

**MÜHENDİSLİK MEKANİĞİ**

# **STATİK**

**DERS NOTLARI**

**Yrd. Doç. Dr. Hüseyin BAYIROĞLU**

İSTANBUL 2006

# İçindekiler

## 1

### GİRİŞ

## 5

- 1.1 Mekaniğin tanımı 5
- 1.2 Temel ilkeler ve görüşler 5

## 2

### VEKTÖRLERİN VE İŞLEMLERİNİN TANIMI

## 6

- 2.1 Vektörün tanımı 6
- 2.2 Vektörel işlemlerin tanımı 6
  - 2.2.1 Vektörün bir sayı ile çarpımı 6
  - 2.2.2 Vektörlerin toplamı 7
  - 2.2.3 İki Vektörün birbiri ile skaler çarpımı 7
  - 2.2.4 İki Vektörün birbiri ile vektörel çarpımı 7
  - 2.2.5 Bir vektörün bir eksen üzerindeki izdüşümü 8

## 3

### VEKTÖRLERİN ANALİTİK İNCELENMESİ

## 9

- 3.1 İki boyutlu vektörlerin kartezyen koordinatlarda gösterilişi 9
- 3.2 Üç boyutlu vektörlerin kartezyen koordinatlarda gösterilişi 11
- 3.3 Kartezyen koordinatlarda vektörel işlemler 13
  - 3.3.1 Vektörün bir sayı ile çarpımı 13
  - 3.3.2 Vektörlerin toplamı 14
  - 3.3.3 İki vektörün skaler çarpımı 15
  - 3.3.4 İki vektörün vektörel çarpımı 16
  - 3.3.5 Üç vektörün karışık çarpımı 17
  - 3.3.6 Bir vektörün bir eksen üzerindeki izdüşümü 18

## 4

### KUVVET SİSTEMLERİ

## 19

- 4.1 Kuvvetin tanımı ve vektörle gösterilişi 19
- 4.2 Bir kuvvetin bir noktaya göre momenti 20
- 4.3 Bir kuvvetin bir eksene göre momenti 21
- 4.4 Bir kuvvet sisteminin bir noktaya göre momenti ve indirgeme elemanları (Bir kuvvet sisteminin statik eşdeğeri ) 22
- 4.5 Bir kuvvet sisteminin değişmezleri 24
- 4.6 Dejenere kuvvet sistemleri 26
  - 4.6.1 Sıfıra eşdeğer kuvvet sistemi 26
  - 4.6.2 Kuvvet çiftine (Tek bir momente) eşdeğer kuvvet sistemi 26
  - 4.6.3 Bileşkeye eşdeğer kuvvet sistemi 26

4.6.4 Bileşkesi olan kuvvet sistemi	27
4.7 Merkezi eksen	27
4.7 Paralel bağlı kuvvet sistemi ve merkezi	29

## 5

### KÜTLE MERKEZİ

31

5.1 Bir sürekli cismin kütle merkezi	31
5.2 Bileşik cismin kütle merkezi	38

## 6

### STATİK

41

6.1 Giriş	41
6.2 İç kuvvetler ve kesit zorları	47
6.3 Statiğin temel ilkelerinin geçerli olduğu referans sistemleri	47
6.4 Bir maddesel noktanın kuvvetler etkisinde dengesi	48
6.5 Bir Rijid cismin kuvvetler etkisinde dengesi	48
6.6 Bir Rijid cisim sisteminin kuvvetler etkisinde dengesi	48
6.7 Düzlemsel kuvvetler etkisindeki cisimlerin dengesi	48
6.8 Üç boyutlu kuvvetler etkisindeki bir rijid cismin dengesi ile ilgili uygulamalar	53

## 7

### SÜRTÜNME

60

7.1 Sürtünme ve sürtünme katsayısı	60
7.2 Mesnetlerdeki sürtünmeler	62
7.3 Halat ve kayış kasnak sürtünmesi	65

## 8

### YAYILI YÜKLER

68

8.1 Yayılı yüklerin tanımı	68
8.2 Kirişlerde yayılı yükler	68

## 9

### KABLolar

72

9.1 Genel bilgi	72
9.2 Konsantre yükler etkisindeki kablolar	72
9.3 Yayılı yükler etkisindeki kablolar	78
9.3.1 Yatayda düzgün yayılı yük etkisindeki kablolar (Parabolik kablo )	79
9.3.2 Kendi ağırlığı etkisinde olan homojen yapıdaki kablo veya zincirin dengesi	82

## **10**

### **DÜZLEM KAFES KİRİŞ SİSTEMLERİ**

86

- 10.1 Genel bilgi ve tarifler 86
- 10.2 Basit kafes sistemi 86
- 10.3 Düğüm noktaları metodu ile kafes sisteminin analizi 88
- 10.4 Özel düğüm noktaları 92
- 10.3 Kesim metodu ile kafes sisteminin analizi 94

## **11**

### **ÇERÇEVE VE MAKİNALAR**

97

- 11.1 Giriş 97
- 11.2 Çerçeveler 97
- 11.3 Makineler 101

## **12**

### **KİRİŞLERDEKİ KESİT ZORLARI KESME KUVVETİ VE EĞİLME MOMENTİ DİAGRAMLARI**

104

- 12.1 Kirişlerde kesit zorları 104
- 12.2 Kesit zorları için kabul edilen pozitif yönler 104
- 12.3 Yayılı yük , kesme kuvveti ve eğilme momenti arasındaki bağıntılar 105
- 12.4 Kesme kuvveti ve eğilme momenti diyagramları 106

## **13**

### **VİRTÜEL İŞLER METODU**

115

- 13.1 Giriş 115
- 13.2 Virtüel yer değiştirme 115
- 13.3 Bir kuvvetin virtüel işi 116
- 13.4 Bir momentin virtüel işi 116
- 13.5 Virtüel işler ilkesi 116
- 13.6 Çok serbestlik dereceli sistemlerde virtüel işler ilkesi 119

## **EK A**

Daha önceki senelerde sorulan Vize soruları ve cevapları 122

## **EK B**

Daha önceki senelerde sorulan Final soruları ve cevapları 164

# BÖLÜM 1

## GİRİŞ

### 1.1 Mekanğin tanımı

Cisimlerin Kuvvetler etkisinde dengesini ve hareketlerini inceleyen bilim dalına mekanik denir.

Mekanik cisimlere maddesel nokta, rijid cisim, elastik cisim , plastik cisim ve akışkanlar ( sıvı ve gazlar) olmak üzere yaklaşır.Mekanik eğer sadece Maddesel nokta ve rijid cisim modelini inceliyorsa buna mühendislik mekaniği denir. Bunun dışında incelediği cisim modeline uygun isimler verilir. Örneğin elastomekanik veya elastisite, plastisite , hidromekanik , aerodinamik, elektromekanik gibi.

Mekanik , Statik ve Dinamik olmak üzere iki bilim dalına ayrılır. Statik kuvvetler etkisinde cisimlerin denge koşullarını, Dinamik ise hareketlerini inceler.

### 1.2 Temel ilkeler ve görüşler

Mekanğin temel aldığı ilkeler Newton yasalarıdır. Bu yasalar cisimlere maddesel nokta modeli ile yaklaşıldığında kullanışlıdır. Diğer cisim modellerine matematiksel modellerle genişletilmesi gerekir. Benzer şekilde mekanikte kuvvetler maddesel nokta modelinde vektörlerle gösterilebilmesine karşı rijid cisim modelinde vektör ve etki doğrusu kavramları beraber kullanılmalıdır.

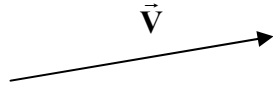
Mühendislik mekaniği vektörler yardımı ile oluşturulduğu için vektörleri bize gerektiği kadar ayrıntılı bir şekilde ele almamız gerekir.

## BÖLÜM 2

### VEKTÖRLERİN VE TEMEL İŞLEMLERİNİN TANIMI

#### 2.1 Vektörlerin tanımı

Doğrultu , yön ve modülü ile tanımlanan büyüklüklere vektörler denir. Bir vektör Koyulaştırılmış harfler ile veya üzerine ok işareti çizilen harflerle belirtilir. Vektörler aşağıdaki gibi yönlendirilmiş doğru parçası ile gösterilebilir.



Bir referans sistemine göre çizilen bu doğru parçasının doğrultusu vektörün doğrultusunu , yönü vektörün yönünü ve uzunluğu vektörün modülünü gösterir.

Bir vektörün modülü  $|\vec{V}|$  ile gösterilir.

Sıfır vektör : modülü sıfır olup doğrultu ve yönü belirsiz olan vektörlere sıfır vektörü denir ve  $\vec{0}$  ile gösterilir.

$-\vec{V}$  vektörü :  $\vec{V}$  vektörü ile aynı doğrultu ve modülde fakat ters yöndeki vektöre  $-\vec{V}$  vektörü denir.

Birim vektör: Modülünün sayısal değeri 1 olan vektöre birim vektör denir.

#### 2.2 Vektörel işlemlerin tanımı

Vektörler üzerine inşa edilen temel işlemler : Vektörün bir reel sayı ile çarpımı , vektörlerin toplanması , skaler ve vektörel çarpımı gibi işlemlerdir.

##### 2.2.1 Vektörün bir sayı ile çarpımı

Çarpılan vektörle aynı doğrultuda bir vektördür. Eğer çarpım katsayısı pozitif ise yönde aynıdır. Modül ise çarpım katsayısı ile vektörün modülünün çarpımı kadardır.

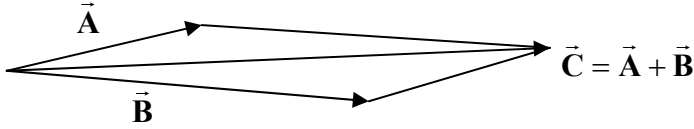
$$|k\vec{V}| = |k| |\vec{V}|$$

Bir vektörün birim vektörü : Vektörü modülüne bölerek elde edilir.

Bir eksenin birim vektörü : Eksen doğrultusunda ve yönündeki herhangi bir vektörü modülüne bölerek bulunur.

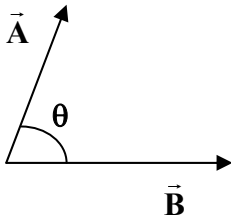
### 2.2.2 Vektörlerin toplamı

Başlangıçları aynı noktaya getirilen iki vektörün toplamı bu vektörler üzerine kurulan paralel kenarın köşegeni üzerindeki aşağıda gösterilen vektöre eşittir.



### 2.2.3 İki vektörün birbiri ile skaler çarpımı

İki vektör arasındaki açı: Başlangıçları aynı noktaya getirilen iki vektör arasındaki  $180^0$  den büyük olmayan açı iki vektör arasındaki açı olarak alınır .



Skaler Çarpım sonucunda skaler elde edilir .

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}| |\vec{B}| \cos \theta$$

### 2.2.4 İki vektörün birbiri ile vektörel çarpımı

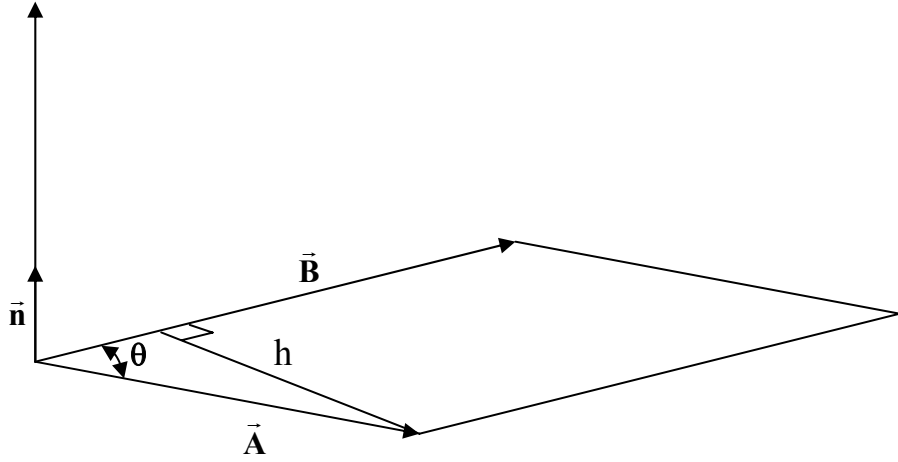
Vektörel çarpımın sonucu yine bir vektördür.

$$\vec{C} = \vec{A} \wedge \vec{B} = (|\vec{A}| |\vec{B}| \sin \theta) \vec{n}$$

Burada Vektörel çarpım sonunda elde edilen vektör her iki vektöre dik doğrultuda ve  $|\vec{A}| |\vec{B}| \sin \theta$  modülünde bir vektördür. Yönü ise sağ el kuralı ile bulunabilir.

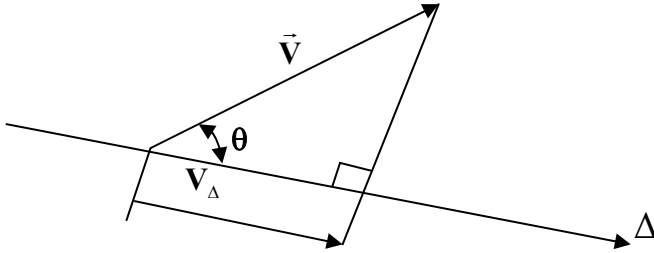
Sağ el kuralı ile elde edilen yön , baş parmak dışındaki sağ el parmakları birinci vektörü ikinci vektöre doğru döndürme yönünde tutulursa baş parmağın gösterdiği yöndür.

$$\vec{C} = \vec{A} \wedge \vec{B}$$



$|\vec{A}| |\vec{B}| \sin \theta$  ifadesinde  $|\vec{A}| \sin \theta = h$  olduğundan  $\vec{A}$  ve  $\vec{B}$  vektörlerinin birbiri ile vektörel çarpımının modülü bu vektörlerin başlangıçları aynı noktaya getirilirse üzerine kurulan paralelkenarın alanına eşit olduğu görülür.

### 2.2.5 Bir vektörün bir eksen üzerindeki izdüşümü



$$V_{\Delta} = |\vec{V}| \cos \theta$$

$$V_{\Delta} = \vec{V} \cdot \vec{U}_{\Delta}$$

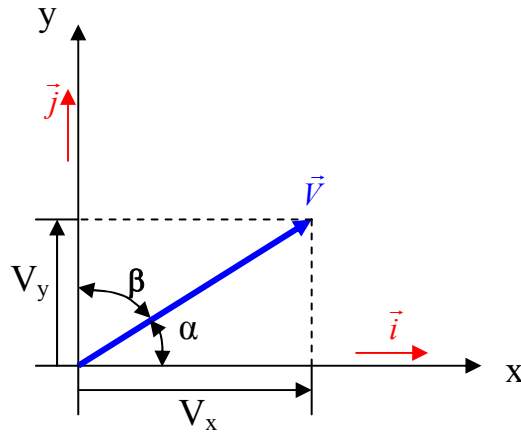
burada  $\vec{U}_{\Delta}$   $\Delta$  ekseninin birim vektörüdür.



## BÖLÜM 3

### VEKTÖRLERİN ANALİTİK İNCELENMESİ

#### 3.1 İki boyutlu vektörlerin kartezyen koordinatlarda gösterilişi



Düzlemde bir vektör

$$\vec{V} = V_x \vec{i} + V_y \vec{j}$$

şeklinde x ve y eksenine doğrultusundaki vektörlerin toplamı cinsinden yazılabilir. Bu vektörün modülü ise aşağıdaki gibi Pisagor teoremi yardımı ile bulunur.

$$|\vec{V}| = \sqrt{V_x^2 + V_y^2}$$

Bir vektörün doğrultusunda ve yönündeki birim vektör ise vektör modülüne bölünerek elde edilir.

$$\vec{U}_{(\vec{V})} = \frac{\vec{V}}{|\vec{V}|} \quad , \quad \vec{U}_{(\vec{V})} = \frac{V_x}{|\vec{V}|} \vec{i} + \frac{V_y}{|\vec{V}|} \vec{j}$$

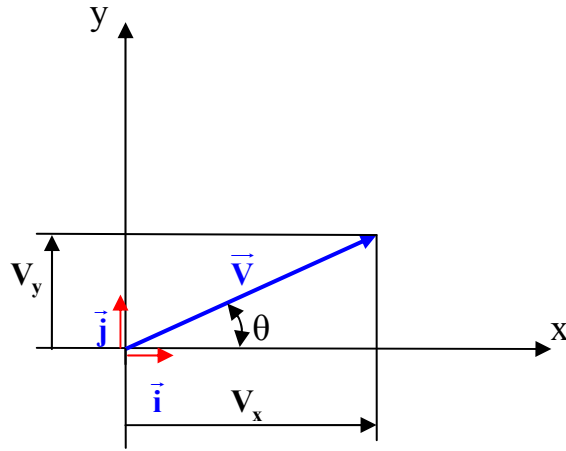
Aşağıdaki gibi birim vektörün katsayılarının vektörün eksenlerle yaptığı açılarının kosinüslerine eşit olduğu gösterilebilir.

$$\cos \alpha = \frac{V_x}{|\vec{V}|} = U_x \quad , \quad \cos \beta = \frac{V_y}{|\vec{V}|} = U_y$$

### Problem 3.1.1

Bir düzlemdeki yatay doğrultu ile  $30^\circ$  derecelik açı yapan ve modülü 80 birim olan vektörü ve birim vektörünü kartezyen koordinat sisteminde yazınız.

Çözüm:



$$\vec{V} = V_x \vec{i} + V_y \vec{j}$$

$$|\vec{V}| = 80 \text{ birim} \quad , \quad \theta = 30^\circ$$

$$V_x = |\vec{V}| \cos \theta \quad , \quad V_y = |\vec{V}| \sin \theta$$

$$V_x = 80 \cos 30^\circ \quad , \quad V_x = 69,28 \text{ birim}$$

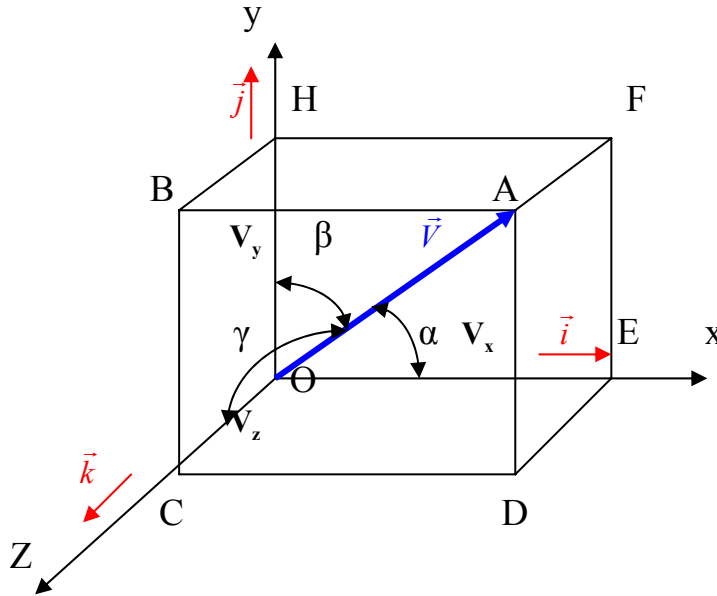
$$V_y = 80 \sin 30^\circ \quad , \quad V_y = 40 \text{ birim}$$

$$\boxed{\vec{V} = 69,28 \vec{i} + 40 \vec{j}}$$

$$\vec{U}_{(\vec{V})} = \frac{V_x}{|\vec{V}|} \vec{i} + \frac{V_y}{|\vec{V}|} \vec{j} \quad , \quad \vec{U}_{(\vec{V})} = \frac{69,28}{80} \vec{i} + \frac{40}{80} \vec{j}$$

$$\boxed{\vec{U}_{(\vec{V})} = 0,866 \vec{i} + 0,5 \vec{j}}$$

### 3.2 Üç boyutlu vektörlerin kartezyen koordinatlarda gösterilişi



Üç boyutlu uzayda bir vektör kartezyen koordinat sisteminde

$$\vec{V} = V_x \vec{i} + V_y \vec{j} + V_z \vec{k}$$

şeklinde x ve y eksenine doğrultusundaki vektörlerin toplamı cinsinden yazılabilir. Bu vektörün modülü ise aşağıdaki gibi pisagor teoremi yardımı ile bulunur.

$$|\vec{V}| = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2}$$

Bir vektörün doğrultusunda ve yönündeki birim vektör ise vektör modülüne bölünerek elde edilir.

$$\vec{U}_{(\vec{V})} = \frac{\vec{V}}{|\vec{V}|}, \quad \vec{U}_{(\vec{V})} = \frac{V_x}{|\vec{V}|} \vec{i} + \frac{V_y}{|\vec{V}|} \vec{j} + \frac{V_z}{|\vec{V}|} \vec{k}$$

Aşağıdaki gibi birim vektörün katsayılarının vektörün eksenlerle yaptığı açılarının kosinüslerine eşit olduğu gösterilebilir.

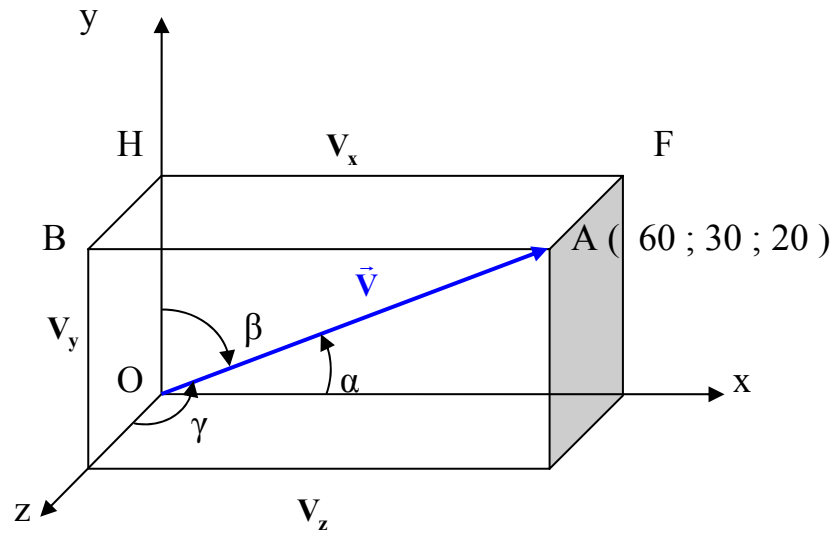
$$\cos \alpha = \frac{V_x}{|\vec{V}|} = U_x, \quad \cos \beta = \frac{V_y}{|\vec{V}|} = U_y, \quad \cos \gamma = \frac{V_z}{|\vec{V}|} = U_z$$

#### Problem 3.2.1

Bir  $\vec{V}$  vektörünün başlangıcı kartezyen koordinat sisteminin başlangıç noktasına yerleştirildiğinde uç noktası A (60,30,20) koordinatlarında ise bu vektörün

- bu koordinat sistemindeki yazılışını
- modülünü
- birim vektörünü
- koordinat eksenleri ile yaptığı açıları bulunuz.

Çözüm:



a)

$$\vec{V} = V_x \vec{i} + V_y \vec{j} + V_z \vec{k}$$

$$\boxed{\vec{V} = 60\vec{i} + 30\vec{j} + 20\vec{k}}$$

b)

$$|\vec{V}| = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2} \quad , \quad |\vec{V}| = \sqrt{(60)^2 + (30)^2 + (20)^2}$$

$$\boxed{|\vec{V}| = 70}$$

c)

$$\vec{U}_{(\vec{v})} = \frac{\vec{V}}{|\vec{V}|} \quad , \quad \vec{U}_{(\vec{v})} = \frac{60\vec{i} + 30\vec{j} + 20\vec{k}}{70}$$

$$\boxed{\vec{U}_{(\vec{v})} = \frac{6}{7}\vec{i} + \frac{3}{7}\vec{j} + \frac{2}{7}\vec{k}}$$

$$d) \quad \cos \alpha = \frac{V_x}{|\vec{V}|} = U_x \quad , \quad \cos \beta = \frac{V_y}{|\vec{V}|} = U_y \quad , \quad \cos \gamma = \frac{V_z}{|\vec{V}|} = U_z$$

$$\cos \alpha = \frac{6}{7} \quad , \quad \cos \beta = \frac{3}{7} \quad , \quad \cos \gamma = \frac{2}{7}$$

$$\boxed{\alpha = 31^0} \quad , \quad \boxed{\beta = 64,62^0} \quad , \quad \boxed{\gamma = 73,4^0}$$

### 3.3 Kartezyen koordinatlarda vektörel işlemler

#### 3.3.1 Vektörün bir sayı ile çarpımı

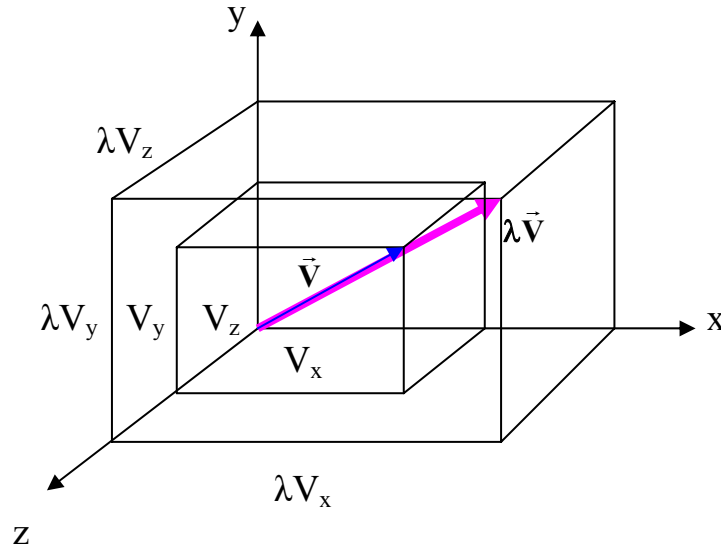
Kartezyen koordinat sisteminde bir vektör

$$\vec{V} = V_x \vec{i} + V_y \vec{j} + V_z \vec{k}$$

şeklinde yazılırsa bu vektörün bir  $\lambda$  sayısı ile çarpımı aşağıdaki şekilden görüldüğü gibi dikdörtgenler prizmasının bütün ölçüleri aynı  $\lambda$  sayısı ile çarpılarak elde edildiğinden

$$\lambda \vec{V} = \lambda V_x \vec{i} + \lambda V_y \vec{j} + \lambda V_z \vec{k}$$

şeklinde yazılabilir.



Bir vektörün bir sayı ile çarpımı vektörün doğrultusunu değiştirmez. Eğer çarpım katsayısı pozitif ise yönü de değişmez.

#### Problem 3.3.1.1

Problem 3.2.1 de hesaplanan  $\vec{V} = 60\vec{i} + 30\vec{j} + 20\vec{k}$  vektörünün  $\lambda=2,5$  ile çarpımından elde edilen  $\lambda \vec{V}$  vektörünün

- ifadesini
- modülünü
- birim vektörünü hesaplayınız.

Çözüm:

$$a) \lambda \vec{V} = \lambda V_x \vec{i} + \lambda V_y \vec{j} + \lambda V_z \vec{k}$$

$$\lambda \vec{V} = 2,5 * 60\vec{i} + 2,5 * 30\vec{j} + 2,5 * 20\vec{k}$$

$$\lambda \vec{V} = 150\vec{i} + 75\vec{j} + 50\vec{k}$$

$$b) |\lambda \vec{V}| = \sqrt{(150)^2 + (75)^2 + (50)^2}$$

$$\boxed{|\lambda \vec{V}| = 175} \quad , \quad \lambda * |\vec{V}| = 2,5 * 70 = 175 \quad \Rightarrow \quad |\lambda \vec{V}| = \lambda * |\vec{V}|$$

c)

$$\vec{U}_{(\lambda \vec{V})} = \frac{\lambda V_x}{|\lambda \vec{V}|} \vec{i} + \frac{\lambda V_y}{|\lambda \vec{V}|} \vec{j} + \frac{\lambda V_z}{|\lambda \vec{V}|} \vec{k}$$

$$\vec{U}_{(\lambda \vec{V})} = \frac{2,5 * 60}{2,5 * 70} \vec{i} + \frac{2,5 * 30}{2,5 * 70} \vec{j} + \frac{2,5 * 20}{2,5 * 70} \vec{k}$$

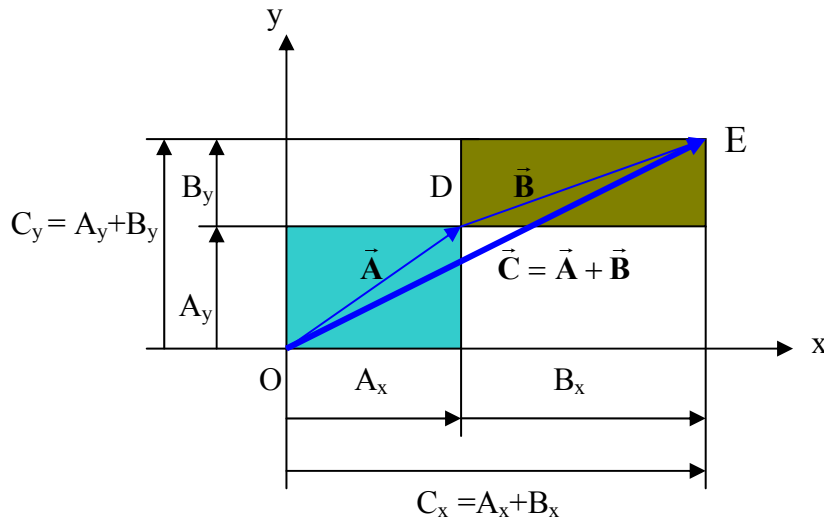
$$\boxed{\vec{U}_{(\lambda \vec{V})} = \frac{6}{7} \vec{i} + \frac{3}{7} \vec{j} + \frac{2}{7} \vec{k}} \quad \Rightarrow \quad \vec{U}_{(\lambda \vec{V})} = \vec{U}_{(\vec{V})}$$

### 3.3.2 Vektörlerin toplamı

Şekilde gösterildiği gibi İki boyutlu uzayda  $\vec{A}$  ve  $\vec{B}$  vektörünün toplamı olan  $\vec{C}$  vektörünün koordinat eksenleri doğrultusundaki bileşenleri  $\vec{A}$  ve  $\vec{B}$  vektörlerinin aynı doğrultudaki bileşenleri toplanarak bulunur.

$$\vec{A} = A_x \vec{i} + A_y \vec{j} \quad , \quad \vec{B} = B_x \vec{i} + B_y \vec{j}$$

$$\vec{A} + \vec{B} = (A_x + B_x) \vec{i} + (A_y + B_y) \vec{j}$$



Şekildeki ODE üçgeninden OE kenarının uzunluğu OD ve DE kenarlarının uzunlukları toplamından büyük olamayacağı bilindiğinden

$$|\vec{A} + \vec{B}| \leq |\vec{A}| + |\vec{B}| \quad \text{eşitsizliği yazılabilir.}$$

Aynı işlemler üç boyutlu uzaya aşağıdaki gibi uygulanabilir.

$$\vec{A} = A_x \vec{i} + A_y \vec{j} + A_z \vec{k} \quad , \quad \vec{B} = B_x \vec{i} + B_y \vec{j} + B_z \vec{k}$$

$$\vec{A} + \vec{B} = (A_x + B_x) \vec{i} + (A_y + B_y) \vec{j} + (A_z + B_z) \vec{k}$$

### Problem 3.3.2.1

$\vec{A} = 6\vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{k}$  vektörü ile  $\vec{B} = 12\vec{i} + 3\vec{j} + 4\vec{k}$  vektörünün

- modüllerini
- bu vektörlerin toplamını
- toplam vektörün modülünü hesaplayınız.

Çözüm:

a)

$$\begin{aligned} |\vec{A}| &= \sqrt{6^2 + 3^2 + 2^2} \quad , \quad \boxed{|\vec{A}| = 7} \\ |\vec{B}| &= \sqrt{(12)^2 + (3)^2 + (4)^2} \quad , \quad \boxed{|\vec{B}| = 13} \end{aligned}$$

b)  $\vec{A} + \vec{B} = (6+12)\vec{i} + (3+3)\vec{j} + (2+4)\vec{k}$

$$\boxed{\vec{A} + \vec{B} = 18\vec{i} + 6\vec{j} + 6\vec{k}}$$

c)  $|\vec{A} + \vec{B}| = \sqrt{(18)^2 + 6^2 + 6^2}$

$$\boxed{|\vec{A} + \vec{B}| = 19,9}$$

### 3.3.3 İki vektörün skaler çarpımı

Aşağıda gösterildiği gibi  $\vec{A}$  ve  $\vec{B}$  vektörünün skaler çarpımı bu vektörlerin aynı doğrultudaki bileşenleri çarpımı toplanarak bulunur ve sonuç skalerdir.

$$\vec{A} = A_x \vec{i} + A_y \vec{j} + A_z \vec{k} \quad , \quad \vec{B} = B_x \vec{i} + B_y \vec{j} + B_z \vec{k}$$

$$\vec{A} \bullet \vec{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$$

Skaler çarpımın tanımından skaler çarpımın mutlak değeri vektörlerin modülleri çarpımından büyük olamaz.

### Problem 3.3.3.1

$\vec{A} = 6\vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{k}$  vektörü ile  $\vec{B} = 12\vec{i} + 3\vec{j} + 4\vec{k}$  vektörünün

- skaler çarpımını
- modülleri çarpımını hesaplayınız.
- aralarındaki açıyı hesaplayınız.

Çözüm:

a)  $\vec{A} \bullet \vec{B} = 6 * 12 + 3 * 3 + 2 * 4$

$$\boxed{\vec{A} \bullet \vec{B} = 89}$$

b)  $|\vec{A}| = 7 \quad , \quad |\vec{B}| = 13$

$$|\vec{A}| |\vec{B}| = 13 * 7 \quad , \quad \boxed{|\vec{A}| |\vec{B}| = 91}$$

c) skaler çarpımın tanımından

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}| |\vec{B}| \cos \theta \Rightarrow \cos \theta = \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{|\vec{A}| |\vec{B}|}$$

$$\cos \theta = \frac{89}{91} \Rightarrow \theta = 12,04^\circ$$

### 3.3.4 İki vektörün vektörel çarpımı

Sağ kartezyen koordinat sisteminde koordinat eksenlerinin birim vektörlerinin vektörel çarpımı aşağıdaki gibi yazılır.

$$\vec{i} \wedge \vec{j} = \vec{k}, \quad \vec{j} \wedge \vec{i} = -\vec{k}, \quad \vec{j} \wedge \vec{k} = \vec{i}, \quad \vec{k} \wedge \vec{j} = -\vec{i}$$

$$\vec{k} \wedge \vec{i} = \vec{j}, \quad \vec{i} \wedge \vec{k} = -\vec{j}$$

Sağ eksen sisteminde ifade edilen  $\vec{A}$  ve  $\vec{B}$  vektörünün vektörel çarpımı olan  $\vec{C}$  vektörü aşağıda gösterilen determinantın açılımı yardımı ile hesaplanabilir.

$$\vec{A} = A_x \vec{i} + A_y \vec{j} + A_z \vec{k}, \quad \vec{B} = B_x \vec{i} + B_y \vec{j} + B_z \vec{k}$$

$$\vec{A} \wedge \vec{B} = (A_x \vec{i} + A_y \vec{j} + A_z \vec{k}) \wedge (B_x \vec{i} + B_y \vec{j} + B_z \vec{k})$$

$$\begin{aligned} \vec{A} \wedge \vec{B} = & [(A_x \vec{i}) \wedge (B_x \vec{i})] + [(A_x \vec{i}) \wedge (B_y \vec{j})] + [(A_x \vec{i}) \wedge (B_z \vec{k})] + \\ & + [(A_y \vec{j}) \wedge (B_x \vec{i})] + [(A_y \vec{j}) \wedge (B_y \vec{j})] + [(A_y \vec{j}) \wedge (B_z \vec{k})] + \\ & + [(A_z \vec{k}) \wedge (B_x \vec{i})] + [(A_z \vec{k}) \wedge (B_y \vec{j})] + [(A_z \vec{k}) \wedge (B_z \vec{k})] \end{aligned}$$

$$\vec{A} \wedge \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

#### Problem 3.3.4.1

$\vec{A} = 6\vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{k}$  vektörü ile  $\vec{B} = 12\vec{i} + 3\vec{j} + 4\vec{k}$  vektörünün

a)  $\vec{C} = \vec{A} \wedge \vec{B}$  vektörel çarpımını

b)  $\vec{C}$  vektörel çarpım vektörü ile  $\vec{A}$  vektörü arasındaki açıyı

c)  $\vec{C}$  vektörel çarpım vektörü ile  $\vec{B}$  vektörü arasındaki açıyı hesaplayınız.

Çözüm:

a)

$$\vec{C} = \vec{A} \wedge \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}, \quad \vec{C} = \vec{A} \wedge \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 6 & 3 & 2 \\ 12 & 3 & 4 \end{vmatrix}$$

$$\vec{C} = \vec{A} \wedge \vec{B} = (3 \cdot 4 - 2 \cdot 3)\vec{i} + (2 \cdot 12 - 6 \cdot 4)\vec{j} + (6 \cdot 3 - 3 \cdot 12)\vec{k}$$

$$\vec{C} = \vec{A} \wedge \vec{B} = 6\vec{i} - 18\vec{k}$$



b)

$$\vec{C} \cdot \vec{A} = (6\vec{i} - 18\vec{k}) \cdot (6\vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{k})$$

$$\vec{C} \cdot \vec{A} = 6 * 6 - 18 * 2 = 0 \quad \text{olduğundan}$$

$\vec{C}$  vektörü  $\vec{A}$  vektörüne diktir.

c)

$$\vec{C} \cdot \vec{B} = (6\vec{i} - 18\vec{k}) \cdot (12\vec{i} + 3\vec{j} + 4\vec{k})$$

$$\vec{C} \cdot \vec{B} = 6 * 12 - 18 * 4 = 0 \quad \text{olduğundan}$$

$\vec{C}$  vektörü  $\vec{B}$  vektörüne diktir.

### 3.3.5 Üç vektörün karışık çarpımı

İki vektörün vektörel çarpımından elde edilen vektörün bir diğer vektörle skaler çarpımına bu üç vektörün karışık çarpımı denir.

$$\vec{A} = A_x \vec{i} + A_y \vec{j} + A_z \vec{k}$$

$$\vec{B} = B_x \vec{i} + B_y \vec{j} + B_z \vec{k}$$

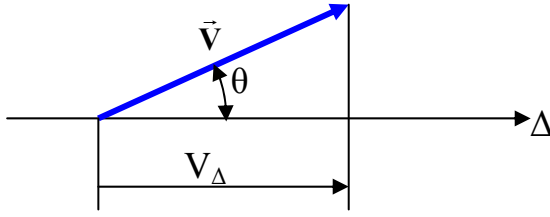
$$\vec{C} = C_x \vec{i} + C_y \vec{j} + C_z \vec{k}$$

$$\vec{A} \cdot (\vec{B} \wedge \vec{C}) = \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix}$$

Lineer cebirden bilindiği gibi bir Determinantta iki satırın yeri değişirse determinantın işareti değişir , satırların yeri iki veya ikinin katları sayısında değişirse determinantın değeri değişmez . Bu bilinen özellikten faydalanarak aşağıdaki eşitlikler yazılabilir.

$$\vec{A} \cdot (\vec{B} \wedge \vec{C}) = \vec{B} \cdot (\vec{C} \wedge \vec{A}) = \vec{C} \cdot (\vec{A} \wedge \vec{B})$$

### 3.3.6 Bir vektörün bir eksen üzerindeki izdüşümü



$$V_{\Delta} = \vec{V} \cdot \vec{U}_{\Delta}$$

$$\vec{V} = V_x \vec{i} + V_y \vec{j} + V_z \vec{k}$$

$$\vec{U}_{\Delta} = U_x \vec{i} + U_y \vec{j} + U_z \vec{k}$$

$$V_{\Delta} = V_x \cdot U_x + V_y \cdot U_y + V_z \cdot U_z$$

#### Problem 3.3.6.1

$\vec{V} = 12\vec{i} + 3\vec{j} + 4\vec{k}$  vektörünün kartezyen koordinat eksenleri ile pozitif bölgede eşit açılar yapan ve pozitif bölgeye doğru yönelmiş  $\Delta$  eksenindeki izdüşümünü ve bu eksenle yaptığı açığı hesaplayınız.

Çözüm :

$$V_{\Delta} = \vec{V} \cdot \vec{U}_{\Delta}$$

İzdüşüm alınacak eksenin birim vektörü bu eksen yönündeki bir vektörü modülüne bölerek elde edilir.

$$\vec{U}_{\Delta} = \frac{\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2}} \quad , \quad \vec{U}_{\Delta} = \frac{1}{\sqrt{3}} \vec{i} + \frac{1}{\sqrt{3}} \vec{j} + \frac{1}{\sqrt{3}} \vec{k}$$

$$V_{\Delta} = (12\vec{i} + 3\vec{j} + 4\vec{k}) \cdot \left( \frac{1}{\sqrt{3}} \vec{i} + \frac{1}{\sqrt{3}} \vec{j} + \frac{1}{\sqrt{3}} \vec{k} \right) \quad , \quad V_{\Delta} = 12 * \frac{1}{\sqrt{3}} + 3 * \frac{1}{\sqrt{3}} + 4 * \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\boxed{V_{\Delta} = \frac{19}{\sqrt{3}}}$$

$$V_{\Delta} = \vec{V} \cdot \vec{U}_{\Delta} = |\vec{V}| \cos \theta \Rightarrow \cos \theta = \frac{V_{\Delta}}{|\vec{V}|}$$

$$\cos \theta = \frac{19}{\sqrt{3} * 13} \Rightarrow \cos \theta = 0,844 \Rightarrow \boxed{\theta = 32,45^{\circ}}$$

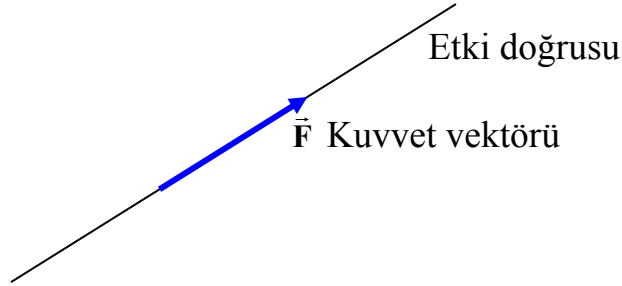
## BÖLÜM 4

### KUVVET SİSTEMLERİ

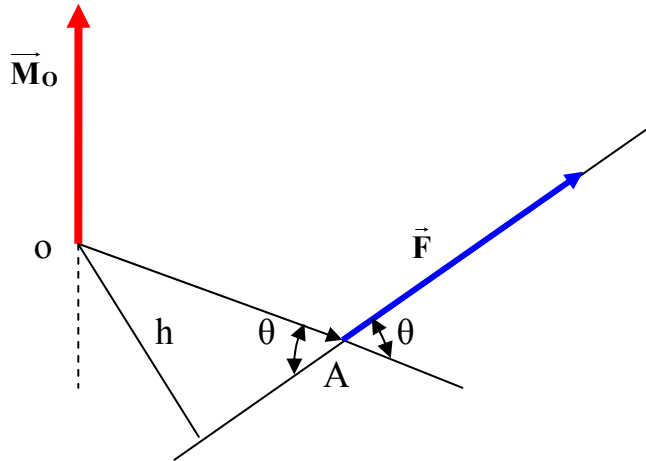
#### 4.1 Kuvvetin tanımı ve vektörle gösterilişi

Bir cismin şeklini veya hızını değiştiren ve başka cisimler tarafından uygulanan fiziksel etkiye kuvvet denir.

Kuvvet doğrultu yön ve bir şiddet içerdiğinden vektörle gösterilebilir. Yalnız aynı vektörle gösterilmesine rağmen kuvvet cismin farklı yerlerine uygulandığında fiziksel etkisi farklı olur. Bundan dolayı kuvvet özellikle rijid cisim mekaniğinde vektör ve etki doğrusu ile birlikte düşünülmelidir.



## 4.2 Bir kuvvetin bir noktaya göre momenti



$$|\vec{M}_O| = |\vec{F}| \cdot h$$

$$\vec{M}_O = \vec{OA} \wedge \vec{F}$$

$$|\vec{OA} \wedge \vec{F}| = |\vec{F}| |\vec{OA}| \sin \theta$$

$$|\vec{OA}| \sin \theta = h$$

Buradan  $|\vec{M}_O| = |\vec{F}| \cdot h$  olduğu görülür.

$$\vec{M}_O = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

$$\vec{M}_O = (A_y \cdot F_z - A_z \cdot F_y) \vec{i} + (A_z \cdot F_x - A_x \cdot F_z) \vec{j} + (A_x \cdot F_y - A_y \cdot F_x) \vec{k}$$

### Problem 4.2.1

A(3,8,1) ve B(7,-4,4) noktalarından geçen 130 N. şiddetinde olan ve A dan B ye doğru yönelmiş  $\vec{F}$  kuvvetinin O(0,0,0) noktasına göre momentini bulunuz.

$$\vec{M}_O = \vec{OA} \wedge \vec{F}$$

$$\vec{OA} = 3\vec{i} + 8\vec{j} + \vec{k} \quad , \quad \vec{F} = |\vec{F}| \vec{U}_{AB}$$

$$\vec{U}_{AB} = \frac{\vec{AB}}{|\vec{AB}|} \quad , \quad \vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA}$$

$$\overrightarrow{AB} = (7\vec{i} - 4\vec{j} + 4\vec{k}) - (3\vec{i} + 8\vec{j} + \vec{k}) \quad , \quad \overrightarrow{AB} = 4\vec{i} - 12\vec{j} + 3\vec{k}$$

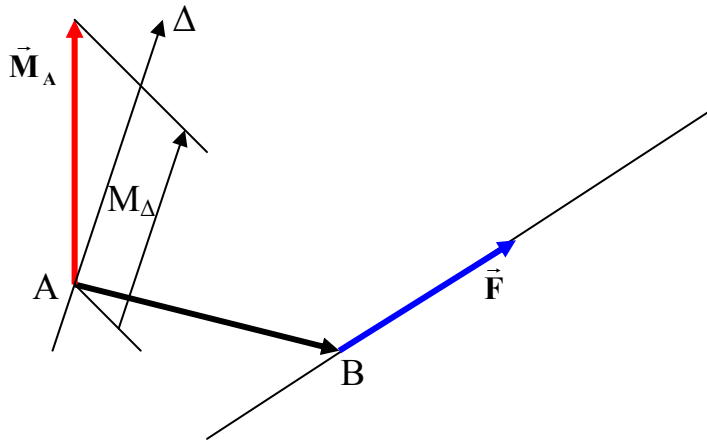
$$\vec{U}_{AB} = \frac{4\vec{i} - 12\vec{j} + 3\vec{k}}{\sqrt{4^2 + (-12)^2 + 3^2}} \quad , \quad \vec{U}_{AB} = \frac{4}{13}\vec{i} - \frac{12}{13}\vec{j} + \frac{3}{13}\vec{k}$$

$$\vec{F} = 40\vec{i} - 120\vec{j} + 30\vec{k}$$

$$\vec{M}_O = (3\vec{i} + 8\vec{j} + \vec{k}) \wedge (40\vec{i} - 120\vec{j} + 30\vec{k})$$

$$\vec{M}_O = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 8 & 1 \\ 40 & -120 & 30 \end{vmatrix} \quad , \quad \boxed{\vec{M}_O = 360\vec{i} - 50\vec{j} - 680\vec{k}}$$

### 4.3 Bir kuvvetin bir eksene göre momenti



$$M_{\Delta} = \vec{M}_A \cdot \vec{U}_{\Delta}$$

$$M_{\Delta} = \vec{U}_{\Delta} \cdot (\overrightarrow{AB} \wedge \vec{F})$$

$$M_{\Delta} = \begin{vmatrix} U_x & U_y & U_z \\ B_x - A_x & B_y - A_y & B_z - A_z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

### Problem 4.3.1

A(3,8,1) ve B(7,-4,4) noktalarından geçen ve 130 N. Şiddetinde olan  $\vec{F}$  kuvvetinin O(0,0,0) ve C(2,6,3) noktalarından geçen  $\Delta$  eksenine göre momentini bulunuz.(koordinatlar metre cinsindendir.)

$$\vec{M}_\Delta = \vec{M}_O \cdot \vec{U}_\Delta$$

Problem 4.2.1 den  $\vec{M}_O = 360\vec{i} - 50\vec{j} - 680\vec{k}$  dır.

$$\vec{U}_\Delta = \frac{\vec{OC}}{|\vec{OC}|}, \quad \vec{U}_\Delta = \frac{2\vec{i} + 6\vec{j} + 3\vec{k}}{\sqrt{2^2 + 6^2 + 3^2}}$$

$$\vec{U}_\Delta = \frac{2}{7}\vec{i} + \frac{6}{7}\vec{j} + \frac{3}{7}\vec{k}$$

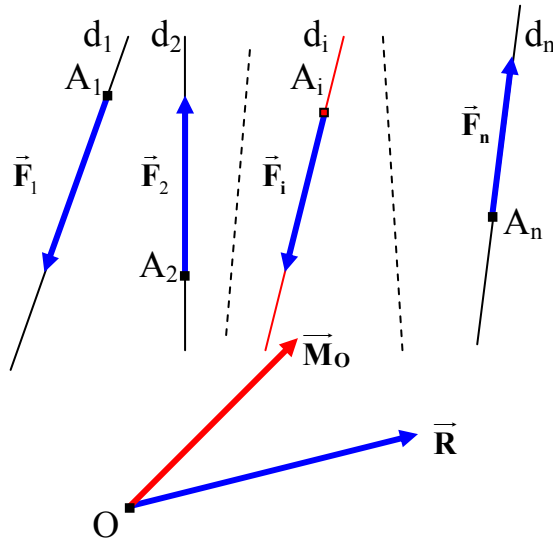
$$\vec{M}_\Delta = (360\vec{i} - 50\vec{j} - 680\vec{k}) \cdot \left(\frac{2}{7}\vec{i} + \frac{6}{7}\vec{j} + \frac{3}{7}\vec{k}\right)$$

$$\vec{M}_\Delta = 360 * \frac{2}{7} - 50 * \frac{6}{7} - 680 * \frac{3}{7}, \quad \vec{M}_\Delta = \frac{-1620}{7}$$

$$\vec{M}_\Delta = -231,43 \text{ Nm.}$$

### 4.4 Bir kuvvet sisteminin bir noktaya göre momenti ve indirgeme elemanları ( Bir kuvvet sisteminin statik eşdeğeri)

Bir veya birden fazla sayıda kuvvetten oluşan sisteme kuvvet sistemi denir.



Bu n sayıda kuvvetten oluşan kuvvet sisteminin bir uzayın o noktasına göre momentine bileşke moment denir ve bu bileşke moment her bir kuvvetin bu noktaya göre moment vektörlerinin toplamına eşittir.

$$\vec{M}_O = \sum_{i=1}^n \vec{OA}_i \wedge \vec{F}_i$$

Bu n sayıdaki kuvvetin vektörel toplamına geometrik toplam denir.

$$\vec{R} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i$$

Elde edilen bileşke moment ve geometrik toplamın her ikisine birden bu vektör sisteminin indirgeme elemanları denir.

Bir kuvvet sisteminde bir noktadaki indirgeme elemanlarından faydalanarak başka noktalardaki indirgeme elemanlarının bulunuşu:

$$\vec{M}_Q = \sum_{i=1}^n \vec{QA}_i \wedge \vec{F}_i$$

$$\vec{QA}_i = \vec{QO} + \vec{OA}_i$$

$$\vec{M}_Q = \sum_{i=1}^n (\vec{QO} + \vec{OA}_i) \wedge \vec{F}_i$$

$$\vec{M}_Q = \vec{M}_O + \vec{QO} \wedge \vec{R}$$

#### Problem 4.4.1

Bir kuvvet sistemi  $A_1(5,-3,8)$  noktasından geçen  $\vec{F}_1 = 10\vec{i} + 8\vec{j} - 14\vec{k}$ ,  $A_2(10,8,9)$  noktasından geçen  $\vec{F}_2 = 15\vec{i} + 22\vec{j} + 16\vec{k}$ ,  $A_3(2,10,7)$  noktasından geçen  $\vec{F}_3 = -6\vec{i} + 18\vec{j} - 9\vec{k}$  ve  $A_4(0,12,-4)$  noktasından geçen  $\vec{F}_4 = 3\vec{i} - 20\vec{j} - 8\vec{k}$  kuvvetlerinden oluşmuştur. Bu kuvvet sisteminin

- $O(0,0,0)$  noktasındaki indirgeme elemanlarını
- $Q(10,12,-6)$  noktasındaki indirgeme elemanlarını bulunuz.

Çözüm:

a)

$$\vec{R} = \sum_{i=1}^4 \vec{F}_i, \quad \vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_4$$

$$\vec{R} = (10\vec{i} + 8\vec{j} - 14\vec{k}) + (15\vec{i} + 22\vec{j} + 16\vec{k}) + (-6\vec{i} + 18\vec{j} - 9\vec{k}) + (3\vec{i} - 20\vec{j} - 8\vec{k})$$

$$\vec{R} = (10 + 15 - 6 + 3)\vec{i} + (8 + 22 + 18 - 20)\vec{j} + (-14 + 16 - 9 - 8)\vec{k}$$

$$\boxed{\vec{R} = 22\vec{i} + 28\vec{j} - 15\vec{k}}$$

$$\vec{M}_O = \sum_{i=1}^4 \vec{OA}_i \wedge \vec{F}_i, \quad \vec{M}_O = \vec{OA}_1 \wedge \vec{F}_1 + \vec{OA}_2 \wedge \vec{F}_2 + \vec{OA}_3 \wedge \vec{F}_3 + \vec{OA}_4 \wedge \vec{F}_4$$

$$\vec{OA}_1 \wedge \vec{F}_1 = (5\vec{i} - 3\vec{j} + 8\vec{k}) \wedge (10\vec{i} + 8\vec{j} - 14\vec{k})$$

$$\vec{OA}_1 \wedge \vec{F}_1 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 5 & -3 & 8 \\ 10 & 8 & -14 \end{vmatrix} = -22\vec{i} + 150\vec{j} + 70\vec{k}$$

$$\vec{OA}_2 \wedge \vec{F}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 10 & 8 & 9 \\ 15 & 22 & 16 \end{vmatrix} = -70\vec{i} - 25\vec{j} + 100\vec{k}$$

$$\vec{OA}_3 \wedge \vec{F}_3 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 10 & 7 \\ -6 & 18 & -9 \end{vmatrix} = -216\vec{i} - 24\vec{j} + 96\vec{k}$$

$$\vec{OA}_4 \wedge \vec{F}_4 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 12 & -4 \\ 3 & -20 & -8 \end{vmatrix} = -16\vec{i} - 12\vec{j} - 36\vec{k}$$

$$\vec{M}_O = (-22\vec{i} + 150\vec{j} + 70\vec{k}) + (-70\vec{i} - 25\vec{j} + 100\vec{k}) + (-216\vec{i} - 24\vec{j} + 96\vec{k}) + (-16\vec{i} - 12\vec{j} - 36\vec{k})$$

$$\vec{M}_O = (-22 - 70 - 216 - 16)\vec{i} + (150 - 25 - 24 - 12)\vec{j} + (70 + 100 + 96 - 36)\vec{k}$$

$$\boxed{\vec{M}_O = -324\vec{i} + 89\vec{j} + 230\vec{k}}$$

b)

$$\vec{R} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i, \quad \boxed{\vec{R} = 22\vec{i} + 28\vec{j} - 15\vec{k}}$$

$$\vec{M}_Q = \vec{M}_O + \vec{QO} \wedge \vec{R}$$

$$\vec{QO} = -10\vec{i} - 12\vec{j} + 6\vec{k}$$

$$\vec{QO} \wedge \vec{R} = (-10\vec{i} - 12\vec{j} + 6\vec{k}) \wedge (22\vec{i} + 28\vec{j} - 15\vec{k})$$

$$\vec{QO} \wedge \vec{R} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -10 & -12 & 6 \\ 22 & 28 & -15 \end{vmatrix} = 12\vec{i} - 18\vec{j} - 16\vec{k}$$

$$\vec{M}_Q = (-324\vec{i} + 89\vec{j} + 230\vec{k}) + (12\vec{i} - 18\vec{j} - 16\vec{k})$$

$$\boxed{\vec{M}_Q = -312\vec{i} + 71\vec{j} + 214\vec{k}}$$

#### 4.5 Bir kuvvet sisteminin değişmezleri

a) Bir kuvvet sisteminde kuvvetlerin geometrik toplamı olan  $\vec{R}$  noktadan noktaya değişmez.

b) Bir kuvvet sisteminde bileşke momentin geometrik toplam üzerindeki izdüşümü noktadan noktaya değişmez.

İspat:

$$\vec{M}_Q \cdot \vec{U}_R = (\vec{M}_O + \vec{QO} \wedge \vec{R}) \cdot \vec{U}_R$$

$$(\vec{QO} \wedge \vec{R}) \cdot \vec{U}_R = 0 \quad (\vec{R} \text{ ve } \vec{U}_R \text{ aynı doğrultuda olduğundan})$$

$$\vec{M}_Q \cdot \vec{U}_R = \vec{M}_O \cdot \vec{U}_R$$

elde edilir.

Yukarıdaki denklemin her iki tarafı  $|\vec{R}|$  ile çarpılırsa

$$\vec{M}_Q \cdot \vec{R} = \vec{M}_O \cdot \vec{R}$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitlikten Bileşke moment ile geometrik toplamın skaler çarpımının noktadan noktaya değişmediği anlaşılır.



### Problem 4.5.1

Problem 4.4.1 deki kuvvet sistemi için  $\vec{M}_Q \bullet \vec{R} = \vec{M}_O \bullet \vec{R}$  eşitliğini gerçekleyiniz.

Çözüm:

$$\vec{R} = 22\vec{i} + 28\vec{j} - 15\vec{k}$$

$$\vec{M}_O = -324\vec{i} + 89\vec{j} + 230\vec{k}$$

$$\vec{M}_Q = -312\vec{i} + 71\vec{j} + 214\vec{k}$$

$$\vec{M}_Q \bullet \vec{R} = (-312\vec{i} + 71\vec{j} + 214\vec{k}) \bullet (22\vec{i} + 28\vec{j} - 15\vec{k})$$

$$\vec{M}_Q \bullet \vec{R} = -312 * 22 + 71 * 28 + 214 * (-15)$$

$$\boxed{\vec{M}_Q \bullet \vec{R} = -8086}$$

$$\vec{M}_O \bullet \vec{R} = (-324\vec{i} + 89\vec{j} + 230\vec{k}) \bullet (22\vec{i} + 28\vec{j} - 15\vec{k})$$

$$\vec{M}_O \bullet \vec{R} = -324 * 22 + 89 * 28 + 230 * (-15)$$

$$\boxed{\vec{M}_O \bullet \vec{R} = -8086} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{M}_Q \bullet \vec{R} = \vec{M}_O \bullet \vec{R} = -8086}$$

#### 4.6 Dejenere kuvvet sistemleri

Bileşke momentle geometrik toplamın birbiri ile skaler çarpımının sıfır olduğu kuvvet sistemlerine dejenere kuvvet sistemleri denir.

$$\vec{M}_O \bullet \vec{R} = 0$$

Bu eşitlik ile aşağıdaki durumlarda karşılaşılır.

$$4.6.1) \vec{M}_O = \vec{0}, \vec{R} = \vec{0} \text{ (sıfıra eşdeğer kuvvet sistemi)}$$

$$4.6.2) \vec{M}_O \neq \vec{0}, \vec{R} = \vec{0} \text{ (kuvvet çiftine eşdeğer kuvvet sistemi)}$$

$$4.6.3) \vec{M}_O = \vec{0}, \vec{R} \neq \vec{0} \text{ (bileşkeye eşdeğer kuvvet sistemi)}$$

$$4.6.4) \vec{M}_O \neq \vec{0}, \vec{R} \neq \vec{0} \text{ (bileşkesi olan vektör sistemi)}$$

Düzlemsel, bir noktada kesişen ve paralel kuvvet sistemleri dejenere kuvvet sistemleridir.

##### 4.6.1 Sıfıra eşdeğer kuvvet sistemi

$$\vec{M}_O = \vec{0}, \vec{R} = \vec{0}$$

Sıfıra eşdeğer kuvvet sisteminde

- 1) Kuvvet sistemi tek bir kuvvetten oluşmuşsa bu kuvvetin şiddeti sıfır olmalı.
- 2) Kuvvet sistemi iki kuvvetten oluşmuş ise bu kuvvetler aynı doğrultuda ters yönde ve eşit şiddette olmalıdır.
- 3) Kuvvet sistemi üç kuvvetten oluşmuş ve birbirine paralel değil ise bu kuvvet sisteminin geometrik toplamının sıfır olabilmesi için kuvvetlerin oluşturduğu poligon kapalı bir üçgen olmalıdır. Bu kuvvet sisteminde bileşke momentin sıfır olabilmesi için bu üç kuvvetin doğrultusu aynı yerde kesişmelidir.

##### 4.6.2 Kuvvet çiftine eşdeğer kuvvet sistemi

$$\vec{M}_O \neq \vec{0}, \vec{R} = \vec{0}$$

Bir kuvvet sisteminde Geometrik toplam sıfır Bileşke moment sıfırdan farklı ise bu kuvvet sistemi tek bir momente eşdeğer olur. Bu moment vektörüne dik düzlemlerde alınan kuvvet çiftleri ile de bu kuvvet sistemi temsil edilebilir. Bir kuvvet sistemi tek bir momente eşdeğer ise bu noktadan noktaya değişmez.

$$\vec{M}_Q = \vec{M}_O + \vec{QO} \wedge \vec{R}$$

ve  $\vec{R} = \vec{0}$  olduğundan

$$\boxed{\vec{M}_Q = \vec{M}_O}$$

olur.

##### 4.6.3 Bileşkeye eşdeğer kuvvet sistemi

$$\vec{M}_O = \vec{0}, \vec{R} \neq \vec{0}$$

Eğer bir noktada bileşke moment sıfır ve geometrik toplam sıfırdan farklı ise bu geometrik toplam sanki sistem tek bir kuvvetten oluşmuş gibi bu sistemi temsil edebileceğinden bu geometrik toplama bu kuvvet sisteminin bileşkesi denir.

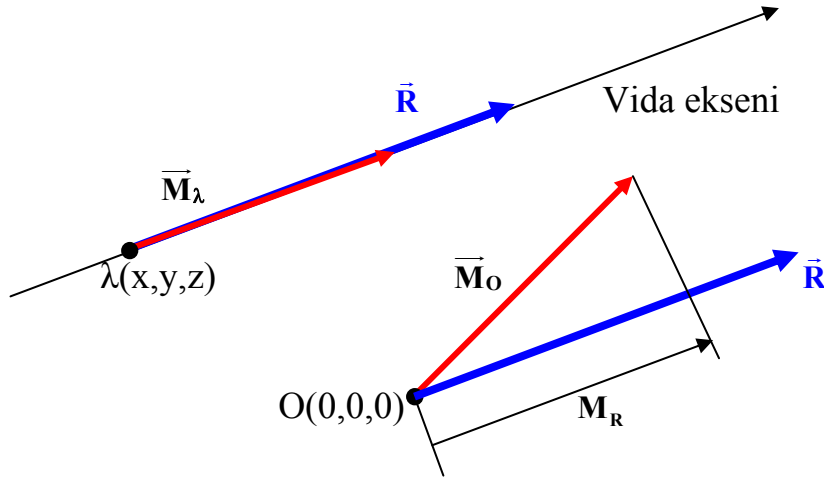
#### 4.6.4 Bileşkesi olan kuvvet sistemi

$$\vec{M}_O \neq \vec{0}, \quad \vec{R} \neq \vec{0}$$

Eğer dejenere vektör sisteminde Bileşke moment ve geometrik toplamın her ikisi de sıfırdan farklı ise bu iki vektör birbirine dik olmalıdır. Bu vektör sisteminin bileşkesi bulunabilir.

#### 4.7 Merkezi eksen

Bileşke momentle geometrik toplamın aynı doğrultuda olduğu eksene merkezi eksen veya vida ekseni denir.



Merkezi eksen üzerindeki bir nokta  $\lambda(x,y,z)$  ve  $O(0,0,0)$  noktasındaki bileşke moment  $\vec{M}_O = M_x \vec{i} + M_y \vec{j} + M_z \vec{k}$  ise

Bileşke momentin geometrik toplam üzerindeki izdüşümü değişmeyeceğinden

$$\vec{M}_\lambda = \vec{M}_R \cdot \vec{U}_R$$

yazılabilir.  $M_R = \vec{M}_O \cdot \vec{U}_R$

$$M_R = M_x \cdot U_{Rx} + M_y \cdot U_{Ry} + M_z \cdot U_{Rz}$$

$$\vec{M}_\lambda = M_R \cdot U_{Rx} \vec{i} + M_R \cdot U_{Ry} \vec{j} + M_R \cdot U_{Rz} \vec{k}$$

Bundan başka geçiş teoremi uygulanarak  $\vec{M}_\lambda$  aşağıdaki gibi de yazılabilir.

$$\vec{M}_\lambda = \vec{M}_O + \lambda \vec{O} \wedge \vec{R}$$

$$\vec{M}_\lambda - \vec{M}_O = \vec{R} \wedge \vec{O}\lambda$$

$$\vec{R} \wedge \vec{O}\lambda = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ R_x & R_y & R_z \\ x & y & z \end{vmatrix}$$

$$\vec{R} \wedge \vec{O}\lambda = (R_y \cdot z - R_z \cdot y) \vec{i} + (R_z \cdot x - R_x \cdot z) \vec{j} + (R_x \cdot y - R_y \cdot x) \vec{k}$$

$$R_y \cdot z - R_z \cdot y = M_R \cdot U_{Rx} - M_x$$

$$R_z \cdot x - R_x \cdot z = M_R \cdot U_{Ry} - M_y$$

$$R_x \cdot y - R_y \cdot x = M_R \cdot U_{Rz} - M_z$$

### Problem 4.7.1

Problem 4.4.1 verilen kuvvet sisteminin merkezi ekseninin denklemini bulunuz. merkezi eksenin yoz düzlemini kestiği noktanın koordinatlarını bulunuz.

$$\vec{R} = 22\vec{i} + 28\vec{j} - 15\vec{k} \quad , \quad \vec{M}_O = -324\vec{i} + 89\vec{j} + 230\vec{k}$$

$$\vec{M}_\lambda - \vec{M}_O = \vec{R} \wedge \vec{O\lambda}$$

$$\vec{M}_\lambda = \vec{M}_R \cdot \vec{U}_R$$

$$\vec{M}_R = \vec{M}_O \cdot \vec{U}_R$$

$$\vec{U}_R = \frac{\vec{R}}{|\vec{R}|}$$

$$\vec{U}_R = \frac{22\vec{i} + 28\vec{j} - 15\vec{k}}{\sqrt{(22)^2 + (28)^2 + (-15)^2}} \quad , \quad \vec{U}_R = \frac{22\vec{i} + 28\vec{j} - 15\vec{k}}{\sqrt{1493}}$$

$$\vec{U}_R = 0,5694\vec{i} + 0,7247\vec{j} - 0,3882\vec{k}$$

$$\vec{M}_R = (-324\vec{i} + 89\vec{j} + 230\vec{k}) \cdot (0,5694\vec{i} + 0,7247\vec{j} - 0,3882\vec{k})$$

$$\vec{M}_R = -209,273$$

$$\vec{M}_\lambda = -209,273 \cdot (0,5694\vec{i} + 0,7247\vec{j} - 0,3882\vec{k})$$

$$\vec{M}_\lambda = -119,16\vec{i} - 151,66\vec{j} + 81,24\vec{k}$$

$$\vec{M}_\lambda - \vec{M}_O = (-119,16\vec{i} - 151,66\vec{j} + 81,24\vec{k}) - (-324\vec{i} + 89\vec{j} + 230\vec{k})$$

$$\vec{M}_\lambda - \vec{M}_O = 204,84\vec{i} - 240,66\vec{j} - 148,76\vec{k}$$

$$\vec{R} \wedge \vec{O\lambda} = (22\vec{i} + 28\vec{j} - 15\vec{k}) \wedge (x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k})$$

$$\vec{R} \wedge \vec{O\lambda} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 22 & 28 & -15 \\ x & y & z \end{vmatrix}$$

$$\vec{R} \wedge \vec{O\lambda} = (28z + 15y)\vec{i} + (-15x - 22z)\vec{j} + (22y - 28x)\vec{k}$$

$$(28z + 15y)\vec{i} + (-15x - 22z)\vec{j} + (22y - 28x)\vec{k} = 204,84\vec{i} - 240,66\vec{j} - 148,76\vec{k}$$

$$28z + 15y = 204,84$$

$$-15x - 22z = -240,66$$

$$22y - 28x = -148,76$$

Bu Lineer denklem sisteminin katsayılar matrisinin determinantı

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 15 & 28 \\ -15 & 0 & -22 \\ -28 & 22 & 0 \end{vmatrix} = 15 * (-22) * (-28) + 28 * (-15) * 22 = 0$$

sıfır olduğundan bu denklem sistemi birbirinden bağımsız değildir. Bu denklem sisteminin katsayılar matrisinde sıfırdan farklı 2x2 lik determinant bulunduğundan bu denklemlerden ikisi birbirinden bağımsızdır.

Bu denklemlerin herhangi ikisi birbirinden bağımsız olduğundan bunlardan herhangi ikisi verilen kuvvet sisteminin merkezi ekseninin denklemi olarak alınabilir.

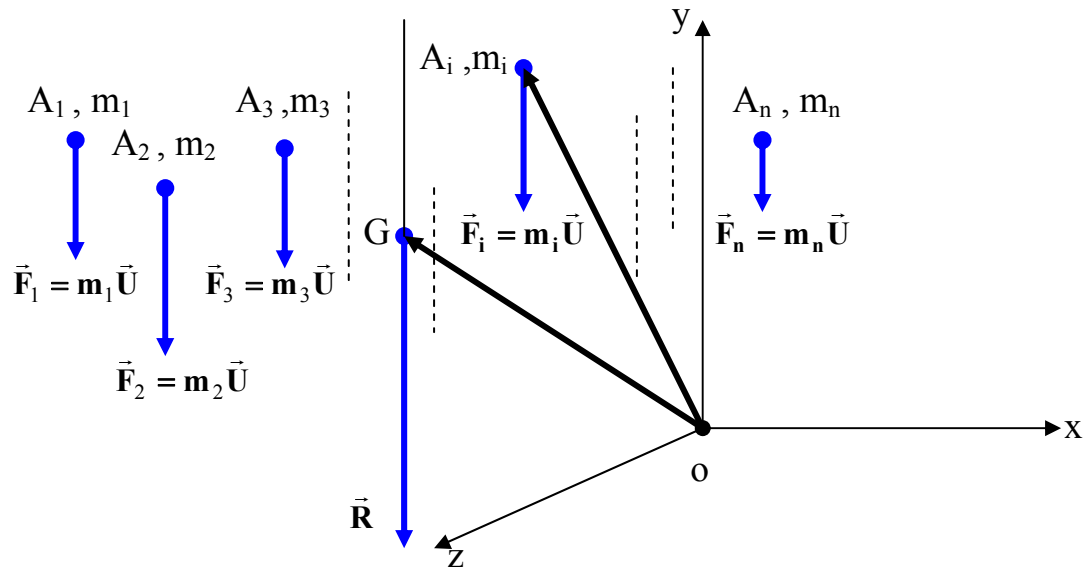
$$\begin{cases} 22y - 28x = -148,76 \\ -15x - 22z = -240,66 \end{cases}$$

Merkezi eksen üzerinde  $x = 0$  da

$$22y - 28x = -148,76 \Rightarrow y = -6,762$$

$$-15x - 22z = -240,66 \Rightarrow z = 10,94$$

#### 4.8 Paralel bağlı kuvvet sistemi ve merkezi



$$\vec{M}_O = \sum_{i=1}^n \vec{OA}_i \wedge \vec{F}_i$$

$$\vec{M}_O = \vec{OG} \wedge \sum_{i=1}^n \vec{F}_i$$

$$\vec{F}_i = m_i \cdot \vec{U}$$

$$\left( \sum_{i=1}^n m_i \cdot \vec{OG} - \sum_{i=1}^n m_i \cdot \vec{OA}_i \right) \wedge \vec{U} = \vec{0}$$

$$\overrightarrow{OG} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \cdot \overrightarrow{OA_i}}{\sum_{i=1}^n m_i}$$

$$\overrightarrow{OG} = \xi \vec{i} + \eta \vec{j} + \zeta \vec{k}$$

$$\xi = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \cdot x_i}{\sum_{i=1}^n m_i}, \quad \eta = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \cdot y_i}{\sum_{i=1}^n m_i}, \quad \zeta = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \cdot z_i}{\sum_{i=1}^n m_i}$$

### Problem 4.8.1

Paralel bağı bir kuvvet sistemi  $A_1(3,7,12)$  noktasındaki 8kg lık  $m_1$  kütlesi ,  $A_2(6,2,-8)$  noktasındaki 10kg lık  $m_2$  kütlesi ve  $A_3(10,-4,-5)$  noktasındaki 3 kg lık  $m_3$  kütlesinden oluşmuştur. Bu kuvvet sisteminin merkezinin koordinatlarını hesaplayınız.( koordinatlar cm. cinsinden alınmıştır.)

$$\xi = \frac{\sum_{i=1}^3 m_i \cdot x_i}{\sum_{i=1}^3 m_i}, \quad \xi = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3}{m_1 + m_2 + m_3}$$

$$\xi = \frac{8 \cdot 3 + 10 \cdot 6 + 3 \cdot 10}{8 + 10 + 3}, \quad \boxed{\xi = 5,43 \text{ cm.}}$$

$$\eta = \frac{\sum_{i=1}^3 m_i \cdot y_i}{\sum_{i=1}^3 m_i}, \quad \eta = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2 + m_3 y_3}{m_1 + m_2 + m_3}$$

$$\eta = \frac{8 \cdot 7 + 10 \cdot 2 + 3 \cdot (-4)}{8 + 10 + 3}, \quad \boxed{\eta = 3,05 \text{ cm.}}$$

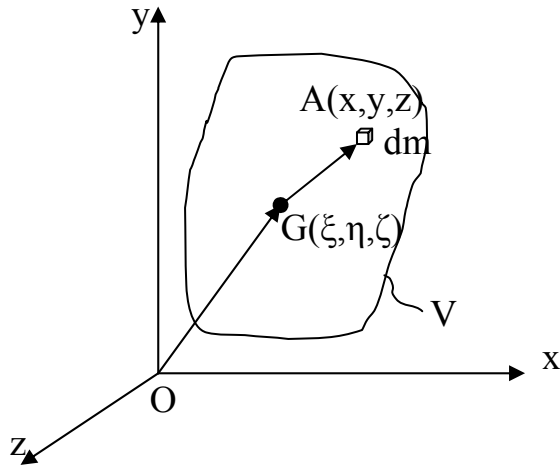
$$\zeta = \frac{\sum_{i=1}^3 m_i \cdot z_i}{\sum_{i=1}^3 m_i}, \quad \zeta = \frac{m_1 z_1 + m_2 z_2 + m_3 z_3}{m_1 + m_2 + m_3}$$

$$\zeta = \frac{8 \cdot 12 + 10 \cdot (-8) + 3 \cdot (-5)}{8 + 10 + 3}, \quad \boxed{\zeta = 0,048 \text{ cm.}}$$

## BÖLÜM 5

### KÜTLE MERKEZİ

#### 5.1 Bir sürekli cismin kütle merkezi



$$\overrightarrow{OG} = \frac{\int_V \overrightarrow{OA} \, dm}{\int_V dm}$$

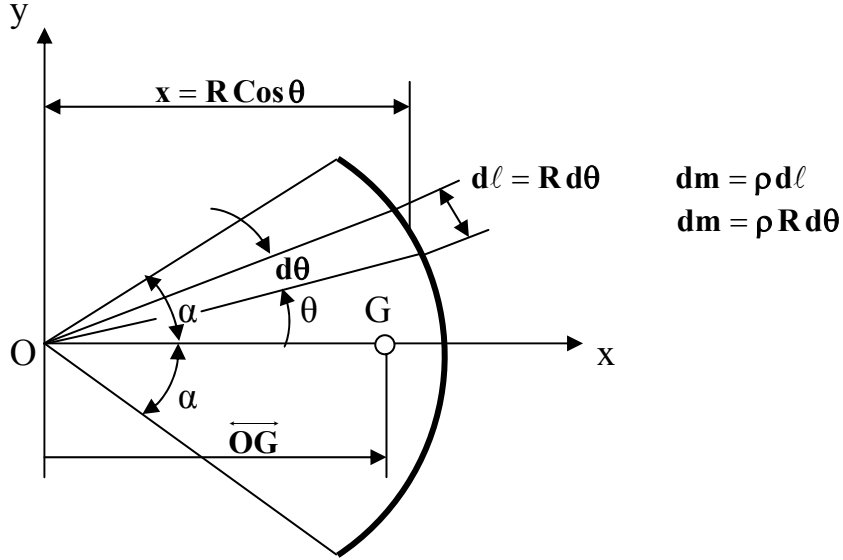
$$\overrightarrow{OG} = \xi \vec{i} + \eta \vec{j} + \zeta \vec{k}$$

$$\xi = \frac{\int_V x \, dm}{\int_V dm}, \quad \eta = \frac{\int_V y \, dm}{\int_V dm}, \quad \zeta = \frac{\int_V z \, dm}{\int_V dm}$$

### Problem 5.1.1

R yarıçaplı  $2\alpha$  tepe açılı çember parçası şeklindeki homojen cismin kütle merkezinin koordinatlarını bulunuz.

Çözüm:



x eksenine simetri eksenidir için  
 $\eta = 0$  dır.

$$\xi = \frac{\int_{\ell} x dm}{\int_{\ell} dm}, \quad \xi = \frac{\int_{-\alpha}^{\alpha} x dm}{\int_{-\alpha}^{\alpha} dm}$$

$$\xi = \frac{\int_{-\alpha}^{\alpha} \rho R \cos \theta R d\theta}{\int_{-\alpha}^{\alpha} \rho R d\theta}, \quad \xi = \frac{\rho R^2 [\sin \alpha - (-\sin \alpha)]}{\rho R [\alpha - (-\alpha)]}$$

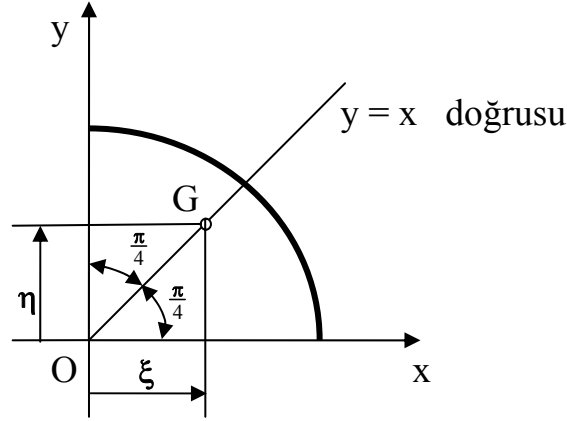
$$\xi = \frac{2\rho R^2 \sin \alpha}{2\rho R \alpha}, \quad \boxed{\xi = \overrightarrow{OG} = \frac{R \sin \alpha}{\alpha}}$$



### Problem 5.1.2

Şekilde gösterilen dörtte bir çember parçası şeklindeki homojen cismin kütle merkezinin koordinatlarını bulunuz.

Çözüm :



Şekildeki dörtte bir çember parçası için  $y = x$  doğrusu simetri eksenidir olduğundan

$$\xi = \eta = \frac{\sqrt{2}}{2} \overline{OG}$$

Problem 5.1.1 den  $\overline{OG} = \frac{R \sin \alpha}{\alpha}$   $\alpha = \frac{\pi}{4}$

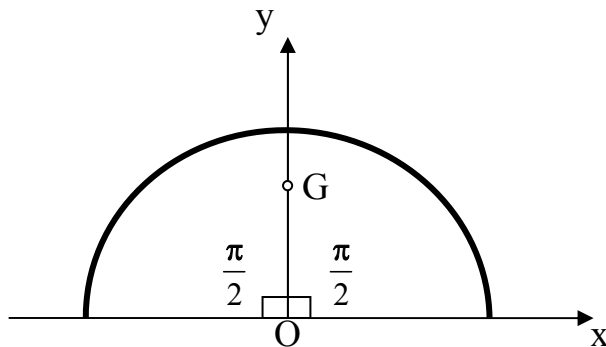
$$\overline{OG} = \frac{R \sin(\frac{\pi}{4})}{\pi/4}, \quad \overline{OG} = \frac{2\sqrt{2}R}{\pi}$$

$$\xi = \eta = \frac{\sqrt{2}}{2} \left( \frac{2\sqrt{2}R}{\pi} \right), \quad \xi = \eta = \frac{2R}{\pi}$$

### Problem 5.1.3

Şekilde gösterilen yarım çember şeklindeki homojen cismin kütle merkezinin koordinatlarını bulunuz.

Çözüm :



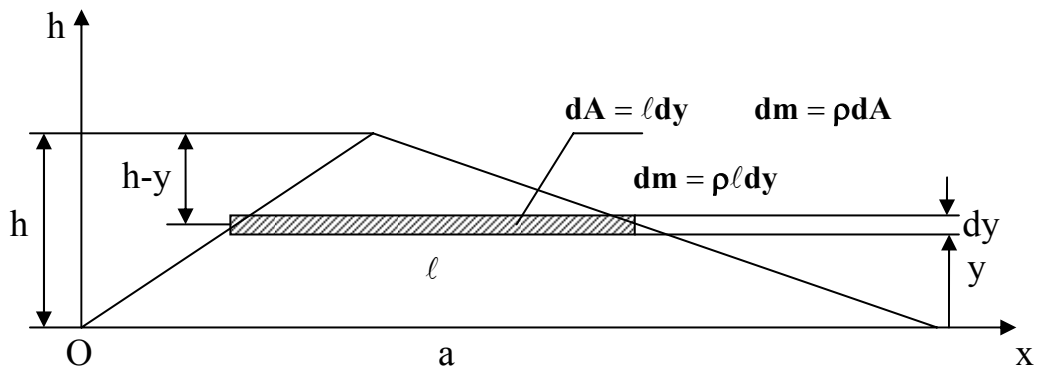
y Eksenine simetrik eksen olduğu için  $\xi = 0$  dır.

Problem 5.1.1 den  $\eta = \overline{OG} = \frac{R \sin \alpha}{\alpha}$

$$\eta = \frac{R \sin \frac{\pi}{2}}{\pi/2}, \quad \boxed{\eta = \frac{2R}{\pi}}$$

#### Problem 5.1.4

Yüksekliği h olan üçgen şeklindeki homojen levhanın kütle merkezinin koordinatlarını bulunuz.



$$\eta = \frac{\int_A y \, dm}{\int_A dm}, \quad \eta = \frac{\int_0^h y \rho l \, dy}{\int_0^h \rho l \, dy}, \quad \eta = \frac{\rho \int_0^h y l \, dy}{\rho \int_0^h l \, dy}$$

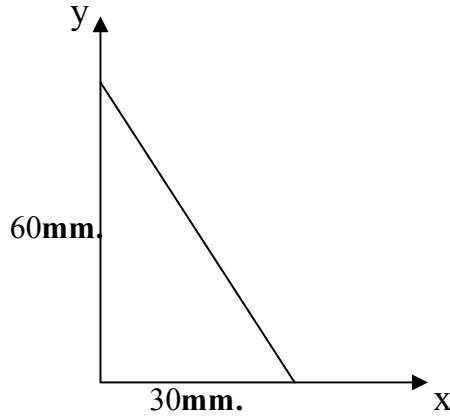
$$\frac{l}{a} = \frac{h-y}{h}, \quad l = \frac{a}{h}(h-y)$$

$$\eta = \frac{\rho \frac{a}{h} \int_0^h (hy - y^2) dy}{\rho \frac{a}{h} \int_0^h (h-y) dy}, \quad \eta = \frac{\rho \frac{a}{h} (\frac{h^3}{2} - \frac{h^3}{3})}{\rho \frac{a}{h} (h^2 - \frac{h^2}{2})}, \quad \eta = \frac{\rho \frac{a}{h} \frac{h^3}{6}}{\rho \frac{a}{h} \frac{h^2}{2}}, \quad \eta = \frac{\rho a \frac{h^2}{6}}{\rho a \frac{h}{2}}$$

$$\boxed{\eta = \frac{h}{3}}$$

### Problem 5.1.5

Şekilde ölçüleri verilen dik üçgen şeklindeki homojen levhanın kütle merkezinin koordinatlarını bulunuz.



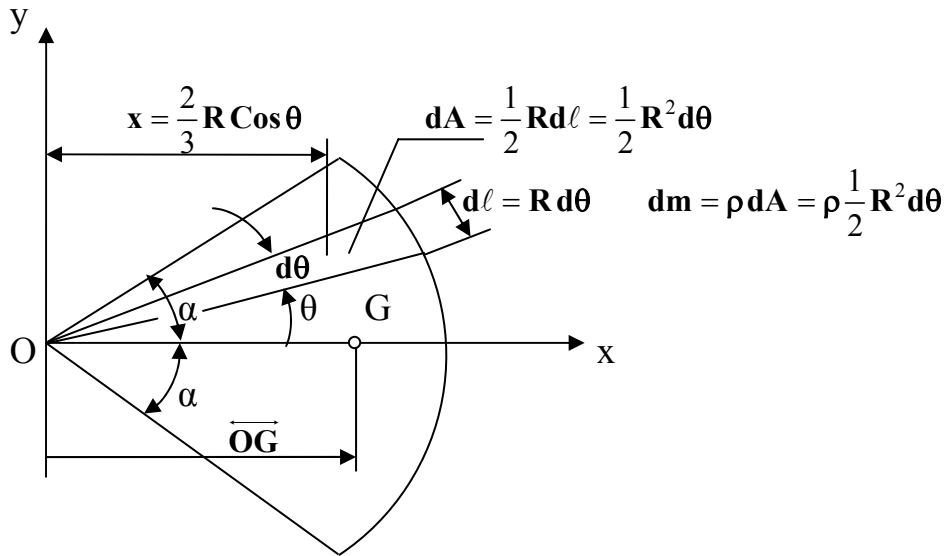
Problem 5.1.4 den  $\xi = \frac{30}{3}$  ,  $\eta = \frac{60}{3}$

$$\boxed{\xi = 10\text{mm.}} , \quad \boxed{\eta = 20\text{mm.}}$$

### Problem 5.1.6

R yarıçaplı  $2\alpha$  tepe açılı daire dilimi şeklindeki homojen cismin kütle merkezinin koordinatlarını bulunuz.

Çözüm:



x eksenini simetri eksenini olduğu için  $\eta = 0$  dır.

$$\xi = \frac{\int_A x \, dm}{\int_A dm}, \quad \xi = \frac{\int_{-\alpha}^{\alpha} x \, dm}{\int_{-\alpha}^{\alpha} dm}$$

$$\xi = \frac{\int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{2}{3} R \cos \theta (\rho \frac{1}{2} R^2 d\theta)}{\int_{-\alpha}^{\alpha} \rho \frac{1}{2} R^2 d\theta}, \quad \xi = \frac{\frac{1}{3} \rho R^3 \int_{-\alpha}^{\alpha} \cos \theta d\theta}{\frac{1}{2} \rho R^2 \int_{-\alpha}^{\alpha} d\theta}$$

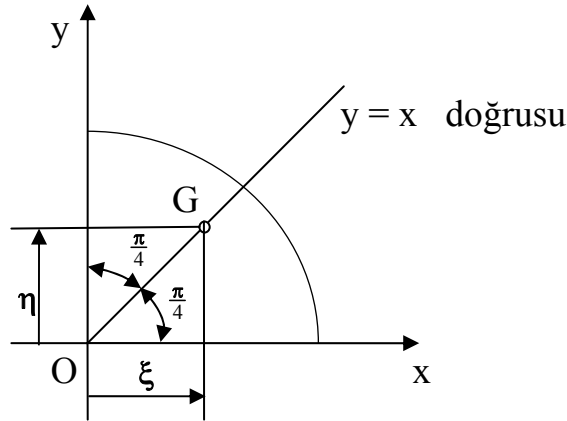
$$\xi = \frac{\frac{1}{3} \rho R^3 [\sin \alpha - (-\sin \alpha)]}{\frac{1}{2} \rho R^2 [\alpha - (-\alpha)]}, \quad \xi = \frac{\frac{2}{3} \rho R^3 \sin \alpha}{\rho R^2 \alpha}$$

$$\boxed{\xi = \overline{OG} = \frac{2}{3} \frac{R \sin \alpha}{\alpha}}$$

### Problem 5.1.7

Şekilde gösterilen dörtte bir daire dilimi şeklindeki homojen cismin kütle merkezinin koordinatlarını bulunuz.

Çözüm :



Şekildeki dörtte bir daire dilimi için  $y = x$  doğrusu simetri eksenidir olduğundan

$$\xi = \eta = \frac{\sqrt{2}}{2} \overline{OG}$$

Problem 5.1.4 den  $\overline{OG} = \frac{2}{3} \frac{R \sin \alpha}{\alpha} \quad \alpha = \frac{\pi}{4}$

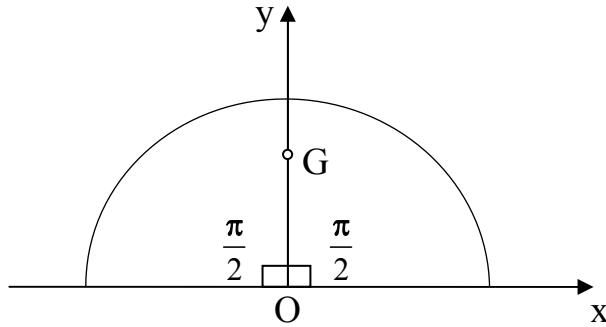
$$\overline{OG} = \frac{2}{3} \frac{R \sin(\frac{\pi}{4})}{\pi/4}, \quad \overline{OG} = \frac{4\sqrt{2}R}{3\pi}$$

$$\xi = \eta = \frac{\sqrt{2}}{2} \left( \frac{4\sqrt{2}R}{3\pi} \right), \quad \boxed{\xi = \eta = \frac{4R}{3\pi}}$$

### Problem 5.1.8

Şekilde gösterilen yarım daire dilimi şeklindeki homojen cismin kütle merkezinin koordinatlarını bulunuz.

Çözüm :



y Eksenine simetri eksenidir için  $\xi = 0$  dır.

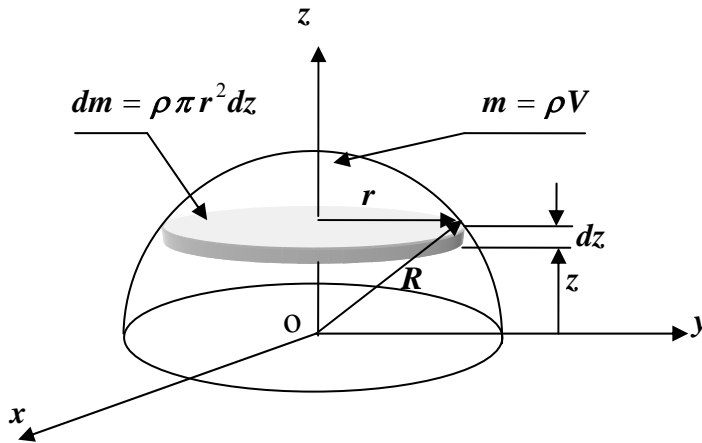
Problem 5.1.4 den  $\eta = \overline{OG} = \frac{2}{3} \frac{R \sin \alpha}{\alpha}$

$$\eta = \frac{2R \sin \frac{\pi}{2}}{3\pi/2}, \quad \boxed{\eta = \frac{4R}{3\pi}}$$

### Problem 5.1.9

Şekilde gösterilen R taban yarıçaplı yarım küre şeklindeki homojen cismin kütle merkezinin koordinatlarını gösteriniz.

Çözüm:



yoz düzlemi simetri düzlemi olduğu için  $\xi = 0$  dır.

xoz düzlemi simetri düzlemi olduğu için  $\eta = 0$  dır.

$$\zeta = \frac{\int_V z \, dm}{\int_V dm}, \quad \zeta = \frac{\int_0^R z \rho \pi r^2 dz}{\int_0^R \rho \pi r^2 dz}, \quad \zeta = \frac{\rho \pi \int_0^R z r^2 dz}{\rho \pi \int_0^R r^2 dz}$$

$$r^2 = R^2 - z^2, \quad \zeta = \frac{\rho \pi \int_0^R (zR^2 - z^3) dz}{\rho \pi \int_0^R (R^2 - z^2) dz}, \quad \zeta = \frac{\rho \pi (\frac{R^4}{2} - \frac{R^4}{4})}{\rho \pi (R^3 - \frac{R^3}{3})}$$

$$\zeta = \frac{\rho \pi (\frac{R^4}{4})}{\rho \pi (\frac{2}{3} R^3)}, \quad \boxed{\zeta = \frac{3}{8} R}$$

## 5.2 Pappus ve Guldinus teoremleri

Dönel cisimlerin yüzey alanlarını ve hacimlerini bulmak için kullanılır.

### 1. Teorem

Eğer bir eğri kendi düzlemindeki sabit bir eksen etrafında dönerek, dönel bir yüzey oluşturursa, bu yüzeyin alanı, bu eğrinin uzunluğu ile eğrinin kütle merkezinin kat ettiği yol çarpımına eşittir.

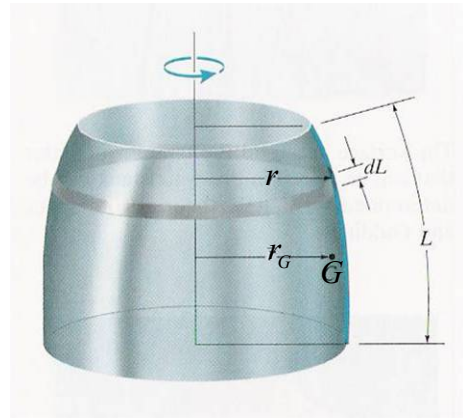
**İspat**

$$\text{Diferansiyel alan} = 2\pi r dL$$

$$\text{Tüm yüzeyin alanı} = \int_l 2\pi r dL$$

$$r_G = \frac{\int_l r dL}{\int_l dL} \rightarrow \int_l r dL = r_G L$$

$$\text{Tüm yüzeyin alanı} = 2\pi r_G L$$



### 2. Teorem

Eğer bir yüzey kendi düzlemindeki sabit bir eksen etrafında dönerek, dönel bir dolu cisim oluşturursa, bu cismin hacmi, bu yüzeyin alanı ile eğrinin kütle merkezinin kat ettiği yol çarpımına eşittir.

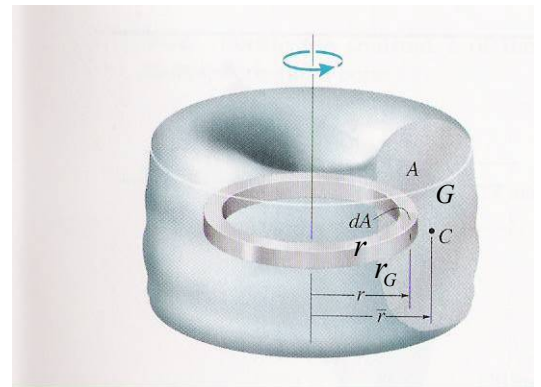
**İspat**

$$\text{Diferansiyel hacim} = 2\pi r dA$$

$$\text{Tüm cismin hacmi} = \int_A 2\pi r dA$$

$$r_G = \frac{\int_A r dA}{\int_A dA} \rightarrow \int_A r dA = r_G A$$

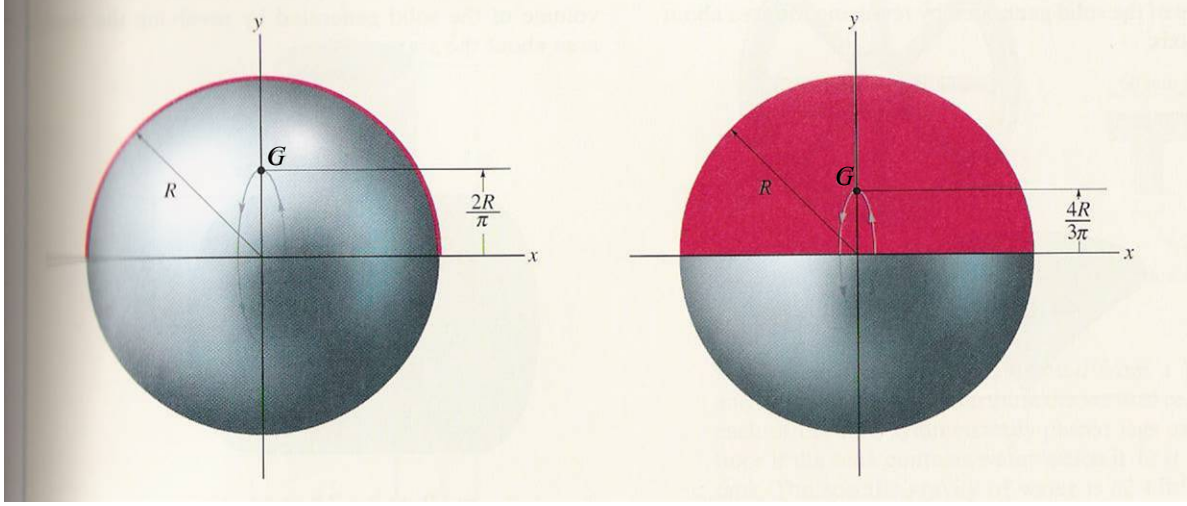
$$\text{Tüm yüzeyin hacmi} = 2\pi r_G A$$



### Problem 5.2.1

Kürenin alanının  $A = 4\pi R^2$  ve hacminin  $V = \frac{4}{3}\pi R^3$  olduğunu gösteriniz.

Çözüm:



Kürenin yüzey alanı için:

$$\text{Yarım çemberin kütle merkezi} = r_G = \frac{2R}{\pi}$$

$$\text{Yarım çemberin uzunluğu} = L = \pi R$$

$$\text{Kürenin yüzey alanı} = 2\pi r_G L = 2\pi \frac{2R}{\pi} \pi R = 4\pi R^2$$

Kürenin hacmi için:

$$\text{Yarım dairenin kütle merkezi} = r_G = \frac{4R}{3\pi}$$

$$\text{Yarım dairenin alanı} = A = \frac{\pi R^2}{2}$$

$$\text{Kürenin hacmi} = 2\pi r_G A = 2\pi \frac{4R}{3\pi} \frac{\pi R^2}{2} = \frac{4\pi R^3}{3}$$

### 5.3 Bileşik cismin kütle merkezi

Bir bileşik cismin kütle merkezi bu cismi oluşturan cisimlerin kütle merkezleri bulunduğundan sonra daha önceden çıkarılan paralel bağlı vektör sisteminin merkezine ait olan formüllerle hesaplanır.

$$\vec{OG} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \cdot \vec{OA_i}}{\sum_{i=1}^n m_i}$$

$$\vec{OG} = \xi \vec{i} + \eta \vec{j} + \zeta \vec{k}$$

$$\xi = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \cdot x_i}{\sum_{i=1}^n m_i}, \quad \eta = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \cdot y_i}{\sum_{i=1}^n m_i}, \quad \zeta = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \cdot z_i}{\sum_{i=1}^n m_i}$$

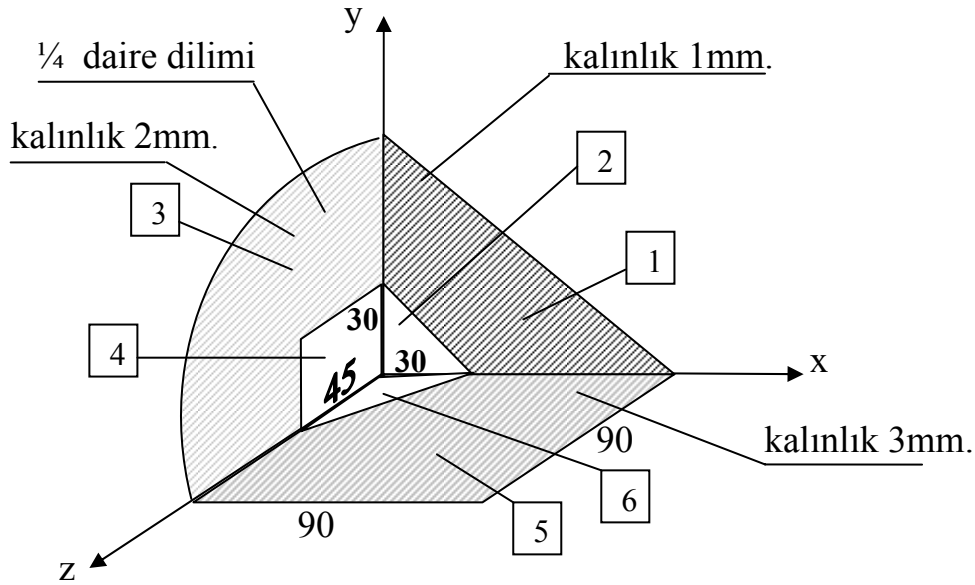
Eğer bileşik cismi oluşturan cisimlerin yoğunluğu aynı ise yukarıdaki denklemlerde  $m_i = \rho V_i$  yazılabilir ve  $\rho$  lar toplam dışına alınıp kısaltılabileceğinden dolayı aşağıdaki eşitlikler elde edilir.

$$\xi = \frac{\sum_{i=1}^n V_i \cdot x_i}{\sum_{i=1}^n V_i}, \quad \eta = \frac{\sum_{i=1}^n V_i \cdot y_i}{\sum_{i=1}^n V_i}, \quad \zeta = \frac{\sum_{i=1}^n V_i \cdot z_i}{\sum_{i=1}^n V_i}$$



### Problem 5.3.1

Homojen fakat farklı kalınlıklardaki levhalardan şekildeki taralı alan gibi oluşturulmuş cismin kütle merkezinin koordinatlarını hesaplayınız.



(Ölçüler mm. cinsindendir. )

$$z_3 = y_3 = \frac{4R}{3\pi}, \quad y_3 = \frac{4 \cdot 90}{3\pi} = \frac{120}{\pi}, \quad A_3 = \frac{\pi R^2}{4}, \quad A_3 = 2025\pi$$

	x	Y	z	A	M=ρA	mx	my	mz
1	30	30	0	4050	4050	121500	121500	0
2	10	10	0	-450	-450	-4500	-4500	0
3	0	120/π	120/π	2025π	4050π	0	486000	486000
4	0	15	22,5	-1350	-2700	0	-40500	-60750
5	45	0	45	8100	24300	1093500	0	1093500
6	10	0	15	-675	-2025	-20250	0	-30375
			Σ	16036,7	35898,45	1149750	562500	1488375

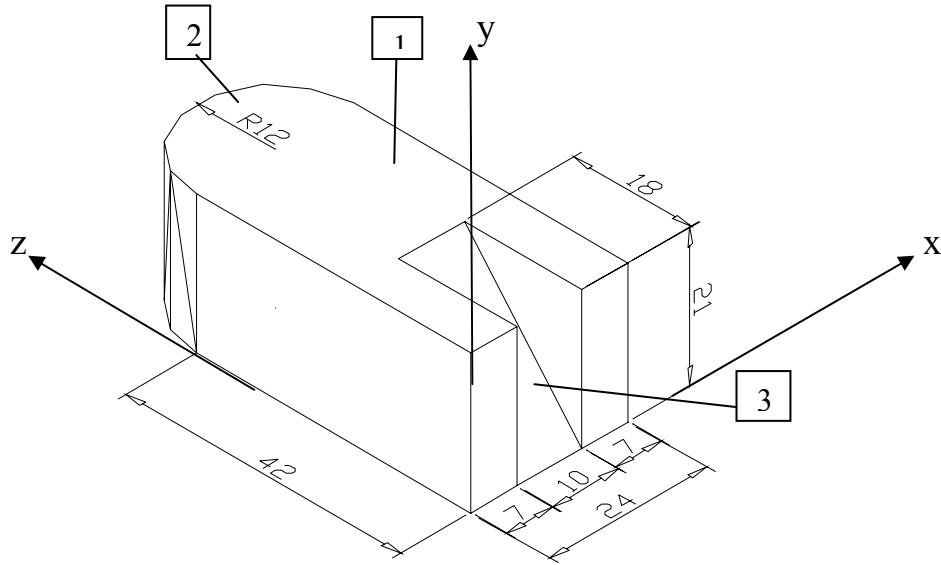
$$\xi = \frac{\sum_{i=1}^6 m_i \cdot x_i}{\sum_{i=1}^6 m_i}, \quad \xi = \frac{1149750}{35898,45}, \quad \boxed{\xi = 32,03\text{mm.}}$$

$$\eta = \frac{\sum_{i=1}^6 m_i \cdot y_i}{\sum_{i=1}^6 m_i}, \quad \eta = \frac{562500}{35898,45}, \quad \boxed{\eta = 15,67\text{mm.}}$$

$$\zeta = \frac{\sum_{i=1}^6 m_i \cdot z_i}{\sum_{i=1}^6 m_i}, \quad \zeta = \frac{1488375}{35898,45}, \quad \boxed{\zeta = 41,46\text{mm.}}$$

### Problem 5.3.2

Şekilde gösterilen içi dolu homojen cismin kütle merkezinin koordinatlarını hesaplayınız.



( Ölçüler cm. cinsindendir. )

$$z_2 = 42 + \frac{4R}{3\pi}, \quad z_2 = 42 + \frac{16}{\pi} = 47,093\text{cm.}, \quad V_2 = \frac{\pi R^2}{2} 21,$$

$$V_2 = 756\pi = 2375,04\text{cm}^3$$

	x	y	z	V	Vx	Vy	Vz
1	12	10,5	21	21168	254016	222264	444528
2	12	10,5	47,093	2375,04	28500,5	24938	111848
3	12	14	6	-1890	-22680	-26460	-11340
			$\Sigma$	21653,04	259836,5	220742	545036

$$\xi = \frac{\sum_{i=1}^3 V_i \cdot x_i}{\sum_{i=1}^3 V_i}, \quad \xi = \frac{259836,5}{21653,04}, \quad \boxed{\xi = 12\text{cm.}}$$

$$\eta = \frac{\sum_{i=1}^3 V_i \cdot y_i}{\sum_{i=1}^3 V_i}, \quad \eta = \frac{220742}{21653,04}, \quad \boxed{\eta = 10,2\text{cm.}}$$

$$\zeta = \frac{\sum_{i=1}^3 V_i \cdot z_i}{\sum_{i=1}^3 V_i}, \quad \zeta = \frac{545036}{21653,04}, \quad \boxed{\zeta = 25,17\text{cm.}}$$

## BÖLÜM 6

### STATİK

#### 6.1 Giriş

Statik kuvvetler etkisinde cisimlerin denge koşullarını inceleyen bilim dalıdır. Bu tanımlamada adı geçen kuvvet , cisim ve denge terimlerini açıklayalım.

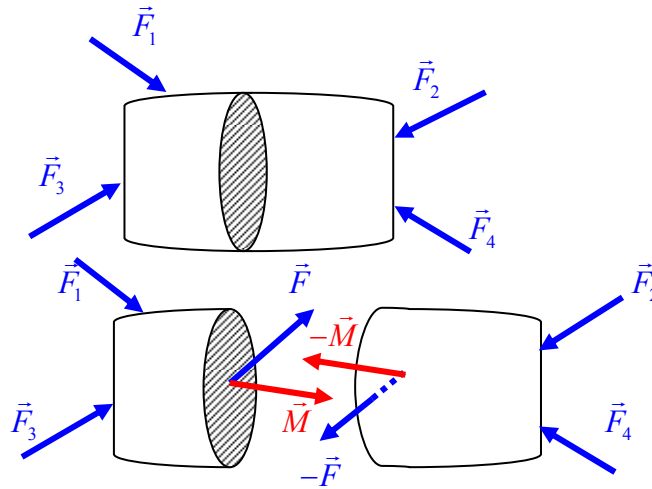
Kuvvet: Ele alınan Cisme başka cisimler tarafından uygulanan ve cismin hareket veya denge durumları ile şeklini değiştiren etkiye kuvvet denir.

Kuvvetler etkinin cinsine göre : Temas etkisi (yüzey kuvvetleri) ve uzaktan etki ( hacim kuvvetleri) olmak üzere ikiye ayrılır.

Dengesi incelenen cisimle temasta olan mafsall,mesnet,kablo,çubuk gibi diğer cisimlerden gelen kuvvetler yüzey kuvvetleridir.

Uzaktan etki kuvvetlerine örnek, ağırlık kuvvetleri, manyetik ve elektriksel alanlardan gelen kuvvetler verilebilir.

Kuvvetler cisme etki bölgesine göre: İç kuvvet dış kuvvet şeklinde ikiye ayrılır.



Şekilde gösterilen  $\vec{F}_1$  ,  $\vec{F}_2$  ,  $\vec{F}_3$  ,  $\vec{F}_4$  kuvvetleri dış kuvvetler,  $\vec{F}$  ve  $-\vec{F}$  kuvvetleri ise iç kuvvetlerdir. İç kuvvetler şekilde gösterildiği gibi cismin içinde varolduğu düşünülen bir kesitte oluşur.Bu hayali kesitle cisim iki parçaya ayrılır. Oluşan bu iki ayrı kesitteki iç kuvvetlerin etki tepki ilkesine göre şiddet ve doğrultuları aynı yönleri zıttır.

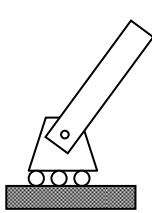
Kuvvetler cisme mesnetler ve diğer cisimlerden uygulanma durumuna göre : Bilinen kuvvetler (aktif kuvvetler) ve mesnet veya bağlardan geleceği düşünülen tepki kuvvetleri (reaktif kuvvetler) olmak üzere ikiye ayrılır.

Aktif kuvvetler: Ağırlık kuvvetleri veya cismin zorlanma koşullarına göre bilinen dış kuvvetlerdir.

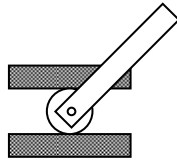
Tepki kuvvetleri : mesnet,mafsal, kablo, çubuk gibi diğer cisimlerin uyguladıkları kuvvetlerdir. Bu tepki kuvvetlerinin tam zıttı dengesi incelenen cisim tarafından diğer cisimlere aynı şekilde etkir.

Sürtünmesiz temaslarda tepki kuvveti temas yüzeyine diktir.

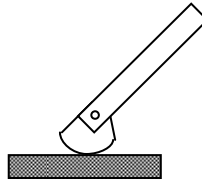
İki boyutlu mesnet ve bağlar ile bunlardan cisme gelen tepki kuvvetleri:



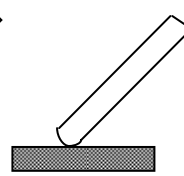
Yuvarlanan elemanlar



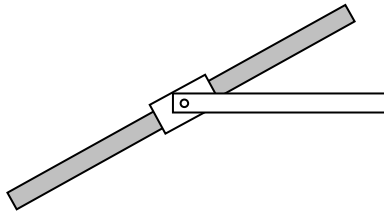
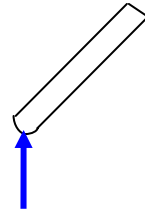
kavisli yüzey



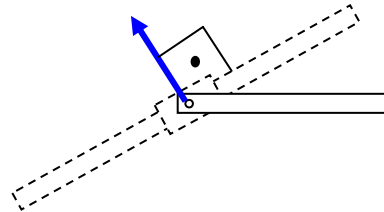
sürtünmesiz yüzey



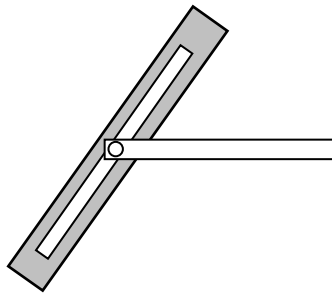
kayma yüzeyine dik tepki kuvveti



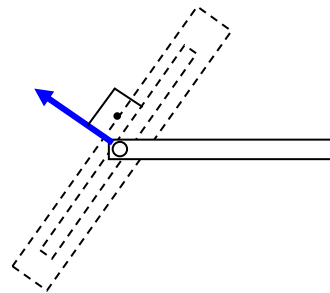
Çubuk doğrultusunda hareket edebilen bilezik ve buna mafsallı diğer çubuk



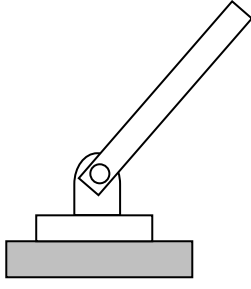
tepki kuvveti hareket doğrultusuna dik



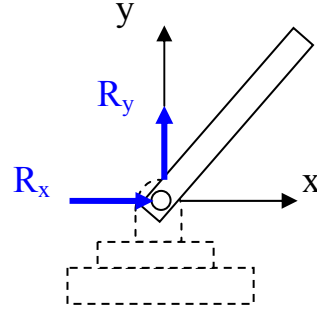
Kanal doğrultusunda hareket



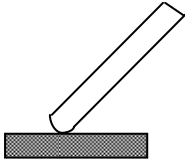
kanal doğrultusuna dik tepki kuvveti



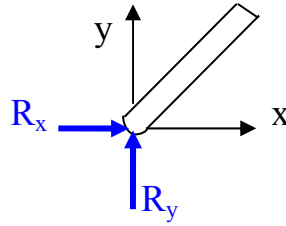
Sabit silindirik mafsallı



Tepki kuvvetinin doğrultusu bilinmiyor.



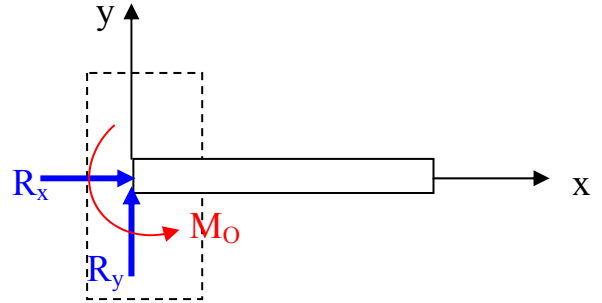
Pürüzlü yüzey



Yüzey tepkisinin doğrultusu bilinmiyor

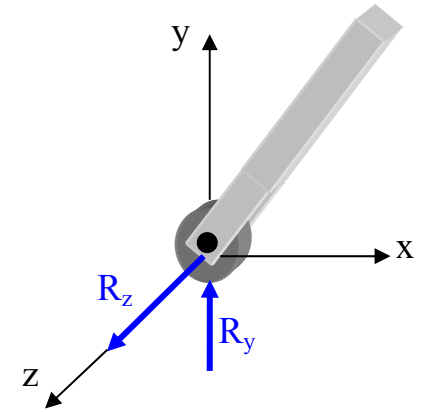
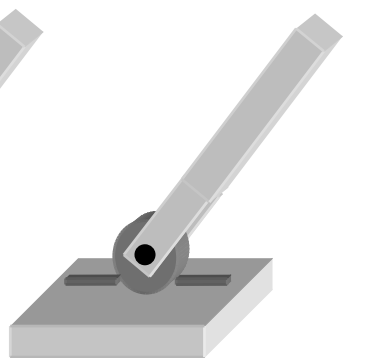
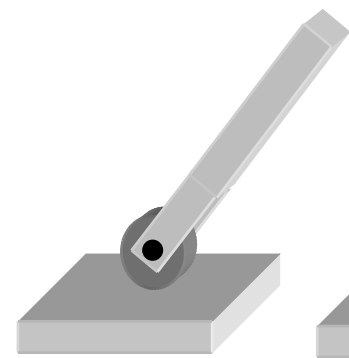
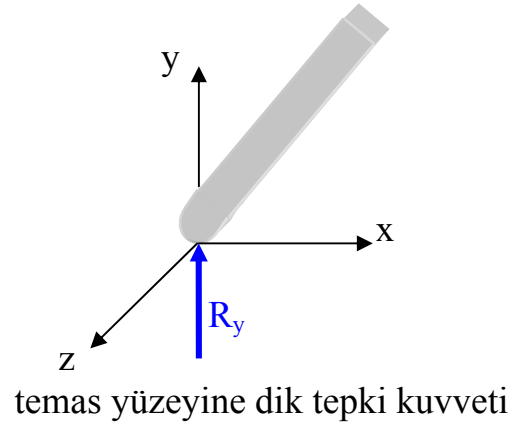
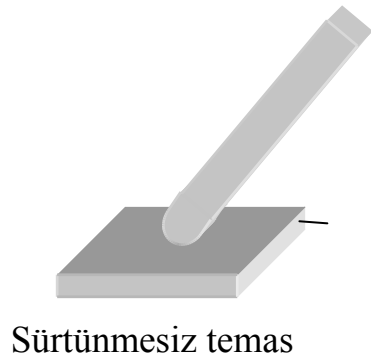
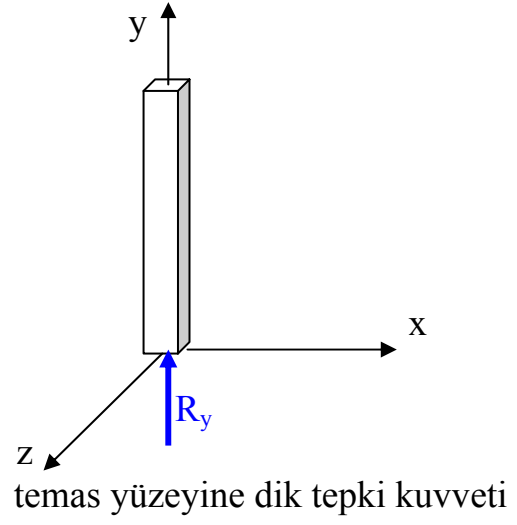
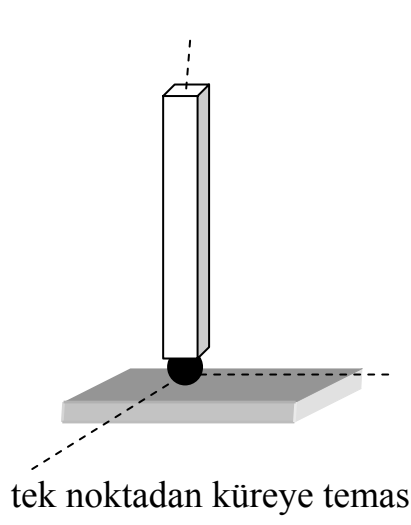


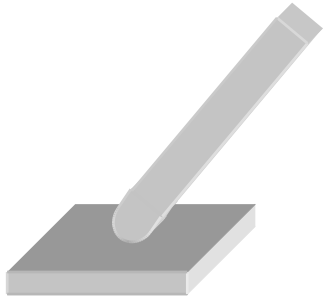
Ankastre mesnet



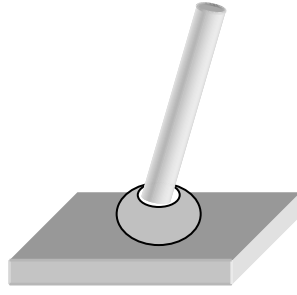
Bilinmeyen kuvvet ve şiddeti bilinmeyen moment

Üç boyutlu mesnet ve bağlar ile bunlardan cisme gelen tepki kuvvetleri:

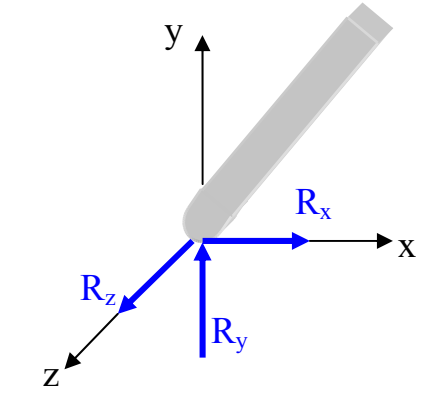




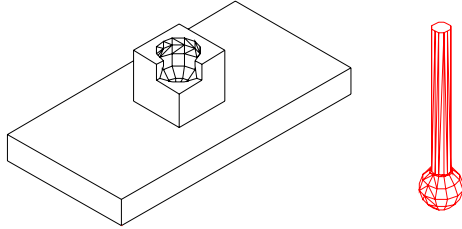
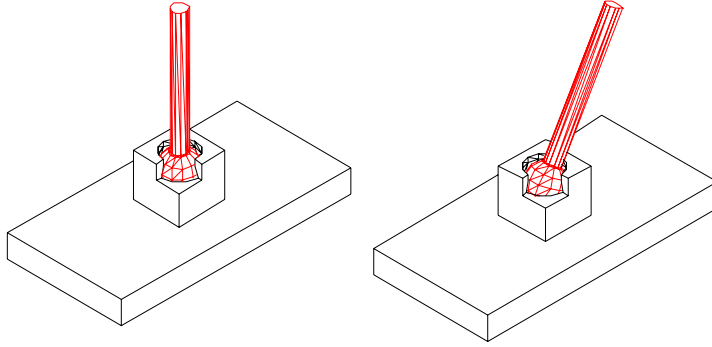
Pürüzlü yüzey



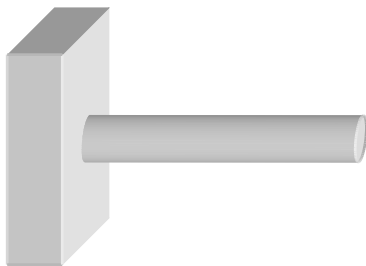
küresel mafsall



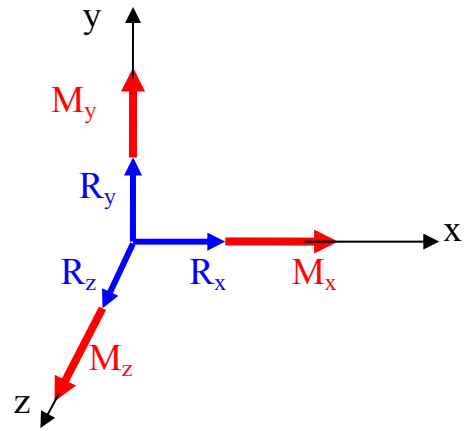
üç doğrultuda bilinmeyen tepki kuvvetleri



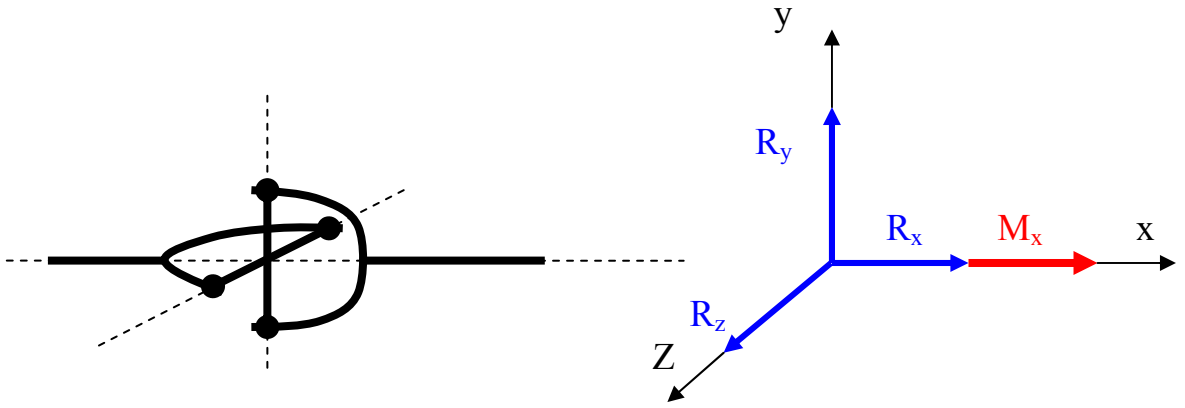
Küresel mafsallın ayrıntılı şekli



ankastre mesnet

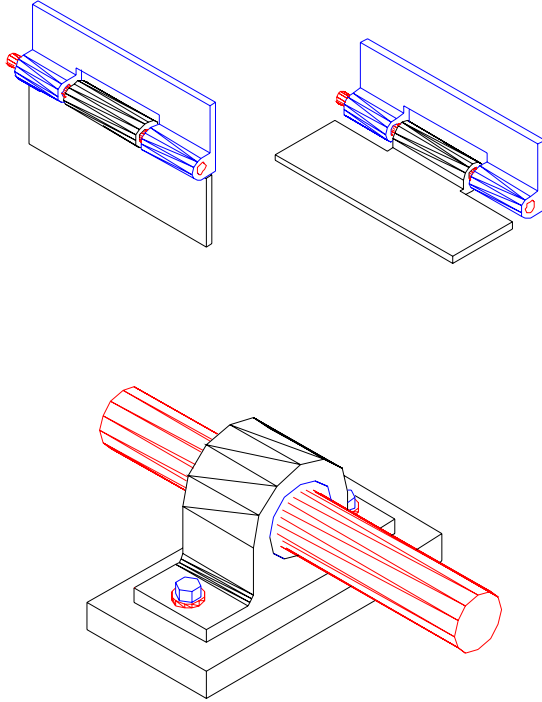


üç doğrultuda bilinmeyen tepki kuvveti ve üç doğrultuda bilinmeyen tepki momenti



Üniversal kavrama

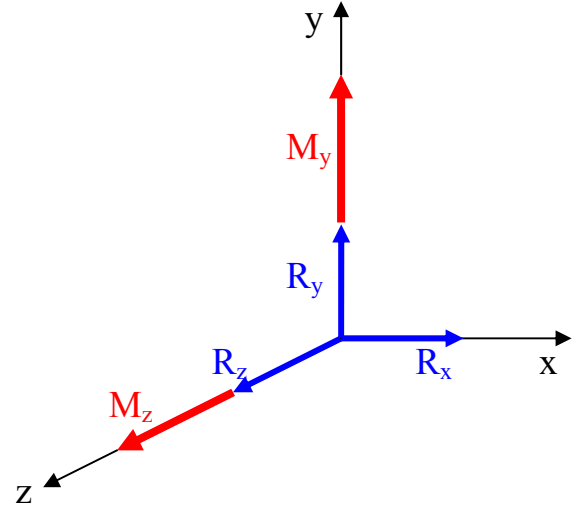
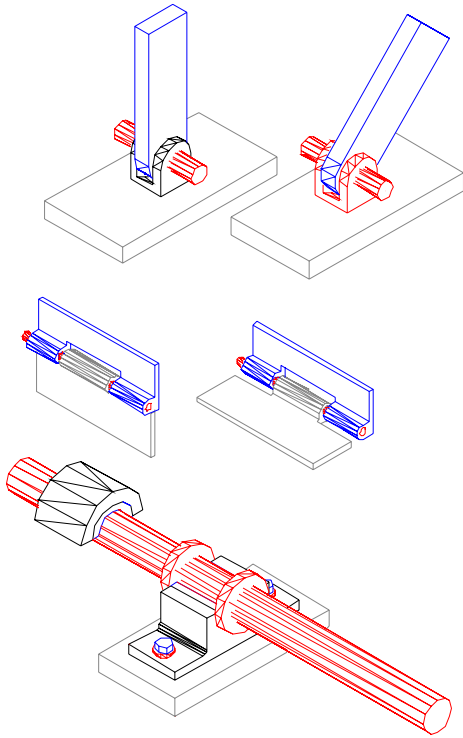
üç doğrultuda bilinmiyen kuvvet ve  
bir doğrultuda bilinmiyen moment



Eksenel doğrultuda hareket edebilen silindirik mafsall

İki doğrultuda bilinmiyen kuvvet ve  
iki doğrultuda bilinmiyen moment





Üç doğrultuda bilinmeyen kuvvet ve  
İki doğrultuda bilinmeyen moment

Eksenel doğrultuda hareket yeteneği olmayan silindirik mafsall

Bunlardan başka ip kuvveti ip doğrultusundadır. Birde ağırlıksız olup uç noktalarından sürtünmesiz mafsallı ve uç noktaları dışında yük taşımayan çubuklardan gelen tepki kuvvetleride çubuk doğrultusunda kabul edilir.

## 6.2 İç kuvvetler ve kesit zorları

İç kuvvetlerin cismin bir kesiti içindeki bileşenlerine kesit zorları denir. Kesite etki eden kuvvetin kesite dik bileşenine **Normal kuvvet** denir. Kesite etki eden kuvvetin kesit içindeki bileşenine **Kesme kuvveti** denir. Kesite etki eden momentin kesite dik bileşenine **Burulma momenti** denir. Kesite etki eden momentin kesit içindeki bileşenine **Eğilme momenti** denir.

## 6.3 Statığın temel ilkelerinin geçerli olduğu referans sistemleri

Orijininde güneş bulunan ve yıldızlara doğru yönelmiş koordinat sistemlerine Newton veya Galileo eksen sistemleri denir. Statığın temel ilkeleri bu eksen sistemlerine göre geçerlidir.

Bir Newton eksen sistemine göre sabit hızda öteleme hareketi yapan diğer eksen sistemleri de Newton eksen sistemidir.

Herhangi bir cisim Newton eksen sistemine göre hareketsiz veya sabit hızda öteleme hareketi yapıyorsa bu cisim dengededir denir.

#### 6.4 Bir maddesel noktanın kuvvetler etkisinde dengesi

Bir maddesel noktaya etki eden bütün kuvvetler aynı noktada kesişeceğinden dolayı bu kuvvetlerin geometrik toplamının sıfır olması denge için gerek ve yeter koşuldur.

$$\vec{R} = \vec{0}$$

$$\vec{R} = \sum F_x \vec{i} + \sum F_y \vec{j} + \sum F_z \vec{k}$$

$$\sum F_x = 0 \quad , \quad \sum F_y = 0 \quad , \quad \sum F_z = 0$$

#### 6.5 Bir rijid cismin kuvvetler etkisinde dengesi

Bir rijid cisme etki eden kuvvet sisteminin sıfıra eşdeğer olması bu cismin dengesi için gerek ve yeter koşuldur.

$$\vec{R} = \vec{0} \quad , \quad \sum \vec{M}_O = \vec{0}$$

$$\sum F_x = 0 \quad , \quad \sum F_y = 0 \quad , \quad \sum F_z = 0$$

$$\sum M_x = 0 \quad , \quad \sum M_y = 0 \quad , \quad \sum M_z = 0$$

Böylece en genel durumda üç boyutlu kuvvetler etkisindeki bir cismin dengesinde denklem sayısı altı olur. Bu denklemlerden altı bilinmiyen çözülebilir. Üç boyutlu kuvvetler etkisinde dengesi incelenen cisimde bilinmiyen sayısı altıdan fazla ise böyle sistemlere hiperstatik sistemler denir.

#### 6.6 Rijid cisim sisteminin kuvvetler etkisinde dengesi

Bir rijid cisim sistemine etki eden kuvvet sisteminin sıfıra eşdeğer olması denge için gerekli fakat yeterli koşul değildir. Bundan dolayı rijid cisim sisteminin elemanlarına ayrılarak incelenmesi gerekir. Her bir eleman için sıfıra eşdeğerlik koşulu ve birleşme noktalarında etki tepki ilkesi gözönüne alınarak çözüme gidilir.

#### 6.7 Düzlemsel kuvvetler etkisinde cisimlerin dengesi

Eğer cisme etki eden dış kuvvetler ve mesnetlerden gelen tepkiler aynı düzlem içinde ise incelenen problem düzlem statik problemidir.

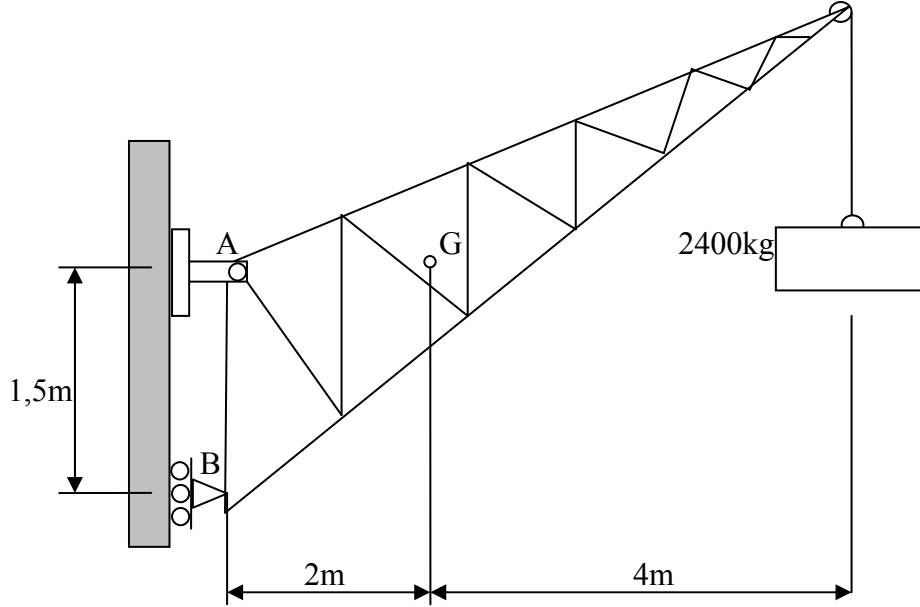
Aynı düzlemde bulunan kuvvetlerin momenti bu düzleme dik olacağından dolayı bu durumda  $\vec{R} = \vec{0}$  ,  $\sum \vec{M}_O = \vec{0}$  sıfıra eşdeğerlik koşulu aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\sum F_x = 0 \quad , \quad \sum F_y = 0 \quad , \quad \sum M_z = 0$$

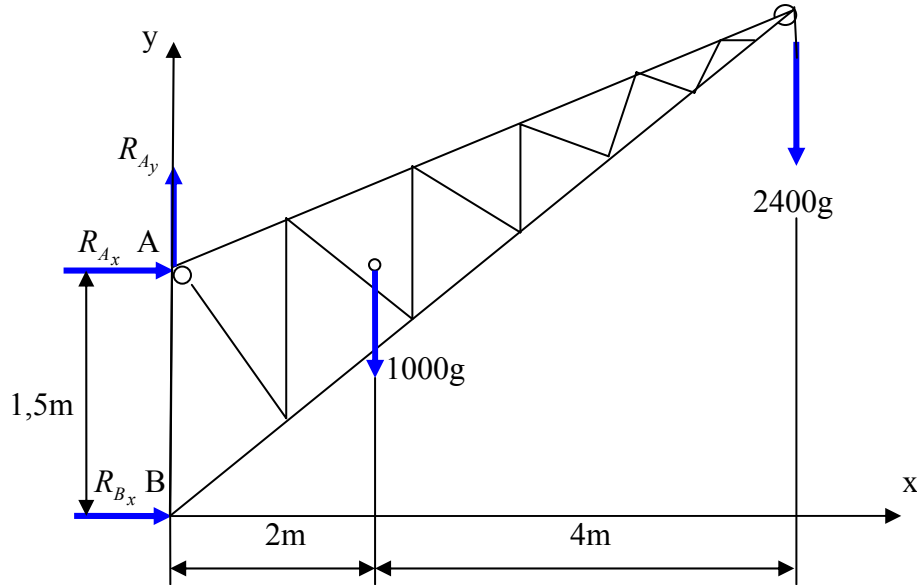
Böylece düzlemsel kuvvetler etkisindeki bir cismin dengesinde denklem sayısı üçe inmiş olur. Bu denklemlerden üç bilinmiyen çözülebilir. Düzlemsel kuvvetler etkisinde dengesi incelenen cisimde bilinmiyen sayısı üçten fazla ise böyle sistemlere hiperstatik sistemler denir.

### Problem 6.7.1

1000 kg kütleli bir sabit vinç 2400 kg kütleli bir cismi kaldırmakta kullanılıyor. Vinç A da sabit B de kayıcı mafsall ile mesnetlenmiştir. Vincin kütle merkezi G dir. A ve B mesnetlerindeki tepkileri bulunuz.



Çözüm:



B deki mesnet kayıcı mafsall olduğu için y eksenini doğrultusunda kuvvet taşıyamaz. Bundan dolayı B mesneti sadece x eksenini doğrultusunda tepki kuvveti uygulayabilir.

$$R_{By} = 0$$

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow R_{Ax} + R_{Bx} = 0$$

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow R_{Ay} - 1000g - 2400g = 0$$

$$\Sigma M_A = 0 \Rightarrow R_{Bx} * 1,5 - 1000g * 2 - 2400g * 6 = 0$$

Bu eşitliklerden

$$R_{B_x} = 107,256kN$$

$$R_{A_x} = -R_{B_x} = -107,256kN$$

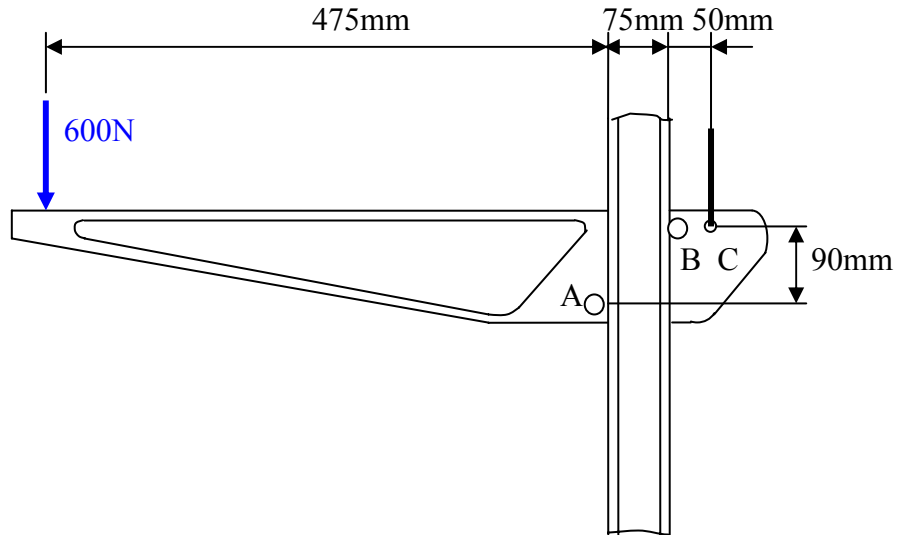
$$R_{A_y} = 33,354kN$$

$$R_A = \sqrt{(-107,256)^2 + (33,354)^2}$$

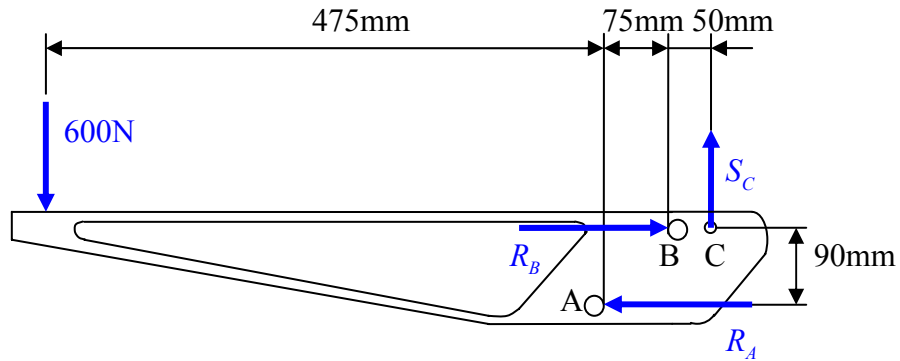
$$R_A = 112,32kN$$

### Problem 6.7.2

Hareketli bir kol C ye bağlanmış bir kablo ve A ile B deki sürtünmesiz tekerlekler yardımıyla dengede tutuluyor. Şekildeki yükleme halinde kablodaki kuvveti ve A ile B deki tepkileri hesaplayınız.



Çözüm:



A ve B mesnetlerinde sürtünme olmadığı için buradaki tepkiler yatay doğrultudadır.

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow R_B - R_A = 0$$

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow S_C - 600 = 0$$

$$\Sigma M_C = 0 \Rightarrow R_A * 90 - 600 * 600 = 0$$

Bu üç denklemden

$$R_A = 4000 \text{ Newton} , R_B = R_A = 4000 \text{ Newton}$$

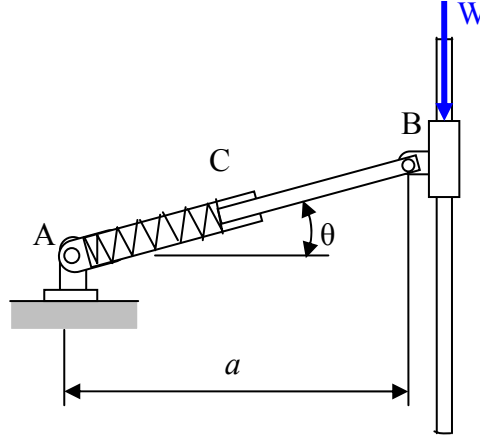
$$S_C = 600 \text{ N}$$

bulunur.

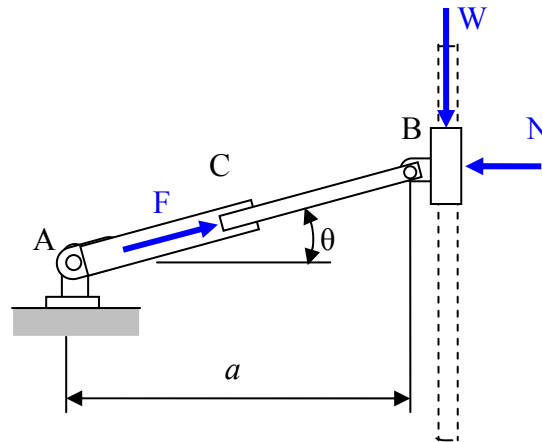
### Problem 6.7.3

Yay katsayısı  $k$  olan AC iç yayı  $\theta = 60^\circ$  iken doğal uzunluğundadır.

- Sistemin denge durumunda  $\theta$ ,  $W$ ,  $a$  ve  $k$  arasındaki bağıntıyı bulunuz.
- Denge durumunda  $W=80\text{N}$ ,  $a=300\text{ mm}$  ve  $\theta=25^\circ$  olduğu bilindiğine göre yay katsayısı  $k$  yı hesaplayınız.



Çözüm:



a)

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow F \cos \theta - N = 0$$

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow F \sin \theta - W = 0$$

Bu iki denklemden  $F = \frac{W}{\sin \theta}$

eşitliği bulunur. Ayrıca  $F$  yay kuvveti  $F = k * \Delta s$  denklemi ile hesaplanır.

Yaydaki kısalma  $\Delta s = \frac{a}{\cos 60^\circ} - \frac{a}{\cos \theta}$ ,  $\Delta s = a(2 - \frac{1}{\cos \theta})$

$$F = ka(2 - \frac{1}{\cos \theta})$$

$$ka(2 - \frac{1}{\cos \theta}) = \frac{W}{\sin \theta}, \quad \boxed{2 \sin \theta - \tan \theta = \frac{W}{ka}}$$

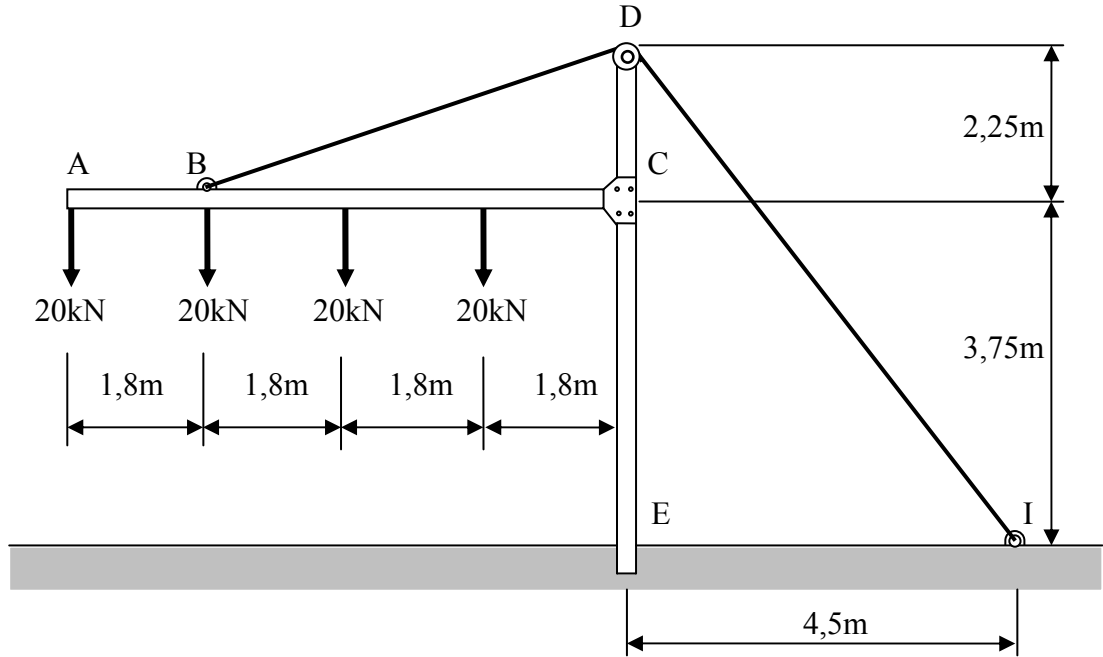
$$b) \quad k = \frac{W}{a(2 \sin \theta - \tan \theta)}, \quad k = \frac{80}{300(2 \sin 25^\circ - \tan 25^\circ)}$$

$$\boxed{k = 0,704 N / mm}$$

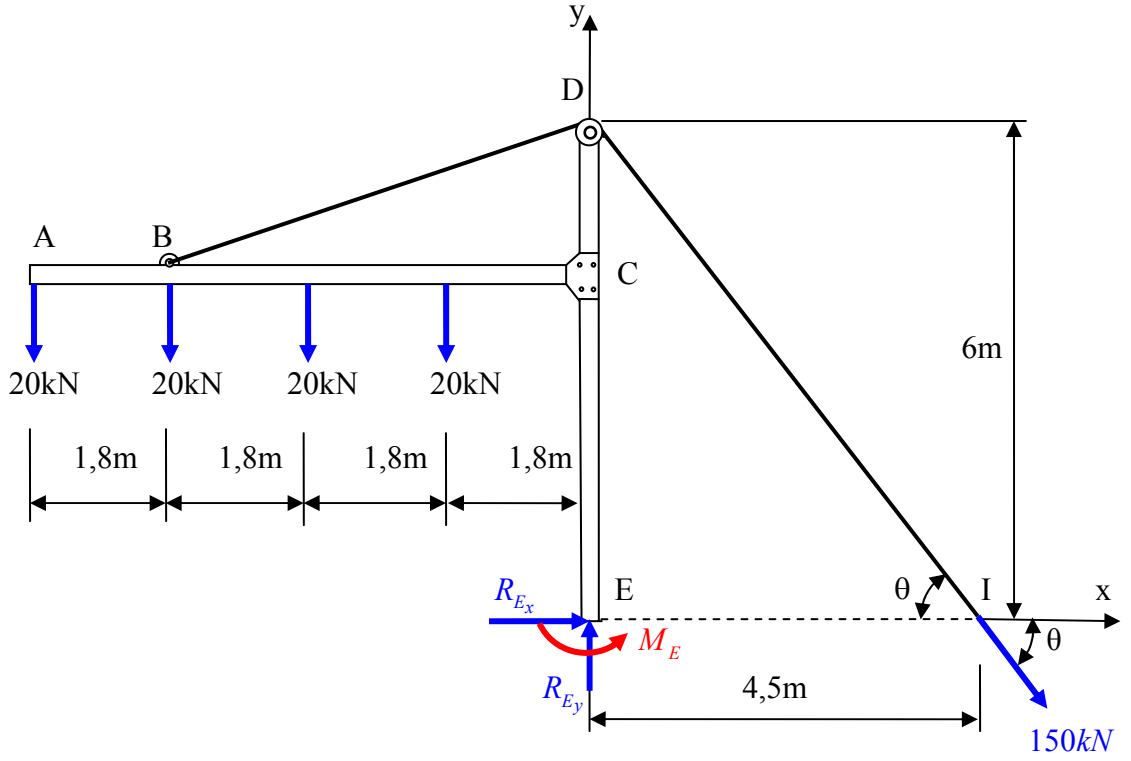
$$\boxed{k = 704 N / m}$$

#### Problem 6.7.4

Aşağıda gösterilen çerçeve küçük bir yapının çatısını desteklemektedir. Kablodaki gerilme kuvvetinin 150 kN olduğu bilindiğine göre E ankastre mesnetindeki tepkileri bulunuz.



Çözüm:



$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow R_{E_x} + 150 \cos \theta = 0$$

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow R_{E_y} - 20 \cdot 4 - 150 \sin \theta = 0$$

$$\Sigma M_E = 0 \Rightarrow M_E + 20 \cdot (1,8 + 2 \cdot 1,8 + 3 \cdot 1,8 + 4 \cdot 1,8) - 4,5 \cdot 150 \cdot \sin \theta = 0$$

$$\cos \theta = \frac{\overline{EI}}{\overline{DI}}, \quad \sin \theta = \frac{\overline{DE}}{\overline{DI}}, \quad \overline{DI} = \sqrt{4,5^2 + 6^2}, \quad \overline{DI} = 7,5m$$

$$\cos \theta = \frac{4,5}{7,5}, \quad \cos \theta = 0,6$$

$$\sin \theta = \frac{6}{7,5}, \quad \sin \theta = 0,8$$

$$R_{E_x} = -150 \cdot 0,6, \quad \boxed{R_{E_x} = -90kN}$$

$$R_{E_y} = 20 \cdot 4 + 150 \cdot 0,8, \quad \boxed{R_{E_y} = 200kN} \quad R_E = \sqrt{(-90)^2 + (200)^2} \quad \boxed{R_E = 219,4kN}$$

$$M_E = -20 \cdot (1,8 + 2 \cdot 1,8 + 3 \cdot 1,8 + 4 \cdot 1,8) + 4,5 \cdot 150 \cdot 0,8 = 0$$

$$\boxed{M_E = 180kNm.}$$

## 6.8 Üç boyutlu kuvvetler etkisindeki bir rijid cismin dengesi ile ilgili uygulamalar

Eğer cisme etki eden dış kuvvetler ve mesnetlerden gelen tepkiler aynı düzlem içinde değil ise incelenen problem uzay statik problemidir.

$\vec{R} = \vec{0}$  ,  $\sum \vec{M}_o = \vec{0}$  sifıra eşdeğerlik koşulu aşağıdaki gibi yazılabilir.

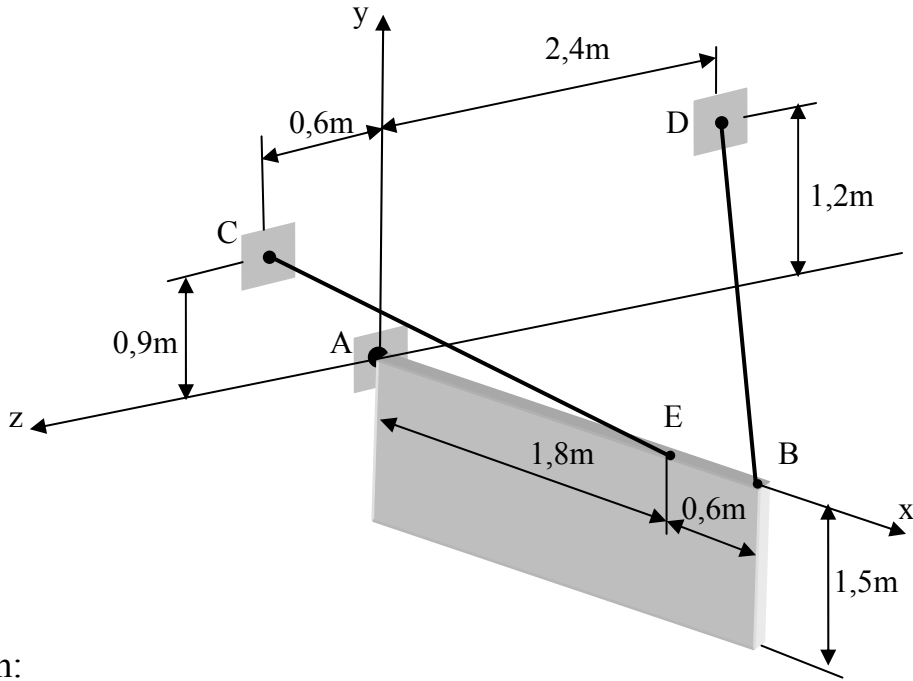
$$\sum \vec{F} = \vec{0}$$

$$\sum F_x = 0, \quad \sum F_y = 0, \quad \sum F_z = 0$$

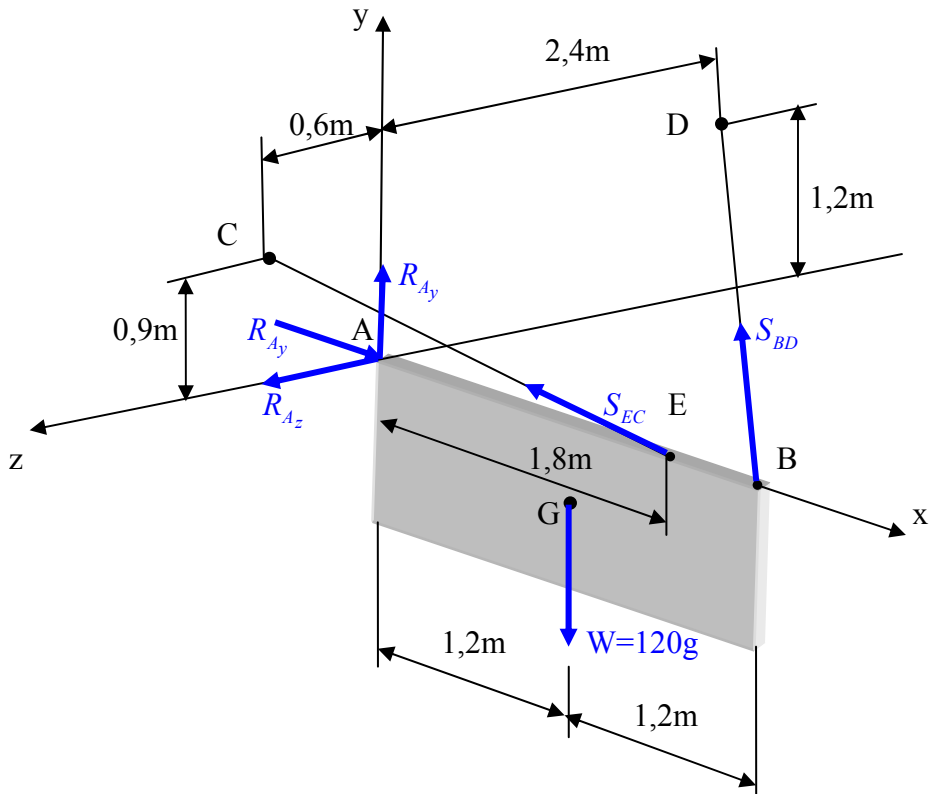
$$\sum M_x = 0, \quad \sum M_y = 0, \quad \sum M_z = 0$$

### Problem 6.8.1

120kg kütleli ve 1.5m x 2.4m boyutlarındaki dikdörtgen şeklindeki bir reklam panosu A da küresel mafsalsal E ile B de birer kablo yardımı ile şekildeki gibi tesbit edilmiştir. Kablolardaki kuvvetleri ve A mafsalsındaki tepki kuvvetini bulunuz.



Çözüm:





sıfıra eşdeğerlik koşulu

$$\sum \vec{F} = \vec{0} \Rightarrow \vec{S}_{EC} + \vec{S}_{BD} + \vec{R}_A + \vec{W} = \vec{0}$$

$$\sum \vec{M}_A = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{AE} \wedge \vec{S}_{EC} + \overrightarrow{AB} \wedge \vec{S}_{BD} + \overrightarrow{AG} \wedge \vec{W} = \vec{0}$$

$$\vec{S}_{EC} = S_{EC} \vec{U}_{EC} \quad , \quad \vec{U}_{EC} = \frac{\overrightarrow{EC}}{|\overrightarrow{EC}|} \quad , \quad \vec{U}_{EC} = \frac{(0-1,8)\vec{i} + (0,9-0)\vec{j} + (0,6-0)\vec{k}}{\sqrt{(-1,8)^2 + 0,9^2 + 0,6^2}}$$

$$\vec{U}_{EC} = \frac{-1,8\vec{i} + 0,9\vec{j} + 0,6\vec{k}}{2,1} \quad , \quad \vec{U}_{EC} = -\frac{6}{7}\vec{i} + \frac{3}{7}\vec{j} + \frac{2}{7}\vec{k} \quad , \quad \vec{S}_{EC} = -\frac{6}{7}S_{EC}\vec{i} + \frac{3}{7}S_{EC}\vec{j} + \frac{2}{7}S_{EC}\vec{k}$$

$$\vec{S}_{BD} = S_{BD} \vec{U}_{BD} \quad , \quad \vec{U}_{BD} = \frac{\overrightarrow{BD}}{|\overrightarrow{BD}|} \quad , \quad \vec{U}_{BD} = \frac{(0-2,4)\vec{i} + (1,2-0)\vec{j} + (-2,4-0)\vec{k}}{\sqrt{(-2,4)^2 + 1,2^2 + 2,4^2}}$$

$$\vec{U}_{BD} = \frac{-2,4\vec{i} + 1,2\vec{j} - 2,4\vec{k}}{3,6} \quad , \quad \vec{U}_{BD} = -\frac{2}{3}\vec{i} + \frac{1}{3}\vec{j} - \frac{2}{3}\vec{k}$$

$$\vec{S}_{BD} = -\frac{2}{3}S_{BD}\vec{i} + \frac{1}{3}S_{BD}\vec{j} - \frac{2}{3}S_{BD}\vec{k} \quad , \quad \vec{R}_A = R_x\vec{i} + R_y\vec{j} + R_z\vec{k} \quad , \quad \vec{W} = -120g\vec{j}$$

$$\overrightarrow{AE} = 1,8\vec{i} \quad , \quad \overrightarrow{AB} = 2,4\vec{i} \quad , \quad \overrightarrow{AG} = 1,2\vec{i} - 0,75\vec{j}$$

$$\sum \vec{M}_A = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{AE} \wedge \vec{S}_{EC} + \overrightarrow{AB} \wedge \vec{S}_{BD} + \overrightarrow{AG} \wedge \vec{W} = \vec{0}$$

$$1,8\vec{i} \wedge \left(-\frac{6}{7}S_{EC}\vec{i} + \frac{3}{7}S_{EC}\vec{j} + \frac{2}{7}S_{EC}\vec{k}\right) + 2,4\vec{i} \wedge \left(-\frac{2}{3}S_{BD}\vec{i} + \frac{1}{3}S_{BD}\vec{j} - \frac{2}{3}S_{BD}\vec{k}\right) + (1,2\vec{i} - 0,75\vec{j}) \wedge (-120g\vec{j}) = \vec{0}$$

$$1,8 * \frac{3}{7}S_{EC}\vec{k} - 1,8 * \frac{2}{7}S_{EC}\vec{j} + 2,4 * \frac{1}{3}S_{BD}\vec{k} + 2,4 * \frac{2}{3}S_{BD}\vec{j} - 1,2 * 120g\vec{k} = \vec{0}$$

$$\sum \vec{M}_A = \left(\frac{4,8}{3}S_{BD} - \frac{3,6}{7}S_{EC}\right)\vec{j} + \left(\frac{2,4}{3}S_{BD} + \frac{5,4}{7}S_{EC} - 144g\right)\vec{k} = \vec{0}$$

$$\begin{aligned} \frac{4,8}{3}S_{BD} - \frac{3,6}{7}S_{EC} &= 0 & \Rightarrow & \frac{4,8}{3}S_{BD} - \frac{3,6}{7}S_{EC} = 0 & \Rightarrow & \frac{14,4}{7}S_{EC} = 288g \\ \frac{2,4}{3}S_{BD} + \frac{5,4}{7}S_{EC} - 144g &= 0 & \Rightarrow & \frac{4,8}{3}S_{BD} + \frac{10,8}{7}S_{EC} = 288g \end{aligned}$$

$$S_{EC} = 140g \quad , \quad S_{BD} = 45g \quad , \quad \boxed{S_{EC} = 1373,4N} \quad , \quad \boxed{S_{BD} = 441,45N}$$

$$\sum \vec{F} = \left(-\frac{6}{7}S_{EC}\vec{i} + \frac{3}{7}S_{EC}\vec{j} + \frac{2}{7}S_{EC}\vec{k}\right) + \left(-\frac{2}{3}S_{BD}\vec{i} + \frac{1}{3}S_{BD}\vec{j} - \frac{2}{3}S_{BD}\vec{k}\right) + (R_x\vec{i} + R_y\vec{j} + R_z\vec{k}) + (-120g\vec{j}) = \vec{0}$$

$$\sum \vec{F} = \left(-\frac{6}{7}S_{EC} - \frac{2}{3}S_{BD} + R_x\right)\vec{i} + \left(\frac{3}{7}S_{EC} + \frac{1}{3}S_{BD} + R_y - 120g\right)\vec{j} + \left(\frac{2}{7}S_{EC} - \frac{2}{3}S_{BD} + R_z\right)\vec{k} = \vec{0}$$

$$-\frac{6}{7}S_{EC} - \frac{2}{3}S_{BD} + R_x = 0 \quad \Rightarrow \quad -\frac{6}{7}140g - \frac{2}{3}45g + R_x = 0 \quad \Rightarrow \quad R_x = 150g$$

$$\frac{3}{7}S_{EC} + \frac{1}{3}S_{BD} + R_y - 120g = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{3}{7}140g + \frac{1}{3}45g + R_y - 120g = 0 \quad \Rightarrow \quad R_y = 45g$$

$$\frac{2}{7}S_{EC} - \frac{2}{3}S_{BD} + R_z = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{2}{7}140g - \frac{2}{3}45g + R_z = 0 \quad \Rightarrow \quad R_z = -10g$$

$$\boxed{R_x = 1471,5N}$$

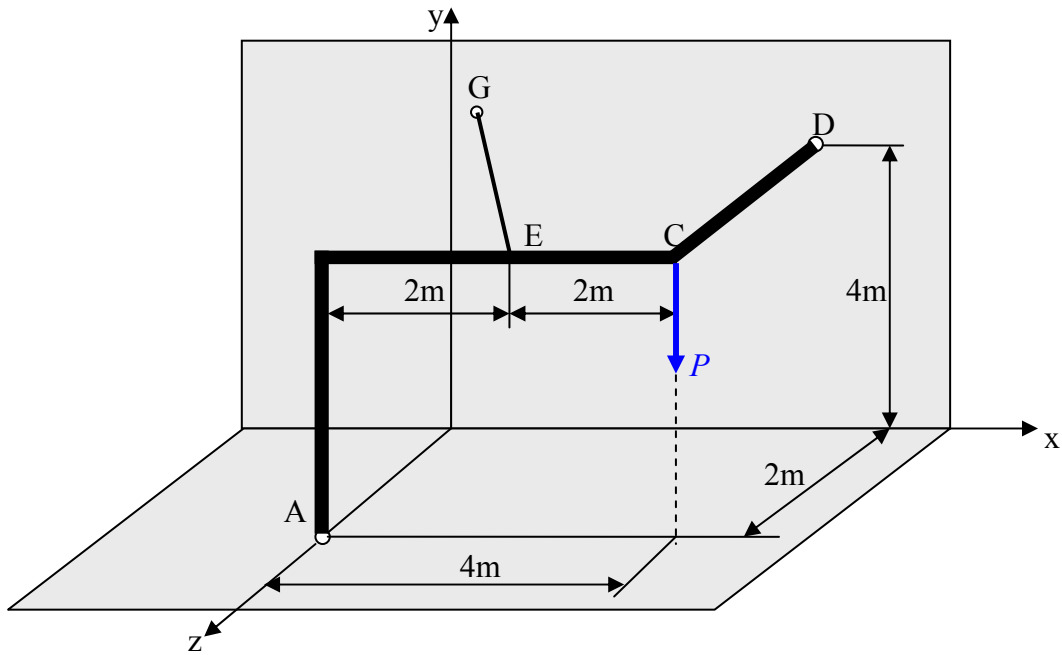
$$\boxed{R_y = 441,45N}$$

$$\boxed{R_z = -98,1N}$$

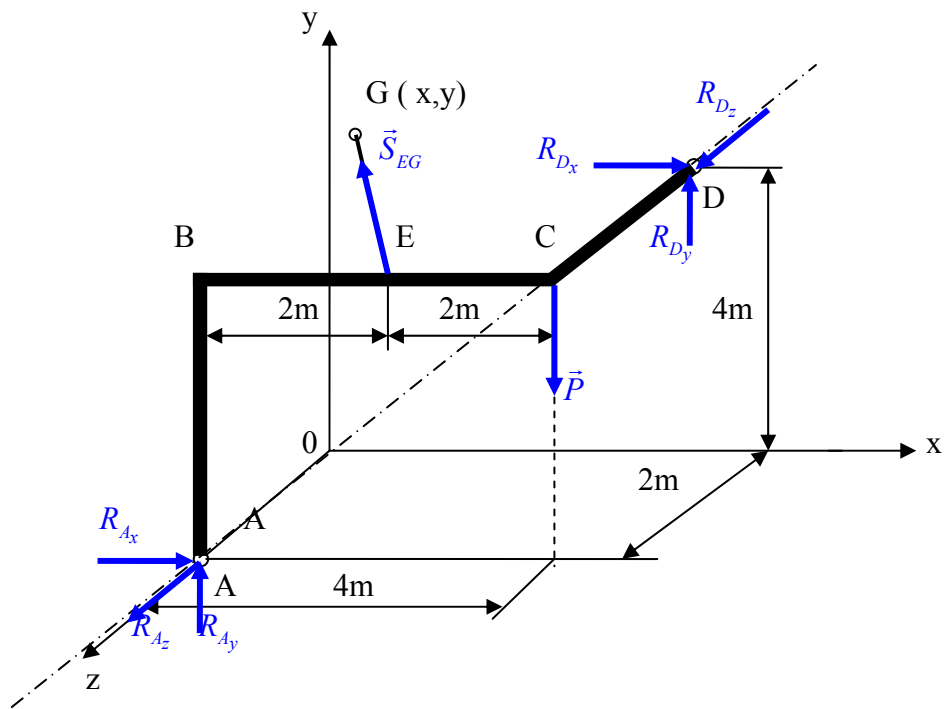
### Problem 6.8.2

450 N luk bir yük şekildeki gibi bükülmüş bir rijid borunun C köşesine uygulanmıştır. Boru A da zemine ve D de düşey duvara küresel mafsall ile E de ise EG kablo su yardımı ile tesbit edilmiştir.

- EG kablo su ndaki gerilme kuvvetinin minimum olması için kablo nun karşı duvara bağlandı ğı G noktası nerde olmalıdır.
- Bu durumdaki minimum kablo kuvvetinin şiddetini bulunuz.



Çözüm:



$S_{EG}$  kablo kuvvetinin minimum olması için kablonun doğrultusu aynı kuvvetle AD eksenine göre en büyük momenti verecek şekilde olmalı yani AD eksenini ile E noktasının oluşturduğu düzleme dik olmalıdır.

$$\overrightarrow{ED} \wedge \overrightarrow{AD} = \lambda \overrightarrow{EG} \quad \text{olmalı}$$

$$\overrightarrow{EG} = (x-2)\vec{i} + (y-4)\vec{j} - 2\vec{k}, \quad \overrightarrow{ED} = 2\vec{i} - 2\vec{k}, \quad \overrightarrow{AD} = 4\vec{i} + 4\vec{j} - 2\vec{k}$$

$$\overrightarrow{ED} \wedge \overrightarrow{AD} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 0 & -2 \\ 4 & 4 & -2 \end{vmatrix}, \quad \overrightarrow{ED} \wedge \overrightarrow{AD} = 8\vec{i} - 4\vec{j} + 8\vec{k}$$

$$8\vec{i} - 4\vec{j} + 8\vec{k} = \lambda(x-2)\vec{i} + \lambda(y-4)\vec{j} - 2\lambda\vec{k}$$

$$\lambda(x-2) = 8$$

$$\lambda = -4$$

$$\lambda(y-4) = -4 \Rightarrow -4x + 8 = 8 \Rightarrow$$

$$-2\lambda = 8$$

$$-4y + 16 = -4$$

$$\boxed{\begin{matrix} x = 0 \\ y = 5 \end{matrix}}$$

$$\Sigma M_{AD} = 0 \Rightarrow (\overrightarrow{DE} \wedge \vec{S}_{EG}) \cdot \vec{U}_{AD} + (\overrightarrow{DC} \wedge \vec{P}) \cdot \vec{U}_{AD} = 0$$

$$\overrightarrow{DE} = -2\vec{i} + 2\vec{k}, \quad \overrightarrow{DC} = 2\vec{k}, \quad \vec{P} = -450\vec{j}, \quad \vec{S}_{EG} = S_{EG} \vec{U}_{EG}$$

$$\vec{U}_{EG} = \frac{\overrightarrow{EG}}{|\overrightarrow{EG}|}, \quad \vec{U}_{EG} = \frac{-2\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}}{\sqrt{(-2)^2 + 1^2 + (-2)^2}}, \quad \vec{U}_{EG} = -\frac{2}{3}\vec{i} + \frac{1}{3}\vec{j} - \frac{2}{3}\vec{k}$$

$$\vec{S}_{EG} = -\frac{2}{3}S_{EG}\vec{i} + \frac{1}{3}S_{EG}\vec{j} - \frac{2}{3}S_{EG}\vec{k}$$

$$\vec{U}_{AD} = \frac{\overrightarrow{AD}}{|\overrightarrow{AD}|}, \quad \vec{U}_{AD} = \frac{4\vec{i} + 4\vec{j} - 2\vec{k}}{\sqrt{4^2 + 4^2 + (-2)^2}}, \quad \vec{U}_{AD} = \frac{2}{3}\vec{i} + \frac{2}{3}\vec{j} - \frac{1}{3}\vec{k}$$

$$\overrightarrow{DE} \wedge \vec{S}_{EG} = (-2\vec{i} + 2\vec{k}) \wedge \left(-\frac{2}{3}S_{EG}\vec{i} + \frac{1}{3}S_{EG}\vec{j} - \frac{2}{3}S_{EG}\vec{k}\right)$$

$$\overrightarrow{DE} \wedge \vec{S}_{EG} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & 0 & 2 \\ -\frac{2}{3}S_{EG} & \frac{1}{3}S_{EG} & -\frac{2}{3}S_{EG} \end{vmatrix}, \quad \overrightarrow{DE} \wedge \vec{S}_{EG} = -\frac{2}{3}S_{EG}\vec{i} - \frac{8}{3}S_{EG}\vec{j} - \frac{2}{3}S_{EG}\vec{k}$$

$$\overrightarrow{DC} \wedge \vec{P} = 2\vec{k} \wedge -450\vec{j}, \quad \overrightarrow{DC} \wedge \vec{P} = 900\vec{i}$$

$$(\overrightarrow{DE} \wedge \vec{S}_{EG}) \cdot \vec{U}_{AD} + (\overrightarrow{DC} \wedge \vec{P}) \cdot \vec{U}_{AD} = \left[ \left(-\frac{2}{3}S_{EG} + 900\right)\vec{i} - \frac{8}{3}S_{EG}\vec{j} - \frac{2}{3}S_{EG}\vec{k} \right] \cdot \left(\frac{2}{3}\vec{i} + \frac{2}{3}\vec{j} - \frac{1}{3}\vec{k}\right) = 0$$

$$-\frac{4}{9}S_{EG} + 600 - \frac{16}{9}S_{EG} + \frac{2}{9}S_{EG} = 0$$

$$-2S_{EG} + 600 = 0 \Rightarrow$$

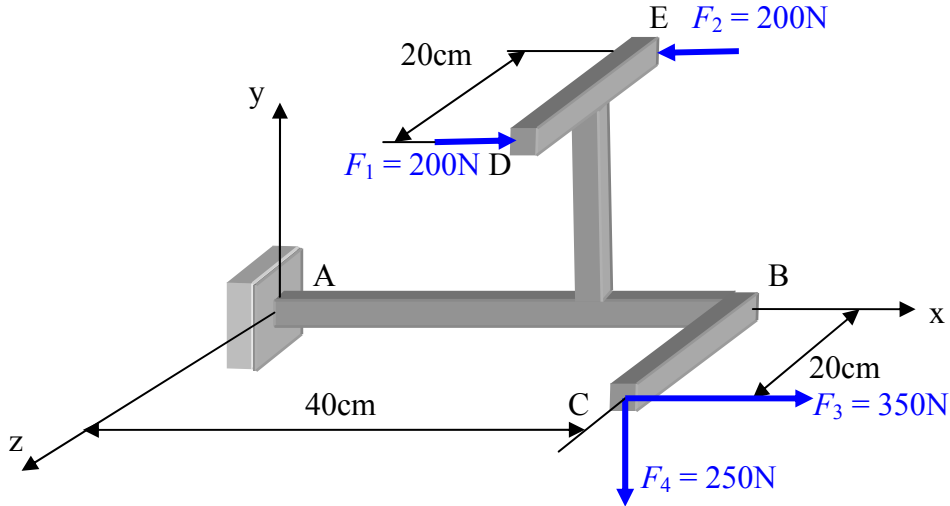
$$\boxed{S_{EG} = 300 \text{ N}}$$

### Problem 6.8.3

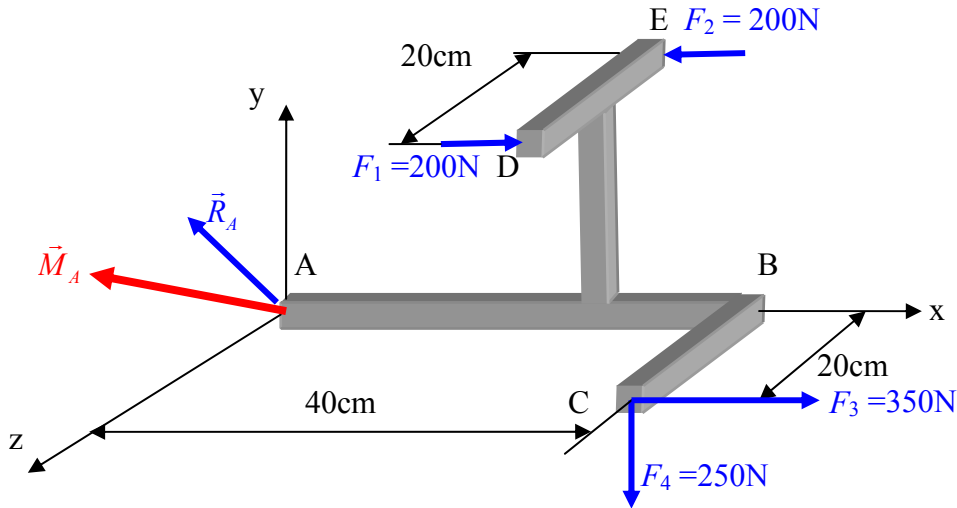
A da ankastre mesnetli ABCDE cismi şekildeki gibi yüklenmiştir.

a) A ankastre mesnetindeki tepkileri hesaplayınız.

b) A ya çok yakın x eksenine dik kesitteki kesit zorlarını bulunuz.



Çözüm:



a)

sıfıra eşdeğerlik koşulu

$$\sum \vec{F} = \vec{0} \Rightarrow \vec{R}_A + \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_4 = \vec{0}$$

$$\sum \vec{M}_A = \vec{0} \Rightarrow \vec{M}_A + \overline{AD} \wedge \vec{F}_1 + \overline{AE} \wedge \vec{F}_2 + \overline{AC} \wedge \vec{F}_3 + \overline{AC} \wedge \vec{F}_4 = \vec{0}$$

$\vec{F}_1$  ve  $\vec{F}_2$  kuvvet çifti olduğundan geometrik toplamı sıfır bileşke momenti ise  $200 * 20 \vec{j}$  dir.

$$\vec{F}_3 = 350 \vec{i} , \quad \vec{F}_4 = -250 \vec{j} , \quad \overline{AC} = 40 \vec{i} + 20 \vec{k}$$

$$\sum \vec{F} = \vec{R}_A + 350 \vec{i} - 250 \vec{j} = \vec{0} \Rightarrow \boxed{\vec{R}_A = -350 \vec{i} + 250 \vec{j}}$$

$$\sum \vec{M}_A = \vec{M}_A + 4000 \vec{j} + (40 \vec{i} + 20 \vec{k}) \wedge (350 \vec{i} - 250 \vec{j}) = \vec{0} ,$$

$$\boxed{\vec{M}_A = -5000 \vec{i} - 11000 \vec{j} + 10000 \vec{k}}$$

b)

A da ki x eksenine dik kesitteki **normal kuvvet**  $\vec{R}_A$  kuvvetinin kesite dik bileşenidir.

**normal kuvvet** =  $\boxed{-350N}$  ( Bu kuvvet cismi çekmeye çalıştığından pozitif alınmalıdır.)

A da ki x eksenine dik kesitteki **kesme kuvveti**  $\vec{R}_A$  kuvvetinin kesit içindeki bileşenidir.

**kesme kuvveti** = 250N.  $\boxed{250N}$

A da ki x eksenine dik kesitteki **burulma momenti**  $\vec{M}_A$  momentinin kesite dik bileşenidir.

**burulma momenti** =  $\boxed{-5000Ncm}$

A da ki x eksenine dik kesitteki **eğilme momenti**  $\vec{M}_A$  momentinin kesite içindeki bileşenidir.

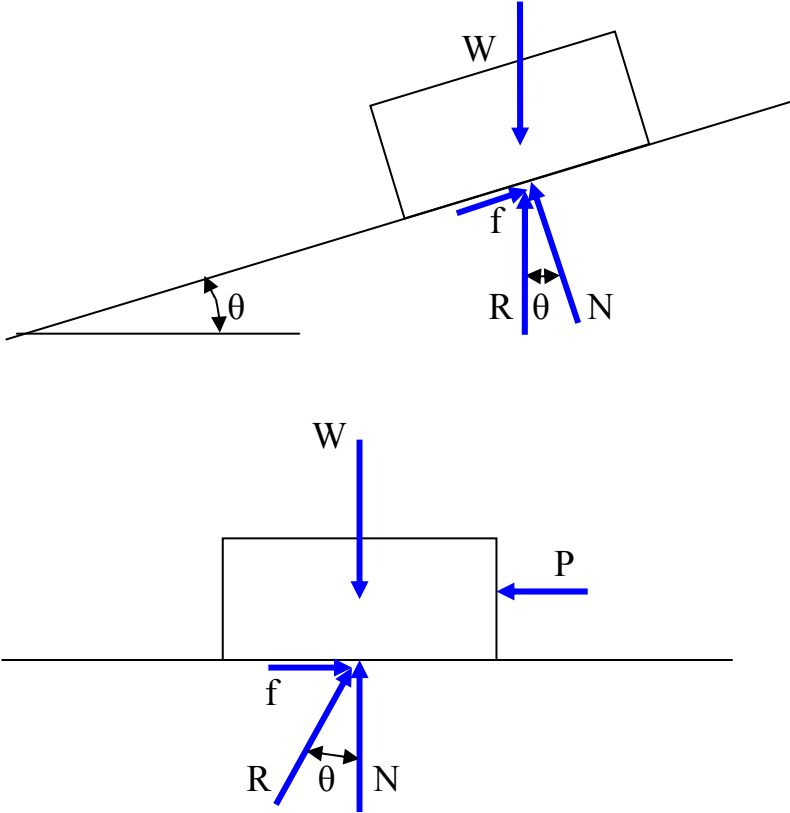
**eğilme momenti** =  $\boxed{-11000\vec{j} + 10000\vec{k}}$

**eğilme momenti** =  $\boxed{\sqrt{11000^2 + 10000^2} = 14866 Ncm}$

## BÖLÜM 7

### SÜRTÜNME

#### 7.1 Sürtünme ve sürtünme katsayısı



Yukardaki şekillerde gösterildiği gibi eğim açısı  $\theta$  olan bir eğik düzlem üzerine bırakılan bir cismin  $\theta$  nın belli değerlerine kadar dengede kaldığı bilinir. Aynı şekilde yatay düzlem üzerine bırakılan bir cisme yatay doğrultuda bir P kuvveti uygulanırsa P nin belli değerlerine kadar cismin dengede kaldığı bilinir. Bütün bunların nedeni temas eden yüzeyler doğrultusunda tepki kuvvetlerinin oluşmasıdır. Bu kuvvetlere sürtünme kuvvetleri denir.

$$f = N \tan \theta$$

Sürtünme kuvvetinin maksimum değeri birbirlerine temasta olan cisimlerin cinslerine ve temas yüzeylerinin özelliklerine bağlıdır.

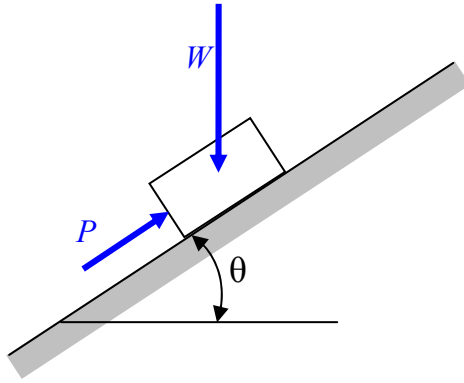
dengede kalmak şartıyla  $\theta$  nın en büyük değerinin tanjantına sürtünme katsayısı denir ve  $\mu$  ile gösterilir.

$$\mu = \tan \theta_{\text{maks.}} \quad , \quad f_{\text{maks.}} = \mu N$$

metal üstünde metal	0.15-0.60
metal tahta üstünde	0.20-0.60
metal taş üstünde	0.30-0.70
metal deri üstünde	0.30-0.60
tahta tahta üstünde	0.25-0.50
tahta deri üstünde	0.25-0.50
taş taş üstünde	0.40-0.70
toprak toprak üstünde	0.20-1.00
lastik beton üstünde	0.60-0.90

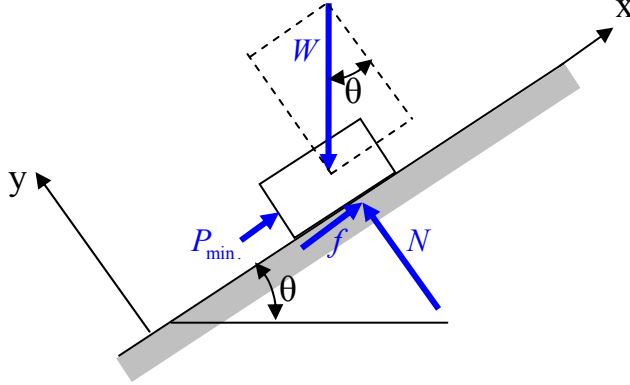
Çeşitli malzemeler için sürtünme katsayıları tablosu

**Problem 7.1.1**  $\theta = 60^\circ$  eğim açılı eğik düzlem ile üzerindeki  $W = 100$  N. ağırlığındaki cismin sürtünme katsayısı  $\mu = 0.4$  dır.  $P$  kuvvetinin hangi değerleri arasında cisim eğik düzlem üzerinde hareketsiz kalır. Bu sınırlardaki sürtünme kuvvetinin değerlerini bulunuz.



Çözüm:

Cismin aşağı doğru kaymaması için gerekli olan en küçük  $P$  kuvveti  $P_{\min}$  dir. Bu durumda sürtünme kuvvetinin yönü yukarı doğrudur.



x eksenini eğik düzlem doğrultusunda ve y eksenini buna dik doğrultuda alınıp bu düzlemde denge denklemleri aşağıdaki gibi yazılabilir.

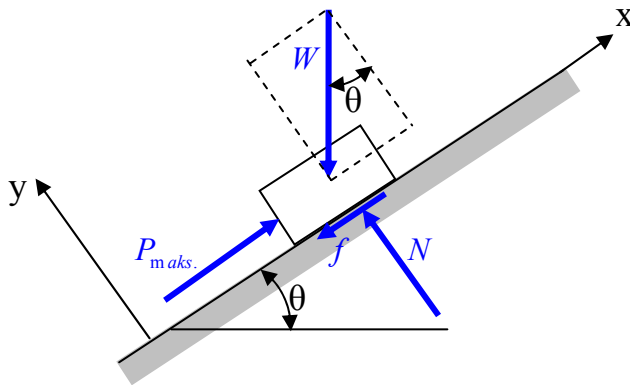
$$\sum F_x = 0 \Rightarrow P_{\min} + f - W \sin \theta = 0 \quad (1)$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow N - W \cos \theta = 0 \Rightarrow N = 100 \cos 60^\circ, \quad N = 50 \text{ Newton}$$

$$f = \mu N \Rightarrow f = 0,4 * 50, \quad \boxed{f = 20 \text{ Newton}}$$

$$P_{\min} = -f + W \sin \theta, \quad P_{\min} = 50\sqrt{3} - 20, \quad \boxed{P_{\min} = 66,6 \text{ Newton}}$$

Cisim yukarı doğru çıkma meyilinde ve hareketsiz durumda en büyük  $P$  kuvveti  $P_{\max}$  dir. Bu durumda sürtünme kuvveti aşağı doğrudur.



Bu durumda sürtünme kuvvetinin yönü değiştiğinden sadece birinci denklem değişir.

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow P_{\max} - f - W \sin \theta = 0 \Rightarrow P_{\max} = f + W \sin \theta$$

$$P_{\max} = 50\sqrt{3} + 20, \quad \boxed{P_{\max} = 106,6 \text{ Newton}}, \quad \boxed{66,6 \text{ Newton} \leq P \leq 106,6 \text{ Newton}}$$

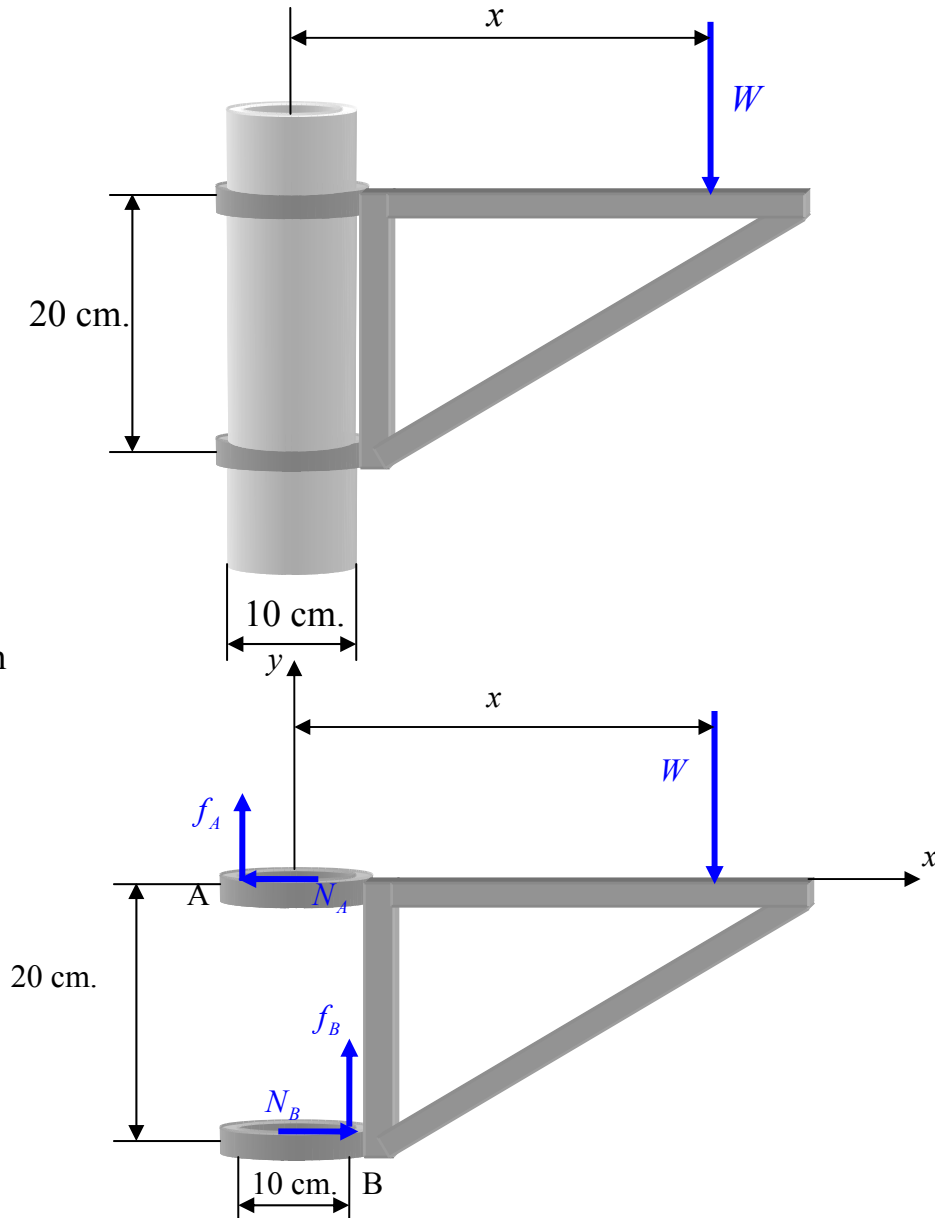


## 7.2 mesnetlerdeki sürtünmeler

Mesnetlerde temas yüzeyi belli ise sürtünme kuvveti bu yüzeye teğettir. Eğer mesnet mafsalsal şeklinde ve temas yüzeyi bilinmiyorsa ise sürtünme momenti göz önüne alınarak işlem yapılabilir.

**Problem 7.2.1** Şekilde görülen hareketli konsol 10 cm. çapındaki bir borunun üzerinde istenilen bir yüksekliğe konulabilmektedir. Konsolla boru arasındaki sürtünme katsayısı  $\mu = 0,25$  olduğuna göre, konsolun ağırlığını ihmal ederek  $W$  yükünün taşınabileceği en küçük  $x$  uzaklığını bulunuz.

Çözüm



$$f_A = \mu N_A, \quad f_B = \mu N_B, \quad f_A = 0,25 N_A, \quad f_B = 0,25 N_B$$

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow N_B - N_A = 0 \Rightarrow N_B = N_A$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow f_A + f_B - W = 0 \Rightarrow f_A + f_B = W \Rightarrow f_A = f_B = \frac{W}{2}$$

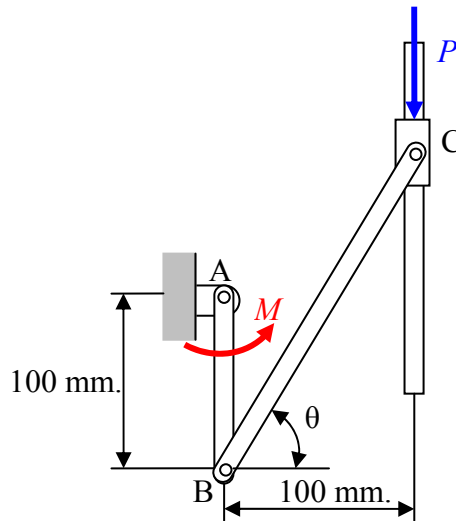
$$N_B = N_A = 2W$$

$$\sum M_B = 0 \Rightarrow 20 N_A - 10 f_A - (x - 5)W = 0$$

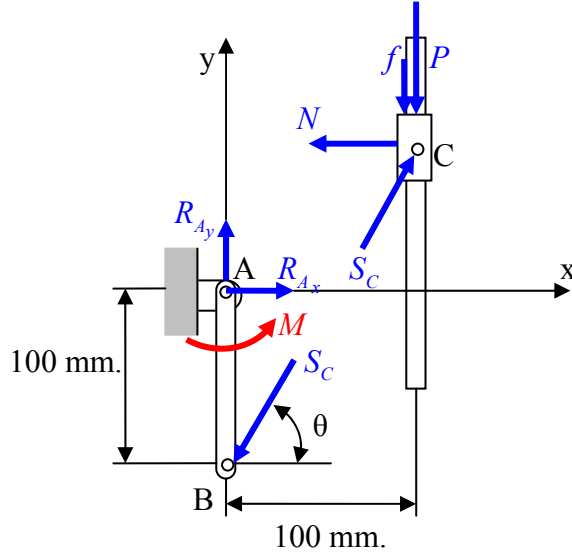
$$20 N_A - 10 f_A - W x + 5W = 0 \Rightarrow x = \frac{20 N_A - 10 f_A + 5W}{W}$$

$$x = \frac{20 * 2W - 10 * \frac{W}{2} + 5W}{W}, \quad x = \frac{40W - 5W + 5W}{W}, \quad \boxed{x = 40 \text{ cm.}}$$

**Problem 7.2.2** Şekildeki mekanizmada Bilezik ve çubuk arasındaki sürtünme katsayısı  $\mu = 0,4$ ,  $\theta = 60^\circ$  ve  $P = 200 \text{ N}$ . olduğu bilindiğine göre mekanizma kranka uygulanan M momentinin hangi değerlerinde dengededir.



Çözüm:



C Bileziğinin yukarı doğru kayma başlangıcında dengesi için :

$$f = \mu N \quad , \quad f = 0,4 * N$$

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow S_C \cos \theta - N = 0 \Rightarrow N = S_C \cos \theta \quad , \quad f = 0,4 S_C \cos \theta$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow S_C \sin \theta - f - P = 0 \Rightarrow S_C \sin \theta - 0,4 S_C \cos \theta - P = 0$$

$$S_C (\sin \theta - 0,4 \cos \theta) = P \Rightarrow S_C = \frac{P}{\sin \theta - 0,4 \cos \theta} \quad , \quad S_C = \frac{200}{\sin 60^\circ - 0,4 \cos 60^\circ}$$

$$S_C = 300,289 N.$$

AB çubuğunun dengesi için :

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow M_{maks.} - 100 S_C \cos \theta = 0 \Rightarrow M_{maks.} = 100 S_C \cos \theta$$

$$M_{maks.} = 100 * 300,289 \cos 60^\circ \quad , \quad \boxed{M_{maks.} = 15014,5 Nmm.}$$

C Bileziğinin aşağı doğru kayma başlangıcında dengesi için :

Bu durumun yukarıdaki şekilden farkı sürtünme kuvvetinin yönü yukarı doğrudur.

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow S_C \sin \theta + f - P = 0 \quad , \quad S_C \sin \theta + 0,4 S_C \cos \theta - P = 0$$

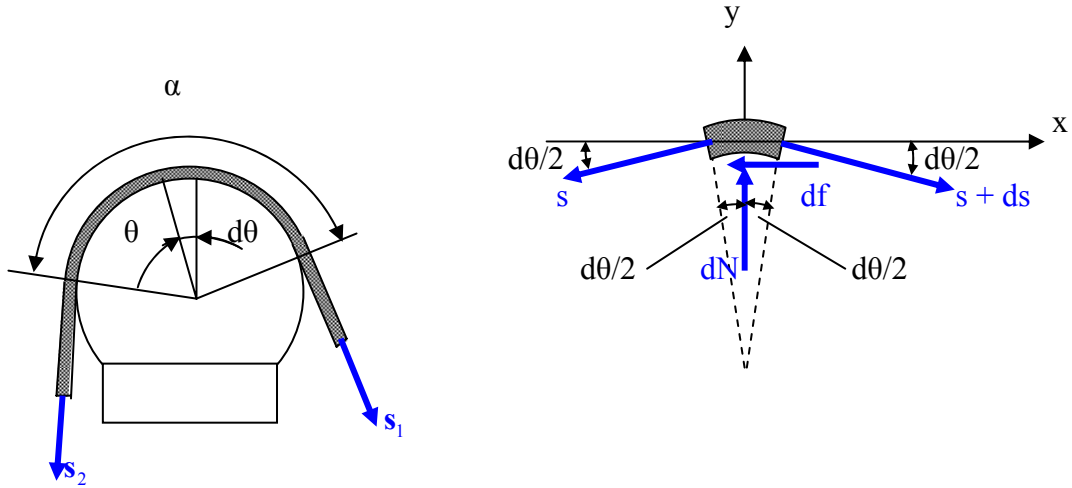
$$S_C (\sin \theta + 0,4 \cos \theta) = P \Rightarrow S_C = \frac{P}{\sin \theta + 0,4 \cos \theta} \quad , \quad S_C = \frac{200}{\sin 60^\circ + 0,4 \cos 60^\circ}$$

$$S_C = 187,613 N. \quad M_{min.} = 100 S_C \cos \theta \quad , \quad M_{min.} = 100 * 187,613 \cos 60^\circ \quad ,$$

$$\boxed{M_{min.} = 9380,6 Nmm.}$$

$$\boxed{9,38 Nm. \leq M \leq 15,01 Nm.}$$

### 7.3 Halat veya kayış kaskak sürtünmesi



Silindirik yüzey üzerine sarılı halattan alınan diferansiyel elemanda

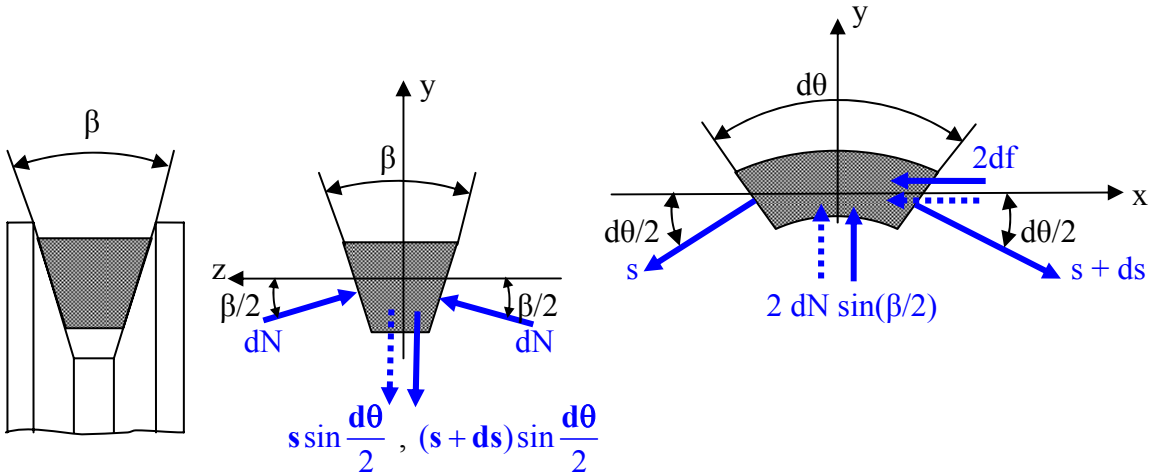
$$\sum F_x = 0 \Rightarrow (s + ds) \cos(d\theta/2) - s \cos(d\theta/2) - df = 0$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow dN - (2s + ds) \sin(d\theta/2) = 0 \text{ denklemleri yazılabilir.}$$

$\cos(d\theta/2) = 1$  ,  $\sin(d\theta/2) = (d\theta/2)$  ve  $df = \mu dN$  olduğu bilindiğine göre  $ds = df$  ,  $dN = s d\theta$  ,  $ds = \mu s d\theta$  yazılabilir.

$$\frac{ds}{s} = \mu d\theta , \quad \int_{s_2}^{s_1} \frac{ds}{s} = \mu \int_0^\alpha d\theta , \quad \ln \frac{s_1}{s_2} = \mu \alpha , \quad \boxed{\frac{s_1}{s_2} = e^{\mu \alpha}} \text{ elde edilir.}$$

Bu çağda kayış kaskak sistemlerinde düz kayış yerine daha çok aşağıda gösterilen kesiti V şeklinde olan V kayışları kullanılır.

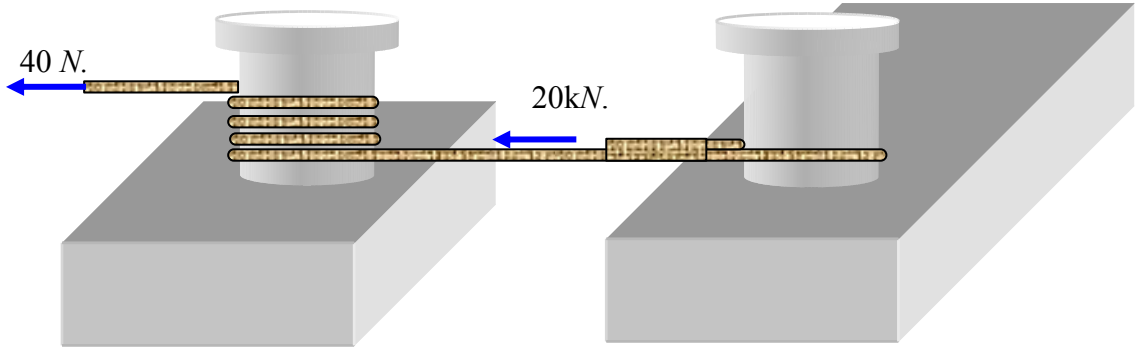


V kayışlı kayış kaskak sistemlerinde kayışın her iki yan yüzeyinde temas olduğundan diferansiyel elemanda sürtünme kuvvetinin iki katı alınır. Normal kuvvet yerine  $2dN \sin \beta/2$  alınarak düz kayış için yapılan işlemler tekrar edilirse

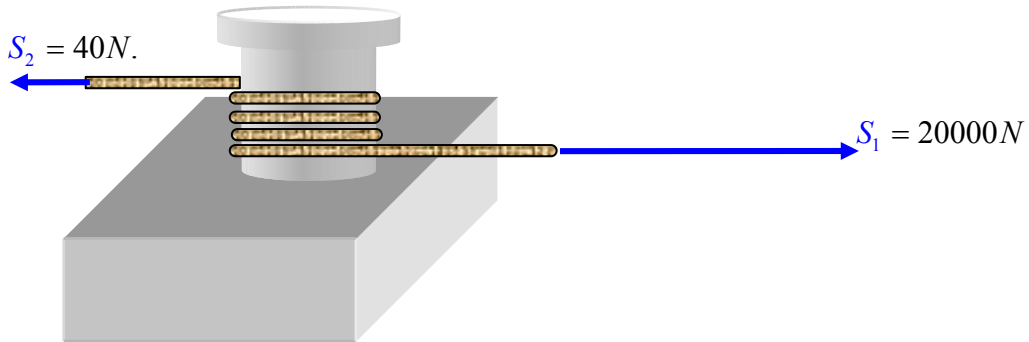
$$\boxed{\frac{s_1}{s_2} = e^{\mu \alpha / \sin(\beta/2)}} \text{ formülü bulunur.}$$

**Problem 7.3.1** Bir gemiyi rıhtımda durdurmak için kullanılan halatın halka şeklinde oluşturulmuş kısmı iskele babasına takılır. Halatın diğer ucuna gemideki babanın etrafına 4 kere sarıldıktan sonra kuvvet uygulanır. Halata geminin uyguladığı kuvvet 20kN dır.

görevlinin uyguladığı kuvvet 40N olduğuna göre halat ile baba denilen silindirik cismin yanal yüzeyi arasındaki sürtünme katsayısını bulunuz.



Çözüm:

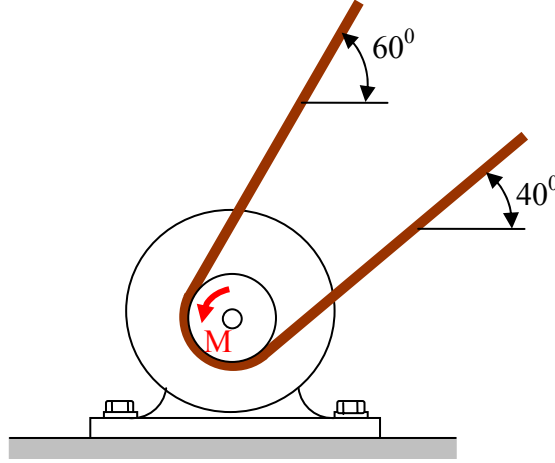


$$\frac{S_1}{S_2} = e^{\mu\alpha} \quad , \quad S_1 = 20kN. = 20000N. \quad , \quad \alpha = 4 * 2\pi \quad , \quad \alpha = 8\pi$$

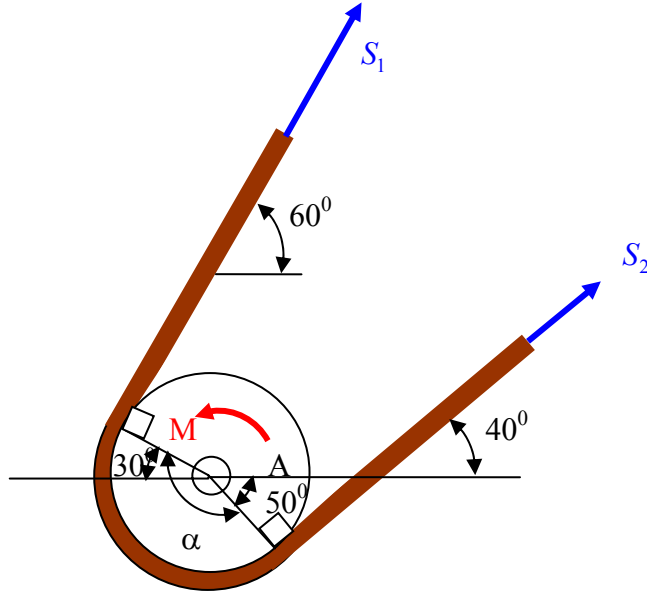
$$\frac{20000}{40} = e^{8\pi\mu} \quad , \quad 500 = e^{8\pi\mu} \Rightarrow \ln 500 = \ln e^{8\pi\mu} \Rightarrow \ln 500 = 8\pi\mu$$

$$\mu = \frac{\ln 500}{8\pi} \quad , \quad \boxed{\mu = 0,247}$$

**Problem 7.3.2** Bir elektrik motoru ile üretilen 60 Nm. lik bir momenti iletmek için bir yassı kayış kullanılmaktadır. Kayış şekilde görüldüğü gibi 12 cm. çaplı motordaki kasnaktan aldığı momenti iletmektedir. Kayışla kasnak arasındaki statik sürtünme katsayısı 0.3 dür. Kayışın her iki kısmındaki çekmenin , kayma olmasını engelleyecek en küçük değerlerini bulunuz.



Çözüm:



Kayıstaki büyük kuvvet momentin tersi yönünde olur.

$$\frac{S_1}{S_2} = e^{\mu\alpha} \quad , \quad \mu = 0,3 \quad , \quad \alpha = 180 + 30 - 50 \quad , \quad \alpha = 160^\circ \quad , \quad \alpha = 160 \frac{\pi}{180} \text{ rad.}$$

$$\alpha = 2,793 \text{ rad.} \quad \frac{S_1}{S_2} = e^{0,838} \quad , \quad \frac{S_1}{S_2} = 2,311 \quad , \quad S_1 = 2,311 S_2$$

$$\sum M_A = 0 \quad , \quad M + S_2 R - S_1 R = 0 \quad \Rightarrow \quad S_1 - S_2 = \frac{M}{R} \quad , \quad S_1 - S_2 = \frac{60}{0,12/2}$$

$$S_1 - S_2 = 1000 \text{ N} \quad , \quad S_1 = 2,311 S_2 \quad , \quad 2,311 S_2 - S_2 = 1000 \text{ N} \quad \Rightarrow \quad \boxed{S_2 = 762,8 \text{ N.}}$$

$$\boxed{S_1 = 1762,8 \text{ N.}}$$

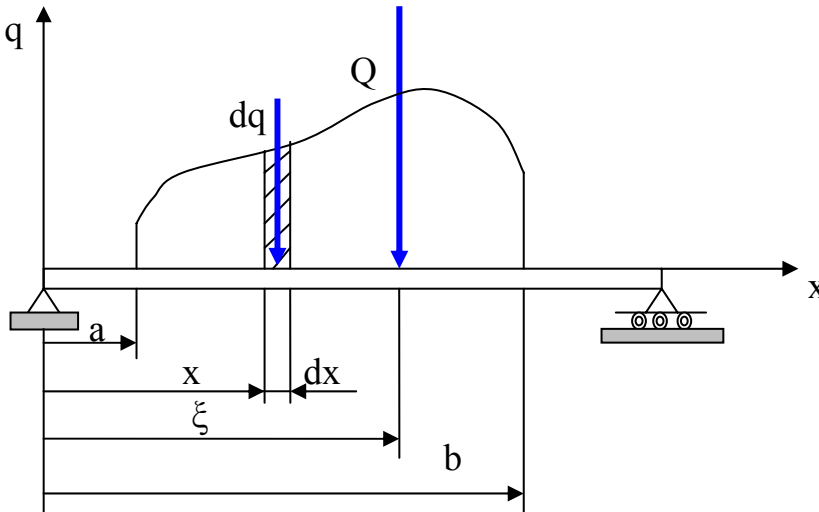
## BÖLÜM 8

### YAYILI YÜKLER

#### 8.1 Yayılı yüklerin tanımı

Kuvvetler bir yüzeye veya bir hacme etki ederler. Çoğu durumda bu kuvvetler yerine bunların bileşkesi tek bir kuvvetmiş gibi gözönüne alınır. Burada yayılı yüklerin tekil yüklere dönüştürülme yöntemlerinden bahsedilecek.

#### 8.2 Kirişlerde Yayılı yükler



Yayılı yükün bileşkesinin şiddeti yayılı yük eğrisi altındaki alana eşittir.

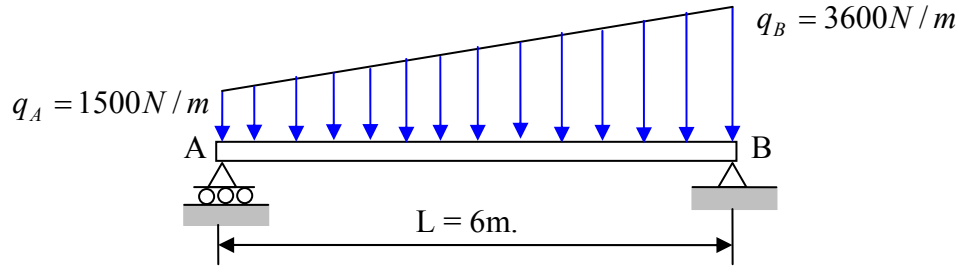
$$Q = \int_a^b dq \quad dq = q \cdot dx$$

$$Q = \int_a^b q(x) dx$$

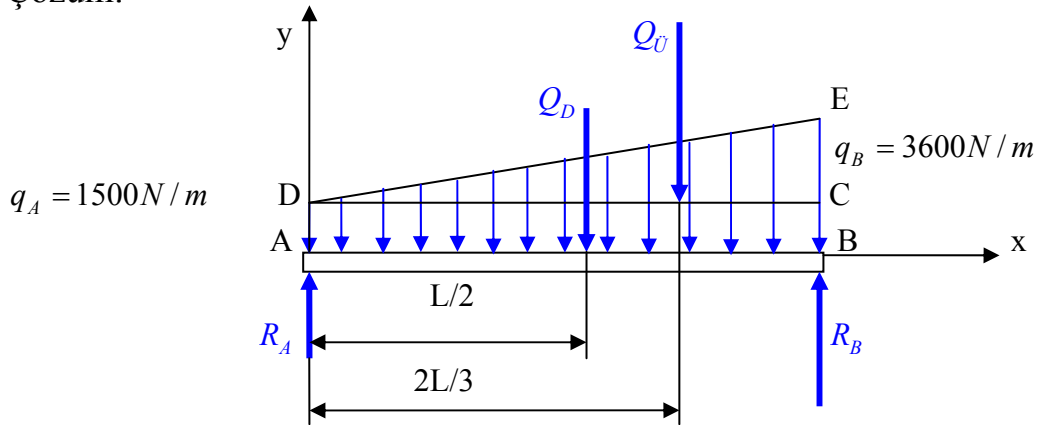
Yayılı yükün bileşkesi yayılı yük eğrisi altındaki alanın merkezinden geçer.

$$\xi = \frac{\int_a^b x q(x) dx}{\int_a^b q(x) dx}$$

**Problem 8.2.1** Basit mesnetli bir kiriş şeklindeki gibi yayılı yük taşımaktadır. mesnet tepkilerini hesaplayınız.



Çözüm:



$Q_D = ABCD$  Dikdörtgeninin alanı ,  $Q_D = L * 1500$  ,  $Q_D = 9000 N$ .

$Q_U = CDE$  Üçgeninin alanı ,  $Q_U = L * (3600 - 1500) / 2$  ,  $Q_U = 6300 N$ .

$Q_D = ABCD$  Dikdörtgeninin merkezinden geçer.

$Q_U = CDE$  Üçgeninin merkezinden geçer.

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow R_B L - Q_D \frac{L}{2} - Q_U \frac{2L}{3} = 0 \Rightarrow R_B = Q_D \frac{1}{2} + Q_U \frac{2}{3}$$

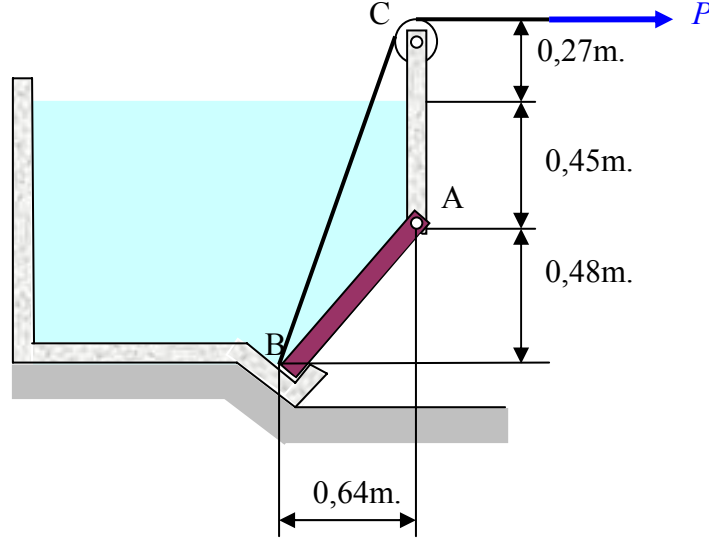
$$R_B = 9000 \frac{1}{2} + 6300 \frac{2}{3} , \quad \boxed{R_B = 8700 N.}$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow R_A + R_B - Q_D - Q_U = 0 \Rightarrow R_A = -R_B + Q_D + Q_U$$

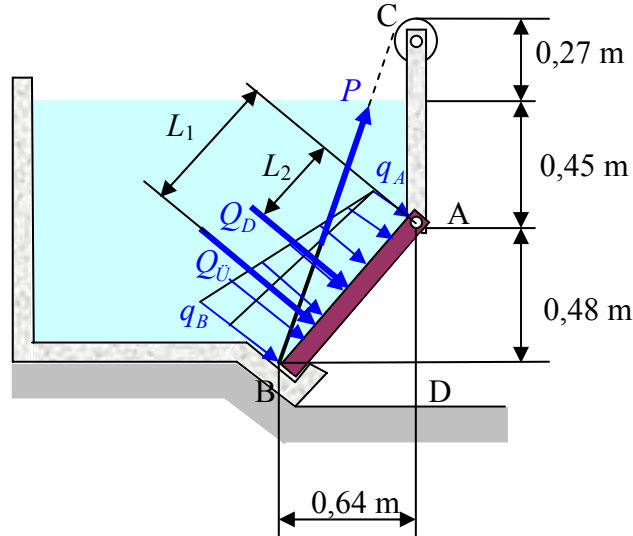
$$R_A = -8700 + 9000 + 6300 , \quad \boxed{R_A = 6600 N.}$$



**Problem 8.2.2** Su dolu tankın altında bulunan 0,5m. X 0,8m. boyutlarındaki bir kapak A noktasından mafsallıdır. B deki bir çıkıntı yardımı ile aşağı doğru dönmesi engellenmektedir. Kapak B den bağlanan ipe kuvvet uygulanarak açılabilir. Kapağın açılabilmesi için ipe uygulanan en küçük kuvveti bulunuz.



Çözüm:



$$q_A = 0,45 * 0,5 * 1000 * 9,81 \text{ , } q_A = 2207,3 \text{ N/m} \text{ , } q_B = (0,45 + 0,48) * 0,5 * 1000 * 9,81$$

$$q_B = 4561,7 \text{ N/m}$$

$Q_U$  = Kapağa etki eden yayılı yükte gösterilen üçgenin alanı

$$Q_U = (q_B - q_A) * \overline{AB} / 2 \text{ , } Q_U = (4561,7 - 2207,3) * 0,8 / 2 \text{ , } Q_U = 941,76 \text{ N.}$$

$Q_D$  = Kapağa etki eden yayılı yükte gösterilen dikdörtgenin alanı

$$Q_D = q_A * \overline{AB} \text{ , } Q_D = 2207,3 * 0,8 \text{ , } Q_D = 1765,84 \text{ N}$$

$$L_1 = \frac{2}{3} \overline{AB} \text{ , } L_2 = \frac{1}{2} \overline{AB}$$

$$\sum M_A = 0 \quad , \quad P \frac{\overrightarrow{BD}}{\overrightarrow{BC}} \overrightarrow{AD} - P \frac{\overrightarrow{CD}}{\overrightarrow{BC}} \overrightarrow{BD} + Q_U \frac{2}{3} \overrightarrow{AB} + Q_D \frac{1}{2} \overrightarrow{AB} = 0$$

$$\overrightarrow{BC} = \sqrt{\overrightarrow{BD}^2 + \overrightarrow{CD}^2} \quad , \quad \overrightarrow{CD} = 0,27 + 0,45 + 0,48 \quad , \quad \overrightarrow{CD} = 1,2m$$

$$\overrightarrow{BC} = \sqrt{(0,64)^2 + (1,2)^2} \quad , \quad \overrightarrow{BC} = 1,36m$$

$$P \frac{0,64}{1,36} 0,48 - P \frac{1,2}{1,36} 0,64 + 941,76 \frac{2}{3} 0,8 + 1765,84 \frac{1}{2} 0,8 = 0$$

$$P \left( \frac{0,64}{1,36} 0,48 - \frac{1,2}{1,36} 0,64 \right) + 941,76 \frac{2}{3} 0,8 + 1765,84 \frac{1}{2} 0,8 = 0$$

$$P(-0,33882) + 1208,608 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{P = 3567,1N}$$

## BÖLÜM 9

### KABLolar

#### 9.1 Genel bilgi

Kabloların asma köprüler , yüksek gerilim hatları , teleferikler ve yüksek kulelerin bağlantıları gibi bir çok uygulamaları vardır.Kablolar yükleme durumuna göre iki guruba ayrılır.

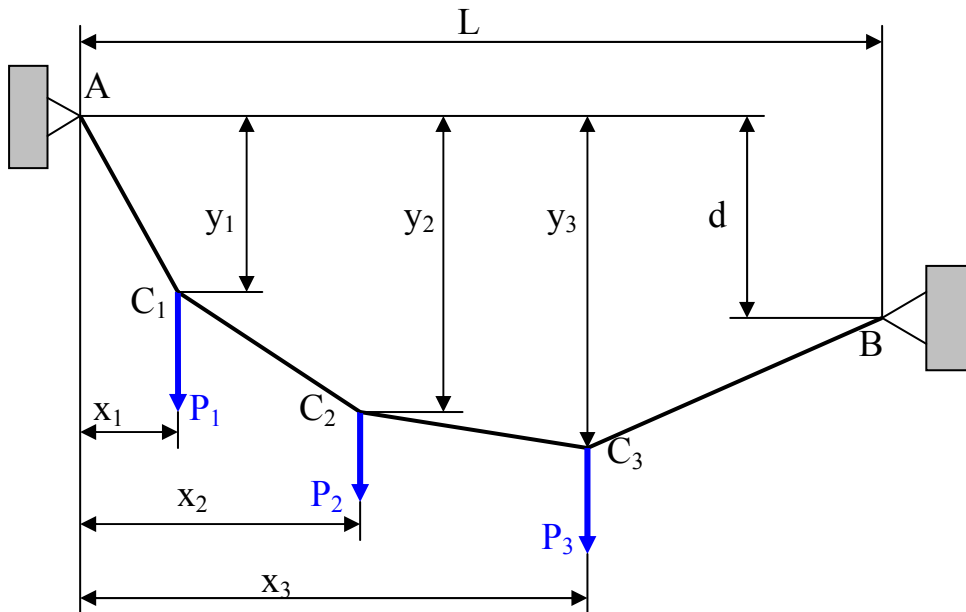
a) Konsantre yükler etkisindeki kablolar

b) Yayılı yükler etkisindeki kablolar

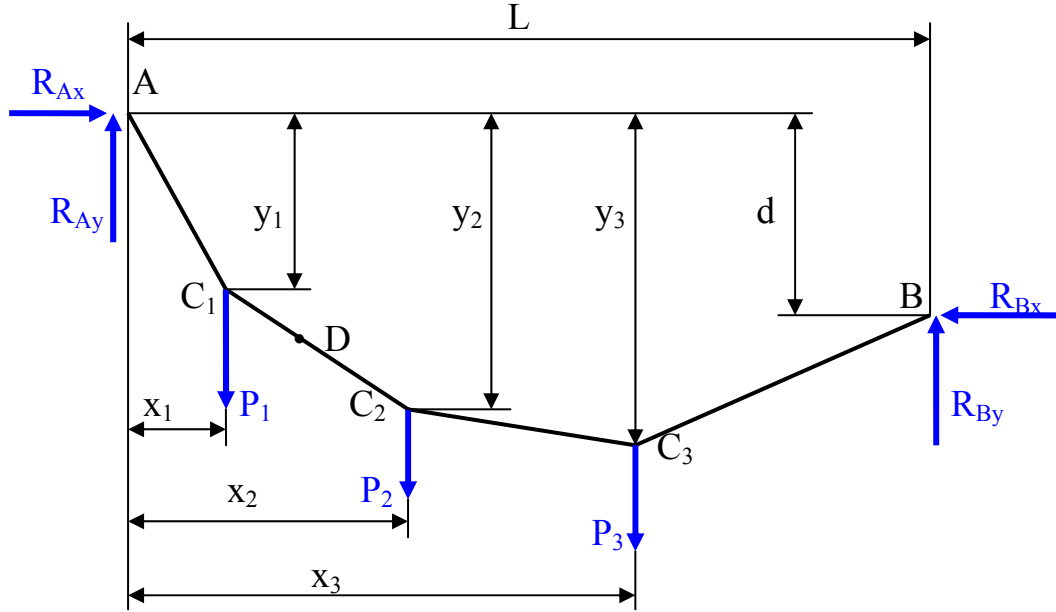
Kabloların eğilmeye karşı direnci sıfır kabul edilir. Bundan dolayı kablodaki kuvvetin kablo doğrultusunda olması gerekir.

#### 9.2 Konsantre yükler etkisindeki kablolar

A ve B sabit noktalarından bağlı  $P_1, P_2, \dots, P_n$  yükleri etkisindeki kablo göz önüne alınır.



Aynı kablonun serbest cisim diagramı aşağıdaki gibi çizilebilir.



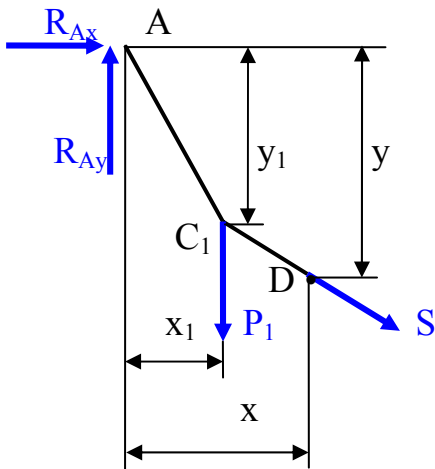
Burada A ve B deki tepki kuvvetlerini bulmak için yazılacak olan

$$\sum F_x = 0, \quad \sum F_y = 0, \quad \sum M_z = 0$$

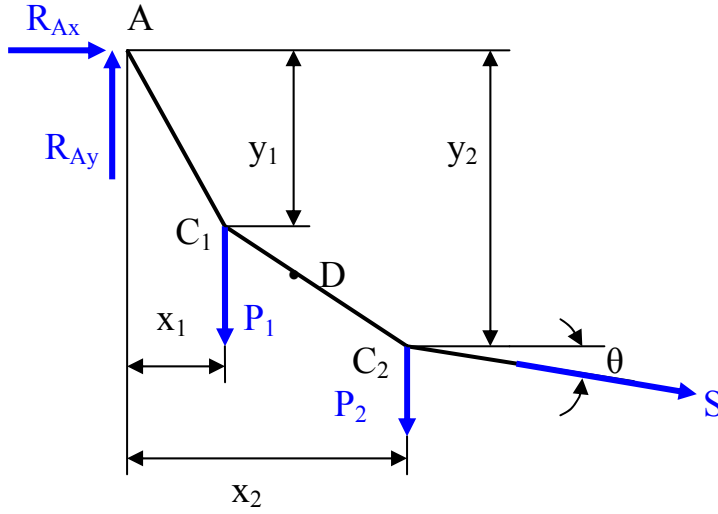
denklemler yeterli değildir. Bundan dolayı Bir kablo parçası için denklem yazmak gerekir. Buda ancak kablo üzerindeki bir noktanın koordinatlarını bilmeyi gerektirir.

Böylece kablonun AD parçası için aşağıdaki denklem yazılabilir.

$$\sum M_D = 0$$



Aynı şekilde düşey yüklerin etki ettiği diğer noktalarda da moment denklemleri yazılabilir.



Mesnetten itibaren herhangi bir kablo için yazılan

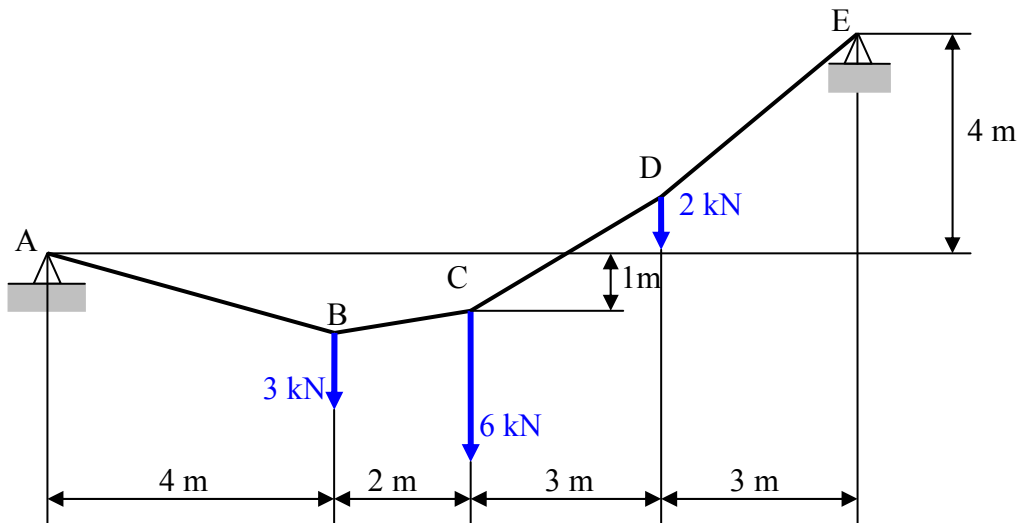
$$\sum F_x = 0 \quad \text{denkleminden}$$

$$S \cos \theta = -R_{Ax}$$

eşitliği bulunur. Bu eşitlikten  $\theta$  büyüdükçe kablodaki kuvvetin şiddetinin büyüdüğü anlaşılır.

**Problem 9.2.1** AE kablosu gösterilen noktalarda üç düşey yük taşıyor. C noktası sol mesnedin 1 m altında olduğuna göre

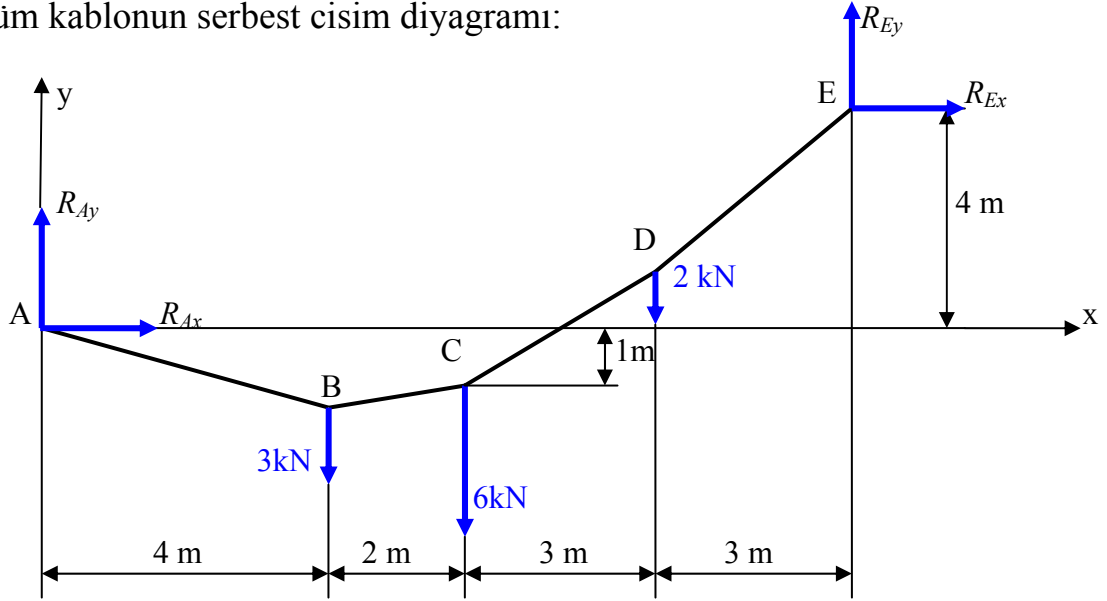
- B ve D noktalarının düzeylerini
- Kablodaki maksimum eğim ve maksimum çekme kuvvetini bulunuz.



Çözüm:

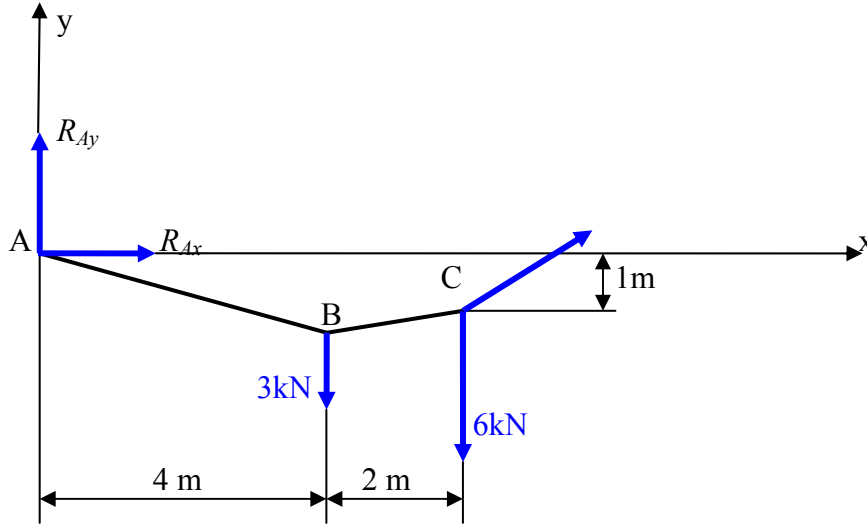
a) B ve D noktalarının düzeylerini bulmak için önce A mesnedindeki tepkileri bulmak gerekir . A mesnedindeki tepkileri bulmak için de tüm kablo ve kablounun ABC kısmının dengesi ayrı ayrı göz önüne alınır.

Tüm kablounun serbest cisim diyagramı:



$$\sum M_E = 0 \quad 4R_{Ax} - 12R_{Ay} + 8 \cdot 3 + 6 \cdot 6 + 3 \cdot 2 = 0, \quad 4R_{Ax} - 12R_{Ay} = -66 \quad (1)$$

Kablounun ABC kısmının serbest cisim diagramı

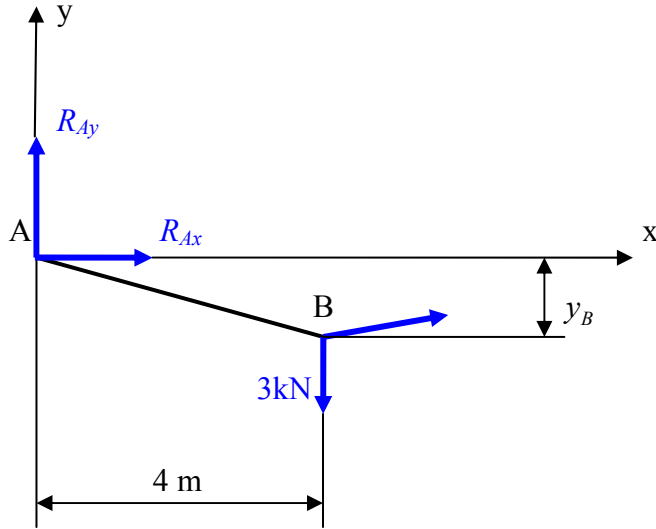


$$\sum M_C = 0 \quad R_{Ax} + 6R_{Ay} - 3 \cdot 2 = 0, \quad R_{Ax} + 6R_{Ay} = 6 \quad (2)$$

Bu (1) ve (2) nolu denklemden A daki mesnet tepkileri bulunur.

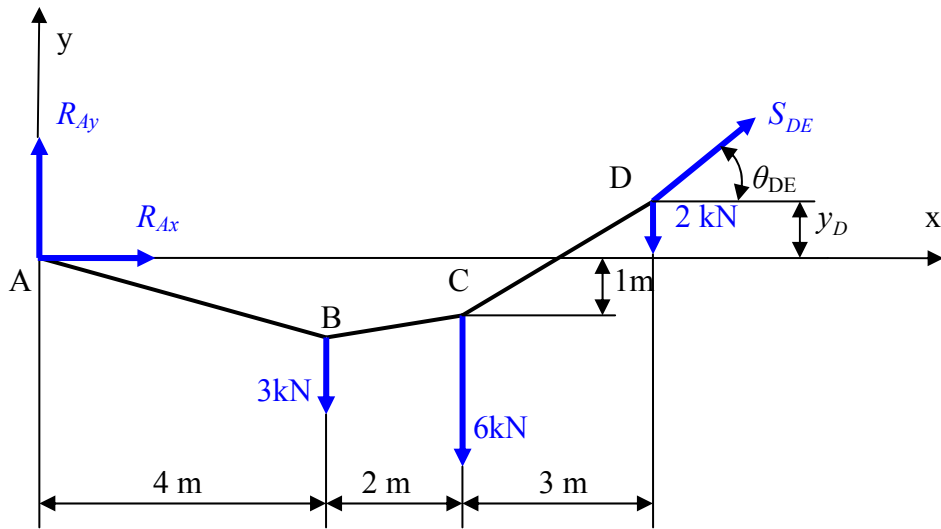
$$\left. \begin{array}{l} 4R_{Ax} - 12R_{Ay} = -66 \\ + \quad 2 \cdot (R_{Ax} + 6R_{Ay}) = 2 \cdot 6 \\ \hline 6R_{Ax} = -54 \end{array} \right\} \quad R_{Ax} = -9 \text{ kN} , \quad R_{Ay} = 2,5 \text{ kN}$$

B Noktasının düzeyi için kablounun AB kısmının dengesi göz önüne alınır.



$$\sum M_B = 0 \quad y_B * R_{Ax} + 4R_{Ay} = 0 \quad , \quad y_B * (-9) + 4 * 2,5 = 0 \Rightarrow \boxed{y_B = 1,111 \text{ m}}$$

D Noktasının düzeyi için kablounun ABCD kısmının dengesi göz önüne alınır.



$$\sum M_D = 0 \quad y_D R_{Ax} - 9R_{Ay} + 5 * 3 + 3 * 6 = 0 \quad , \quad y_D (-9) = -10,5$$

$$\boxed{y_D = 1,167 \text{ m}}$$

b) Maksimum eğim ve maksimum çekme : Maksimum eğimin olduğu kablodaki çekme kuvveti Maksimum kuvvettir. Kablodaki kuvvetin yatay bileşeni mesnetlerdeki kuvvetin yatay bileşenine eşittir.

$$\theta_{AB} = \arctan \frac{1,111}{4} , \quad \theta_{AB} = 15,522^0$$

$$\theta_{BC} = \arctan \frac{0,111}{2} , \quad \theta_{BC} = 3,18^0$$

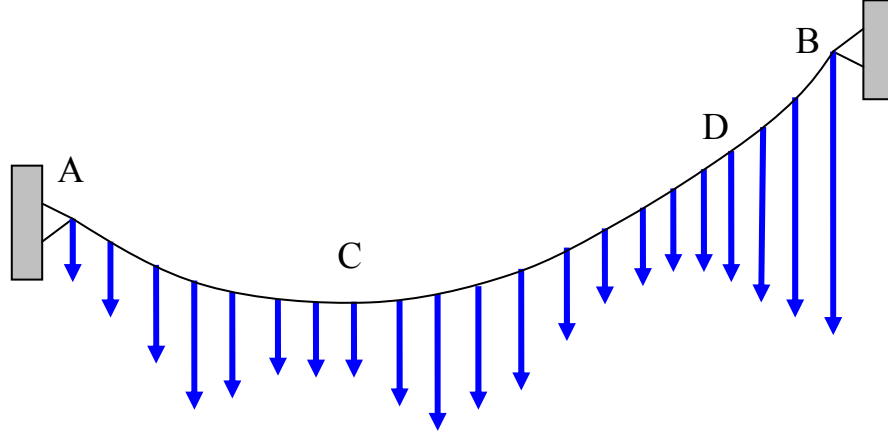
$$\theta_{CD} = \arctan \frac{2,167}{3} , \quad \theta_{CD} = 35,842$$

$$\theta_{DE} = \arctan \frac{(4 - 1,167)}{3} , \quad \boxed{\theta_{DE} = 43,36}$$

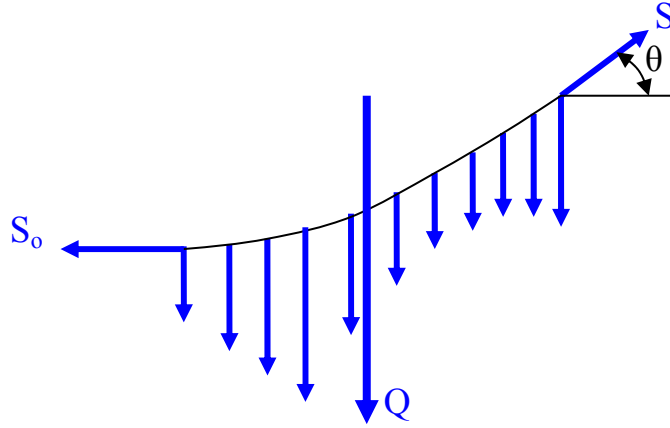
$$S_{DE} = \frac{9}{\cos 43,36^0} , \quad \boxed{S_{DE} = 12,38 \text{ kN}}$$



### 9.3 Yayılı yükler etkisindeki kablolar.

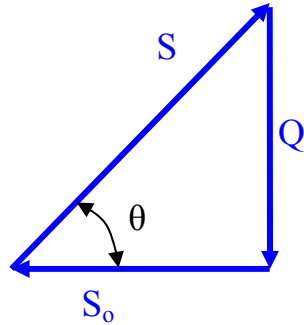


Yukarıdaki Şekilde gösterilen yayılı yük etkisindeki kablounun CD kısmının serbest cisim diagramı aşağıdaki gibidir.



Burada Q kablounun CD kısmı boyunca etki eden yayılı yükün bileşkesidir.

CD kısmına etki eden tüm kuvvetlerin toplamı denge şartından dolayı sıfır olmalıdır. Böylece S, S<sub>0</sub> ve W kuvvetleri uç uca eklendiğinde kapalı bir üçgen oluşturur.



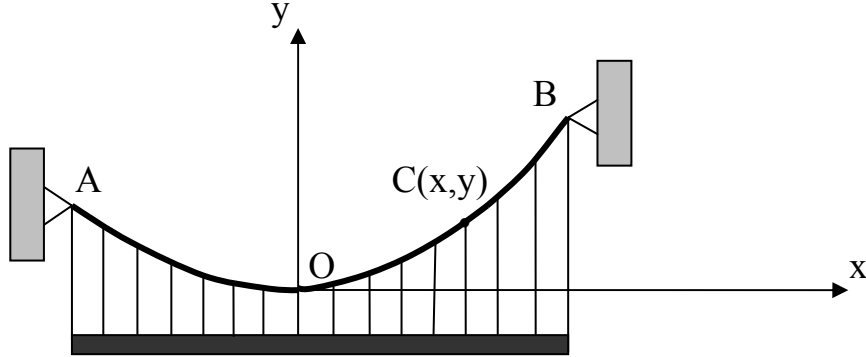
$$S \cos \theta = S_0$$

$$S \sin \theta = Q$$

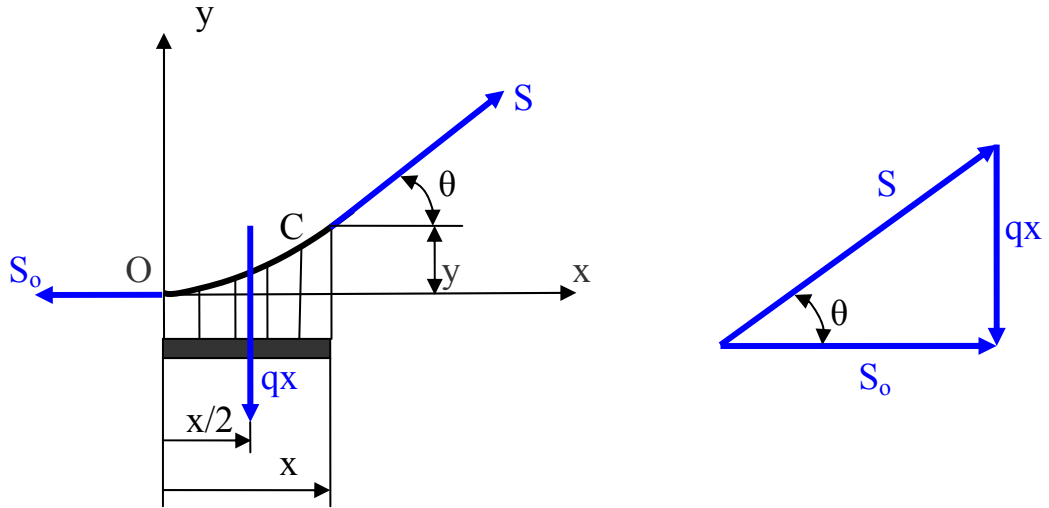
$$S = \sqrt{S_0^2 + Q^2} \quad , \quad \tan \theta = \frac{Q}{S_0}$$

### 9.3.1 Yatayda düzgün yayılı yük etkisindeki kablolar (parabolik kablo)

Kütlesi uzunluğu boyunca sabit olan ve birim uzunluğunun kütlesi  $q$  olan yatay bir tablayı taşıyan asma köprünün kablosunu göz önüne alalım.



Burada kablonun OC kısmının serbest cisim diagramı aşağıdaki gibi gösterilebilir.



Kablonun OC kısmına etki eden  $S$ ,  $S_0$  ve  $qx$  kuvvetlerinin toplamının sıfır olması gerektiğinden bunlar uç uca eklendiğinde bir dik üçgen oluştururlar. Bu dik üçgenden faydalananarak aşağıdaki eşitlikler yazılabilir.

$$S = \sqrt{S_0^2 + q^2 x^2}$$

$$\tan \theta = \frac{q x}{S_0}$$

Ayrıca kablonun OC kısmına etki eden kuvvetlerin C noktasına göre momenti alınırsa aşağıdaki denklem yazılabilir.

$$\sum M_C = 0 \Rightarrow q x \frac{x}{2} - S_0 y = 0$$

$$y = \frac{q x^2}{2 S_0}$$

Bu bir parabol denklemdir.

Eğer kablonun iki ucuda aynı yükseklikte ise ve kablounun en alt noktasının derinliği ile iki uc arasındaki uzaklık biliniyorsa yatayda yayılı yükün

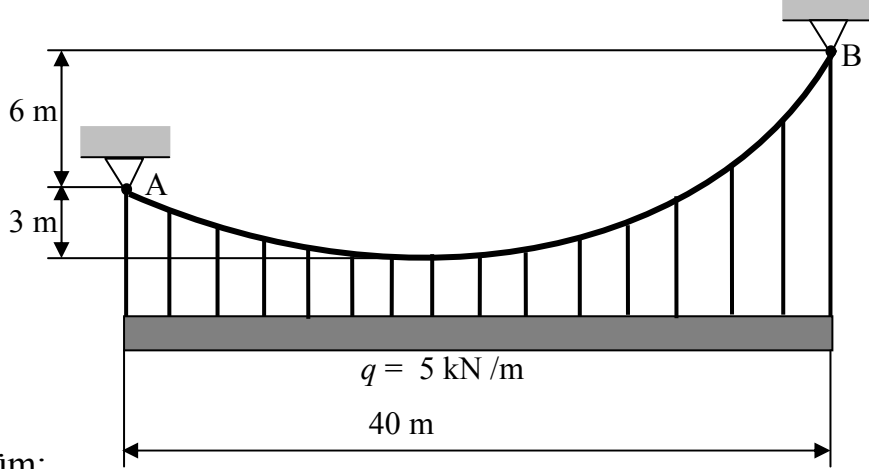
şiddeti verildiğinde  $y = \frac{q x^2}{2 S_0}$  denkleminde kablodaki en küçük

kuvvet  $S_0$  bulunur.

Bu  $S_0$  değeriyle  $S = \sqrt{S_0^2 + q^2 x^2}$  denkleminde gidildiğinde kablounun herhangi bir  $x$  koordinatına sahip noktasındaki  $S$  değeri hesaplanabilir.

### Problem 9.3.1.1

Ab kablou şekilde görüldüğü gibi yatayda düzgün yayılı bir yükü taşımaktadır. Kablounun en alt noktası A mesnedinin 3 m altındadır. Kablodaki maksimum ve minimum çekme kuvveti değerlerini bulunuz.

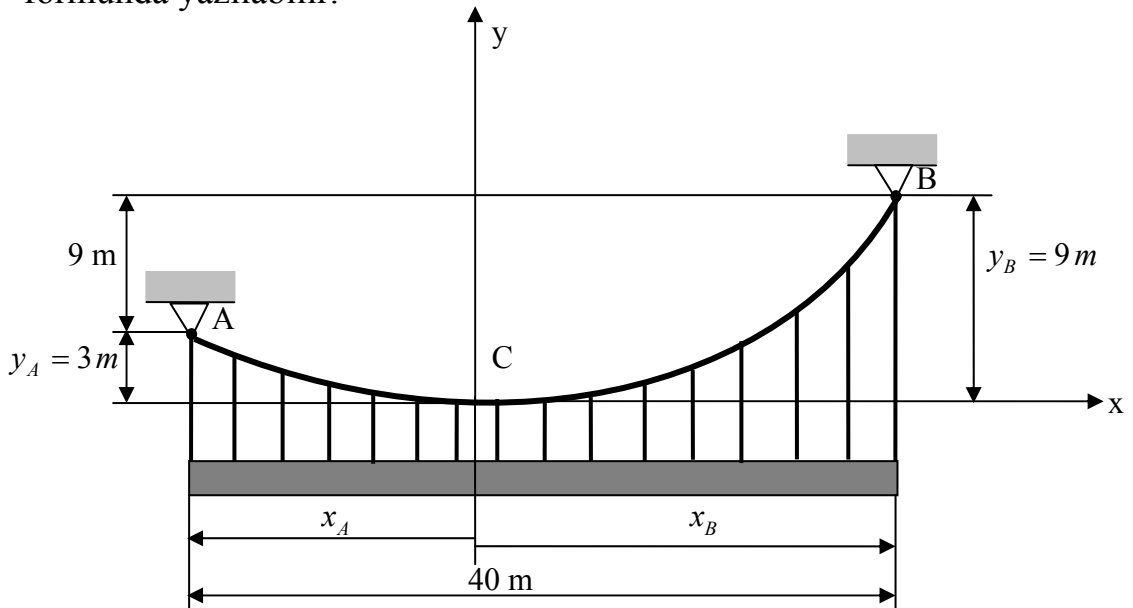


Çözüm:

Yük yatayda düzgün yayılı olduğundan kablo paraboliktir. Koorninat başlangıcını C en alt noktasında seçilirse Kablo denklemi

$$y = \frac{q}{2 S_0} x^2$$

formunda yazılabilir.



$$y_B = k x_B^2, \quad y_A = k x_A^2, \quad x_B - x_A = 40 \Rightarrow x_B = x_A + 40$$

$$y_B = k (x_A + 40)^2, \quad \frac{y_B}{y_A} = \frac{k (x_A + 40)^2}{k x_A^2} = \frac{9}{3}, \quad x_A^2 + 80 x_A + 1600 = 3 x_A^2$$

$$-2x_A^2 + 80x_A + 1600 = 0, \quad x_A = \frac{-80 \mp \sqrt{6400 + 12800}}{-4}, \quad x_A = \frac{-80 \mp \sqrt{19200}}{-4}$$

$$x_A = \frac{-80 \mp \sqrt{19200}}{-4}, \quad x_A = 54,64 m \quad \text{veya} \quad x_A = -14,641 m \quad \text{ilk kök 40 m}$$

den büyük olduğu için göz önüne alınmaz  $x_A = -14,641 m$  kabul edilir.

$$x_B = 25,359 m$$

Kablodaki **minimum çekme** kablonun an alt seviyesi olan C noktasında

olur. A noktasının hesaplanan koordinatları  $y = \frac{q}{2S_0} x^2$  denkleminde yerine

$$\text{konursa } S_0 \text{ bulunur.} \quad 3 = \frac{5}{2S_0} (-14,641 m)^2, \quad S_0 = \frac{5}{6} (-14,641 m)^2,$$

$$\boxed{S_0 = 178,63 kN}$$

Kablodaki **maksimum çekme** kablonun eğiminin en fazla olduğu B

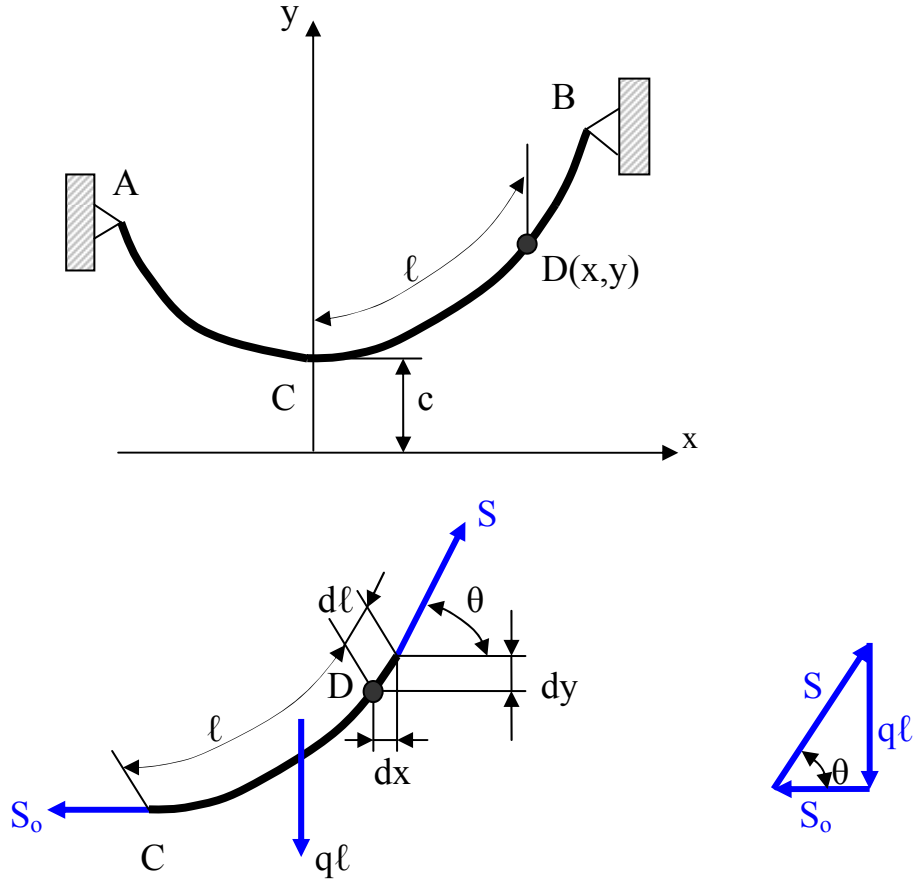
noktasında olur. B noktasının x koordinatı ve  $S_0$  değeri  $S = \sqrt{S_0^2 + q^2 x^2}$

denkleminde yerine konursa

$$S_{maks.} = \sqrt{178,63^2 + 5^2 * 25,359^2}, \quad \boxed{S_{maks.} = 219,06 kN}$$

$$\tan \theta_{\max} = \frac{5 * 25,359}{178,63}, \quad \theta_{\max} = 35,37^\circ$$

### 9.3.2 Kendi ağırlığı etkisinde olan homojen yapıdaki kablo veya zincirin dengesi



$$S = \sqrt{S_0^2 + q^2 \ell^2} \quad , \quad Q = q \ell$$

İşlemleri sadeleştirmek için

$$c = \frac{S_0}{q} \quad \text{göz önüne alınır.}$$

$$S_0 = q c \quad , \quad S = q \sqrt{c^2 + \ell^2}$$

$$dx = d\ell \cos \theta \quad , \quad \cos \theta = \frac{S_0}{S}$$

$$dx = \frac{S_0}{S} d\ell \quad , \quad dx = \frac{c}{\sqrt{c^2 + \ell^2}} d\ell \quad , \quad dx = \frac{d\ell}{\sqrt{1 + \frac{\ell^2}{c^2}}}$$

$$x = \int_0^\ell \frac{d\ell}{\sqrt{1 + \ell^2/c^2}} \quad , \quad x = c \left[ \sinh^{-1} \frac{\ell}{c} \right]_0^\ell = c \sinh^{-1} \frac{\ell}{c} \rightarrow \ell = c \sinh \frac{x}{c}$$

$$dy = dx \tan \theta \quad , \quad dy = \frac{\ell}{S_0} dx \quad , \quad dy = \frac{\ell}{c} dx \quad , \quad dy = \sinh \frac{x}{c} dx$$

Bu son denklem C(0,c) den D(x,y) ye integre edilirse

$$y - c = \int_0^x \sinh \frac{x}{c} dx = c \left[ \cosh \frac{x}{c} \right]_0^x = c (\cosh \frac{x}{c} - 1)$$

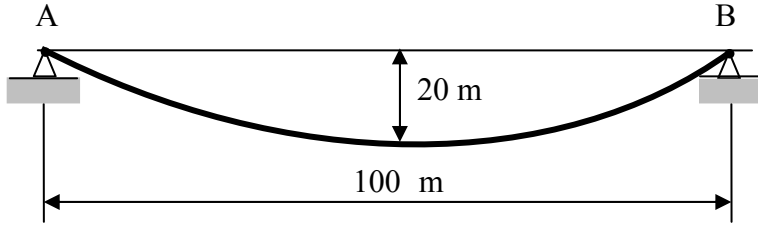
$$y = c \cosh \frac{x}{c} , \quad y^2 - \ell^2 = c^2 \quad \text{eşitliği bulunur.}$$

$$S_O = q c , \quad Q = q \ell , \quad S = q y$$

eğer A ve B mesnetlerinin yüksekliği aynı ise derinlik  $h = y_A - c$  olur.

**Problem 9.3.2.1** 60 N/m ağırlığındaki bir üniform kablo , şekilde görüldüğü gibi iki A ve noktası arasına asılmıştır.

- Kablodaki maksimum ve minimum çekme değerlerini
- kablonun uzunluğunu bulunuz.



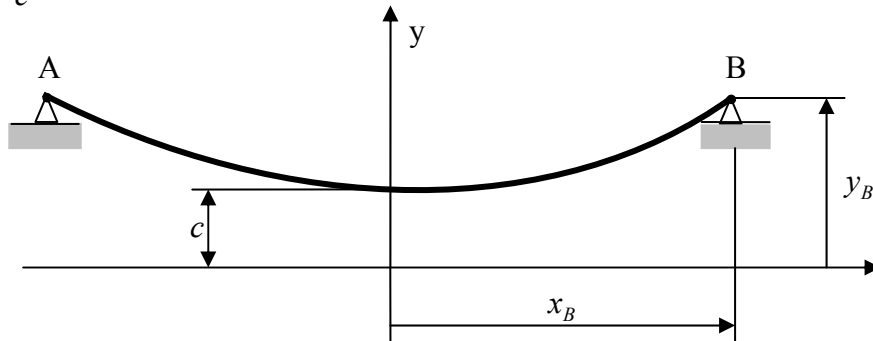
Çözüm :

$$a) \quad S_{\min} = S_O = q c$$

$$S_{maks} = q y_{maks} , \quad S_{maks} = q y_B$$

Eğer koordinat başlangıcı kablounun alt noktasından c kadar altında alınırsa kablo denklemi

$$y = c \cosh \frac{x}{c} \quad \text{şeklinde yazılabilir.}$$



B noktasının koordinatları  $x_B = 50 \text{ m}$  ,  $y_B = 20 + c$  kablo denkleminde yerine konursa

$$20 + c = c \cosh \frac{50}{c} \Rightarrow 20 + c - c \cosh \frac{50}{c} = 0 \quad \text{denklemi elde edilir.}$$

$f(c) = 20 + c - c \cosh \frac{50}{c}$  denklemini sıfır yapan  $c$  değeri orta nokta metodu ile bulunur.

$c_l$	$c_u$	$c_r = \frac{c_l + c_u}{2}$	$f(c_l)$	$f(c_u)$	$ \varepsilon_a  = \left  \frac{c_{r,yeni} - c_{r,eski}}{c_{r,yeni}} \right  * 100\%$
1	100	50,5	$-2,59 * 10^{21}$	7,2374	
50,5	100	75,25	-6,4841	7,2374	33
50,5	75,25	62,875	-6,4841	2,7685	19,7
62,875	75,25	69,0625	-0,95075	2,7685	
62,875	69,0625	65,9688	-0,95075	1,09594	
62,875	65,9688	64,422	-0,95075	1,26988	
64,422	65,9688	65,1954	-0,39713	1,26988	
65,195	65,9688	65,5819	-0,1315	1,26988	
65,5819	65,9688	65,7754	-0,0014567	1,26988	
65,5819	65,7754	65,6787	-0,0014567	0,062988	
65,5819	65,6787	65,6303	-0,0014567	0,030828	
65,5819	65,6303	65,6061	-0,0014567	0,014707	
65,5819	65,6061	65,594	-0,0014567	0,006629	
65,5819	65,594	65,58795	-0,0014567	0,002587	
65,5819	65,58795	65,58493	-0,0014567	0,000565	
65,58493	65,58795	65,58644	-0,0004457	0,000565	
65,58493	65,58644	65,5857	-0,0004457	0,000061	0,00113

$$c = 65,586$$

$$y_B = 20 + c \Rightarrow y_B = 20 + 65,586 \quad , \quad y_B = 85,586 \, m$$

$$S_{\min} = S_O = q \, c \Rightarrow S_{\min} = 60 * 65,586 \quad , \quad \boxed{S_{\min} = 3935,16 \, N}$$

$$S_{\max} = q \, y_B \Rightarrow S_{\max} = 60 * 85,586 \quad , \quad \boxed{S_{\max} = 5135,16 \, N}$$

b)

İ kablo uzunluğu  $y^2 - \ell^2 = c^2$  denkleminde bulunur.

$$\ell^2 = y^2 - c^2 \quad , \quad \ell = \sqrt{y^2 - c^2} \quad , \quad \ell = 2 * \sqrt{y_B^2 - c^2} \quad , \quad \ell = 2 * \sqrt{85,586^2 - 65,586^2}$$

$$\boxed{\ell = 109,972 \, m}$$

## BÖLÜM 10

### DÜZLEM KAFES KİRİŞ SİSTEMLERİ

#### 10.1 Genel bilgi ve tarifler

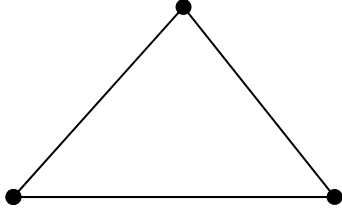
Aynı düzlem içinde birbirlerine uç noktalarından bağlanarak bir rijid yapı oluşturan çubuklar topluluğuna düzlem kafes sistemi denir. Uç noktalarından bağlanma şekli pratik uygulamalarında kaynaklı birleştirme şeklinde olmasına karşı hesaplamalarda sürtünmesiz silindirik mafsallı kabul edilir. Ayrıca çubuklar uç noktaları dışında yüklenmemiş kabul edilir. Böylece çubuklarda oluşacak iç kuvvetler çubuk doğrultusunda alınabilir.

Kafes kiriş sistemlerinin yapım kolaylığı ucuzluğu ve hafifliği dolayısıyla bir çok yerde uygulama alanı vardır. Tren köprüleri, vinç kolları ve kuleleri , gezer köprülü vinçler , yüksek gerilim hattı direkleri , radyo verici antenleri ,Depo ve çiftlik çatı kirişleri gibi alanlarda uygulamalarına rastlanır.

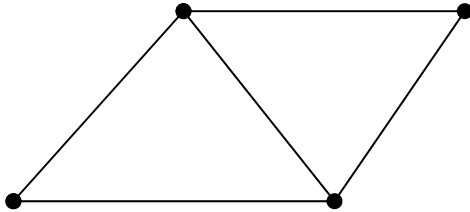
Kafes sisteminde uç noktalarının birleşme yerlerine düğüm noktaları denir.

#### 10.2 Basit kafes sistemi

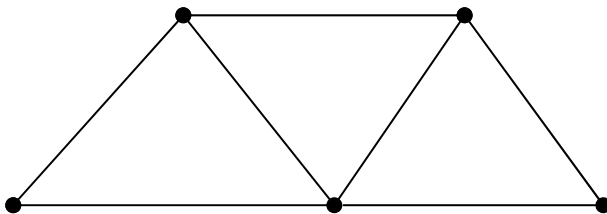
Üç çubuktan oluşan kafes sistemi bir basit kafes sistemidir. Bu sistem üç çubuk ve üç düğüm noktası içerir. Bu sisteme eklenecek iki çubuk düğüm noktası sayısını bir artırır. Böylece oluşturulacak  $m$  sayıdaki çubuk ve  $n$  sayıdaki düğüm noktasından oluşan kafes sistemi de bir basit kafes sistemidir.



$$\begin{aligned} m &= 3 \\ n &= 3 \end{aligned}$$



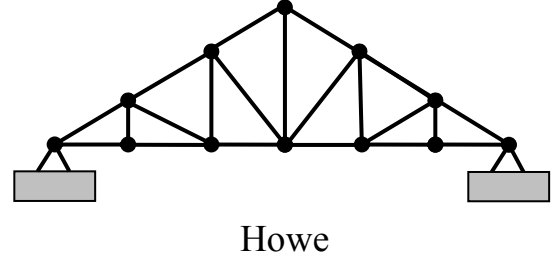
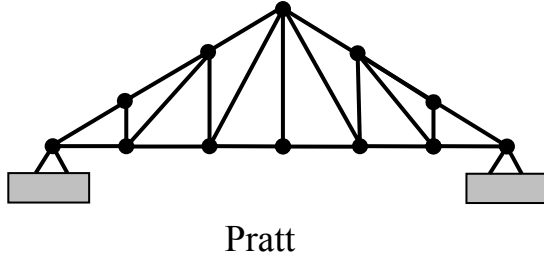
$$\begin{aligned} m &= 5 \\ n &= 4 \end{aligned}$$



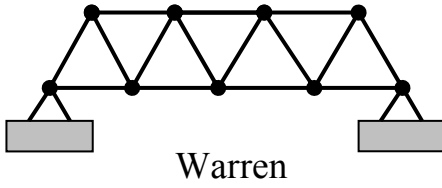
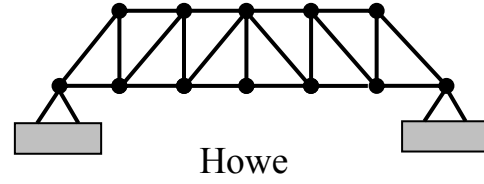
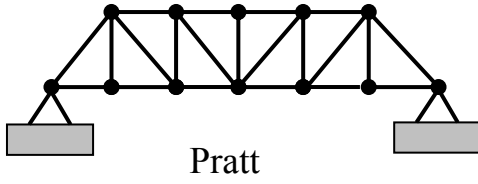
$$\begin{aligned} m &= 7 \\ n &= 5 \end{aligned}$$



Bir basit kafes sisteminde  
 $m$  = çubuk sayısı  
 $n$  = düğüm noktası sayısı  
 olmak üzere  
 $2n = m + 3$   
 olur.



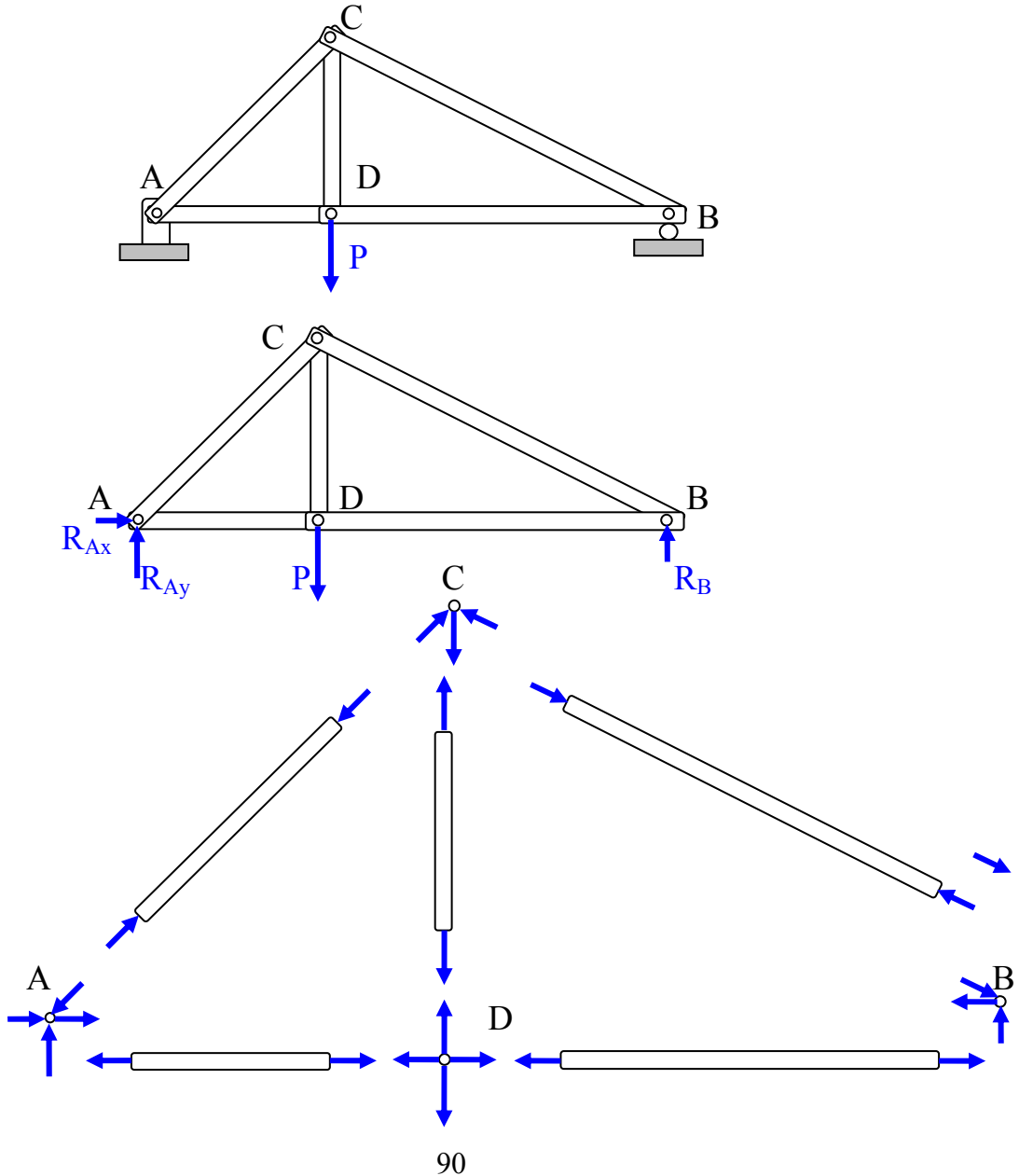
Şekil 10.1 Çeşitli çatı kafes sistemi örnekleri



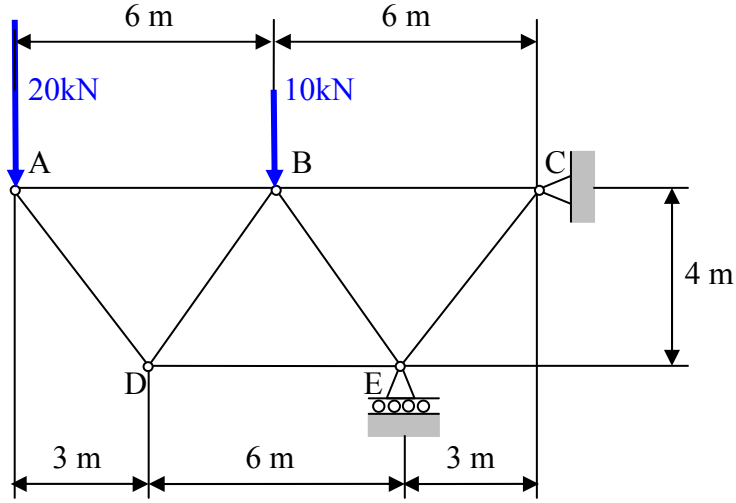
Şekil 10.2 Çeşitli köprü kafes sistemi örnekleri

### 10.3 Düğüm noktaları metodu ile kafes sisteminin analizi

Kafes sisteminin her bir düğüm noktası için 2 denklem yazılır.  $n$  tane düğüm noktalı bir kafes sisteminde  $2n$  denklem yazılacağından  $2n$  sayıda bilinmeyen çözülebilir. Toplam çubuk sayısı  $2n-3$  ve mesnetlerden de 3 bilinmeyen geleceğine göre denklem sayısı yeterli olur. Ayrıca sistem bütün bir rijid cisim gibi alınıp dengesi düşünüldüğünde 3 denklem daha yazılabilir. Bundan dolayı düğüm noktaları metodu ile fazladan elde edilen 3 denklem sonuçların kontrolü için kullanılabilir. Bir kafes sisteminde çubuk kuvvetlerini bulmadan önce sistem bütün bir rijid cisim olarak göz önüne alınıp mesnet tepkileri bulunabilir. Daha sonra düğüm noktalarının dengesi düşünülerek en fazla iki bilinmeyen içerecek şekilde düğüm noktası seçip işleme başlanır. Çubuklardan düğüm noktalarına gelen kuvvetler çubuk doğrultularında alınır. Düğüm noktalarındaki kuvvetlerle çubuklardaki kuvvetler etki tepki ilkesine göre birbirinin tam zıttıdır. Bir düğüm noktasındaki bilinmeyenler çözüldüğünde bu düğüm noktasına çubuklarla direkt bağlı diğer düğüm noktalarında da birer tane bilinmeyen azalacağından en fazla iki bilinmeyen içeren düğüm noktalarını bulmak kolaylaşır.

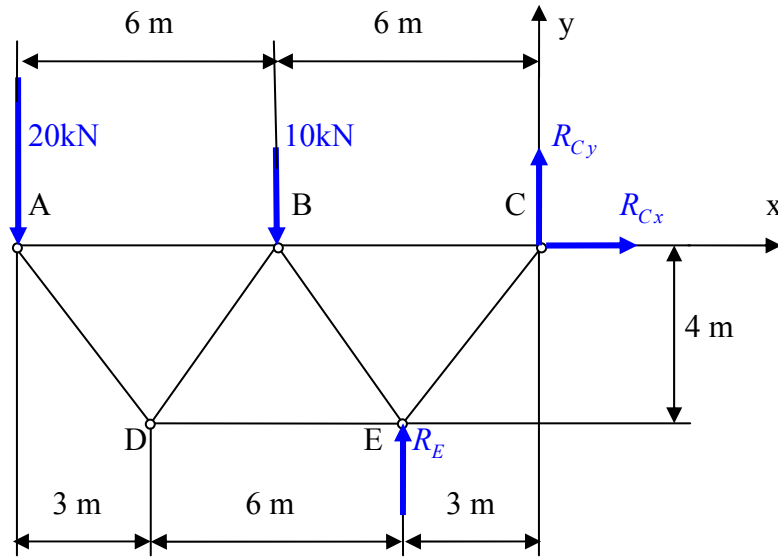


**Problem 10.3.1** Verilen kafes sistemindeki çubuk kuvvetlerini düğüm noktaları metodunu kullanarak bulunuz.



Çözüm:

Tüm kafes sistemi için serbest cisim diagramı



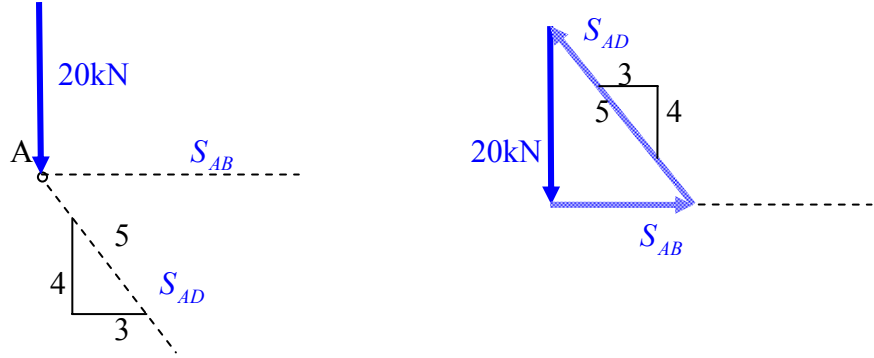
Tüm kafes sisteminin dengesi

$$\sum M_C = 0 \Rightarrow 3R_E - 12 \cdot 20 - 6 \cdot 10 = 0 \Rightarrow R_E = 100kN$$

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow R_{Cx} = 0$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow R_{Cy} + R_E - 20 - 10 = 0 \Rightarrow R_{Cy} = -70kN$$

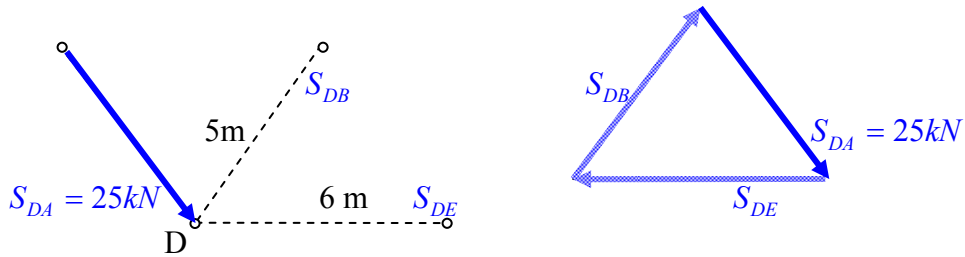
A düğüm noktası:



A düğüm noktasına etki eden kuvvetlerin geometrik toplamı kapalı bir üçgen oluşturur . Bu kuvvetlerin şiddetleri ile bu üçgenin veya benzer üçgenlerin kenar uzunlukları orantılı olur.

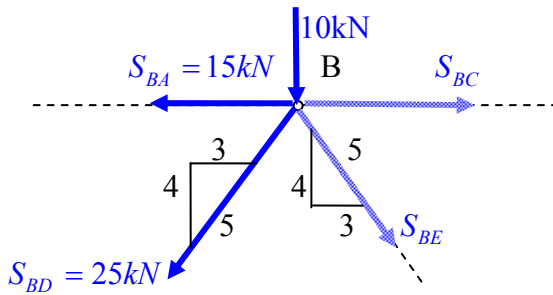
$$\frac{S_{AB}}{3} = \frac{S_{AD}}{5} = \frac{20}{4} \Rightarrow \boxed{S_{AB} = 15kN} , \boxed{S_{AD} = 25kN}$$

D düğüm noktası:



$$\frac{S_{DB}}{5} = \frac{S_{DE}}{6} = \frac{25}{5} \Rightarrow \boxed{S_{DB} = 25kN} , \boxed{S_{DE} = 30kN}$$

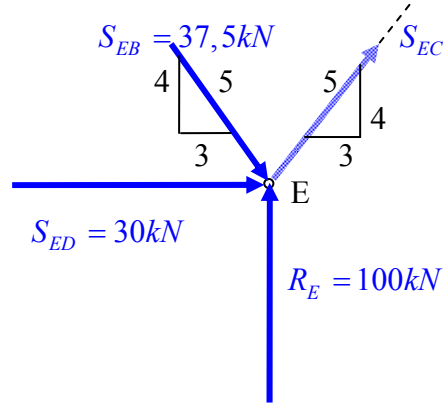
B düğüm noktası:



B düğüm noktası için denge denklemleri

$$\left. \begin{aligned} \sum F_x = 0 &\Rightarrow S_{BC} + \frac{3}{5}S_{BE} - 15 - \frac{3}{5}25 = 0 \\ \sum F_y = 0 &\Rightarrow -\frac{4}{5}25 - \frac{4}{5}S_{BE} - 10 = 0 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} \boxed{S_{BE} = -37,5kN} & \text{ ( } S_{BE} \text{ bası yönünde )} \\ \boxed{S_{BC} = 52,5kN} \end{aligned}$$

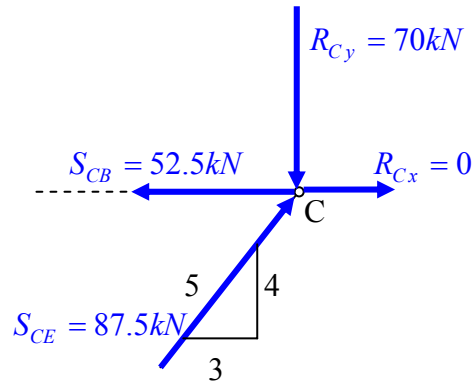
E düğüm noktası:



E düğüm noktası için denge denklemleri

$$\left. \begin{aligned} \sum F_x = 0 &\Rightarrow \frac{3}{5}S_{EC} + 30 + \frac{3}{5}37,5 = 0 \\ \sum F_y = 0 &\Rightarrow \frac{4}{5}S_{EC} + 100 - \frac{4}{5}37,5 = 0 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &\boxed{S_{EC} = -87,5kN} \text{ ( } S_{BE} \text{ bası yönünde)} \\ &\frac{4}{5}(-87,5) + 100 - \frac{4}{5}37,5 = 0 \text{ (kontrol için)} \end{aligned}$$

C düğüm noktası: Bu düğüm noktası kullanılarak C deki mesnet tepkileri bulunabilir. Bu mesnet tepkileri tüm kafes sistemi bir rijid cisim gibi düşünülerek daha önce bulunduğuna göre burada kontrol yapılır.

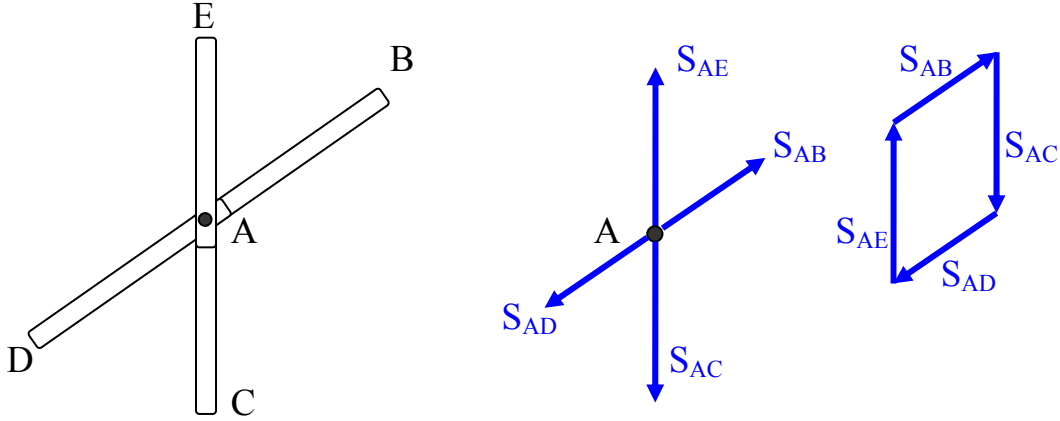


C düğüm noktası için denge denklemleri ( Kontrol için )

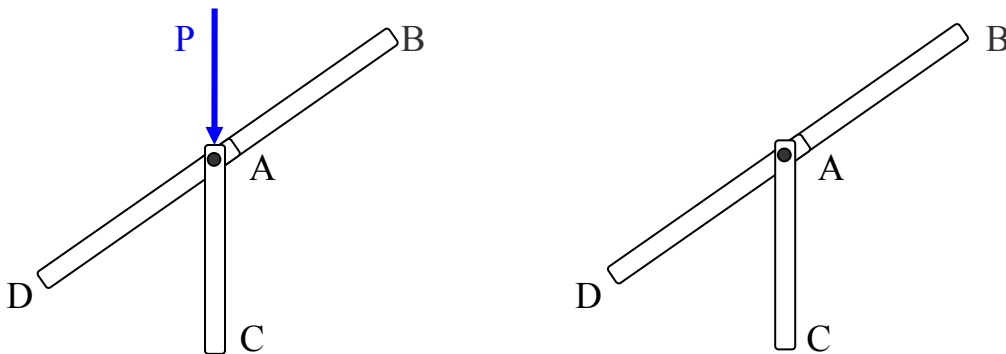
$$\left. \begin{aligned} \sum F_x = 0 &\Rightarrow R_{Cx} + \frac{3}{5}S_{CE} - S_{CB} = 0 \\ \sum F_y = 0 &\Rightarrow \frac{4}{5}S_{CE} - 70 = 0 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &0 + \frac{3}{5}87,5 - 52,5 = 0 \\ &\frac{4}{5}87,5 - 70 = 0 \end{aligned}$$

## 10.4 Özel düğüm noktaları

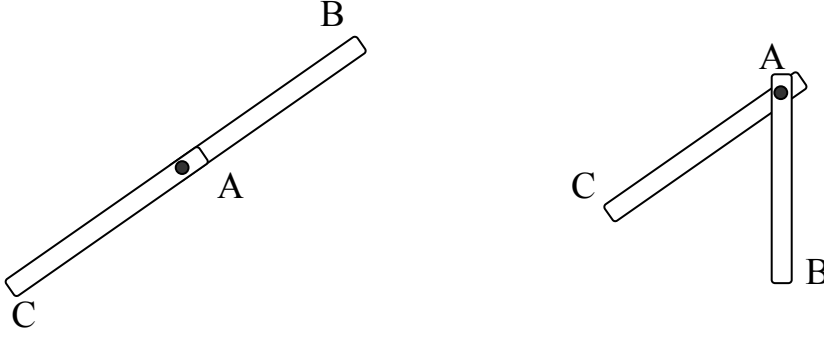
Bir düğüm noktasında 4 tane çubuk şekildeki gibi ikişer ikişer aynı doğrultuda ise burada oluşturulacak kuvvet poligonu paralel kenar olur. Bundan dolayı aynı doğrultudaki çubuklara etki eden kuvvetlerin şiddeti birbirine eşit yönü birbirinin zıttı olur.



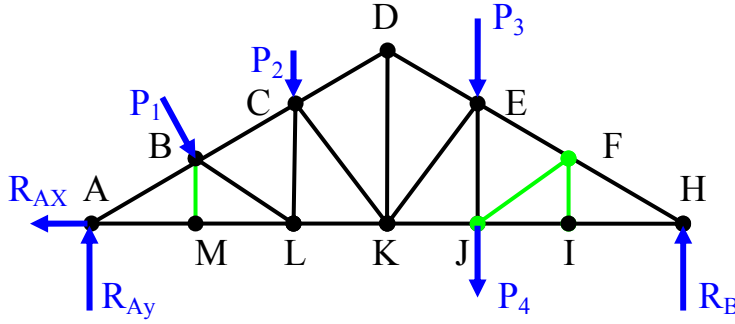
Üç çubuktan oluşan bir düğüm noktasında çubuklardan ikisi aynı doğrultuda diğeri farklı doğrultuda yerleştirilmiştir. Ayrıca bir P kuvveti bu düğüm noktasına farklı doğrultudaki çubuğun doğrultusunda uygulandığında yine bu 4 kuvvet üzerine kurulan poligon paralel kenar şeklinde olur. Paralel kenarın karşılıklı kenarlarının uzunlukları birbirine eşit olacağından farklı doğrultudaki çubuk kuvvetinin şiddeti P kuvvetine eşit olur. Eğer bu P kuvveti kaldırılırsa farklı doğrultudaki çubuğun kuvveti sıfır olur.



İki çubuktan oluşan düğüm noktalarında iki çubuk aynı doğrultuda ise bunlara etki eden kuvvetlerin şiddetleri birbirine eşit yönleri birbirine zıttır. Böyle bir düğüm noktasına başka bir P kuvveti etki ediyorsa bunun şiddeti sıfır olmalıdır. İki çubuktan oluşan düğüm noktasındaki çubuklar farklı doğrultularda ise bu çubuklardaki kuvvetler sıfırdır.



Aşağıda gösterilen kafes sisteminde BM ve FI çubuk kuvvetleri sıfırdır. FI çubuk kuvveti sıfır olduğu için FJ çubuk kuvveti de sıfırdır.



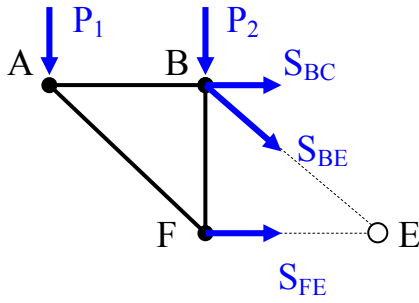
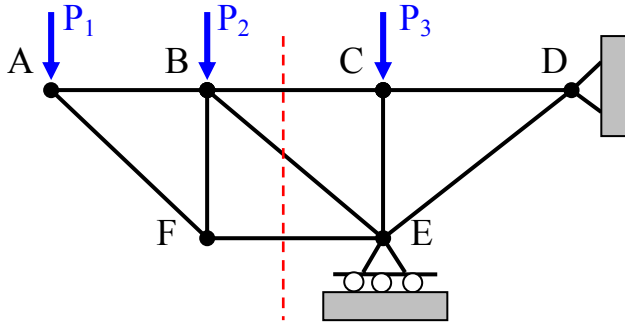
## 10.5 Kesim metodu ile kafes sisteminin analizi

Tüm sistemin analizi yerine çubuklardan bazılarına gelen kuvvetler hesaplanacağı zaman kesim metodu daha pratiktir.

Bu metotta kafes sistemi hesabı istenen çubuktan geçen ve bilinmeyen üç çubuktan fazla çubuk içermeyecek şekilde bir çizgi ile ikiye ayrılır. Ayrılan taraflardan birinde yazılacak olan

$$\sum F_x = 0 \quad , \quad \sum F_y = 0 \quad , \quad \sum M = 0$$

denklemleri ile üç bilinmiyen çözülebilir.



$$\sum F_x = 0 \quad \text{dan} \quad S_{BC} + S_{BE} \frac{FE}{BE} + S_{FE} = 0$$

$$\sum F_y = 0 \quad \text{dan} \quad P_1 + P_2 + S_{BE} \frac{BF}{BE} = 0 \quad \Rightarrow \quad S_{BE} = -(P_1 + P_2) \frac{BE}{BF}$$

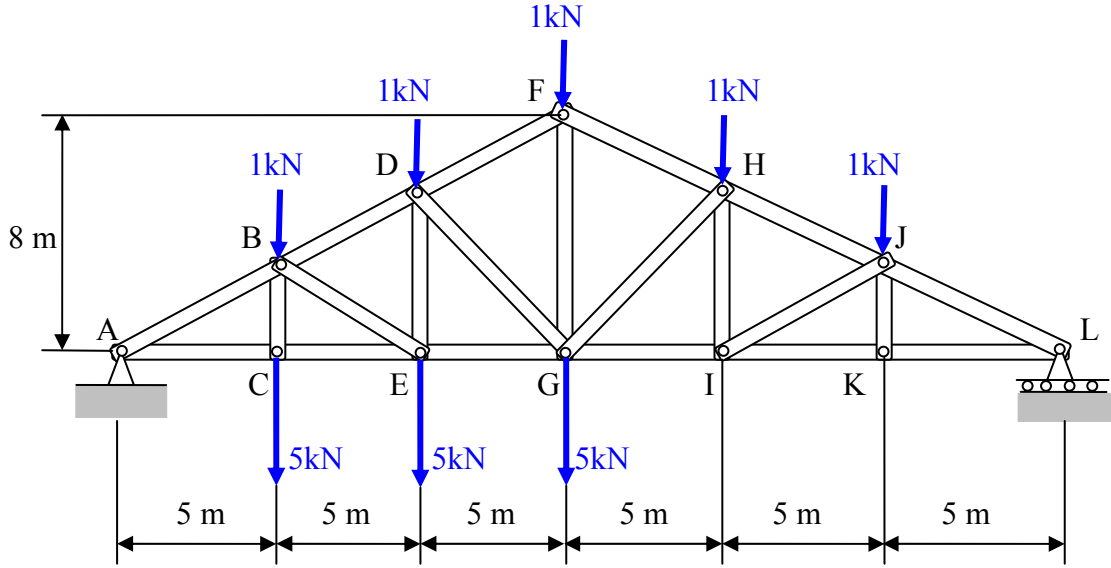
$$\sum M_E = 0 \quad \text{dan} \quad S_{BC} BF - P_1 (AB + FE) = 0 \quad \Rightarrow \quad S_{BC} = P_1 \frac{AB + FE}{BF}$$

Bu elde edilen  $S_{BE}$  ve  $S_{BC}$  kuvvetleri 1. denklemde yerine konursa

$$S_{FE} = -P_1 \frac{AB + FE}{BF} + (P_1 + P_2) \frac{FE}{BF} \quad \text{elde edilir.}$$

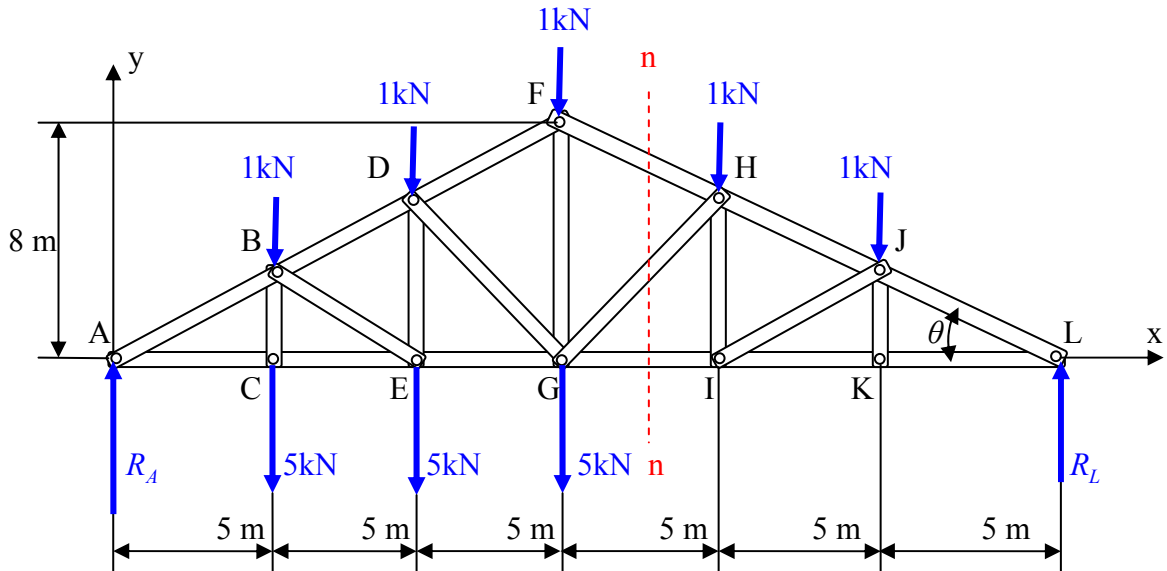


**Problem 10.5.1** Şekilde gösterilen kafes sistemindeki FH , GH ve GI çubuklarındaki kuvvetleri bulunuz.



Çözüm:

Tüm cismin serbest cisim diagramı



Tüm cisim için yazılacak denge denklemlerinden  $R_A$  ve  $R_L$  mesnet tepkileri bulunur.

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow R_A + R_L - 5 \cdot 1 - 3 \cdot 5 = 0 \Rightarrow R_A + R_L = 20 \text{ kN}$$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow 30R_L - (5 + 10 + 15 + 20 + 25) \cdot 1 - (5 + 10 + 15) \cdot 5 = 0 \Rightarrow R_L = 7,5 \text{ kN}$$

$$R_A + R_L = 20 \text{ kN} \Rightarrow R_A + 7,5 = 20 \text{ kN} \Rightarrow R_A = 12,5 \text{ kN}$$

$$\sin \theta = \frac{\overline{FG}}{\overline{FL}}, \quad \cos \theta = \frac{\overline{GL}}{\overline{FL}}, \quad \overline{FL} = \sqrt{\overline{GL}^2 + \overline{FG}^2}, \quad \overline{FL} = \sqrt{15^2 + 8^2}, \quad \overline{FL} = 17 \text{ m}$$

$$\sin \theta = \frac{8}{17}, \quad \cos \theta = \frac{15}{17}$$

kafes sistemi nn dogrusundan geçecek şekilde bir kesitle kesildikten sonra geri kalan parça için yazılacak denge denklemlerinden istenen çubuk kuvvetleri bulunur. Çünkü kesit bu çubukları içine alacak şekilde seçilmiştir.



## BÖLÜM 11

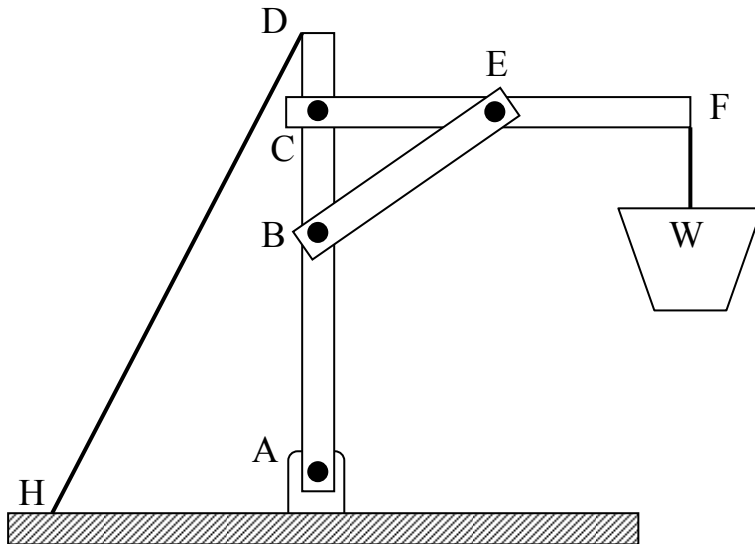
### ÇERÇEVE VE MAKİNELER

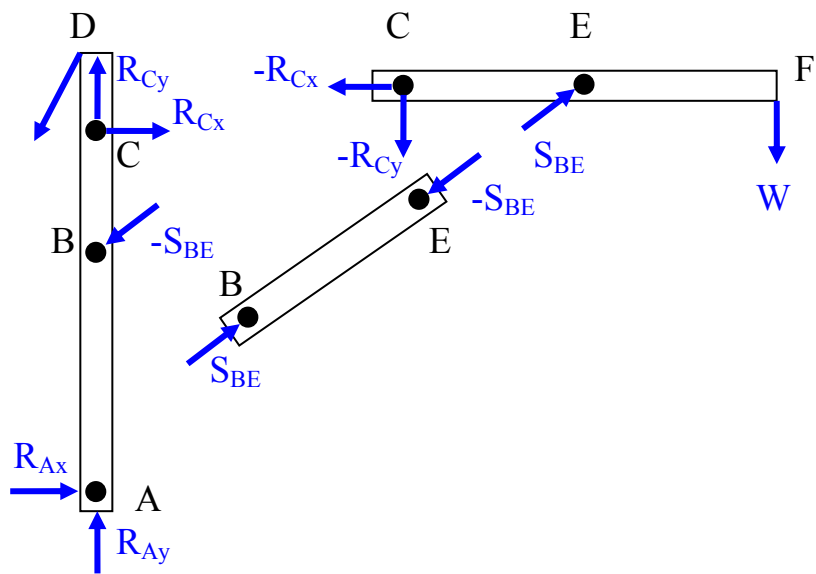
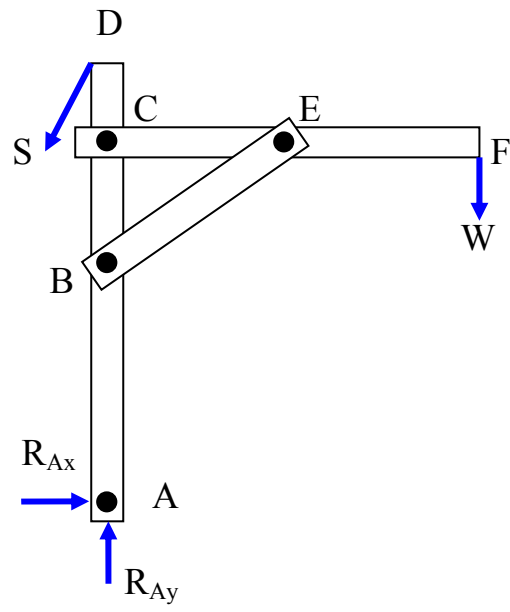
#### 11.1 Giriş

Birden fazla sayıdaki parçaların mafsallar yardımıyla birleşiminden ortaya çıkan yapılarda bazı durumlarda kafes sisteminde farklı olarak elemanlara kendi doğrultuları dışındada ihmal edilemeyen büyüklükte kuvvetler gelebilir. Bu durumdaki sistemlere çerçeve veya makine denir. Çerçeveler Genellikle sabittir ve yükleri taşımak için oluşturulur. Makineler ise sabit veya hareketli olup kuvvetleri iletmek veya değiştirmek için imal edilir. makineler daima hareketli parçaları içerirler.

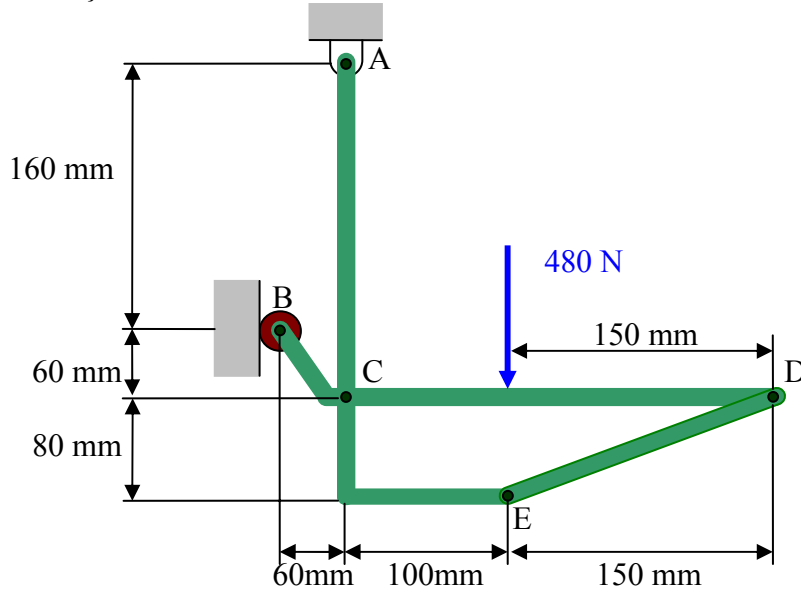
#### 11.2 Çerçeveler

Çeşitli kuvvetler etkisindeki  $n$  sayıda parçadan oluşmuş bir çerçeveye ait problemi klasik denge denklemleri ile çözmek için parçalarına ayırmak gerekir. Çerçeve parçalarına ayrıldıktan sonra her bir parça ayrı bir rijid cisim gibi düşünülerek denge denklemleri yazılır. Ayrıca birleşme yerlerinde etki –tepki ilkesi göz önünde bulundurulur.



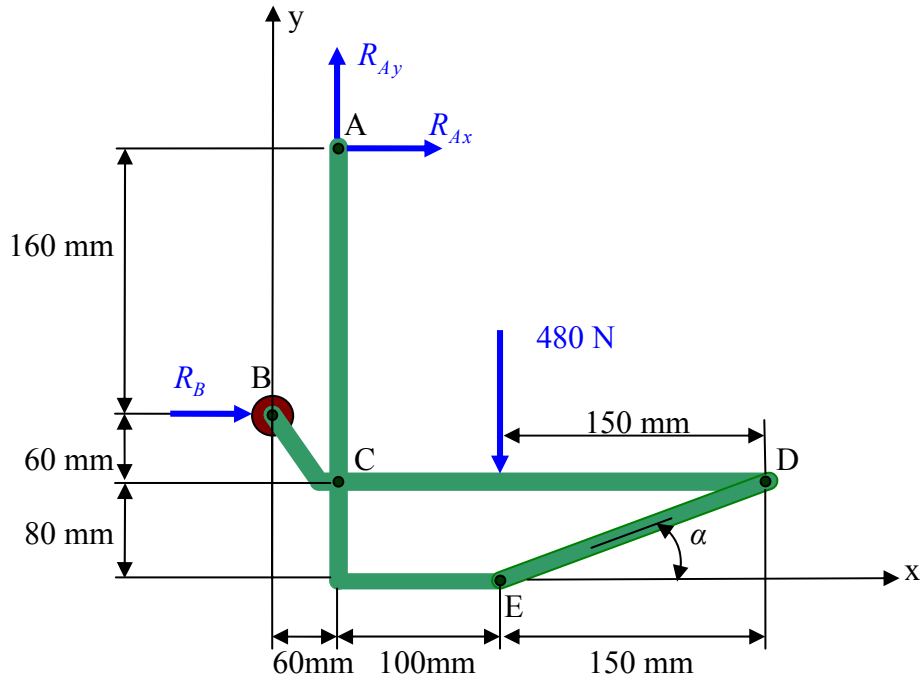


**Problem 11.2.1** Şekilde gösterilen çerçevedeki ACE ve BCD elemanları C de bir pim ve DE bağlantı çubuğu ile birbirine bağlanmıştır. Gösterilen yükleme durumunda DE bağlantı çubuğundaki kuvveti ve C den BCD elemanına gelen kuvvetin bileşenlerini bulunuz.



Çözüm:

Tüm cisim için serbest cisim diyagramı



Tüm cisim için denge denklemleri:

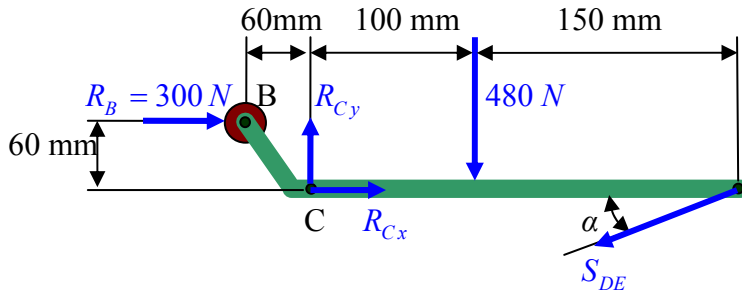
$$\sum F_x = 0 \Rightarrow R_{Ax} + R_B = 0 \Rightarrow R_{Ax} = -R_B$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow R_{Ay} - 480 = 0 \Rightarrow R_{Ay} = 480 \text{ N}$$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow 160 R_B - 100 * 480 = 0 \Rightarrow R_B = 300 \text{ N} , R_{Ax} = -300 \text{ N}$$

$$\sin \alpha = \frac{80}{\sqrt{150^2 + 80^2}} , \sin \alpha = \frac{8}{17} , \cos \alpha = \frac{150}{\sqrt{150^2 + 80^2}} , \cos \alpha = \frac{15}{17}$$

BCD cismi için serbest cisim diyagramı :



BCD cismi için denge denklemleri :

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow R_{Cx} - S_{DE} \cos \alpha + 300 = 0$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow R_{Cy} - S_{DE} \sin \alpha - 480 = 0$$

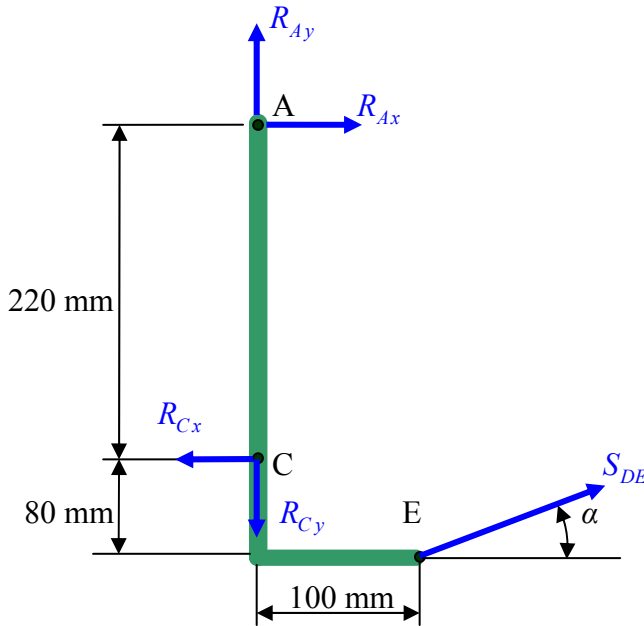
$$\sum M_C = 0 \Rightarrow (100 + 150) S_{DE} \sin \alpha + 60 * 300 + 100 * 480 = 0$$

$$S_{DE} = -\frac{17(100 * 480 + 60 * 300)}{8 * 250}, \quad \boxed{S_{DE} = -561 \text{ N}}$$

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow R_{Cx} - (-561) \frac{15}{17} + 300 = 0, \quad R_{Cx} = -\frac{15}{17} 561 - 300, \quad \boxed{R_{Cx} = -795 \text{ N}}$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow R_{Cy} - (-561) \frac{8}{17} - 480 = 0, \quad \boxed{R_{Cy} = 216 \text{ N}}$$

ACE cismi için serbest cisim diyagramı :



ACE cismi için denge denklemleri (kontrol için)

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow R_{Ax} - R_{Cx} + S_{DE} \cos \alpha = 0, \quad (-300) - (-795) + (-561) \frac{15}{17} = 0$$

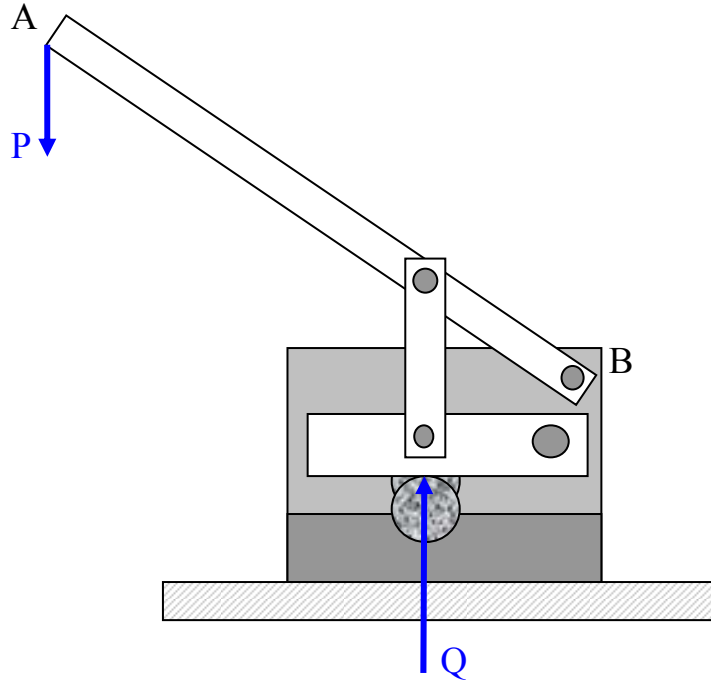
$$\sum F_y = 0 \Rightarrow R_{Ay} - R_{Cy} + S_{DE} \sin \alpha = 0, \quad 480 - 216 + (-561) \frac{8}{17} = 0$$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow -220 R_{Cx} + 300 S_{DE} \cos \alpha + 100 S_{DE} \sin \alpha = 0$$

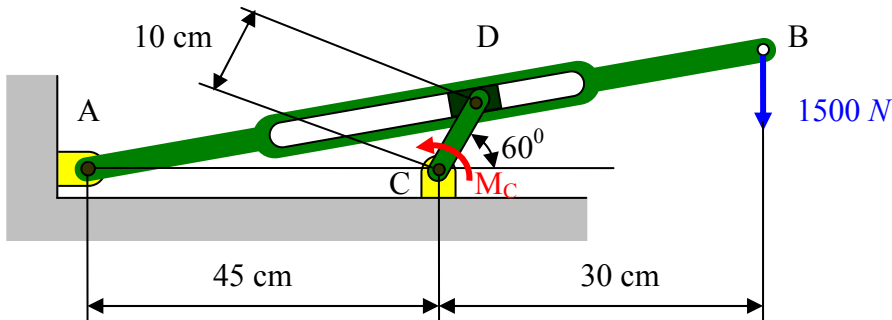
$$-220(-795) + 300(-561) \frac{15}{17} + 100(-561) \frac{8}{17} = 0$$

### 11.3 Makineler

Makineler kuvvetleri iletmek veya değiştirmek için kullanılan yapılardır. İster tek bir alet ve komple bir mekanizma olsun tümünde iletilen giriş kuvvet veya momentleri ile çıkışta oluşturulan kuvvet veya momentler göz önüne alınır. Bu tür yapıların çözümünde çerçevelerdeki aynı yöntem izlenir. Yani tüm yapı elemanlarına ayrılıp her bir eleman için temel denklemler yazılır. Ayrıca birleşme veya temas noktalarında etki tepki ilkesi kullanılır. Aşağıdaki şekilde gösterilen el makasında AB kolunun A ucuna uygulanan P Kuvveti bu makasın mekanizması tarafından Q kuvvetine dönüştürülür.

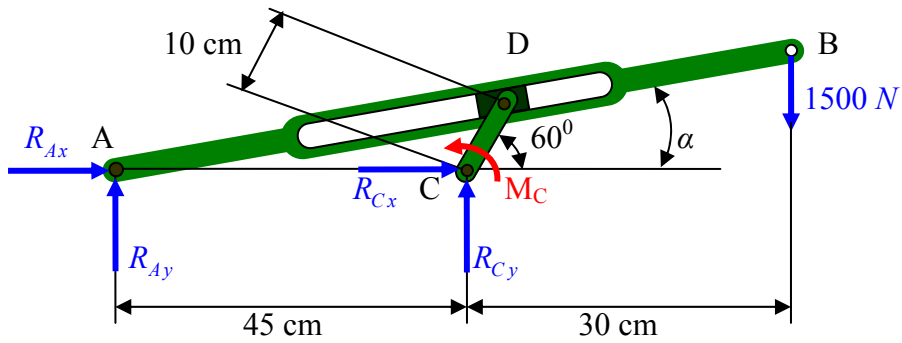


**Problem 11.3.1** Aşağıda gösterilen mekanizmayı dengede tutmak için CD krankına uygulanması gereken  $M_C$  momentinin şiddetini bulunuz. D bloğu CD krankına bir pimle bağlanmıştır ve AB elemanında açılmış bir yarıık içinde serbestçe kayabilir.



Çözüm :

Tüm cisim için serbest cisim diyagramı:



Tüm cisim için denge denklemleri:

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow R_{Ax} + R_{Cx} = 0 \Rightarrow R_{Ax} = -R_{Cx}$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow R_{Ay} + R_{Cy} - 1500 = 0 \Rightarrow$$

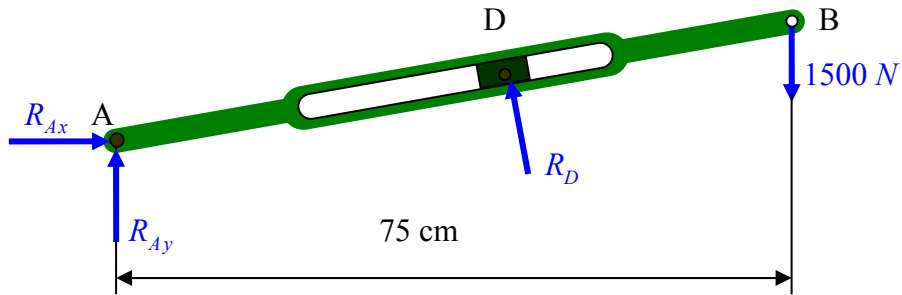
$$\sum M_A = 0 \Rightarrow M_C + 45 R_{Cy} - 75 * 1500 = 0$$

$$\overline{AD} = \sqrt{\overline{AC}^2 + \overline{CD}^2 - 2 \overline{AC} * \overline{CD} \cos \widehat{ACD}}, \quad \overline{AD} = \sqrt{45^2 + 10^2 - 2 * 45 * 10 \cos 120^\circ}$$

$$\overline{AD} = 50,74446 \text{ cm}$$

$$\sin \alpha = \frac{\overline{CD} \sin 60^\circ}{\overline{AD}}, \quad \sin \alpha = \frac{10 \sin 60^\circ}{50,74446} \Rightarrow \alpha = 9,826^\circ$$

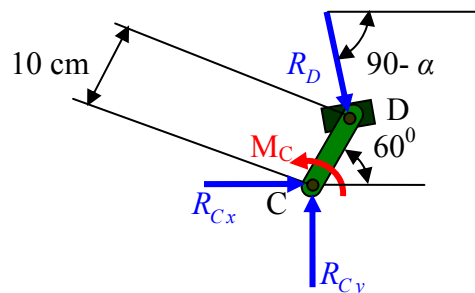
AB elemanı için serbest cisim diyagramı :



AB elemanı için moment denklemi :

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow \overline{AD} R_D - 75 * 1500 = 0 \Rightarrow R_D = 2216,991 \text{ N}$$

CD Krankı için serbest cisim diyagramı:





CD Krankı için denge denklemleri :

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow R_{Cx} + R_D \cos(90 - \alpha) = 0 \Rightarrow R_{Cx} = -R_D \cos(90 - \alpha)$$

$$R_{Cx} = -2216,991 * \cos(90 - 9,826) , \quad \underline{R_{Cx} = -378,344 N}$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow R_{Cy} - R_D \sin(90 - \alpha) = 0 \Rightarrow R_{Cy} = 2216,991 * \sin(90 - 9,826)$$

$$\underline{R_{Cy} = 2184,47 N}$$

$$\sum M_C = 0 \Rightarrow M_C \vec{k} + \overrightarrow{CD} \wedge \vec{R}_D = 0$$

$$M_C \vec{k} + (10 \cos 60^\circ \vec{i} + 10 \sin 60^\circ \vec{j}) \wedge [R_D \cos(90 - \alpha) \vec{i} - R_D \sin(90 - \alpha) \vec{j}] = 0$$

$$M_C \vec{k} + [-10 \cos 60^\circ R_D \sin(90 - \alpha) - 10 \sin 60^\circ R_D \cos(90 - \alpha)] \vec{k} = 0$$

$$M_C = +10 \cos 60^\circ R_D \sin(90 - \alpha) + 10 \sin 60^\circ R_D \cos(90 - \alpha)$$

$$M_C = +10 \cos 60^\circ * 2216,991 * \sin 80,1736 + 10 \sin 60^\circ * 2216,991 * \cos 80,1736$$

$$\boxed{M_C = 14199 Ncm}$$

Tüm cisim için denge denklemleri:

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow R_{Ax} + R_{Cx} = 0 \Rightarrow R_{Ax} = -R_{Cx} \Rightarrow \underline{R_{Ax} = 378,344 N}$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow R_{Ay} + R_{Cy} - 1500 = 0 \Rightarrow \underline{R_{Ay} = -684,47}$$

Tüm cisim için moment denklemi: ( kontrol için )

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow M_C + 45 R_{Cy} - 75 * 1500 = 0 \Rightarrow$$

$$14199 + 45 * 2184,47 - 75 * 1500 = 0 \Rightarrow 0,15 \cong 0 \text{ alınabilir. ( yuvarlatma}$$

hatalarından kaynaklanır.)

## BÖLÜM 12

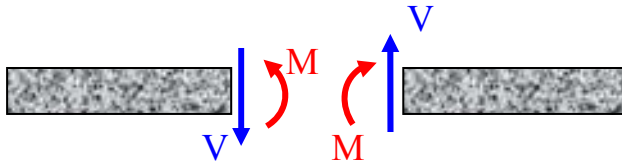
### KİRİŞLERDEKİ KESİT ZORLARI KESME KUVVETİ VE EĞİLME MOMENTİ DİYAGRAMLARI

#### 12.1 Kirişlerde kesit zorları

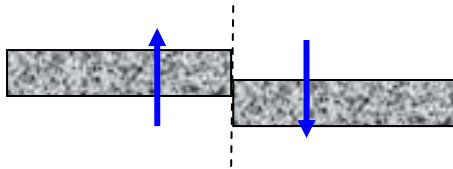
Bir kirişin enine kesitindeki iç kuvvetlerin ve momentlerin kesit düzleminde ve kesite dik olmak üzere alınan bileşenlerine kesit zorları denir. Kirişlerin boyutlandırılmasında kesit zorlarının bilinmesi hesapları kolaylaştırır. Kesit zorlarının bileşenleri etki şekline göre aşağıdaki gibi isimlendirilir. Normal kuvvet : Kesite etki eden iç kuvvetin kesite dik bileşeni. Kesme kuvveti : Kesite etki eden iç kuvvetin kesit düzlemindeki bileşeni. Burulma momenti: Kesite etki eden momentin kesite dik bileşeni. Eğilme momenti : Kesite etki eden momentin kesit düzlemindeki bileşeni.

#### 12.2 Kesit zorları için kabul edilen pozitif yönler

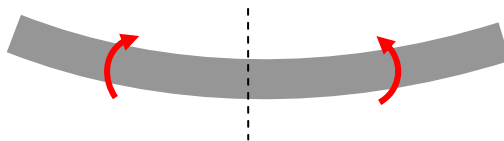
Normal kuvvet ve burulma momenti kesitten dışarı doğru ise pozitif kabul edilir. Kesme kuvveti kesit düzleminin ayırdığı parçalardan sağdakini aşağı doğru harekete zorluyorsa pozitif alınır. Eğilme momenti kirişi aşağıya doğru bel verecek şekilde eğerse pozitif alınır.



Kesitteki iç kuvvetler ( pozitif kesme kuvveti V ve Pozitif Eğilme momenti M )

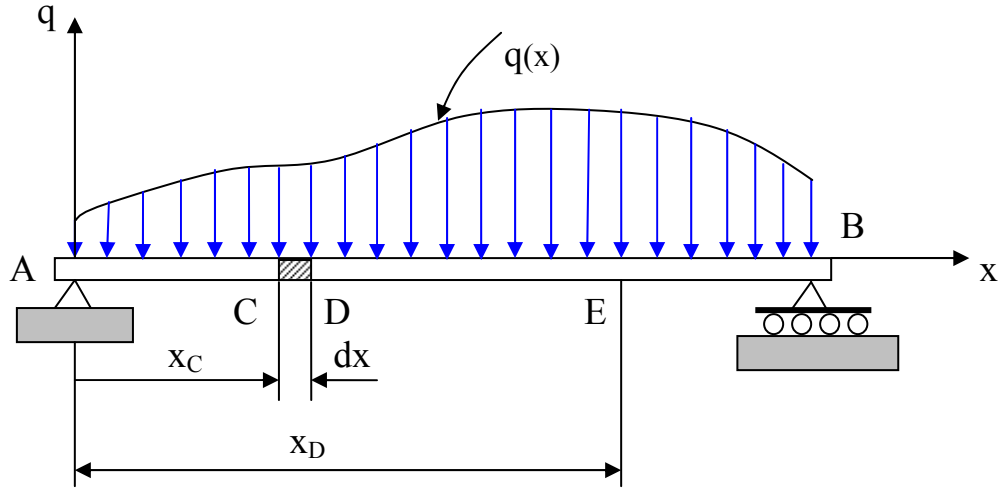


Pozitif kesme kuvvetinde dış kuvvetlerin etkisi

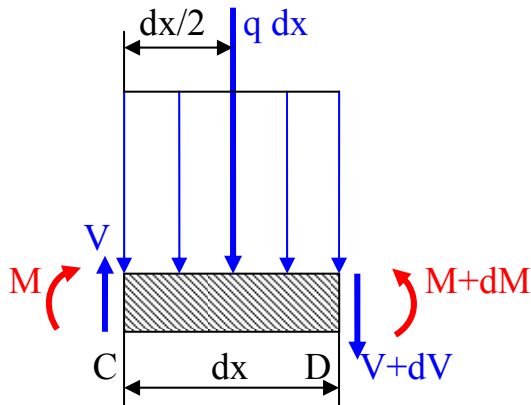


Pozitif eğilme momentinde dış kuvvetlerin etkisi

### 12.3 Yayılı yük , kesme kuvveti ve eğilme momenti arasındaki bağıntılar



Şekilde yayılı yük etkisindeki basit mesnetli bir kiriş gösterilmektedir. Bu kirişten alınan bir diferansiyel eleman üzerinde etkiyen kuvvetler ve bu elemanın dengesi düşünülerek aşağıdaki denklemler yazılabilir.



$$\sum F_y = 0 \Rightarrow V - (V + dV) - q dx = 0$$

$$dV = -q dx$$

$$\frac{dV}{dx} = -q$$

Böylece kesme kuvvetinin kesit uzunluğu boyunca türevi o noktadaki yayılı yüke şiddeti eşit yönü ise zıt olur.

$$V_E - V_C = - \int_{x_C}^{x_E} q \, dx$$

Buradan E ve C noktaları arasındaki kesme kuvveti farkının bu noktalar arasında yayılı yük diagramı altındaki alana eşit olduğu anlaşılır.

$$\sum M_D = 0 \Rightarrow (M + dM) - M - V \, dx + q \, dx \frac{dx}{2} = 0$$

$$dM = V \, dx - \frac{1}{2} (dx)^2$$

$$\frac{dM}{dx} = V$$

Bu son ifadeden eğilme momentinin kiriş uzunluğu boyunca türevinin kesme kuvvetine eşit olduğu anlaşılır.

$$dM = V \, dx$$

$$M_E - M_C = \int_{x_C}^{x_E} V \, dx$$

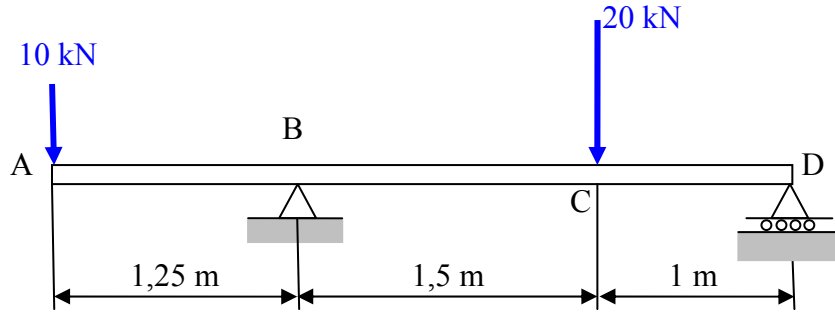
Buradan E ve C noktaları arasındaki eğilme momenti farkının bu noktalar arasında kesme kuvveti diagramı altındaki alana eşit olduğu anlaşılır.

## 12.4 Kesme kuvveti ve eğilme momenti diyagramları

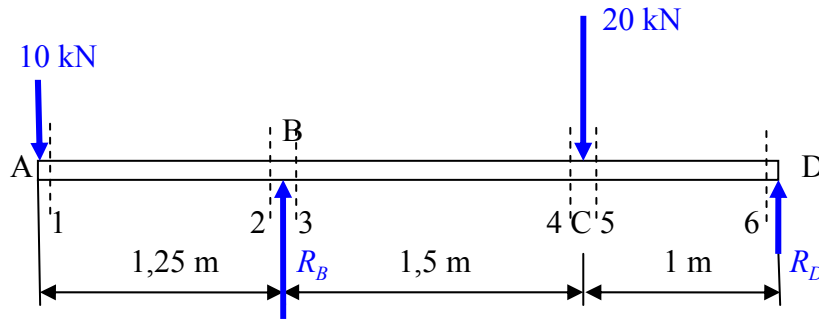
Kiriş kesiti boyunca kesme kuvveti ve eğilme momenti diyagramlarının çizilmesi bu büyüklüklerin izlenmesi ve buna göre kirişin ölçülendirilmesi mühendislik açısından önemlidir. Bu diyagramların çiziminde en çok kullanılan yöntem kesit yöntemidir.

Kesit yönteminde kiriş uzunluğu boyunca bazı özel noktalarından ( tekil yük etki noktaları yayılı yük başlangıç ve bitiş noktaları) bölgelere ayrılır. Bu her bölge başlangıcı ve az evveli olmak üzere kesitler alınıp kesitin sol tarafının dengesi için yazılan denklemlerden kesme kuvveti ve eğilme momenti değerleri hesaplanır. Elde edilen değerler yardımıyla kesme kuvveti ve eğilme momenti diyagramları çizilir.

**Problem 12.4.1** Şekilde görülen kirişte , verilen yükleme durumu için , kesme kuvveti ve eğilme momenti diyagramlarını çiziniz.



Çözüm:

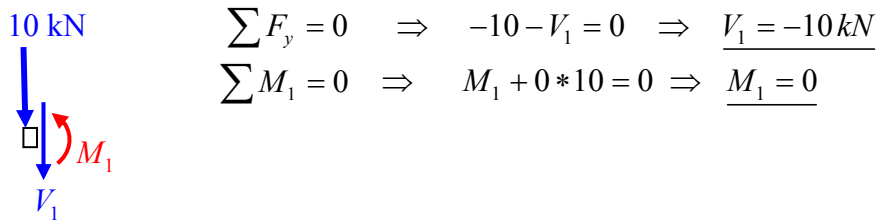


Tüm kiriş için denge denklemleri:

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow R_B + R_D - 10 - 20 = 0 \Rightarrow R_B + R_D = 30 \text{ kN}$$

$$\sum M_B = 0 \Rightarrow 2,5 R_D + 1,25 * 10 - 1,5 * 20 = 0 \Rightarrow \underline{R_D = 7 \text{ kN}} , \underline{R_B = 23 \text{ kN}}$$

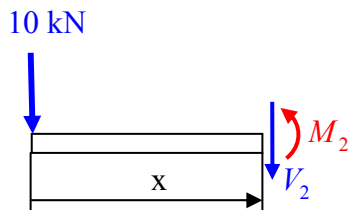
1 kesitin solundaki kiriş parçası için serbest cisim diyagramı ve denge denklemleri :



$$\sum F_y = 0 \Rightarrow -10 - V_1 = 0 \Rightarrow \underline{V_1 = -10 \text{ kN}}$$

$$\sum M_1 = 0 \Rightarrow M_1 + 0 * 10 = 0 \Rightarrow \underline{M_1 = 0}$$

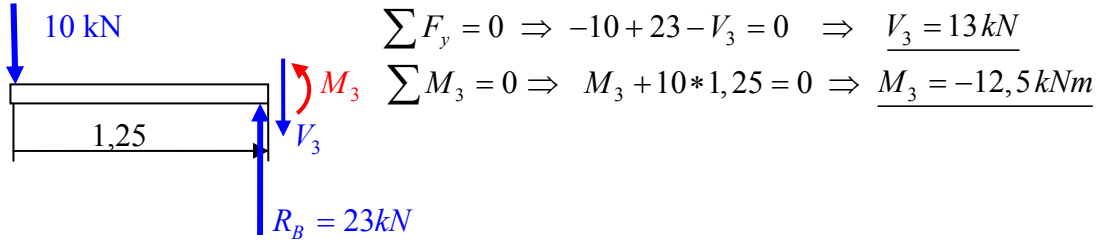
2 kesitin solundaki kiriş parçası için serbest cisim diyagramı ve denge denklemleri :



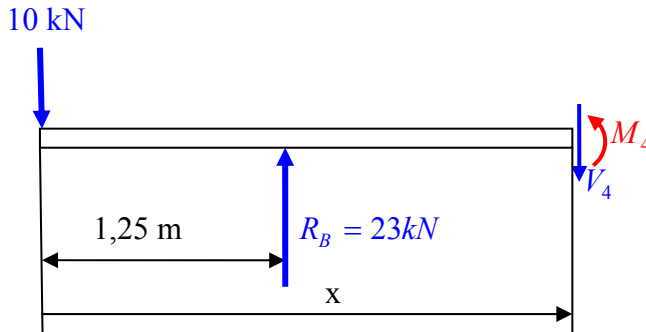
$$\sum F_y = 0 \Rightarrow -10 - V_2 = 0 \Rightarrow \underline{V_2 = -10 \text{ kN}}$$

$$\sum M_2 = 0 \Rightarrow M_2 + 10x = 0 \Rightarrow \underline{M_2 = -10x}$$

3 kesitinin solundaki kiriş parçası için serbest cisim diyagramı ve denge denklemleri :



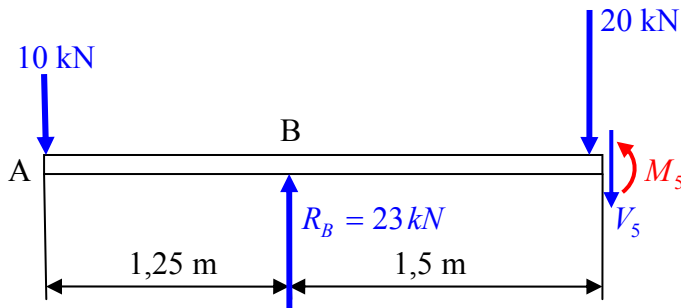
4 kesitinin solundaki kiriş parçası için serbest cisim diyagramı ve denge denklemleri :



$$\sum F_y = 0 \Rightarrow -10 + 23 - V_4 = 0 \Rightarrow \underline{V_4 = 13 \text{ kN}}$$

$$\sum M_4 = 0 \Rightarrow M_4 + 10x - 23(x - 1,25) = 0 \Rightarrow \underline{M_4 = 13x - 28,75}$$

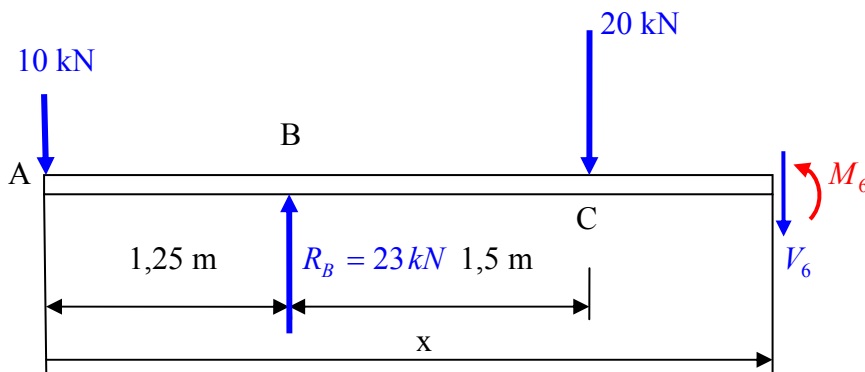
5 kesitinin solundaki kiriş parçası için serbest cisim diyagramı ve denge denklemleri :



$$\sum F_y = 0 \Rightarrow -10 + 23 - 20 - V_5 = 0 \Rightarrow \underline{V_5 = -7 \text{ kN}}$$

$$\sum M_5 = 0 \Rightarrow M_5 + 10 \cdot 2,75 - 23 \cdot 1,5 = 0 \Rightarrow \underline{M_5 = 7 \text{ kNm}}$$

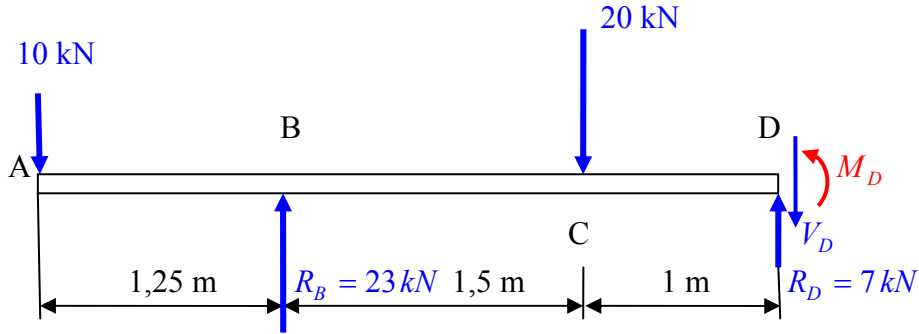
6 kesitinin solundaki kiriş parçası için serbest cisim diyagramı ve denge denklemleri :



$$\sum F_y = 0 \Rightarrow -10 + 23 - 20 - V_6 = 0 \Rightarrow \underline{V_6 = -7 \text{ kN}}$$

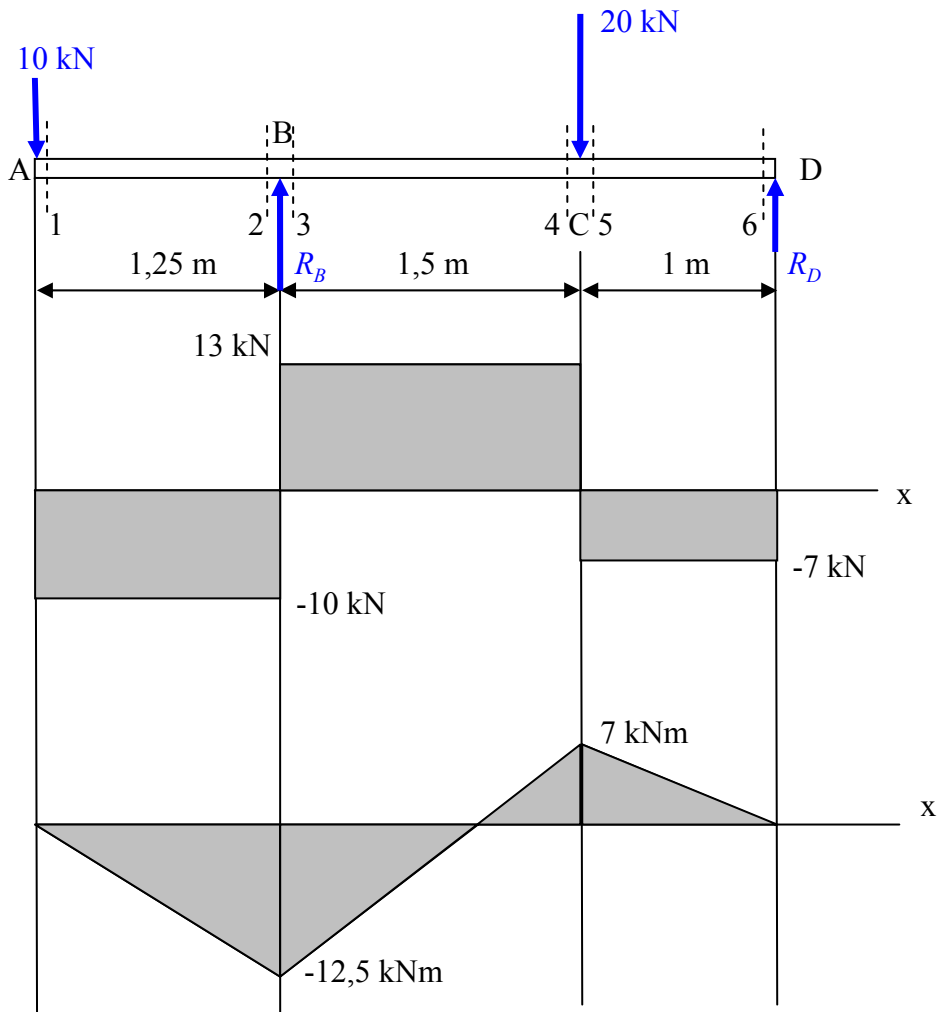
$$\sum M_6 = 0 \Rightarrow M_6 + 10x - 23(x - 1.25) + 20(x - 2.75) = 0, \quad \underline{M_6 = -7x + 26.25}$$

D noktasındaki yüzeyin solundaki kiriş parçası için serbest cisim diyagramı ve denge denklemleri :

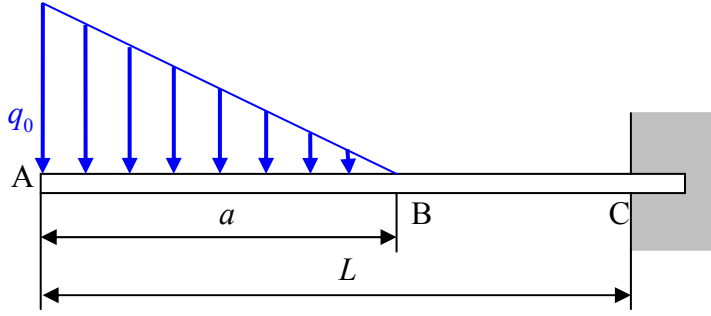


$$\sum F_y = 0 \Rightarrow -10 + 23 - 20 + 7 - V_D = 0 \Rightarrow \underline{V_D = 0}$$

$$\sum M_D = 0 \Rightarrow M_D + 10 \cdot 3.75 - 23 \cdot 2.5 + 20 \cdot 1 = 0, \quad \underline{M_D = 0}$$

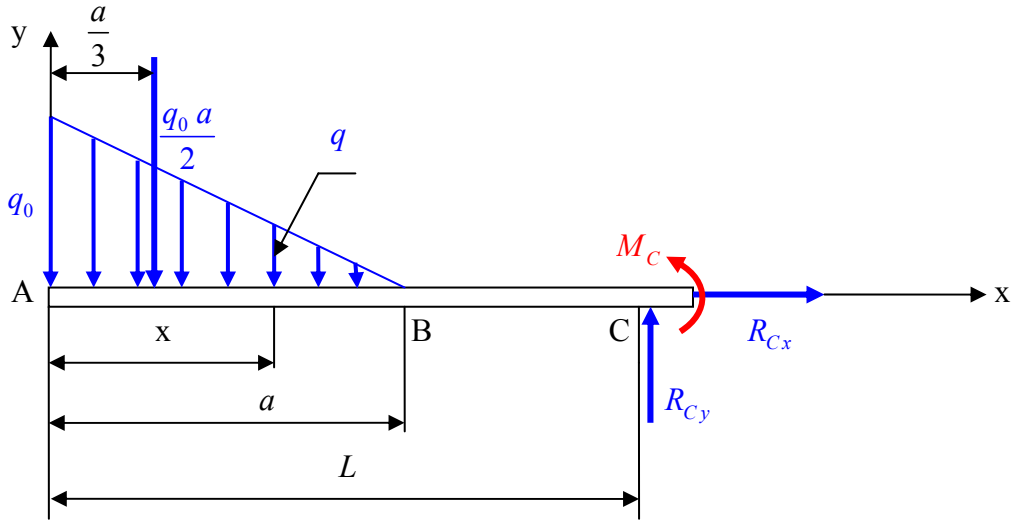


**Problem 12.4.2** Şekilde görülen C de ankastre mesnetli kirişin , verilen yükleme durumu için , kesme kuvveti ve eğilme momenti diyagramlarını çiziniz.



Çözüm:

Tüm kiriş için serbest cisim diyagramı ve denge denklemleri :



$$\sum F_x = 0 \Rightarrow R_{Cx} = 0$$

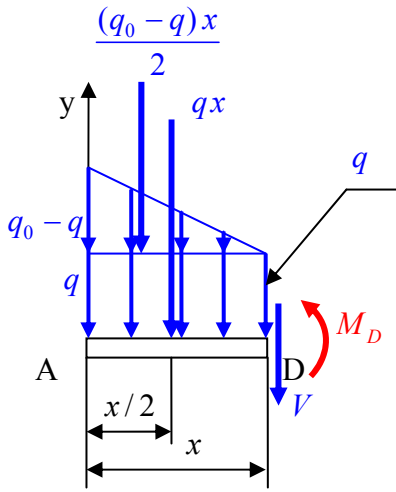
$$\sum F_y = 0 \Rightarrow R_{Cy} - \frac{q_0 a}{2} = 0 \Rightarrow R_{Cy} = \frac{q_0 a}{2}$$

$$\sum M_C = 0 \Rightarrow M_C + (L - \frac{a}{3}) \frac{q_0 a}{2} = 0 \Rightarrow M_C = -\frac{q_0 a^2}{6} - \frac{q_0 a}{2} L, \quad M_C = -\frac{q_0 a}{6} (3L - a)$$

$$\frac{q}{q_0} = \frac{a-x}{a} \Rightarrow q = \frac{a-x}{a} q_0$$



kirişin A ile B arasındaki bir kesiti için serbest cisim diyagramı ve denge denklemleri:



$$\sum F_y = 0 \Rightarrow -V - \frac{(q_0 - q)x}{2} - qx = 0 \Rightarrow V = -\frac{(q_0 + q)x}{2}$$

$$V = -\frac{(q_0 + \frac{a-x}{a}q_0)x}{2}, \quad V = -\frac{(2q_0 - \frac{q_0}{a}x)x}{2}, \quad \boxed{V = \frac{q_0}{2a}x^2 - q_0x}$$

$$\sum M_D = 0 \Rightarrow M_D + \frac{(q_0 - q)x}{2} \frac{2}{3}x + qx \frac{1}{2}x = 0 \Rightarrow M_D = -\frac{(q_0 - q)x^2}{3} - \frac{qx^2}{2}$$

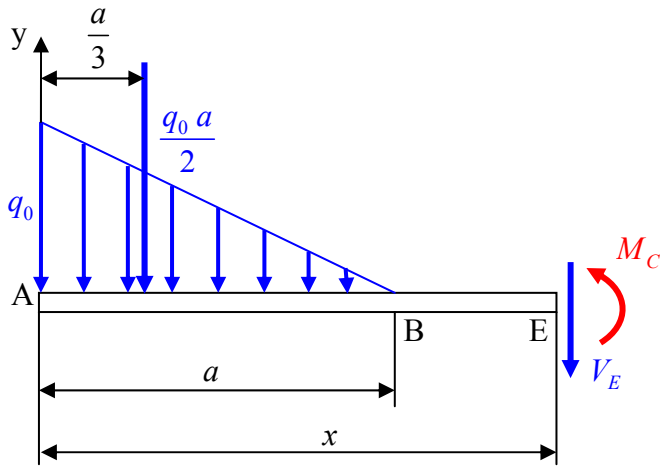
$$M_D = -\frac{(2q_0 + q)x^2}{6}, \quad M_D = -\frac{(3q_0 - \frac{x}{a}q_0)x^2}{6}, \quad \boxed{M_D = \frac{q_0}{6a}x^3 - \frac{q_0}{2}x^2}$$

B noktasında  $x = a$  dır.

$$V_B = \frac{q_0}{2a}a^2 - q_0a, \quad \boxed{V_B = -\frac{q_0}{2}a}$$

$$M_B = \frac{q_0}{6a}a^3 - \frac{q_0}{2}a^2, \quad \boxed{M_B = -\frac{q_0}{3}a^2}$$

kirişin B ile C arasındaki kesitlerinde serbest cisim diyagramı



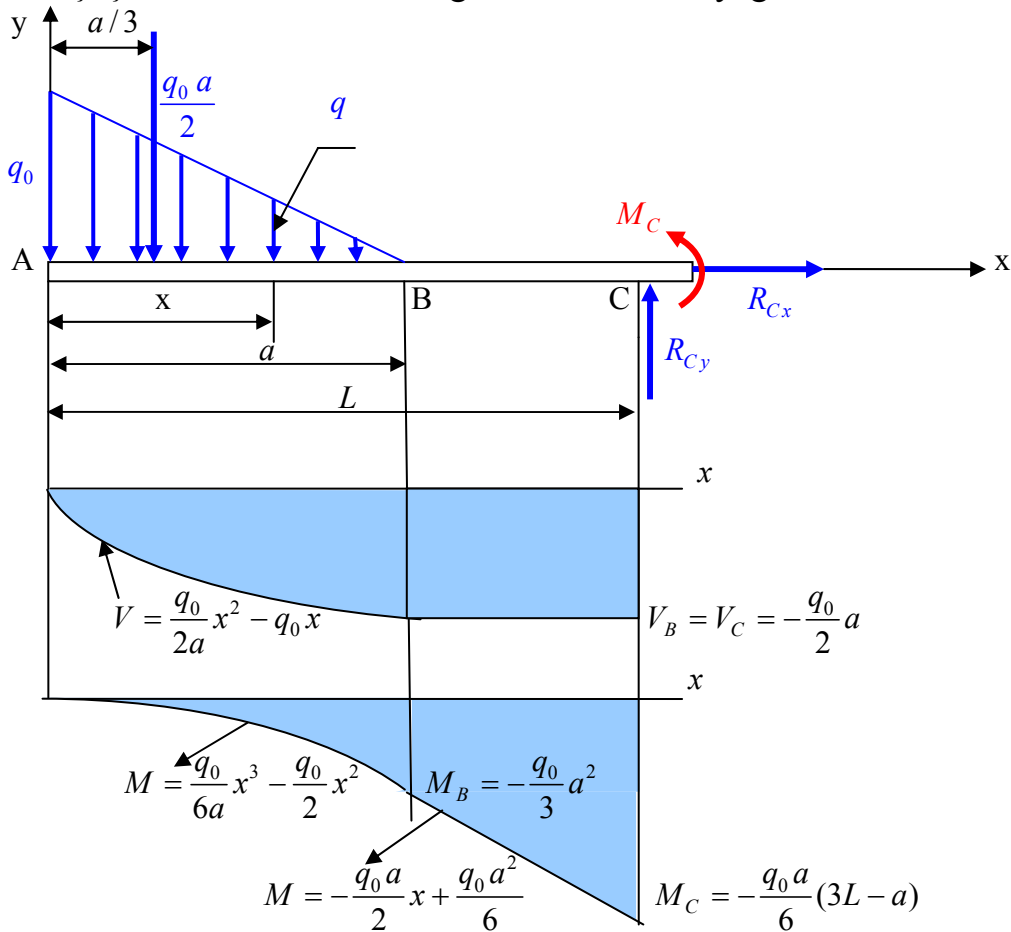
$$\sum F_y = 0 \Rightarrow -V_E - \frac{q_0 a}{2} = 0 \Rightarrow \boxed{V_E = -\frac{q_0 a}{2}}$$

$$\sum M_E = 0 \Rightarrow M_E + \frac{q_0 a}{2} \left(x - \frac{a}{3}\right) = 0 \Rightarrow \boxed{M_E = -\frac{q_0 a}{2} x + \frac{q_0 a^2}{6}}$$

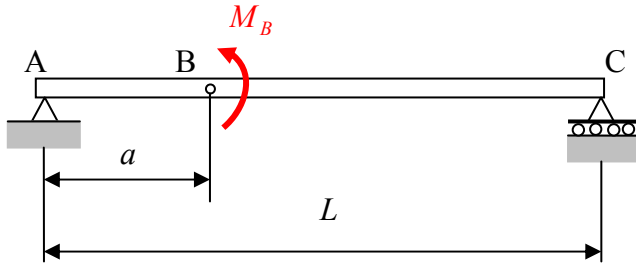
C noktasın da  $x = L$  dir.

$$M_C = -\frac{q_0 a}{2} L + \frac{q_0 a^2}{6}, \quad \boxed{M_C = -\frac{q_0 a}{6} (3L - a)}$$

Tüm kiriş için kesme kuvveti ve eğilme momenti diyagramı :

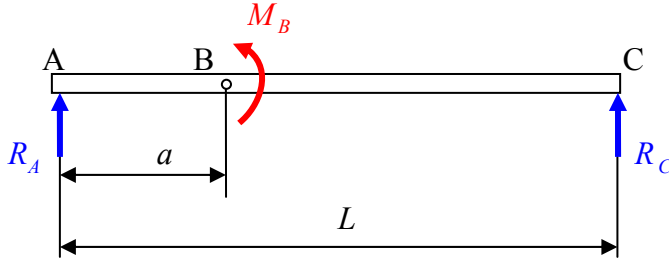


**Problem 12.4.3** Basit mesnetli AC kirişine B noktasından  $M_B$  şiddetinde bir kuvvet çifti uygulanmıştır. Bu kiriş için kesme kuvveti ve eğilme momenti diyagramlarını çiziniz.



Çözüm:

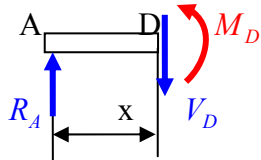
Tüm cisim için serbest cisim diyagramı ve denge denklemleri:



$$\sum F_y = 0 \Rightarrow R_A + R_C = 0 \Rightarrow R_C = -R_A$$

$$\sum M_C = 0 \Rightarrow M_B - R_A L = 0 \Rightarrow R_A = \frac{M_B}{L}, \quad R_C = -\frac{M_B}{L}$$

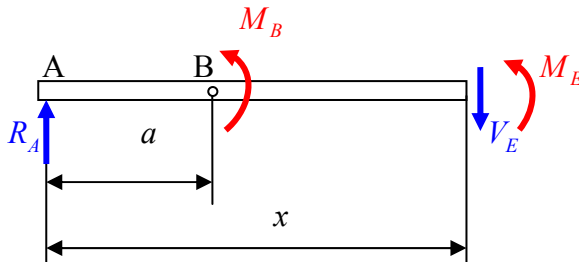
kirişin A ile B arasındaki bir kesiti için serbest cisim diyagramı ve denge denklemleri:



$$\sum F_y = 0 \Rightarrow R_A - V_D = 0 \Rightarrow V_D = R_A, \quad \boxed{V_D = \frac{M_B}{L}}$$

$$\sum M_D = 0 \Rightarrow M_D - R_A x = 0 \Rightarrow M_D = R_A x, \quad M_D = \frac{M_B}{L} x$$

kirişin A ile C arasındaki bir kesiti için serbest cisim diyagramı ve denge denklemleri:

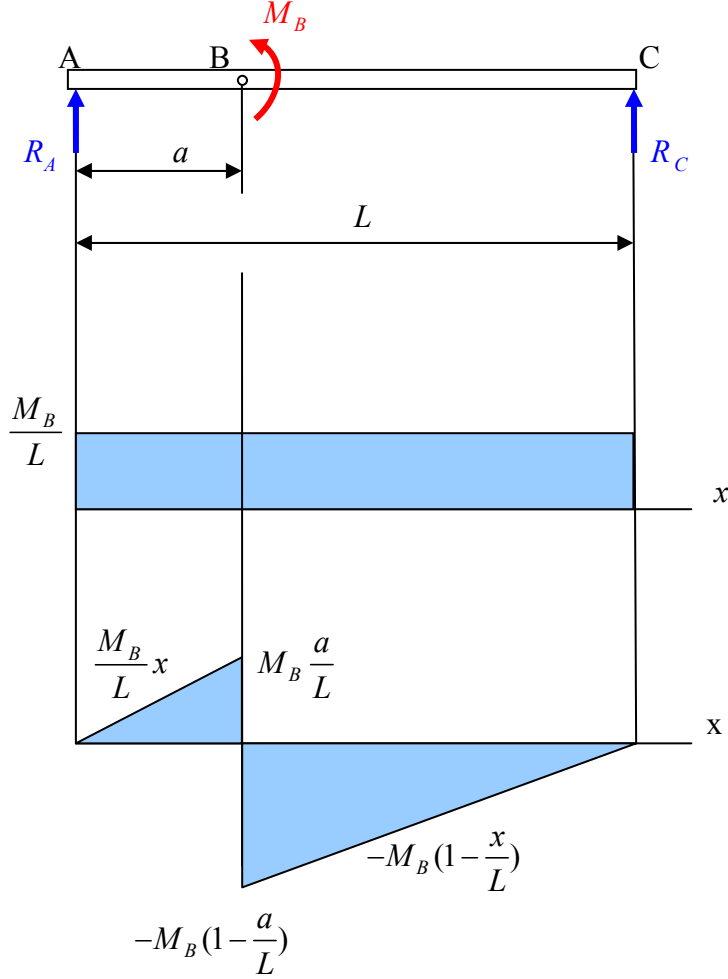


$$\sum F_y = 0 \Rightarrow \Rightarrow V_E = R_A, \quad \boxed{V_E = V_D = \frac{M_B}{L}}$$

$$\sum M_E = 0 \Rightarrow M_E + M_B - R_A x = 0 \Rightarrow M_E = R_A x - M_B$$

$$M_E = \frac{M_B}{L} x - M_B, \quad \boxed{M_E = -M_B \left(1 - \frac{x}{L}\right)}$$

AC kirişı için kesme kuvveti ve eğilme momenti diyagramları :

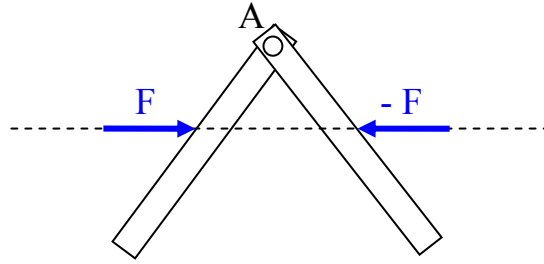


## BÖLÜM 13

### VİRTÜEL İŞLER İLKESİ

#### 13.1 Giriş

Buraya kadar incelenen konular içinde bir cisme maddesel nokta modeli ile yaklaşıldığında bu cisme etki eden kuvvetlerin geometrik toplamının sıfır olmasının denge şartı için gerek ve yeter şart olduğu söylendi. Aynı şekilde bir rijid cisme etki eden kuvvet sisteminin sıfıra eşdeğer olması denge için yeter ve gerek koşul olması problemlerin çözümünde kullanıldı. Bunlardan farklı olarak çeşitli bağlarla birbirine bağlanarak oluşturulan rijid cisim sistemi olarak kabul edilen yapılar için etki eden kuvvet sisteminin sıfıra eşdeğer olması yeterli koşul değildir. Bundan dolayı bu tür problemlerde sistem elemanlarına ayrılarak sıfıra eşdeğerlik kuralı etki tepki ilkesi ile birlikte her bir elemana ayrı ayrı uygulanıp çözüme gidilir.



Şekilde gösterilen A da sürtünmesiz mafsall ile bağlanmış rijid cisim sisteminde sisteme etki eden dış aktif kuvvetler sıfıra eşdeğer olmasına rağmen sistem bu kuvvetler etkisinde dengede değildir.

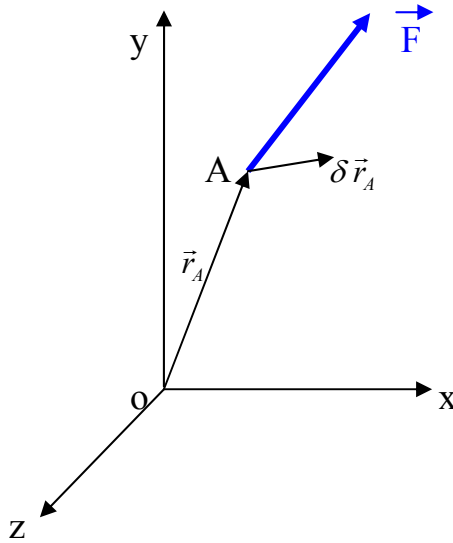
Virtüel işler ilkesi ise rijid cisim sistemine parçalarına ayırmadan uygulanır. Bundan dolayı özellikle rijid cisim sistemlerinde bağ kuvvetlerinin gerekli olmadığı durumlarda virtüel işler ilkesi tercih edilir.

#### 13.2 Virtüel yer değiştirme

- Sistemin bağlarına uygun yer değiştirme
- Diferansiyel karakterde ( sonsuz küçük)
- Gerçek olması gerekmeyen , sadece tasarlanan bir yerdeğiştirme
- Dondurulmuş zaman içinde oluşan bir yerdeğiştirme.
- Bu özellikleri sağlamak koşulu ile keyfî bir yerdeğiştirme.

Bir kuvvetin etki ettiği bir A noktasının yer vektörü  $\vec{r}_A$  ise bu noktanın virtüel yer değiştirmesi  $\delta \vec{r}_A$  ile gösterilir.

### 13.3 Bir kuvvetin virtüel işi



Bir  $\vec{F}$  kuvvetinin A uygulama noktasının virtüel yer değiştirmesinde bu kuvvetin yaptığı iş

$$\delta \tau = \vec{F} \cdot \delta \vec{r}_A$$

### 13.4 Bir Momentin virtüel işi

Rijid cisim veya sistemlerinin konumu bazen uzunluk yerine açı ile belirlenebilir. Bu durumda açıdaki virtüel değişimde momentin yaptığı iş

$$\delta \tau = M \cdot \delta \theta$$

dır.

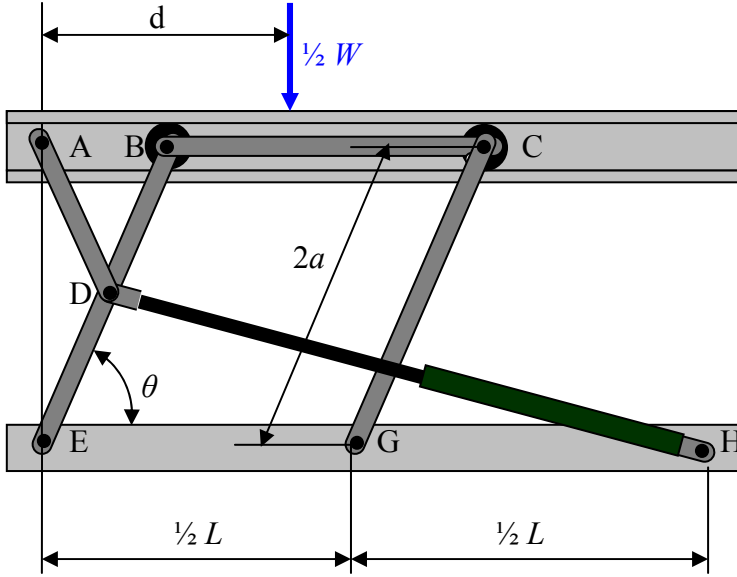
### 13.5 Virtüel işler ilkesi

Bir maddesel nokta ,maddesel noktalar sistemi ,rijid cisim veya rijid cisim sisteminin dengede olması için sisteme etki eden dış Aktif kuvvetlerin sistemin bağlara uygun virtüel yer değiştirmesinde yaptığı işler toplamının sıfıra eşit olması gerek ve yeter koşuldur.

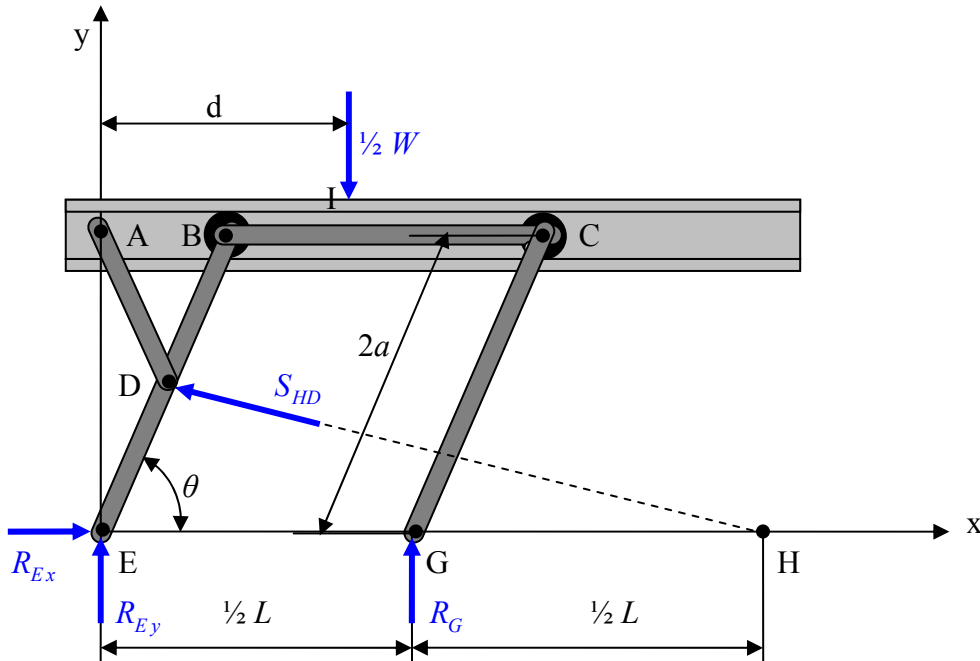
Bir sisteme etki eden dış aktif kuvvetler  $A_1$  noktasında  $\vec{F}_1$  ,  $A_2$  noktasında  $\vec{F}_2$  , . . . ve  $A_n$  noktasında  $\vec{F}_n$  olsun. Bu noktaların virtüel yer değiştirmesinde bu kuvvetlerin yaptığı virtüel işler toplamının sıfır olması bu sistemin dengesi için gerek ve yeter koşuldur .

$$\delta \tau = \vec{F}_1 \cdot \delta \vec{r}_{A1} + \vec{F}_2 \cdot \delta \vec{r}_{A2} + \cdots + \vec{F}_n \cdot \delta \vec{r}_{An}$$

**Problem 13.5.1** Bir hidrolik kaldırma platformu 1000kg kütleli yükleri kaldırmakta kullanılıyor. Platformun aşağı yukarı hareketi her iki tarafında aynı uzunluklu bağlantı çubukları yardımı ile eşit kuvvet uygulayan hidrolik silindirler tarafından gerçekleştirilmektedir. Aşağıdaki şekilde tek bir bağlantı ve tek bir silindir gösterilmektedir.  $\theta = 60^\circ$ ,  $a = 0,7$  m.  $L = 3,2$  m. için hidrolik silindirlerin uyguladığı kuvveti bulunuz. (  $\overrightarrow{ED} = \overrightarrow{BD} = a$  )



Çözüm:



Virtüel iş ilkesi:

$$\delta \tau = 0 \Rightarrow 0,5 \vec{W} \cdot \delta \vec{r}_I + \vec{S}_{HD} \cdot \delta \vec{r}_D = 0$$

$$\vec{W} = -mg \vec{j}, \quad \vec{S}_{HD} = S_{HD} \vec{U}_{HD}, \quad \vec{r}_I = d \vec{i} + 2a \sin \theta \vec{j}, \quad \vec{r}_D = a \cos \theta \vec{i} + a \sin \theta \vec{j}$$

$$\vec{U}_{HD} = \frac{\overline{HD}}{|\overline{HD}|}, \quad \overline{HD} = -(L - a \cos \theta) \vec{i} + a \sin \theta \vec{j}, \quad |\overline{HD}| = \sqrt{(L - a \cos \theta)^2 + (a \sin \theta)^2}$$

$$|\overline{HD}| = \sqrt{L^2 + a^2 - 2aL \cos \theta}, \quad \vec{S}_{HD} = \frac{-S_{HD}(L - a \cos \theta)}{\sqrt{L^2 + a^2 - 2aL \cos \theta}} \vec{i} + \frac{S_{HD} a \sin \theta}{\sqrt{L^2 + a^2 - 2aL \cos \theta}} \vec{j}$$

$$\delta \vec{r}_l = 2a \cos \theta \delta \theta \vec{j}, \quad \delta \vec{r}_D = -a \sin \theta \delta \theta \vec{i} + a \cos \theta \delta \theta \vec{j}$$

$$\delta \tau = 0 \Rightarrow$$

$$-0,5mg \vec{j} \cdot (2a \cos \theta \delta \theta \vec{j}) + \left( \frac{-S_{HD}(L - a \cos \theta)}{\sqrt{L^2 + a^2 - 2aL \cos \theta}} \vec{i} + \frac{S_{HD} a \sin \theta}{\sqrt{L^2 + a^2 - 2aL \cos \theta}} \vec{j} \right) \cdot (-a \sin \theta \delta \theta \vec{i} + a \cos \theta \delta \theta \vec{j}) = 0$$

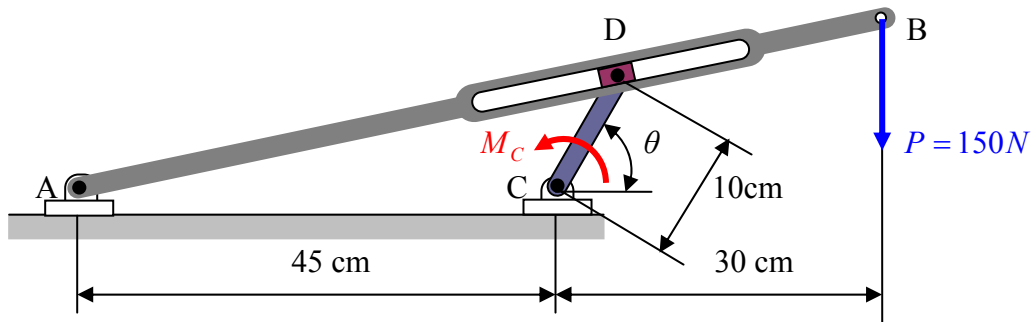
$$-mga \cos \theta \delta \theta + \frac{S_{HD}(L - a \cos \theta) a \sin \theta \delta \theta}{\sqrt{L^2 + a^2 - 2aL \cos \theta}} + \frac{(S_{HD} a \sin \theta) a \cos \theta \delta \theta}{\sqrt{L^2 + a^2 - 2aL \cos \theta}} = 0$$

$$-mga \cos \theta + \frac{S_{HD} L a \sin \theta}{\sqrt{L^2 + a^2 - 2aL \cos \theta}} = 0 \Rightarrow S_{HD} = \frac{mga \cos \theta}{L a \sin \theta} \sqrt{L^2 + a^2 - 2aL \cos \theta}$$

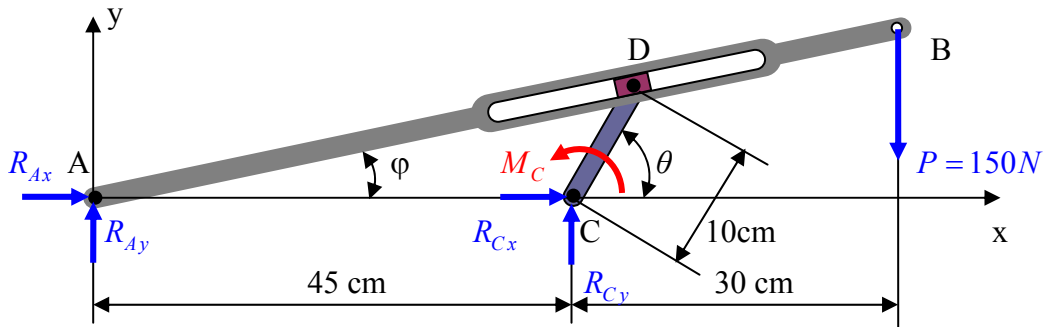
$$S_{HD} = \frac{mg}{L \tan \theta} \sqrt{L^2 + a^2 - 2aL \cos \theta}$$

$$S_{HD} = \frac{1000 * 9,81}{3,2 * \tan 60^\circ} \sqrt{3,2^2 + 0,7^2 - 2 * 0,7 * 3,2 \cos 60^\circ}, \quad \boxed{S_{HD} = 5157,2 \text{ N}}$$

**Problem 13.5.2** Şekilde gösterilen mekanizmayı dengede tutmak için CD krankına uygulanması gereken  $M_C$  kuvvet çiftini  $\theta = 60^\circ$  için bulunuz. Blok D de CD krankına bir pimle bağlıdır ve AB kolunda açılmış bir yarık içinde serbestçe kayabilmektedir.



Çözüm :





$$\delta\tau = 0 \Rightarrow M_C \delta\theta + \vec{P} \bullet \delta\vec{r}_B = 0 \Rightarrow M_C \delta\theta - P \bullet \delta y_B = 0$$

$$y_B = \overline{AB} \sin \varphi$$

$$\overline{AD} \sin \varphi = \overline{CD} \sin \theta, \quad \sin \varphi = \frac{\overline{CD}}{\overline{AD}} \sin \theta, \quad \overline{AD} = \sqrt{45^2 + 10^2 - 2 * 45 * 10 * \cos(180 - \theta)}$$

$$\overline{AD} = \sqrt{2125 + 900 * \cos \theta}, \quad \theta = 60^\circ \text{ için } \overline{AD} = 50,7445 \text{ cm}, \quad \varphi = \arcsin\left(\frac{\overline{CD}}{\overline{AD}} \sin \theta\right)$$

$$\varphi = \arcsin\left(\frac{10}{50,7445} \sin 60^\circ\right), \quad \varphi = 9,826^\circ, \quad \overline{AB} = \frac{45 + 30}{\cos \varphi}, \quad \overline{AB} = 76,117 \text{ cm},$$

$$\sin \varphi = \frac{10}{\sqrt{2125 + 900 * \cos \theta}} \sin \theta, \quad y_B = \frac{76,117}{\sqrt{2125 + 900 * \cos \theta}} \sin \theta$$

$$y_B = 76,117 (2125 + 900 * \cos \theta)^{-1/2} \sin \theta$$

$$\delta y_B = \left(-\frac{1}{2} 76,117 (2125 + 900 * \cos \theta)^{-3/2} (-900 \sin \theta) \sin \theta + 76,117 (2125 + 900 * \cos \theta)^{-1/2} \cos \theta\right) \delta\theta$$

$$\delta y_B = 9,466 \delta\theta$$

$$\delta\tau = 0 \Rightarrow M_C \delta\theta - 150 * 9,466 \delta\theta = 0 \Rightarrow M_C - 150 * 9,466 = 0 \Rightarrow M_C = 150 * 9,466$$

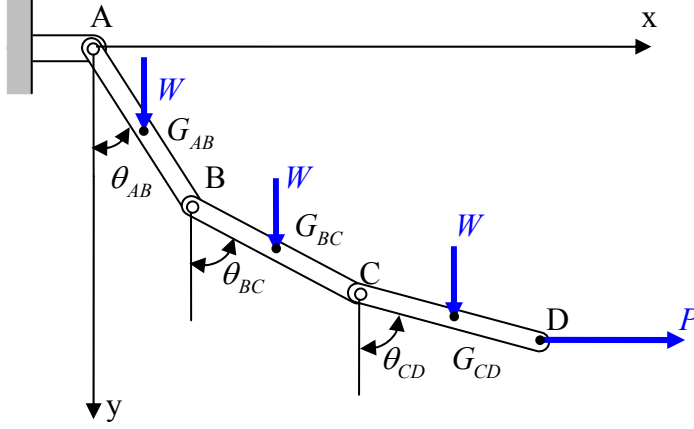
$$\boxed{M_C = 1419,9 \text{ Ncm}}$$

### 13.6 Çok serbestlik dereceli sistemlerde virtüel işler ilkesi:

Bir sistemin hareketi esnasında her an için konumunu belirleyen açı uzunluk gibi değişkenlere genelleştirilmiş koordinatlar denir. Genelleştirilmiş koordinatların birbirinden bağımsız olan sayısına serbestlik derecesi denir.

Çok serbestlik dereceli sistemlerde virtüel işler ilkesi uygulanırken serbestlik derecesini belirleyen genelleştirilmiş koordinatların her seferinde bir tanesinin değişimine izin verilip serbestlik derecesi kadar denklem elde edilir.

**Problem 13.6.1** Her birinin uzunluğu  $l$  ağırlığı  $W$  olan üç çubuk birbirlerine mafsallıdır. Birinci çubuk ayrıca sabit mesnede mafsallıdır ve son çubuğun ucuna  $P$  kuvveti uygulanmıştır. Sistem düşey düzlemde olduğuna göre denge durumunda çubukların düşey doğrultu ile yaptıkları açıları  $P$  kuvveti ve  $W$  ağırlığına bağlı olarak bulunuz.



Çözüm:

$$\delta\tau = 0 \Rightarrow \vec{W} \cdot \delta\vec{r}_{G_{AB}} + \vec{W} \cdot \delta\vec{r}_{G_{BC}} + \vec{W} \cdot \delta\vec{r}_{G_{CD}} + \vec{P} \cdot \delta\vec{r}_D = 0$$

$$\Rightarrow W \delta y_{G_{AB}} + W \delta y_{G_{BC}} + W \delta y_{G_{CD}} + P \delta x_D = 0$$

$$y_{G_{AB}} = \frac{l}{2} \cos \theta_{AB}, \quad y_{G_{BC}} = l \cos \theta_{AB} + \frac{l}{2} \cos \theta_{BC}, \quad y_{G_{CD}} = l \cos \theta_{AB} + l \cos \theta_{BC} + \frac{l}{2} \cos \theta_{CD}$$

$$x_D = l \sin \theta_{AB} + l \sin \theta_{BC} + l \sin \theta_{CD}$$

$$\delta y_{G_{AB}} = -\frac{l}{2} \sin \theta_{AB} \delta \theta_{AB}, \quad \delta y_{G_{BC}} = -l \sin \theta_{AB} \delta \theta_{AB} - \frac{l}{2} \sin \theta_{BC} \delta \theta_{BC}$$

$$\delta y_{G_{CD}} = -l \sin \theta_{AB} \delta \theta_{AB} - l \sin \theta_{BC} \delta \theta_{BC} - \frac{l}{2} \sin \theta_{CD} \delta \theta_{CD}$$

$$\delta x_D = l (\cos \theta_{AB} \delta \theta_{AB} + \cos \theta_{BC} \delta \theta_{BC} + \cos \theta_{CD} \delta \theta_{CD})$$

$$\delta\tau = 0 \Rightarrow$$

$$-W \left( \frac{l}{2} \sin \theta_{AB} \delta \theta_{AB} + l \sin \theta_{AB} \delta \theta_{AB} + \frac{l}{2} \sin \theta_{BC} \delta \theta_{BC} + l \sin \theta_{AB} \delta \theta_{AB} + l \sin \theta_{BC} \delta \theta_{BC} + \frac{l}{2} \sin \theta_{CD} \delta \theta_{CD} \right) + P l (\cos \theta_{AB} \delta \theta_{AB} + \cos \theta_{BC} \delta \theta_{BC} + \cos \theta_{CD} \delta \theta_{CD}) = 0$$

$$-W \left( \frac{l}{2} \sin \theta_{AB} \delta \theta_{AB} + \sin \theta_{AB} \delta \theta_{AB} + \frac{l}{2} \sin \theta_{BC} \delta \theta_{BC} + \sin \theta_{AB} \delta \theta_{AB} + \sin \theta_{BC} \delta \theta_{BC} + \frac{l}{2} \sin \theta_{CD} \delta \theta_{CD} \right) + P (\cos \theta_{AB} \delta \theta_{AB} + \cos \theta_{BC} \delta \theta_{BC} + \cos \theta_{CD} \delta \theta_{CD}) = 0$$

Her bir denklem için bir açıya değişim verilir.

$$\delta \theta_{AB} \neq 0, \quad \delta \theta_{BC} = 0, \quad \delta \theta_{CD} = 0 \quad \text{için}$$

$$\delta\tau = 0 \Rightarrow -W \left( \frac{1}{2} \sin \theta_{AB} \delta \theta_{AB} + \sin \theta_{AB} \delta \theta_{AB} + \sin \theta_{AB} \delta \theta_{AB} \right) + P \cos \theta_{AB} \delta \theta_{AB} = 0$$

$$-W \left( \frac{5}{2} \sin \theta_{AB} \right) + P \cos \theta_{AB} = 0 \Rightarrow \boxed{\tan \theta_{AB} = \frac{2P}{5W}}$$

$\delta\theta_{AB} = 0$  ,  $\delta\theta_{BC} \neq 0$  ,  $\delta\theta_{CD} = 0$  için

$$\delta\tau = 0 \Rightarrow -W\left(\frac{1}{2}\sin\theta_{BC} \delta\theta_{BC} + \sin\theta_{BC} \delta\theta_{BC}\right) + P(\cos\theta_{BC} \delta\theta_{BC}) = 0$$

$$-W\frac{3}{2}\sin\theta_{BC} + P\cos\theta_{BC} = 0 \Rightarrow \boxed{\tan\theta_{BC} = \frac{2P}{3W}}$$

$\delta\theta_{AB} = 0$  ,  $\delta\theta_{BC} = 0$  ,  $\delta\theta_{CD} \neq 0$  için

$$\delta\tau = 0 \Rightarrow -W\left(\frac{1}{2}\sin\theta_{CD} \delta\theta_{CD}\right) + P(\cos\theta_{CD} \delta\theta_{CD}) = 0$$

$$-W\frac{1}{2}\sin\theta_{CD} + P\cos\theta_{CD} = 0 \Rightarrow \boxed{\tan\theta_{CD} = \frac{2P}{W}}$$