Druga domača naloga

Matej Klančar (63200136)

1 Uvod

Cilj naloge je izpeljati dvotočkovno Gauss-Legendrovo integracijsko pravilo. To pravilo omogoča numerično aproksimacijo določenega integrala oblike:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx Af(x_1) + Bf(x_2)$$

Ključna ideja Gaussove kvadrature je, da z optimalno izbiro ne le uteži A in B, ampak tudi vozlišč x_1 in x_2, dosežemo maksimalno natančnost. Pravilo z $n = 2$ točkama je lahko točno za polinome do stopnje $2n - 1 = 3$.

Za poenostavitev izpeljave najprej obravnavamo standardni interval $[-1, 1]$. Pravilo mora biti eksaktno za funkcije $f(x) = 1, x, x^2, x^3$. Za te funkcije mora veljati enakost:

$$\int_{-1}^1 f(x)\,dx = Af(x_1) + Bf(x_2)$$

S tem pristopom pridobimo sistem štirih nelinearnih enačb s štirimi neznankami:

$$f(x) = 1: \quad \int_{-1}^1 1\,dx = 2 = A + B \tag{1}$$

$$f(x) = x: \quad \int_{-1}^1 x\,dx = 0 = Ax_1 + Bx_2 \tag{2}$$

$$f(x) = x^2: \quad \int_{-1}^1 x^2\,dx = \frac{2}{3} = Ax_1^2 + Bx_2^2 \tag{3}$$

$$f(x) = x^3: \quad \int_{-1}^1 x^3\,dx = 0 = Ax_1^3 + Bx_2^3 \tag{4}$$

Ko določimo vrednosti neznank na intervalu $[-1, 1]$, lahko pravilo z linearno transformacijo preslikamo na poljuben interval $[x_i, x_{i+1}]$.

2 Reševanje sistema enačb

Za reševanje sistema smo uporabili predpostavko o simetriji, ki je značilna za Gauss-Legendrove formule. Privzeli smo, da sta vozlišči simetrični glede na koordinatno izhodišče, torej $x_2 = -x_1$. Za lažji zapis smo označili $x_1 = x$, iz česar sledi $x_2 = -x$. Sistem enačb (1)-(4) se je tako poenostavil na tri enačbe

$$\begin{aligned} A + B &= 2 \\ Ax - Bx &= 0 \\ Ax^2 + Bx^2 &= \frac{2}{3}, \end{aligned}$$

zadnja enačba pa služi preverjanju pravilnosti rešitve.

Iz prve enačbe smo izrazili B:

$$B = 2 - A$$

To smo vstavili v drugo enačbo, $Ax - Bx = 0$:

$$Ax - (2 - A)x = 0$$

Izpostavili smo x:

$$x(A - (2 - A)) = 0 \implies x(2A - 2) = 0 \implies 2x(A - 1) = 0$$

Iz te enačbe sledita dve možni rešitvi: $x = 0$ ali $A = 1$. Primer $x = 0$ bi pomenil, da je $x_1 = x_2 = 0$. Če to vstavimo v tretjo enačbo, dobimo $A(0)^2 + B(0)^2 = 0$, kar je v protislovju z zahtevo, da je rezultat $\frac{2}{3}$. Zato smo to možnost zavrgli.

Edina preostala možnost je $A = 1$. Iz zveze $B = 2 - A$ takoj sledi:

$$B = 2 - 1 = 1$$

Uteži $A = 1$ in $B = 1$ vstavimo v tretjo enačbo, da določimo še vrednost vozlišč:

$$x^2 + x^2 = \frac{2}{3} \implies 2x^2 = \frac{2}{3} \implies x^2 = \frac{1}{3}$$

Rešitev je $x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$. S tem smo dobili vozlišči:

$$x_1 = -\frac{1}{\sqrt{3}}, \quad x_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Za konec smo rešitev preverili še v prvotni četrti enačbi:

$$Ax_1^3 + Bx_2^3 = \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^3 + \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^3 = -\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^3 + \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^3 = 0$$

Ker je tudi ta enačba izpolnjena, smo potrdili pravilnost izpeljane rešitve.

3 Transformacija na poljuben interval

Ko imamo izpeljano pravilo na standardnem intervalu $t \in [-1, 1]$, ga moramo preslikati na poljuben interval $x \in [a, b]$. To storimo z linearno transformacijo, ki preslika $t \mapsto x$:

$$x(t) = mt + c$$

Konstanti m in c določimo iz pogojev, da se krajišča intervalov preslikajo vase:

$$x(-1) = -m + c = a \quad \text{in} \quad x(1) = m + c = b$$

Z reševanjem sistema dveh enačb dobimo $c = \frac{a+b}{2}$ in $m = \frac{b-a}{2}$. Transformacija je torej:

$$x(t) = \frac{b - a}{2}t + \frac{a + b}{2}$$

Za substitucijo v integralu potrebujemo še zvezo med diferencialoma. Z odvajanjem zgornje enačbe po t dobimo:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{b - a}{2} \implies dx = \frac{b - a}{2}dt$$

Originalni integral lahko sedaj zapišemo kot integral po spremenljivki t na intervalu $[-1, 1]$:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{-1}^1 f\left(\frac{b - a}{2}t + \frac{a + b}{2}\right)\frac{b - a}{2}\,dt = \frac{b - a}{2}\int_{-1}^1 f\left(\frac{b - a}{2}t + \frac{a + b}{2}\right)\,dt$$

Z uporabo izpeljanega Gauss-Legendrovega integracijskega pravila sedaj pridemo do končne formule:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b - a}{2}\left[f\left(\frac{a + b}{2} - \frac{b - a}{2\sqrt{3}}\right) + f\left(\frac{a + b}{2} + \frac{b - a}{2\sqrt{3}}\right)\right]$$

4 Ocena števila izračunov funkcijskih vrednosti

Da bi ocenili, koliko izračunov funkcijske vrednosti je potrebnih za izračun integrala

$$\int_0^5 \frac{\sin x}{x}\, dx$$

na 10 decimalnih mest natančno, smo uporabili numerični pristop. V ta namen smo pripravili program v jeziku Julia, ki implementira sestavljeno Gaussovo pravilo z dvema točkama.

Program deluje iterativno. Začne z razdelitvijo integracijskega intervala $[0, 5]$ na en sam podinterval in nato v zanki postopoma povečuje število podintervalov. V vsakem koraku izračuna nov, natančnejši približek za vrednost integrala. Ta približek se sproti primerja z vnaprej znano, zelo natančno referenčno vrednostjo. Postopek se nadaljuje, dokler absolutna vrednost napake ne pade pod prag 10^{-10}.

Po končani izvedbi je program poročal, da je bilo za dosego želene natančnosti potrebnih $N = 123$ podintervalov. Ker na vsakem od 123 podintervalov uporabimo dvotočkovno Gaussovo pravilo, ki zahteva natanko dva izračuna funkcijske vrednosti, je skupno število potrebnih izračunov:

$$\text{Število izračunov} = 2N = 246$$