CHAP.3
확률론, 확률변수, 기댓값

nonezero@kumoh.ac.kr

확률종류

- 고전적(수학적) 확률 $$P(A) = \frac{|A|}{|S|}$$
- 통계적(경험적) 확률

$$P(A) = \frac{\text{사건 } A\text{의 도수}}{\text{총 관찰 도수}}$$

시행 횟수에 따라 달라진다.

경우의 수

- 3장의 카드 중에서 3장을 뽑아서 순서대로 **나열**하는 경우의 수

ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA　　3가지, 2가지, 1가지　　$3! = 3 \times 2 \times 1,$　　$0! = 1$

- 3장의 카드 중에서 2장을 뽑아서 **나열**하는 경우의 수

순서 ←→ 무순

AB　BA
AC　CA
BC　CB

두 개를 나열하는 경우의 수

$\mathbf{3 \times 2}$

$$nPr = \frac{n!}{(n-r)!}$$

Permutation
순열

$$\frac{\mathbf{3 \times 2}}{\mathbf{2 \times 1}}$$

$$nCr = \frac{nPr}{r!} = \frac{n!}{(n-r)!\,r!}$$

Combination
(조합)

확률

기본정의

- 확률실험
- 근원사건
- 표본공간
- 사건

$$S = \{\text{모든 근원사건}\}$$

$$A = \{\text{일부 근원사건}\}$$

집합

$$A \subset S$$

주사위 1개 던지는 확률실험

{1} {2} {3} {4} {5} {6}

{1, 2, 3, 4, 5, 6}

짝수가 나오는 사건
{2, 4, 6}

확률 (Probability)

- 어떤 사건이 발생할 가능성의 ‘크기’
- 0에서 1사이

확률공식

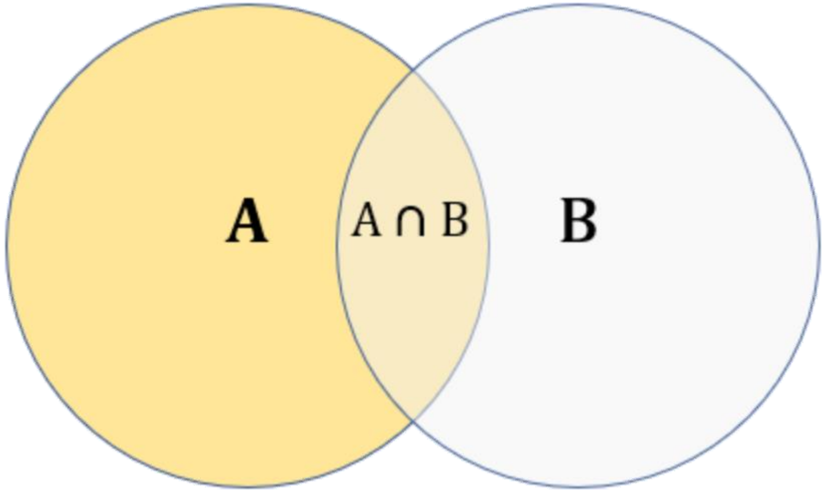
- 집합 연산
  - AND OR NOT (교집합, 합집합, 여집합)

- $P(S) = 1$
- $P(A \text{ OR } B) = P(A) + P(B) - P(A \text{ AND } B)$
- $P(A) = 1 - P(\text{NOT } A)$

- $P(A|B) = ?$ Probability of A given B

조건부 확률 (Conditional Probability)

- 사건 A가 발생했을 때, 사건 B가 발생할 확률



$$P(B|A) = \frac{P(B\cap A)}{P(A)}$$

P of B given A

$$S=\{1, 2, 3, 4, 5, 6)$$

짝수 사건 $A = \{2, 4, 6\}$

3의 배수 사건 $B = \{3, 6\}$

$$A \cap B = \{6\}$$

$$P(A \cap B) = \frac{1}{6}$$

$$P(A) = \frac{3}{6}$$

$$\boxed{P(B|A)} = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{3}{6}} = \frac{1}{3}$$

짝수 사건일 때
3의 배수 사건

- 흰색, 검은색 주사위 던지는 실험,

- 사건 A: 두 주사위의 나온 수를 합해서 3
- 사건 B: 흰색 주사위가 1
- 사건 A의 확률
- 사건 B의 확률
- 사건 B가 일어난 조건에서 사건 A가 일어날 확률

$$P(A) = \frac{2}{36}$$

$$P(B) = \frac{1}{6}$$

$$P(A|B) = \frac{1}{6}$$

= 검은색 주사위가 2일 확률

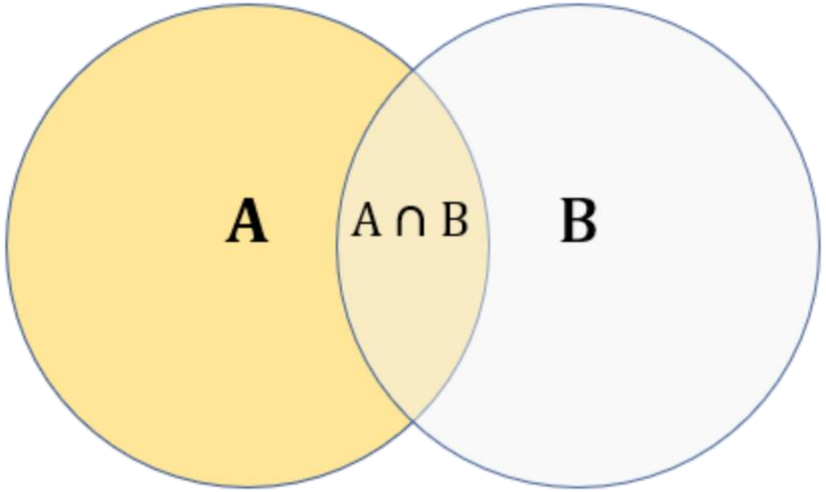
$$P(A|B) = \frac{P(A\ AND\ B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{36}}{\frac{1}{6}} = \frac{1}{6}$$

{(1,1)}{(1,2)}{(1,3)}{(1,4)}{(1,5)}{(1,6)}

{(2,1)}{(2,2)}

교집합에 주목해 보자

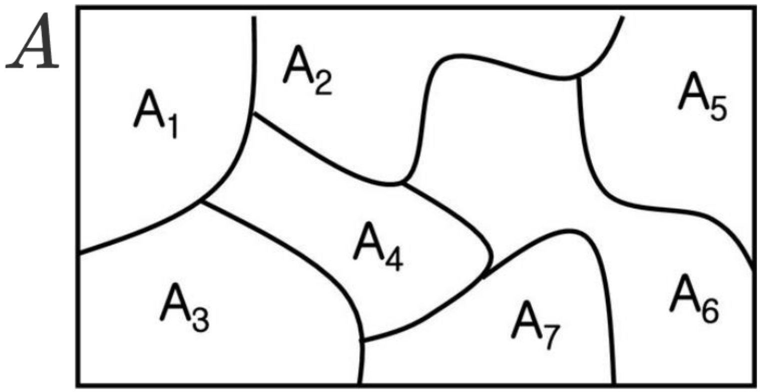
$$P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}$$



$$P(B \cap A) = P(B|A)P(A)$$

$$P(A \cap B) = P(A|B)P(B)$$

Law of Total Probability

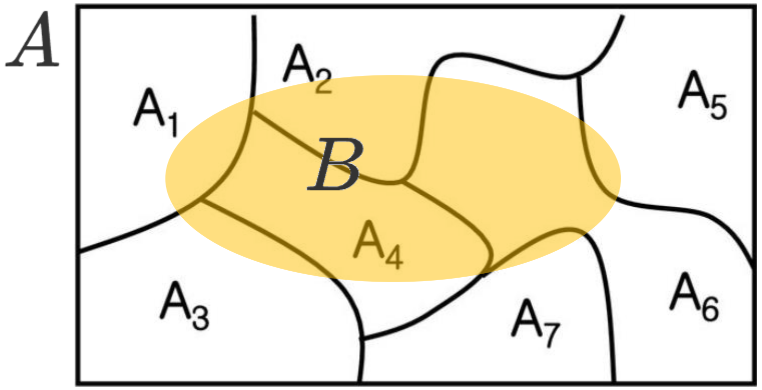


이런 상황이라면,

$$P(A) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n)$$

$$P(A_i \cap A_j) = 0 \text{ for } i \neq j$$

$$P(\cup_{i=1}^{n} A_i) = 1$$



B가 이럴 때,

$$\boxed{P(B)} = P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2) + \cdots + P(B \cap A_n)$$

$$P(B \cap A) = P(B|A)P(A)$$

$$= P(B|A_1)P(A_1) + P(B|A_2)P(A_2) + \cdots + P(B|A_n)P(A_n)$$

$$\boxed{= \sum_{i=1}^{n} P(B|A_i)P(A_i)}$$

베이즈 정리 (Bayes Rule / Theorem)

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} P(B|A_i)P(A_i)$$

$$\underset{\text{posterior}}{P(A|B)} = \frac{\overset{\text{likelihood}}{P(B|A)}\,\overset{\text{Prior}}{P(A)}}{\underset{\text{Evidence}}{P(B)}}$$

이럴 때 사용

- 인구 1000명당 한 명이 걸리는 희귀병
- 검사법이 있다; 병에 걸린 사람의 경우 99% 양성반응
- 병에 걸리지 않은 사람의 경우 2% 양성반응
- 홍길동의 검사결과로 양성반응이 나타났을 때,
- 홍길동이 병에 걸렸을 확률은?

양성반응이 나타난 경우 감염되었을 확률

- 사건 A : 피검자가 병에 걸려 있다.
- 사건 B : 피검자가 양성반응을 보인다.

$$P(A|B)$$

주어진 확률 정리

- 인구 1000명당 한 명이 걸리는 희귀병
- 검사법이 있다; 병에 걸린 사람의 경우 99% 양성반응
- 병에 걸리지 않은 사람의 경우 2% 양성반응
- 홍길동의 검사결과로 양성반응이 나타났을 때,
- 홍길동이 병에 걸렸을 확률은?

$$P(A) = 0.001$$
$$P(NOT\ A) = 0.999$$
$$P(B|A) = 0.99$$
$$P(B|NOT\ A) = 0.02$$

풀이

- $P(A) = 0.001$
- $P(NOT\ A) = 0.999$
- $P(B|A) = 0.99$
- $P(B|NOT\ A) = 0.02$
- $P(B) = P(B\ AND\ A) + P(B\ AND\ NOT\ A)$
- $P(B\ AND\ A) = P(B|A)P(A) = 0.99 \times 0.001 = 0.00099$
- $P(B\ AND\ NOT\ A) = P(B|NOT\ A)P(NOT\ A) = 0.02 \times 0.999 = 0.01998$

$$P(A|B) = \frac{P(A\ AND\ B)}{P(B)} = \frac{P(B|A)\,P(A)}{P(B)} = \frac{P(B|A)\,P(A)}{P(B|A)P(A) + P(B|NOT\ A)\,P(NOT\ A)}$$

$= 0.0472$

Bayesian Inference

≈ Posterior 구하기

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)} \qquad \propto P(B|A)P(A)$$

양성일 때,
병에 걸렸을 확률

판정만 할 경우,
$P(B)$를 계산할 필요가 없다.

$P(B|A)P(A) \longleftrightarrow P(B|A')P(A')$

- **Posterior**: $P(A|B)$
- **Prior**: $P(A)$ 병에 걸릴 확률
- **Likelihood**: $P(B|A)$ 병에 걸렸을 때 양성이 나타날 확률
- Evidence: $P(B)$ 양성이 나타날 확률

두 사건이 독립

두 사건이 독립
A 사건이 발생할 확률은 B사건이 발생하든 말든...상관없다.

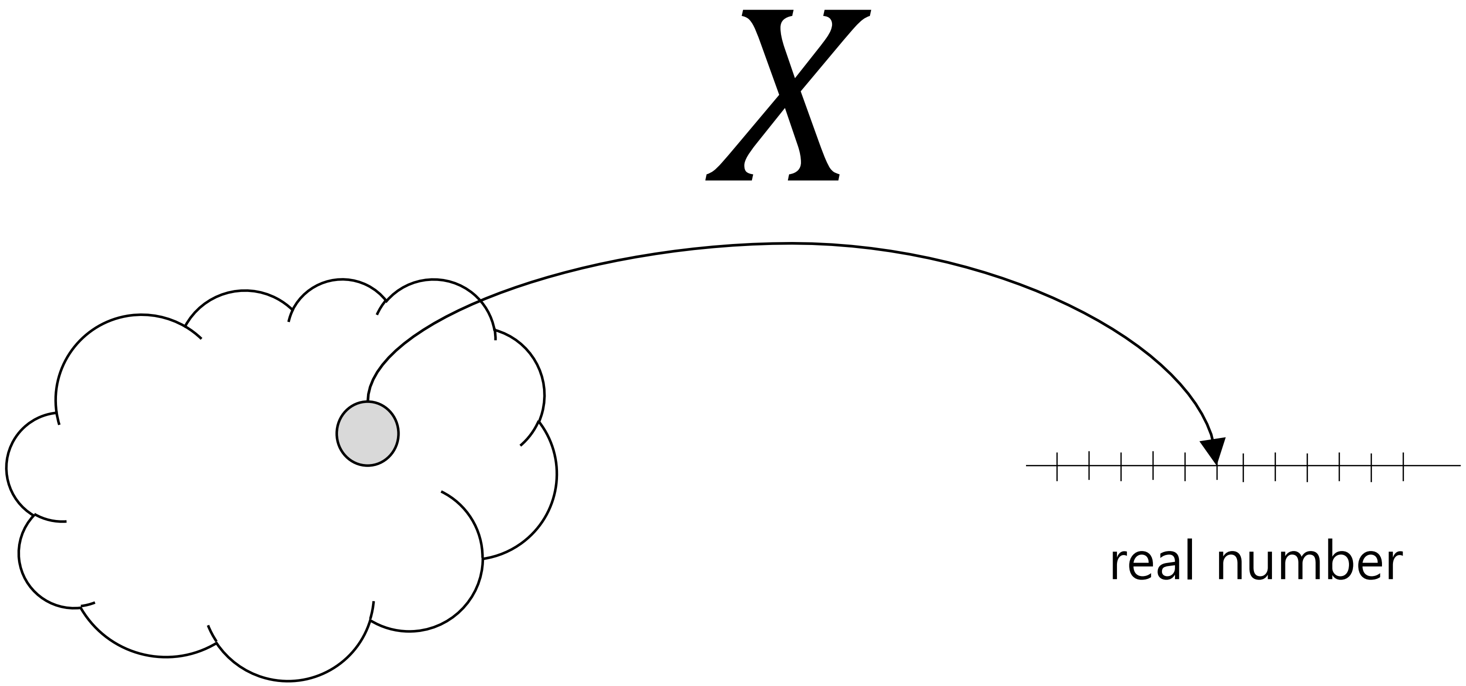
- $P(A|B) = P(A)$

- $P(A\ AND\ B) = P(A|B)P(B) = P(A)P(B)$

확률변수

이제부터는 ‘사건’ 대신
‘확률변수’를 쓰자

Random Variable; 확률변수



※ 확률실험, 근원사건, 표본공간, 사건, 실수

Random Variable

- mapping function: event → real value
- $P(X = x)$: X가 x값을 가질 확률
- $P_X(x)$; $P(x)$

- 동전 2개를 던져서 앞면이 나오는 횟수를 확률변수 X라 하자.
- X 가 가질 수 있는 값은? $0, 1, 2$
- $P(X = 1) = P_X(1) = P(1) = {}^1/_2$

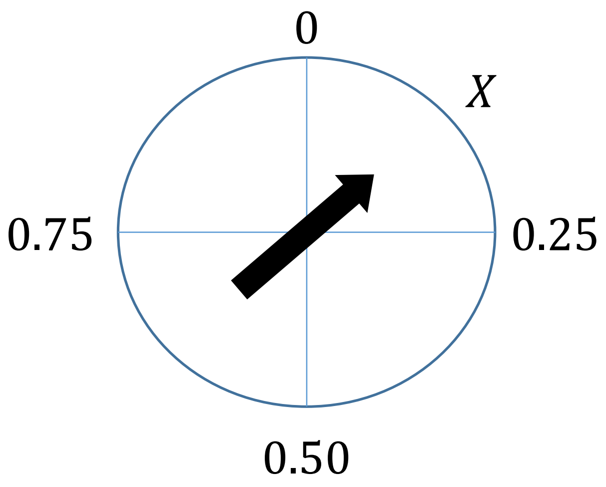
확률변수, 확률을 쫙 펼쳐(distribute)보자

x	0	1	2
$P(X = x)$	$P(X = 0) = 1/4$	$P(X = 1) = 1/2$	$P(X = 2) = 1/4$

확률분포표

연속확률변수

- $P(X = x) = 0 \;\; for\; all\; x$
- X가 취할 수 있는 값이 무한 개

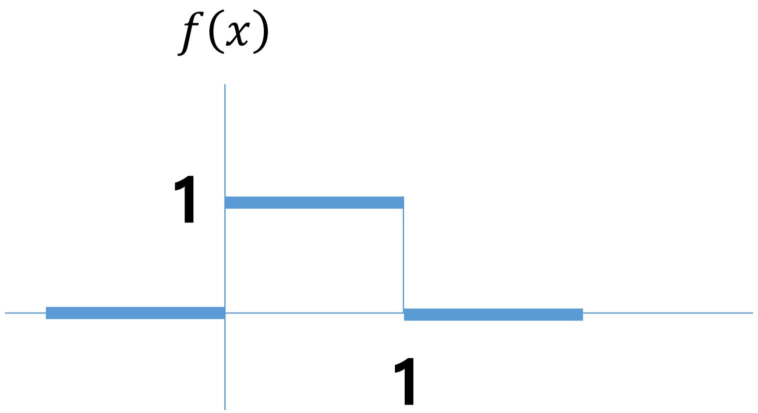


$$P(0.25 \leq X \leq 0.75) = 0.5$$

$$P(X = 0.5) = {}^{1}\!/_{\infty} = 0$$

그래프; 함수로 그려보자

- 확률분포표를 그릴 수는 없으니까.



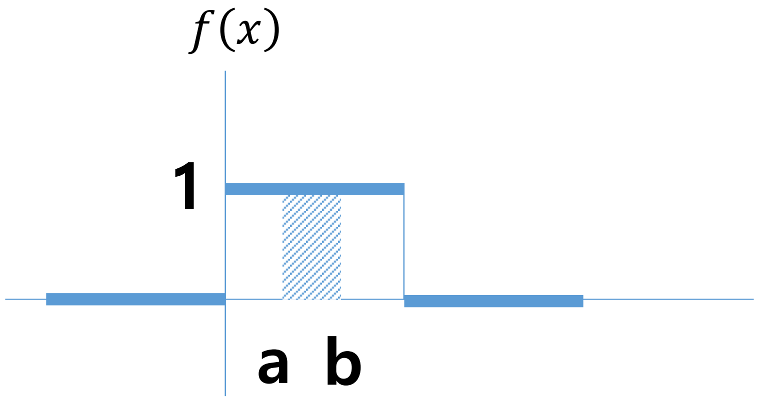
$$f(x) = 0 \qquad when \;\; x < 0$$

$$f(x) = 1 \qquad when \;\; 0 \leq x \leq 1$$

$$f(x) = 0 \qquad when \;\; x > 1$$

$f(x)$라는 함수가 하나 도입된 것에 주목

a, b사이의 면적 = 확률



빗금영역의 면적

$$P(a \leq x \leq b) = \frac{(b-a)\cdot 1}{1} = \int_a^b f(x)dx$$

전체면적

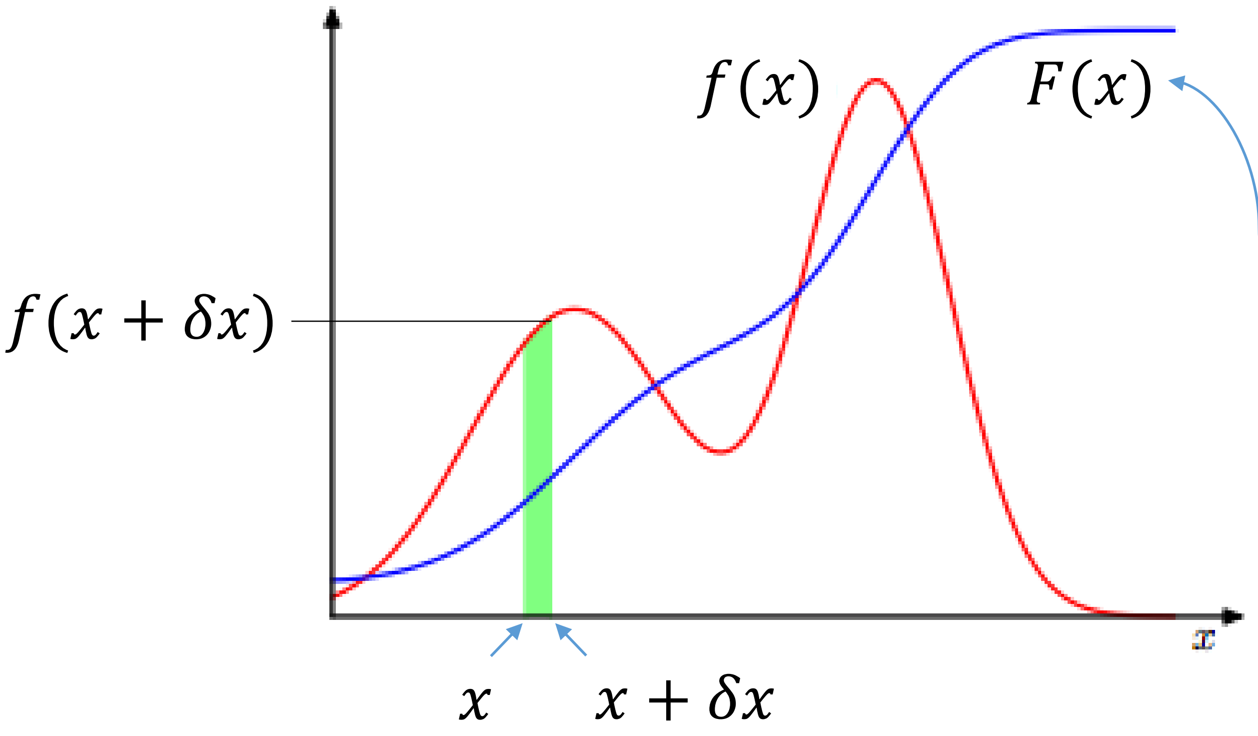
$$P(-\infty \leq x \leq \infty) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$$

몇 가지 함수

$$P(a \le x \le b) = \int_a^b f(x)dx$$

$$f(x) \ge 0$$

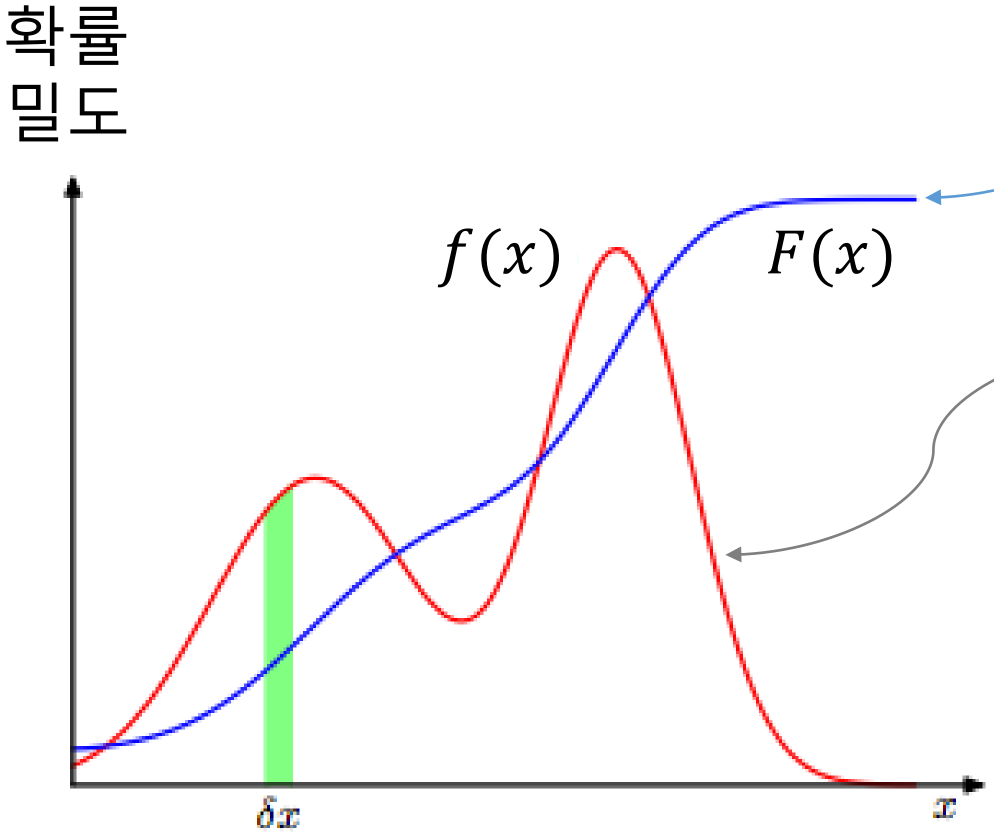
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$$



$$F(a) = \int_{-\infty}^{a} f(x)dx$$

$$P(X \le a) = F(a)$$

$$\frac{d}{dx}F(x) = f(x)$$



누적확률밀도함수

누적확률분포함수

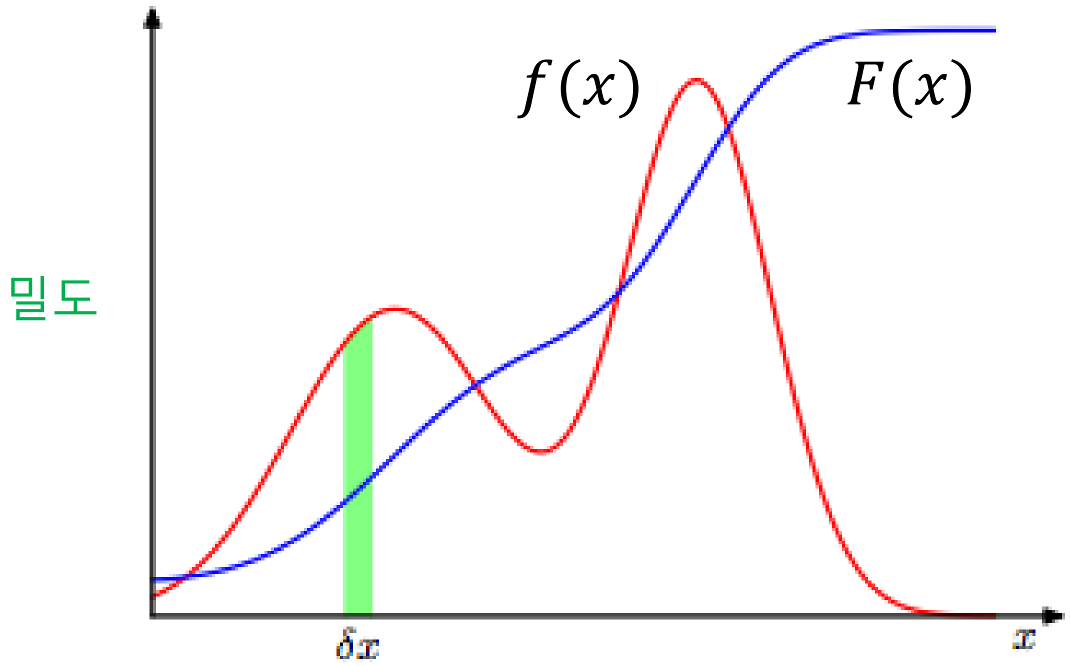
cumulative distribution function

확률밀도함수

probability density function
(pdf)

$$\frac{\text{질량}}{\text{부피}} = \text{밀도}$$

부피×밀도=질량=확률



점, 선, 면, 부피, …
scalar, linear, plane, volume, …

discrete 일 때,
확률질량함수
probability mass function
(pmf)

continuous 일 때,
확률밀도함수
probability density function
(pdf)

확률분포함수

- PDF (PMF)
- cumulative distribution function (CDF)

- 확률분포함수
- 확률분포

이거 확률분포가 어떻게 되니?

pdf, pmf 가 뭐야?

확률변수에 대한 pdf가 뭐야?

$P(x)$

$P(X = x) \geq 0$

$\sum_x P(X = x) = 1$

$f(x)$

$f(x) \geq 0$

$\int f(x)dx = 1$

$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx$

$P(X = 0) = \frac{1}{\infty} = 0$