

Bir Test, Bir Tahmin, Bir Teorem: Bayes Akla Nasıl Yol Gösterir?

“Bu kişi gerçekten hasta mı?”

Diyelim ki elinde bir kan testi var. Laboratuvar raporu eline ulaştığında üstünde büyük harflerle “**POZİTİF**” yazıyor. Sence bu sonuç ne kadar güvenilir? Gerçekten hastalık var mı?

Çoğumuz hemen testin doğruluk oranına bakar: “*Bu test %99 doğruymuş, kesin hastayım!*” Ama durum pek öyle değil. Bu yanılgıyı düzeltmek için 18. yüzyılda yaşamış bir papaz, Thomas Bayes, basit ama devrimci bir fikir ortaya attı: **Elindeki kanıtı, olayın toplumdaki genel sıklığıyla birlikte değerlendirmelisin.**

Bayes Formülü: Akla Yol Gösteren Kısa Yol

Her türlü kanıt–hipotez ilişkisini tek bir denklemlle yönetebilirsin:

$$P(A|B) = \frac{P(B|A) \times P(A)}{P(B)}$$

Terim	Tanım
$P(A)$ (Genel Olasılık / Prior)	Olayın kanıt yokken olma olasılığı
$P(B A)$ (Likelihood)	Hipotez doğruysa kanıtın ortaya çıkma olasılığı (A olayını bildiğimde B kanıtının ortaya çıkma olasılığı)
$P(A B)$ (Son Olasılık / Posterior)	Kanıt görüldüğünde hipotezin güncellenmiş olasılığı (B kanıtını gördüğümde A olayının gerçekleşmiş olma olasılığı)
$P(B)$	Kanıtın her türlü yoldan ortaya çıkma olasılığı

Tablo 1: Bayes Teoremi Temel Terimleri

Formülle Sağlık Testi Örneği

Diyelim toplumda bir hastalık %0.5 oranında görülüyor. Bir test %99 doğru sonuç veriyor:

- Hasta biri için pozitif çıkma olasılığı (likelihood) = 0.99

- Sağlıklı biri için yanlış pozitif çıkma olasılığı = 0.01

Soru: Pozitif bir test sonucu gördüğümde gerçekten hasta olma olasılığım nedir?

1. Veriler:

$$P(A) = 0.005 \quad (\text{Hasta olma olasılığı})$$

$$P(B|A) = 0.99 \quad (\text{Hasta iken testin pozitif çıkma olasılığı})$$

$$P(B|\neg A) = 0.01 \quad (\text{Sağlıklı iken yanlış pozitif çıkma olasılığı})$$

$$P(\neg A) = 1 - 0.005 = 0.995 \quad (\text{Sağlıklı olma olasılığı})$$

2. Pozitif test sonucu olasılığı $P(B)$:

$$\begin{aligned} P(B) &= P(B|A) \times P(A) + P(B|\neg A) \times P(\neg A) \\ &= 0.99 \times 0.005 + 0.01 \times 0.995 \\ &= 0.00495 + 0.00995 = 0.0149 \end{aligned}$$

3. Bayes Formülü ile $P(A|B)$ hesaplanması:

$$P(A|B) = \frac{P(B|A) \times P(A)}{P(B)} = \frac{0.99 \times 0.005}{0.0149} \approx 0.33$$

Yani test %99 doğru olsa da, hastalık nadir olduğu için pozitif test sonrası gerçekten hasta olma olasılığı yaklaşık **%33** civarındadır.

Formülle Mahkeme / DNA Örneği

Bir suç mahallinde DNA örneği bulundu. Soru: “DNA eşleşmesi seni suçlu yapar mı?”
Diyelim:

- Şehirde 1 milyon kişi var.
- DNA eşleşme testi %99 özgün: gerçek suçlu için eşleşme garantili, masum biri için yanlış eşleşme olasılığı 0.0001.

1. Veriler:

$$P(A) = \frac{1}{1,000,000} = 0.000001 \quad (\text{Gerçek suçlu olma olasılığı})$$

$$P(B|A) = 1 \quad (\text{Suçluysa DNA eşleşir})$$

$$P(B|\neg A) = 0.0001 \quad (\text{Masumsa yanlış eşleşme olasılığı})$$

$$P(\neg A) = 1 - 0.000001 = 0.999999$$

2. DNA eşleşme olasılığı $P(B)$:

$$\begin{aligned} P(B) &= P(B|A) \times P(A) + P(B|\neg A) \times P(\neg A) \\ &= 1 \times 0.000001 + 0.0001 \times 0.999999 \\ &\approx 0.000001 + 0.0000999999 = 0.000101 \end{aligned}$$

3. Bayes Formülü ile $P(A|B)$ hesaplanması:

$$P(A|B) = \frac{1 \times 0.000001}{0.000101} \approx 0.0099 \approx \%1$$

Yani DNA eşleşme testi çok özgün görünse de, şehirde milyonlarca insan olduğu için tek başına DNA kanıtı suçluluğu %1 doğrular. Mahkemeler bu nedenle bağlantılı deliller ister.

Buradaki kritik nokta şu: Ölçümlerdeki hata payı, ilk bakışta %1 gibi küçük görünebilir. Ancak olayın genel görülme sıklığı çok düşükse, bu küçük hata bile son olasılığı ciddi oranda etkiler. Örneğin milyonlarca masum insan arasında %0.01 yanlış pozitif olsa, pozitif sonuçların çoğunu yanlış eşleşmeler oluşturur. Bu da tek bir kanıtın suçluluğu kesinleştirmekte yetersiz kalmasına neden olur.

Akılda Kalması Gereken Ders

- **Likelihood \neq Posterior:** “*Hipotez doğruysa kanıt ortaya çıkar mı?*” ile “*Kanıtı gördüğümde hipotez doğru mu?*” soruları farklıdır.
- Bayes Teoremi bu iki bakış açısını birbirine bağlar.
- Kanıt ne kadar güçlü olursa olsun, olayın toplumdaki genel olasılığı (prior) her zaman hesaba katılmalıdır.

Bayes: Akıl ve Bilimin Rehberi

Bayes Teoremi, yalnızca matematiksel bir formül değil; insan aklının karmaşık dünyadaki karmaşık belirsizliklerle başa çıkma biçimidir. Sezgilerimiz çoğu zaman bizi yanıltır, özellikle de elimizdeki bilgi eksik veya yanıltıcıysa. Bayes, bize hatalarımızı fark etmeyi ve yeni kanıtlar karşısında düşüncelerimizi yeniden şekillendirmeyi öğretir.

Bu teorem, bilimin temel taşı olan *şüphe* ve *güncelleme* kavramlarını matematiksel bir çerçeveye oturtur. İster bir doktor, ister bir hâkim, ister bir veri bilimci olalım; Bayes’in rehberliği olmadan, elimizdeki parçalı verilerle gerçeğe ulaşmak neredeyse imkânsızdır.

Bayes Teoremi, bilgiye ulaşmanın kapılarını açar; bilinmezlikler içinde yol gösterir; ve nihayetinde, bilginin en değerli olduğu yerde—karar verme anında—aklınızı güçlendirir.

“Hakikaten zeki bir insanın ayırt edici özelliği, istatistiklerin gücünü kavrayıp onlardan etkilenmesidir.”

— George Bernard Shaw

Bu söz, zekânın sadece soyut düşünceyle değil, somut verilerle ve olasılıkla şekillendiğini vurgular. Bayes Teoremi ise istatistiklerin rehberliğinde, belirsizlik içinde bile doğru kararlar almamızı sağlayan matematiksel düşüncenin ta kendisidir.