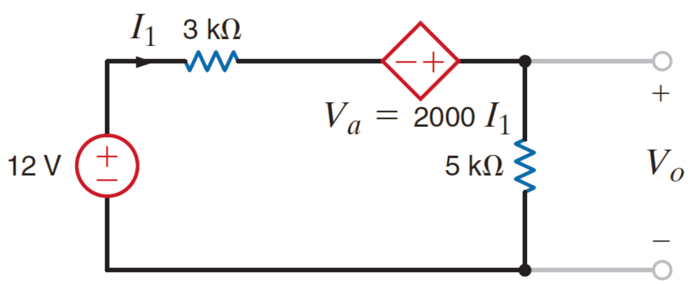
DEVRE ANALİZİ

Hafta 6

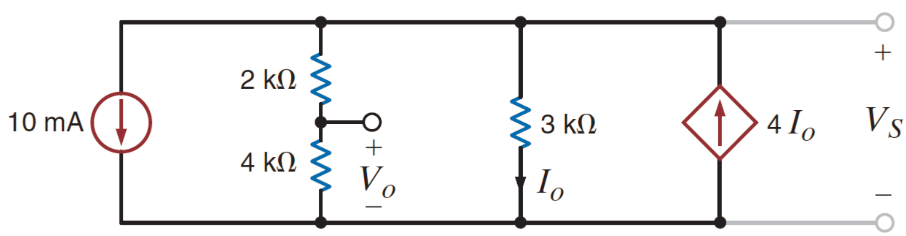
Bağımlı Kaynaklara Sahip Devreler İçin Problem Çözme Yolu

1. Bir devre için KGY ve KAY denklemlerini yazarken bağımlı kaynakları bağımsız kaynaklar gibi ele alın.
2. Bağımlı kaynakların bağlı oldukları değişkenle ilişkisini gösteren denklemleri yazın
3. Elinizde bilinmeyen sayısı kadar bağımsız doğrusal (lineer) denklem olduğundan emin olun. Sonra bilinmeyenleri bulmak için bu denklemleri çözün.

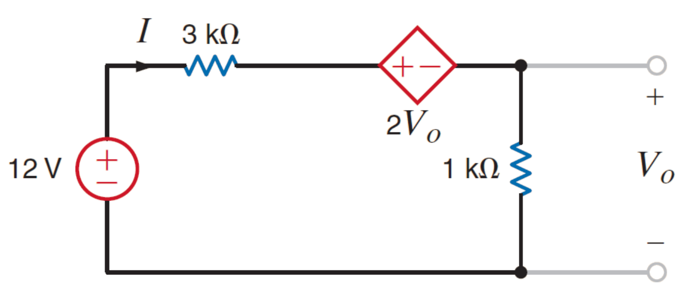
Örnek: Şekildeki devrede V_o geriliminin değerini bulunuz.



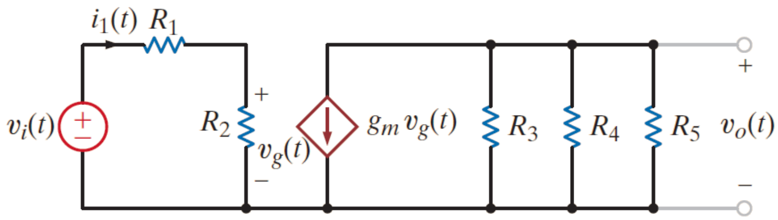
Örnek: Şekildeki devrede V_o geriliminin değerini bulunuz.



Örnek: Şekildeki devrede V_o geriliminin değerini bulunuz.



Örnek: Şekildeki devrede $R_1 = 100\Omega$, $R_2 = 1k\Omega$, $gm = 0.04S$, $R_3 = 50k\Omega$ ve $R_4 = R_5 = 10k\Omega$ ise v_o geriliminin değerinin v_i gerilimine oranını (kazancı) bulunuz.



Düğüm ve Çevre Analizi Teknikleri

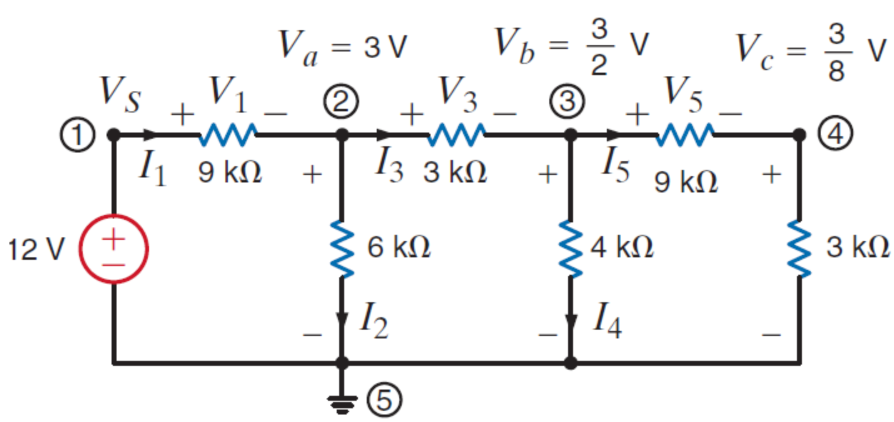
Devre analizinde daha önce anlatılan Ohm kanunu, KAY, KGY, gerilim bölüşümü ve akım bölüşümü gibi temel yöntemlerin uygulanış biçimlerindeki değişikliklerle nasıl analiz yapılacağı bundan sonraki kısımlarda anlatılacaktır.

Düğüm Analizi

Düğüm analizinde devrede seçilen değişkenler düğüm gerilimleridir. Düğüm gerilimleri devredeki ortak bir noktaya göre tanımlanır. Bu ortak noktaya referans düğüm ismi verilir. Devrede referans düğüm belirlendikten sonra diğer tüm düğüm gerilimleri bu referans düğüme göre tanımlanır. Referans düğüm genellikle en çok sayıda dalın birleştiği düğümdür. Bu düğüm toprak olarak adlandırılır ve geriliminin sıfır olduğu kabul edilir.

Diğer tüm düğüm gerilimlerinin bu referans noktaya göre pozitif olduğu varsayılacak, eğer gerçekte bir veya daha fazla düğüm gerilimi referans düğüme göre negatif ise analiz işleminin sonucunda bu değerler negatif olarak bulunur.

Aşağıdaki devrede V_s, V_a, V_b ve V_c gerilimleri ⏚ toprak sembolü ile işaretlenmiş ve referans olarak seçilmiş olan alt düğüme göre ölçülür. Bundan dolayı referans olarak alınan düğüm 5'e göre düğüm 1'in gerilimi $V_s = 12V$, düğüm 2'nin gerilimi $V_a = 3V$ olur. Eğer bu şekilde devredeki tüm düğümlerin gerilimi biliniyorsa, devredeki tüm elemanların gerilimi biliniyor demektir. Dolayısıyla herhangi bir koldaki akım, herhangi bir elemanın çektiği veya devreye verdiği güç bulunabilir. Örneğin en soldaki 9kΩ'luk direnç üzerindeki gerilim, iki ucu arasındaki gerilimlerin farkı olacaktır.



$$
\begin{aligned}
V_1 &= V_s - V_a \\
&= 12 - 3 \\
&= 9V
\end{aligned}
$$

Bu aslında KGY’nin en soldaki çevre üzerine uygulanmasından başka bir şey değildir. Yani

$$-V_s + V_1 + V_a = 0$$

Benzer şekilde

$$V_3 = V_a - V_b$$

ve

$$V_5 = V_b - V_c$$

Olduğunu buluruz. Dolayısıyla dirençlerden geçen akımlar

$$I_1 = \frac{V_1}{9k} = \frac{V_s - V_a}{9k}$$

$$I_3 = \frac{V_3}{3k} = \frac{V_a - V_b}{3k}$$

$$I_5 = \frac{V_5}{9k} = \frac{V_b - V_c}{9k}$$

olur. Ayrıca referans düğüm 5 sıfır gerilime sahip olduğundan

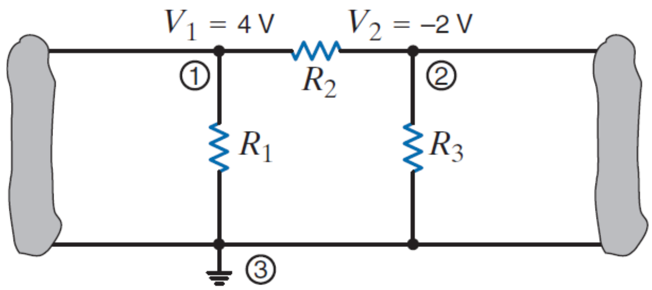
$$I_2 = \frac{V_a - 0}{6k}$$

$$I_4 = \frac{V_b - 0}{4k}$$

olur.

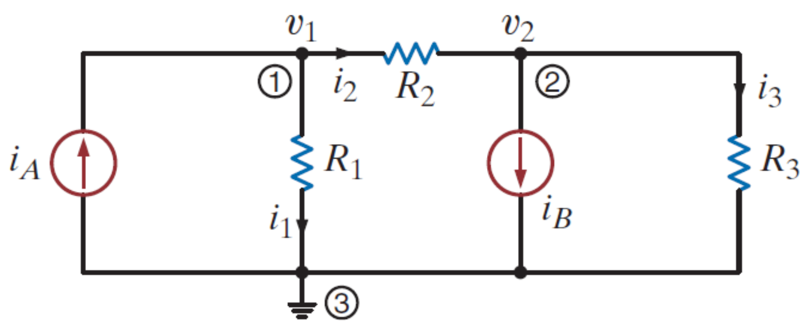
Düğüm analizinde, KAY denklemlerini yazarken devredeki düğümlere ait gerilimleri denklemin bilinmeyeni olarak kullanırız. N düğüme sahip bir devrede bir düğümün referans düğüm olarak seçildiği belirtilmişti. Devredeki geriye kalan N-1 düğüme ait gerilimler bu referans düğüme göre tanımlanır. Böylece çözüm için N-1 doğrusal (lineer) bağımsız KAY denkleminin gerekli olduğu görülür.

Hatırlatma: Başlangıç olarak referans düğümün belirlenmesi önemlidir. Aksi halde herhangi bir düğümün geriliminden bahsetmek anlamsız olur. Belirlenmiş referansa göre diğer düğümlerin gerilimleri anlamlı olacaktır. Aşağıda üç düğüm içeren ve referans noktası belirlenmiş bir devre parçası görülmektedir.



Sadece Bağımsız Akım Kaynakları İçeren Devreler

Aşağıdaki devre üç düğüme sahip olduğundan N-1=2 adet doğrusal bağımsız KAY denklemi yazılmalıdır. Alttaki düğüm referans düğüm olarak seçildiğinde üstteki düğümler v_1 ve v_2 olarak tanımlanmış olsun.



Bu durumda düğüm 1 için KAY:

$$-i_A + i_1 + i_2 = 0$$

$$i_A = \frac{v_1}{R_1} + \frac{v_1 - v_2}{R_2}$$

Düğüm 2'de KAY:

$$-i_2 + i_B + i_3 = 0$$

$$\frac{v_1 - v_2}{R_2} = i_B + \frac{v_2}{R_3}$$

şeklinde ifade edilir. Bu iki bilinmeyenli denklem

$$\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) v_1 - \left(\frac{1}{R_2}\right) v_2 = i_A$$

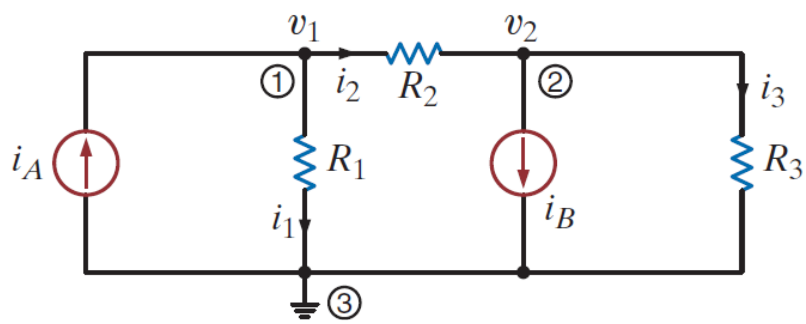
$$-\left(\frac{1}{R_2}\right) v_1 + \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}\right) v_2 = i_B$$

şeklindedir. Analiz sonucunda v_1 ve v_2 bilinmeyenlerini içeren iki denklem elde edilir. Bu denklemler herhangi bir yöntemle (yerine koyma, Cramer yöntemi, Gauss eliminasyon, Gauss-Jordan, vb.) çözülebilir.

Üçüncü referans düğüm için denklem yazılırsa, ilk iki denklemin toplamına eşit olduğu görülür.

$$i_A - i_1 - i_B - i_3 = 0$$

Örnek: Şekildeki devrede $I_A = 1\,mA$, $R_1 = 12k\Omega$, $R_2 = 6k\Omega$, $I_B = 4\,mA$ ve $R_3 = 6k\Omega$ ise tüm düğüm gerilimlerini ve dal(kol) akımlarını bulunuz.



$$V_1\left[\frac{1}{12k} + \frac{1}{6k}\right] - V_2\left[\frac{1}{6k}\right] = 1 \times 10^{-3}$$

$$-V_1\left[\frac{1}{6k}\right] + V_2\left[\frac{1}{6k} + \frac{1}{6k}\right] = -4 \times 10^{-3}$$

$$\frac{V_1}{4k} - \frac{V_2}{6k} = 1 \times 10^{-3}$$

$$-\frac{V_1}{6k} + \frac{V_2}{3k} = -4 \times 10^{-3}$$

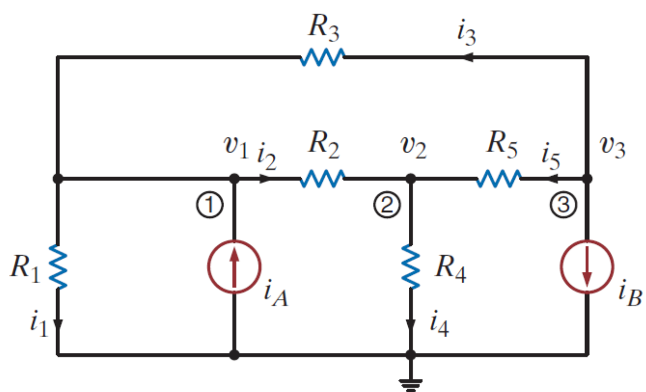
$$V_1 = V_2\left(\frac{2}{3}\right) + 4$$

$$\frac{-1}{6\text{k}}\left(\frac{2}{3}V_2 + 4\right) + \frac{V_2}{3\text{k}} = -4 \times 10^{-3}$$

$$V_2 = -15\text{ V}$$

$$V_1 = \frac{2}{3}V_2 + 4$$
$$= -6\text{ V}$$

Düğüm sayısı 4 olduğunda yerine koyma yöntemi yerine matrislerde kullanılan yöntemlerin uygulanması daha uygun olur.



Yukarıdaki devre için düğüm gerilimleri yazılır ve düzenlenirse:

$$v_1\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}\right) - v_2\frac{1}{R_2} - v_3\frac{1}{R_3} = i_A$$
$$-v_1\frac{1}{R_2} + v_2\left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5}\right) - v_3\frac{1}{R_5} = 0$$
$$-v_1\frac{1}{R_3} - v_2\frac{1}{R_5} + v_3\left(\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_5}\right) = -i_B$$

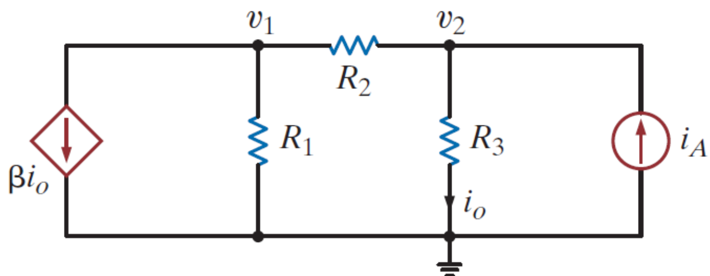
aşağıdaki matris formu elde edilir:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} & -\frac{1}{R_2} & -\frac{1}{R_3} \\ -\frac{1}{R_2} & \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5} & -\frac{1}{R_5} \\ -\frac{1}{R_3} & -\frac{1}{R_5} & \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_A \\ 0 \\ -i_B \end{bmatrix}$$

<u>Bu matrisin simetrik olduğuna dikkat edin.</u>

Bağımlı Akım Kaynakları İçeren Devreler

Bağımlı kaynakların varlığı devreyi tanımlayan düğüm denklemlerindeki simetrik yapıyı bozabilir. Aşağıdaki devre için bu durumu inceleyelim.



$$\beta_{i_o} + \frac{v_1}{R_1} + \frac{v_1 - v_2}{R_2} = 0$$

$$\frac{v_2 - v_1}{R_2} + i_o - i_A = 0$$

Burada $i_o = \frac{v_2}{R_3}$ yerine yazılarak denklem tekrar düzenlenirse:

$$\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) v_1 - \left(\frac{1}{R_2} - \beta \frac{1}{R_3}\right) v_2 = 0$$

$$-\left(\frac{1}{R_2}\right) v_1 + \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}\right) v_2 = i_A$$

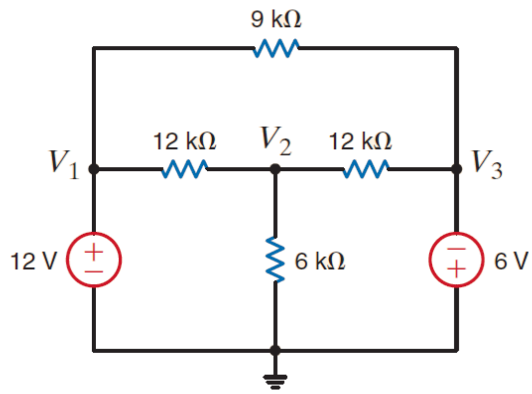
matris formatında yazılırsa:

$$\begin{bmatrix} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) & \left(-\frac{1}{R_2} + \beta \frac{1}{R_3}\right) \\ \left(-\frac{1}{R_2}\right) & \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ i_A \end{bmatrix}$$

bağımlı kaynak olduğunda matriste simetrinin bozulduğu açıkça görülmektedir.

Sadece Bağımsız Gerilim Kaynakları İçeren Devreler

Düğüm gerilimleri uygulanacak devre aşağıdaki gibi bir devre olursa, seçilen referans noktaya göre V_1=12V ve V_3= -6V gerilimleri biliniyor demektir. Bu durumda V_2 gerilimini bulmak için tek denklem çözülmesi yeterlidir.



V_2 için düğüm denklemi yazılırsa:

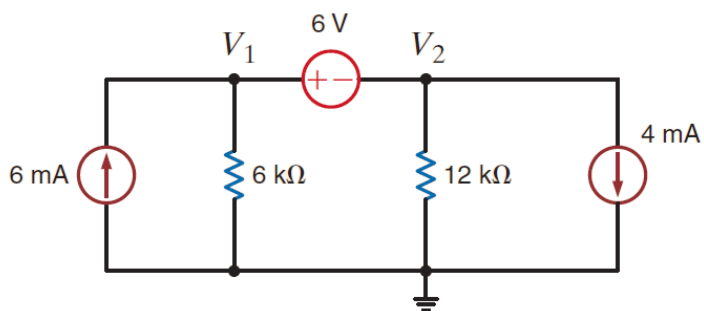
$$\frac{V_2 - V_1}{12\text{k}} + \frac{V_2 - 0}{6\text{k}} + \frac{V_2 - V_3}{12\text{k}} = 0$$

$$\frac{V_2 - 12}{12\text{k}} + \frac{V_2}{6\text{k}} + \frac{V_2 - (-6)}{12\text{k}} = 0$$

$$V_2 = \frac{3}{2}\,\text{V}$$

bulunur.

Analiz her zaman bu devrede verildiği gibi kolay yapılamayabilir. Örneğin aşağıda verilen devrede 6V'luk kaynak üzerinden geçen akım kesinlikle bilinmemektedir ve Ohm yasası kullanılarak doğrudan bulunması da mümkün değildir. Bu akıma bir isim verip, bu akım cinsinden iki referans düğümde KAY denklemleri yazılabilir. Ancak bu çözüm, üç bilinmeyen için doğrusal bağımsız iki denklem üretir.



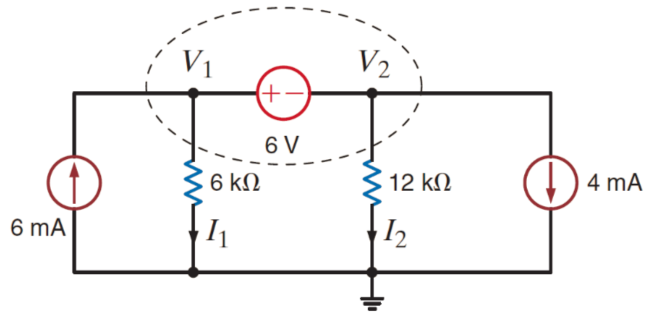
Bu durumda V_1 ve V_2 düğümleri arasındaki ilişki kullanılarak bu sorunun üstesinden gelinebilir.

Bu ilişki:

$$V_1 - V_2 = 6V$$

olarak tanımlanır.

Devre aşağıdaki şekilde tekrar ele alınırsa, 6V'luk kaynak kesikli çizgi ile gösterilen alanın içindedir. Yukarıda tanımlanan kısıtlayıcı denklem bu alanın davranışını belirler. Diğer denklemler ise **süper düğüm** olarak adlandırılan ve kesikli çizgilerle gösterilen alana uygulanır.



Süper düğüm için KAY denklemi:

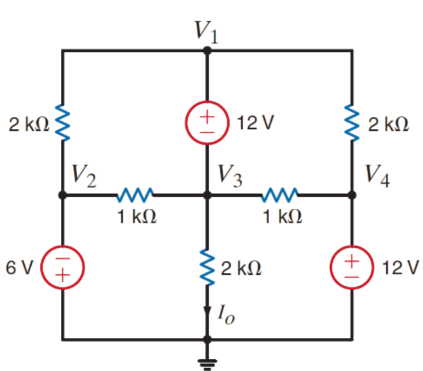
$$-6.10^{-3} + \frac{V_1}{6k} + \frac{V_2}{12k} + 4.10^{-3} = 0$$

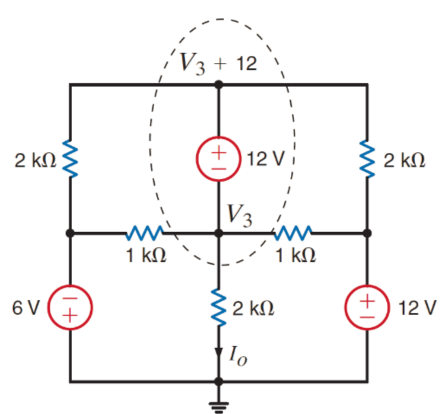
şeklinde tanımlanır. Bu denklemlerin çözülmesi ile $V_1 = 10V$, $V_2 = 4V$ ve dolayısıyla $I_1 = \frac{5}{3}mA$, $I_2 = \frac{1}{3}mA$ bulunur.

KAY'ın referans düğüme uygulanması yukarıda verilen denklemlerin aynısını üretmektedir. KAY'ın referans düğüme uygulanması süper düğümden kurtarmış gibi gözükse de; KAY bağımsız kaynak bağlı bir düğümde uygulanamaz. Bu yaklaşım aşağıdaki örnekte gösterilmiştir.

Aşağıdaki devrede I_o akımını tespit edelim:

Bu durumda $V_2 = -6V$ ve $V_4 = 12V$ olduğu kolaylıkla görülür. Ayrıca V_1 ve V_3 gerilimleri arasında $V_1 - V_3 = 12V$ kısıtlayıcı bir ilişki olduğu da görülür. Bu durum sağdaki şekilde gösterilmiştir.





I_o akımını bulmak istediğimizde V_1 (V_1 ve V_3 düğümlerini içeren süper düğümde) $V_3 + 12V$ olur. Süper düğümde KAY denklemi şu şekilde olur:

$$\frac{V_3 + 12 - (-6)}{2k} + \frac{V_3 + 12 - 12}{2k} + \frac{V_3 - (-6)}{1k} + \frac{V_3 - 12}{1k} + \frac{V_3}{2k} = 0$$

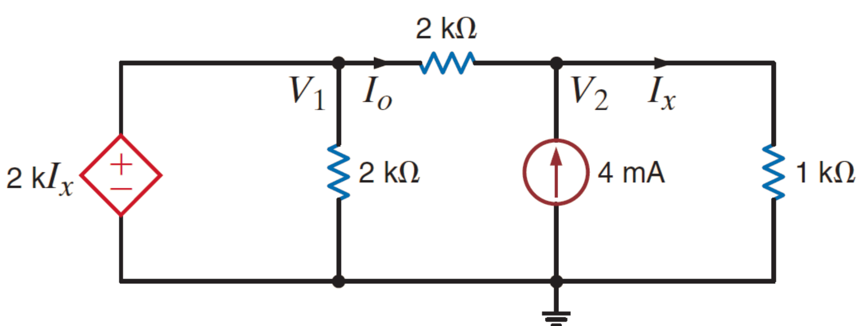
$$V_3 = -\frac{6}{7}V$$

$$I_o = \frac{-\frac{6}{7}}{2k} = -\frac{3}{7}mA$$

bulunur.

Bağımlı Gerilim Kaynakları İçeren Devreler

Bağımlı kaynaklar içeren devreler de, daha önce anlatılan yöntemlerle aynı biçimde çözülür. Aşağıdaki devrede I_o akımını tespit edelim:



Kaynaklar

1. Temel Mühendislik Devre Analizi, J. David Irwin, R Mark Nelms, Nobel Yayınevi