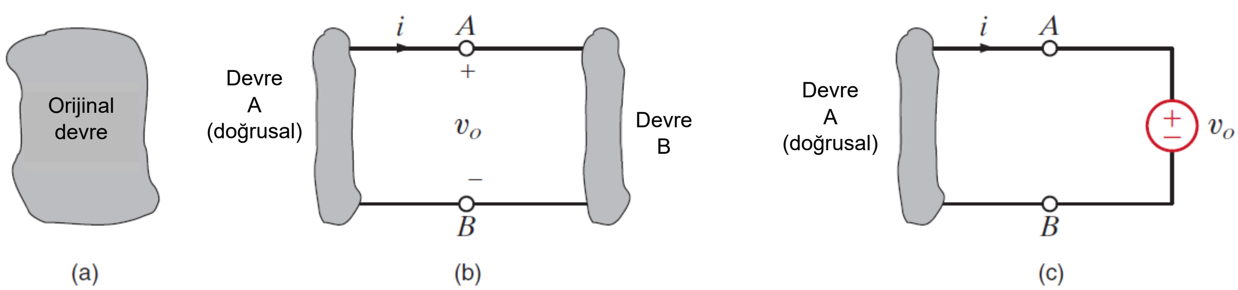
# DEVRE ANALİZİ

## Hafta 11-12

### Thevenin ve Norton Teoremleri

Bir devre verildiğinde, devrenin yükü olarak adlandırılan dirence iletilen güç, akım ya da gerilim bulunmak istenilsin. Thevenin teoremi, söz konusu direnç (yük) hariç devrenin tamamını, yükteki akım-gerilim ilişkisini değiştirmeyecek biçimde, bağımsız bir gerilim kaynağı ve ona seri bağlı dirençten oluşan bir eşdeğer devre ile değiştirilebileceğini ifade eder. Norton teoremi ise bu devrenin bağımsız bir akım kaynağı ve ona paralel bağlı bir dirençten oluşan eşdeğer devre ile değiştirilebileceğini söyler.

Teoremler geliştirilirken aşağıdaki şekillerden faydalanılacaktır. Buna göre Şekil a'daki devrenin Şekil b'deki gibi iki parçaya ayrılabileceği varsayılır. Genel olarak B devresi yüktür ve doğrusal olmak zorunda değildir. A devresi ise orijinal devreden yükün çıkartılmasıyla elde edilen devrenin eşdeğeridir ve doğrusal olmak zorundadır. A devresi bağımsız kaynakları, bağımlı kaynakları ve dirençleri veya diğer doğrusal elemanları içerebilir. Ancak, devrede bağımlı bir kaynak varsa bu kaynağın bağımlı olduğu değişken de aynı devrede olmalıdır.




A devresinden B devresine akan $i$ akımı B devresinin giriş terminalleri arasında $v_o$ gerilimini oluşturur. Bu durumda Şekil c'de gösterildiği gibi B devresi uygun polarite ve değerde bir gerilim kaynağı ile değiştirilebilir. Bu durum A devresinin uçları arasındaki ilişkileri değiştirmez. Uç gerilimi de, A devresi de değişmeyeceğinden dolayı uç akımı $i$ de değişmeyecektir.

Şekil c'deki devreye süperpozisyon ilkesi uygulanırsa; $i$ akımı, A devresindeki tüm kaynaklardan ötürü oluşan akımlar ve B devresi yerine koyulan $v_o$ kaynağından oluşan akımların toplamına eşittir. Bu durumda $i$ akımı için aşağıdaki eşitlik yazılabilir.

$$i = i_o + i_{sc}$$

Burada $i_o$ akımı, A içerisindeki kaynakların tümünün sıfırlanması (gerilim kaynaklarının kısa devre, akım kaynaklarının açık devre eşdeğeri ile değiştirilmesi) sonucunda $v_o$ geriliminden kaynaklanan akımdır. $i_{sc}$ ise, $v_o$ kaynağının kısa devre edilmesinden sonra A devresindeki tüm kaynaklardan ötürü oluşan akımdır.

$i_o$ ve $v_o$ arasındaki ilişki şu şekildedir:

$$i_o = \frac{-v_o}{R_{th}}$$

Burada $R_{th}$, A devresindeki tüm kaynaklar sıfırlanmışken A-B terminallerinden devreye bakıldığında görülen eşdeğer dirençtir. Bu durumda $i = i_o + i_{sc}$ ifadesini daha açık olarak şu şekilde elde ederiz:

$$i = \frac{-v_o}{R_{th}} + i_{sc}$$

Bu genel ifade, A-B terminalleri arasındaki tüm özel koşulları da sağlamak zorundadır. Özel durum olarak, uçların açık devre olduğu varsayılsın. Bu durumda $i_o = 0$ olur ve $v_o$ açık devre gerilimi $v_{oc}$'ye eşit olur. Bu nedenle yukarıdaki eşitlik aşağıdaki halini alır.

$$i = 0 = \frac{-v_o}{R_{th}} + i_{sc}$$

Bu durumda

$$v_{oc} = R_{th} i_{sc}$$

olur.

Bu denklem, kısa devre akımı ile A devresindeki tüm kaynaklar sıfırlanmışken devreye bakıldığında görülen eşdeğer direncin çarpımının, açık devre gerilimine eşit olduğunu ifade etmektedir. $R_{th}$ devrenin eşdeğer Thevenin direnci olarak adlandırılır.

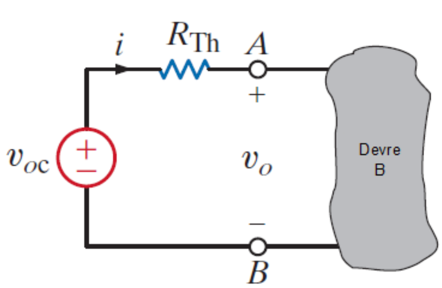
Son bilgiler ışığında genel denklem aşağıdaki şekilde yazılabilir:

$$i = \frac{-v_o}{R_{th}} + \frac{v_{oc}}{R_{th}}$$

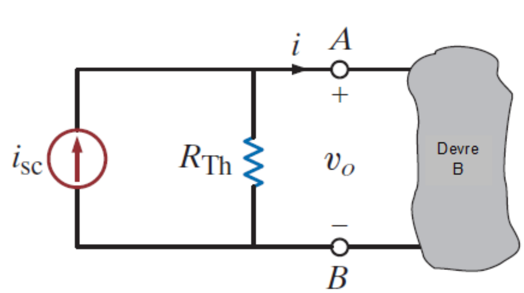
ya da

$$v_o = v_{oc} - R_{th} i$$

Bu denklemlerle aşağıdaki devreler incelenerek konu daha iyi anlaşılabilir.



(a)



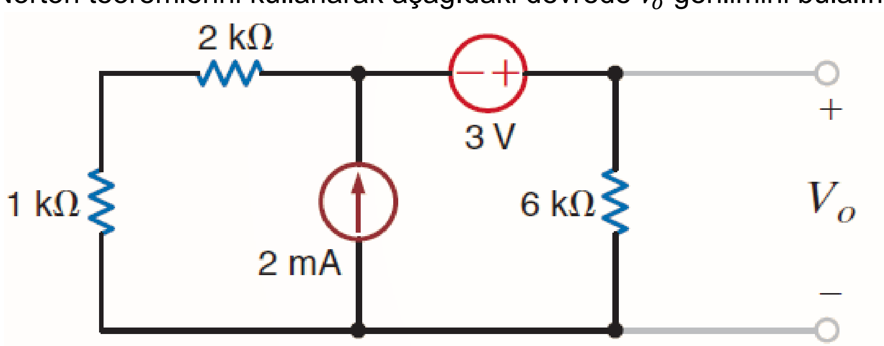
(b)

Şekil a'da Thevenin, b'de Norton eşdeğer devreleri görülmektedir. Thevenin ve Norton eşdeğer devreleri arasında bir ilişki olduğu görülmektedir. Bu teoremler uygulanırken orijinal devrenin yapısına bakılır. Devrede yalnızca bağımsız kaynaklar varsa, Thevenin eşdeğer direncinin yanında ya açık devre gerilimi ya da kısa devre akımı da hesaplanmalıdır. Ancak devrede bağımlı kaynaklar varsa Thevenin eşdeğeri $v_{oc}$ ve $i_{sc}$'den hesaplanmalıdır. Bağımlı kaynaklar varken $R_{th}$ hesaplamanın en doğru yöntemi budur. Son olarak A devresi bağımsız kaynak içermiyorsa, $v_{oc}$ ile $i_{sc}$'nin her ikisi de sıfırdır. (Nedeni üzerinde düşününüz.) Bu durumda $R_{th}$ $v_{oc}/i_{sc}$ oranı ile hesaplanmaz, çünkü oran belirsizdir. Bu durumda A devresine bir test kaynağı bağlayarak $R_{th}$ değerinin hesaplanması uygun olur.

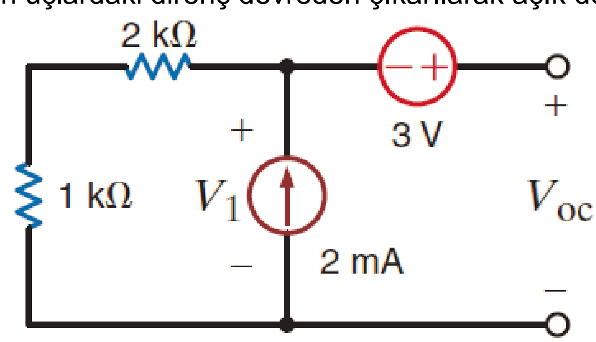
Orijinal devrenin yapısına göre çözüm yolları ayrı ayrı incelenecektir. Bu teoremler ile devre ne kadar büyük ve karmaşık olursa olsun devreyi iki terminali arasında görülen Thevenin veya Norton eşdeğeri ile değiştirerek çözüme gidilebilir. Esasında şehir şebekesi de bir çift uç ve bir eşdeğer devre ile modellenebilir.

## Yalnız Bağımsız Kaynak İçeren Devreler

Thevenin ve Norton teoremlerini kullanarak aşağıdaki devrede $V_o$ gerilimini bulalım.




Öncelikle gerilimi istenilen uçlardaki direnç devreden çıkarılarak açık devre gerilimi hesaplanır.



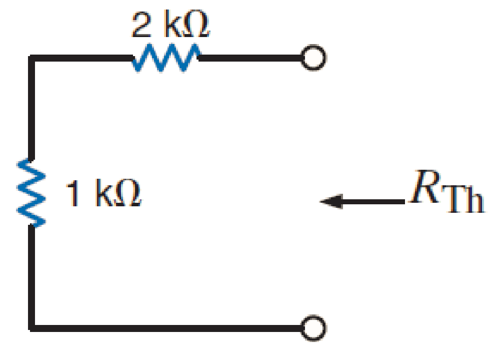

Devrede kapalı tek göz olduğu için

$$V_1 = 2mA(2k + 1k) = 6V$$

$$V_{oc} = V_1 + 3V = 9V$$

olur.

Daha sonra devrenin eşdeğer Thevenin direnci hesaplanır. Bunun için kaynaklar sıfırlanır ve aşağıdaki devre elde edilir.

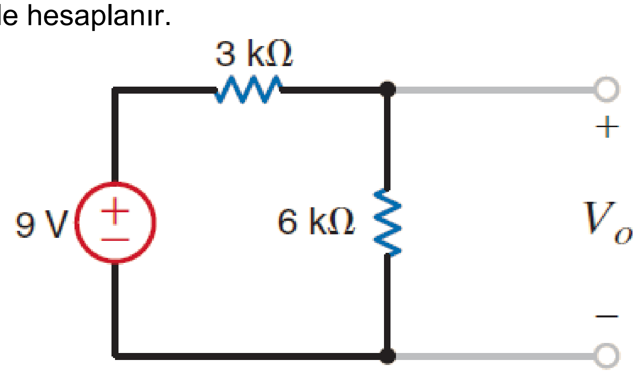



Devrenin terminalleri arasındaki eşdeğer direnç

$$R_{Th} = 2k + 1k = 3k$$

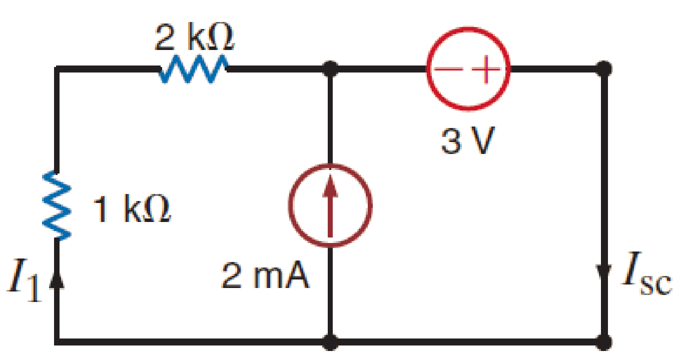
olur.

Son olarak devreden çıkardığımız 6k'lık direnç ile Thevenin eşdeğer devresine bağlanır ve $V_o$ gerilimi gerilim bölücü ile hesaplanır.




$$V_o = \frac{9V}{3k + 6k} 6k = 6V$$

$V_o$ gerilimi Norton teoremi ile çözülmek istenirse yine devrede yük direnci çıkartılır. Ancak bu durumda aşağıdaki şekilde gösterilen kısa devre akımı $I_{sc}$ hesaplanır.



Bu devrede 3V'luk kaynak 2mA'lik kaynağa ve dirençlere paralel bağlı olduğu için

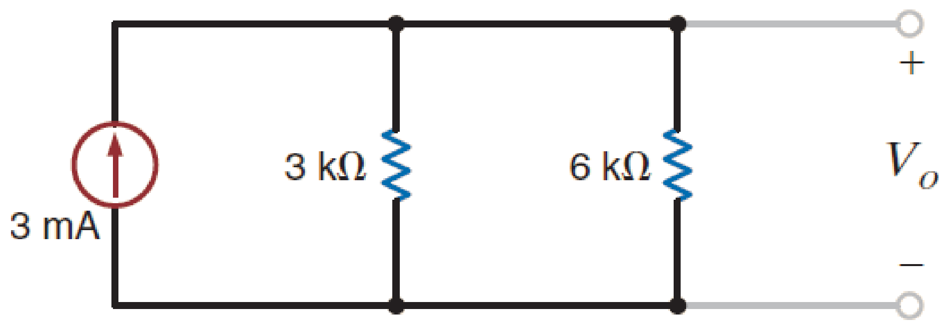
$$I_1 = \frac{3V}{1k + 2k} = 1mA$$

ve KAY gereği

$$I_{sc} = 2mA + 1mA = 3mA$$

olarak hesaplanır.

$R_{Th}$ değeri daha önce hesaplandığı gibi devredeki tüm kaynaklar sıfırlandığında bulunan eşdeğer direnç değeridir. Böylece Norton eşdeğer devresi aşağıdaki şekilde oluşturulur.



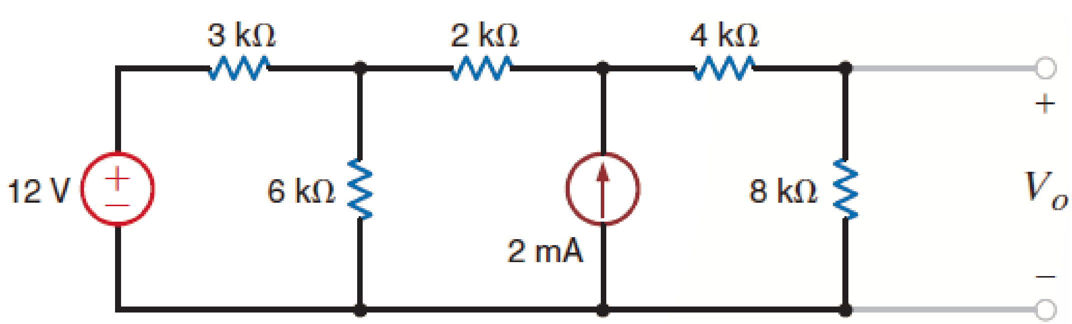

Bu devre paralel olduğu için $V_o$ geriliminin her kolda eşit olması gerekir. Akım bölüşüm kuralı ile herhangi bir koldaki akım hesaplanarak $V_o$ bulunabilir veya eşdeğer direnç hesaplandıktan sonra Ohm kanununa göre yine $V_o$ hesaplanabilir.

$$R_p = \frac{3k\ 6k}{3k + 6k} = 2k$$

$$V_o = 3mA\ 2k = 6V$$

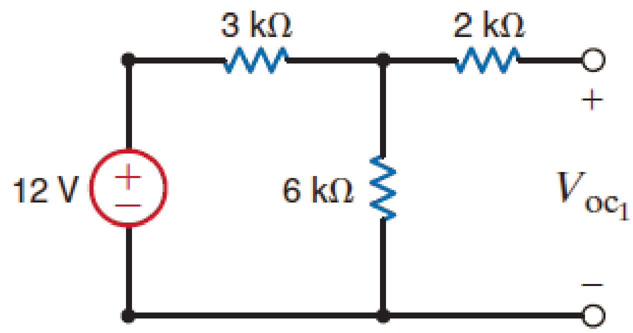
bulunur.

**Örnek:** Şekildeki devrede $V_o$ geriliminin değerini Thevenin teoremini kullanarak bulunuz.



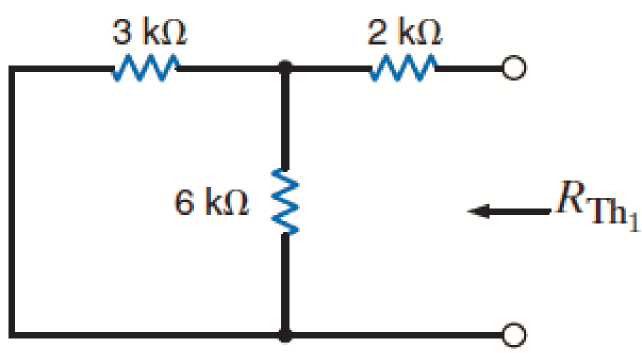

Öneri: Devreyi önce 2mA'lik kaynaktan bölüp, sonra elde edilen devreye tekrar Thevenin teoremi uygulamak işinizi kolaylaştırabilir.

Bu durumda ilk açık devre gerilimi aşağıdaki devreden hesaplanmalıdır.




$$V_{oc_1} = \frac{12V}{3k + 6k} 6k = 8V$$

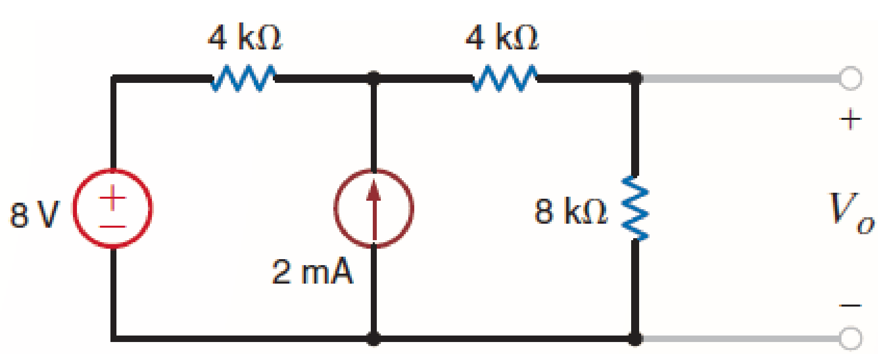
Thevenin eşdeğeri



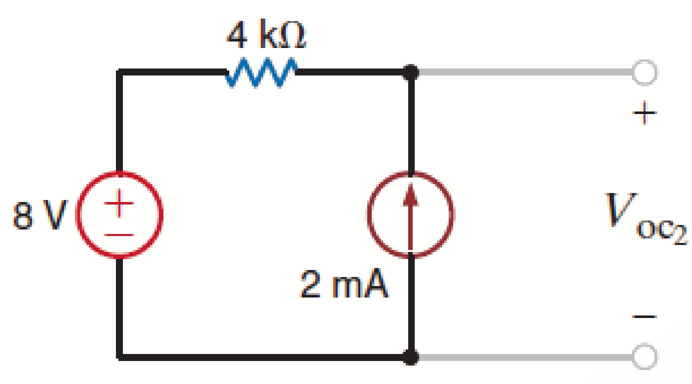

$$R_{Th_1} = \frac{3k\ 6k}{3k + 6k} + 2k = 4k$$

bulunur.

Elde edilen eşdeğer devre ile orijinal devrenin kalan kısmı birleştirilir.



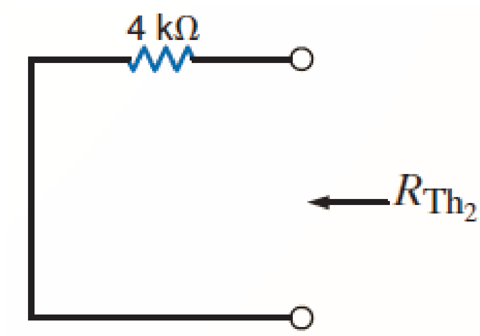

Elde edilen yeni devreden 8k'lık direnç çıkarılarak tekrar Thevenin teoremini uygulanırsa:




$$V_{oc_2} = (2mA)(4k) + 8V = 16V$$

bulunur.

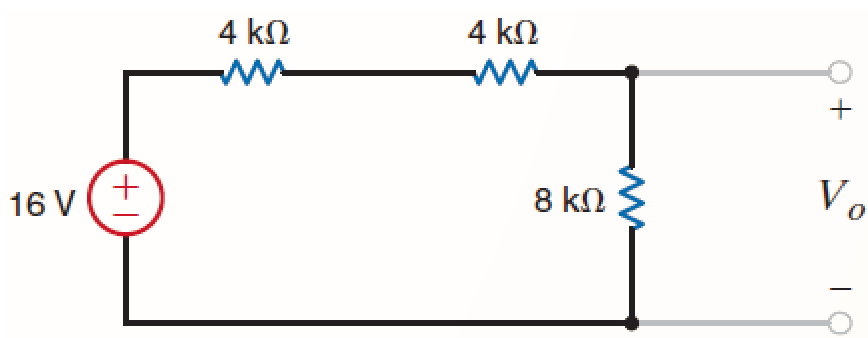
Devrenin Thenin eşdeğeri ise




$$R_{Th_1} = 4k$$

olur.

Elde edilen devre ile kalan kısım birleştirildiğinde aşağıdaki devre elde edilir.



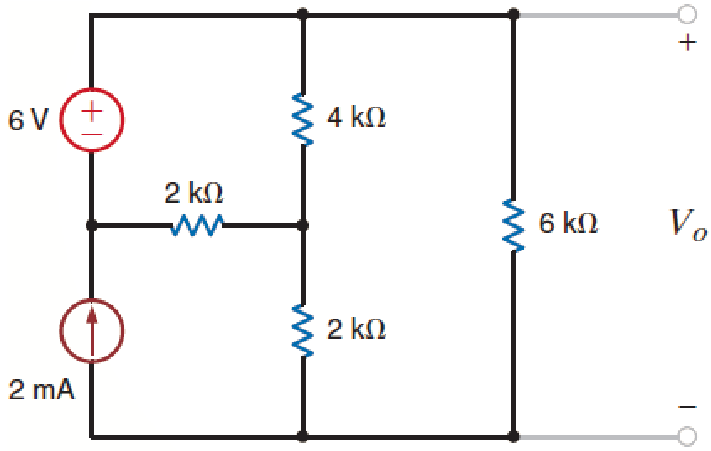

Bu devrede çıkış gerilimi

$$V_o = \frac{16v}{4k + 4k + 8k} 8k = 8V$$

olarak hesaplanır.

Siz de aynı devreyi Norton yöntemi ile çözerek sonuçlarınızı kıyaslayın.

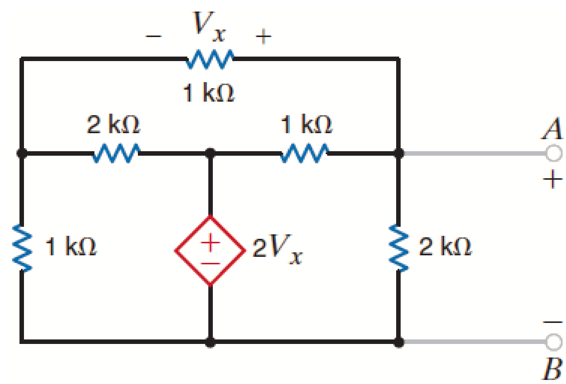
**Ödev:** Aşağıdaki devrede $V_o$ gerilimini hem Thevenin, hem de Norton teoremleri ile bularak sonuçlarınızı kıyaslayın.



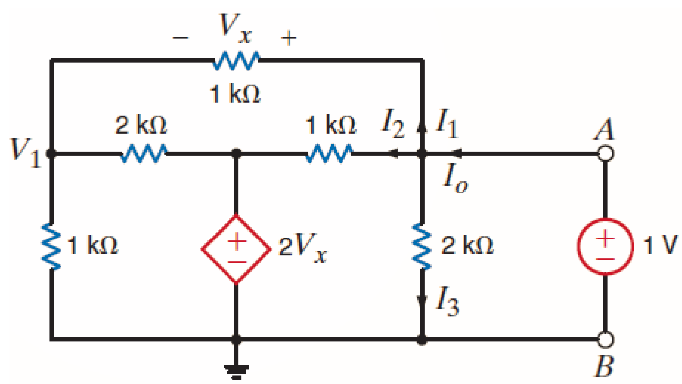
### Yalnız Bağımlı Kaynak İçeren Devreler

Yalnız bağımlı kaynak içeren devrelerde Thevenin ve Norton eşdeğeri yalnızca $R_{Th}$ olur. Aşağıdaki örnek bu tip problemlerin çözümünde izlenilmesi gereken yolu göstermesi açısından hazırlanmıştır.

**Örnek:** Aşağıdaki devrenin Thevenin eşdeğerini bulunuz.




Bu durumda yapılması gereken A-B terminalleri arasında 1V'luk bir gerilim uygulayarak $I_o$ akımını ve $R_{Th}$ direncini ($R_{Th} = 1/I_o$) hesaplamaktır.




Bu durumda aşağıdaki denklemler yazılabilir.

$$V_1 + V_x = 1V$$

$$\frac{V_1}{1k} + \frac{V_1 - 2V_x}{2k} + \frac{V_1 - 1V}{1k} = 0$$

$$5V_1 - 2Vx = 2V$$

ve buradan $V_x = \frac{3}{7}V$ elde edilir.

Bu durumda tüm akımlar hesaplanabilir.

$$I_1 = \frac{V_x}{1k} = \frac{3}{7} mA$$

$$I_2 = \frac{1 - 2V_x}{1k} = \frac{1}{7} mA$$

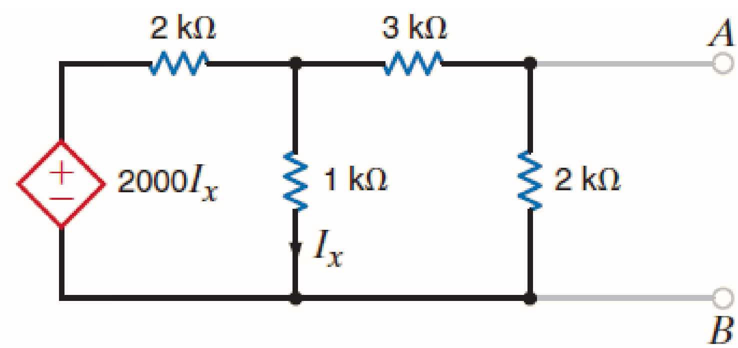
$$I_3 = \frac{1}{2k} = \frac{1}{2} mA$$

$$I_o = I_1 + I_2 + I_3 = \frac{15}{4} mA$$

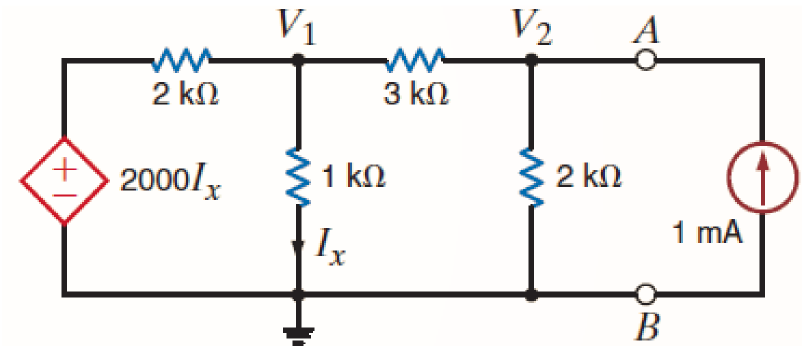
$$R_{Th} = \frac{1}{I_o} = \frac{14}{15} k\Omega$$

olarak hesaplanır.

**Örnek:** Aşağıdaki devrede A-B terminallerinden bakıldığında görülen $R_{Th}$ direncini belirleyiniz.



Bu devrede A-B terminalleri arasına aşağıdaki gibi 1mA’lik bir test kaynağı bağlanırsa ve düğüm gerilimleri yazılırsa $R_{Th} = \frac{V_2}{0.001A}$ bağıntısından eşdeğer direnç hesaplanabilir.




$$\frac{V_1 - 2000I_x}{2k} + \frac{V_1}{1k} + \frac{V_1 - V_2}{3k} = 0$$

$$\frac{V_2 - V_1}{3k} + \frac{V_2}{2k} = 1mA$$

Denklemler çözülürken $I_x = \frac{V_1}{1k}$ yazılabilir. Denklemlerin çözümünden

$$V_2 = \frac{10}{7}$$

elde edilir.

Buradan

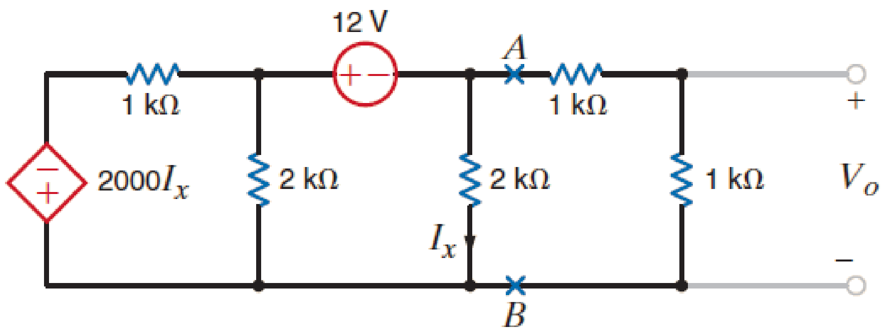
$$R_{Th} = \frac{\frac{10}{7}}{1 \times 10^{-3}} = \frac{10}{7} k\Omega$$

bulunur.

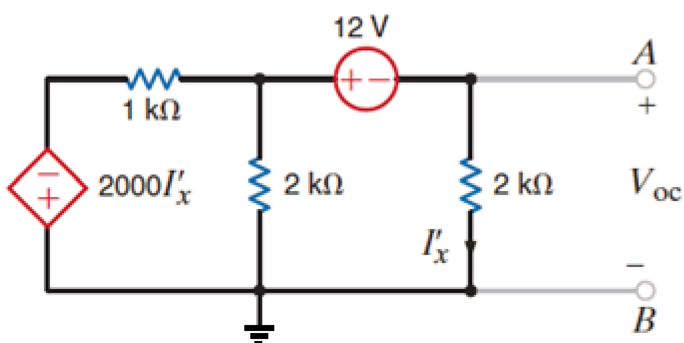
## Hem Bağımsız Hem Bağımlı Kaynak İçeren Devreler

Bir devrede hem bağımlı, hem de bağımsız kaynaklar aynı anda bulunuyorsa devrenin Thevenin eşdeğerini bulabilmek için hem açık devre gerilimi hem de kısa devre akımı hesaplanmak zorundadır. Ayrıca devredeki Thevenin ya da Norton eşdeğerini hesaplamak için devreyi parçalara ayırırken bağımlı kaynakla kaynağın bağımlı olduğu değişkenin birbirinden ayrılmayacağını unutmayınız.

**Örnek:** Şekildeki devrede $V_o$ geriliminin değerini Thevenin teoremini kullanarak bulunuz.




Devre A ve B noktalarından ayrıldığında kontrol değişkeni $I_x$ ve bağımlı kaynak aynı tarafta kalmaktadır. Bu durumda açık devre gerilimi hesaplanırsa:



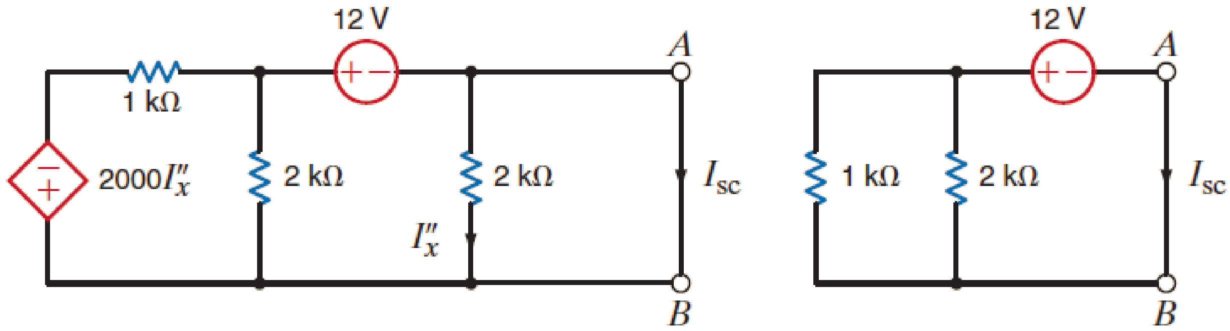

$$\frac{(V_{oc}+12)-(-2000I'_x)}{1k}+\frac{V_{oc}+12}{2k}+\frac{V_{oc}}{2k}=0$$

$$I'_x=\frac{V_{oc}}{2k}$$

$$V_{oc}=-6V$$

bulunur.

Daha sonra kısa devre akımı A-B terminallerinin kısa devre edilmesiyle bulunur. A-B terminalleri aşağıdaki gibi kısa devre edilirse, 2k'lık direnç üzerinde akım akmayacağı için bağımlı kaynakta gerilim oluşmaz. Bu durumda kısa devre akımı Şekil b'deki devre üzerinden hesaplanır.



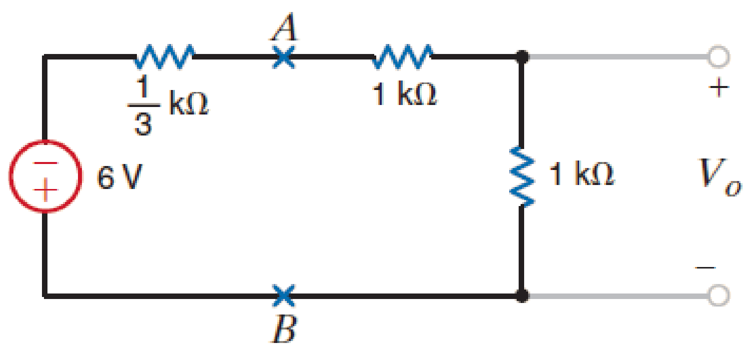

(a) (b)

$$I_{sc} = \frac{12V}{\frac{1k\ 2k}{1k + 2k}} = -18mA$$

$$R_{Th} = \frac{V_{oc}}{I_{sc}} = \frac{1}{3}k\Omega$$

bulunur.

Geri dönüp Thevenin eşdeğer devresini A-B uçları arasına bağlarsak aşağıdaki devreyi elde ederiz.




$$V_o = (-6)\left(\frac{1k}{1k + 1k + \frac{1}{3}k}\right) = \frac{-18}{7}V$$

bulunur.

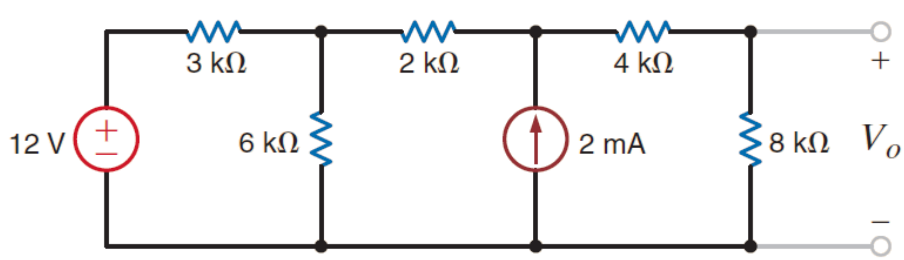
## Thevenin Teoreminin Uygulanması İçin Problem Çözme Yolu

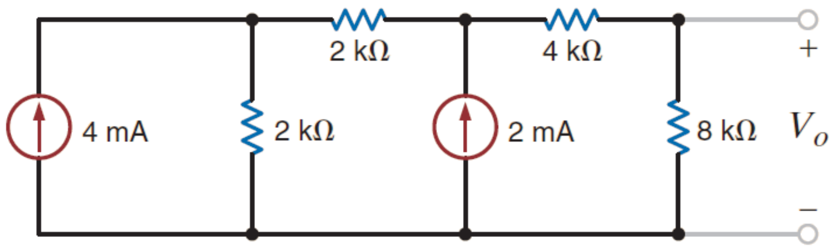
1. Yükü kaldırın ve açık devre edilen uçlar arasındaki gerilimi ($V_{oc}$) bulunuz. Bu gerilimi bulmak için daha önce anlatılan devre analiz tekniklerini kullanabilirsiniz.
2. Yük yokken açık bırakılan uçlar arasından devreye bakıldığında görülen Thevenin eşdeğer direncini hesaplayın. Thevenin direnci ($R_{Th}$) hesaplanırken üç farklı devre türü ile karşılaşabilirsiniz:
    a. Devrede yalnız bağımsız kaynaklar varsa bu kaynaklar sıfırlanır. Sıfırlama için gerilim kaynakları kısa devre ile, akım kaynakları açık devre ile değiştirilir. Böylece elde edilen tamamen dirençlerden oluşan devrenin uçları arasındaki bakarak eşdeğer direnç ($R_{Th}$) hesaplanır.
    b. Devrede yalnız bağımlı kaynaklar varsa devrenin uçları arasına bir bağımsız gerilim kaynağı bağlanıp kaynağın akımı hesaplanır veya uçlar arasına bağımsız bir akım kaynağı bağlanıp bu kaynağın gerilimi hesaplanır. Uçlardaki gerilim/akım oranı Thevenin direncini verir. Ancak, devrede herhangi bir enerji kaynağı olmadığı için açık devre gerilimi sıfırdır.
    c. Devrede hem bağımsız hem de bağımlı kaynaklar varsa bu durumda devrenin uçları kısa devre edilerek kısa devre akımı hesaplanır. Açık devre geriliminin kısa devre akımına oranı Thevenin direncini ($R_{Th}$) verir.
3. Şimdi bir gerilim kaynağı ($V_{oc}$) ile seri bağlı dirençten ($R_{Th}$) oluşan Thevenin eşdeğer devresi yükün uçlarına bağlanır ve aranan değer hesaplanır.

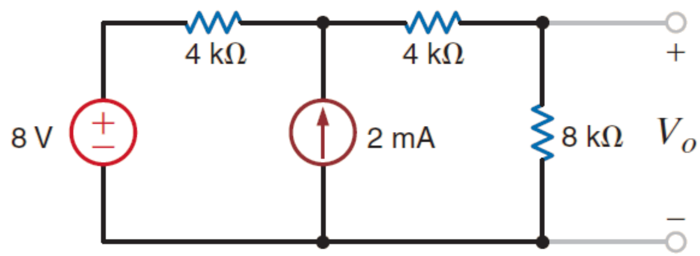
Norton teoremi için geçerli problem çözme stratejisi de temelde aynıdır. Tek fark, burada açık devre gerilimi yerine kısa devre akımı ile ilgilenilir.

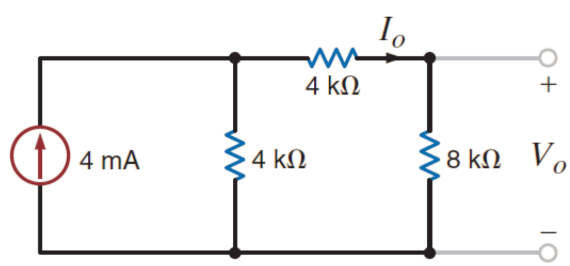
## Kaynak Dönüşümü

Eğer bir devrede bir $i$ akım kaynağı ve bir $R$ direnci paralel olarak bulunuyorsa bu iki elamanı değeri $v = Ri$ olan bir gerilim kaynağı ve ona seri bağlı R direncinden oluşan bir devre ile değiştirebiliriz. Bunun tersi de doğrudur. Yani, bir $v$ gerilim kaynağı ve ona seri bağlı bir $R$ direncinden oluşan devreyi, değeri $i = v/R$ olan bir akım kaynağı ve ona paralel bağlı bir $R$ direncinden oluşan başka bir devre ile değiştirebiliriz. Devrenin içindeki parametreler (Örneğin, çıkış gerilimi) bu dönüşüm esnasında değişmez.

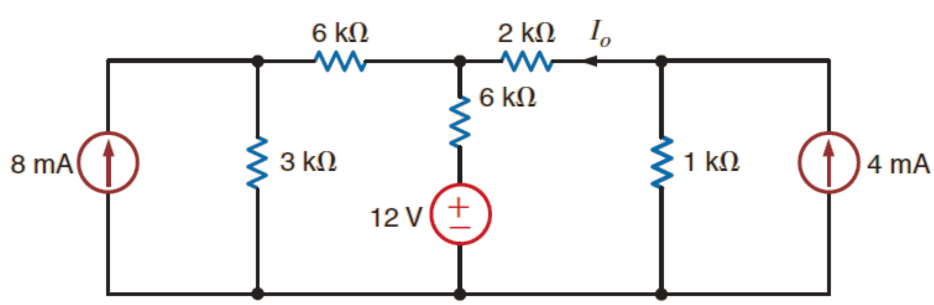





**Örnek:** Şekildeki devrede $I_o$ akımını kaynak dönüşümü kullanarak bulunuz. $(-1{,}94\ mA)$

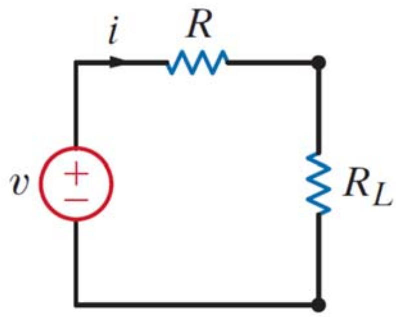



## Maksimum Güç Aktarımı

Devre analizinde bazen bir yüke aktarılabilecek (transfer edilebilecek) maksimum gücün belirlenmesi gerekebilir. Bir devrenin sağlayabileceği maksimum gücü ve bu transferin gerçekleşebilmesi için yükün nasıl ayarlanması gerektiği Thevenin teoremi yardımıyla gösterilebilir.

Aşağıdaki devrede yüke iletilen gücün ifadesi şu şekildedir:

$$P_{Load} = i^2 R_L = \left(\frac{v}{R + R_L}\right)^2 R_L$$

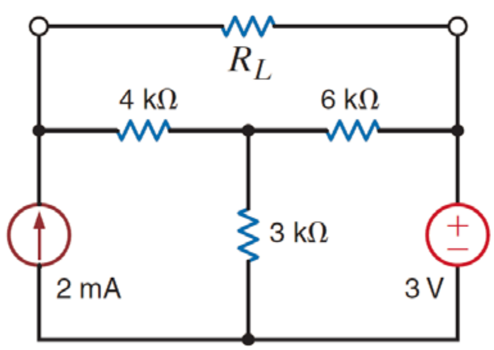



$R_L$'nin hangi değeri için bu ifadenin maksimum olcağını bulabilmek için bu ifadenin $R_L$'ye göre türevini alıp ifadeyi sıfıra eşitleyelim:

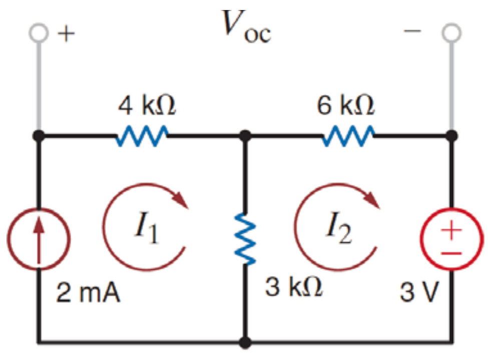
$$\frac{dP_{Load}}{dR_L} = \frac{(R + R_L)^2 v^2 - 2v^2 R_L (R + R_L)}{(R + RL)^4}$$

Buradan $R = R_L$ bulunur. Bunun anlamı, maksimum gücün aktarılabilmesi için yük direnci kaynağa seri bağlı dirence eşit olmalıdır.

**Örnek:** Aşağıdaki devrede maksimum güç transferi için $R_L$ direncinin değerini ve bu yüke iletilecek maksimum gücü bulunuz.




Öncelikle $R_L$ direnci devreden çıkartılarak iki terminal arasındaki gerilim ve eşdeğer direnç hesaplanır.




$$I_1 = 2mA$$

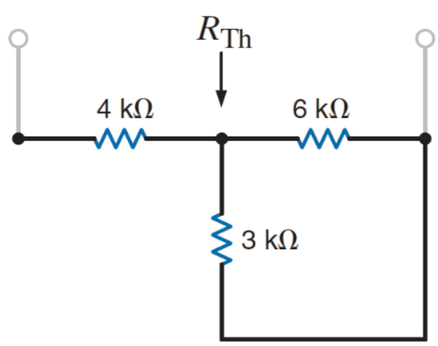
$$3k(I_2 - I_1) + 6kI_2 + 3 = 0$$

$$I_2 = \frac{1}{3}mA$$

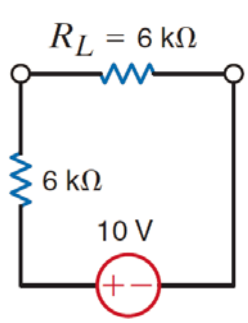
elde edilir.

$$V_{oc} = 4kI_1 + 6kI_2$$
$$= 10V$$

Eşdeğer direnç ise:



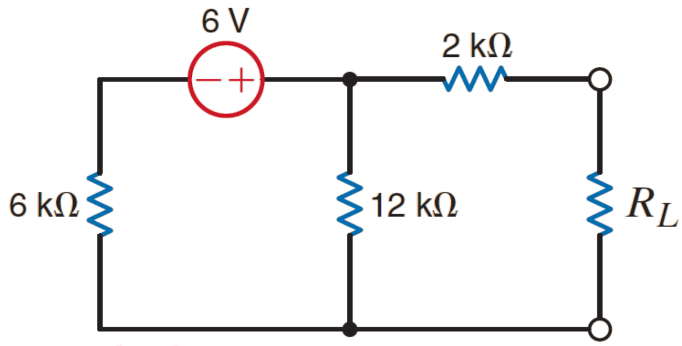

$$R_{Eş} = 4k + \frac{3k\ 6k}{3k + 6k} = 6k$$



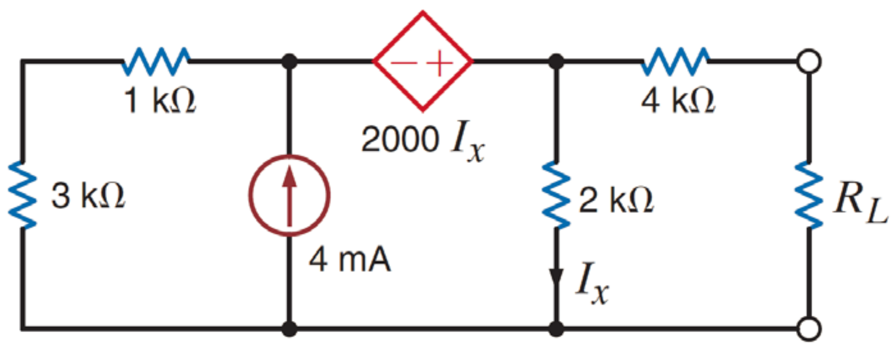

$$P_L = \left(\frac{10}{12}\right)^2 (6k) = \frac{25}{6}mW$$

olarak hesaplanır.

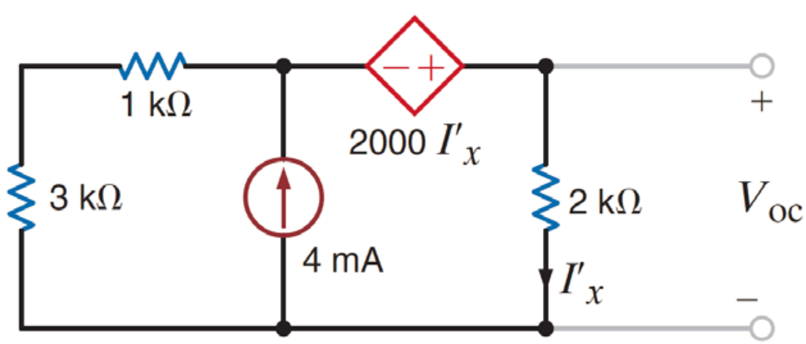
**Örnek:** Aşağıdaki devrede maksimum güç transferi için $R_L$ direncinin değerini ve bu yüke iletilecek maksimum gücü bulunuz. Daha sonra bu direnci daha küçük ve daha büyük dirençle değiştirerek sonucu kıyaslayınız. $(6k;\ P_L = \frac{2}{3}mW)$




**Örnek:** Aşağıdaki devrede maksimum güç transferi için $R_L$ direncinin değerini ve bu yüke iletilecek maksimum gücü bulunuz.

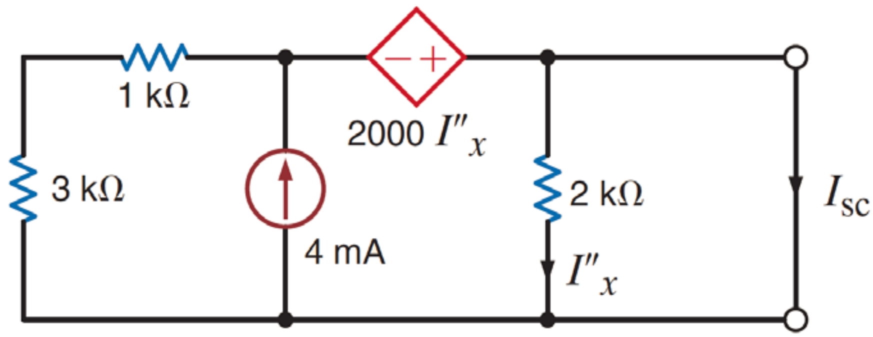



Devrede hem bağımlı hem de bağımsız kaynak olduğu için hem $V_{oc}$ hem de $I_{sc}$ bulunmalıdır. Daha basit bir devre ile hesap yapmak için devre bağımlı kaynağa ait kontrol terimini kapsayacak şekilde bölünür.

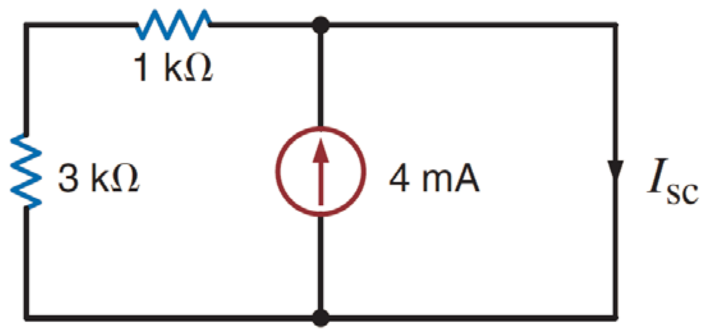



$$\frac{V_{oc} - 2000I'_x}{1k + 3k} + (-4mA) + \frac{V_{oc}}{2k} = 0 \qquad I'_x = \frac{V_{oc}}{2k}$$

$$V_{oc} = 8V$$

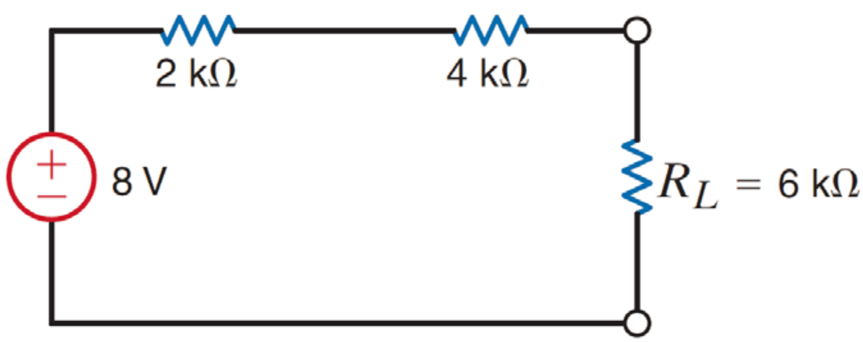



$I_{sc}$ hesaplanırken $I_x''$ akımı sıfır olacağından devre aşağıdaki şekle dönüşür.




$$I_{sc} = 4mA$$

$$R_{Th} = \frac{V_{oc}}{I_{sc}} = 2k$$




$$P_L = \left(\frac{8}{12k}\right)^2 (6k) = \frac{8}{3} mW$$

olarak hesaplanır.

## Kaynaklar

1. Temel Mühendislik Devre Analizi, J. David Irwin, R Mark Nelms, Nobel Yayınevi