

Tretja domača naloga

Matej Klančar (63200136)

1 Uvod

V tem poročilu obravnavamo problem matematičnega nihala, katerega gibanje opisuje nelinearna diferencialna enačba drugega reda. Za majhne odklone se ta enačba pogosto poenostavi v model harmoničnega nihala, katerega perioda je za razliko od pravega nihala neodvisna od amplitude.

Osrednji cilj naloge je raziskati razlike med tema dvema modeloma. Z uporabo numeričnih metod v programskem jeziku Julia rešujemo sistem diferencialnih enačb prvega reda.

V poročilu najprej predstavimo teoretično ozadje problema, sledi opis implementacije numerične rešitve, na koncu pa so zbrani in interpretirani rezultati z grafičnimi prikazi.

2 Opis problema

Naloga obravnava nedušeno nihanje matematičnega nihala. Kotni odmik nihala $\theta(t)$ v odvisnosti od časa t je opisan z nelinearno diferencialno enačbo drugega reda:

$$\ddot{\theta}(t) + \frac{g}{l} \sin(\theta(t)) = 0 \quad (1)$$

kjer je g težni pospešek in l dolžina vrvice nihala. Začetni pogoji so podani kot $\theta(0) = \theta_0$ in $\dot{\theta}(0) = \dot{\theta}_0$.

2.1 Prevedba na sistem prvega reda

Za numerično reševanje je potrebno enačbo (1) prevesti na sistem dveh diferencialnih enačb prvega reda. To storimo z uvedbo novih spremenljivk:

- $y_1(t) = \theta(t)$ (kotni odmik)
- $y_2(t) = \dot{\theta}(t)$ (kotna hitrost)

Z odvajanjem teh spremenljivk po času dobimo sistem:

$$\dot{y}_1(t) = y_2(t) \quad (2)$$

$$\dot{y}_2(t) = -\frac{g}{l} \sin(y_1(t)) \quad (3)$$

Ta sistem je primeren vhod za metode, ki diferencialne enačbe rešujejo z numeričnimi metodami. V tej nalogi uporabimo metodo DOPRI5 (Dormand-Prince 5).

2.2 Harmonična aproksimacija

Za majhne začetne odklone ($\theta_0 \ll 1$) lahko funkcijo $\sin(\theta)$ aproksimiramo z $\sin(\theta) \approx \theta$. S tem poenostavimo enačbo 1 v enačbo za harmonično nihalo:

$$\ddot{\theta}(t) + \frac{g}{l} \theta(t) = 0 \quad (4)$$

Analitična rešitev te enačbe (ob predpostavki $\dot{\theta}(0) = 0$) je:

$$\theta(t) = \theta_0 \cos(\omega t), \quad \text{kjer je } \omega = \sqrt{\frac{g}{l}} \quad (5)$$

Perioda nihanja pri harmonični aproksimaciji je konstantna in enaka $T = 2\pi/\omega$. Je neodvisna od začetne amplitude θ_0 .

2.3 Cilji naloge

1. Želimo implementirati funkcijo, ki numerično reši sistem diferencialnih enačb za matematično nihalo.
2. Želimo primerjati numerično rešitev nelinearnega matematičnega nihala z analitično rešitvijo harmoničnega nihala.
3. Želimo analizirati in grafično prikazati, kako je nihajni čas matematičnega nihala odvisen od njegove začetne energije, ki jo določa začetni kot θ_0 .

3 Implementacija

Rešitev je bila implementirana v programskem jeziku Julia z uporabo knjižnic za numerično reševanje diferencialnih enačb in za vizualizacijo rezultatov.

3.1 Definicija sistema

Sistem diferencialnih enačb prvega reda je bil definiran v funkciji, ki za reševalnik izračuna odvode stanj. Funkcija kot vhod prejme trenutno stanje (kot in kotna hitrost), parametre (težni pospešek in dolžina) ter čas, kot izhod pa vrne vektor odvodov. Prva komponenta izhodnega vektorja je sprememba kota (enaka kotni hitrosti), druga pa sprememba kotne hitrosti (enaka kotnemu pospešku, izračunanemu iz enačbe gibanja).

3.2 Reševanje diferencialne enačbe

Za reševanje problema je bila implementirana posebna funkcija, ki združi vse potrebne komponente. Najprej definira problem z združitvijo funkcije sistema, začetnih pogojev, časovnega intervala simulacije in fizikalnih parametrov. Ta problem se nato posreduje reševalniku, ki temelji na eksplicitni metodi Runge-Kutta Dormand-Prince 5. reda (DOPRI5). Ta metoda je primerna za širok spekter problemov in je znana po svoji natančnosti in učinkovitosti. Funkcija na koncu vrne časovne točke in izračunane kotne odklone.

3.3 Analiza in vizualizacija

Implementirane so bile tri pomožne funkcije za analizo in prikaz rezultatov:

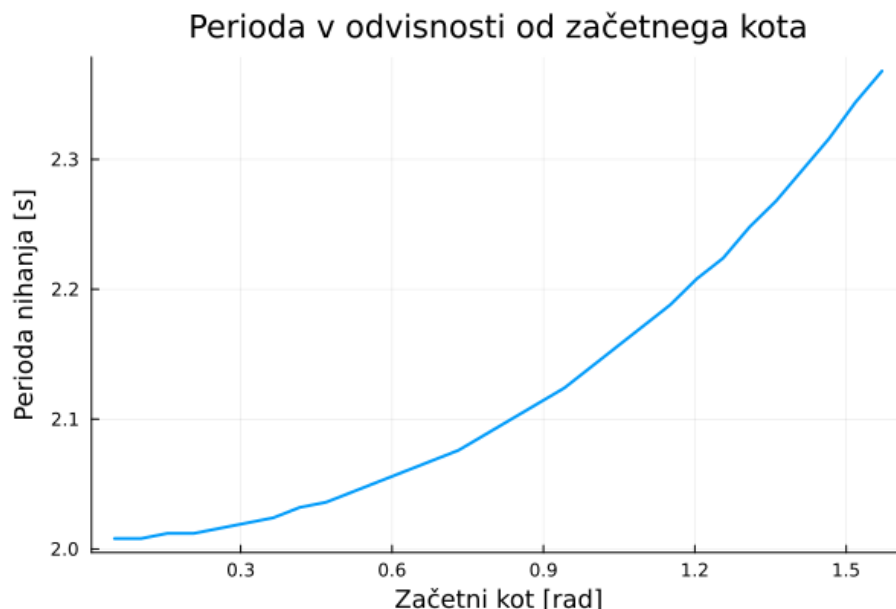
- **Funkcija za oceno periode nihanja:** Ta funkcija oceni periodo tako, da iz časovne vrste rešitve poišče čas, ko nihalo prvič prečka ravnovesno ego ($\theta = 0$). Ta čas predstavlja četrtno periode ($T/4$), zato ga pomnožimo s 4, da dobimo oceno za celotno periodo.
- **Funkcija za primerjavo modelov:** Za poljuben začetni kot izračuna rešitev za nelinearni model in za harmonično aproksimacijo. Obe rešitvi nato izriše na skupni graf, kar omogoča neposredno vizualno primerjavo odmkov in period.
- **Funkcija za risanje odvisnosti periode:** Ta funkcija sistematično razišče odvisnost periode od energije. V zanki iterira čez vnaprej določeno območje začetnih kotov, za vsakega reši enačbo nihala, oceni periodo in na koncu izriše graf, ki prikazuje, kako perioda narašča z večanjem začetnega kota.

4 Primerjava rezultatov

Na podlagi implementacije smo generirali grafe, ki prikazujejo ključne lastnosti matematičnega nihala.

4.1 Odvisnost periode od začetnega kota

Najprej smo analizirali, kako se perioda nihanja spreminja z začetnim kotom. Za harmonično nihalo bi pričakovali konstantno periodo $T = 2\pi\sqrt{l/g} \approx 2.006\text{s}$ (ob $l = 1\text{m}$). Rezultati za nelinearno matematično nihalo so prikazani na sliki 1.



Slika 1: Odvisnost periode nihanja od začetnega kota za matematično nihalo. Pričakovana perioda za harmonično nihalo je približno 2.0 s.

Iz grafa je jasno razvidno, da perioda matematičnega nihala ni konstantna, temveč narašča z večanjem začetnega kota (in s tem energije nihala). Pri majhnih kotih je perioda blizu 2s, kot pri harmoničnem nihalu. Z večanjem amplitude pa postaja odstopanje vse večje.

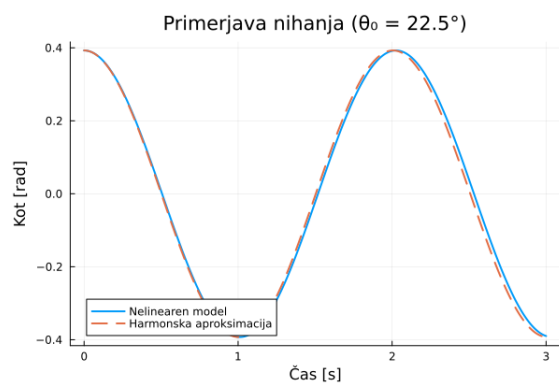
4.2 Primerjava z harmonično aproksimacijo

Na slikah v figuri 2 je prikazana primerjava časovnega poteka nihanja med nelinearnim modelom (polna črta) in harmonično aproksimacijo (črtkana črta) za različne začetne kote, od 22.5° do 90° .

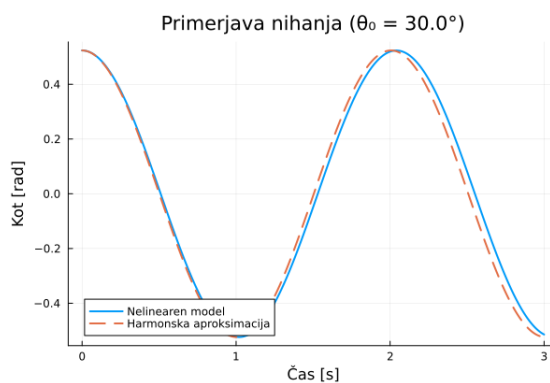
Opazimo lahko naslednje:

- Pri manjših kotih (sliki 2a in 2b) je ujemanje med modeloma zelo dobro. Harmonična aproksimacija je ustrezna, čeprav se že po nekaj nihajih pojavi majhen fazni zamik.
- Z večanjem kota (sliki 2c in 2d) postanejo razlike očitne. Perioda nelinearnega nihala je vidno daljša, kar povzroči, da zaostaja za harmonično aproksimacijo.
- Pri velikem kotu 90° (slika 2e) je harmonična aproksimacija povsem nezadostna. Perioda matematičnega nihala je bistveno daljša, kar potrjuje opažanja iz slike 1.

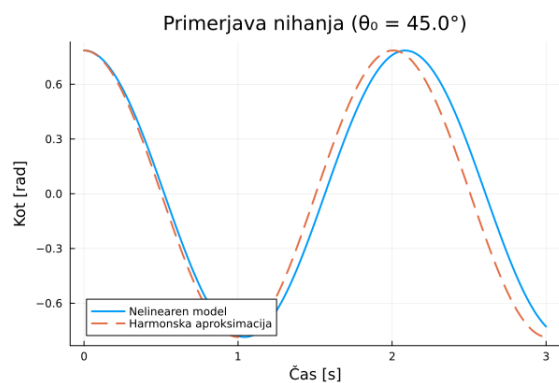
Rezultati jasno kažejo meje veljavnosti linearizacije in potrjujejo, da je nelinearni člen $\sin(\theta)$ ključen za pravilen opis nihanja pri večjih amplitudah.



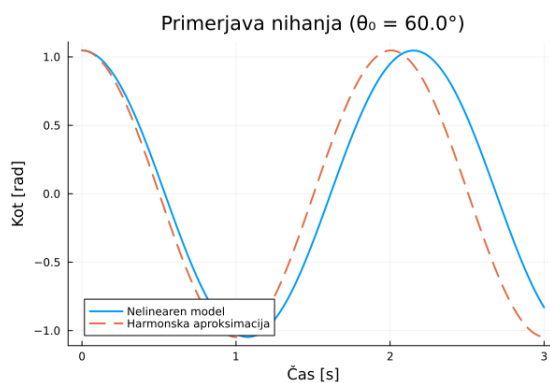
(a) $\theta_0 = 22.5^\circ$



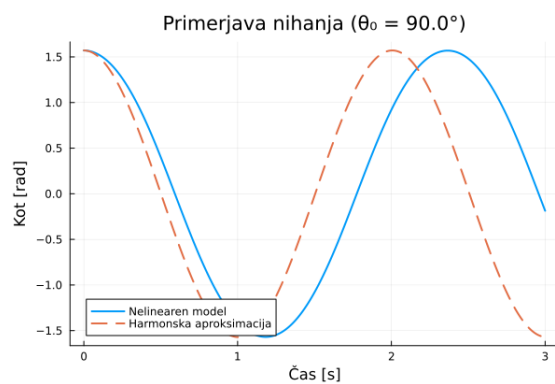
(b) $\theta_0 = 30.0^\circ$



(c) $\theta_0 = 45.0^\circ$



(d) $\theta_0 = 60.0^\circ$



(e) $\theta_0 = 90.0^\circ$

Slika 2: Primerjava rešitve nelinearnega modela (polna črta) in harmonične aproksimacije (črtkana črta) za različne začetne kote.