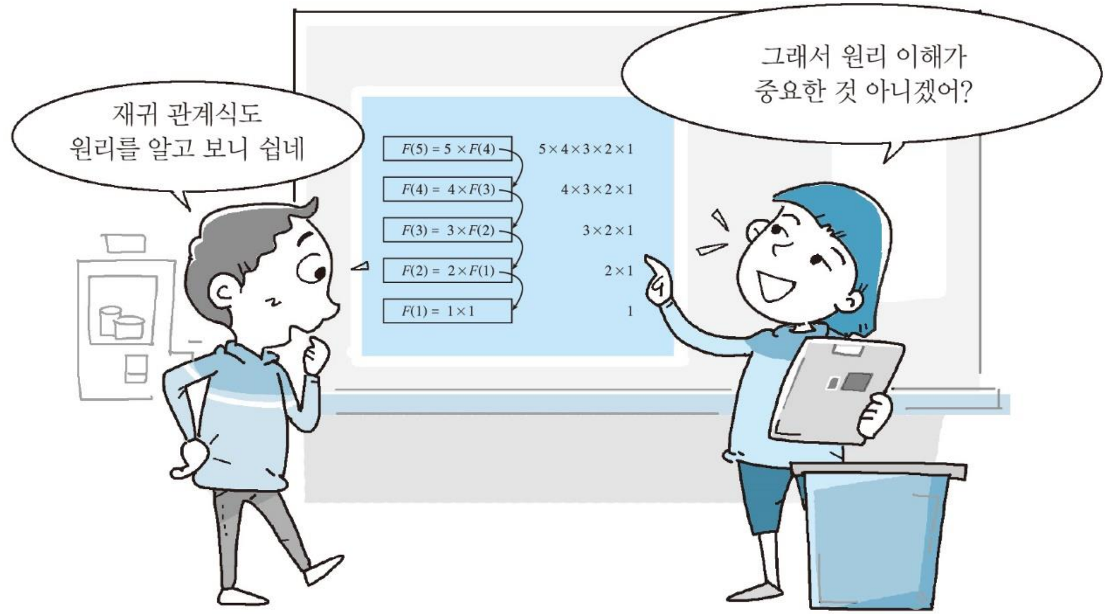
09 CHAPTER

순열, 이산적 확률, 재귀적 관계

Permutation, Discrete Probability, & Recursive Relations



단원의 주요 목표

순열, 이산적 확률, 재귀적 관계와 관련된 다양한 논제들을 고찰한다.

- 경우의 수와 순열과 관련된 기본적인 정의와 특징들을 알아본다.
- 조합과 파스칼의 정리 등을 살펴본다.
- 이산적 확률의 개념과 평균 등의 통계적인 사항들을 학습한다.
- 비둘기 집 원리와 재귀적 관계식을 이해한다.
- 재귀적 관계의 예인 피보나치 수와 하노이 탑 문제를 탐구한다.
- 순열, 이산적 확률, 재귀적 관계의 응용 분야와 4차 산업혁명과의 관계를 살펴본다.

09 CHAPTER

순열, 이산적 확률, 재귀적 관계

Permutation, Discrete Probability, & Recursive Relations

CONTENTS

9.1 경우의 수

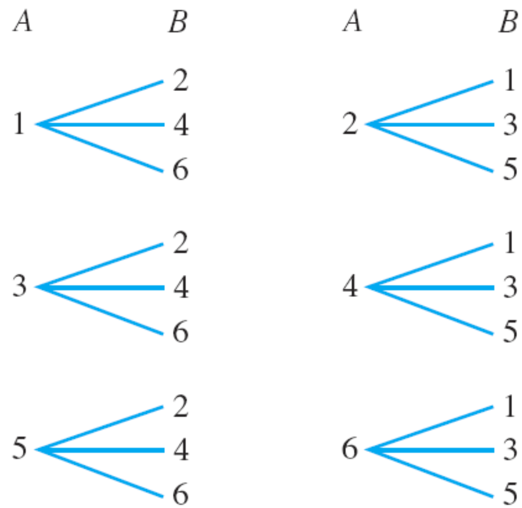
- 어떤 사건이 일어나는 **경우의 수**를 구할 때는 모든 경우를 일정한 기준에 따라 빠짐없이, 중복되지 않게 해야 함
- 경우의 수를 구하는 방법에는 **트리를 이용하는 방법**과 **표를 이용하는 방법**이 있음

예제 9-1

두 개의 주사위 A, B를 동시에 던졌을 때 두 수의 합이 홀수가 나오는 경우의 수를 구해보자.

풀이 주사위의 두 수의 합이 홀수가 되려면 주사위 A는 홀수, 주사위 B는 짝수이거나, 주사위 A는 짝수, 주사위 B는 홀수인 경우이다. 이것을 트리로 그리면 다음의 그림과 같이 나타낼 수 있으므로 주사위 A, B의 두 눈의 합이 홀수가 되는 모든 경우의 수는 $6 \times 3 = 18$가지이다.

9.1 경우의 수



정의 9−1 사건이 일어나는 경우의 수에서의 법칙은 다음과 같다.

(1) **합의 법칙(rule of sum)**은 두 사건 A, $B\,(A \cap B = \phi)$가 일어날 경우의 수를 $n(A) = m$, $n(B) = n$이라 하면, A 또는 B가 일어날 경우의 수는 $m + n$이다.

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) = m + n$$

(2) **곱의 법칙(rule of product)**은 두 사건 A, B에서 $n(A) = m$, $n(B) = n$이라 하면, A, B가 동시에 일어날 경우의 수는 $m \cdot n$이다.

$$n(A \times B) = n(A) \times n(B) = m \cdot n$$

9.1 경우의 수

예제 9-2

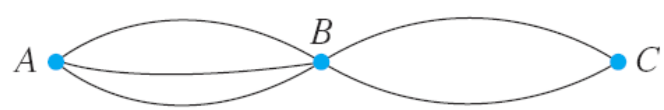
A와 B 사이에 3개의 길이 있고 B와 C 사이에 2개의 길이 있다고 하자. 어떤 사람이 다음과 같이 길을 갈 수 있는 방법의 경우의 수는 몇 가지인지 알아보자.

(1) A에서 B를 거쳐서 C로 가는 경우

(2) A에서 B를 거쳐서 C로 갔다가, 다시 B를 거쳐 A로 돌아오는 경우

풀이 (1) A에서 B로 가는 데 3가지, B에서 C로 가는 데 2가지 방법이 있으므로 경우의 수는 $3 \times 2 = 6$가지 방법이 있다.

(2) A에서 C로 갔다가 다시 C에서 A로 돌아오므로, 두 사건에는 곱의 법칙이 성립하여 $6 \times 6 = 36$가지 방법이 있다.



9.2 순열

정의 ⑨-2 서로 다른 원소들을 순서를 고려하여 일렬로 배열하는 것을 **순열(permutation)**이라고 한다. 이때, 서로 다른 n개의 원소를 한 줄로 배열하는 순열의 수는

$$n\times(n-1)\times(n-2)\times\cdots\times3\times2\times1$$

이고, 간단히 $n!$로 나타낸다.

여기서 잠깐!! 1부터 n까지의 모든 자연수의 곱을 n의 계승 또는 n factorial 이라고 읽으며 $n!$로 나타낸다. $0!=1,\ 1!=1,\ n!=n(n-1)!$ 이다.

9.2 순열

정의 9-3 서로 다른 n개의 원소 중에서 r개를 택하는 **순열의 수**는

$$n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times (n-r+1) \quad (\text{단, } 0 < r \leq n)$$

이고, 이를 $_nP_r$로 나타낸다.

$_nP_r$을 $n!$을 써서 나타내면

$$\begin{aligned} {}_nP_r &= n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times (n-r+1) \\ &= n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times (n-r+1) \times \frac{(n-r) \times \cdots \times 3 \times 2 \times 1}{(n-r) \times \cdots \times 3 \times 2 \times 1} \\ &= \frac{n!}{(n-r)!} \end{aligned}$$

이 된다.

정의 9-4 **같은 것을 포함하는 순열**의 경우에는, 즉 n개 중에서 같은 것이 각각 p개, q개, $\cdots$, r개씩 있을 때, n개를 일렬로 배열하여 만들 수 있는 순열의 수는

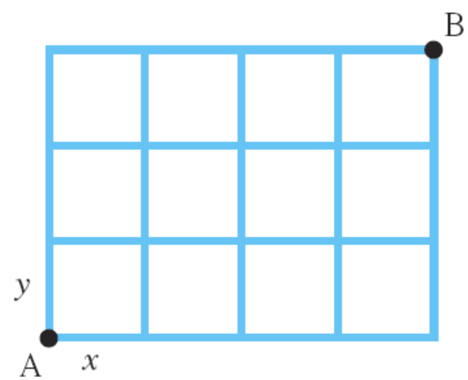
$$\frac{n!}{p!q!\cdots r!} \quad (\text{단, } p + q + \cdots + r = n)$$

이다.

예를 들어, a, a, a, b, b를 일렬로 배열하는 순열의 경우에는 서로 같은 것이 각각 a는 3개, b는 2개 있으므로 순열의 수는 $\frac{5!}{3! \times 2!} = 10$가지이다.

9.2 순열

예제 ⑨-3 다음과 같은 도로망이 있을 때, A에서 B까지 최단 거리로 가는 방법은 몇 가지인지를 살펴보자.



풀이 오른쪽으로 한 구간 이동하는 것을 x, 위로 한 구간 이동하는 것을 y라고 하면, A에서 B로의 최단 거리의 길은 4개의 x와 3개의 y를 사용하게 된다. 이 경우에 A에서 B까지 최단 거리로 가는 방법의 수는 x가 4개, y가 3개이므로 $\frac{7!}{4! \times 3!} = 35$가지이다.

여기서 잠깐!! n개 대상 중에서 r개를 선택하는 순열 표시는 ${}_nP_r$ 또는 $P(n, r)$로 표현한다.

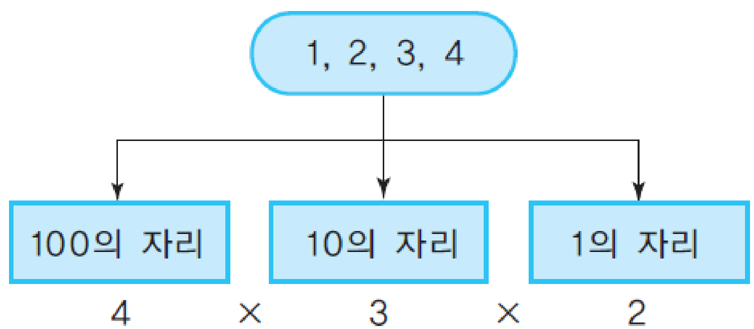
9.2 순열

예제 9-4 네 개의 숫자 1, 2, 3, 4에서 서로 다른 세 개의 숫자로 만들 수 있는 세 자리 정수의 개수를 알아보자.

풀이 100의 자리에 올 수 있는 것이 4개, 10의 자리에 올 수 있는 것이 3개, 1의 자리에 올 수 있는 것이 2개이므로, 세 자리의 정수는 $4 \times 3 \times 2 = 24$가지이다.

이것을 순열로 나타내면 ${}_4P_3 = 4 \times 3 \times 2$가 된다.

즉, ${}_4P_3 = 4 \times 3 \times 2$는 4부터 시작하여 하나씩 작은 수를 3개 곱한 것임을 알 수 있다.



9.2 순열

예제 9-5 a, b, c, d, e라는 5개의 문자 중에서 서로 다른 3개의 문자를 나타낼 수 있는 경우의 수를 계산해보자.

풀이 3개의 문자를 다음과 같이 3개의 상자로 나타낸다고 하자.

$$\boxed{} \quad \boxed{} \quad \boxed{}$$

첫 번째 문자는 5가지 방법으로 선택될 수 있고, 두 번째 문자는 4가지, 세 번째 문자는 3가지 방법으로 선택될 수 있다.

$$\boxed{5} \quad \boxed{4} \quad \boxed{3}$$

따라서 서로 다른 3개의 문자를 나타낼 수 있는 경우의 수는 $5 \times 4 \times 3 = 60$가지가 된다. 이것은 ${}_5P_3 = 60$과 같다.

9.2 순열

여기서 잠깐!!

${}_nP_r$의 변형과 기호의 정의

$${}_nP_r = \frac{n!}{(n-r)!},\ {}_nP_n = n!,\ {}_nP_0 = 1$$

예제 ⑨-6

15개의 역이 있는 철도 회사에서 출발역과 도착역을 적은 기차표를 몇 가지 마련해야 하는지 살펴보자.

풀이 주어진 문제는 15개에서 두 개를 택한 순열의 수와 같다. 그러므로 ${}_{15}P_2 = 210$가지이다.

9.3 조합

정의 9-5 서로 다른 n개의 원소 중에서 순서를 생각하지 않고 r개를 택할 때, 이것을 n개의 원소에서 r개를 택하는 조합(combination)이라 하고, 그 조합의 수를 ${}_nC_r$과 같이 나타낸다.

$$
\begin{aligned}
{}_nC_r &= \frac{{}_nP_r}{r!} = \frac{n\times(n-1)\times(n-2)\times\cdots\times(n-r+1)}{r\times(r-1)\times(r-2)\times\cdots\times3\times2\times1} \\
&= \frac{n!}{r!(n-r)!} \quad (\text{단, } 0 < r \le n)
\end{aligned}
$$

예를 들면, a, b, c, d로부터 3개의 문자를 순서에 관계없이 선택한다면 다음과 같은 4개의 경우가 있다. 이것을 순열 기호로 나타내면 ${}_4C_3 = 4$가 된다.

abc, abd, acd, bcd

여기서 잠깐!!

한 번에 r개를 취하는 n개 대상의 조합의 수는 ${}_nC_r$로 표시되며, 같은 기호로서 $C(n, r)$, $C_{n,\, r}$ 등이 사용되고 있다.

9.3 조합

예제 9-7

남자 5명과 여자 4명이 있을 때, 이 중에서 남자 3명, 여자 2명을 뽑는 경우의 수는 몇 가지가 있는지 살펴보자.

풀이 남자 5명 중 3명을 뽑는 경우의 수는 ${}_5C_3$가지이고, 여자 4명 중 2명을 뽑는 경우의 수는 ${}_4C_2$이므로 ${}_5C_3 \times {}_4C_2 = 10 \times 6 = 60$가지이다.

예제 9-8

주머니에 크기가 서로 다른 3개의 빨간 공과 4개의 흰 공이 들어 있을 때, 다음을 구해보자.

(1) 이 주머니에서 3개의 공을 뽑는 경우의 수

(2) 빨간 공 2개와 흰 공 3개를 뽑는 경우의 수

풀이 (1) 전체 7개의 공에서 3개의 공을 뽑는 경우이므로 ${}_7C_3 = 35$가지이다.

(2) 3개의 빨간 공 중에서 2개를 선택하는 경우의 수는 ${}_3C_2 = 3$가지이고, 4개의 흰 공 중에서 3개를 선택하는 경우의 수는 ${}_4C_3 = 4$가지이므로, 구하는 경우의 수는 ${}_3C_2 \times {}_4C_3 = 3 \times 4 = 12$가지이다.

9.3 조합

정의 9-6

$(a+b)^n$을 전개하면 다음과 같은 식이 나오는데, 이것을 이항 정리(binomial theorem)라 하고, 이때 ${}_nC_r$을 이항 계수(binomial coefficient)라고 한다.

$$(a+b)^n = \sum_{r=0}^{n} {}_nC_r\, a^{n-r} b^r$$

정리 9-1

파스칼의 삼각형(Pascal's triangle)에서는 이항 계수가 다음과 같이 만들어진다.

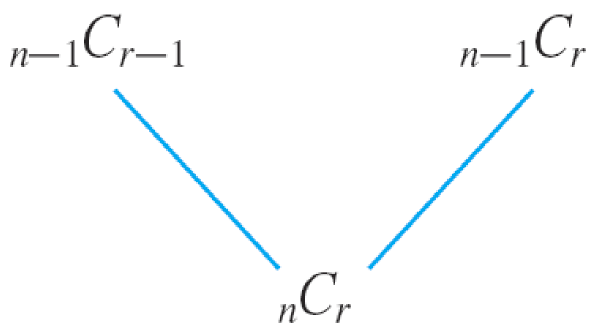
$${}_{n-1}C_{r-1} + {}_{n-1}C_r = {}_nC_r$$

9.3 조합

파스칼의 삼각형

파스칼의 삼각형은 다음과 같이 설명될 수 있는데, 이를 통하여 이항 계수를 쉽게 계산할 수 있음

1) 각 행에 있는 첫 번째 숫자와 마지막 숫자는 1임
2) 삼각형 안의 다른 숫자들은 파스칼의 삼각형과 같이 모두 그 숫자 위로부터 연결된 두 수들을 더함으로써 구해질 수 있음



〈그림 9.1〉 파스칼의 삼각형

9.3 조합

파스칼의 삼각형으로부터 이항 계수를 구하는 예

$$
\begin{aligned}
(a+b)^0 &= 1 \\
(a+b)^1 &= a + b \\
(a+b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2 \\
(a+b)^3 &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \\
(a+b)^4 &= a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4 \\
(a+b)^5 &= a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5 \\
(a+b)^6 &= a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6
\end{aligned}
$$

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & \\
 & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & \\
1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1
\end{array}
$$

〈그림 9.2〉 파스칼의 삼각형 예

9.4 이산적 확률과 통계

- **확률**이란 어떤 사건 A가 일어날 가능성을 수로 나타낸 것임
- 사건 A가 일어날 경우의 수를 전체의 경우의 수로 나눈 값임 $0 \sim 1$

정의 ⑨-7 확률에 있어서 기본적인 법칙은 다음과 같다.

(1) 어떤 사건 A에 대하여 $0 \le P(A) \le 1$

(2) 전사건 S의 확률 $P(S) = 1$

(3) 공사건 ϕ의 확률 $P(\phi) = 0$

(4) 사건 A가 일어날 확률과 사건 A의 여사건 A^c가 일어날 확률 사이의 관계는 다음과 같다.

$$P(A) + P(A^c) = 1, \quad P(A^c) = 1 - P(A)$$

예제 ⑨-9 주사위 2개를 동시에 던져서 나온 수의 합이 3 또는 4가 될 확률을 구해보자.

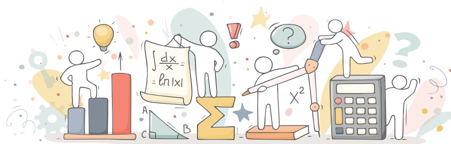
$$\frac{2+3}{6^2}$$

풀이 수의 합이 3이 될 경우의 수는 (1, 2), (2, 1)이므로 확률은 $\frac{2}{36}$이고,

수의 합이 4가 될 경우의 수는 (1, 3), (2, 2), (3, 1)이므로 확률은 $\frac{3}{36}$이다.

따라서 확률은 $\frac{2}{36} + \frac{3}{36} = \frac{5}{36}$가 된다.

9.4 이산적 확률과 통계



정의 9-8

변수 X가 취할 수 있는 모든 값이 x_1, x_2, x_3, x_4, $\cdots$, x_n이고 X가 이들 값을 취할 확률 p_1, p_2, p_3, p_4, $\cdots$, p_n이 정해져 있을 때, 변수 X를 **확률 변수**라고 한다. 또한 확률 변수 X가 이산적인 값을 취할 때 이러한 확률을 **이산적 확률(discrete probability)**이라고 한다. 예를 들어, 한 개의 주사위를 던져서 나타나는 수를 X라 하면 X가 취할 수 있는 값은 1, 2, 3, 4, 5, 6이고 $P(x \leq 2)$는 X가 1 또는 2의 값을 취하는 확률을 뜻한다.

정의 9-9

확률 변수 X가 취하는 값 x_i와 X가 x_i를 취할 확률 p_i와의 대응 관계를 확률 변수 X의 **확률 분포**라고 한다.

정의 9-10

확률 변수 X의 확률 분포가 다음과 같을 때,

$\sum_{i=1}^{n} x_i p_i = x_1 p_1 + x_2 p_2 + x_3 p_3 + \cdots + x_n p_n$을 X의 기대값 또는 평균이라 하고, $E(X)$ 또는 m으로 나타낸다.

9.4 이산적 확률과 통계

$\sigma^2(X)$

정의 9-11 확률 변수 X의 평균이 m일 때 $E((X-m)^2)$을 X의 **분산(variance)**이라 하고, $V(X)$ 또는 $\sigma^2(X)$로 나타낸다. 또한 분산의 양의 제곱근을 **표준 편차(standard deviation)**라 하고, $\sigma(X)$로 나타낸다. 즉,

$\sigma(X)$

$$V(X) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - m)^2 p_i$$

$$= (x_1 - m)^2 p_1 + (x_2 - m)^2 p_2 + (x_3 - m)^2 p_3 + \cdots + (x_n - m)^2 p_n$$

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$$

예제 9-11 주사위를 하나 던질 때 나오는 숫자를 확률 변수 X라고 할 때 X의 평균, 분산, 표준 편차를 각각 구해보자.

풀이 주사위 하나를 던질 때 나오는 경우의 수는 1, 2, 3, 4, 5, 6 인데, 확률 변수를 X라 하면 X는 1부터 6 사이의 값을 가지게 된다. 이에 대응하는 확률 분포는 모든 경우에 $\frac{1}{6}$이 된다. 따라서 평균 m은

9.4 이산적 확률과 통계

평균, 분산, 표준편차 구하기

$$m=\sum_{i=1}^{n} x_i p_i = 1\times\frac{1}{6}+2\times\frac{1}{6}+3\times\frac{1}{6}+4\times\frac{1}{6}+5\times\frac{1}{6}+6\times\frac{1}{6}$$

$$=\frac{7}{2}$$

그리고 분산은

$$V(X)=\sum_{i=1}^{n}(x_i-m)^2 p_i=\left\{\left(1-\frac{7}{2}\right)^2+\left(2-\frac{7}{2}\right)^2+\left(3-\frac{7}{2}\right)^2+\left(4-\frac{7}{2}\right)^2+\left(5-\frac{7}{2}\right)^2+\left(6-\frac{7}{2}\right)^2\right\}\times\frac{1}{6}$$

$$=\frac{35}{12}$$

표준 편차는

$$\sigma(X)=\sqrt{\frac{35}{12}}=\frac{\sqrt{105}}{6}$$

이 된다.

9.4 이산적 확률과 통계

정리 9-2

베이즈의 정리(Bayesian theorem)는 다음과 같다. 표본 공간이 n에서 서로 다른 배반적인 사건 $B_1, B_2, \cdots, B_n$ 중 하나는 반드시 일어난다고 할 때, 임의의 사건 A에 대해,

$$P(B_i|A) = \frac{P(B_i)\cdot P(A|B_i)}{P(A)}$$

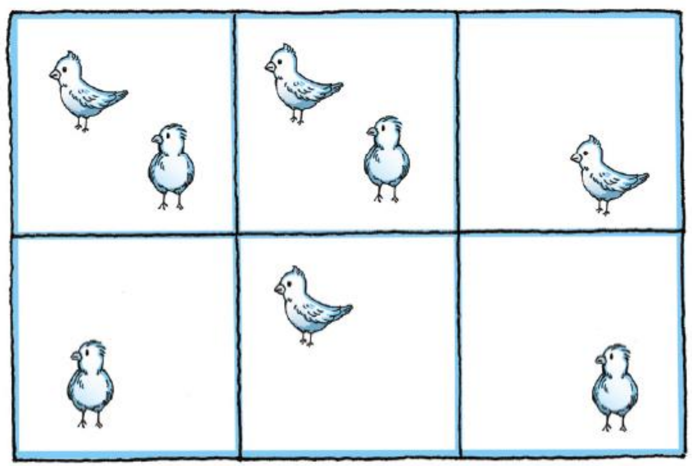
$$= \frac{P(B_i)\cdot P(A|B_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(B_j)\cdot P(A|B_j)} \quad (\text{단, } 1 \le i \le n)$$

가 성립한다. 이때, $P(B_i)$를 사상 B_i의 사전 확률(prior probability), $P(B_i|A)$를 사후 확률(posterior probability)이라고 한다.

9.5 비둘기 집 원리

정의 9-12 비둘기 집 원리(pigeonhole principle)란 n개의 비둘기 집에 $(n+1)$마리 이상의 비둘기가 들어갔다면, 두 마리 이상의 비둘기가 들어간 비둘기 집이 적어도 하나 있다는 원리이다.

- **비둘기 집 원리**는 19세기 말 프랑스의 수학자인 디리클레(Dirichlet)에 의해 시작됨



〈그림 9.3〉 비둘기 집 원리

9.5 비둘기 집 원리

〈그림 9.4〉 바구니와 사과를 통한 비둘기 집 원리

여기서 잠깐!!

비둘기 집 원리는 다음과 같은 응용 문제에 적용될 수 있다.

(1) 18개의 터미널을 가지고 있는 컴퓨터 시스템에서 24개의 작업을 수행하고자 할 때 적어도 6개의 작업은 다른 작업이 끝날 때까지 기다려야 한다.

(2) 만약 n개의 공이 m개 상자에 있을 때 n이 m보다 크면, 이 상자들 중의 하나에는 적어도 두 개의 공을 담아야 된다.

9.6 재귀적 정의

(1) 재귀적 관계식

정의 ⑨-13 재귀적 정의(recursive definition)란 수학적 귀납법에서와 같이 첫 번째 요소가 정의되고, $n+1$번째의 요소는 바로 앞의 n번째와 그 이하의 요소와의 관계로서 정의될 경우를 말하며, 재귀적 관계(recurrence relation)로 표현된다.

재귀적 정의의 가장 간단한 예로는 정수의 계승(factorial)을 들 수 있음

$$n! = \begin{cases} 1 & \text{if } n = 0, 1 \\ n * (n-1)! & \text{otherwise} \end{cases}$$

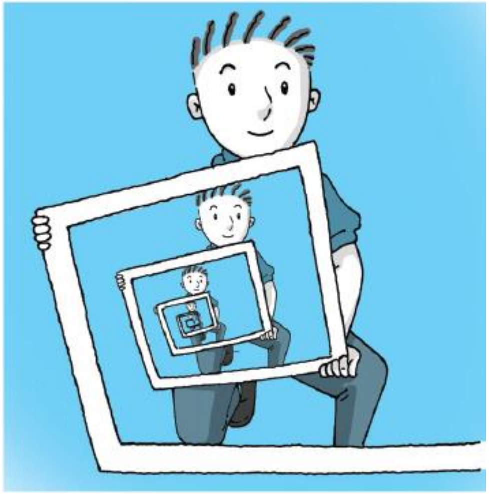
재귀적 정의를 적용하면

$$\begin{aligned} 3! &= 3 * 2! \\ &= 3 * 2 * 1! \\ &= 3 * 2 * 1 \\ &= 6 \end{aligned}$$

9.6 재귀적 정의

재귀적 관계를 이용하는 문제를 해결하기 위해 2단계 적용

- 주어진 문제를 원래의 문제와 같은 형태의 더 작은 문제들로 분할함
- 가장 작은 문제로 분할된 문제들의 해를 구한 후, 최종적으로 이들을 결합하여 주어진 문제의 해를 구함



여기서 잠깐!!

재귀(recursion)는 순환 또는 되부름이라고도 불리는데, 재귀적 관계는 이산수학과 컴퓨터 프로그램의 응용에 많이 쓰인다.

9.6 재귀적 정의

예제 9-12 f가 다음과 같이 재귀적으로 정의되었다고 할 때, $f(1), f(2), f(3), f(4), f(5)$를 구해보자.

$$f(0) = 1$$

$$f(n+1) = 2f(n)+1$$

풀이 귀납적 정의에 따라 단계별로 그 값을 구하면 다음과 같다.

$$f(1) = 2f(0) + 1 = 2 \cdot 1 + 1 = 3$$

$$f(2) = 2f(1) + 1 = 2 \cdot 3 + 1 = 7$$

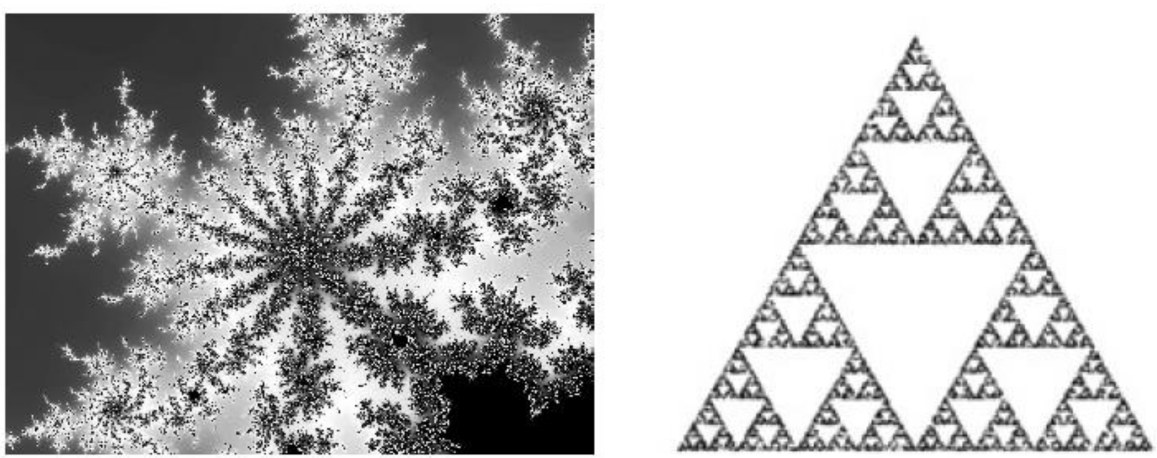
$$f(3) = 2f(2) + 1 = 2 \cdot 7 + 1 = 15$$

$$f(4) = 2f(3) + 1 = 2 \cdot 15 + 1 = 31$$

$$f(5) = 2f(4) + 1 = 2 \cdot 31 + 1 = 63$$

9.6 재귀적 정의

- 재귀적 관계에 의해 나타나는 현상들의 예로 **프랙탈(Fractals)**을 들 수 있음
- 재귀적 관계는 물리학에서의 동역학계와 **카오스(Chaos)**를 비롯한 지능 시스템 분야에서 많이 활용되고 있음



〈그림 9.5〉 프랙탈의 예

9.6 재귀적 정의

(2) Factorial

예제 9-13

다음과 같은 $F(n) = n!$의 재귀적 정의에 따라 $n!$의 값을 $n = 5$까지 구해보자.

$$F(0) = 1$$
$$F(n+1) = (n+1)F(n)$$

풀이

$$F(1) = 1 \times F(0) = 1 \times 1 = 1$$
$$F(2) = 2 \times F(1) = 2 \times 1 = 2$$
$$F(3) = 3 \times F(2) = 3 \times 2 = 6$$
$$F(4) = 4 \times F(3) = 4 \times 6 = 24$$

$F(5) = 5 \times F(4) = 5 \times 24 = 120$ 이다.

9.6 재귀적 정의

Factorial의 재귀적 연산

$F(5) = 5 \times F(4)$	$5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$
$F(4) = 4 \times F(3)$	$4 \times 3 \times 2 \times 1$
$F(3) = 3 \times F(2)$	$3 \times 2 \times 1$
$F(2) = 2 \times F(1)$	2×1
$F(1) = 1 \times 1$	1

9.6 재귀적 정의

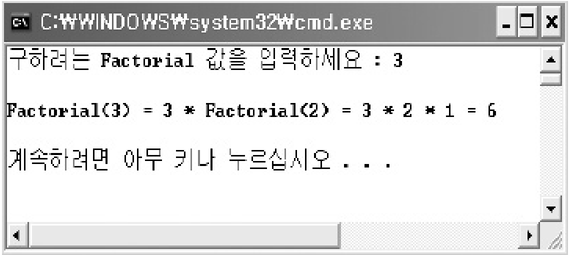
Factorial 값을 구하는 재귀 프로그램과 그 결과

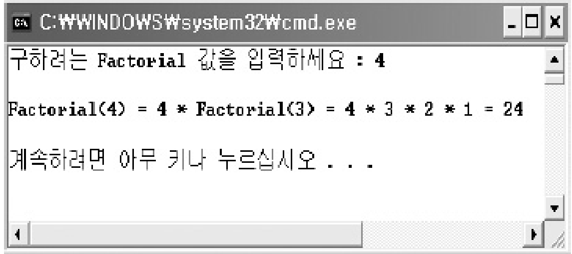
```
#include<stdio.h>

int fact(int n)
{
   if(n <= 1)    return (1);
   else   return (n * fact(n - 1));
}

int main(void)
{
   int i, n;
   int result;

   printf("구하려는 Factorial 값을 입력하세요 : ");

   scanf("%d", &n);
   result = fact(n);

   printf("\nFactorial(%d) = %d * Factorial(%d) = ", n, n, n - 1);
   for(i = n; i > 0; i--)
   {
```

9.6 재귀적 정의

```
        printf("%d", i);
        if(i != 1)   printf(" * ");
        else break;
    }
    printf(" = %d\n\n", result);
}
```

[프로그램 9.1] *n*!을 구하는 재귀 프로그램





〈그림 9.6〉 Factorial의 결과

9.7 피보나치 수와 하노이 탑

(1) 피보나치 수(Fibonacci numbers)

정의 9−14 피보나치 수(Fibonacci numbers)는 다음과 같이 재귀적 관계식으로 정의된다.

(1) $Fib(0) = 0,\ Fib(1) = 1$

(2) $Fib(n) = Fib(n-1) + Fib(n-2),\ n = 2, 3, 4, \cdots$

피보나치 수를 트리를 이용하여 구하면 보다 명확하게 이해됨

$$Fib(2) = Fib(1) + Fib(0) = 1 + 0 = 1$$

$$Fib(3) = Fib(2) + Fib(1) = 1 + 1 = 2$$

$$Fib(4) = Fib(3) + Fib(2) = 2 + 1 = 3$$

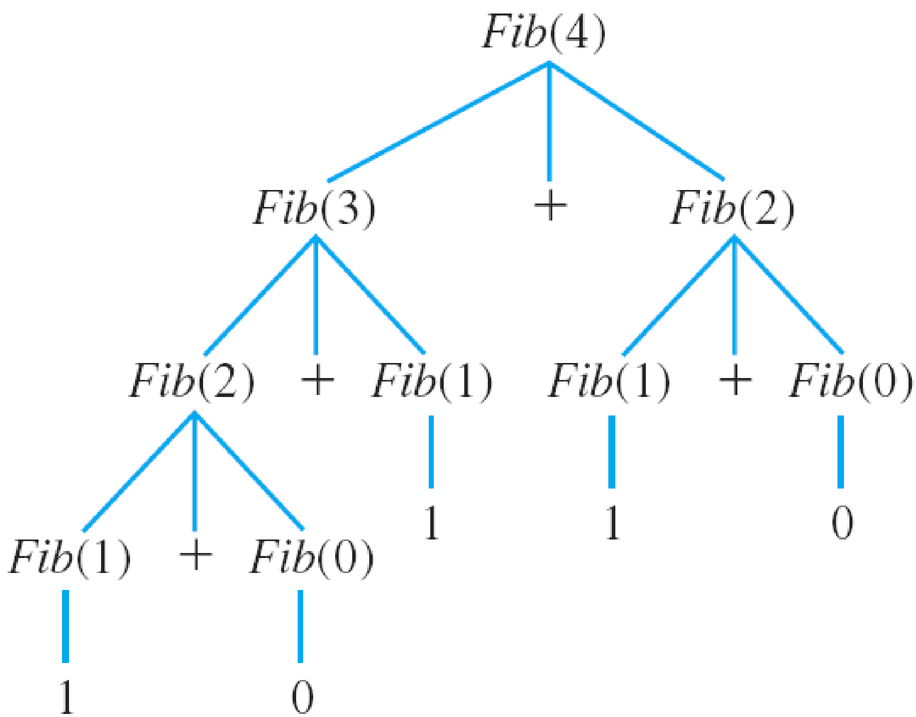
$$Fib(5) = Fib(4) + Fib(3) = 3 + 2 = 5$$

$$Fib(6) = Fib(5) + Fib(4) = 5 + 3 = 8$$

9.7 피보나치 수와 하노이 탑

따라서 *Fib*(0), *Fib*(1), *Fib*(2), *Fib*(3), *Fib*(4), *Fib*(5), *Fib*(6) 등의 값은

0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, ...



〈그림 9.7〉 $Fib(4)$의 재귀적 계산

9.7 피보나치 수와 하노이 탑

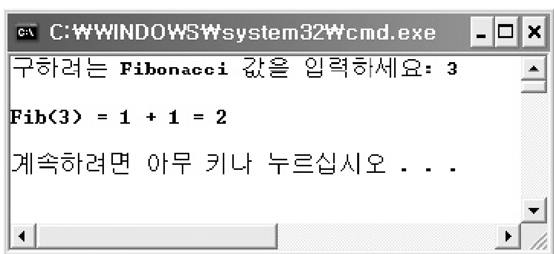
피보나치 수를 구하는 재귀적 C 프로그램과 그 결과

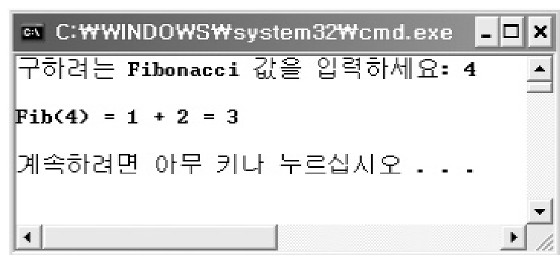
```c
#include<stdio.h>

int fib(int n)
{
    if(n == 0) return (0);
    else if(n == 1) return (1);
    else return (fib(n - 1) + fib(n - 2));
}

int main(void)
{
    int i, n;
    int result;

    printf("구하려는 Fibonacci 값을 입력하세요 : ");

    scanf("%d", &n);
    result = fib(n);
```

9.7 피보나치 수와 하노이 탑

```
    printf("\nFib(%d) = ", n);
    if(n == 0 || n == 1)        printf("%d\n\n", result);
    else   printf("%d + %d = %d\n\n", fib(n - 2), fib(n - 1), result);
}
```

[프로그램 9.2] 피보나치 수를 구하는 재귀 프로그램



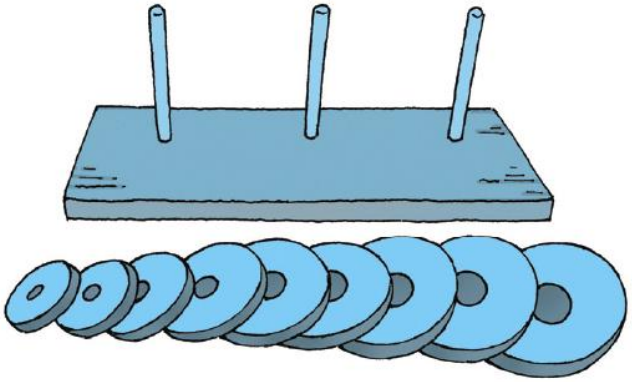


〈그림 9.8〉 피보나치 수의 결과

9.7 피보나치 수와 하노이 탑

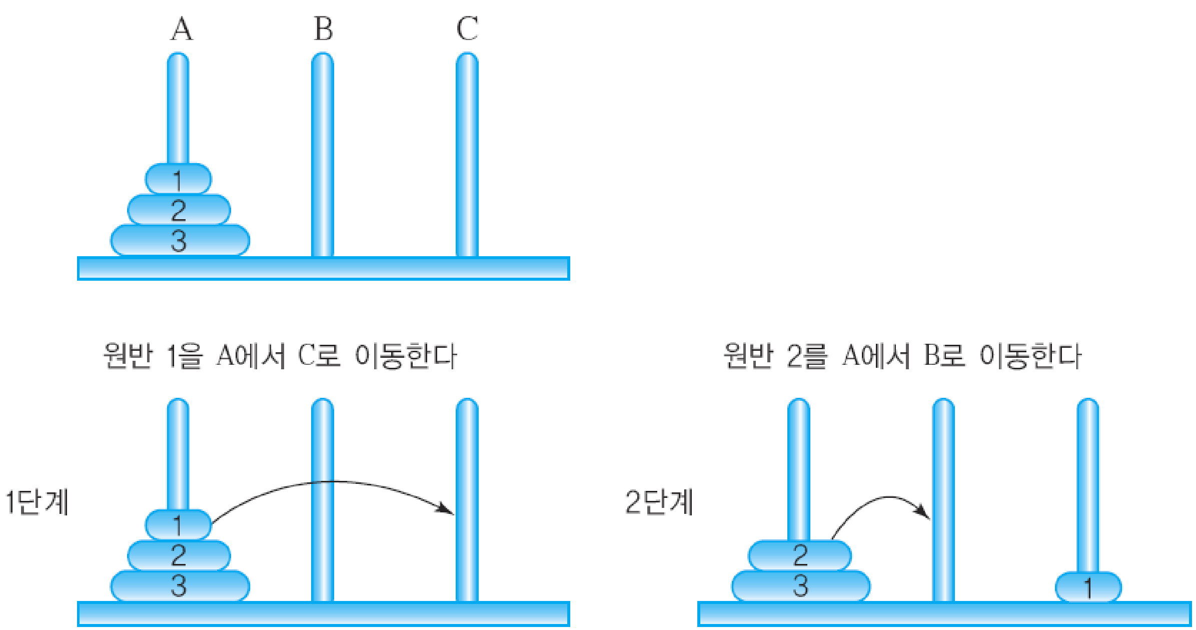
(2) 하노이 탑(Tower of Hanoi)

- **하노이 탑** 문제는 각기 다른 크기의 원반들과 판 위에 세워진 세 개의 막대로 구성됨
- 이 원반들은 처음에 바닥에 가장 큰 원반이 있는 크기 순으로 놓임
- 하노이 탑 문제의 규칙은 원반들이 한 막대에서 다른 막대로 한 번에 하나씩 이동할 수 있으며 작은 원반 위에 큰 것이 놓일 수 없도록 하는 것임
- 중간의 막대를 임시적으로 이용할 수 있으나 위의 규칙들을 지켜야 함

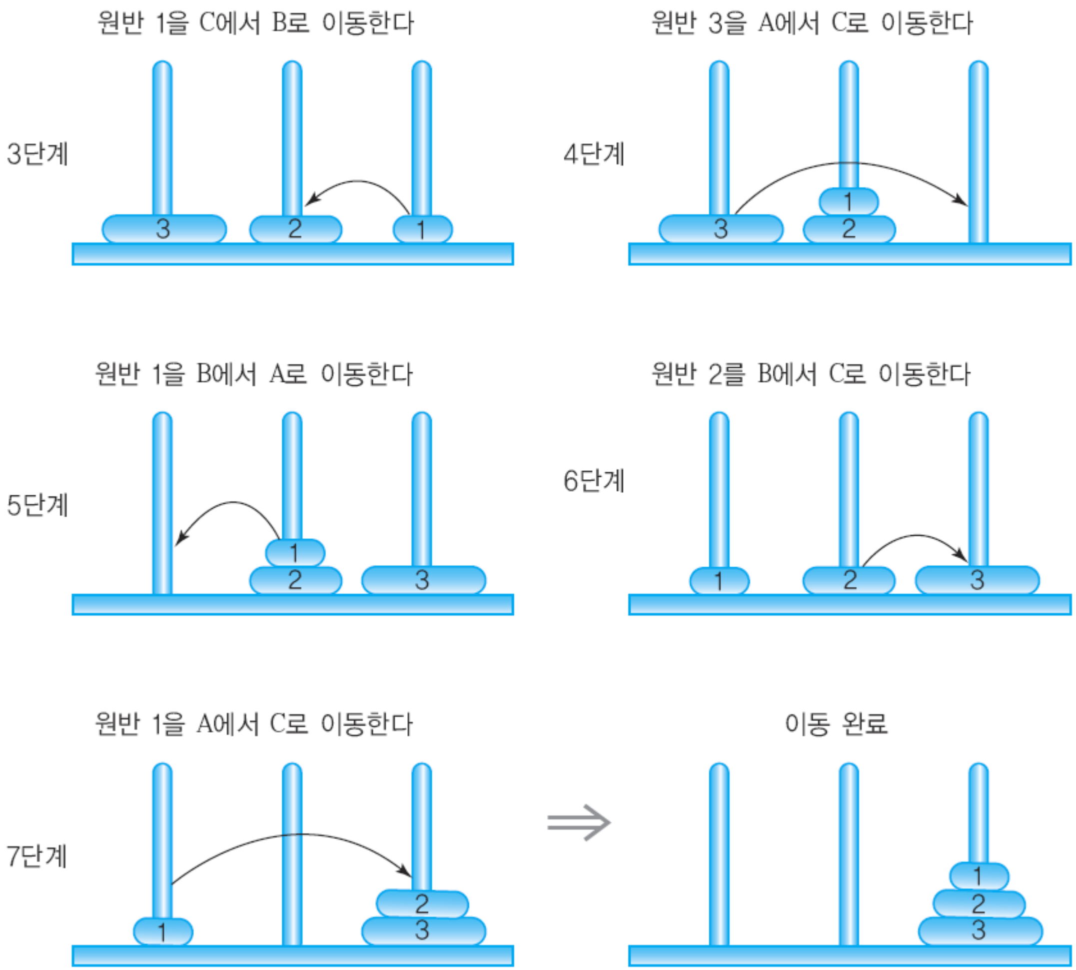


9.7 피보나치 수와 하노이 탑

하노이 탑의 문제 해결은 가장 큰 원반이 바닥에 있는 순서로 첫 번째 막대 A에 쌓여 있는 세 개의 원반을 세 번째 막대 C로 옮기는 것과 같은 과정을 거침



9.7 피보나치 수와 하노이 탑



〈그림 9.9〉 3개의 원반을 가진 하노이 탑의 이동

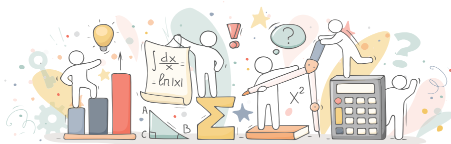
9.7 피보나치 수와 하노이 탑

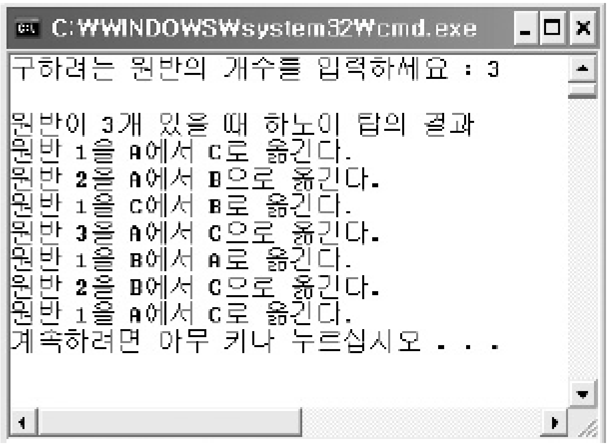
하노이 탑 문제를 해결하는 재귀적 C 프로그램과 그 결과

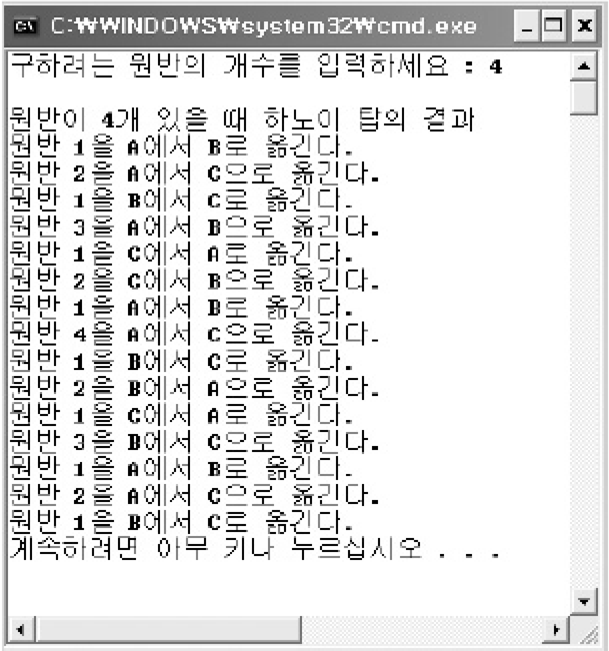
```
#include<stdio.h>

void hanoi_tower(int n, char from, char tmp, char to)
{
   if( n == 1)
      printf("원반 1을 %c에서 %c로 옮긴다. \n", from, to);
   else
   {
      hanoi_tower(n-1, from, to, tmp);
      printf("원반 %d을 %c에서 %c으로 옮긴다. \n", n, from, to);
      hanoi_tower(n-1, tmp, from, to);
   }
}

int main(void)
{
   int n;

   printf("구하려는 원반의 개수를 입력하세요 : ");
   scanf("%d", &n);

   printf("원반이 %d개 있을 때 하노이 탑의 결과\n\n", n);
   hanoi_tower(n, 'A', 'B', 'C');
}
```

[프로그램 9.3] 하노이 탑 문제 해결을 위한 재귀 프로그램

9.7 피보나치 수와 하노이 탑







〈그림 9.10〉 하노이 탑 문제의 결과

9.8 순열, 이산적 확률, 재귀적 관계의 응용과 4차 산업혁명과의 관계

(1) 순열, 이산적 확률, 재귀적 관계의 응용 분야

① 베이즈의 정리를 이용한 미래 예측

베이즈의 정리(Bayes' theorem)는 사건 A와 B가 있을 때 사건 B가 일어난 것을 전제로 한 사건 A의 조건부 확률을 구하는 효과적인 방법이다. 〈그림 9.11〉과 같이 과거의 데이터를 기반으로 미래를 예측하는 모델인 베이즈의 정리는 기상 예측, 의료 분야의 질병 예측, 게임의 승부 예측 등에 널리 응용된다. 또한 확률 모델을 활용한 음성 인식 기술도 개발되고 있다.

$$P(B \mid A) = \frac{P(A \mid B)P(B)}{P(A)}$$

〈그림 9.11〉 베이즈의 정리

9.8 순열, 이산적 확률, 재귀적 관계의 응용과 4차 산업혁명과의 관계

② 컴퓨터 프로그램에서의 재귀함수

재귀적 관계식은 정수의 계승(factorial), 피보나치 수, 하노이 탑 등의 정의에 적용된다. 이것을 〈그림 9.12〉와 같이 컴퓨터 프로그램에서 함수가 자신을 다시 호출하는 구조로 만들어진 재귀함수로 활용할 수 있다. 이와 같이 재귀함수를 잘 이용하면 복잡한 알고리즘을 매우 간단하게 표현할 수 있다.

```
int fact(int n)
{
    if(n <= 1)    return (1);
    else    return (n * fact(n - 1));
}
```

〈그림 9.12〉 계승의 재귀함수

9.8 순열, 이산적 확률, 재귀적 관계의 응용과 4차 산업혁명과의 관계

(2) 이산적 확률과 4차 산업혁명과의 관계: 빅 데이터

빅 데이터(Big data)란 기존 데이터베이스 관리 능력을 뛰어넘는 엄청난 양의 정형 또는 비정형 데이터들로부터 가치를 추출하고 결과를 분석하는 4차 산업혁명의 한 기술 분야이다. 빅데이터는 확률을 비롯한 기존의 통계적 분석 기법에다 대규모 데이터를 접목시켜 4차 산업에서 촉망받는 응용 분야로 부각되고 있다.

빅 데이터는 〈그림 9.13〉과 같이 다변화된 현대 사회를 더욱 정확하게 예측하게 하여 효율적으로 작동하게 하는데, 기업의 수요 예측, 사회 현상 분석 등에 폭넓게 쓰이고 있다.

〈그림 9.13〉 현대 사회를 예측하는 빅 데이터

요약 및 생활 속의 응용

- 서로 다른 원소들을 순서를 고려하여 일렬로 배열하는 것을 순열이라고 한다. 이때 n개의 원소 중에서 r개를 택하는 순열의 수는 ${}_nP_r$로 나타내는데,

  ${}_nP_r = \dfrac{n!}{(n-r)!}$, ${}_nP_n = n!$, ${}_nP_0 = 1$이다.

- 1부터 n까지의 모든 자연수의 곱을 n의 계승 또는 n factorial이라고 읽으며 $n!$로 나타낸다. $0! = 1$, $1! = 1$, $n! = n(n-1)!$이다.

- 같은 것을 포함하는 순열의 경우에는, 즉 n개 중에서 같은 것이 각각 p개, q개, $\cdots$, r개씩 있을 때, n개를 일렬로 배열하여 만들 수 있는 순열의 수는

  $\dfrac{n!}{p!q!\cdots r!}$ (단, $p + q + \cdots + r = n$)이다.

- 서로 다른 n개의 원소 중에서 순서를 생각하지 않고 r개를 택할 때, 이것을 n개의 원소에서 r개를 택하는 조합이라 하고, 그 조합의 수를 ${}_nC_r$과 같이 나타낸다.

  ${}_nC_r = \dfrac{n!}{r!(n-r)!}$

요약 및 생활 속의 응용

- $(a+b)^n$을 전개하면 다음과 같은 식이 나오는데, 이것을 이항 정리라 하고, 이때 ${}_nC_r$을 이항 계수라고 한다.

  $$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} {}_nC_r\, a^{n-k} b^k$$

- 확률 변수 X가 취하는 값 x_i와 X가 x_i를 취할 확률 p_i와의 대응 관계를 확률 변수 X의 확률 분포라고 한다.

- 확률 변수 X의 확률 분포가 다음과 같을 때,

  $$\sum_{i=1}^{n} x_i\, p_i = x_1\, p_1 + x_2\, p_2 + x_3\, p_3 + x_4\, p_4 + \cdots x_n\, p_n$$

  을 X의 기대값 또는 평균이라 하고, $E(X)$ 또는 m으로 나타낸다.

- 확률 변수 X의 평균이 m일 때 $E((X-m)^2)$을 X의 분산이라 하고, $V(X)$ 또는 $\sigma^2(X)$로 나타낸다. 또한 분산의 양의 제곱근을 표준 편차라 하고, $\sigma(X)$로 나타낸다. 즉, $V(X) = \sum_{i=1}^{n}(x_i - m)^2\, p_i$이고, $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$이다.

요약 및 생활 속의 응용

- 베이즈의 정리는 다음과 같다. 표본 공간 n개에서 서로 다른 배반적인 사건 $B_1, B_2, \cdots, B_n$ 중 하나는 반드시 일어난다고 할 때, 임의의 사건 A에 대해,

  $P(B_i|A) = \dfrac{P(B_i)\cdot P(A|B_i)}{P(A)} = \dfrac{P(B_i)\cdot P(A|B_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(B_j)\cdot P(A|B_j)}$이다.

- 비둘기 집 원리란 n개의 비둘기 집에 $(n+1)$마리 이상의 비둘기가 들어갔다면, 두 마리 이상의 비둘기가 들어간 비둘기 집이 적어도 하나 있다는 원리이다.

- 재귀적 정의란 수학적 귀납법에서와 같이 첫 번째 요소가 정의되고, $n+1$번째의 요소는 바로 앞의 n번째와 그 이하의 요소와의 관계로서 정의될 경우를 말하며, 재귀적 관계로 표현된다.

요약 및 생활 속의 응용

- 피보나치 수는 다음과 같이 재귀적 관계식으로 정의된다.
  (1) $Fib(0) = 0,\ Fib(1) = 1$
  (2) $Fib(n) = Fib(n-1) + Fib(n-2),\ n = 2,\ 3,\ 4,\ \cdots$
- 하노이 탑은 각기 다른 크기의 원반들과 판 위에 세워진 세 개의 막대로 구성되는데, 이 원반들을 다른 막대기에 옮기는 문제이다. 하노이 탑 문제는 재귀적 관계로서 그 해를 구할 수 있다.
- 순열과 조합을 통하여 가능한 경우의 수를 구할 수 있으며, 이를 이용하여 우리의 일상생활과 관련된 다양한 확률을 계산할 수 있다.
- 비둘기 집 원리는 컴퓨터 시스템을 비롯한 여러 가지 분야에 응용할 수 있으며, 베이즈의 정리는 여론 조사, 게임의 분석 등에 응용할 수 있다.
- 순열, 이산적 확률, 재귀적 관계의 응용 분야는 베이즈 정리를 이용한 미래 예측과 컴퓨터 프로그램에서의 재귀함수 등이 있다. 이산적 확률과 4차 산업혁명과의 관계로는 빅 데이터를 들 수 있다.

CHAPTER 9
FINISH