Algoritmi za reševanje problema matričnih napolnitev

Matej Klančar

Mentor: doc. dr. Aljaž Zalar

2023

Kazalo

Kazalo

Algoritem NNM

- Minimizira nuklearno normo

$$\|A\|_* = \sum_{i=1}^{n} \sigma_i(A)$$

- Rešuje problem semidefinitega programiranja
- Lahko rešujemo s primernimi orodji za reševanje takih problemov (npr. Sedumi)

Algoritem SVT

- Problem definira z Lagrangeovo funkcijo

$$\mathcal{L}(X, Y) = \tau\|X\|_* + \frac{1}{2}\|X\|_F^2 + \langle Y, \mathcal{P}_\Omega(M - X)\rangle$$

- Uporabimo t.i. Uzawa algoritem, rešujemo iterativno

$$\begin{aligned} X^{(k)} &= \mathcal{D}_\tau(Y^{(k-1)}), \\ Y^{(k)} &= Y^{(k-1)} + \delta_k \mathcal{P}_\Omega(M - X^{(k)}), \end{aligned}$$

- Operator praga $\mathcal{D}_\tau : \mathbb{R}^{n_1 \times n_2} \to \mathbb{R}^{n_1 \times n_2}$ je definiran kot

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_\tau(A) &:= U\mathcal{D}_\tau(\Sigma)V^T, \\ \mathcal{D}_\tau(\Sigma) &= \operatorname{diag}\Big(\max(\sigma_1 - \tau, 0), \max(\sigma_2 - \tau, 0), \dots, \\ &\qquad \max(\sigma_{\min(n_1,n_2)} - \tau, 0)\Big) \end{aligned}$$

- Uporabi idejo, da ima matrika majhnega ranga le nekaj velikih singularnih vrednosti.

Algoritem TNNM

- Minimizira prirezano nuklearno normo

$$\|X\|_r = \sum_{i=r+1}^{\min(n_1,n_2)} \sigma_i(X)$$

- Uporabi A_l, B_l, sestavljeni iz lastnih vektorjev X
- Uporablja iterativni algoritem ADMM, definira pomožni matriki W, Y

$$X^{(k+1)} = \mathcal{D}_{\frac{1}{\beta}}(W^{(k)} - \frac{1}{\beta}Y^{(k)})$$

$$W^{(k+1)} = X^{(k+1)} + \frac{1}{\beta}(A_l^T B_l + Y^{(k)})$$

$$Y^{(k+1)} = Y^{(k)} + \beta(X^{(k+1)} - W^{(k+1)})$$

Algoritem ASD

- Išče matriki X, Y katerih produkt bo enak rekonstrukciji
- Uporablja gradientni spust nad funkcijo

$$f(X,Y) = \frac{1}{2} \|\mathcal{P}_\Omega(M) - \mathcal{P}_\Omega(XY)\|_F^2$$

- Z uporabo gradienta in optimalnega koraka izvaja premik

$$\begin{aligned} X^{(k+1)} &= X^{(k)} - t_{x^{(k)}} \nabla f_{Y^{(k)}}(X^{(k)}) \\ Y^{(k+1)} &= Y^{(k)} - t_{y^{(k)}} \nabla f_{X^{(k+1)}}(Y^{(k)}) \end{aligned}$$

Algoritem LMaFit

- Uporablja Moore-Penrose inverz
- Množenje rešuje po metodi najmanjših kvadratov

$$
\begin{aligned}
X^{(k+1)} &= Z^{(k)}(Y^{(k)})^{\dagger} \\
Y^{(k+1)} &= (X^{(k+1)})^{\dagger} Z^{(k)} \\
Z^{(k+1)} &= X^{(k+1)} Y^{(k+1)} + \mathcal{P}_{\Omega}(M - X^{(k+1)} Y^{(k+1)})
\end{aligned}
$$

Kazalo

Kazalo