Algoritmi za reševanje problema matričnih napolnitev

Matej Klančar

Mentor: doc. dr. Aljaž Zalar

2023

Kazalo

Predstavitev problema

- Problem sprejme vhodno matriko M
- Nekaterih elementov ne poznamo
- Kako določiti manjkajoče elemente, da bo rang čim manjši

$$\begin{aligned} \underset{X}{\arg\min} \quad & \operatorname{rank}(X) \\ \text{pod pogojem} \quad & \mathcal{P}_\Omega(X) = \mathcal{P}_\Omega(M) \end{aligned}$$

Uporabe algoritmov

- Priporočilni sistemi
- Rekonstrukcija signalov
- Računanje razdalj med napravami
- Rekonstrukcija slik

Kazalo

Algoritem NNM

- Minimizira nuklearno normo

$$\|A\|_* = \sum_{i=1}^{n} \sigma_i(A)$$

- Rešuje problem semidefinitega programiranja
- Lahko rešujemo s primernimi orodji za reševanje takih problemov (npr. Sedumi)

Algoritem SVT

- Problem definira z Lagrangeovo funkcijo

$$\mathcal{L}(X, Y) = \tau \|X\|_* + \frac{1}{2}\|X\|_F^2 + \langle Y, \mathcal{P}_\Omega(M - X)\rangle$$

- Uporabimo t.i. Uzawa algoritem, rešujemo iterativno

$$\begin{aligned} X^{(k)} &= \mathcal{D}_\tau(Y^{(k-1)}), \\ Y^{(k)} &= Y^{(k-1)} + \delta_k \mathcal{P}_\Omega(M - X^{(k)}), \end{aligned}$$

- Operator praga $\mathcal{D}_\tau : \mathbb{R}^{n_1 \times n_2} \to \mathbb{R}^{n_1 \times n_2}$ je definiran kot

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_\tau(A) &:= U\mathcal{D}_\tau(\Sigma)V^T, \\ \mathcal{D}_\tau(\Sigma) &= \operatorname{diag}\Big(\max(\sigma_1 - \tau, 0), \max(\sigma_2 - \tau, 0), \dots, \\ &\qquad \max(\sigma_{\min(n_1, n_2)} - \tau, 0)\Big) \end{aligned}$$

- Uporabi idejo, da ima matrika majhnega ranga le nekaj velikih singularnih vrednosti.

Algoritem TNNM

- Minimizira prirezano nuklearno normo

$$\|X\|_r = \sum_{i=r+1}^{\min(n_1,n_2)} \sigma_i(X)$$

- Uporabi A_l, B_l, sestavljeni iz lastnih vektorjev X
- Uporablja iterativni algoritem ADMM, definira pomožni matriki W, Y

$$X^{(k+1)} = \mathcal{D}_{\frac{1}{\beta}}(W^{(k)} - \frac{1}{\beta}Y^{(k)})$$

$$W^{(k+1)} = X^{(k+1)} + \frac{1}{\beta}(A_l^T B_l + Y^{(k)})$$

$$Y^{(k+1)} = Y^{(k)} + \beta(X^{(k+1)} - W^{(k+1)})$$

Algoritem ASD

- Išče matriki X, Y katerih produkt bo enak rekonstrukciji
- Uporablja gradientni spust nad funkcijo

$$f(X, Y) = \frac{1}{2} \|\mathcal{P}_\Omega(M) - \mathcal{P}_\Omega(XY)\|_F^2$$

- Z uporabo gradienta in optimalnega koraka izvaja premik

$$X^{(k+1)} = X^{(k)} - t_{x^{(k)}} \nabla f_{Y^{(k)}}(X^{(k)})$$
$$Y^{(k+1)} = Y^{(k)} - t_{y^{(k)}} \nabla f_{X^{(k+1)}}(Y^{(k)})$$

Algoritem LMaFit

- Uporablja Moore-Penrose inverz
- Množenje rešuje po metodi najmanjših kvadratov

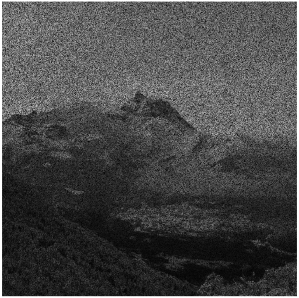
$$
\begin{aligned}
X^{(k+1)} &= Z^{(k)}(Y^{(k)})^{\dagger} \\
Y^{(k+1)} &= (X^{(k+1)})^{\dagger} Z^{(k)} \\
Z^{(k+1)} &= X^{(k+1)} Y^{(k+1)} + \mathcal{P}_{\Omega}(M - X^{(k+1)} Y^{(k+1)})
\end{aligned}
$$

Kazalo

Vhodne slike

(a) 35% znanih podatkov

(b) 45% znanih podatkov

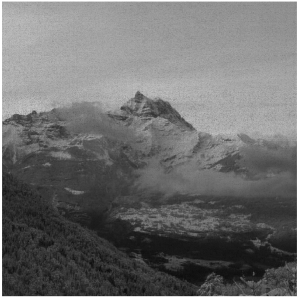


(c) 60% znanih podatkov

Rekonstrukcija z algoritmom SVT

(a) 35% znanih podatkov

(b) 45% znanih podatkov



(c) 60% znanih podatkov

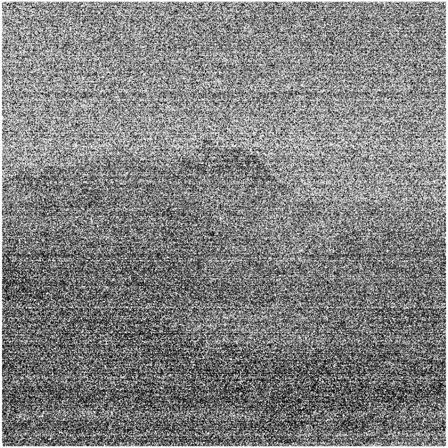
Rekonstrukcija z algoritmom TNNM

(a) 35% znanih podatkov

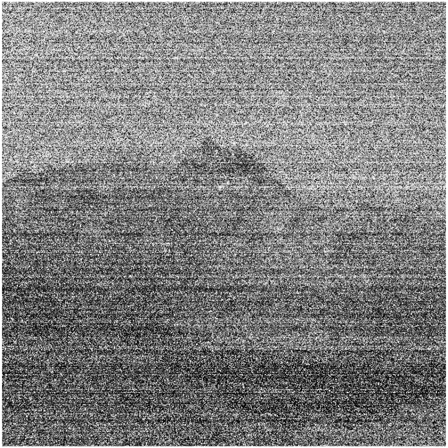
(b) 45% znanih podatkov

(c) 60% znanih podatkov

Rekonstrukcija z algoritmom ASD



(a) 35% znanih podatkov



(b) 45% znanih podatkov

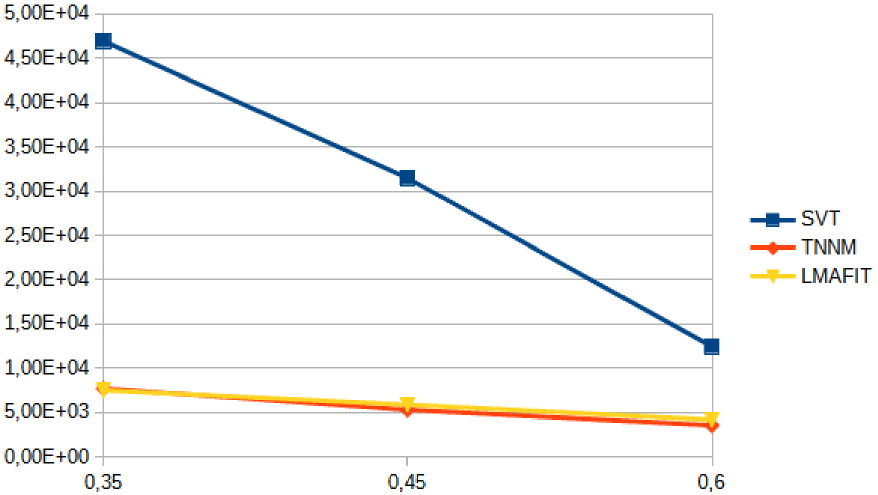
Rekonstrukcija z algoritmom LMaFit

(a) 35% znanih podatkov

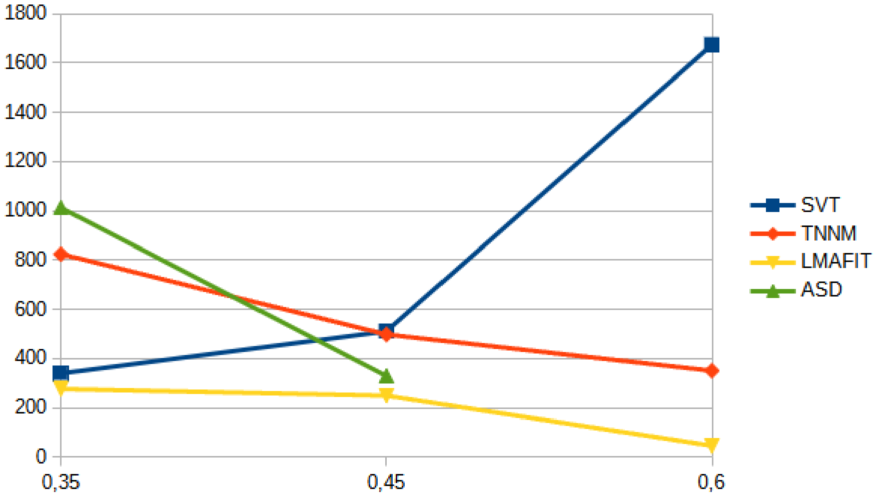
(b) 45% znanih podatkov

(c) 60% znanih podatkov

Napake algoritmov v Frobeniusovi normi



Časi izvajanja algoritmov



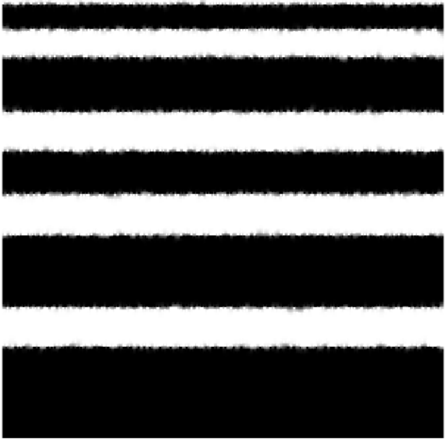
Vpliv kompleksnosti motiva pri algoritmu TNNM

(a) 35% znanih podatkov

(b) 35% znanih podatkov

Rekonstrukcija z reševanjem Laplaceovih diferencialnih enačb

(a) 35% znanih podatkov



(b) 35% znanih podatkov

Kazalo

Ugotovitve

- Algoritem LMaFit je najhitrejši
- Algoritem TNNM vrne najboljše rezultate
- Prednost algoritma SVT - ne potrebujemo informacije o rangu
- Algoritem NNM primeren za majhne matrike (100×100)
- Ker se pri matričnih napolnitvah ne smemo zanašati na lokalno podobnost, obstajajo za rekonstrukcijo slik boljše metode

Glavni prispevki

- Implementacija algoritmov
- Primerjava delovanja algoritmov
- Analiza vplivov parametrov
- Interpretacija rezultatov prek matematičnega ozadja