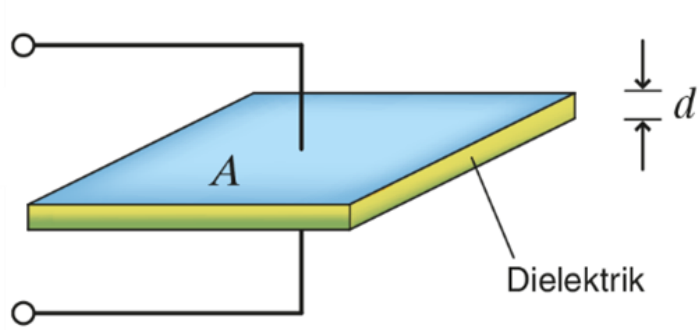
DEVRE ANALİZİ

Hafta 13

Kondansatör

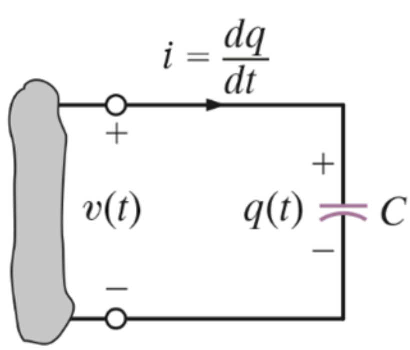


Kondansatörler, aralarında yalıtkan, yani dielektrik malzeme bulunan iki iletken levhadan oluşurlar. Kondansatörler iletken yüzeyleri arasında kullanılan yalıtkan malzemenin türüne bağlı olarak değişik sınıflara ayrılırlar.

Bir kondansatörün kapasitesi **volt başına coulomb** veya **farad** cinsinden ölçülür. Yukarıdaki şekilde görülen, yüzey alanı A olan, birbirlerinden d kadar aralıklı iki paralel plakalı kondansatörün kapasitesi şu şekilde tanımlanır:

$$C = \frac{\varepsilon_0 A}{d}$$

Burada ε_0, boşluğun geçirgenliği olup değeri $8.85 \times 10^{-12} F/m$'dir.



Kondansatöre yukarıdaki gibi kaynak bağlandığını varsayalım. Bu durumda iletken levhalardan birinde pozitif yükler, diğerinde negatif yükler toplanır. Kondansatör üzerinde toplanan yük miktarı iki plakaya uygulanan gerilimle orantılıdır:

$$q = Cv$$

Burada C kapasiteyi, q toplanan yük miktarını, v ise kondansatöre uygulanan gerilimi gösterir.

Bilindiği üzere akım, elektrik yükünün değişim hızına eşittir:

$$i = \frac{dq}{dt}$$

Kondansatörün yükü ile gerilim arasındaki ilişki bu bağıntıda yerine koyulursa:

$$i = \frac{d}{dt}(Cv)$$

Burada kapasitenin sabit olduğu bilindiğine göre akım-gerilim ilişkisi şu biçimde elde edilir:

$$i = C\frac{dv}{dt}$$

Buradan da görüleceği üzere kondansatör üzerinden geçen akım, zamana göre gerilimdeki değişim olarak ifade edilebilir. Şu ana kadar incelediğimiz devrelerde (DC) gerilimin zamana göre değişmediğini biliyoruz. Buna göre doğru akım devrelerinde kondansatör üzerinden akım akmaz ve doğru akım devrelerinde kondansatörün eşdeğeri açık devre olarak gösterilir.

Ayrıca herhangi bir t anında kondansatör gerilimi için formülden gerilim çekilirse $\frac{dv}{dt} = \frac{1}{C}i$ eşitliğinde her iki tarafın türevi alınırsa:

$$v(t) = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i\,(x)dx$$

olur. $-\infty$ ile t_0 arasında kondansatörde herhangi bir gerilim olması durumunda t anındaki gerilim aşağıdaki biçimde ifade edilir:

$$v(t) = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t_0} i\,(x)dx + \frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} i\,(x)dx$$

$$= v(t_0) + \frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} i\,(x)dx$$

Burada $v(t_0)$, $t = -\infty$ ile $t = t_0$ arasındaki kondansatörde biriken yükten kaynaklanan gerilimi göstermektedir.

Kondansatörün gücü ise gerilimi ve akımın çarpımına eşittir ($p(t) = v(t)C\,\frac{dv(t)}{dt}$).

Kondansatörde biriken enerji ise:

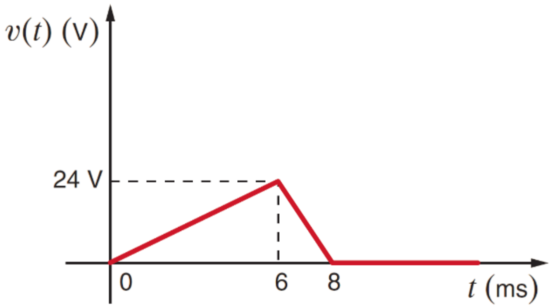
$$w_C(t) = \frac{1}{2}Cv^2(t)\ \mathrm{J} = \frac{1}{2}\frac{q^2(t)}{C}$$

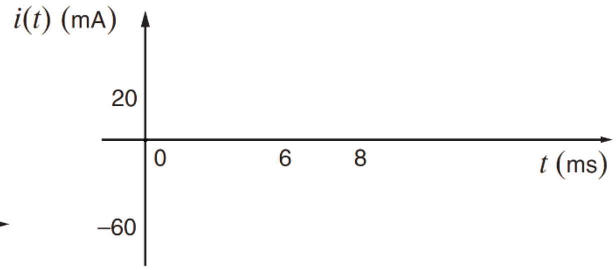
olur.

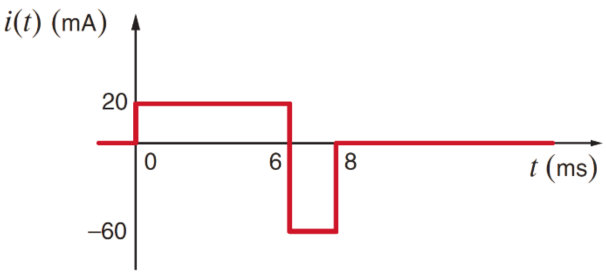
Örnek: 12V'a şarj olan bir kondansatörde biriken yük miktarı 600pC ise kapasiteyi hesaplayınız.

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{(600)(10^{-12})}{12} = 50pF$$

Örnek: 5µF'lık kondansatöre uygulanan gerilimin şekli aşağıda verilmiştir. Akımını bularak grafiğini çiziniz.







$$v(t) = \frac{24}{6\times10^{-3}}t \qquad 0 \le t \le 6ms$$

$$= \frac{-24}{2\times10^{-3}}t + 96 \qquad 6 \le t \le 8ms$$

$$= 0 \qquad 8ms \le t$$

Buradan akımlar hesaplanırsa:

$$i = C\frac{dv(t)}{dt}$$

$$= 5\times10^{-6}(4\times10^{3}) \qquad 0 \le t \le 6ms$$

$$= 20mA \qquad 0 \le t \le 6ms$$

$$= 5\times10^{-6}(-12\times10^{3}) \qquad 6 \le t \le 8ms$$

$$= -60mA \qquad 6 \le t \le 8ms$$

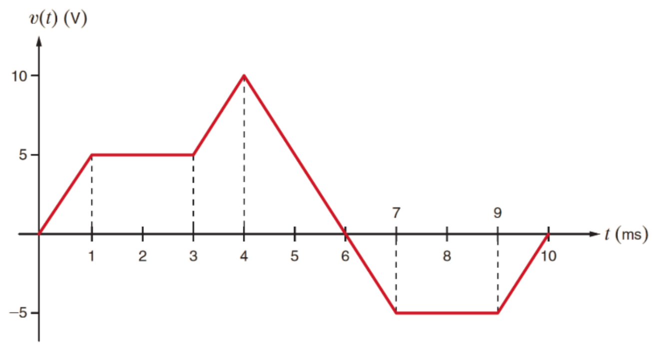
$$= 0 \qquad 8ms \le t$$

Örnek: Örnekteki kondansatörün elektrik alanında biriken enerjinin t=6ms'deki değerini bulunuz.

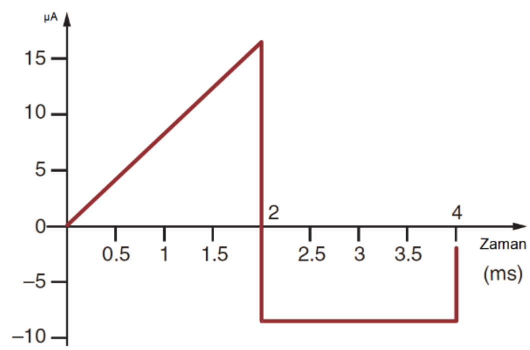
$$w_C(t) = \frac{1}{2}Cv^2(t)$$

$$= \frac{1}{2}(5\times10^{-6})(24^2) = 1440\mu\text{J}$$

Ödev: 5μF değerinde bir kondansatörün uçları arasındaki gerilimi gösteren grafik aşağıda verilmiştir. Buna göre akım grafiğini çizin.



Örnek: Başlangıçta yükü olmayan 4μF'lık bir kondansatörün akımı aşağıda verilmiştir. Gerilim, güç ve enerji ifadelerini elde ediniz ve kondansatörde biriken enerjinin t=2ms'deki değerini bulunuz.



$$\begin{aligned} i(t) &= \frac{16\times10^{-6}}{2\times10^{-3}} && 0 \le t \le 2\,ms \\ &= -8\times10^{-6} && 2ms \le t \le 4ms \\ &= 0 && 4ms < t \end{aligned}$$

$v(0) = 0$ olduğundan $0 \le t \le 2\,ms$ aralığında

$$\begin{aligned} v(t) &= \frac{1}{(4)(10^{-6})}\int_0^t 8(10^{-3})x\,dx \\ &= \frac{8(10^{-3})}{(4)(10^{-6})}\int_0^t x\,dx \\ &= 2(10^3)\left.\frac{x^2}{2}\right|_0^t \\ &= \mathbf{10^3 t^2} \end{aligned}$$

Buradan

$$\begin{aligned} v(2ms) &= 10^3(2\times10^{-3})^2 \\ &= 4mV \end{aligned}$$

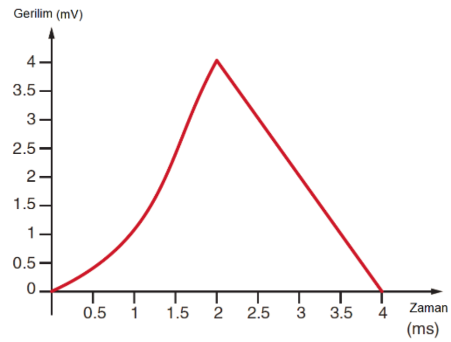
bulunur.

$2ms \leq t \leq 4\,ms$ aralığında gerilimin ifadesi

$$v(t) = \frac{1}{(4)(10^{-6})}\int_{2(10^{-3})}^{t} -(8)(10^{-6})\,dx + (4)(10^{-3})$$
$$= -2t + 8 \times 10^{-3}$$

** İntegrallerin akım grafiğindeki şekillere (fonksiyonlara) göre oluştuğuna dikkat ediniz.

Buna göre gerilim ifadesinin grafiği aşağıdaki gibi olur.



$p(t) = v(t)i(t)$ olduğundan $0 \leq t \leq 2\,ms$ aralığında güç ifadesi $p(t) = 8t^3$ olur.

$2ms \leq t \leq 4\,ms$ aralığında ise

$$p(t) = -(8)(10^{-6})(-2t + 8 \times 10^{-3})$$
$$= 16t(10^{-6}) - 64(10^{-9})$$

Grafiklerden görüldüğü üzere, $0 \leq t \leq 2\,ms$ aralığında kondansatör enerji almakta, $2ms \leq t \leq 4\,ms$ aralığında ise enerji vermektedir.

Enerji şu biçimde ifade edilir:

$$w(t) = \int_{t_0}^{t} p(x)dx + w(t_0)$$

$0 \leq t \leq 2\,ms$ aralığında

$$w(t) = \int_{0}^{t} 8x^3 dx = 2t^4$$

$$w(2ms) = 32\text{pJ} \quad \text{olur.}$$

Bobin (İndüktör)

Bir iletken telin sargı biçimine getirilmesiyle elde edilen bir devre elemanıdır. Birimi Henri'dir. Günümüzde bobinlerin incelenmesinde kullanılan matematiksel modelin tarihsel gelişimi şu şekilde olmuştur: İlk önce, akım taşıyan iletkenin bir manyetik alan oluşturduğu gösterilmiştir. Daha sonra manyetik alanla onu oluşturan akımın doğrusal olarak orantılı olduğu fark edilmiştir. En sonunda da değişken bir manyetik alanın bir gerilim oluşturduğu, bu gerilimin de manyetik alanı oluşturan akımın değişim hızı ile orantılı olduğu görülmüştür. Yani,

$$v(t) = L\frac{di(t)}{dt}$$

Buradan akımın ifadesi ise

$$i(t) = \frac{1}{L}\int_{-\infty}^{t} v(x)dx$$

elde edilir.

İlk andaki akımın sıfırdan farklı olması durumunda ise kondansatördekine benzer şekilde hesaplanır.

$$i(t) = i(t_0) + \frac{1}{L}\int_{t_0}^{t} v(x)dx$$

Güç ise

$$p(t) = v(t)i(t) = [L\frac{di(x)}{dt}]i(t)$$

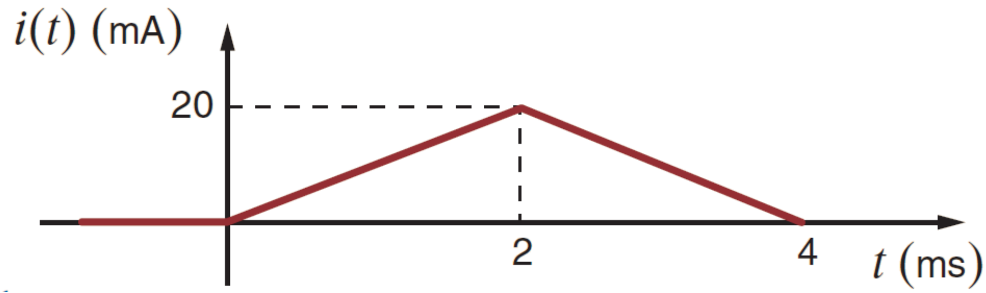
şeklinde hesaplanabilir.

Manyetik alanda depolanan enerji ise

$$w_L(t) = \frac{1}{2}Li^2(t)\mathrm{J}$$

olur.

Örnek: 10mH değerindeki bir indüktörün akım şekli aşağıda verilmiştir. Gerilimin şeklini hesaplayınız.



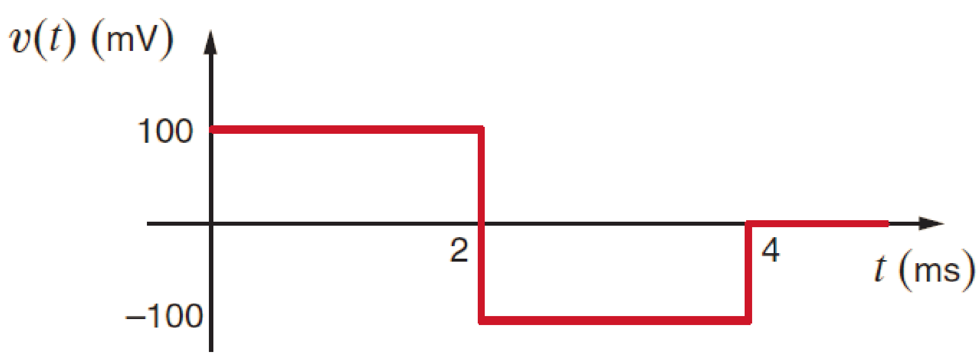
$$i(t) = \frac{20 \times 10^{-3} t}{2 \times 10^{-3}} \qquad 0 \le t \le 2 \text{ ms}$$

$$i(t) = \frac{-20 \times 10^{-3} t}{2 \times 10^{-3}} + 40 \times 10^{-3} \qquad 2 \le t \le 4 \text{ ms}$$

$$i(t) = 0 \qquad 4 \text{ ms} < t$$

$$v(t) = (10 \times 10^{-3}) \frac{20 \times 10^{-3}}{2 \times 10^{-3}} \qquad 0 \le t \le 2 \text{ ms}$$
$$= 100 \text{ mV}$$

$$v(t) = (10 \times 10^{-3}) \frac{-20 \times 10^{-3}}{2 \times 10^{-3}} \qquad 2 \le t \le 4 \text{ ms}$$
$$= -100 \text{ mV}$$



Kaynaklar

1. Temel Mühendislik Devre Analizi, J. David Irwin, R Mark Nelms, Nobel Yayınevi