = 0$  werden die Reservoirs entfernt und der Stab wird sich selbst "überlassen. Insbesondere kann durch die Enden keine Wärme mehr abgeleitet werden.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \text{oder allgemein:} \quad \frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

“Dreiecksfunktion”

$$d(x) = \begin{cases} -2 - \frac{2x}{\pi} & -\frac{\pi}{2} \leq x \\ \frac{2x}{\pi} & -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ 2 - \frac{2x}{\pi} & x \leq \frac{\pi}{2} \end{cases} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{8(-1)^n}{\pi^2(2n+1)^2} \sin((2n+1)x)$$

$\hat{u}(t, k)$  Fourier-Sinus-Koeffizienten /  $\mathcal{L}u$  Laplace-Transformation.

Anfangsbedingungen ungerade -> Lösung der Differentialgleichung für alle Zeiten ungerade.

Randbedingungen:  $\partial_x u(t, -\frac{\pi}{2}) = \partial_x u(t, \frac{\pi}{2}) = 0$  -> Spiegelung an  $-\frac{\pi}{2}$  bzw.  $\frac{\pi}{2}$  ->  $2\pi$ -periodische Funktion auf  $\mathbb{R}$  fortsetzen

$$\partial_t \hat{u}(t, k) = -k^2 \hat{u}(t, k)$$

Diese Gleichung kann man jetzt nach Laplace transformieren:

$$s\mathcal{L}\hat{u}(s, k) - \hat{u}(0, k) = -k^2 \mathcal{L}\hat{u}(s, k)$$

$$(s + k^2) \mathcal{L}\hat{u}(s, k) = \hat{u}(0, k)$$

$$\mathcal{L}\hat{u}(s, k) = \frac{\hat{u}(0, k)}{s + k^2}$$

Rücktransformation ergibt:

$$\hat{u}(t, k) = \hat{u}(0, k)e^{-k^2 t}$$

Jetzt sind nur noch die Fourierkoeffizienten zu bestimmen, die kann man der Dreiecksfunktion entnehmen:

$$\hat{u}(0, 2n+1) = \frac{8(-1)^n}{\pi^2(2n+1)^2}$$

und damit die endgültige Lösung durch Summieren der Fourierreihen bekommen:

$$u(t, x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{8(-1)^n}{\pi^2(2n+1)^2} e^{-(2n+1)^2 t} \sin((2n+1)x)$$

## 1.6 PDGL 2.Ordnung

Lineare partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung haben die Form:

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij} \partial_i \partial_j u + \sum_{i=1}^n b_i \partial_i u + cu = f$$

### 1.6.1 Klassifikation

Klassifikation nur für PDEs zweiter Ordnung!

Eigenwertberechnung: (z.B. von  $\partial_x^2 u + 2\partial_x \partial_y u + \partial_y^2 u = 0$ ) Alternativ (wenn z.B. sehr wüste PDE klassifiziert werden muss), können auch via Spur und Determinante die Vorzeichen der Eigenwerte herausgefunden werden:

1. Symmetrische Matrix aufstellen und  $\lambda$  in der Diagonalen abziehen. Z.B.:  $A = \begin{pmatrix} \partial_x^2 & \partial_x \partial_y \\ \partial_y \partial_x & \partial_y^2 \end{pmatrix}$

Bei diagonalen Matrizen entsprechen die Eigenwerte den Diagonaleinträgen.

2. Determinante gleich 0 setzen:  $\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = 0 \Rightarrow \lambda_i$
3. Gleichung lösen

1. Siehe links (Eigenwertberechnung): Matrix  $A$  aufstellen

2. Determinante berechnen und versuchen aus Tabelle zu lesen:  $\det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = \lambda_1 \lambda_2$

3. Spur berechnen und versuchen aus Tabelle zu lesen:  $\text{tr}(A) = a_{11} + a_{22} = \lambda_1 + \lambda_2$

Klasse	Anzahl Eigenwerte			$\det(A)$ für $n=2$	Beispiel
	Positiv	Negativ	Verschwindend(=0)		
hyperbolisch	n-1	1	0	$\det < 0$	Wellengleichung: $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \Delta u$
parabolisch	n-1	0	1	$\det = 0$	Wärmeleitung: $\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u$
elliptisch	n	0	0	$\det > 0$	Potential: $\Delta u = f$
ultrahyperbolisch	$>1$	$>1$	0	-	-

## 1.7 Elliptische PDGL

$$\Delta u = f \quad \omega = \{(x, y) | y \geq 0\}, \quad u(x, y) = ay$$

**Satz:** Wenn  $\Omega$  beschränkt und zusammenhängend, dann ist die Lösung  $u$  immer eindeutig.

**Beweis:** Annahme:  $u = u_1 - u_2$

$$\text{Einsetzen: } \Delta u_1 - \Delta u_2 = f - f = 0$$

$$(u_1 - u_2)|_{\partial\omega} = g - g = 0$$

$$\Delta u = 0 \quad u|_{\partial\Omega} = 0$$

Falls  $u = 0$  eine Lösung, dann gibt es nur eine Lösung.

### 1.7.1 Maximumprinzip

Wenn gilt  $\Delta u = 0$ , so ist  $u$  harmonisch, und dann befinden sich die Extrema (Maxima und Minima der Funktion) auf dem Rand  $\partial\Omega$ .

### 1.7.2 Beispiel (Übungslösungen)

Eine elliptische PDGL wie  $\Delta u = c$  hat mit der vorgegebenen Dirichlet-Randwerten nur eine Lösung. Zur Erinnerung: Der Grund war das Maximum-Prinzip. Gäbe es nämlich eine zweite Lösung  $\bar{v}(r, \phi)$  mit gleichen Randwerten, wäre  $v - \bar{v}$  eine Lösung der Gleichung  $\Delta(v - \bar{v}) = 0$  also harmonische Funktion. Die Randwerte von  $v - \bar{v}$  sind 0. Da eine harmonische Funktion das Maximum auf dem Rand annimmt ist  $v - \bar{v} = 0$  die Lösung ist also eindeutig.

### 1.7.3 Greensche Funktion

Eine elliptische PDGL wird mittels Inversion von  $\Delta$  gelöst. Dieser Umkehr geschieht mittels Greenscher Funktion, welche die Umkehrfunktion  $\Delta$  ist  $\Delta$ : Laplace-Operator.

$$u(x) = \int_{\Omega} \sigma(x, \xi) f(\xi) d\xi + \int_{\Omega} h(x, \xi) f(\xi) d\xi \quad \sigma(x, \xi) = \begin{cases} \frac{1}{2} |x - \xi| & n = 1 \\ \frac{1}{2\pi} \log |x - \xi| & n = 2 \\ -\frac{1}{4\pi} \frac{1}{|x - \xi|} & n = 3 \\ \frac{1}{(2-n)\mu(S^{n-1})} |x - \xi|^{2-n} & n \geq 3 \end{cases}$$

Greensche Funktion:  $G(x, \xi) = \sigma(x, \xi) + h(x, \xi)$

Satz: Ist  $\Omega$  ein Gebiet, auf dem das Dirichlet Problem eindeutig lösbar ist, dann gibt es eine Funktion  $G(x, \xi)$ , welche als Funktion von  $x$  die Gleichung

$$\Delta G(x, \xi) = \delta(x - \xi)$$

löst mit homogenen Randbedingungen. Lösung:  $u(x) = \int_{\Omega} G(x, \xi) f(\xi) d\xi + \int_{\partial\Omega} g(\xi) \cdot \text{grad}_{\xi} G(x, \xi) d\eta$   $\eta$ : Normale von  $\partial G$

### 1.7.4 Mittelwerteigenschaft harmonischer Funktionen

$$\Delta h = 0 \quad \text{Mittelwerteigenschaft:} \quad h(x) = \begin{cases} \frac{h(x+\delta) + h(x-\delta)}{2} & n = 1 \\ \frac{1}{2\pi r} \int_{S_r^1} h(x + \xi) d\xi & n = 2 \\ \frac{1}{4\pi r^2} \int_{S_r^2} h(x + \xi) d\xi & n = 3 \end{cases}$$

## 1.8 Hyperbolische PDGL

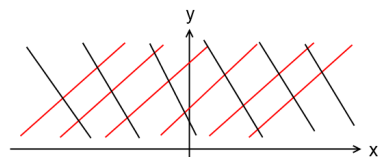
$$\text{PDGL: } \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad \Omega = \{(x, t) | t > 0\} \quad u_0 = u(x_0, 0)$$

$$\text{Trick: } (\partial_t + a\partial_x)(\partial_t - a\partial_x)u = (\partial_t^2 - a^2\partial_x^2)u = 0 \quad (\text{für konstante Geschwindigkeit } a)$$

$$\text{Zwei mögliche Lösungen: } \underbrace{(\partial_t + a\partial_x)u = 0}_{\text{Nach rechts laufende Welle}} \quad \underbrace{(\partial_t - a\partial_x)u = 0}_{\text{Nach links laufende Welle}}$$

$$\text{Lösung mittels Charakteristiken: } \frac{\partial}{\partial s} \begin{Bmatrix} x(s) \\ t(s) \\ u(s) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \pm a \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = \pm as + x_0 \\ t = s + t_0 = s \\ u = u_0 \end{cases} \quad (t_0 = 0)$$

$$x = \pm at + x_0 \Rightarrow x_0 = x \mp at \Rightarrow u(x, t) = u_0(x \mp at)$$



$$\text{Allgemeine Lösung aus Linearkombination: } u(x, t) = u_+(x + at) + u_-(x - at)$$

$\Rightarrow$  Es werden **zwei** Anfangsbedingungen benötigt um  $u_+$  **und**  $u_-$  zu bestimmen.

$$\text{z.B.: } u(x, 0) = u_0(x) \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = g_0(x)$$

### 1.8.1 Streifen/Charakteristiken

$$\text{PDGL: } a\partial_x^2 u + 2b\partial_x\partial_y u + c\partial_y^2 u + d\partial_x u + e\partial_y u + fu = g \quad \text{Symbolmatrix: } \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$$

$$\text{Entlang der Kurve } t \mapsto (x(t), y(t)) \text{ sind die Anfangswerte / partiellen Ableitungen } \left. \begin{aligned} u(x(t), y(t)) &= u(t) \\ \partial_x u(x(t), y(t)) &= p(t) \\ \partial_y u(x(t), y(t)) &= q(t) \end{aligned} \right\}$$

Charakteristiken erfüllen DGL:

$$a\dot{y}(t)^2 - 2b\dot{x}(t)\dot{y}(t) + c\dot{x}(t)^2 = 0$$

$$\text{Charakteristischer Streifen erfüllt zusätzlich: } a\dot{p}(t)\dot{y}(t) - h\dot{x}(t)\dot{y}(t) + c\dot{x}(t)\dot{q}(t) = 0$$

## 2 Numerik

### 2.1 Diskretisierung

#### 2.1.1 1.Ableitung

$$g'(x) \approx \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x} \quad \text{oder} \quad \boxed{g'(x) \approx \frac{g(x + \Delta x) - g(x - \Delta x)}{2\Delta x}} \quad (\text{Zentrale Differenz: Bessere Qualität})$$

#### 2.1.2 2.Ableitung

$$\boxed{g''(x) \approx \frac{g(x - \Delta x) - 2g(x) + g(x + \Delta x)}{\Delta x^2}}$$
 ist für zweite (bessere Qualität) Version die Gleiche

### 2.2 FDM

**TIPP:** Bei Anfangsbedingungen ungleich Null das Gleichungssystem selber von Hand herleiten, reduziert die Chance auf Fehler.

#### 2.2.1 Grundgleichung: $-u''(x) = f(x)$

$$A^{(n)} \tilde{u}^{(n)} = f^{(n)}$$

$$A^{(n)} = \frac{1}{\Delta x^2} \text{tridiag}_{n-1}(-1, 2, -1) = \frac{1}{\Delta x^2} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots \\ -1 & 2 & -1 & \dots \\ 0 & -1 & 2 & \dots \\ 0 & 0 & -1 & \dots \\ \dots & & & \end{bmatrix} \quad (\text{eine } (n-1) \times (n-1)\text{-Matrize})$$

$$\text{Randwert: } u(0) = a \quad u(n) = b \quad A^{(n)} \tilde{u}^{(n)} = \begin{bmatrix} f(x_1^{(n)}) + \frac{a}{\Delta x^2} \\ f(x_2^{(n)}) \\ \vdots \\ f(x_{(n-1)}^{(n)}) + \frac{b}{\Delta x^2} \end{bmatrix}$$

#### 2.2.2 Grundgleichung: $T''(x) - hT(x) = T_A$

$$-T'' + hT(x) = hT_A$$

$$A^{(n)} = \frac{1}{\Delta x^2} \text{tridiag}_{n-1}(-1, 2 + h\Delta x^2, -1) = \frac{1}{\Delta x^2} \begin{bmatrix} 2 + h\Delta x^2 & -1 & 0 & \dots \\ -1 & 2 + h\Delta x^2 & -1 & \dots \\ 0 & -1 & 2 + h\Delta x^2 & \dots \\ 0 & 0 & -1 & \dots \\ \dots & & & \end{bmatrix}$$

#### 2.2.3 Beispiel Hausübung 7

Gegeben:  $u''(x) = 4(u(x) - x)$  mit den Randwerten  $u(0) = 0$  und  $u(1) = 2$  mit  $\Delta x = 1/3$ .

Gesucht:  $\tilde{u}(\frac{1}{3})$  und  $\tilde{u}(\frac{2}{3})$

Lösen: Die Ableitung von  $u''$  einsetzen, siehe oben, ergibt die allgemeine Gleichung von  $\frac{u(x-\Delta x) - 2u(x) + u(x+\Delta x)}{\Delta x^2} = 4(u(x) - x)$ , für die Punkte P1 und P2 ergibt das.

$$\text{P1: } \frac{0 - 2\tilde{u}(\frac{1}{3}) + \tilde{u}(\frac{2}{3})}{(\frac{1}{3})^2} = 4(\tilde{u}(\frac{1}{3}) - \frac{1}{3}) \quad \text{P2: } \frac{\tilde{u}(\frac{1}{3}) - 2\tilde{u}(\frac{2}{3}) + 2}{(\frac{1}{3})^2} = 4(\tilde{u}(\frac{2}{3}) - \frac{2}{3})$$

Nun das Gleichungssysteme lösen ergibt  $\tilde{u}(\frac{1}{3})$  und  $\tilde{u}(\frac{2}{3})$

### 2.3 Konvergenz

Ein Modell ist konvergent wenn bei  $n \rightarrow \infty$  die Schätzung  $\tilde{u}$  und  $u$  übereinstimmt.

$$\boxed{\|v\|_{\Delta x} = \sqrt{\Delta x(v_1^2 + v_2^2 + \dots + v_{n-1}^2)} = \sqrt{\Delta x} \|v\|}$$

$$\text{Es konvergiert wenn: } \lim_{n \rightarrow \infty} \|\tilde{u}^{(n)} - u^{(n)}\|_{1/n} = \sqrt{\frac{1}{n}} \|\tilde{u}^{(n)} - u^{(n)}\| = \sqrt{\frac{1}{n}} \sqrt{(\tilde{u}_1 - u_1)^2 + \dots + (\tilde{u}_{n-1} - u_{n-1})^2} = 0$$

## 2.4 Konsistenz

Ein Modell ist konsistent wenn das Modell durch Vereinfachung mit der Realität übereinstimmt.

### 2.4.1 Residuum

Exakt:  $A^{(n)} \cdot \tilde{u}^{(n)} - f^{(n)} = 0$

Residuum:  $A^{(n)} \cdot (u^{(n)} - \tilde{u}^{(n)}) = r^{(n)}$

Eine Approximationsverfahren ist Konsistent, wenn  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|r^{(n)}\|_{1/n} = 0$  gilt.

Konsistenz ist eine notwendige, aber nicht hinreichende Bedingung für die Konvergenz eines Verfahrens.

### 2.4.2 Taylor

$g(x) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} g^{(k)}(x_0)(x - x_0)^k + \frac{1}{(n+1)!} g^{(n+1)}(\xi)(x - x_0)^{n+1} = \text{Taylor Approximationspolynom} + \text{Lagrangsches Restglied}$   
 $\xi \mapsto [x_0 < \xi < x]$

Alternative  $f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)\frac{h}{1!} + \dots + f^{(n)}(x_0)\frac{h^n}{n!} + R_n(h)$  wobei  $h = x - x_0$

### 2.4.3 Vorwärt/Rückwärtsdifferenz

$g'(x) - \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x} = O(\Delta x) = \frac{g''(\xi)}{2} \Delta x \Rightarrow 1. \text{ Ordnung}$

### 2.4.4 Zentraldifferenz

$g'(x) - \frac{g(x+\Delta x) - g(x-\Delta x)}{2\Delta x} = O(\Delta x^2) = \frac{g'''(\xi_1) + g'''(\xi_2)}{12} \Delta x^2 \Rightarrow 2. \text{ Ordnung}$

### 2.4.5 2.Ableitung

$g''(x) - \frac{g(x+\Delta x) - 2g(x) + g(x-\Delta x))}{\Delta x^2} = O(\Delta x^2) = \frac{g''''(\xi_1) + g''''(\xi_2)}{24} \Delta x^2 \Rightarrow 2. \text{ Ordnung}$

Globaler Konsistenzfehler für 2. Ableitung:  $\|r^{(n)}\|_{1/n} \leq \frac{1}{12} \max_{\xi \in [0,1]} |f''(\xi)| \cdot \Delta x^2$

## 2.5 Stabilität

Die Stabilität einer Matrize kann über deren Norm  $\|A\|_*$  bestimmt werden.

Es gilt:  $\|A\|_* = \max_{\|x\|_*=1} \|A \cdot x\|_* \quad \|A \cdot x\|_* \leq \|A\|_* \|x\|_*$

Ein Approximationsverfahren ist stabil wenn, wenn unabhängig von der konstante  $C$  gilt:  $\|A^{(n)-1}\|_{1/n} \leq C$

Die Bestimmung von  $\|A\|$  ist im Allgemeinen nicht einfach, darum wird  $\|A\|$  oft über den Umweg der Diagonalisierung von  $A$  bestimmt.

$$y = A \cdot x \quad \Rightarrow \quad \tilde{y} = D \cdot \tilde{x} \quad \text{mit} \quad D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

Es gilt  $TAT^T = D$ , wobei  $T$  die Transformationsmatrix vom  $x$ -Koordinatensystem zum  $\tilde{x}$ -Koordinatensystem darstellt.  $T$  ist orthogonal. Die Diagonalelemente  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  werden auch Eigenwerte genannt.

Daraus folgt:  $\|A\| = \max_k |\lambda_k|$  sowie  $\|A^{-1}\| = \{\min_k |\lambda_k|\}^{-1}$

Eigenwerte bestimmen:  $\det(A - \lambda I) = |A - \lambda I| = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1, \dots, \lambda_n$

Eigenvektoren bestimmen (für jedes  $\lambda_i$ ):  $(A - \lambda_i I) \cdot v_i = 0 \quad \Rightarrow \quad v_1, \dots, v_n$

## 2.6 FDM für elliptisch PDGL (Poisson: $-\Delta u = f$ )

Gleichung:  $-\Delta u(x, y) = f(x, y) \quad -\Delta u(x, y) = -\left(\frac{g(x+\Delta x, y) - 2g(x, y) + g(x-\Delta x, y)}{2\Delta x} + \frac{g(x, y+\Delta y) - 2g(x, y) + g(x, y-\Delta y)}{2\Delta y}\right)$

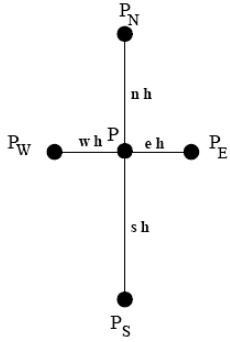
$$h = \Delta x = \Delta y \Rightarrow -\frac{1}{h^2}(\tilde{u}_{j,k+1} + \tilde{u}_{j+1,k} + \tilde{u}_{j,k-1} + \tilde{u}_{j-1,k} - 4\tilde{u}_{j,k}) = f_{j,k}$$

$$B\tilde{u} = f \Rightarrow B = \begin{bmatrix} T & D & 0 & \dots \\ D & T & D & \dots \\ 0 & D & T & \dots \\ 0 & 0 & D & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \text{ wobei } T = \frac{1}{h^2} \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 & \dots \\ -1 & 4 & -1 & \dots \\ 0 & -1 & 4 & \dots \\ 0 & 0 & -1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \text{ und } D = \frac{1}{h^2} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & -1 & \dots & \dots \\ 0 & 0 & -1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}$$

$$\tilde{u} = \begin{bmatrix} \tilde{u}_{1,1} \\ \tilde{u}_{2,1} \\ \vdots \\ \tilde{u}_{1,2} \\ \tilde{u}_{2,2} \\ \vdots \end{bmatrix} \quad f = \begin{bmatrix} f_{1,1} \\ f_{2,1} \\ \vdots \\ f_{1,2} \\ f_{2,2} \\ \vdots \end{bmatrix} + \frac{1}{h^2} \begin{bmatrix} u(0,0) + u(1,0) + u(0,1) \\ u(2,0) \\ \vdots \\ u(0,2) \\ 0 \\ \vdots \end{bmatrix}$$

Randbedingungen müssen in f eingearbeitet werden falls  $u(x, y) \neq 0$  auf  $\partial\Omega$

### 2.6.1 Irreguläre Gitter (für den Rand)



$$-\frac{2}{h^2} \cdot \left( \frac{u(x+e \cdot h, y) - u(x, y)}{e(e+w)} + \frac{u(x-w \cdot h, y) - u(x, y)}{w(e+w)} + \frac{u(x, y+n \cdot h) - u(x, y)}{n(n+s)} + \frac{u(x, y-s \cdot h) - u(x, y)}{s(n+s)} \right) = f(x, y)$$

oder

$$-\frac{2}{h^2} \cdot \left( \frac{u(P_E) - u(P)}{e(e+w)} + \frac{u(P_W) - u(P)}{w(e+w)} + \frac{u(P_N) - u(P)}{n(n+s)} + \frac{u(P_S) - u(P)}{s(n+s)} \right) = f(x, y)$$

Wenn  $\Delta x, \Delta y$  konstant ( $w \cdot h = e \cdot h, n \cdot h = s \cdot h$ ) sowie  $h = 1$ :

$$-\left( \frac{u(P_E) + u(P_W) - 2u(P)}{\Delta x^2} + \frac{u(P_N) + u(P_S) - 2u(P)}{\Delta y^2} \right) = f(x, y)$$

### 2.6.2 Neumann Rand

Bei Neumann Rand-Bedingungen müssen die Randpunkte ebenfalls berechnet werden. In der Abbildung sind  $P, P_N$  und  $P_S$  auf dem Rand,  $P_E$  liegt innerhalb, und  $P_W$  ausserhalb von  $\Omega$ . Gegeben sei die Neumannsche Randbedingung in  $P$ :  $\frac{\partial u}{\partial n}(P) = g(P)$

Aus der Ableitung  $u_x(P) = \frac{\partial u}{\partial n}(P) = \frac{u(P_E) - u(P_W)}{2h}$  kann der ausserhalb liegende Punkt  $u(P_W)$  berechnet werden:  $u(P_W) = u(P_E) - 2h \cdot u_x(P)$ . Somit gilt:

$$\frac{2u(P_E) + u(P_N) + u(P_S) - 4u(P) - 2h \cdot u_x(P)}{h^2}$$

Sind  $P_W$  und  $P_E$  vertauscht, so ist das Vorzeichen umgekehrt:  $u(P_W) = u(P_E) + 2h \cdot u_x(P)$ .

**Spiegelmethode:**

Wenn  $u_x(x, y) = 0$ , dann spricht man auch von der Spiegelmethode. Die Punkte  $P_W$  und  $P_E$  weisen dann die gleiche Wertigkeit auf ( $P_W = P_E$ ).

## 2.7 FDM für parabolische PDGL

Wärmeleitungsgleichung:  $u_t(x, t) = u_{xx}(x, t) \quad f(0) = f(1) = 0 \quad \bar{\Omega} = [0, 1] \times [0, \infty]$

Randbedingungen:  $u(x, 0) = f(x) \quad u(0, t) = u(1, t) = 0 \quad x \in (0, 1) \quad t \in [0, \infty)$

### 2.7.1 Explizites Verfahren (Richardson-Verfahren)

$$\frac{\tilde{u}(x, t + \Delta t) - \tilde{u}(x, t)}{\Delta t} = \frac{\tilde{u}(x + \Delta x, t) - 2\tilde{u}(x, t) + \tilde{u}(x - \Delta x, t)}{\Delta x^2} \quad \Delta x = \frac{1}{n} \quad \Delta t = \frac{r}{n^2} \quad r = \frac{\Delta t}{\Delta x^2}$$

**Idee:** Aus den Positionen  $k$  wird  $k + 1$  berechnet:  $\tilde{u}_{j,k+1} = r\tilde{u}_{j-1,k} + (1 - 2r)\tilde{u}_{j,k} + r\tilde{u}_{j+1,k}$

Diskretisierung von  $t$ :  $k, k+1, \dots$

Diskretisierung von  $x$ :  $j, j+1, \dots$

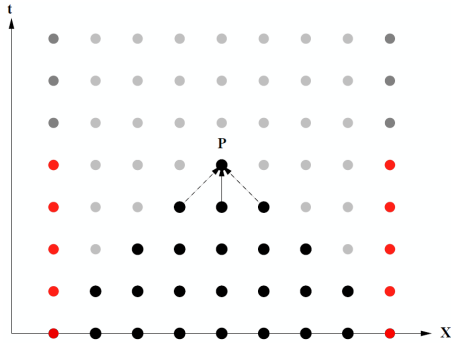
- Initialisierung, Randbedingung:  $\tilde{u}_{j,0} = f(j/n) \quad \tilde{u}_{0,k} = \tilde{u}_{n,k} = 0$

- Approximationsmatrize:  $C^{(n)} = \text{tridiag}_{n-1}(r, 1 - 2r, r) = \begin{bmatrix} 1 - 2r & r & 0 & 0 & \dots \\ r & 1 - 2r & r & 0 & \dots \\ 0 & r & 1 - 2r & r & \dots \\ 0 & 0 & r & 1 - 2r & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$

- Einen Schritt berechnen:  $\tilde{u}^{(k+1)} = C^{(n)}\tilde{u}^{(k)}$

- $k$ -Schritte berechnen:  $\tilde{u}^{(k)} = \{C^{(n)}\}^k \tilde{u}^{(0)}$

**Konvergenzverhalten:**



Verfahren ist stabil wenn:  $\|C^{(n)}\| < 1 \quad \Rightarrow \quad r < \frac{1}{2}$

Dies macht es nötig, die Zeitschritte extrem klein zu wählen. Darum ist das Verfahren auch nicht wirklich praxistauglich, weil sehr hohe Rechenkapazität nötig sind.

Der Grund für das schlechte Konvergenzverhalten kann geometrisch visualisiert werden. In die Berechnung des Wertes im Knoten  $P$ , werden die Werte aller schwarz eingefärbter Knoten eingehen. Von den Randwerten wird nur die 0-te Stufe berücksichtigt.

Damit das Verfahren mit  $C^k$  für  $k$ -Schritte berechnet werden kann, müssen die rot eingefärbten Werte (links und rechts) gleich 0 sein (Boundary Condition). Für den Randvektor  $\tilde{u}^{(0)}$  werden nur die untersten schwarzen 7 Punkte eingefüllt.

### 2.7.2 Implizites Verfahren

Im Unterschied zum expliziten Verfahren, das Werte vom vorherigen Zeitpunkt nutzt, wird hier das ein Gleichungssystem global gelöst.

$$\frac{\tilde{u}(x, t) - \tilde{u}(x, t - \Delta t)}{\Delta t} = \frac{\tilde{u}(x + \Delta x, t) - 2\tilde{u}(x, t) + \tilde{u}(x - \Delta x, t)}{\Delta x^2} \quad \Delta x = \frac{1}{n} \quad \Delta t = \frac{r}{n^2} \quad r = \frac{\Delta t}{\Delta x^2}$$

$$\tilde{u}_{j,k} = -r\tilde{u}_{j-1,k+1} + (1 + 2r)\tilde{u}_{j,k+1} - r\tilde{u}_{j+1,k+1}$$

**Idee:** Die Ableitungen werden mittels Rückwärtsdifferenz berechnet

- Initialisierung, Randbedingung:  $\tilde{u}_{j,0} = f(j/n) \quad \tilde{u}_{0,k} = \tilde{u}_{n,k} = 0$

- Approximationsmatrize:  $E^{(n)} = \text{tridiag}_{n-1}(-r, 1 + 2r, -r) = \begin{bmatrix} 1 + 2r & -r & 0 & 0 & \dots \\ -r & 1 + 2r & -r & 0 & \dots \\ 0 & -r & 1 + 2r & -r & \dots \\ 0 & 0 & -r & 1 + 2r & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$

- Gleichung:  $\tilde{u}^{(k)} = E^{(n)} \cdot \tilde{u}^{(k+1)}$

- Einen Schritt berechnen:  $\tilde{u}^{(k+1)} = \{E^{(n)}\}^{-1} \tilde{u}^{(k)}$

- $k$ -Schritte berechnen:  $\tilde{u}^{(k)} = \{E^{(n)}\}^{-k} \tilde{u}^{(0)}$

**Vorteil:** Das implizite Verfahren ist immer stabil, unabhängig von der Zeitauflösung  $\Delta t$

**Nachteil:** Aufwendige Matrixinversion nötig.

### 2.7.3 Crank Nicolson -Verfahren (gemischtes Verfahren)

Die Idee des Verfahrens von Crank-Nicolson ist es die beiden Approximationen

$$\frac{\tilde{u}(x, t + \Delta t) - \tilde{u}(x, t)}{\Delta t} = \frac{\tilde{u}(x + \Delta x, t) - 2\tilde{u}(x, t) + \tilde{u}(x - \Delta x, t)}{\Delta x^2}$$

$$\frac{\tilde{u}(x, t + \Delta t) - \tilde{u}(x, t)}{\Delta t} = \frac{\tilde{u}(x + \Delta x, t + \Delta t) - 2\tilde{u}(x, t + \Delta t) + \tilde{u}(x - \Delta x, t + \Delta t)}{\Delta x^2}$$

zu mitteln. Mit dieser Idee geht das stetige Problem in folgendes diskretes Problem über:

$$-r\tilde{u}_{j-1,k+1} + (2+2r)\tilde{u}_{j,k+1} - r\tilde{u}_{j+1,k+1} = r\tilde{u}_{j-1,k} + (2-2r)\tilde{u}_{j,k} + r\tilde{u}_{j+1,k}$$

Wie bei den anderen Verfahren gilt:  $\Delta x = \frac{1}{n}$   $\Delta t = \frac{r}{n^2}$   $r = \frac{\Delta t}{\Delta x^2}$

- Initialisierung, Randbedingung:  $\tilde{u}_{j,0} = f(j/n)$   $\tilde{u}_{0,k} = \tilde{u}_{n,k} = 0$

- Approximationsmatrizen:

$$F^{(n)} = E^{(n)} + I = \text{tridiag}_{n-1}(-r, 2+2r, -r) = \begin{bmatrix} 2+2r & -r & 0 & 0 & \dots \\ -r & 2+2r & -r & 0 & \dots \\ 0 & -r & 2+2r & -r & \dots \\ 0 & 0 & -r & 2+2r & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

$$G^{(n)} = C^{(n)} + I = \text{tridiag}_{n-1}(r, 2-2r, r) = \begin{bmatrix} 2-2r & r & 0 & 0 & \dots \\ r & 2-2r & r & 0 & \dots \\ 0 & r & 2-2r & r & \dots \\ 0 & 0 & r & 2-2r & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

- Gleichung:  $F^{(n)} \cdot \tilde{u}^{(k+1)} = G^{(n)} \cdot \tilde{u}^{(k)}$
- Einen Schritt berechnen:  $\tilde{u}^{(k+1)} = \{F^{(n)}\}^{-1} \cdot G^{(n)} \cdot \tilde{u}^{(k)}$
- $k$ -Schritte berechnen:  $\tilde{u}^{(k)} = \left(\{F^{(n)}\}^{-1} \cdot G^{(n)}\right)^k \cdot \tilde{u}^{(0)}$

## 2.8 FDM für Hyperbolische PDGL

$u_{tt} = u_{xx} \rightarrow$  homogen

Anfangsbedingungen:

$u_{tt} - u_{xx} = v(x, t) \rightarrow$  inhomogen

$u(x, 0) = f(x)$   $u_t(x, 0) = g(x)$

### 2.8.1 Leap-Frog-Schema

$$\tilde{u}_{j,k+1} = r^2 \tilde{u}_{j-1,k} + 2(1-r^2)\tilde{u}_{j,k} + r^2 \tilde{u}_{j+1,k} - \tilde{u}_{j,k-1} \quad r = \frac{\Delta t}{\Delta x}$$

$$\tilde{u}_{j,0} = f(j\Delta x) \quad \tilde{u}_{j,1} = f(j\Delta x) + g(j\Delta x)\Delta t + f''(j\Delta x)\frac{\Delta t^2}{2}$$

### 2.8.2 Transportgleichung

$$u_x(x, t) + u_t(x, t) = 0 \quad u(x, 0) = f(x) \rightarrow u(x, t) = f(x - t)$$

#### Downwind Scheme

$$\frac{\tilde{u}(x, t + \Delta t) - \tilde{u}(x, t)}{\Delta t} + \frac{\tilde{u}(x + \Delta x, t) - \tilde{u}(x, t)}{\Delta x} = 0 \quad \tilde{u}_{j,k+1} = (1+r)\tilde{u}_{j,k} - r\tilde{u}_{j+1,k} \quad r = \frac{\Delta t}{\Delta x} \quad \text{Meist Divergent}$$

#### Upwind Scheme

$$\frac{\tilde{u}(x, t + \Delta t) - \tilde{u}(x, t)}{\Delta t} + \frac{\tilde{u}(x, t) - \tilde{u}(x - \Delta x, t)}{\Delta x} = 0 \quad \tilde{u}_{j,k+1} = (1-r)\tilde{u}_{j,k} + r\tilde{u}_{j-1,k} \quad \text{Konvergent für } r = \frac{\Delta t}{\Delta x} \leq 1$$

#### Centered Scheme

$$\frac{\tilde{u}(x, t + \Delta t) - \tilde{u}(x, t)}{\Delta t} + \frac{\tilde{u}(x + \Delta x, t) - \tilde{u}(x - \Delta x, t)}{2\Delta x} = 0 \quad \tilde{u}_{j,k+1} = -\frac{r}{2}\tilde{u}_{j+1,k} + \tilde{u}_{j,k} + \frac{r}{2}\tilde{u}_{j-1,k} \quad r = \frac{\Delta t}{\Delta x}$$



## Lax-Wendroff Scheme

$$\tilde{u}_{j,k+1} = A\tilde{u}_{j+1,k} + B\tilde{u}_{j,k} + C\tilde{u}_{j-1,k} \quad r = \frac{\Delta t}{\Delta x} \quad A = \frac{r^2 - r}{2} \quad B = 1 - r^2 \quad C = \frac{r^2 + r}{2}$$

## 2.9 FVM (Finite Volumen Methode, Verfahren von Voronoi)

$$\Delta u = 0 \quad \text{in } \Omega$$

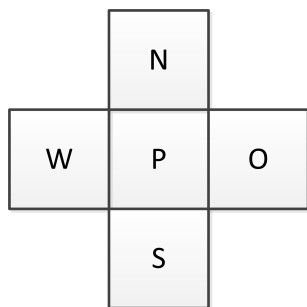
$$u(x, y) = f(x, y) \quad \text{auf } \partial\Omega$$

Der Satz von Gauss sagt:

$$\oint_{\Gamma} \Delta u(x, y) dx dy = \int_{\Gamma} \operatorname{div} \operatorname{grad} u(x, y) dx dy = \oint_{\partial\Gamma} \operatorname{grad} u(x, y) d\vec{n}$$

Wobei der Randnormalvektor  $\vec{n}$  immer senkrecht gegen das Aussengebiet  $\Gamma$  gerichtet wird.

$$\Rightarrow \oint_{\Gamma} \Delta u(x, y) dx dy = \oint_{\partial\Gamma} \operatorname{grad} u(x, y) d\vec{n} = 0$$



$$\frac{u(P_E) - u(P_P)}{h} \cdot h + \frac{u(P_N) - u(P_P)}{h} \cdot h + \frac{u(P_W) - u(P_P)}{h} \cdot h + \frac{u(P_S) - u(P_P)}{h} \cdot h \approx 0$$

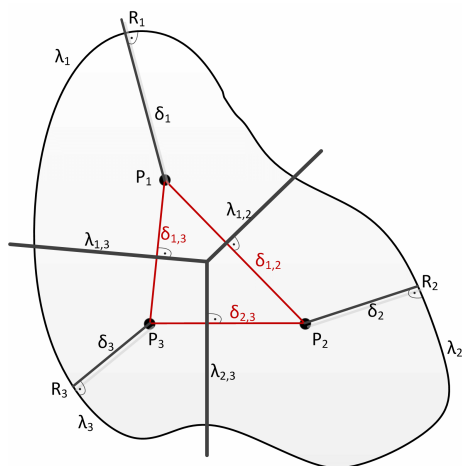
$$\Rightarrow \tilde{u}(P_E) + \tilde{u}(P_N) + \tilde{u}(P_W) + \tilde{u}(P_S) - 4 \cdot \tilde{u}(P_P) = 0$$

### Vorteile:

- Man kann mit Flussgrößen und Bilanzen rechnen, dadurch kann der Laplace-Operator ( $\Delta$ ) verzichtet werden und somit die aufwendige Mathematik umgangen werden.
- Es kann mit komplizierten Geometrien gerechnet werden.

### Vorgehen bei der Berechnung:

1. Punkte  $P_1, \dots, P_n$  wählen.
2. Aufteilen des Bereichs in kleine Teilbereiche, z.B. durch Mittelsenkrechte
3. Rand diskretisieren.

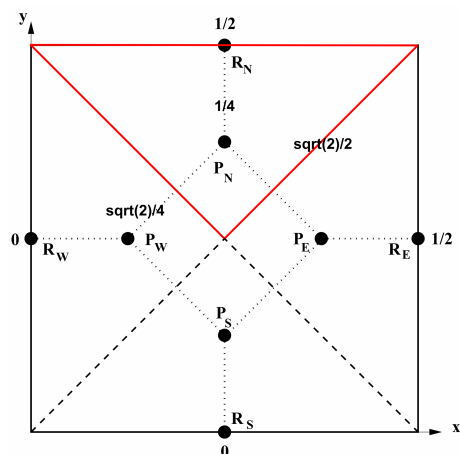


Für  $P_i$ -Zelle:  $\sum_j \frac{u(P_{i,j}) - u(P_i)}{\delta_{i,j}} \cdot \lambda_{i,j} = 0$

Für P1-Zelle:  $\frac{\tilde{u}(P_2) - \tilde{u}(P_1)}{\delta_{1,2}} \cdot \lambda_{1,2} + \frac{\tilde{u}(P_3) - \tilde{u}(P_1)}{\delta_{1,3}} \cdot \lambda_{1,3} + \frac{\tilde{u}(R_1) - \tilde{u}(P_1)}{\delta_1} \cdot \lambda_1 = 0$

Für P2-Zelle:  $\frac{\tilde{u}(P_1) - \tilde{u}(P_2)}{\delta_{1,2}} \cdot \lambda_{1,2} + \frac{\tilde{u}(P_3) - \tilde{u}(P_2)}{\delta_{2,3}} \cdot \lambda_{2,3} + \frac{\tilde{u}(R_2) - \tilde{u}(P_2)}{\delta_2} \cdot \lambda_2 = 0$

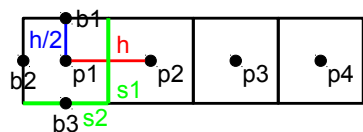
Für P3-Zelle:  $\frac{\tilde{u}(P_2) - \tilde{u}(P_3)}{\delta_{2,3}} \cdot \lambda_{2,3} + \frac{\tilde{u}(P_1) - \tilde{u}(P_3)}{\delta_{1,3}} \cdot \lambda_{1,3} + \frac{\tilde{u}(R_3) - \tilde{u}(P_3)}{\delta_3} \cdot \lambda_3 = 0$



$$\frac{\tilde{u}(P_E) - \tilde{u}(P_N)}{1/4 \cdot \sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\tilde{u}(P_W) - \tilde{u}(P_N)}{1/4 \cdot \sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\tilde{u}(R_N) - \tilde{u}(P_N)}{1/4} \cdot 1 = 0$$

$$(\tilde{u}_E - \tilde{u}_N) \cdot 2 + (\tilde{u}_W - \tilde{u}_N) \cdot 2 + (1/2 - \tilde{u}_N) \cdot 4 = 0$$

$$0 \cdot \tilde{u}_S + 2 \cdot \tilde{u}_E + 2 \cdot \tilde{u}_W - 8 \cdot \tilde{u}_N + 2 = 0$$



Surface:  $s_1 = s_2 = h$

$$u_1: \frac{u(b_1) - u(p_1)}{h/2} \cdot h + \frac{u(b_2) - u(p_1)}{h/2} \cdot h + \frac{u(b_3) - u(p_1)}{h/2} \cdot s_2 + \frac{u(p_2) - u(p_1)}{h} \cdot s_1$$

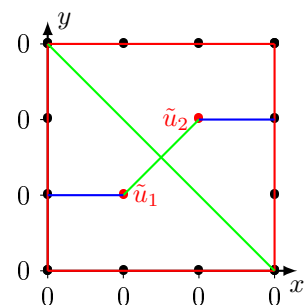
$$\text{Achtung wenns schnell gehen muss: } \frac{u(b_2) - u(p_1)}{h/2} \cdot h = (u(b_2) - u(p_1)) \cdot 2$$

example with  $\Delta u(x, y) \neq 0$  and two voronoi points:

The function  $u(x, y)$  is defined on the square  $\Omega = [0, 3] \times [0, 3]$ . The function  $u(x, y)$  satisfies in  $\Omega$

$$\Delta u(x, y) + 4 = 0$$

and  $u(x, y) = 0$  on the boundary of  $\Omega$ . Determine approximate values for  $u(1, 1)$  and  $u(2, 2)$ . Use finite volumes à la Voronoi with Voronoi-points  $(1, 1)$  and  $(2, 2)$



$$\frac{1}{2} \int_0^3 \int_0^3 -4 \, dx \, dy = -18$$

Function integrated over the voronoi cell example 68 in the script

$$\frac{0 - \tilde{u}_1}{1} \cdot 6 + \frac{\tilde{u}_2 - \tilde{u}_1}{\sqrt{2}} \cdot 3\sqrt{2} = -18$$

$$\frac{0 - \tilde{u}_2}{1} \cdot 6 + \frac{\tilde{u}_1 - \tilde{u}_2}{\sqrt{2}} \cdot 3\sqrt{2} = -18$$

$$A = \begin{bmatrix} -9 & 3 \\ 3 & -9 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{u}_1 \\ \tilde{u}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -18 \\ -18 \end{pmatrix}$$

### 3 FEM

Der Vektorraum  $\mathbb{V}$  hat unendlich viele Dimensionen. Falls wir  $n$  unabhängige Funktionen  $v_1, \dots, v_n$  wählen, dann spannen die Funktionen  $a_1 \cdot v_1(x) + \dots + a_n \cdot v_n(x)$  einen  $n$  dimensionalen Teilraum  $\mathbb{V}^{(n)}$  von  $\mathbb{V}$  auf. Dabei gilt:

$$\tilde{u}^{(n)} = a_1 \cdot v_1(x) + \dots + a_n \cdot v_n(x)$$

#### 3.1 Das Verfahren von Ritz

**Ritzsche Matrize:**  $R^{(n)} = \begin{bmatrix} R_{1,1} & R_{1,2} & \cdots \\ R_{2,1} & R_{2,2} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$  mit  $R_{j,k}^{(n)} = \int_0^1 v_j'(x) \cdot v_k'(x) dx$

**Ritzscher Vektor:**  $r^{(n)} = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \end{bmatrix}$  mit  $r_k^{(n)} = \int_0^1 f(x) \cdot v_k(x) dx$

**Lösung nach Ritz:**  $R^{(n)} \cdot a = r^{(n)} \Rightarrow a = \{R^{(n)}\}^{-1} \cdot r^{(n)}$

#### 3.2 Das Verfahren von Galerkin

**Galerksche Matrize:**  $G^{(n)} = \begin{bmatrix} G_{1,1} & G_{1,2} & \cdots \\ G_{2,1} & G_{2,2} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$  mit  $G_{j,k}^{(n)} = \int_0^1 \underbrace{(v_j''(x))}_{v_j \text{ in Form von DGL!}} \cdot v_k(x) dx$

**Galerkscher Vektor:**  $g^{(n)} = \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ \vdots \end{bmatrix}$  mit  $g_k^{(n)} = \int_0^1 f(x) \cdot v_k(x) dx$

**Lösung nach Galerkin:**  $G^{(n)} \cdot a + g^{(n)} = 0 \Rightarrow a = -\{G^{(n)}\}^{-1} \cdot g^{(n)}$  nach Ritz  $G^{(n)} = -R^{(n)}$   $g^{(n)} = r^{(n)}$

Die obige Matrix ist nur für die PDGL  $-u''(x) = f(x)$  mit dem Ansatz  $\tilde{u}(x) = a_1 \cdot v_1(x) + a_2 \cdot v_2(x)$  gültig. Ansonsten muss ein Gleichungssystem für  $v_k = v_1$  und  $v_2$  aufgestellt werden (Beispiel für DGL:  $u''(x) + u(x) + x = 0$ ):

$$\int_0^1 (a_1 \cdot v_1''(x) + a_2 \cdot v_2''(x) + a_1 \cdot v_1(x) + a_2 \cdot v_2(x) + x) \cdot v_k(x) dx = 0 \rightarrow G_{j,k}^{(n)} = \int_0^1 (v_j''(x) + v_j(x)) \cdot v_k(x) dx$$

#### 3.3 Gewichtete Residuen

Gewichtungsfunktionen:  $\{w_1(x), \dots, w_n(x)\}$

**Matrize (gewichtete Residuen):**  $M^{(n)} = \begin{bmatrix} M_{1,1} & M_{1,2} & \cdots \\ M_{2,1} & M_{2,2} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$  mit  $M_{j,k}^{(n)} = \int_0^1 v_j''(x) \cdot w_k(x) dx$

**Vektor (gewichtete Residuen):**  $m^{(n)} = \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ \vdots \end{bmatrix}$  mit  $m_k^{(n)} = \int_0^1 f(x) \cdot w_k(x) dx$

**Lösung der gewichteten Residuen:**  $M^{(n)} \cdot a + m^{(n)} = 0 \Rightarrow a = -\{M^{(n)}\}^{-1} \cdot m^{(n)}$

#### 3.4 Punktkollokation

Im Sinne einer Punktkollokation (einzelne Punkte müssen zwischen wahren Resultat und Approximation übereinstimmen) werden  $n$  Stützstellen im Intervall von  $[0, 1]$  gewählt.

$$\begin{bmatrix} v_1''(x_1) & v_2''(x_1) & \cdots \\ v_1''(x_2) & v_2''(x_2) & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -f(x_1) \\ -f(x_2) \\ \vdots \end{bmatrix} \quad \text{Das Gleichungssystem nach a auflösen}$$

Die obige Matrix ist nur für die PDGL  $-u''(x) = f(x)$  mit dem Ansatz  $\tilde{u}(x) = a_1 \cdot v_1(x) + a_2 \cdot v_2(x)$  gültig. Ansonsten muss die DGL mit den Ansatzfunktionen aufgestellt und an beiden Punkten eingesetzt werden, um  $a_1$  und  $a_2$  zu bestimmen:

DGL:  $u''(x) + u(x) = -x \Rightarrow$  Gleichung an Punkt 1:  $a_1 \cdot v_1''(x_1) + a_2 \cdot v_2''(x_1) + a_1 \cdot v_1(x_1) + a_2 \cdot v_2(x_1) = -x_1$

### 3.5 Bereichskollokation

Im Gegensatz zur Punktkollokation müssen nicht einzelne Punkte sondern ganze Bereiche (Intervalle  $I_k$ ) übereinstimmen. Für  $-u''(x) = f(x)$  wird dieses Gleichungssystem aufgestellt.

$$\begin{bmatrix} \int_{I_1} v_1'' & \int_{I_1} v_2'' & \cdots \\ \int_{I_2} v_1'' & \int_{I_2} v_2'' & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\int_{I_1} f(x) \\ -\int_{I_2} f(x) \\ \vdots \end{bmatrix} \quad \text{Das Gleichungssystem nach } a \text{ auflösen}$$

### 3.6 Das Verfahren von Gauss (MSE)

**Gausscher Matrize:**  $Q^{(n)} = \begin{bmatrix} Q_{1,1} & Q_{1,2} & \cdots \\ Q_{2,1} & Q_{2,2} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$  mit  $Q_{j,k}^{(n)} = \int_0^1 v_j''(x) \cdot v_k''(x) dx$

**Gausscher Vektor:**  $q^{(n)} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \end{bmatrix}$  mit  $q_k^{(n)} = \int_0^1 f(x) \cdot v_k''(x) dx$

**Lösung nach Gauss:**  $Q^{(n)} \cdot a + q^{(n)} = 0 \quad \Rightarrow \quad a = -\{Q^{(n)}\}^{-1} \cdot q^{(n)}$

### 3.7 Finite Elemente

Die besprochenen Verfahren setzen die Wahl eines Satzes  $v_1(x), \dots, v_n(x)$  von Grundfunktionen voraus. Bei FEM wird mit lokalen Trägern (Grundfunktionen) gearbeitet, diese sind nur auf einem kleinen Intervall ungleich null. Der Vorteil dieses Vorgehens liegt darin, dass in einem Bereich nur ein Träger die Approximationsfunktion beeinflusst. Der Nachteil liegt in der hohen Anzahl der so benötigten Träger.

**WICHTIG:** Alle Verfahren werden mit einer Diskretisierung von  $h = 1/3$  vorgestellt.

#### 3.7.1 Knotenvariablen

Als erstes werden auf dem Intervall  $[0, 1]$   $n$ , normalerweise gleichverteilte, Knotenstellen eingeführt.

Dadurch wird das Intervall  $[0, 1]$  in Teilintervalle (Maschen) zerlegt.

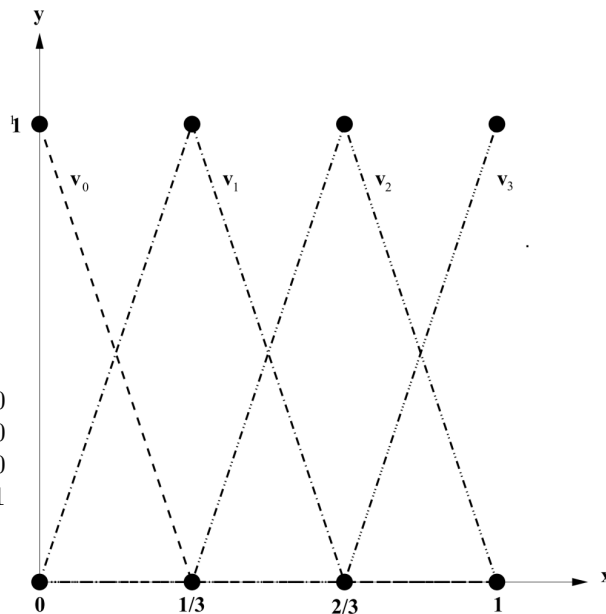
Für  $n = 3$ :  $I_1 = [0, 1/3]$   $I_2 = [1/3, 2/3]$   $I_3 = [2/3, 1]$

Als nächstes wird jeder Knotenstelle  $x_k$  eine Ansatzvariable (Knotenvariable) zugeordnet.

Ansatz:  $\tilde{u}(0) = a_0 \quad \tilde{u}(1/3) = a_1 \quad \tilde{u}(2/3) = a_2 \quad \tilde{u}(1) = a_3$

Zusatzbedingungen:

$v_0(0) = 1$	$v_0(1/3) = 0$	$v_0(2/3) = 0$	$v_0(1) = 0$
$v_1(0) = 0$	$v_1(1/3) = 1$	$v_1(2/3) = 0$	$v_1(1) = 0$
$v_2(0) = 0$	$v_2(1/3) = 0$	$v_2(2/3) = 1$	$v_2(1) = 0$
$v_3(0) = 0$	$v_3(1/3) = 0$	$v_3(2/3) = 0$	$v_3(1) = 1$



#### 3.7.2 Formfunktionen

Die lokalen Grundfunktionen sollen aus Teilstücken einfacher Funktionen, z.B: Polynomen, die nur auf einer einzelnen Masche definiert sind zusammengesetzt werden.

Zwei mögliche Formfunktionen sind Beispielsweise:  $l_1(x) = 1 - x$  und  $l_2(x) = x$

$t \in [0, 1/3]$ $v_0 = 1 - 3x$ $v_1 = 3x$ $v_2 = 0$ $v_3 = 0$	$[1/3, 2/3]$ $0$ $2 - 3x$ $-1 + 3x$ $0$	$[2/3, 1]$ $0$ $0$ $3 - 3x$ $-2 + 3x$
--	---	---

 $\implies$ 

$t \in [0, 1/3]$ $v_0 = l_1(3x)$ $v_1 = l_2(3x)$ $v_2 = 0$ $v_3 = 0$	$[1/3, 2/3]$ $0$ $l_1(3x - 1)$ $l_2(3x - 1)$ $0$	$[2/3, 1]$ $0$ $0$ $l_1(3x - 2)$ $l_2(3x - 2)$
--	--	--

### 3.7.3 Elementmatrizen

Grundsätzlich kann die Ansatzvariable durch jedes Verfahren bestimmt werden. Weil bei einer linearen Ansatzfunktion die zweite Ableitung trivial ( $= 0$ ) ist die Wahl des Ritzschen Verfahren erzwungen.

Die Integrale werden maschenweise ausgewertet:

$$\int_0^1 = \int_0^{1/3} + \int_{1/3}^{2/3} + \int_{2/3}^1$$

Durch diesen Ansatz wird die Ritzsche Matrize über jede Masche einzeln berechnet und danach zur globalen Ritzschen Matrize aufsummiert:

$$R^{(4)} = R^{(4,1)} + R^{(4,2)} + R^{(4,3)} = \begin{bmatrix} * & * & 0 & 0 \\ * & * & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & * & * & 0 \\ 0 & * & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & * & * \end{bmatrix}$$

Die mit  $*$  bezeichneten  $2 \times 2$  Matrizen heissen Maschenmatrizen:

$$M^{(4,1)} = M^{(4,2)} = M^{(4,3)} = \begin{bmatrix} * & * \\ * & * \end{bmatrix} = 3 \cdot \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \boxed{M = \frac{1}{h} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{E}: \text{Elementmatrize}} = \frac{1}{h} \cdot \mathbf{E}}$$

Die Elementmatrize wird nun in die entsprechende Ritzsche Matrize eingesetzt und überlagert. Für die Quantisierung von  $h = 1/3$  ergibt sich:

$$R^4 = \begin{bmatrix} -3 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & -6 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \end{bmatrix}$$

Der Ritzsche Vektor muss mittels Integration berechnet werden:

$$r^4 = \begin{bmatrix} \int_0^1 f(x) \cdot v_0(x) dx \\ \int_0^1 f(x) \cdot v_1(x) dx \\ \int_0^1 f(x) \cdot v_2(x) dx \\ \int_0^1 f(x) \cdot v_3(x) dx \end{bmatrix}$$

$$\text{Das Ritzsche Gleichungssystem dazu ist: } \boxed{R^4 \cdot a + r^4 = 0} \quad \Rightarrow \quad a = -\{R^4\}^{-1} \cdot r^4$$

**Anfangsbedingungen:** Die Anfangsbedingungen  $a_0$  und  $a_n$  können direkt eingesetzt werden.

$$a_0 = 10 \quad a_3 = 20$$

$$\begin{bmatrix} 3 & -6 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & -6 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 10 \\ a_1 \\ a_2 \\ 20 \end{bmatrix} + r^4 = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} -6 & 3 \\ 3 & -6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 30 \\ 60 \end{bmatrix} + r^4 = 0$$

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & 3 \\ 3 & -6 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} -\left(r_1^4 + 3 \cdot a_0\right) \\ -\left(r_2^4 + 3 \cdot a_3\right) \end{bmatrix}$$

### 3.7.4 Die Finite Elemente Handrechnung

**Problemstellung:**  $u''(x) + f(x) = 0$      $f(x) = 20$      $u(0) = 10$      $u(1) = 20$

Die Approximation soll auf den **NICHT** gleichverteilten Intervallen:  $[0, 1/6]$ ,  $[1/6, 1/2]$ ,  $[1/2, 1]$

Die Entsprechenden Elementmatrizen E sind:

$$\frac{1}{1/6} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & 6 \\ 6 & -6 \end{bmatrix} \quad \frac{1}{1/2-1/6} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 3 \\ 3 & -3 \end{bmatrix} \quad \frac{1}{1-1/2} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$$

Der Ritzsche Vektor und die Ritzsche Matrize sind:

$$R^n = \begin{bmatrix} -6 & 6 & 0 & 0 \\ 6 & -9 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \end{bmatrix}$$

$$r^n = \begin{bmatrix} \int_0^{1/6} f(x) \cdot (1-6x) dx \\ \int_0^{1/6} f(x) \cdot (6x) + \int_{1/6}^{3/6} f(x) \cdot (3/2-3x) dx \\ \int_{1/6}^{3/6} f(x) \cdot (3x-1/2) + \int_{3/6}^1 f(x) \cdot (2-2x) dx \\ \int_{1/2}^1 f(x) \cdot (2x-1) dx \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5/3 \\ 5 \\ 25/3 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$R^n \cdot a + r^n = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} -6 & 6 & 0 & 0 \\ 6 & -9 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 10 \\ a_1 \\ a_2 \\ 20 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5/3 \\ 5 \\ 25/3 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} 6 & -9 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & -5 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ 20 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5/3 \\ 5 \\ 25/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{bmatrix} -9 & 3 \\ 3 & -5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 \cdot 10 \\ 2 \cdot 20 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 \\ 25/3 \end{bmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} -9 & 3 \\ 3 & -5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -65 \\ -145/3 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 235/18 \\ 35/2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \tilde{u}(x) = 10 \cdot v_0(x) + \frac{235}{18} v_1(x) + \frac{35}{2} \cdot v_2(x) + 20 \cdot v_3(x) =$$

### 3.7.5 h-Strategie

Die Grundidee der h-Strategie ist die Verfeinerung der Auflösung. Mit anderen Worten die Maschenbreite  $h$  wird verkleinert. Um den ganzen Bereich dennoch abdecken zu können sind mehr Maschen notwendig.

### 3.7.6 p-Strategie

Bei der p-Strategie bleibt das Netz bestehen. Die Ansatzfunktionen sollen nun durch Polynome höherer Ordnung zusammengesetzt werden, dazu werden neue Knoten und Knotenvariablen eingeführt werden.

**Problemstellung:**  $u''(x) + f(x) = 0$      $u(0) = a_0$      $u(1) = a_6$

Die Approximation soll auf dem gleichverteilten Intervallen gelten:  $[0, 1/3]$ ,  $[1/3, 2/3]$ ,  $[2/3, 1]$

Formfunktionen:

$$q_1(x) = (1-x) \cdot (1-2x)$$

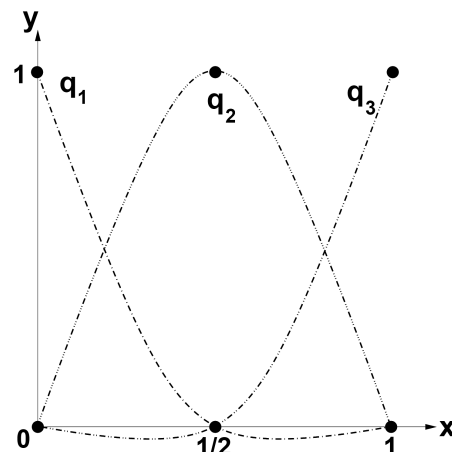
$$q_2(x) = 4x \cdot (1-x)$$

$$q_3(x) = -x \cdot (1-2x)$$

Elementmatrize:

$$E = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -7 & 8 & -1 \\ 8 & -16 & 8 \\ -1 & 8 & -7 \end{bmatrix}$$

$x \in$	$[0, 1/3]$	$[1/3, 2/3]$	$[2/3, 1]$
$v_0 =$	$q_1(3x)$	0	0
$v_1 =$	$q_2(3x)$	0	0
$v_2 =$	$q_3(3x)$	$q_1(3x-1)$	0
$v_3 =$	0	$q_2(3x-1)$	0
$v_4 =$	0	$q_3(3x-1)$	$q_1(3x-2)$
$v_5 =$	0	0	$q_2(3x-2)$
$v_6 =$	0	0	$q_3(3x-2)$



$$\underbrace{\begin{bmatrix} -7 & 8 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 8 & -16 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 8 & -14 & 8 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & -16 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 8 & -14 & 8 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & -16 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 8 & -7 \end{bmatrix}}_{\text{Ritzsche Matrize } R^{(8)} \text{ für } h=1/3} \cdot \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} \int_0^1 f(x) \cdot v_0(x) dx \\ \int_0^1 f(x) \cdot v_1(x) dx \\ \int_0^1 f(x) \cdot v_2(x) dx \\ \int_0^1 f(x) \cdot v_3(x) dx \\ \int_0^1 f(x) \cdot v_4(x) dx \\ \int_0^1 f(x) \cdot v_5(x) dx \\ \int_0^1 f(x) \cdot v_6(x) dx \end{bmatrix}}_{\text{Ritzscher Vektor } r^{(8)} \text{ für } h=1/3} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

**Vorteil der p-Strategie gegenüber der h-Strategie:** Bei beiden Strategien steigt die Dimension der Systemmatrizen an. Es besteht jedoch die berechtigte Hoffnung, dass der Zuwachs der benötigt wird, um eine vergleichbare Genauigkeit zu erreichen, bei der p-Strategie weitaus geringer ist als bei der h-Strategie.

### 3.8 Konformität und Vollständigkeit

Muss nun die Approximationslösung zweimal ableitbar sein, so gilt der Ansatz des letzten Abschnitt nicht mehr als konform. Um die einmalige Differenzierbarkeit an den Knoten zu gewährleisten müssen neue Grundfunktionen gefunden werden.

$$\tilde{u}(x) = a_0 v_0(x) + a_1 v_1(x) + a_2 v_2(x) + a_3 v_3(x) + \tilde{a}_0 \tilde{v}_0(x) + \tilde{a}_1 \tilde{v}_1(x) + \tilde{a}_2 \tilde{v}_2(x) + \tilde{a}_3 \tilde{v}_3(x)$$

Zwei Grundfunktionen stellen den richtigen Wert an den Knoten sicher. Zwei weitere Grundfunktionen werden benötigt um die erste Ableitung (Steigung) an den Übergangsknoten sicherzustellen, sie sorgen für die Vollständigkeit der Grundfunktionen. (Ohne die zwei weiteren Grundfunktionen wäre an den Übergangsknoten nur eine Steigung von Null möglich.)

### 3.9 Hermitesche Polynome dritter Ordnung

Übereinstimmung bis zur 1. Ableitung an den Knotenpunkten

$$\textbf{Problemstellung: } u''(x) + f(x) = 0 \quad u(0) = a_0 \quad u'(0) = \tilde{a}_0 \quad u(1) = a_3 \quad u'(1) = \tilde{a}_3$$

Die Approximation soll auf dem gleichverteilten Intervallen gelten:  $[0, 1/3]$ ,  $[1/3, 2/3]$ ,  $[2/3, 1]$

Formfunktionen:

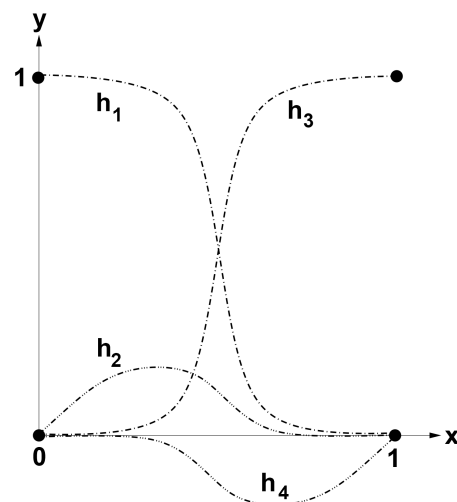
$$h_1(x) = 2x^3 - 3x^2 + 1$$

$$h_2(x) = x^3 - 2x^2 + x$$

$$h_3(x) = -2x^3 + 3x^2$$

$$h_4(x) = x^3 - x^2$$

$x \in$	$[0, 1/3]$	$[1/3, 2/3]$	$[2/3, 1]$
$v_0 =$	$h_1(3x)$	0	0
$\tilde{v}_0 =$	$\frac{1}{3}h_2(3x)$	0	0
$v_1 =$	$h_3(3x)$	$h_1(3x-1)$	0
$\tilde{v}_1 =$	$\frac{1}{3}h_4(3x)$	$\frac{1}{3}h_2(3x-1)$	0
$v_2 =$	0	$h_3(3x-1)$	$h_1(3x-2)$
$\tilde{v}_2 =$	0	$\frac{1}{3}h_4(3x-1)$	$\frac{1}{3}h_2(3x-2)$
$v_3 =$	0	0	$h_3(3x-2)$
$\tilde{v}_3 =$	0	0	$\frac{1}{3}h_2(3x-1)$



$$E = \frac{1}{30} \begin{bmatrix} -36 & -3 & 36 & -3 \\ -3 & -4 & 3 & 1 \\ 36 & 3 & -36 & 3 \\ -3 & 1 & 3 & -4 \end{bmatrix} \Rightarrow M = \frac{1}{30 \cdot h} \begin{bmatrix} -36 & -3 \cdot h & 36 & -3 \cdot h \\ -3 \cdot h & -4 \cdot h^2 & 3 \cdot h & 1 \cdot h^2 \\ 36 & 3 \cdot h & -36 & 3 \cdot h \\ -3 \cdot h & 1 \cdot h^2 & 3 \cdot h & -4 \cdot h^2 \end{bmatrix}$$

$$\underbrace{\frac{3}{30} \begin{bmatrix} -36 & -1 & 36 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -4/9 & 1 & 1/9 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 36 & 1 & -72 & 0 & 36 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1/9 & 0 & -8/9 & 1 & 1/9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 36 & 1 & -72 & 0 & 36 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1/9 & 0 & -8/9 & 1 & 1/9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 36 & 1 & -36 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1/9 & 1 & -4/9 \end{bmatrix}}_{\text{Ritzsche Matrize } R^{(8)} \text{ für } h=1/3} \cdot \begin{bmatrix} a_0 \\ \tilde{a}_0 \\ a_1 \\ \tilde{a}_1 \\ a_2 \\ \tilde{a}_2 \\ a_3 \\ \tilde{a}_3 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} \int_0^1 f(x) \cdot v_0(x) dx \\ \int_0^1 f(x) \cdot \tilde{v}_0(x) dx \\ \int_0^1 f(x) \cdot v_1(x) dx \\ \int_0^1 f(x) \cdot \tilde{v}_1(x) dx \\ \int_0^1 f(x) \cdot v_2(x) dx \\ \int_0^1 f(x) \cdot \tilde{v}_2(x) dx \\ \int_0^1 f(x) \cdot v_3(x) dx \\ \int_0^1 f(x) \cdot \tilde{v}_3(x) dx \end{bmatrix}}_{\text{Ritzscher Vektor } r^{(8)} \text{ für } h=1/3} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$



## 4 Fourierreihe

Komplex:

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \cdot e^{jk\omega_f t} = \sum_{k=0}^{\infty} (c_k \cdot e^{jk\omega_f t} + \bar{c}_k \cdot e^{-jk\omega_f t}) \quad c_k = \bar{c}_{-k} = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) \cdot e^{-jk\omega_f t} dt$$

Reell:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos(k\omega_f t) + b_k \sin(k\omega_f t)] = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(k\omega_f t + \varphi_k) \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) dt, \quad a_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos(k\omega_f t) dt, \quad b_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin(k\omega_f t) dt \quad \omega_f = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$$

$a_0, c_0, A_0$  sind Konstanten,  $\omega_f$  ist die Grundkreisfrequenz,  $a_k$  und  $b_k$  sind die reellen Koeffizienten,  $c_k$  ist der komplexe Koeffizient,  $A_k$  ist die Amplitude und  $\varphi_k$  ist die Phase.

$$a_k = c_k + \bar{c}_k = 2 \operatorname{Re}(c_k) = A_k \cos(\varphi_k)$$

$$b_k = j(c_k - \bar{c}_k) = -2 \operatorname{Im}(c_k) = -A_k \sin(\varphi_k)$$

$$c_k = \frac{a_k - jb_k}{2} = \frac{A_k}{2} e^{j\varphi_k}$$

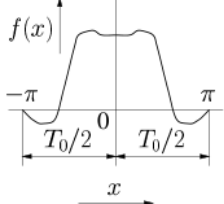
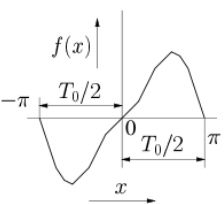
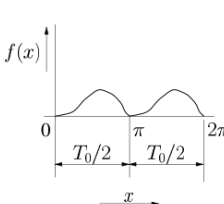
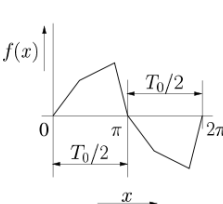
$$c_{-k} = \bar{c}_k = \frac{a_k + jb_k}{2} = \frac{A_k}{2} e^{-j\varphi_k}$$

$$A_k = 2|c_k| = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}$$

Berechnung von  $\varphi_k$  aus  $a_k$  und  $b_k$

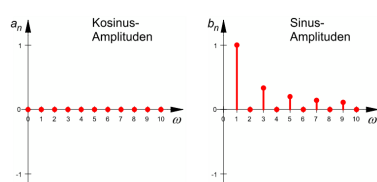
$a_k > 0$ :	$\varphi_k = -\arctan(\frac{b_k}{a_k})$	$a_k < 0$ :	$\varphi_k = -\arctan(\frac{b_k}{a_k}) + \pi$
$a_k = 0; b_k > 0$ :	$\varphi_k = -\frac{\pi}{2}$	$a_k = 0; b_k < 0$ :	$\varphi_k = \frac{\pi}{2}$
$a_k = b_k = 0$ :	$\varphi_k = \text{nicht definiert}$		$\varphi_k = \arg(c_k)$

### 4.1 Symmetrie

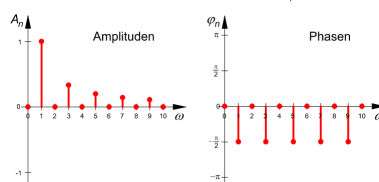
gerade Funktion	ungerade Funktion	Halbperiode 1	Halbperiode 2
			
$f(-t) = f(t)$ $b_k = 0$ $a_k = \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} f(t) \cdot \cos(k\omega_f t) dt$	$f(-t) = -f(t)$ $a_k = 0$ $b_k = \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} f(t) \cdot \sin(k\omega_f t) dt$	$f(t) = f(t + \pi)$ $a_{2k+1} = 0$ $b_{2k+1} = 0$	$f(t) = -f(t + \pi)$ $a_{2k} = 0$ $b_{2k} = 0$

### 4.2 Spektren

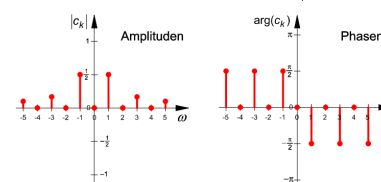
Kosinus- Sinusamplitudenspektrum



Einseitiges Amplituden-/ Phasenspek.



Zweiseitiges Amplituden-/ Phasenspek.



Das einseitige und zweiseitige Spektrum unterscheiden sich nur im Amplitudendiagramm. Das Phasendiagramm für positive  $k$  ist identisch. Die Amplitudenwerte sind hälftig auf die pos. und neg.  $k$  verteilt.

## 5 Fourier Transformation

$$\boxed{f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [R(\omega) \cos(\omega t) + X(\omega) \sin(\omega t)] d\omega + \frac{j}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [R(\omega) \sin(\omega t) - X(\omega) \cos(\omega t)] d\omega$$

$$\boxed{F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt} = R(\omega) - jX(\omega) \quad R(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos(\omega t) dt \quad \text{und} \quad X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin(\omega t) dt$$

$$\sigma(t) \circ \bullet \frac{1}{j\omega} + \pi \cdot \delta(\omega)$$

$$\frac{1}{\pi \cdot t} \circ \bullet -j \cdot \operatorname{sgn}(\omega)$$

$$1 \circ \bullet 2\pi \cdot \delta(t) \quad \underbrace{\longleftrightarrow}_{\text{Vorsichtig}} \quad \delta(\omega) \circ \bullet 1$$

$$\operatorname{sgn}(t) \circ \bullet \frac{2}{j\omega}$$

### 5.1 Eigenschaften

Fourierintegral existiert wenn  $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < \infty$

Linearität	$\alpha \cdot f(t) + \beta \cdot g(t)$	$\circ \bullet$	$\alpha \cdot F(\omega) + \beta \cdot G(\omega)$
Zeitumkehrung (Spiegelung an der Y-Achse)	$f(-t)$	$\circ \bullet$	$F(-\omega) = F^*(\omega)$
"Ähnlichkeit"	$f(\alpha t)$	$\circ \bullet$	$\frac{1}{ \alpha } F\left(\frac{\omega}{\alpha}\right) \quad \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$
Verschiebung im Zeitbereich	$f(t \pm t_0)$	$\circ \bullet$	$F(\omega) e^{\pm j\omega t_0}$
Verschiebung im Frequenzbereich	$f(t) e^{\pm j\omega_0 t}$	$\circ \bullet$	$F(\omega \mp \omega_0)$
Ableitung im Zeitbereich	$\frac{\partial^n f(t)}{\partial t^n}$	$\circ \bullet$	$(j\omega)^n F(\omega)$
Integration im Zeitbereich	$\int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau$	$\circ \bullet$	$\frac{F(\omega)}{j\omega} + \pi F(0) \delta(\omega)$
Ableitung im Frequenzbereich	$t^n f(t)$	$\circ \bullet$	$j^n \frac{\partial F(\omega)}{\partial \omega^n}$
Faltung im Zeitbereich	$f(t) * g(t)$	$\circ \bullet$	$F(\omega) \cdot G(\omega)$
Faltung im Frequenzbereich	$f(t) \cdot g(t)$	$\circ \bullet$	$\frac{1}{2\pi} F(\omega) * G(j\omega)$
Vertauschungssatz (Dualität)	$f(t)$	$\circ \bullet$	$F(\omega)$
	$F(t)$	$\circ \bullet$	$2\pi \cdot f(-\omega)$
Modulation	$\cos(\alpha t) \cdot f(t)$	$\circ \bullet$	$\frac{1}{2} \cdot [F(\omega - \alpha) + F(\omega + \alpha)]$
	$\sin(\alpha t) \cdot f(t)$	$\circ \bullet$	$\frac{1}{2j} \cdot [F(\omega - \alpha) - F(\omega + \alpha)]$
Parseval's Theorem	$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) g^*(t) dt$	$=$	$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) G^*(\omega) d\omega$
Bessel's Theorem (Satz von Parseval)	$\int_{-\infty}^{\infty}  f(t) ^2 dt$	$=$	$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty}  F(\omega) ^2 d\omega$
Anfangswerte	$f(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) d\omega$		$F(0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt$
$\infty$ lange Folge von $\delta$ -Impulsen	$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - n \cdot t_0)$	$\circ \bullet$	$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{2\pi}{t_0} \delta(\omega - n \cdot \frac{2\pi}{t_0})$

## 6 Laplace Transformation

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt \quad s = \sigma + j\omega$$

- Definitionsbereich nur für **kausale** Systeme  $t \geq 0$
- Integrierbar über das Intervall  $(0, \infty)$
- Wachstum kleiner als der von einer Exponentialfunktion  $\sigma > 0$
- $\sigma$  ist der Dämpfungsfaktor:  $e^{-s} = e^{-\sigma} \cdot e^{-j\omega}$
- Fourier-Transformierte  $F(\omega)$  kann durch die Laplace-Transformation  $F(s)$  ausgedrückt werden.
- Fourier  $\longleftrightarrow$  Laplace Umwandlungen nur wenn Polstelle ( $\sigma > 0$ ) dh. links von  $j\omega$  Achse und kausal!
- $f(0+)$ : Entspricht der Anfangsbedingung zum Zeitpunkt  $> 0$  (kausal).

### 6.1 Eigenschaften

Linearität	$\alpha \cdot f(t) + \beta \cdot g(t)$	$\circ \bullet$	$\alpha \cdot F(s) + \beta \cdot G(s)$
Verschiebung im Zeitbereich	$f(t \pm t_0)$	$\circ \bullet$	$F(s)e^{\pm t_0 s}$
Dämpfung (Verschiebung im Frequenzbereich)	$f(t)e^{\mp \alpha t}$	$\circ \bullet$	$F(s \pm \alpha)$
"Ähnlichkeit"	$f(\alpha t)$	$\circ \bullet$	$\frac{1}{\alpha} F\left(\frac{s}{\alpha}\right) \quad 0 < \alpha \in \mathbb{R}$
Faltung im Zeitbereich	$f(t) * g(t)$	$\circ \bullet$	$F(s) \cdot G(s)$
Faltung im Frequenzbereich	$f(t) \cdot g(t)$	$\circ \bullet$	$\frac{1}{2\pi j} F(s) * G(s)$
Differentiation im Zeitbereich	$f'(t)$	$\circ \bullet$	$sF(s) - f(0+)$
	$f''(t)$	$\circ \bullet$	$s^2 F(s) - sf(0+) - f'(0+)$
	$f^{(n)}(t)$	$\circ \bullet$	$s^n F(s) - s^{n-1}f(0+) - s^{n-2}f'(0+) - \dots - sf^{(n-2)}(0+) - f^{(n-1)}(0+)$
Diffrentation im Frequenzbereich	$(-t)^n f(t)$	$\circ \bullet$	$F^{(n)}(s)$
Integration	$\int_0^t f(\tau) d\tau$	$\circ \bullet$	$\frac{F(s)}{s}$
Anfangswert	$\lim_{t \rightarrow 0} f(t)$ muss exist.	$=$	$\lim_{s \rightarrow \infty} sF(s)$
Endwert	$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t)$ muss exist.	$=$	$\lim_{s \rightarrow 0} sF(s)$

### 6.2 Von Laplace zu Fourier

$s \rightarrow j\omega$  Dies kann nur gemacht werden wenn Polstelle ( $\sigma > 0$ ) links von  $j\omega$ -Achse ist und das System kausal ist.

### 6.3 Rücktransformation (Komplexe Integration)

$$f(t) = \int_{x-j\infty}^{x+j\infty} F(s) \cdot e^{st} \cdot ds$$

### 6.4 Vorgehen Rücktransformation

1. Ansatz Versuchen Zähler Gleichnamig mit Nenner machen und danach kürzen (Korrekturen!)
2. Ansatz Partialbruchzerlegung

## 6.5 Rücktransformation über Tabelle

$\sigma$  = Sprungfunktion. Wenn 1 transformiert wird, soll  $\sigma$  genommen werden (also im Frequenzbereich  $\frac{1}{s}$ ).

$\sigma(t)$	$\circ \text{---} \bullet$	$\frac{1}{s}$	$\sigma(t) \cdot t^2 \cdot e^{\alpha t}$	$\circ \text{---} \bullet$	$\frac{2}{(s-\alpha)^3}$
$\sigma(t) \cdot t$	$\circ \text{---} \bullet$	$\frac{1}{s^2}$	$\sigma(t) \cdot t^n \cdot e^{\alpha t}$	$\circ \text{---} \bullet$	$\frac{n!}{(s-\alpha)^{n+1}}$
$\sigma(t) \cdot t^2$	$\circ \text{---} \bullet$	$\frac{2}{s^3}$	$\sigma(t) \cdot \sin(\omega t)$	$\circ \text{---} \bullet$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$
$\sigma(t) \cdot t^n$	$\circ \text{---} \bullet$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	$\sigma(t) \cdot \cos(\omega t)$	$\circ \text{---} \bullet$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$
$\sigma(t) \cdot e^{\alpha t}$	$\circ \text{---} \bullet$	$\frac{1}{s-\alpha}$	$\delta(t)$	$\circ \text{---} \bullet$	$1(s)$
$\sigma(t) \cdot t \cdot e^{\alpha t}$	$\circ \text{---} \bullet$	$\frac{1}{(s-\alpha)^2}$	$\delta(t-a)$	$\circ \text{---} \bullet$	$e^{-as}$

## 7 Mathe Grundlagen

### 7.1 Partialbruchzerlegung

$$f(x) = \frac{x^2 + 20x + 149}{x^3 + 4x^2 - 11x - 30} \Rightarrow \begin{array}{l} \text{Nenner faktorisieren mit} \\ \text{Horner Schema, Binom, etc.} \end{array} \Rightarrow x^3 + 4x^2 - 11x - 30 = (x+2)(x^2 + 2x - 15) = (x+2)(x+5)(x-3)$$

Ansatz:

$$f(x) = \frac{x^2 + 20x + 149}{x^3 + 4x^2 - 11x - 30} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{x+5} = \frac{A(x+2)(x+5) + B(x-3)(x+5) + C(x-3)(x+2)}{(x-3)(x+2)(x+5)}$$

Gleichungssystem aufstellen mit beliebigen  $x_i$ -Werten (am Besten Polstellen oder 0,1,-1 wählen):

$$\begin{aligned} x_1 = 3 : -9 + 60 + 149 &= A \cdot 5 \cdot 8 \Rightarrow A = 5 \\ x_2 = -2 : -4 - 40 + 149 &= B(-5) \cdot 3 \Rightarrow B = -7 \\ x_3 = -5 : -25 - 100 + 149 &= C(-8)(-3) \Rightarrow C = 1 \end{aligned} \Rightarrow f(x) = \frac{5}{x-3} - \frac{7}{x+2} + \frac{1}{x+5}$$

weitere Ansätze für andere Typen von Termen:

$$f(x) = \frac{5x^2 - 37x + 54}{x^3 - 6x^2 + 9x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-3} + \frac{C}{(x-3)^2} = \frac{A(x-3)^2 + Bx(x-3) + Cx}{x(x-3)^2}$$

$$f(x) = \frac{1, 5x}{x^3 - 6x^2 + 12x - 8} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{(x-2)^2} + \frac{C}{(x-2)^3} = \frac{A(x-2)^2 + B(x-2) + C}{(x-2)^3}$$

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^3 + 2x^2 - 2x - 12} = \frac{A}{x-2} + \frac{Bx+C}{x^2+4x+6} = \frac{A(x^2+4x+6) + (Bx+C)(x-2)}{(x-2)(x^2+4x+6)}$$

#### 7.1.1 Horner Schema

- Pfeile  $\Rightarrow$  Multiplikation
- Zahlen pro Spalte werden addiert

$$\begin{array}{r|rrrrrr} x_1 & a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_1 & a_0 \\ & & b_{n-1}x_1 & b_{n-2}x_1 & \cdots & b_1x_1 & b_0x_1 \\ \hline & & b_{n-1} & b_{n-2} & b_{n-3} & \cdots & b_0 & f(x_1) \end{array}$$

$x_1 \Rightarrow$  Nullstelle (muss erraten werden!!)  
oberste Zeile = zu zerlegendes Polynom

**Beispiel:**

$$f(x) = x^3 - 67x - 126$$

$$\begin{array}{r|rrrr} x_1 = -2 & 1 & 0 & -67 & -126 \\ & & -2 & 4 & +126 \\ \hline & 1 & -2 & -63 & 0 = f(-2) \\ & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \\ & b_2 & b_1 & b_0 & \end{array}$$

$$\Rightarrow f(x) = (x - x_1)(b_2x^2 + b_1x + b_0) = (x+2)(x^2 - 2x - 63)$$

7.2 Trigonometrie

$\sin^2(b) + \cos^2(b) = 1 \qquad \tan(b) = \frac{\sin(b)}{\cos(b)} \qquad \cosh(b)^2 - \sinh(b)^2 = 1 \qquad \tanh(b) = \frac{\sinh(b)}{\cosh(b)}$

7.2.1 Funktionswerte für Winkelargumente

deg	rad	sin	cos	tan	deg	rad	sin	cos	deg	rad	sin	cos	deg	rad	sin	cos
0	0	0	1	0	90	$\frac{\pi}{2}$	1	0	180	$\pi$	0	-1	270	$\frac{3\pi}{2}$	-1	0
30	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	120	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	210	$\frac{7\pi}{6}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	300	$\frac{5\pi}{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$
45	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	135	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	225	$\frac{5\pi}{4}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	315	$\frac{7\pi}{4}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
60	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	150	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	240	$\frac{4\pi}{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	330	$\frac{11\pi}{6}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$

7.2.2 Quadrantenbeziehungen

$\sin(-a) = -\sin(a) \qquad \cos(-a) = \cos(a)$   
 $\sin(\pi - a) = \sin(a) \qquad \cos(\pi - a) = -\cos(a)$   
 $\sin(\pi + a) = -\sin(a) \qquad \cos(\pi + a) = -\cos(a)$   
 $\sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + a\right) = \cos(a) \qquad \cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{2} + a\right) = \sin(a)$

**Additionstheoreme**  $\sin(a \pm b) = \sin(a) \cdot \cos(b) \pm \cos(a) \cdot \sin(b) \qquad \cos(a \pm b) = \cos(a) \cdot \cos(b) \mp \sin(a) \cdot \sin(b)$   
 $\tan(a \pm b) = \frac{\tan(a) \pm \tan(b)}{1 \mp \tan(a) \cdot \tan(b)}$

7.2.3 Doppel- und Halbwinkel

$\sin(2a) = 2 \sin(a) \cos(a) \qquad \cos(2a) = \cos^2(a) - \sin^2(a) = 2 \cos^2(a) - 1 = 1 - 2 \sin^2(a)$   
 $\cos^2\left(\frac{a}{2}\right) = \frac{1+\cos(a)}{2} \qquad \sin^2\left(\frac{a}{2}\right) = \frac{1-\cos(a)}{2}$

7.2.4 Produkte

$\sin(a) \sin(b) = \frac{1}{2}(\cos(a - b) - \cos(a + b))$   
 $\cos(a) \cos(b) = \frac{1}{2}(\cos(a - b) + \cos(a + b))$   
 $\sin(a) \cos(b) = \frac{1}{2}(\sin(a - b) + \sin(a + b))$

7.2.5 Hyperbolic

$\sinh(z) = \frac{1}{2}(e^z - e^{-z}) \qquad \cosh(z) = \frac{1}{2}(e^z + e^{-z})$

7.2.7 Euler

$\sin(z) = \frac{e^{jz} - e^{-jz}}{2j} \qquad \cos(z) = \frac{e^{jz} + e^{-jz}}{2} \qquad e^{j\varphi} = \cos(\varphi) + j\sin(\varphi)$

7.2.8 Komplex

Betrag:  $|z| = \sqrt{\operatorname{Re}(z)^2 + \operatorname{Im}(z)^2} = \sqrt{z \cdot \bar{z}}$   
Konjugiertkomplex:  $z = z_1 + jz_2 \qquad \bar{z} = z^* = z_1 - jz_2$

7.3 Taylor Polynom

$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)h + \frac{f''(x_0)}{2}h^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}h^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}h^n + R_n(x_0, h)$

7.4 Integralrechnung

Integration  $A = \int_a^b f(t)dt = [F(t)]_a^b = F(b) - F(a)$

Linearität  $\int f(\alpha x + \beta)dx = \frac{1}{\alpha} \cdot F(\alpha x + \beta) + C$

Partielle Integration  $\int_a^b \underset{\uparrow}{u'(x)} \cdot \underset{\downarrow}{v(x)}dx = \left[ u(x) \cdot v(x) \right]_a^b - \int_a^b u(x) \cdot v'(x)dx$

Substitution (Rationalisierung)	$t = \tan \frac{x}{2}, \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2} \quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2} \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \quad \int R(\sin(x) \cos(x)) dx$
Allgemeine Substitution	$\int_a^b f(x) dx = \int_{g^{-1}(a)}^{g^{-1}(b)} f(g(t)) \cdot g'(t) dt \quad t = g^{-1}(x) \quad \boxed{x=g(t)} \quad dx = g'(t) \cdot dt$
Logarithmische Integration	$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln  f(x)  + C \quad (f(x) \neq 1)$
Spezielle Form des Integranden	$\int f'(x) \cdot (f(x))^\alpha dx = f(x)^{\alpha+1} \cdot \frac{1}{\alpha+1} + C \quad (\alpha \neq -1)$
Differentiation	$\int_a^b f'(t) dt = f(b) - f(a) \quad \frac{d}{dx} \int_1^x f(t) dt = f(x)$

$$\int dx = x + C$$

$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, x \in \mathbb{R}^+, \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C, x \neq 0$$

$$\int e^x dx = e^x + C$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln(a)} + C, a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot(x) + C, x \neq k\pi \text{ mit } k \in \mathbb{Z}$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan(x) + C, x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ mit } k \in \mathbb{Z}$$

$$\int \sinh(x) dx = \cosh(x) + C$$

$$\int \cosh(x) dx = \sinh(x) + C$$

$$\int \frac{dx}{\sinh^2 x} = -\coth(x) + C, x \neq 0$$

$$\int \frac{dx}{\cosh^2 x} = \tanh(x) + C, x \neq 0$$

$$\int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a} \ln|ax+b| + C, a \neq 0, x \neq -\frac{b}{a}$$

$$\int \frac{dx}{a^2x^2+b^2} = \frac{1}{ab} \arctan\left(\frac{a}{b}x\right) + C, a \neq 0, x \neq -\frac{b}{a}, x \neq -\frac{b}{a}$$

$$\int \frac{dx}{a^2x^2-b^2} = \frac{1}{2ab} \ln\left|\frac{ax-b}{ax+b}\right| + C, a \neq 0, x \neq -\frac{b}{a}, x \neq -\frac{b}{a}$$

$$\int \sqrt{a^2x^2+b^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{a^2x^2+b^2} + \frac{b^2}{2a} \ln(ax + \sqrt{a^2x^2+b^2}) + C, a \neq 0, b \neq 0$$

$$\int \sqrt{a^2x^2-b^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{a^2x^2-b^2} + \frac{b^2}{2a} \ln|ax + \sqrt{a^2x^2-b^2}| + C, a \neq 0, b \neq 0, a^2x^2 \geq b^2$$

$$\int \sqrt{b^2-a^2x^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{b^2-a^2x^2} + \frac{b^2}{2a} \arcsin\left(\frac{a}{b}x\right) + C, a \neq 0, b \neq 0, a^2x^2 \leq b^2$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2x^2+b^2}} = \frac{1}{a} \ln(ax + \sqrt{a^2x^2+b^2}) + C, a \neq 0, b \neq 0$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2x^2-b^2}} = \frac{1}{a} \ln(ax + \sqrt{a^2x^2-b^2}) + C, a \neq 0, b \neq 0, a^2x^2 > b^2$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{b^2-a^2x^2}} = \frac{1}{a} \arcsin\left(\frac{a}{b}x\right) + C, a \neq 0, b \neq 0, a^2x^2 < b^2$$

Die Integrale  $\int \frac{dx}{X}$ ,  $\int \sqrt{X} dx$ ,  $\int \frac{dx}{\sqrt{X}}$  mit  $X = ax^2 + 2bx + c$ ,  $a \neq 0$ , werden durch die Umformung  $X = a\left(x + \frac{b}{a}\right)^2 + \left(c - \frac{b^2}{a}\right)$

und die Substitution  $t = x + \frac{b}{a}$  in die Integrale 15. bis 22. transformiert.

$$\int \frac{x dx}{X} = \frac{1}{2a} \ln|X| - \frac{b}{a} \int \frac{dx}{X}, a \neq 0, X = ax^2 + 2bx + c$$

$$\int \sin^2(ax) dx = \frac{x}{2} - \frac{1}{4a} \cdot \sin(2ax) + C, a \neq 0$$

$$\int \cos^2(ax) dx = \frac{x}{2} + \frac{1}{4a} \cdot \sin(2ax) + C, a \neq 0$$

$$\int \sin^n(ax) dx = \frac{\sin^{n-1}(ax) \cdot \cos(ax)}{na} + \frac{n-1}{n} \int \sin^{n-2}(ax) dx, n \in \mathbb{N}, a \neq 0$$

$$\int \cos^n(ax) dx = \frac{\cos^{n-1}(ax) \cdot \sin(ax)}{na} + \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2}(ax) dx, n \in \mathbb{N}, a \neq 0$$

$$\int \frac{dx}{\sin(ax)} = \frac{1}{a} \ln|\tan(\frac{ax}{2})| + C, a \neq 0, x \neq k\frac{\pi}{a} \text{ mit } k \in \mathbb{Z}$$

$$\int \frac{dx}{\cos(ax)} = \frac{1}{a} \ln|\tan(\frac{ax}{2} + \frac{\pi}{4})| + C, a \neq 0, x \neq \frac{\pi}{2a} + k\frac{\pi}{a} \text{ mit } k \in \mathbb{Z}$$

$$\int \tan(ax) dx = -\frac{1}{a} \ln|\cos(ax)| + C, a \neq 0, x \neq \frac{\pi}{2a} + k\frac{\pi}{a} \text{ mit } k \in \mathbb{Z}$$

$$\int \cot(ax) dx = \frac{1}{a} \ln|\sin(ax)| + C, a \neq 0, x \neq k\frac{\pi}{a} \text{ mit } k \in \mathbb{Z}$$

$$\int x^n \sin(ax) dx = -\frac{x^n}{a} \cos(ax) + \frac{n}{a} \int x^{n-1} \cos(ax) dx, n \in \mathbb{N}, a \neq 0$$

$$\int x^n \cos(ax) dx = \frac{x^n}{a} \sin(ax) - \frac{n}{a} \int x^{n-1} \sin(ax) dx, n \in \mathbb{N}, a \neq 0$$

$$\int x^n e^{ax} dx = \frac{1}{a} x^n e^{ax} - \frac{n}{a} \int x^{n-1} e^{ax} dx, n \in \mathbb{N}, a \neq 0$$

$$\int e^{ax} \sin(bx) dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2} (a \cdot \sin(bx) - b \cdot \cos(bx)) + C, a \neq 0, b \neq 0$$

$$\int e^{ax} \cos(bx) dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2} (a \cdot \cos(bx) + b \cdot \sin(bx)) + C, a \neq 0, b \neq 0$$

$$\int \ln(x) dx = x(\ln(x) - 1) + C, x \in \mathbb{R}^+$$

$$\int x^\alpha \cdot \ln(x) dx = \frac{x^{\alpha+1}}{(\alpha+1)^2} [(\alpha+1) \ln(x) - 1] + C, x \in \mathbb{R}^+, \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$$

## 7.5 Differentialgleichungen

### 7.5.1 Lineare Differentialgleichungen 1. Ordnung

**Form:**  $y' + f(x)y = g(x)$     **Vorgehen:**  $y = y_H + y_P$      $y_H = k \cdot e^{-\int f(x)dx}$  wobei  $k = y_0$   
 $y_P = k \cdot e^{-\int f(x)dx}$  wobei  $k = \int (g(x) \cdot e^{\int f(x)dx}) dx$

### 7.5.2 Lineare Differentialgleichung 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

**Form:**  $y'' + a_1 \cdot y' + a_0 \cdot y = f(x)$     **St"orglied:**  $f(x)$   
**Homogene Differentialgleichung:**  $f(x) = 0$     **Inhomogene Differentialgleichung:**  $f(x) \neq 0$

### 7.5.3 Allgemeine Lösung einer homogenen DGL: $Y_H$

**Charakteristisches Polynom**     $\lambda^2 + a_1 \cdot \lambda + a_0 = 0$     von     $y'' + a_1 \cdot y' + a_0 \cdot y = 0$      $(\lambda_{1,2} = -\frac{a_1}{2} \pm \frac{\sqrt{a_1^2 - 4a_0}}{2})$

Falls  $\lambda_1 \neq \lambda_2$  und  $\lambda_{1,2} \in \mathbb{R}$ :     $Y_H = Ae^{\lambda_1 x} + Be^{\lambda_2 x}$   
Falls  $\lambda_1 = \lambda_2$  und  $\lambda_{1,2} \in \mathbb{R}$ :     $Y_H = e^{\lambda_1 x} (A + B \cdot x)$   
Falls  $\lambda_{1,2} = -\frac{a_1}{2} \pm j\alpha$ :     $Y_H = e^{-\frac{1}{2}a_1 x} (A \cos(\alpha x) + B \sin(\alpha x))$

### 7.5.4 Allgemeine L"osung einer inhomogenen DGL: $y = Y_H + y_P$

**Grundl"oseverfahren einer inhomogenen DGL:**  $y_P$   
Homogene DGL:  $y'' + a_1 \cdot y' + a_0 \cdot y = 0$  f"ur die  $(g(x) = Y_H$  homogene Loesung)  $g(x_0) = 0$  und  $g'(x_0) = 1$  gilt, ist:

$$y_P(x) = \int_{x_0}^x g(x + x_0 - t) \cdot f(t) dt$$

die partikul"are L"osung von  $y'' + a_1 \cdot y' + a_0 \cdot y = f(x)$

**Der Ansatz einer inh. DGL in Form des St"orgliedes:**  $y_P$

$f(x) = p_n(x)$      $(p_n(x)$  und  $q_n(x)$  sind Polynome vom gleichen Grad)  
Fall a:  $a_0 \neq 0$ :     $y_P = q_n(x)$   
Fall b:  $a_0 = 0, a_1 \neq 0$ :     $y_P = x \cdot q_n(x)$   
Fall c:  $a_0 = a_1 = 0$ :     $y_P = x^2 \cdot q_n(x)$

$f(x) = e^{bx} \cdot p_n(x)$   
Fall a:  $b$  nicht Nullstelle des char. Polynoms:     $y_P = e^{bx} \cdot q_n(x)$   
Fall b:  $b$  einfache Nullstelle des char. Polynoms:     $y_P = e^{bx} \cdot x \cdot q_n(x)$   
Fall c:  $b$  zweifache Nullstelle des char. Polynoms:     $y_P = e^{bx} \cdot x^2 \cdot q_n(x)$

$f(x) = e^{cx} \cdot (p_n(x) \cos(bx) + q_n(x) \sin(bx))$   
Fall a:  $c + jb$  nicht Loesung der char. Gleichung:     $y_P = e^{cx} \cdot (r_n(x) \cos(bx) + s_n(x) \sin(bx))$   
Fall b:  $c + jb$  Loesung der char. Gleichung:     $y_P = e^{cx} \cdot x \cdot (r_n(x) \cos(bx) + s_n(x) \sin(bx))$

### Superpositionsprinzip

$f(x) = c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x)$   
 $y_1$  ist spezielle L"osung der DGL     $y'' + a_1 \cdot y' + a_0 \cdot y = c_1 f_1(x)$   
 $y_2$  ist spezielle L"osung der DGL     $y'' + a_1 \cdot y' + a_0 \cdot y = c_2 f_2(x)$   
dann ist:     $y_P = c_1 y_1 + c_2 y_2$

### 7.5.5 Lineare Differentialgleichung n. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

**Form:**  $y^{(n)} + a_{n-1} \cdot y^{(n-1)} + \dots + a_0 \cdot y = f(x) \Leftrightarrow \sum_{k=0}^n a_k y^{(k)} = f(x)$

#### Homogene L"osungen

Fall a: r reelle L"osungen  $\lambda$ :

$$y_1 = e^{\lambda x}, y_2 = x e^{\lambda x}, \dots, y_r = x^{r-1} e^{\lambda x}$$

Starke D"ampfung/Kriechfall

Fall b: k komplexe L"osungen  $\lambda = \alpha + j\beta$ :

$$y_1 = e^{\alpha x} \cos(\beta x), y_3 = e^{\alpha x} x^1 \cos(\beta x), \dots \text{ (ungerade)}$$

Schwache D"ampfung /

$$y_2 = e^{\alpha x} \sin(\beta x), y_4 = e^{\alpha x} x^1 \sin(\beta x), \dots \text{ (gerade)}$$

Schwingfall

Freiheitsgrade  $(A, B, C, \dots)$  und zusaetzliches  $x^n$  nicht vergessen!!!

#### Allgemeinste L"osung des partikul"aren Teils:

$$\underbrace{\sum_{k=0}^n a_k y^{(k)}}_{f(y, y', y'', \dots)} = \underbrace{e^{\alpha x} (p_{m1}(x) \cos(\beta x) + q_{m2}(x) \sin(\beta x))}_{\text{St"orglied}}$$

Unterscheide die L"osungen des charakteristischen Polynoms  $(\lambda)$ :

mit  $m = \max(m1, m2)$

Fall a:  $\alpha + j\beta \neq \lambda$ , so ist

$$y_P = e^{\alpha x} (r_m(x) \cos(\beta x) + s_m(x) \sin(\beta x))$$

Fall b:  $\alpha + j\beta$  ist u-fache L"osung von  $\lambda$ , so ist

$$y_P = e^{\alpha x} x^u (r_m(x) \cos(\beta x) + s_m(x) \sin(\beta x))$$

u-fache Resonanz

#### Grundl"oseverfahren

$$\begin{pmatrix} g(x_0) = 0 = c_1 g_1(x_0) + c_2 g_2(x_0) + \dots + c_n(x_0) \\ g'(x_0) = 0 = c_1 g'_1(x_0) + c_2 g'_2(x_0) + \dots + c_n g'_n(x_0) \\ \vdots \\ g^{(n-1)}(x_0) = 1 = c_1 g_1^{(n-1)}(x_0) + c_2 g_2^{(n-1)}(x_0) + \dots + c_n g_n^{(n-1)}(x_0) \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \text{ergibt } c_1, \dots, c_n \text{ f"ur} \\ y_P(x) = \int_{x_0}^x g(x + x_0 - t) f(t) dt \end{matrix}$$

### 7.5.6 Lineare Differentialgleichungssysteme erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten

**Form:**  $\begin{matrix} \dot{x} = ax + by + f(t) \\ \dot{y} = cx + dy + g(t) \end{matrix} \Leftrightarrow y = \frac{1}{b}(\dot{x} - ax - f(t))$

**Die allgem. L"osung ergibt sich aus der DGL:**  $\ddot{x} - (a + d)\dot{x} + (ad - bc)x = \dot{f}(t) - d \cdot f(t) + b \cdot g(t)$

$\ddot{x}, \dot{x}, \dot{y}$  sind jeweils nach  $t$  abgeleitet!

### 7.5.7 DGL mit Laplacetransformation L"osen

Um eine DGL mit Laplace(kausal!) zu l"osen muss die Gleichung zuerst in den Bildbereich transformiert werden. Nachher kann die Gleichung algebraisch gel"ost werden. Das Resultat muss dann "uber die R"ucktransformation wieder in den Originalbereich transformiert werden.

Bemerkung:

-  $H(s) = \frac{1}{p(s)}$  wobei  $p(s)$  das charakteristische Polynom darstellt

#### Stabilit"at

Ein System ist stabil wenn die Nullstelle vom charakteristischen Polynom  $p(s)$  in der Linken Halbebene zuliegen kommt:

$$\operatorname{Re}[p(s)] < 0$$

### 7.5.8 G"angige DGLs

DGL	L"osung	DGL	L"osung
$\frac{dx}{dt} = 0$	$C$	$\frac{dx}{dt} = 1$	$t + C$
$\frac{dx}{dt} = y$	$t \cdot y + C$	$\frac{dx}{dt} = kx$	$C e^{kt}$
$\frac{du}{dt} = \sin(t)$	$C - \cos(t)$	$\frac{d^2x}{dt^2} = k^2 x$	$A * \cosh(kt) + B * \sinh(kt) = \frac{1}{2}((A + B)e^{kt} + (A - B)e^{-kt})$
$\frac{d^2x(t)}{dt^2} = -\omega^2 x(t)$	$A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)$		



## 7.6 Differential-Rechnung

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

$$\text{Kettenregel: } f(g(x))' = g'(x) \cdot f'(g(x)) \text{ oder } \frac{df(g(x))}{dx} = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

$$\text{Produktregel: } (f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

$$\text{Quotientenregel: } \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$$

## 7.7 Diverses

### 7.7.1 Quadratische Lösungsformel

$$ax^2 + bx + c = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

### 7.7.3 Matrizeninversion

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}$$

### 7.7.5 TI-89

#### Gleichung für mehrere Werte

$(3x + y^2) \mid x = 1 \text{ and } y = 2 \rightarrow \text{Resultat}$

#### Matrizeneditor

- APPS / Data/Matrix Editor
- New
- Type: Matrix
- Variable, Row, Column definieren
- Werte eingeben

#### Gespeicherte Variablen löschen

- Explorer: 2nd / VAR-LINK
- Variable anwählen
- löschen: DEL
- Löschen Bestätigen: ENTER

### 7.7.2 Determinanten

$$\det \left( \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \right) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

### 7.7.4 Eigenwerte/ Eigenvektoren

$$\text{Eigenwert: } \det(A - \lambda I) \Rightarrow \lambda_i$$

$$\text{Eigenvektor: } (A - \lambda_i I)v = 0 \Rightarrow v_i \quad (\text{Für jedes } \lambda_i)$$

$$\text{Definition: } A \cdot \underline{v} = \lambda \cdot \underline{v}$$