10 CHAPTER

행렬과 행렬식

Matrix & Determinant

단원의 주요 목표

행렬과 행렬식의 기본 개념을 이해하고 관련된 다양한 논제들을 고찰한다.

- 행렬의 개념과 행렬의 주요 연산에 대해 탐구한다.
- 대각행렬과 전치행렬 등 특수 행렬에 관해 알아본다.
- 행렬의 기본 연산과 피벗을 이용한 행 사다리꼴에 관해 학습한다.
- 행렬식의 개념과 행렬식의 일반적인 성질을 파악한다.
- 역행렬과 선형방정식의 해법을 이해한다.
- 행렬과 행렬식의 응용과 4차 산업혁명과의 관계를 살펴본다.

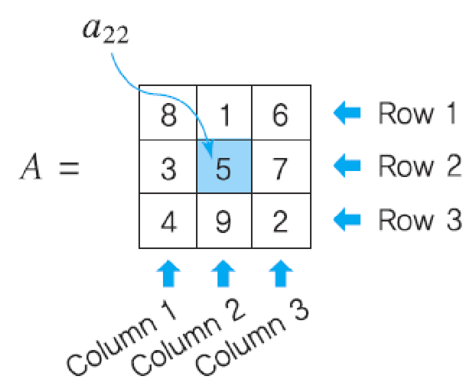
10 CHAPTER

행렬과 행렬식
Matrix & Determinant

CONTENTS

- 선형방정식의 풀이는 여러 가지 공학적인 문제들의 해결에 매우 중요함
- 현실 세계에서 만나는 문제에 있어서는 방정식의 개수가 매우 많아서 전통적인 방법으로는 쉽게 풀 수 없는 경우가 많음
- 행렬은 선형방정식을 간단하게 표현할 수 있으며, 보다 쉽게 연산을 할 수 있도록 해줌
- 행렬식은 행렬을 통한 응용에 있어서 매우 유용한 도구를 제공해줌

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}$$



10.1 행렬과 행렬의 연산

(1) 행렬(Matrix)

- 행렬은 수 또는 문자를 배열의 형태로 나타내는 것임
- 어원은 라틴어 Mater(어머니) + -ix의 합성어로서 모체(母體)를 의미함
- m, n을 양의 정수라고 할 때 실수들로 이루어지는 다음과 같은 배열을 **행렬(matrix, 行列)**이라고 함

$$A = \begin{array}{cl} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} & \begin{array}{l} \leftarrow \text{행} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \\ \begin{array}{cccc} \quad & \uparrow \text{ 열} & \quad & \quad \end{array} & \end{array}$$

$m \times n$

10.1 행렬과 행렬의 연산

행렬에서의 행과 열

- 행렬을 간단하게 A = [a_{ij}], i =1,⋯, m, j = 1, ⋯, n이라 적고, m ×n 행렬 또는 (m, n) 행렬이라고 부름
- 행렬은 *m*개의 행(row)과 *n*개의 열(column)을 가지고 있음

예를 들면, 제1행은

$$[a_{11}, a_{12}, \cdots, a_{1n}]$$

제2열은 다음과 같다

$$\begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix}$$

10.1 행렬과 행렬의 연산

a_{ij}를 이 행렬의 ij−항(ij−entry) 또는 ij−성분(ij−component)이라고 부르는데, a_{ij}는 위로부터 i번째의 행과 j번째의 열이 만나는 항의 값

$$
\begin{array}{rcl}
 & \begin{array}{ccccc} \phantom{a_{11}} & & j\text{번째 열} & & \phantom{a_{1n}} \\ & & \downarrow & & \end{array} & \\
A = & \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} & \leftarrow i\text{번째 행}
\end{array}
$$

10.1 행렬과 행렬의 연산

행렬의 크기

$$A=\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}\text{는 } 3\times 1 \text{ 행렬이고, } B=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}\text{는 } 3\times 2 \text{ 행렬이며,}$$

$$C=\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -6 \\ 7 & -1 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}\text{는 } 4\times 2 \text{ 행렬}$$

10.1 행렬과 행렬의 연산

예제 10-1 다음의 행렬 A가 2×3 행렬임을 알아보자.

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 4 & -5 \end{bmatrix}$$

풀이 이 행렬은 2개의 행과 3개의 열을 가진다. 행은 $[1,\ 1,\ -2]$, $[-1,\ 4,\ -5]$ 이고, 열은

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix},\ \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix},\ \begin{bmatrix} -2 \\ -5 \end{bmatrix}$$ 이다.

이와 같이 행렬의 각 행은 가로의 n 순서쌍으로 볼 수 있고, 각 열은 세로의 m 순서쌍으로 볼 수 있다. 가로의 n 순서쌍을 **행벡터(row vector)**, 세로의 m 순서쌍을 **열벡터(column vector)**라고도 부른다.

여기서 행벡터 $[x_1,\ \cdots,\ x_n]$은 $1\times n$ 행렬이고, 열벡터

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix}$$ 은 $m\times1$ 행렬이다.

10.1 행렬과 행렬의 연산

정의 ⑩-1 행렬 $A=[a_{ij}]$, $i=1, \cdots, m$, $j=1, \cdots, n$에 대해, 만일 $m=n$인 경우, 즉 행의 개수와 열의 개수가 같은 경우인 $A_{n\times n}$일 때 이를 정방행렬(square matrix)이라고 한다. 예를 들면,

$$\underset{2\times 2}{\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}}, \quad \underset{3\times 3}{\begin{bmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 2 & 6 & -1 \\ 3 & 1 & -1 \end{bmatrix}}, \quad \underset{4\times 4}{\begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & -4 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 5 & -4 \end{bmatrix}}$$

은 모두 정방행렬이다.

- n개의 행과 n개의 열을 가지는 행렬을 **n차 정방행렬(square matrix of order of n)**이라 함
- 파란색으로 표시된 부분의 성분 a_{11}, a_{22} , ⋯, a_{nn}은 A의 **주대각선 (main diagonal)** 상에 있음

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

10.1 행렬과 행렬의 연산

(2) 행렬의 합과 스칼라 곱

- 행렬 간의 합(덧셈)과 행렬의 스칼라 곱을 정의함
- 행렬의 합은 그들이 같은 크기의 행렬일 때에 한해 정의함
- m, n을 양의 정수라 하고 $A = [a_{ij}]$와 $B = [b_{ij}]$가 모두 $m \times n$ 행렬이라고 할 때, 행렬의 합 $A + B$는 ij-성분이 $a_{ij} + b_{ij}$인 행렬로 정의함
- 행렬의 합이란 같은 크기의 행렬을 각각의 성분끼리 더하는 것임

10.1 행렬과 행렬의 연산

- A 행렬과 B 행렬이 각각 다음과 같을 때 **행렬의 합**은 각 항들을 각각 더한 결과의 행렬이 됨

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \qquad B=\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix}$$

$$A+B=\begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+b_{i1} & a_{i2}+b_{i2} & \cdots & a_{in}+b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{bmatrix}$$

10.1 행렬과 행렬의 연산

예제 ⑩-2 $A=\begin{bmatrix}3 & -1\\2 & 4\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}2 & 1\\-3 & 2\end{bmatrix}$일 때 $A+B$를 구해보자.

풀이 $$A+B=\begin{bmatrix}3+2 & (-1)+1\\2+(-3) & 4+2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5 & 0\\-1 & 6\end{bmatrix}$$

이 된다.

또한 $A=\begin{bmatrix}3 & -1 & -5\\2 & 3 & 4\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}5 & 1 & -1\\2 & 1 & -1\end{bmatrix}$이라 하면

$$A+B=\begin{bmatrix}3+5 & (-1)+1 & (-5)+(-1)\\2+2 & 3+1 & 4+(-1)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}8 & 0 & -6\\4 & 4 & 3\end{bmatrix}$$

이 된다.

10.1 행렬과 행렬의 연산

예제 ⑩-3 다음 두 행렬 A, B의 합을 구해보자.

$$A=\begin{bmatrix} 3 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & 6 \\ 2 & 7 & -5 \end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix} 0 & -2 & -4 \\ 1 & 6 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

풀이 해당하는 항들을 각각 더한다.

$$A+B=\begin{bmatrix} 3+0 & (-1)+(-2) & 3+(-4) \\ 0+1 & 4+6 & 6+(-2) \\ 2+1 & 7+(-1) & (-5)+2 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 3 & -3 & -1 \\ 1 & 10 & 4 \\ 3 & 6 & -3 \end{bmatrix}$$

이 된다.

10.1 행렬과 행렬의 연산

정의 ⑩-2 행렬의 차(뺄셈)는 다음과 같이 정의될 수 있다. A와 B가 모두 $m \times n$ 행렬일 때 $A-B$ 또는 $A+(-1)B$라고 쓰고 A에서 B를 뺀 차(difference)라고 한다.

정의 ⑩-3 행렬의 스칼라 곱은 다음과 같이 정의된다. k가 실수값이고, $A=[a_{ij}]$를 임의의 행렬이라고 할 때, kA는 ij–성분이 ka_{ij}인 행렬로 정의되므로 $kA=[ka_{ij}]$이다.
즉, 행렬 A에다 스칼라 값 k를 곱했을 때 $k \cdot A$는 행렬 A의 각 항에다 k를 곱함으로써 얻어지므로 다음과 같은 행렬로 표현할 수 있다.

$$kA=\begin{bmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \cdots & ka_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ ka_{m1} & ka_{m2} & \cdots & ka_{mn} \end{bmatrix}$$

10.1 행렬과 행렬의 연산

여기서 잠깐!!

행렬의 뺄셈은 행렬의 덧셈의 역원을 더하는 것으로, $A-B$는 $A+(-B)$이다. 또한 행렬의 스칼라 곱은 행렬의 모든 성분에다 상수 k를 각각 곱한 것이다.

예제 10-4

$A=\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \end{bmatrix}$이고 $B=\begin{bmatrix} 4 & 6 & 8 \\ 1 & -3 & -7 \end{bmatrix}$일 때, $2A-3B$를 구해보자.

풀이

$$2A-3B=\begin{bmatrix} 2 & -4 & 6 \\ 0 & 8 & 10 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} -12 & -18 & -24 \\ -3 & 9 & 21 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} -10 & -22 & -18 \\ -3 & 17 & 31 \end{bmatrix}$$

이다.

10.1 행렬과 행렬의 연산

정리 10-1

행렬의 합과 스칼라 곱은 같은 크기의 행렬 A, B, C와 어떤 상수 c, d가 주어졌을 때 다음과 같은 연산 법칙들을 만족한다. 여기서 O은 모든 항들이 0인 영행렬이다.

(1) $A+B=B+A$	(덧셈의 교환 법칙)
(2) $(A+B)+C=A+(B+C)$	(덧셈의 결합 법칙)
(3) $A+O=O+A$	(덧셈의 항등 법칙)
(4) $A+(-A)=(-A)+A=O$	(덧셈의 역원)
(5) $c(A+B)=cA+cB$	(스칼라 곱의 배분 법칙)
(6) $(c+d)A=cA+dA$	(스칼라 곱의 배분 법칙)

여기서 잠깐!!

행렬에서는 덧셈에서의 교환 법칙, 결합 법칙 및 스칼라 곱에 대한 배분 법칙이 성립하며, 덧셈에 대한 항등 법칙도 성립한다.

10.1 행렬과 행렬의 연산

(3) 행렬의 곱

정의 ⑩-4

$A=[a_{ij}]$가 $m\times n$ 행렬이고, $B=[b_{ij}]$가 $n\times p$ 크기의 행렬일 때 행렬 A와 B의 **행렬의 곱(multiplication)**은 $AB=C=[c_{ij}]$로서 다음과 같이 정의되는 $m\times p$ 행렬이 된다.

$$c_{ij}=\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{in}b_{nj}$$

$$i=1,\ 2,\ \cdots,\ m$$

$$j=1,\ 2,\ \cdots,\ p$$

여기서 주목할 점은 AB는 A의 열의 숫자가 B의 행의 숫자와 같을 경우에만 정의된다는 점이다. 또한 C의 $(i,\ j)$항들은 A의 i번째 행과 B의 j번째 열을 곱한 합으로부터 만들어진다는 점에 유의한다.

$$AB=\underset{m\times n}{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}}\underset{n\times p}{\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1j} & \cdots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2j} & \cdots & b_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nj} & \cdots & b_{np} \end{bmatrix}}$$

$$=\underset{m\times p}{\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1p} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2p} \\ \vdots & \vdots & c_{ij} & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mp} \end{bmatrix}}=C$$

10.1 행렬과 행렬의 연산

- **행렬의 곱** AB가 정의되기 위해서는 A의 열의 개수와 B의 행의 개수가 같아야 함
- 조건이 만족되지 않으면 두 행렬 사이의 곱은 정의되지 않음
- 내측에 있는 수가 서로 같으면 곱이 정의되고, 외측에 있는 두 수는 새롭게 만들어진 행렬의 크기로 볼 수 있음

$$\underset{m \times r}{A} \qquad \underset{r \times n}{B} \;=\; \underset{m \times n}{AB}$$

내측

외측

〈그림 10.1〉 행렬의 곱의 크기

여기서 잠깐!!

두 행렬의 곱은 반드시 행과 열의 조건이 맞아야 한다. A가 2×3 행렬이고 B가 3×4 행렬일 경우에는 곱셈이 가능하고 결과가 2×4 행렬이 되지만, A가 4×4 행렬이고 B가 3×3 행렬인 경우에는 곱셈이 불가능하다. 즉, 중간의 숫자가 일치할 때만 행렬의 곱이 정의될 수 있으며, 그 결과는 제일 앞의 숫자와 제일 뒤의 숫자로 나타난다.

예제 10-5 다음 행렬 A, B의 곱셈이 정의되는지를 판별하고, 곱셈이 가능하다면 그 값을 구해보자.

$$A=\begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 1 & 6 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B=\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 7 \end{bmatrix}$$

풀이 앞의 행렬은 3×2 행렬이고, 뒤의 행렬은 3×1 행렬이다. 따라서 내측의 2와 3이 다르기 때문에 행렬의 곱이 성립될 수 없다.

10.1 행렬과 행렬의 연산

예제 ⑩-6 행렬 A와 행렬 B가 다음과 같이 주어졌을 때, 행렬의 곱 AB의 두 번째 행의 값을 구해보자.

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 4 & -1 \\ -1 & 3 & 3 \\ 4 & -2 & 1 \\ -3 & 0 & 2 \end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$$

풀이 A는 4×3 행렬이고 B는 3×2 행렬이므로 곱 AB는 4×2 행렬이 된다. 행렬 간 곱셈의 행과 열의 규칙에 따라 행렬 곱의 2행의 항들은 A의 2행과 B

10.1 행렬과 행렬의 연산

의 열들의 곱으로부터 다음과 같이 계산될 수 있다.

$$
\begin{bmatrix} 2 & 4 & -1 \\ -1 & 3 & 3 \\ 4 & -2 & 1 \\ -3 & 0 & 2 \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}
$$

$$
= \begin{bmatrix} \square & \square \\ -4-6+9 & 2+3-3 \\ \square & \square \\ \square & \square \end{bmatrix}
= \begin{bmatrix} \square & \square \\ -1 & 2 \\ \square & \square \\ \square & \square \end{bmatrix}
$$

이와 같은 방법으로 나머지 행들의 값들을 구하면

$$
\begin{bmatrix} -3 & 1 \\ -1 & 2 \\ 23 & -11 \\ -6 & 4 \end{bmatrix}
$$

10.1 행렬과 행렬의 연산

예제 10-7 다음 행렬의 곱을 구해보자.

(1) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -5 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 7 \end{bmatrix}$ (2) $\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 8 & 0 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 \\ 7 \end{bmatrix}$

풀이 행과 열의 곱에 따라 두 행렬의 곱의 결과는 다음과 같다.

(1) $$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -5 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\cdot 4 + 2\cdot 3 + (-1)\cdot 7 \\ 0\cdot 4 + (-5)\cdot 3 + 3\cdot 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix}$$

(2) $$\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 8 & 0 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\cdot 4 + (-3)\cdot 7 \\ 8\cdot 4 + 0\cdot 7 \\ (-5)\cdot 4 + 2\cdot 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -13 \\ 32 \\ -6 \end{bmatrix}$$

10.1 행렬과 행렬의 연산

여기서 잠깐!!

행렬에서 덧셈의 교환 법칙은 성립한다. 즉, $A+B=B+A$이다. 그러나 곱셈에서는 교환 법칙이 일반적으로 성립되지 않는다. 예를 들어,

$$AB=\begin{bmatrix}1&0\\1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0\\1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}$$

$$BA=\begin{bmatrix}0&0\\1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0\\2&0\end{bmatrix}$$

따라서 $\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}\neq\begin{bmatrix}0&0\\2&0\end{bmatrix}$이므로 $AB\neq BA$이다.

10.1 행렬과 행렬의 연산

정리 ⑩-2

A가 $m \times n$ 행렬이고, B와 C는 행렬의 합과 곱에서 정의된 크기를 만족한다고 가정하고 k가 어떤 스칼라 값일 때 다음의 식들이 성립한다.

(1) $A(BC) = (AB)C$ (곱셈의 결합 법칙)

(2) $A(B+C) = AB + AC$ (왼쪽 배분 법칙)

(3) $(B+C)A = BA + CA$ (오른쪽 배분 법칙)

(4) $k(AB) = (kA)B = A(kB)$ (스칼라 곱)

(5) $I_n A = A = AI_n$ (행렬 곱셈의 항등식)

여기서 잠깐!!

집합에서나 행렬의 덧셈에서도 결합 법칙과 배분 법칙이 성립하고, 행렬의 곱셈에서도 결합 법칙과 배분 법칙 등이 성립한다. 그러나 행렬의 곱셈에서의 교환 법칙은 성립하지 않는다.

10.2 특수한 행렬

(1) 대각행렬(Diagonal matrix)

정의 10-5 $n \times n$ 정방행렬에서 대각선을 제외한 모든 항들이 0인 행렬 D를 대각행렬(diagonal matrix)이라고 한다.

$$D = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_n \end{bmatrix}$$

예를 들면,

$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$과 $\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$은 둘 다 대각행렬이다.

10.2 특수한 행렬

정의 ⑩-6

정방행렬 A의 주대각선 위의 모든 성분들을 대각항이라고 하고, 각 대각항의 합을 **대각합(trace)**이라고 하며 $\mathrm{tr}(A)$ 또는 $\mathrm{trace}(A)$로 표기한다. 즉, 행렬의 대각합은 행과 열 번호가 같은 성분들의 합이다.

예를 들면,

$A = \begin{bmatrix} -5 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$와 $B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}$에 대해

$\mathrm{tr}(A) = (-5) + 2 = -3$이고, $\mathrm{tr}(B) = b_{11} + b_{22} + b_{33}$이다.

정의 ⑩-7

대각행렬이면서 대각선의 항들이 모두 1인 $n \times n$ 행렬을 **항등행렬(identity matrix)** 또는 **단위행렬**이라고 한다. 행렬의 크기가 $n \times n$인 항등행렬을 통상 I_n으로 나타내는데, $n \times n$ 항등행렬의 중요한 성질은 $AI_n = A = I_n A$이다.

다음의 행렬들은 각각 I_2, I_3, I_4인 항등 행렬이다.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

10.2 특수한 행렬

정의 ⑩−8 성분이 모두 0인 행렬, 즉 모든 i, j에 대하여 $a_{ij}=0$인 행렬을 **영행렬(zero matrix)**이라고 하는데, 간단히 볼드체의 O이라고 나타낸다.

다음의 행렬들은 모두 영행렬이다.

$$[0],\quad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

10.2 특수한 행렬

(2) 전치행렬(Transpose matrix)

정의 10-9 행렬 $A=[a_{ij}]$를 $m\times n$ 행렬이라 할 때, $b_{ij}=a_{ji}$가 되는 $n\times m$ 행렬 $B=[b_{ij}]$를 A의 **전치행렬(transpose matrix)**이라고 하고 A^T로 나타낸다. 다시 말하면, 어떤 행렬의 전치행렬은 주어진 행렬의 행과 열을 서로 바꾼 행렬이 된다.

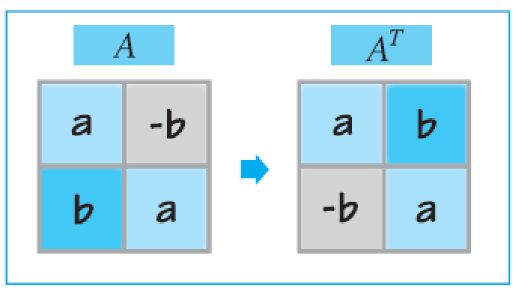
10.2 특수한 행렬

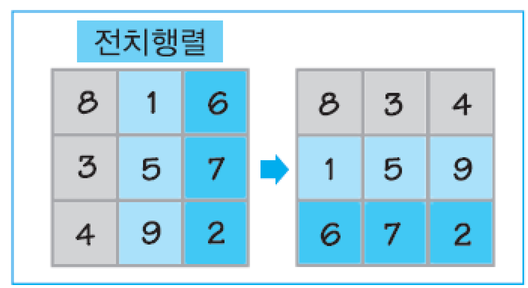
예제 ⑩-8 다음 행렬들의 전치행렬을 각각 구해보자.

$$A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \qquad B=\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -3 & 2 & 7 \end{bmatrix}$$

풀이 각 행렬에서 행과 열을 교환함으로써 전치행렬을 구할 수 있다.

$$A^T=\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}, \qquad B^T=\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 2 \\ -1 & 7 \end{bmatrix}$$





10.2 특수한 행렬

(3) 대칭행렬(Symmetric matrix)과 교대행렬(Skewed-symmetric matrix)

정의 ⑩-10 어떤 정방행렬 $n \times n$ 행렬이 자신의 전치행렬과 똑같을 때, 즉 행렬 A가 $A = A^T$를 만족할 때 행렬 A를 대칭행렬(symmetric matrix)이라고 한다. 즉, $A = [a_{ij}]$에서 모든 i, j에 대해 $a_{ij} = a_{ji}$가 성립하는 경우이다.

예제 ⑩-9 다음에 주어진 행렬들이 모두 대칭행렬인지를 알아보자.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 4 & 1 & 6 \\ 0 & 6 & 3 \end{bmatrix}$$

풀이 행렬 A에서는 대각선을 중심으로 2와 2가 같고, 행렬 B에서는 대각선을 중심으로 4와 4, 0과 0 그리고 6과 6이 같기 때문이다.

10.2 특수한 행렬

정의 10-11

$A=-A^T$를 만족하는 $n\times n$ 행렬을 교대행렬(skewed-symmetric matrix)이라고 한다.

즉, $A=[a_{ij}]$에서 모든 i, j에 대해 $a_{ij}=-a_{ji}$가 성립하는 경우이다.

예를 들면, $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$과 $\begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 \\ -4 & 1 & -6 \\ 0 & 6 & 3 \end{bmatrix}$은 둘 다 교대행렬이다.

(4) 삼각행렬(Triangular matrix)

정의 10−12 주대각선 아래에 있는 모든 항들이 0인 $n \times n$ 행렬 A를 **상부삼각행렬(upper triangular matrix)**이라고 하며, 주대각선 위에 있는 모든 항들이 0인 $n \times n$ 행렬 A를 **하부삼각행렬(lower triangular matrix)**이라고 한다. 상부삼각행렬과 하부삼각행렬을 통칭하여 **삼각행렬(triangular matrix)**이라고 한다

예를 들어, $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$과 $\begin{bmatrix} 7 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$은 각각 2×2, 3×3 상부삼각행렬이고,

$\begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 0 \\ -1 & 1 & -5 \end{bmatrix}$은 하부삼각행렬이다.

10.3 행렬의 기본 연산과 사다리꼴

(1) 행렬의 기본 연산

정의 ⑩-13 어떤 행렬 A의 다음 세 가지 타입의 연산들을 **기본 행 연산(elementary row operation)**이라고 한다.

(1) Type Ⅰ : 어떤 2개의 행을 서로 바꾼다.

(2) Type Ⅱ : 어떤 행에다 0이 아닌 상수를 곱한다.

(3) Type Ⅲ : 어떤 행에다 상수를 곱한 후 다른 행에다 더한다.

예제 ⑩-10 3×3 항등행렬 A가 주어졌을 때, 다음의 기본 행 연산에 대응하는 행렬들을 각각 구해보자.

$$A=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

10.3 행렬의 기본 연산과 사다리꼴

풀이 (1) 1행의 성분과 2행의 성분을 서로 바꾼다. $[R_1 \leftrightarrow R_2]$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(2) 3행의 성분에다 (-2)를 곱한다. $[(-2) \times R_3 \rightarrow R_3]$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

(3) 2행의 성분에다 (-3)을 곱하여 3행에 더한다. $[(-3) \times R_2 + R_3 \rightarrow R_3]$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

10.3 행렬의 기본 연산과 사다리꼴

여기서 잠깐!!

위의 $R_1 \leftrightarrow R_2$, $(-2) \times R_3 \rightarrow R_3$, $(-3) \times R_2 + R_3 \rightarrow R_3$ 등은 일반적으로 통용되는 간결한 기본 행 연산 표현이다.

정의 ⑩−14

행렬의 각 행에서 0이 아닌 가장 처음 나타나는 수 $a_{1j_1}, a_{2j_2}, \cdots, a_{rj_r}$를 사다리꼴 행렬에서의 피벗(pivot)으로 삼을 수 있다. 피벗을 책에 따라 선행자(leading one)로 표현하는 경우가 있는데 그 의미는 같다.

10.3 행렬의 기본 연산과 사다리꼴

(2) 행 사다리꼴과 기약 행 사다리꼴

정의 10−15 $m \times n$ 행렬 A가 기본 행 연산들을 거친 후 다음 3가지 조건을 만족시키면 **행 사다리꼴(row echelon form)**이라고 한다. 이것을 영어 약자로 REF로 표시하기도 한다.

(1) 0으로만 이루어진 행들은 만약 있는 경우 행렬의 아래쪽에 나타낸다.

(2) 모두가 0은 아닌 행의 가장 왼쪽에 가장 처음 나타나는 0이 아닌 수를 피벗으로 삼는다.

(3) 모두가 0은 아닌 연이은 두 행이 있으면 아래쪽 행의 피벗은 위쪽 행의 피벗보다 오른쪽에 있다.

정의 10−16 $m \times n$ 행렬 A가 기본 행 연산들을 거친 후 행 사다리꼴(row echelon form)의 3가지 조건에다 다음의 4번째 조건까지를 만족시키면 **기약 행 사다리꼴(reduced row echelon form)**이라고 한다. 이것을 영어 약자로 RREF로 표시하기도 한다.

(4) 한 행의 피벗을 포함하는 열(column)에는 피벗 이외의 항들은 모두 0이다.

10.3 행렬의 기본 연산과 사다리꼴

예제 ⑩-11 다음 행렬들이 모두 행 사다리꼴임을 알아보자.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -1 & 6 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

풀이 피벗의 아래 수들이 모두 0이므로 행 사다리꼴이다.

예제 ⑩-12 다음 행렬들이 모두 기약 행 사다리꼴임을 알아보자.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

풀이 피벗의 위와 아래의 수들이 모두 0이므로 기약 행 사다리꼴이다.

10.3 행렬의 기본 연산과 사다리꼴

가우스-조단 소거법

정의 10-17 기약 행 사다리꼴을 구하기 위한 기본 행 연산 방법은 다음과 같은 두 단계로 이루어진다. 전향단계(forward phase)에서는 피벗의 아랫부분이 0이 되도록 하고, 후향단계(backward phase)에서는 피벗의 윗부분까지 0이 되도록 행 연산을 실행한다.

정의 10-18 가우스 소거법(Gauss elimination)은 전향단계까지의 연산 과정을 실행하여 행 사다리꼴을 구하는 소거법이고, 가우스–조단 소거법(Gauss–Jordan elimination)은 후향단계까지 실행하는 소거법이다.

10.3 행렬의 기본 연산과 사다리꼴

예제 10−13 다음 행렬 A의 기약 행 사다리꼴을 구해보자.

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \\ -3 & -3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

풀이

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ \boxed{2} & 2 & 1 & 0 \\ -3 & -3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

1 은 피벗 $\boxed{2}$ 는 소거될 항

$(-2)\times R_1+R_2\rightarrow R_2$

(1행에다 (−2)를 곱하여 2행에다 더한다.)

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \boxed{-3} & -3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$3\times R_1+R_3\rightarrow R_3$

(1행에다 3을 곱하여 3행에다 더한다.)

10.3 행렬의 기본 연산과 사다리꼴

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 1 \end{bmatrix}$$

$(-1)\times R_2 + R_3 \to R_3$

(2행에다 (−1)을 곱하여 3행에다 더한다.)

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

그 결과 세 개 피벗의 위와 아래 항들이 모두 0이므로 기약 행 사다리꼴이다.

계수(rank)

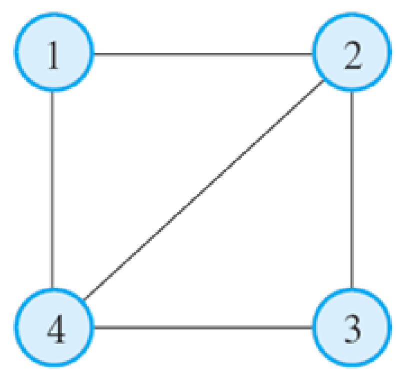
정의 10–19 주어진 행렬을 행 사다리꼴로 만들었을 때 행 전체가 0이 아닌 행의 개수는 수학적으로 중요한 의미를 가지는데, 이 수를 주어진 행렬의 계수(rank)라고 한다.

10.3 행렬의 기본 연산과 사다리꼴

(3) 행렬의 표현과 응용

- 행렬은 그래프의 표현이나 응용에도 폭넓게 활용될 수 있음
- **인접 행렬**로 표현될 수 있음

$$A = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$



행렬은 최단 거리 경로, 통신 네트워크, 그래프 이론 등과 관련된 다양한 분야들에 응용 될 수 있음

10.4 행렬식의 개념

행렬식의 정의와 간단한 계산

정의 ⑩-20 행렬식(Determinant, 行列式)이란 정방행렬 A에 하나의 스칼라 값을 대응시키는 함수로서 보통 $\mathrm{Det}(A)$ 또는 $|A|$로 표시한다. n차 정방행렬의 행렬식을 n차 행렬식이라고도 부른다. 즉, A를 $n \times n$ 행렬이라고 할 때 행렬 A에 대해 A의 행렬식이라는 수가 대응된다. 기호로는 행렬 A의 괄호 대신 수직 막대선을 그어서 나타낸다.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \qquad \mathrm{Det}\,(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

정의 ⑩-21 1×1 행렬 $A = [a_{11}]$의 행렬식은 다음과 같이 정의된다.

$$\mathrm{Det}\,(A) = |a_{11}| = a_{11}$$

2×2 행렬 $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$의 행렬식은 다음과 같이 정의된다.

$$\mathrm{Det}\,(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

따라서 1×1 행렬 $[a]$의 행렬식은 $|a|$로서 행렬식의 값은 a이고,

2×2 행렬 $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$의 행렬식은 $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$로서 행렬식의 값은 $ad - bc$이다.

10.4 행렬식의 개념

정의 ⑩-22 3×3 행렬 A의 행렬식은 다음과 같이 정의된다.

$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$의 행렬식은 다음과 같다.

$$\mathrm{Det}\,(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

예제 ⑩-14 다음 행렬 A, B의 행렬식을 각각 구해보자.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$$

풀이 A의 행렬식은 $2 \cdot 4 - 1 \cdot 1 = 7$이다.

또한 B의 행렬식은 $(-2) \cdot 5 - (-3) \cdot 4 = -10 + 12 = 2$이다.

10.4 행렬식의 개념

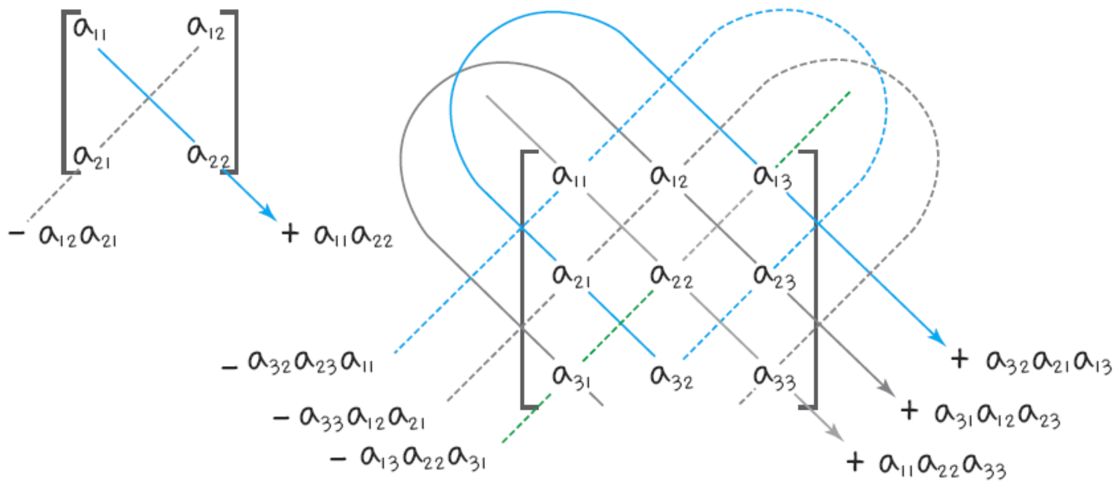
예제 10-15 행렬 $A=\begin{bmatrix}1&2&3\\2&1&3\\3&1&2\end{bmatrix}$가 주어졌을 때 $|A|$를 구해보자.

풀이 3×3 행렬의 행렬식을 구하는 공식에 따라 계산하면

$$
\begin{aligned}
|A|=\begin{vmatrix}1&2&3\\2&1&3\\3&1&2\end{vmatrix}&=1\cdot1\cdot2+2\cdot3\cdot3+3\cdot2\cdot1\\
&\quad-1\cdot3\cdot1-2\cdot2\cdot2-3\cdot1\cdot3\\
&=6
\end{aligned}
$$

- **사루스의 공식(Sarrus's Formula)**에 따라 행렬식을 구할 수도 있음
- 2×2 행렬식이나 3×3 행렬식의 경우 도식적인 방법을 쓰면 계산이 편리함
- 화살표가 지나는 문자를 곱한 것에다 화살표 끝의 부호를 붙여서 합하면 됨

10.4 행렬식의 개념



〈그림 10.3〉 사루스의 공식

정의 10−23 $n\times n$ 정방행렬 A의 행렬식 $|A|$의 값이 0이 아닐 때 A를 정칙행렬(non-singular matrix)이라고 하고, $|A|=0$일 때 A를 특이행렬(singular matrix)이라고 한다.

여기서 잠깐!! $n\times n$ 행렬 A, B가 정칙행렬인 경우를 가역적(nonsingular, invertible)이라고도 하는데, $AB=BA=I$인 경우를 말한다.

10.5 행렬식의 일반적인 성질

(1) 행렬식의 성질들

정리 ⑩−3

$n \times n$ 행렬 A에서 임의의 두 행(또는 열)이 같으면 행렬식의 값은 0이다.

예를 들어, 다음과 같이 두 행이 같은 행렬식에서 두 번째 행과 세 번째 행이 같기 때문에 행렬식은 0이 된다.

$$|A| = \begin{vmatrix} 4 & 5 & -1 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

정리 ⑩−4

$n \times n$ 행렬 A의 임의의 두 행(열)을 서로 바꾸어서 만든 행렬을 B라고 하면 $\mathrm{Det}(B) = -\mathrm{Det}(A)$이다.

예를 들어, 1열과 2열을 서로 바꾼 행렬식은 값은 같고 부호만 바뀐다.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = -2$$

10.5 행렬식의 일반적인 성질

정리 10-5

행렬 A의 행렬식의 값은 그 전치행렬의 행렬식의 값과 같다.

즉, $\mathrm{Det}(A) = \mathrm{Det}(A^T)$이다.

예를 들어, $\mathrm{Det}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \mathrm{Det}\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$이고, $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = -2$이다.

정리 10-6

A와 B가 $n \times n$ 행렬이면 곱의 행렬식은 행렬식의 곱과 같다.

즉, $\mathrm{Det}(AB) = \mathrm{Det}(A) \cdot \mathrm{Det}(B)$가 성립한다.

예를 들어, 행렬 $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$와 $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$에 대해 각각의 행렬식을 구하면

$\mathrm{Det}(A) = 4$, $\mathrm{Det}(B) = -3$이다. 그리고 $AB = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$이므로 $\mathrm{Det}(AB) = -12$

이다. 따라서 $\mathrm{Det}(AB) = \mathrm{Det}(A) \cdot \mathrm{Det}(B)$가 성립한다.

10.5 행렬식의 일반적인 성질

정리 ⑩-7

행렬식의 어떤 행(또는 열)의 각 원소에 같은 수 k를 곱하여 얻은 행렬식은 처음 행렬식에 k를 곱한 것과 같다.

예를 들어, 1열에 5를 곱하면 다음과 같은 식이 성립한다.

$$\begin{vmatrix} 5\times 2 & 3 \\ 5\times(-1) & 1 \end{vmatrix} = 5\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 25$$

정리 ⑩-8

$n\times n$ 행렬 A의 한 행(열)에 있는 모든 원소가 0이면 $\mathrm{Det}(A)=0$이다.

예를 들어, $A=\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 5 & -2 \end{vmatrix}$인 경우 제1행의 항들이 모두 0이므로 $\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 5 & -2 \end{vmatrix}=0$이다.

10.5 행렬식의 일반적인 성질

예제 ⑩-16 대각행렬의 행렬식은 대각선을 곱하면 되므로 암산으로도 가능한지를 살펴 보자.

풀이 대각행렬 $A=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$의 행렬식은

$\mathrm{Det}(A)=\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}=2\times3\times4=24$이다.

10.5 행렬식의 일반적인 성질

(2) 기본 행 연산을 통한 행렬식의 계산

- 행렬식을 구하기 위해 앞에 나온 행렬식의 성질들을 이용하더라도 4차 이상의 정방행렬인 경우에는 계산이 매우 복잡하고 시간도 많이 걸림
- 기본 행 연산을 통한 행렬식의 성질을 활용하면 보다 편리하게 행렬식의 값을 구할 수 있음

정리 10-9

기본 행 연산에서의 행렬식의 성질은 다음과 같다.

(1) 한 개의 행(또는 열)에 k배를 한 행렬식은 원래 행렬식의 k배와 같다.

(2) 두 개의 행(또는 열)을 교환한 행렬식은 원래 행렬식에서 부호만 바뀐다.

(3) 한 개의 행(또는 열)에 k배를 하여 다른 행(또는 열)에 더하여 만든 행렬식은 원래의 행렬식과 같다.

10.5 행렬식의 일반적인 성질

예제 ⑩-17 행렬식의 성질을 이용하여 다음 행렬식의 값을 구해보자.

$$\mathrm{Det}\,(A)=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 3 & -3 & 7 \end{vmatrix}$$

풀이 다음과 같이 여러 번의 기본 행 연산을 통하여 행 사다리꼴로 만든 후 주대각선상에 있는 원소들을 곱하기만 하면 행렬식의 값을 비교적 쉽게 구할 수 있다.

$$\mathrm{Det}\,(A)=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \boxed{2} & 3 & 5 \\ 3 & -3 & 7 \end{vmatrix}$$

$(-2)\times R_1+R_2\rightarrow R_2$

(1행에다 -2를 곱하여 2행에 더한다.)

10.5 행렬식의 일반적인 성질

$$=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -1 \\ \boxed{3} & -3 & 7 \end{vmatrix}$$

$(-3)\times R_1+R_3\rightarrow R_3$

(1행에다 −3을 곱하여 3행에 더한다.)

$$=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & \boxed{-9} & -2 \end{vmatrix}$$

$(-9)\times R_2+R_3\rightarrow R_3$

(2행에다 −9를 곱하여 3행에 더한다.)

$$=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 7 \end{vmatrix}$$

$$=1\times(-1)\times 7$$

$$=-7$$

10.6 역행렬

(1) 역행렬의 정의와 성질

역행렬(inverse matrix)이란 스칼라 값에서의 곱셈에 대한 역원과 유사한 개념으로 선형방정식의 풀이에서 매우 중요한 역할임

정의 ⑩-24

행렬 A와 B가 모두 $n \times n$ 행렬일 때, $AB = BA = I$(I : 항등행렬)인 행렬 B가 존재하는 경우 A를 가역적(nonsingular, invertible)이라 한다. 이 경우 $AB = BA = I$가 성립하는 하나뿐인 행렬 B를 A의 역행렬(inverse matrix)이라고 하고 A^{-1}로 나타내는데, $AA^{-1} = A^{-1}A = I$가 항상 성립한다.

10.6 역행렬

예제 ⑩-18 다음의 행렬 A와 B의 곱이 항등행렬이 됨을 보임으로써 가역적임을 입증해 보자.

$$A=\begin{bmatrix}2 & 5\\ 1 & 3\end{bmatrix},\ \ B=\begin{bmatrix}3 & -5\\ -1 & 2\end{bmatrix}$$

풀이
$$AB=\begin{bmatrix}6-5 & -10+10\\ 3-3 & -5+6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$BA=\begin{bmatrix}6-5 & 15-15\\ -2+2 & -5+6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

AB와 BA의 결과가 항등행렬이 되므로 행렬 A와 B는 가역적이다.

10.6 역행렬

(2) 역행렬을 구하는 방법

정의 10-25 주어진 행렬 A의 오른쪽에다 추가적으로 첨가하여(augmented) 만든 행렬을 **첨가행렬(augmented matrix)**이라고 한다.

정리 10-10 가우스-조단의 역행렬을 구하는 알고리즘을 이용하여 A의 역행렬인 A^{-1}를 구할 수 있다. 우선 〈그림 10.4〉와 같이 첨가행렬 $[A \mid I]$를 만들고 행 연산을 한다. 만약 행 연산을 하여 $[A \mid I]$를 $[I \mid A^{-1}]$의 형태로 변환했을 경우 A의 역행렬인 A^{-1}를 구할 수 있다.

10.6 역행렬

가우스-조단의 역행렬을 구하는 알고리즘

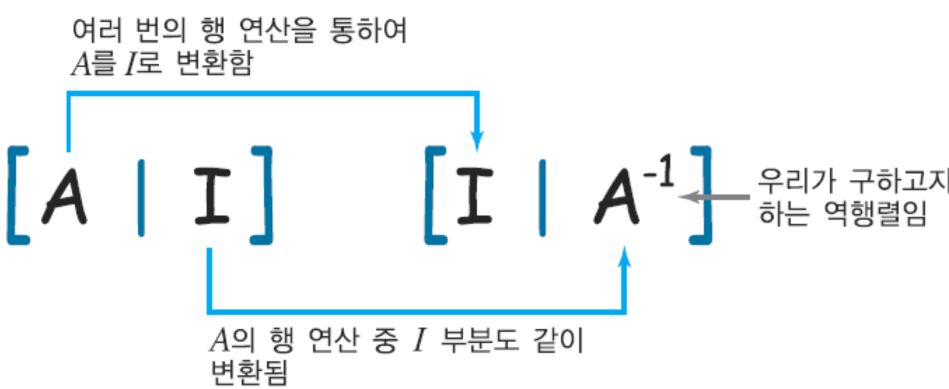
단계 1 : 원래의 A 행렬에다 항등행렬 I를 첨가하여 첨가행렬 $[\,A \mid I\,]$로 만든다.

단계 2 : 행렬 A 부분이 항등행렬로 바뀔 때까지 행 연산을 계속한다.

단계 3 : A가 가역적 행렬인지를 결정한다.

(1) A를 항등행렬로 변환할 수 있으면 원래 I 위치에 있는 행렬이 A^{-1}가 된다.

(2) 만약 A의 행 연산 과정에서 한 행이 모두 0이 되면 A는 비가역적 행렬이므로 역행렬을 구하는 과정을 중단한다.



〈그림 10.4〉 가우스-조단 방식의 역행렬 구하기

10.6 역행렬

예제 10-19 행렬 $A=\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$의 역행렬을 가우스-조단의 방법으로 구해보자.

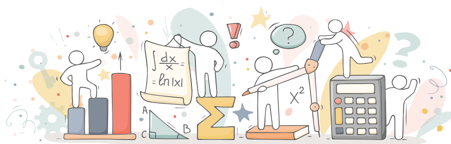
풀이 가우스-조단 알고리즘을 적용하여 역행렬을 구한다.
먼저 a_{11}의 값을 1로 만들기 위해 $\frac{1}{3}$을 곱한다.

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 3 & 4 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right] \qquad \left(\frac{1}{3}\right)\times R_1 \rightarrow R_1$$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{4}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ \boxed{2} & 3 & 0 & 1 \end{array}\right] \qquad (-2)\times R_1 + R_2 \rightarrow R_2$$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{4}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & 1 \end{array}\right] \qquad 3\times R_2 \rightarrow R_2$$

10.6 역행렬



$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{4}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \boxed{1} & -2 & 3 \end{array}\right] \qquad \left(-\frac{4}{3}\right)\times R_2 + R_1 \rightarrow R_1$$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \end{array}\right]$$ 을 얻는다.

따라서 다음과 같은 역행렬을 구할 수 있다.

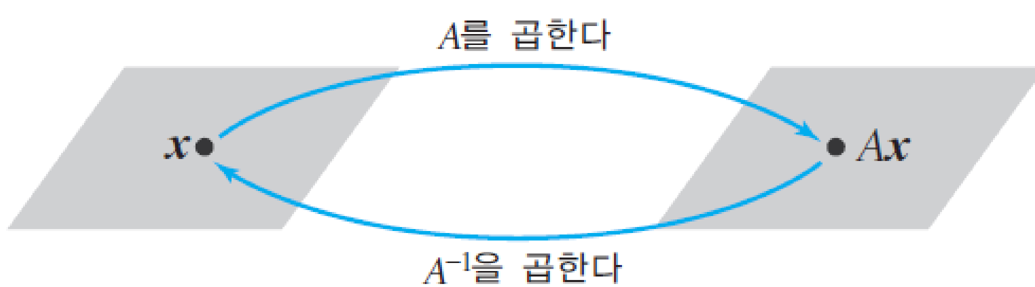
$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$$

10.6 역행렬

정리 ⑩-11

$Ax = b$가 n개의 변수에 대한 n개의 방정식으로 이루어진 선형시스템이고, 행렬 A가 가역적이면 선형시스템은 유일한 해 $x = A^{-1}b$를 가진다.

- $A\ x = b$ 이므로 A를 오른쪽으로 넘기면 $x = A^{-1}b$ 가 됨
- 주어진 행렬의 **역행렬**을 알고 있을 때 A^{-1}에다 b를 곱하면 이 **선형시스템**의 해를 구할 수 있음



〈그림 10.5〉 $Ax = b$와 $x = A^{-1}b$의 관계

10.7 선형방정식의 해법

예제 ⑩-20 다음 선형시스템에서 역행렬을 이용하여 해를 구해보자.

$$\begin{aligned} x + 2y + 3z &= 1 \\ x + 3y + 6z &= 3 \\ 2x + 6y + 13z &= 5 \end{aligned}$$

풀이 먼저 이 시스템에서 A 행렬과 b 행렬은 다음과 같다.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \\ 2 & 6 & 13 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$$

10.7 선형방정식의 해법

만약 역행렬 $A^{-1}=\begin{bmatrix} 3 & -8 & 3 \\ -1 & 7 & -3 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$가 구해졌다면 이 시스템의 유일한 해는

$$A^{-1}b=\begin{bmatrix} 3 & -8 & 3 \\ -1 & 7 & -3 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -6 \\ 5 \\ -1 \end{bmatrix}$$ 이 된다.

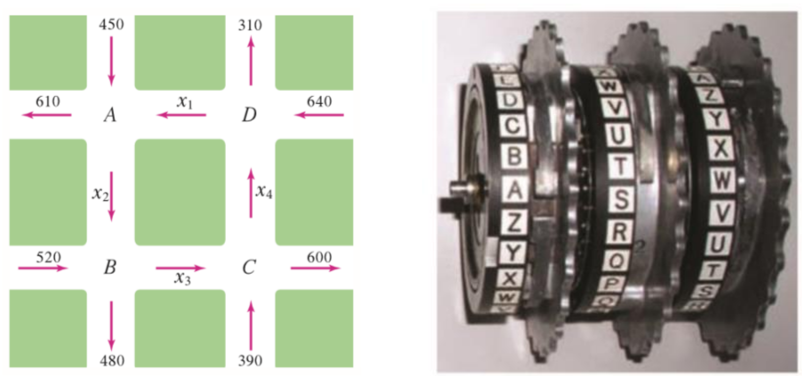
따라서 최종적인 해는 $x=-6,\ y=5,\ z=-1$이다.

10.8 행렬과 행렬식의 응용과 4차 산업혁명과의 관계

(1) 행렬과 행렬식의 응용 분야

① 행렬의 다양한 분야에의 응용

행렬은 선형방정식의 효율적 해법과 밀접한 관계에 있으며, 그래프의 표현이나 응용, 최단 거리 경로, 통신 네트워크의 관리, GPS에의 응용, 암호화, 수학이나 물리학, 양자역학, 여러 분야의 공학 등에서는 매우 중요한 역할을 한다. 그 외에도 〈그림 10.6〉과 같이 교통 흐름, 암호 해독, 화학방정식, 마르코프 체인, 선형 변환, 가계 관리, 선형방정식을 적용한 경제학 이론의 확립, 경영 관리 등에 폭넓게 활용되고 있다.



〈그림 10.6〉 행렬의 교통 흐름과 암호 해독에의 응용

② 행렬식의 응용 분야

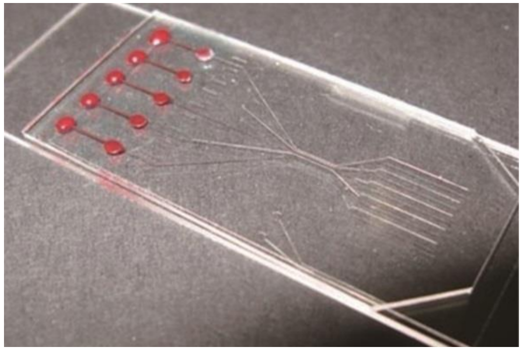
행렬식의 응용 중 가장 대표적인 것은 선형방정식(linear equation)의 해법이다. 또한 행렬식은 좌표계나 평행사변형의 면적이나 정육면체의 부피 구하기, 키르히호프 전류 법칙과 전압 법칙에의 적용 등에 광범위하게 응용되고 있다.

10.8 행렬과 행렬식의 응용과 4차 산업혁명과의 관계

(2) 행렬, 행렬식과 4차 산업혁명과의 관계 : 바이오 컴퓨터와 양자 컴퓨터

행렬과 행렬식은 복잡한 선형방정식을 상당히 빠르게 모델링하고 계산할 수 있으므로 4차 산업혁명의 주요 기술인 바이오 컴퓨터 기술, 양자 암호 기술, 나노 기술 등의 기술 발전의 바탕이 될 수 있다.

바이오 컴퓨터(Bio computer)는 4차 산업혁명의 한가지 기술 분야로서 행렬과 행렬식을 이용하여 특정한 암세포의 활동 모델링이 가능하며, 그러한 분석을 통하여 〈그림 10.7〉과 같은 바이오 컴퓨터 기술이 개발되고 있다. 또한 행렬식을 통한 암호 풀이와 관련 있는 양자 컴퓨터(quantum computer) 개발의 바탕이 된다.



〈그림 10.7〉 바이오 컴퓨터의 예

요약 및 생활 속의 응용

- 행렬이란 수 또는 문자를 배열의 형태로 나타내는 것을 말하는데, 행렬을 이용하여 선형방정식을 간단하게 표현하고 계산할 수 있다.
- 행렬 $A_{n \times n}$와 같이 행의 개수와 열의 개수가 같은 행렬을 정방행렬이라고 한다.
- 행렬에서는 덧셈에서의 교환 법칙, 결합 법칙 및 스칼라 곱에 대한 배분 법칙이 성립하며, 덧셈에 대한 항등 법칙도 성립한다.
- $A=[a_{ij}]$가 $m \times n$ 행렬이고, $B=[b_{ij}]$가 $n \times p$ 크기의 행렬일 때, 행렬 A 와 B 의 행렬의 곱은 $AB=C=[c_{ij}]$로서 다음과 같이 정의되는 $m \times p$ 행렬이 된다.
- 행렬의 덧셈에서는 결합 법칙과 배분 법칙이 성립하고, 행렬의 곱셈에서도 결합 법칙과 배분 법칙이 성립한다. 그러나 행렬의 곱셈에서는 교환 법칙이 성립하지 않는다.
- 정방행렬에서 대각선을 제외한 모든 항들이 0인 $n \times n$ 행렬 D를 대각행렬이라고 한다. 대각행렬이면서 대각선의 항들이 모두 1인 행렬을 항등행렬 또는 단위행렬이라고 한다.

요약 및 생활 속의 응용

- A의 전치행렬 A^T는 주어진 행렬의 행과 열을 서로 바꾼 행렬이며, 어떤 정방행렬이 자신의 전치행렬과 같을 때 행렬 A를 대칭행렬이라고 한다.
- 주대각선 아래에 있는 모든 항들이 0인 $n \times n$ 행렬 A를 상부삼각행렬이라 하며, 주대각선 위의 모든 항들이 0인 경우 $n \times n$ 행렬 A를 하부삼각행렬이라고 한다.
- 어떤 행렬 A의 기본 행 연산은 '어떤 2개의 행을 서로 바꾼다, 어떤 행에다 0이 아닌 상수를 곱한다, 어떤 행에다 상수를 곱한 후 다른 행에다 더한다'의 3가지가 있다.
- 가우스 소거법은 전향단계까지의 연산 과정을 실행하면 얻을 수 있고, 가우스-조단 소거법은 후향단계까지 진행하여 얻을 수 있다.
- 행렬식이란 정방행렬 A에 하나의 스칼라 값을 대응시키는 함수로서 보통 $\mathrm{Det}(A)$ 또는 $|A|$로 표시하는데, 3×3 이하의 행렬인 경우 사루스의 공식에 따라 행렬식을 구할 수 있다.

요약 및 생활 속의 응용

- 행렬식의 일반적인 성질은 다음과 같다.

  (1) 임의의 두 행(또는 열)이 같으면 행렬식의 값은 0이다.

  (2) 임의의 두 행(열)을 서로 바꾸어서 만든 행렬을 B라고 하면 $\mathrm{Det}(B) = -\mathrm{Det}(A)$이다.

  (3) 행렬 A의 행렬식의 값은 그 전치행렬의 행렬식의 값과 같다.

  (4) A와 B가 $n \times n$ 행렬이면 곱의 행렬식은 행렬식의 곱과 같다.

  (5) 행렬식의 어떤 행(또는 열)의 각 원소에 같은 수 k를 곱하여 얻은 행렬식은 처음 행렬식에 k를 곱한 것과 같다.

  (6) $m \times n$ 행렬 A의 한 행(열)에 있는 모든 원소가 0이면 $\mathrm{Det}(A) = 0$이다.

- 기본 행 연산에서의 행렬식의 성질은 다음과 같다.

  (1) 한 개의 행(또는 열)에 k배를 한 행렬식은 원래 행렬식의 k배와 같다.

  (2) 두 개의 행(또는 열)을 교환한 행렬식은 원래 행렬식에서 부호만 바뀐다.

  (3) 한 개의 행(또는 열)에 k배를 하여 다른 행(또는 열)에 더하여 만든 행렬식은 원래의 행렬식과 같다.

요약 및 생활 속의 응용

- 가우스-조단의 역행렬을 구하는 알고리즘을 이용하여 A의 역행렬인 A^{-1}를 구할 수 있다.
- $Ax = b$가 n개의 변수에 대한 n개의 방정식으로 이루어진 선형시스템이고, 행렬 A가 가역적이면 선형시스템은 유일한 해 $x = A^{-1}b$를 가진다.
- 행렬과 행렬식은 이론적으로 매우 명쾌하며 기호적으로도 간결하기 때문에 응용 분야가 매우 넓다. 수학이나 물리학, 양자역학, 여러 분야의 공학 등에서 매우 중요한 역할을 한다.
- 행렬은 최단 거리 경로, 통신 네트워크의 관리, GPS에의 응용, 가계 관리, 경영 관리, 암호화, 그래프의 표현이나 응용에도 폭넓게 활용될 수 있다.
- 행렬식을 이용하여 특정한 암세포의 활동을 모델링하거나 좌표계의 면적과 체적을 구하는 등에 응용할 수 있다.
- 행렬과 4차 산업혁명과의 관계로는 바이오 컴퓨터와 양자 컴퓨터를 들 수 있다.

CHAPTER 10
FINISH