



MUKAVEMET

8.Birleşik Yükleme

8.2 Birleşik Yüklemede Gerilmeye Sebep Olan Durumlar

Birleşik Yükleme

Analizde izlenecek yöntem;

- *Bu hesaplamalarda malzemenin homojen olması ve doğrusal elastik bir şekilde davranması gerekmektedir.*

İç yüklemenin belirlenmesi;

- *Gerilmenin belirleneceği noktada eksenine dik olarak elemanın kesiti alınır.*
- *Kesite etkiyen iç normal ve kesme kuvveti bileşenleri, eğilme ve burulma momenti bileşenleri denge denklemleri kullanılarak elde edilir.*
- *Kuvvet bileşenleri enine kesitin merkezinden geçmelidir ve moment bileşenleri enine kesitin asal atalet eksenlerini temsil eden merkez eksenlerine göre hesaplanmalıdır.*

Birleşik Yükleme

Analizde izlenecek yöntem;

Gerilme Bileşenleri.

Her bir iç yükleme ile ilişkili gerilme bileşenlerini belirler.

Normal Kuvvet

- Normal kuvvet nedeniyle $\sigma = \frac{N}{A}$ formülü ile belirlenen düzgün dağılımlı bir normal gerilme vardır.

Kesme kuvveti

- Kesme kuvveti nedeniyle $\tau = \frac{VQ}{It}$ formülü ile belirlenen kayma gerilmesi dağılımı vardır.

Eğilme Momenti

- Eğilme momenti düz elemanlarda, nötr ekseninde sıfırdan elemanın dış sınırında maksimuma değişen ve $\sigma = -\frac{My}{I}$ eğilme formülü ile belirlenen bir **normal gerilme dağılımı** meydana getirir.

Birleşik Yükleme

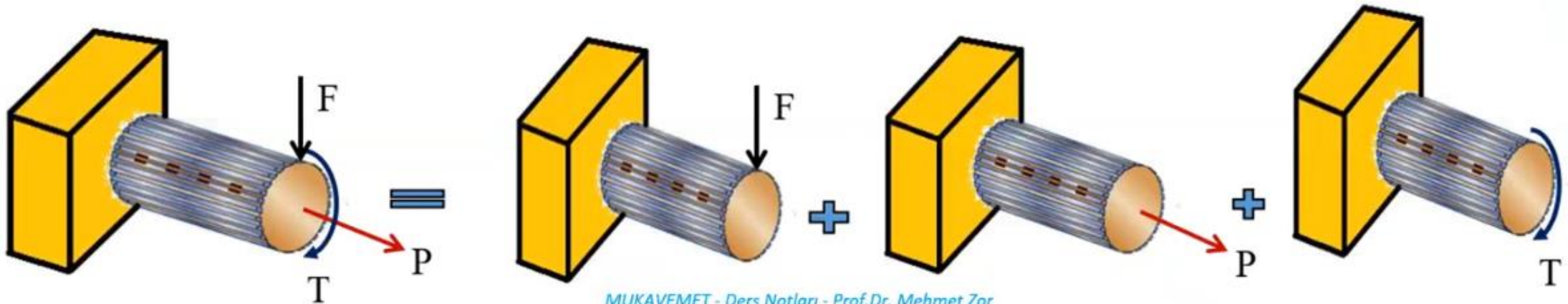
Analizde izlenecek yöntem;

Burulma Momenti

- Dairesel şaftlar ve borular için burulma momenti, şaftın ortasında sıfırdan şaftın dış sınırında maksimuma kadar değişen ve $\tau = \frac{Tc}{J}$ formülü ile belirlenen bir kayma gerilmesi dağılımı meydana getirir.

Süperpozisyon

- Her yükleme için gerilme bileşenleri hesaplandıktan sonra, süperpozisyon ilkesi kullanılarak oluşan normal ve kayma gerilmesi bileşenleri belirlenir.
- Sonuçlar bir noktada bulunan bir malzeme elemanı üzerinde temsil edilir veya elemanın kesit alanı üzerine etki eden gerilme dağılımı olarak gösterilir.

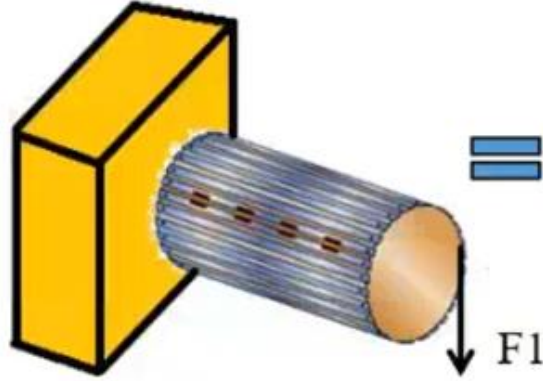


Birleşik Yükleme

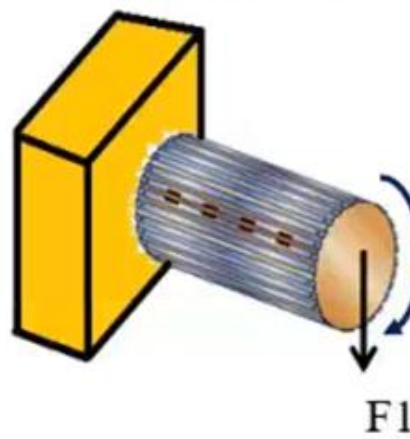
Analizde izlenecek yöntem;

Bazı durumlarda tek bir yük bileşik yükleme durumu oluşturabilir.

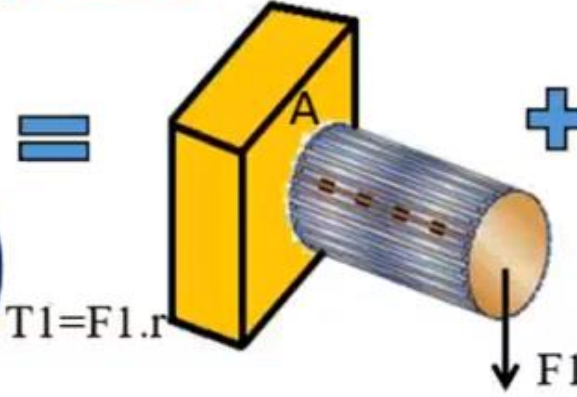
MUKAVEMET - Ders Notları - Prof.Dr. Mehmet Zor



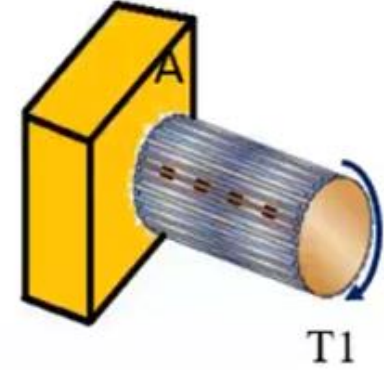
Tek Yük,
Bileşik Yükleme
(Eğilme+Burulma+Kesme)



Kuvvet Merkeze
Taşınmış. Burulma
momenti ile birlikte



Tek Yük: Eğilme
+Kesme



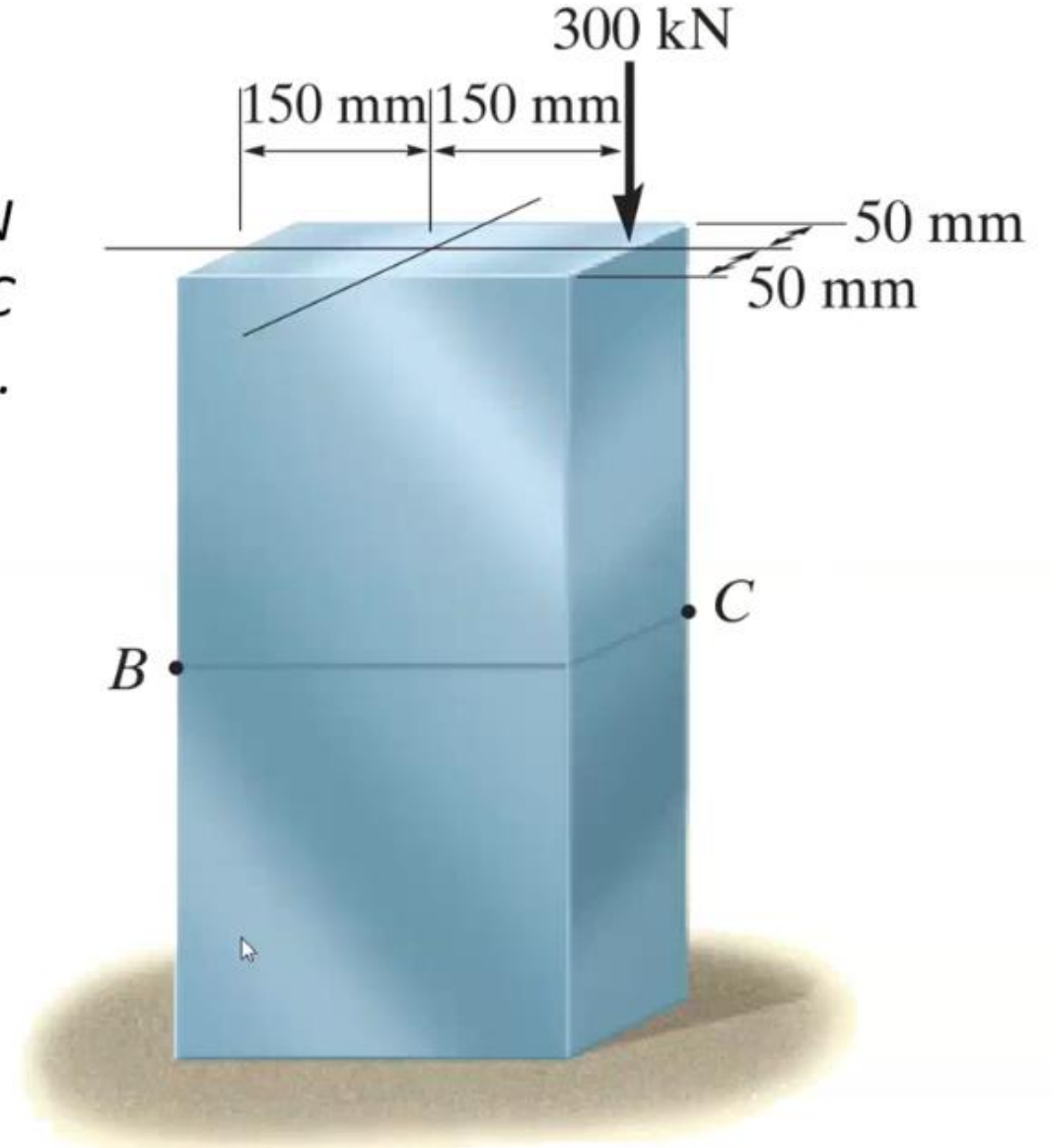
Tek moment:
Burulma

Örnek 8.2

Kayma Gerilmesi - Kayma Formülü

Örnek;

Şekilde gösterilen elemanın kenarına 300 kN şiddetinde bir kuvvet uygulanmıştır. Buna göre B ve C noktalarındaki gerilme durumunu belirleyiniz. (Elemanın ağırlığını ihmal ediniz.)

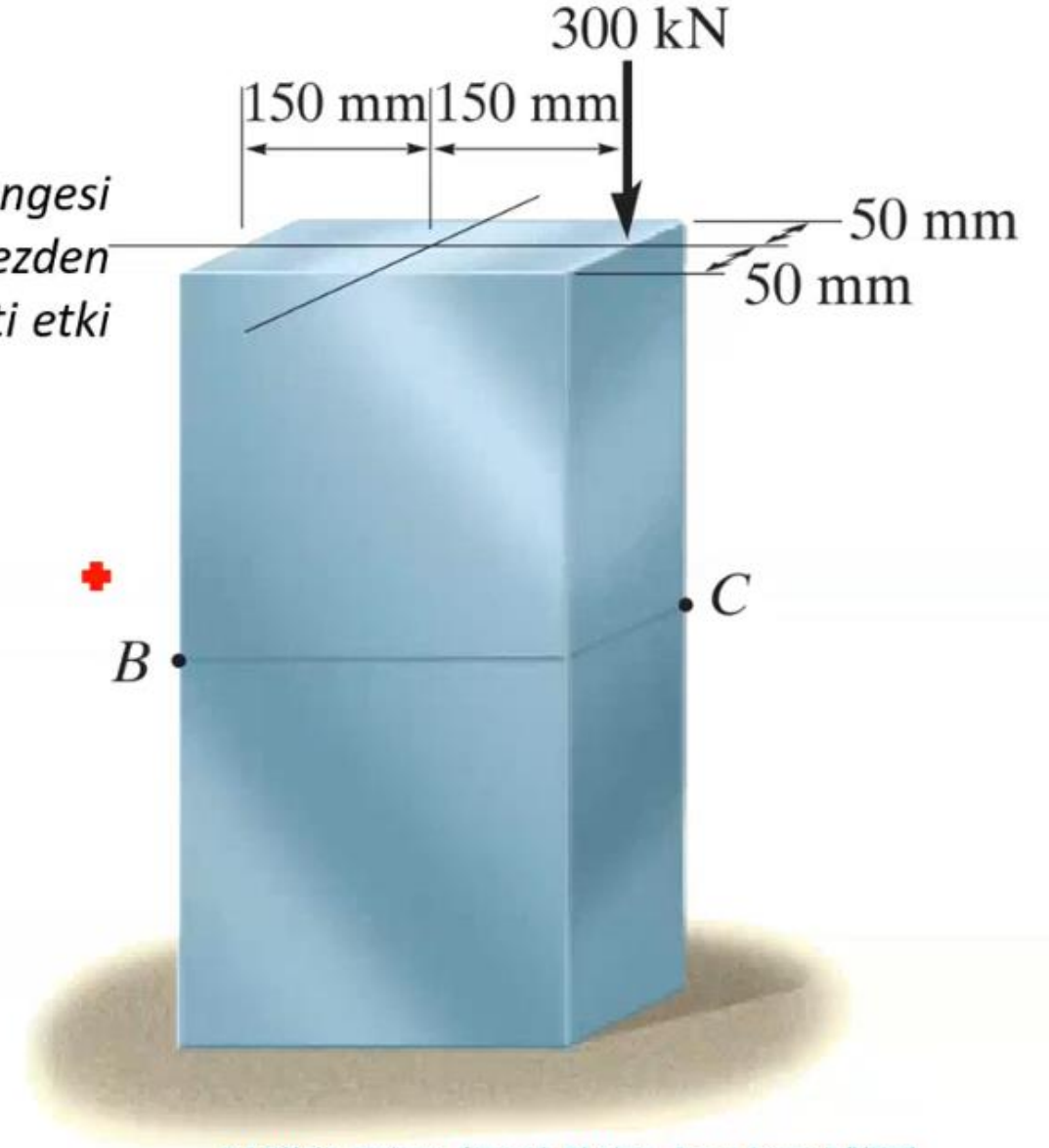
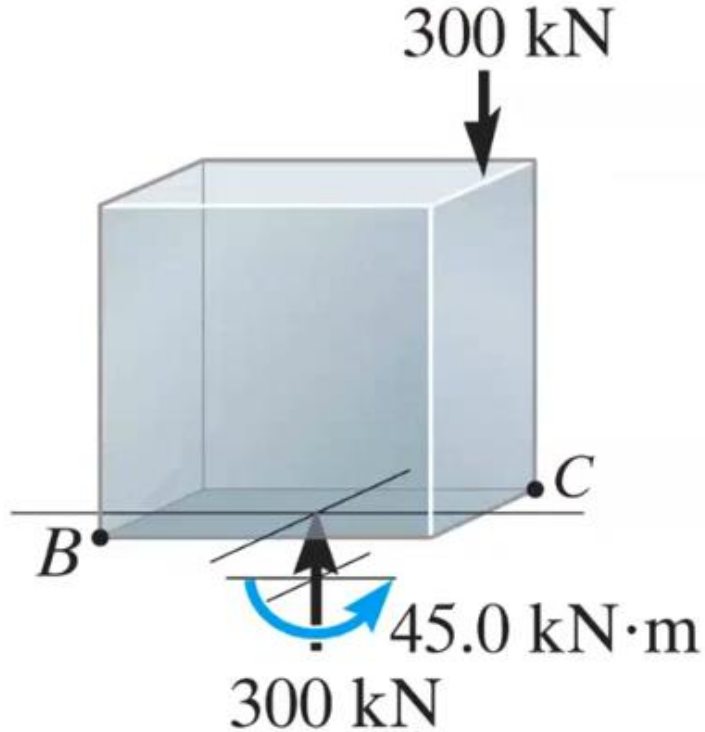


Kayma Gerilmesi - Kayma Formülü

Çözüm;

İç Yükler;

B ve C noktaları boyunca elemanın kesiti alındığında; kesitin dengesi için, kesit merkezi boyunca 300 kN eksenel kuvvet ve merkezden geçen asal eksene göre 45 kN.m büyüklüğünde eğilme momenti etki etmelidir.



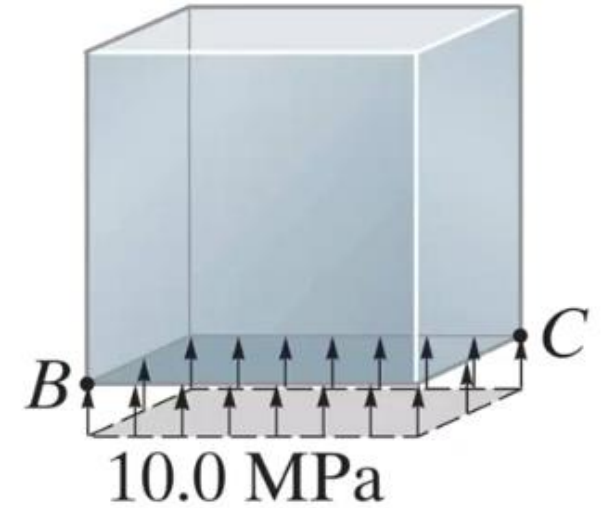
Kayma Gerilmesi - Kayma Formülü

Çözüm;

Gerime Bileşenleri;

Normal Kuvvet nedeniyle düzgün dağılımlı normal gerilme meydana gelir.

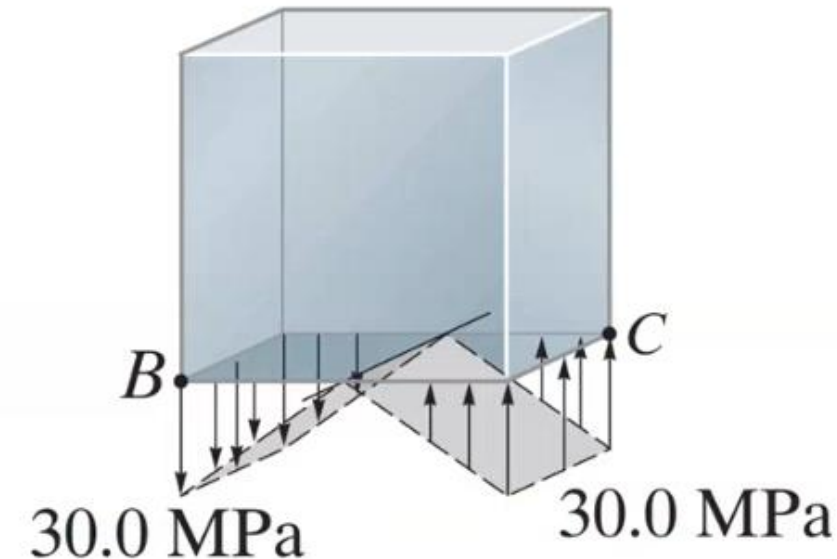
$$\sigma = \frac{N}{A} = \frac{300 (10^3) N}{(0.1m)(0.3m)} = 10(10^3) N/m^2$$



R. C. Hibbeler - Mechanics of Materials, 8th Edition - Pearson Prentice Hall (2010)

Eğilme momenti nedeniyle meydana gelen maksimum normal gerilme;

$$\sigma_{maks} = \frac{Mc}{I} = \frac{[45(10^3)Nm](0.15m)}{\frac{1}{12}(0.1m)(0.3m)^3} = 30(10^6) \frac{N}{m^2} = 30 \text{ Mpa}$$



Kayma Gerilmesi - Kayma Formülü

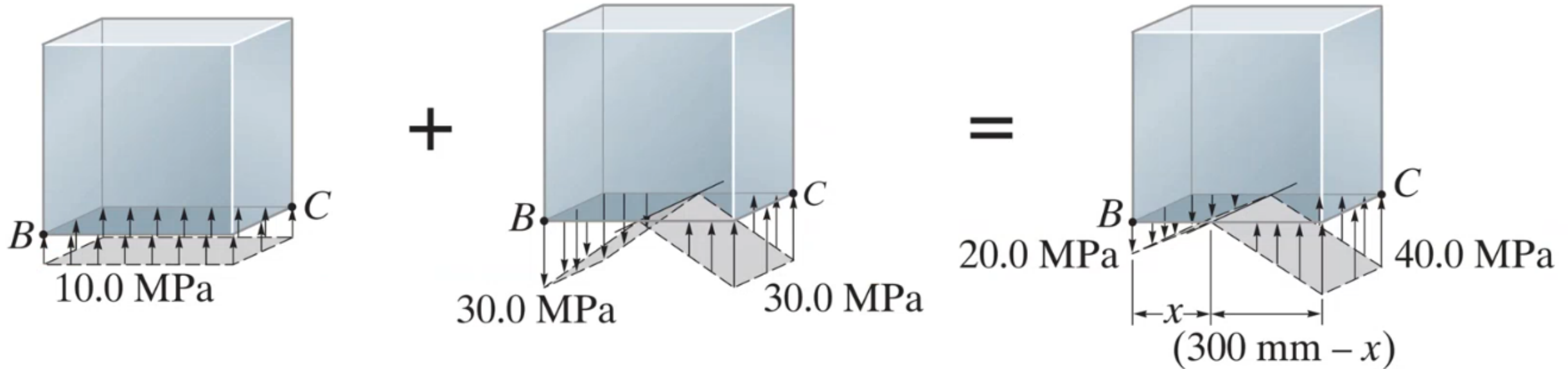
Çözüm;

Süperpozisyon İlkesi;

B ve C noktadaki gerilmeleri matematiksel olarak topladığımızda;

$$\sigma_B = -\frac{N}{A} + \frac{Mc}{I} = -10 \text{ Mpa} + 30 \text{ Mpa} = 20 \text{ Mpa} (\text{Çekme})$$

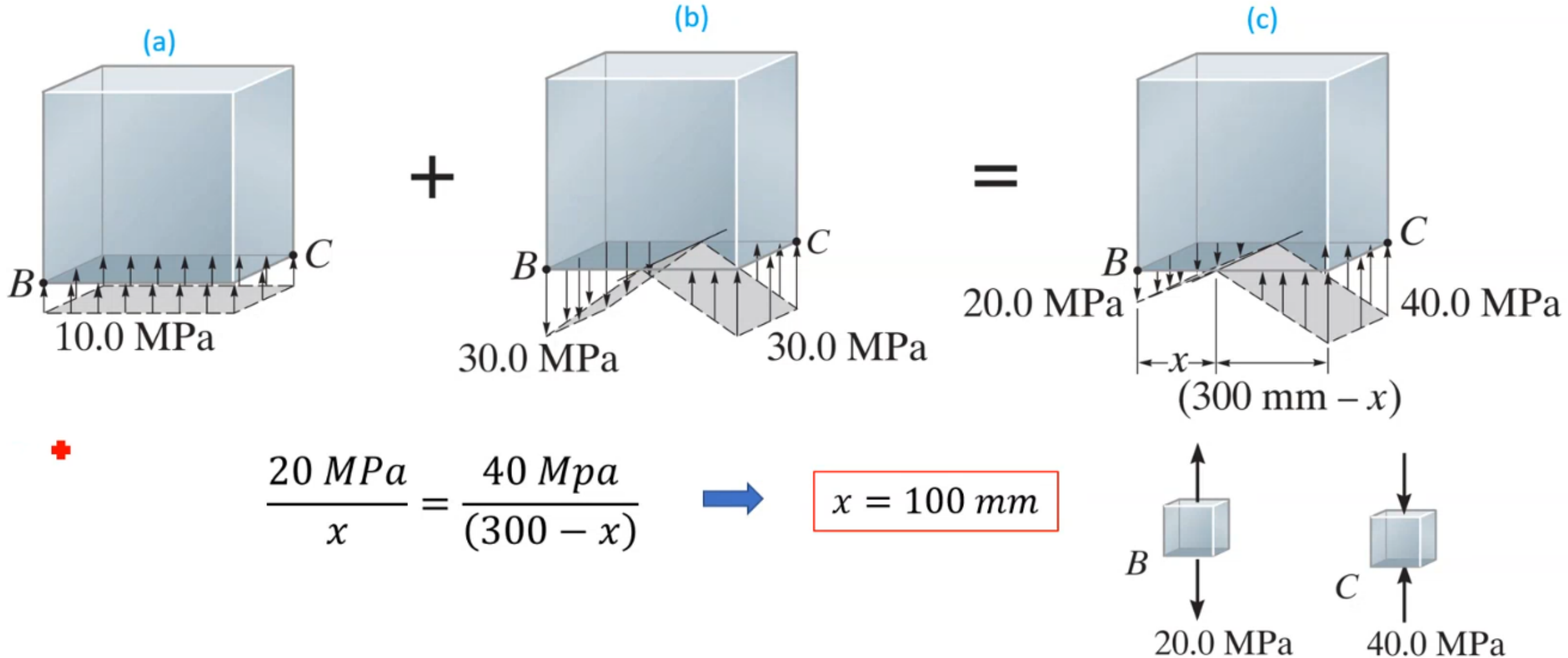
$$\sigma_C = -\frac{N}{A} - \frac{Mc}{I} = -10 \text{ Mpa} - 30 \text{ Mpa} = -40 \text{ Mpa} (\text{Basma})$$



Kayma Gerilmesi - Kayma Formülü

Çözüm;

NOT: Kesit üzerindeki nihai gerilme dağılımı Şekil C'de gösterilmiştir, burada gerilmenin sıfır olduğu çizginin yeri benzerlik ile belirlenebilir.

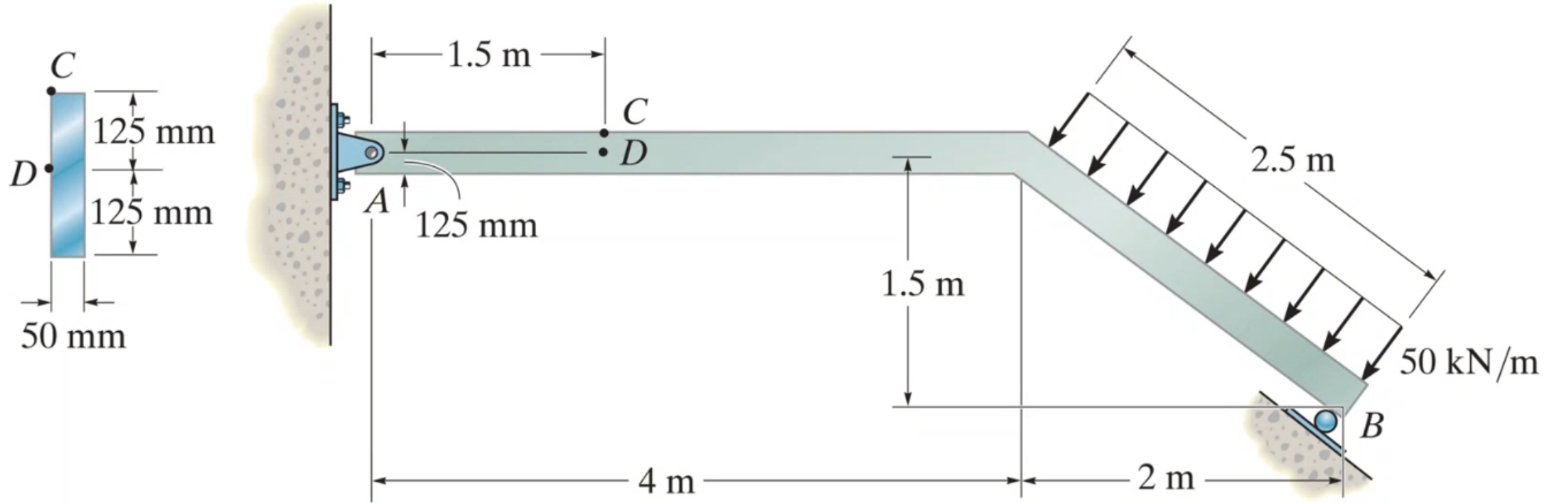


Örnek 8.4

Birleşik Yükleme

Örnek;

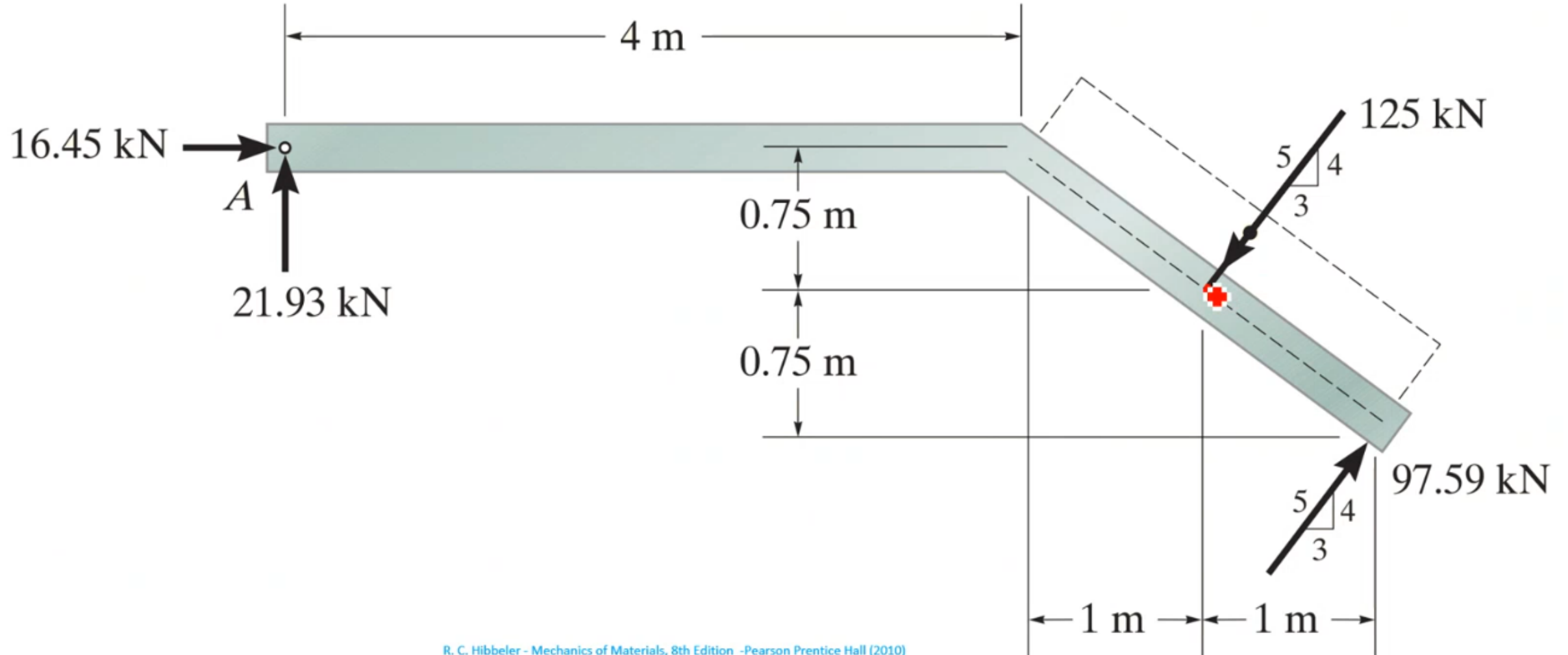
Şekildeki eleman dikdörtgen kesite sahiptir. Verilen yükleme durumu için kesitin C ve D noktalarında meydana gelen gerilme dağılımını belirleyiniz.



Birleşik Yükleme

Çözüm;

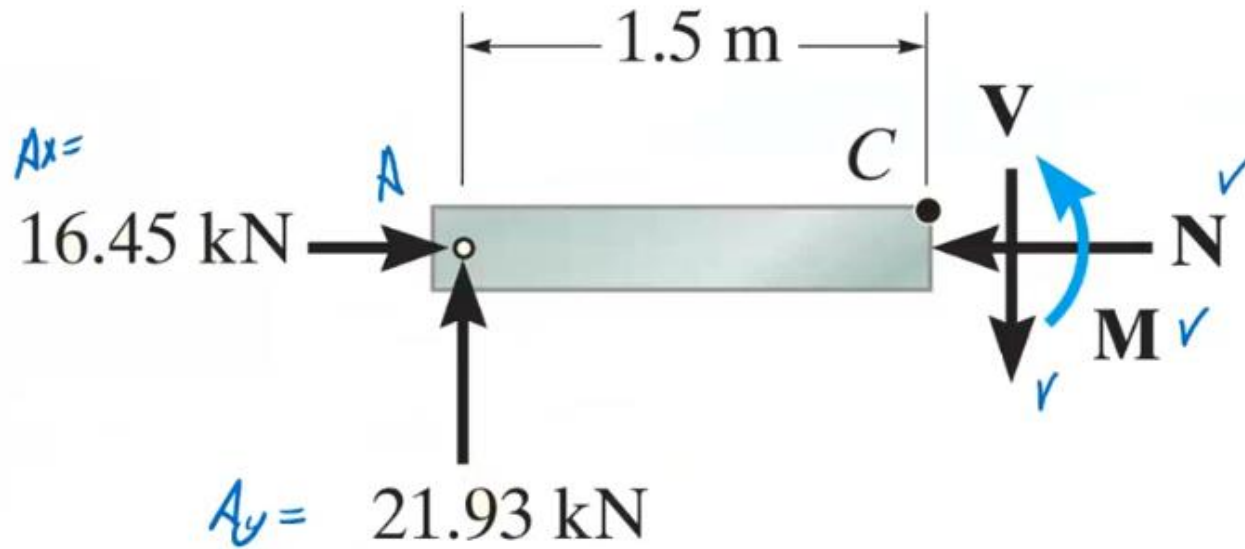
Denge denklemleri kullanılarak mesnet reaksiyonları belirlenir.



Birleşik Yükleme

Çözüm;

Elemanın sol segmenti AC dikkate alındığında, kesite etkiyen iç yükler normal kuvvet, kesme kuvveti ve eğilme momentinden oluşur.



$$N = 16.45 \text{ kN}$$

$$V = 21.93 \text{ kN}$$

$$M = 32.89 \text{ kN.m}$$

Birleşik Yükleme

Çözüm;

C noktasındaki gerilme bileşenleri;

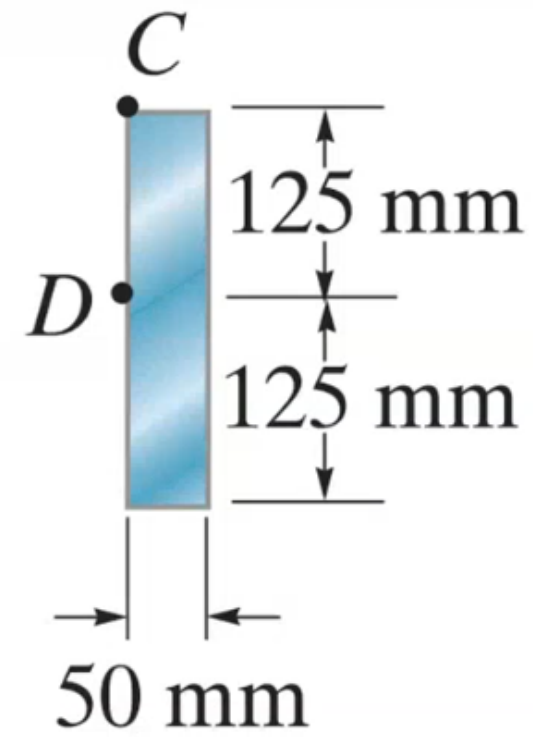
Normal Kuvvet nedeniyle düzgün dağılımlı normal gerilme meydana gelir.

$$(\sigma_c)_n = \frac{N}{A} = \frac{16.45 (10^3) N}{(0.050m)(0.250m)} = 1.32 \text{ Mpa}$$

Kesme Kuvveti nedeniyle meydana gelen kayma gerilmesi

$\tau_c = \frac{VQ}{It}$ C noktası kesitin en üstünde olduğundan $A' = 0$ Bu nedenle; $Q = \bar{y}'A' = 0$

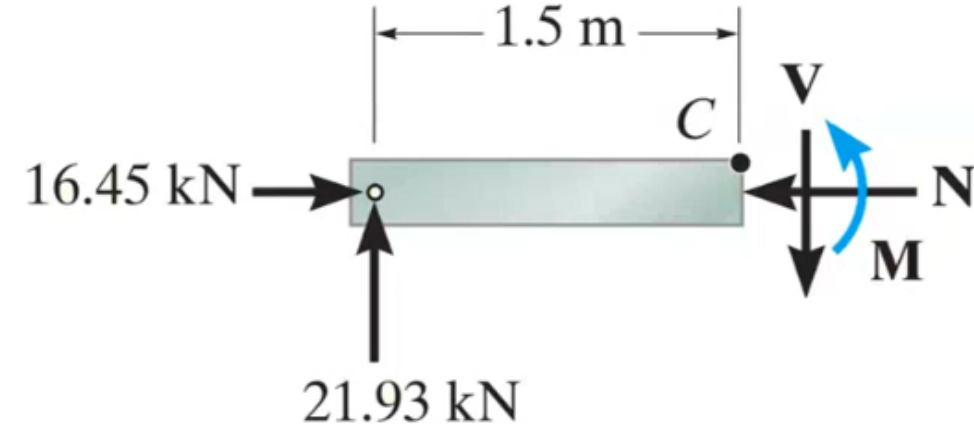
$$\tau_c = 0$$



Eğilme momenti nedeniyle meydana gelen maksimum normal gerilme;

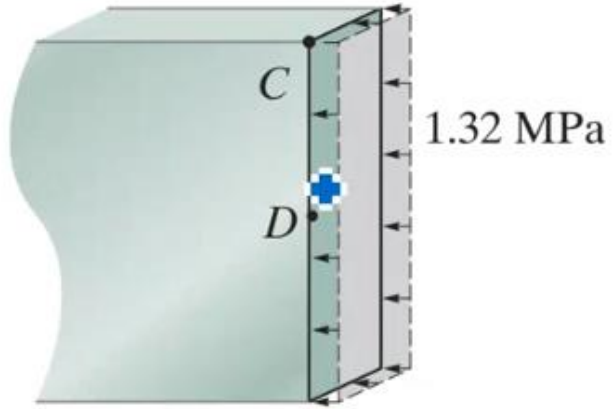
C noktasının nötr eksen den olan uzaklığı; $c = 0.125m$ dir.

$$(\sigma_c)_e = \frac{Mc}{I} = \frac{[32.89(10^3)Nm](0.125m)}{\frac{1}{12}(0.050m)(0.250m)^3} = 63.16 \text{ Mpa}$$



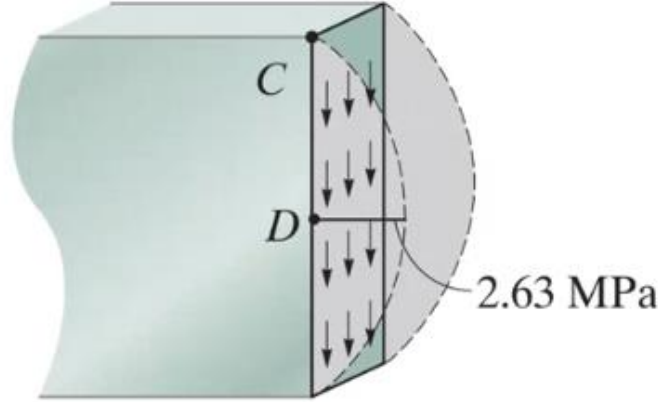
Birleşik Yükleme

Çözüm;



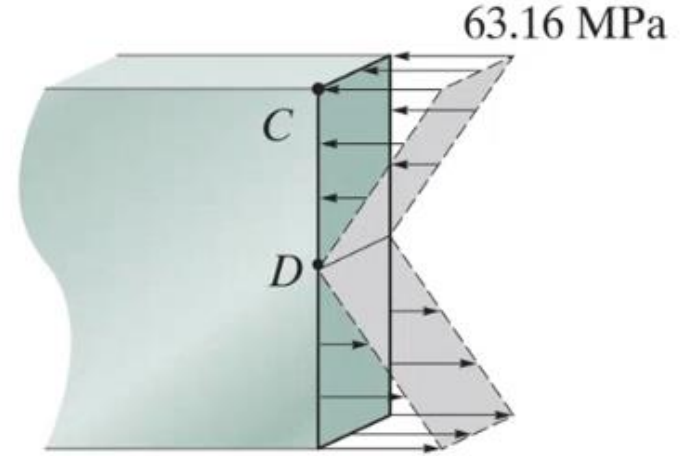
1.32 MPa

+



2.63 MPa

+



63.16 MPa

Normal Kuvvet ✓

$$(\sigma_C)_n = 1.32 \text{ Mpa}$$

Kesme Kuvveti

$$\tau_C = 0$$

Eğilme Momenti

$$(\sigma_C)_e = 63.16 \text{ Mpa}$$

Süperpozisyon Prensibi;

C noktasında kayma gerilmesi yoktur.

$$\sigma_C = 63.16 \text{ Mpa} + 1.32 \text{ Mpa} = 64.5 \text{ Mpa}$$

Birleşik Yükleme

Çözüm;

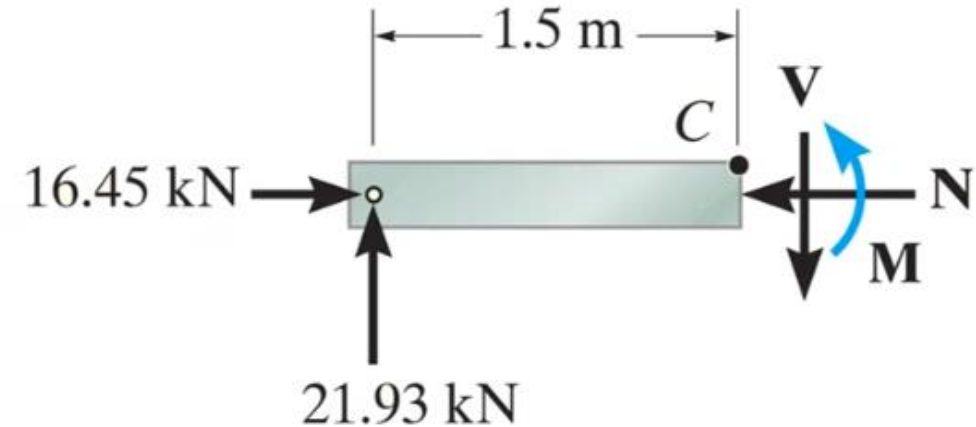
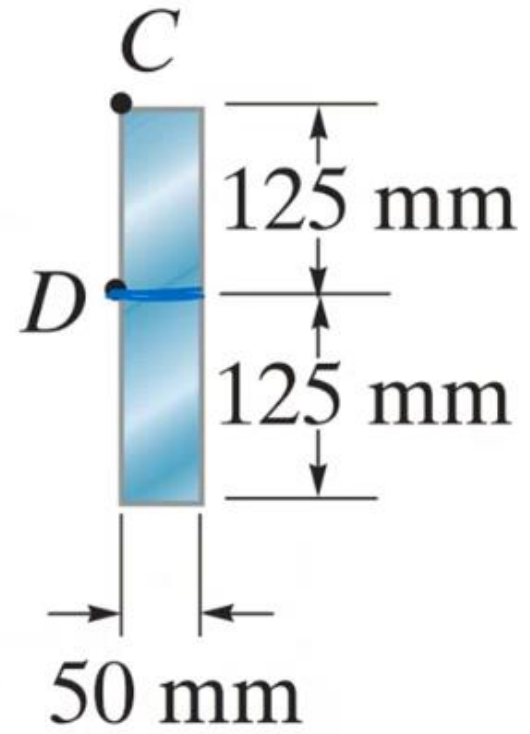
D noktasındaki gerilme bileşenleri;

Normal Kuvvet nedeniyle meydana gelen normal gerilme *C* noktasındaki ile normal gerilme ile aynı büyüklüktedir. ✓

$$(\sigma_D)_n = \frac{N}{A} = \frac{16.45 (10^3) N}{(0.050m)(0.250m)} = 1.32 \text{ Mpa}$$

D noktası tarafsız eksen üzerinde olduğundan ($y=0$) **eğilme momenti** nedeniyle meydana gelen normal gerilme sıfırdır.

$$(\sigma_D)_e = \frac{My}{I} = 0 \text{ Mpa}$$



Birleşik Yükleme

Çözüm;

D noktasındaki gerilme bileşenleri;

Kesme Kuvveti nedeniyle meydana gelen kayma gerilmesi

$$\tau_D = \frac{VQ}{It}$$

D noktası kesitin orta noktası olduğundan;

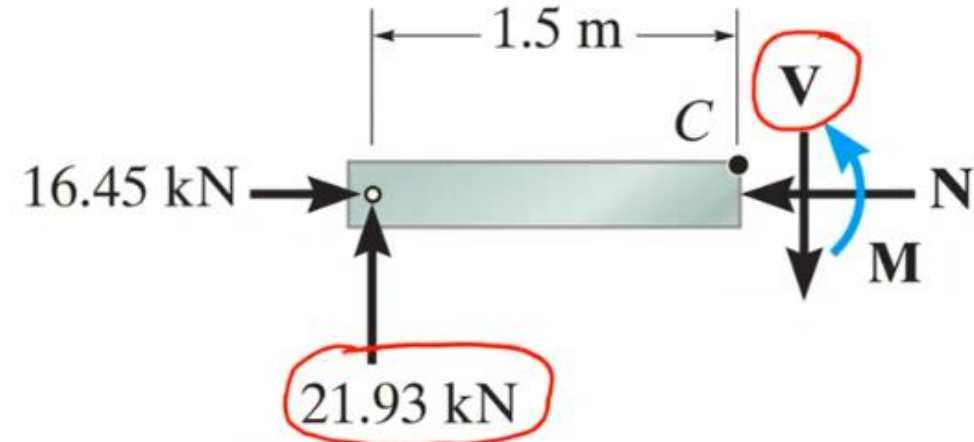
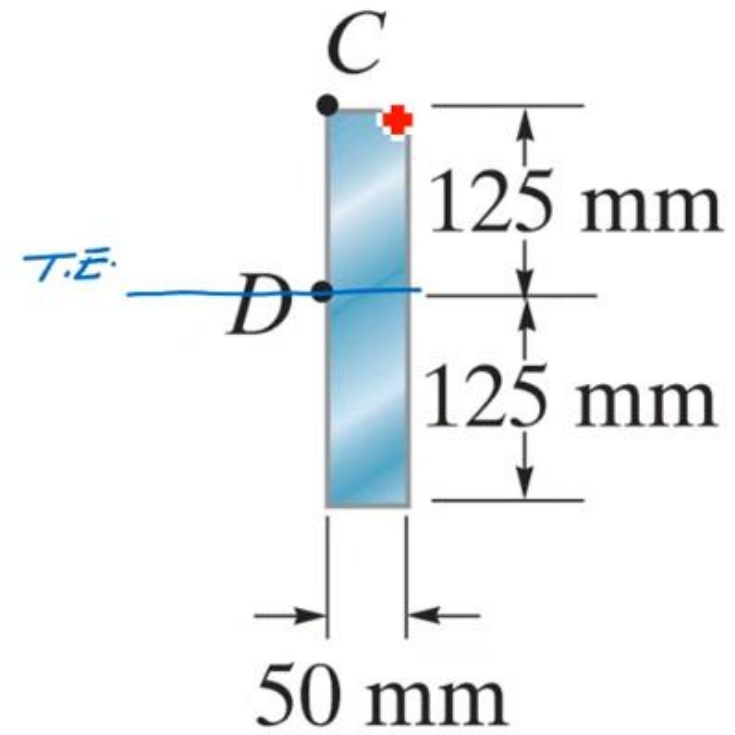
$$Q = \bar{y}' A' = (125/2 \text{ mm})(125 \text{ mm})(50 \text{ mm})$$

$$I = \frac{1}{12} b h^3 = \frac{1}{12} (50)(250 \text{ mm})^3$$

$$t = 50 \text{ mm}$$

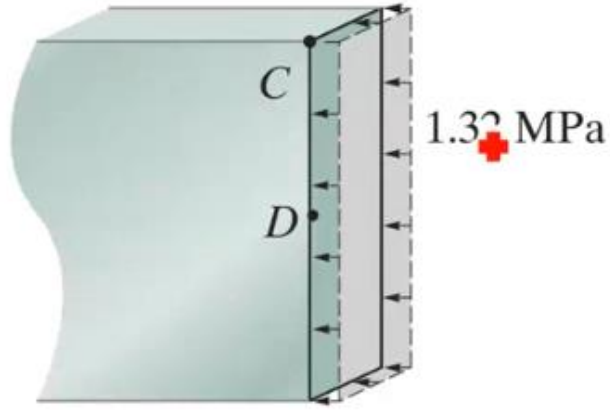
Ya da kesit dikdörtgen olduğundan özel olarak;

$$\tau_D = 1.5 \frac{V}{A} = 1.5 \left[\frac{21.93(10^3) \text{ N}}{(0.25 \text{ m})(0.050 \text{ m})} \right] = 2.63 \text{ Mpa}$$



Birleşik Yükleme

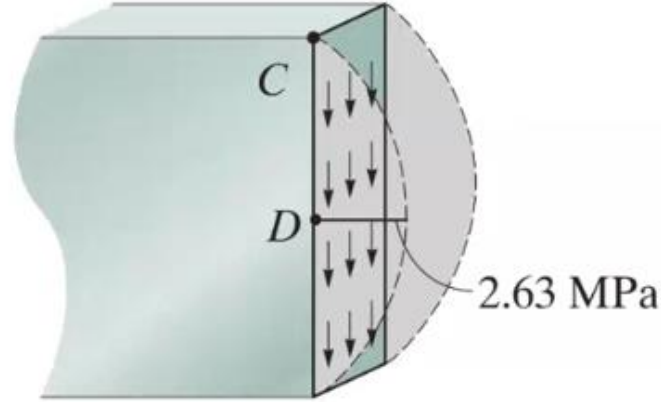
Çözüm;



Normal Kuvvet

$$(\sigma_D)_n = 1.32 \text{ Mpa}$$

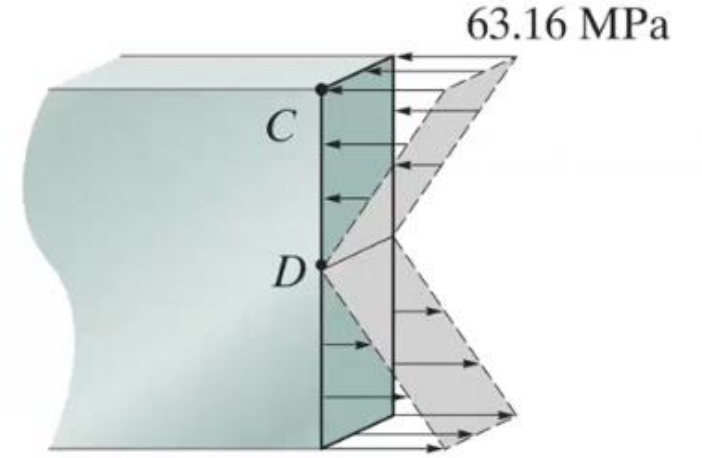
+



Kesme Kuvveti

$$\tau_D = 2.63 \text{ Mpa}$$

+

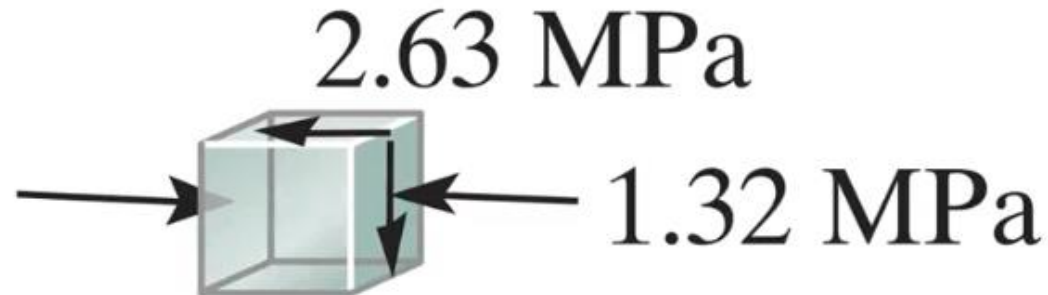


Eğilme Momenti

$$(\sigma_C)_e = 0 \text{ Mpa}$$

Süperpozisyon Prensibi;

D noktasındaki gerilme dağılımı;

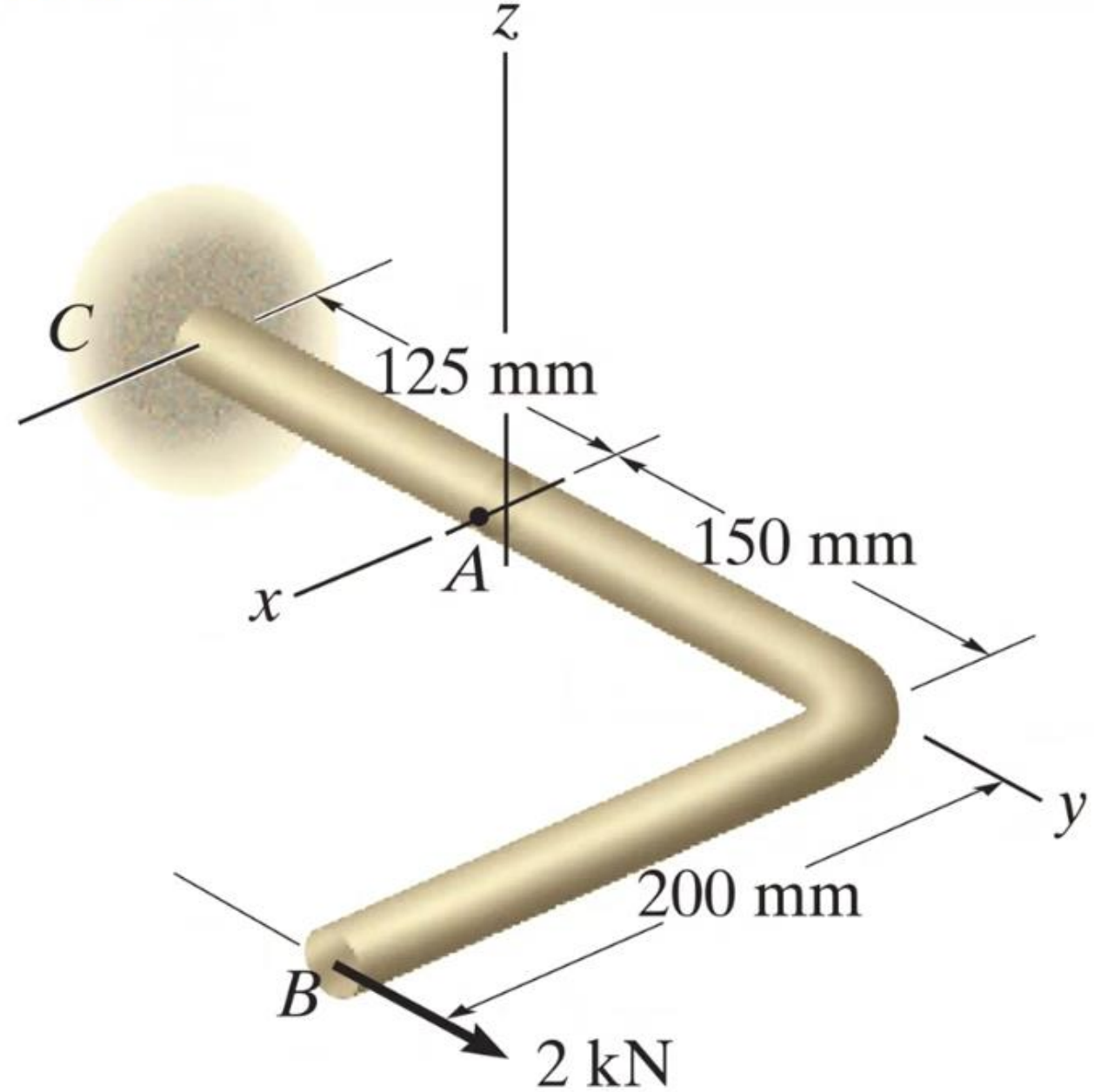


Örnek 8.7

Birleşik Yükleme

Örnek;

Şekilde gösterilen içi dolu çubuğun yarıçapı 20 mm'dir. B noktasından 2 kN şiddetinde bir yük uygulanmaktadır. Buna göre A noktasındaki gerilme durumunu belirleyiniz.



Birleşik Yükleme

Çözüm;

İç kuvvetlerin belirlenmesi;

Çubuk, A noktası boyunca kesilir. AB segmentinin serbest cisim diyagramı kullanılarak kesite etki eden iç yükler denge denklemlerinden elde edilir. AC segmentinde ise bu yüklere eşit fakat ters yöndeki bileşenler olarak gösterilir.

$$\Sigma F_y = 0; \quad 2(10^3)N - N_y = 0$$

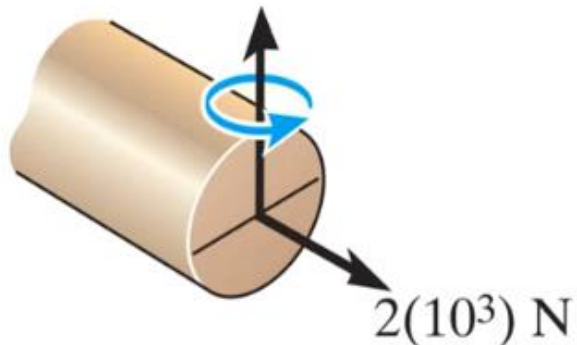
$$N_y = 2(10^3)N$$

$$\Sigma M_z = 0; \quad [2(10^3)N](0.2m) - M_z = 0$$

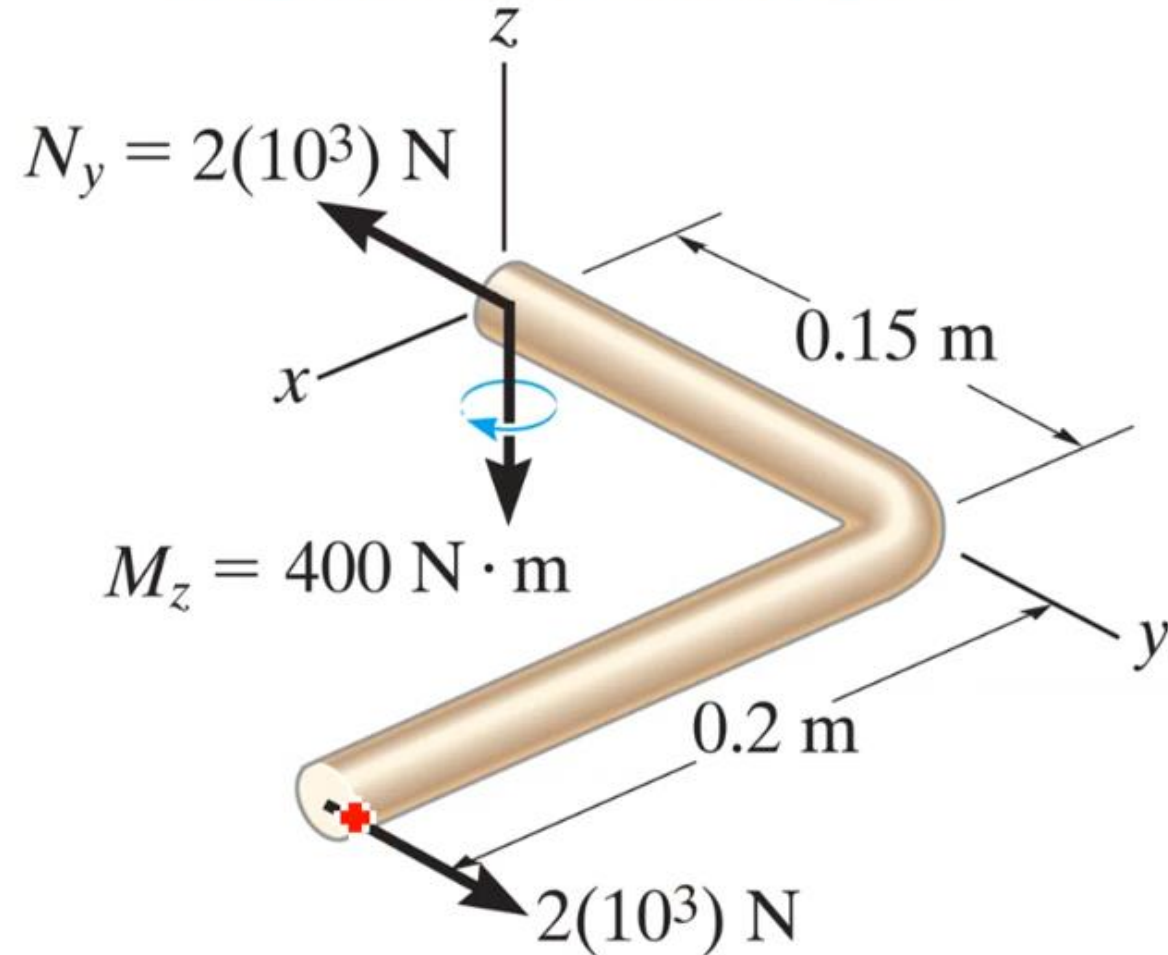
$$M_z = 400 \text{ N} \cdot \text{m}$$

AC segmentinin Serbest Cisim Diyagramı;

400 N · m



AB segmentinin Serbest Cisim Diyagramı



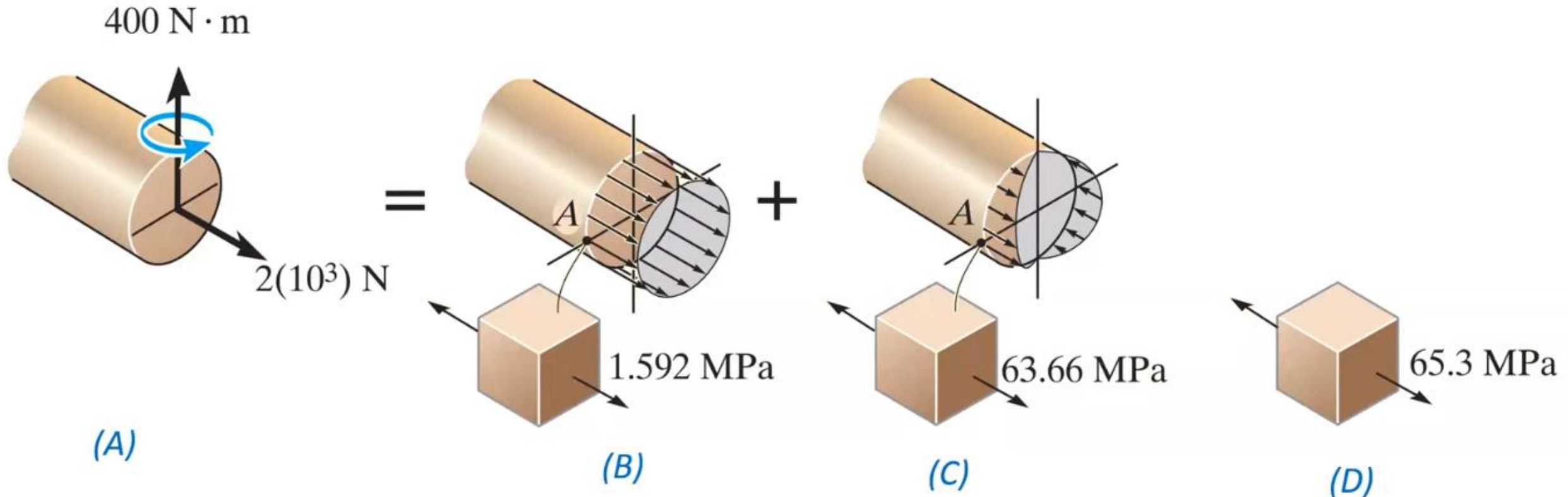
Birleşik Yükleme

Çözüm;

Gerilme Bileşenleri;

Normal Kuvvet; Normal kuvvet nedeniyle A noktasında normal gerilme meydana gelecektir. (Şekil-B)

$$(\sigma_A)_y = \frac{N}{A} = \frac{2(10^3) \text{ N}}{\pi(0.02 \text{ m})^2} = 1.592(10^6) \text{ N/m}^2 = 1.592 \text{ MPa}$$



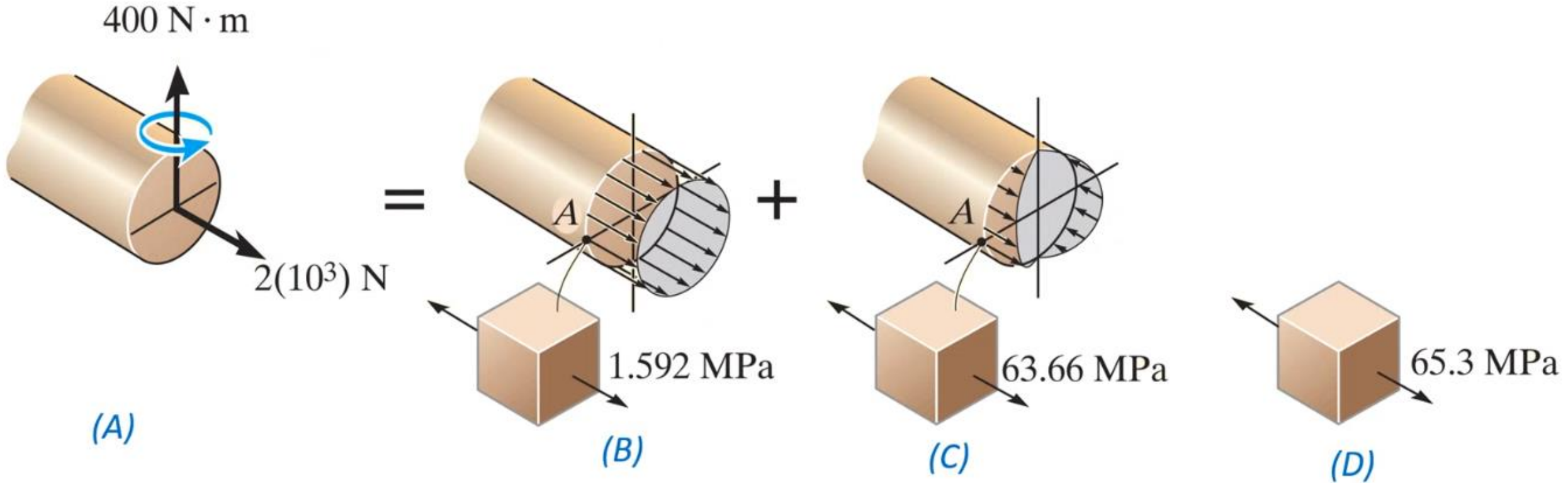
Birleşik Yükleme

Çözüm;

Gerilme Bileşenleri;

Eğilme Momenti; Eğilme momenti nedeniyle Z-eksenine göre lineer değişen eğilme gerilmeleri meydana gelecektir.(Şekil-C). A noktası için $c=0.02\text{m}$ olduğundan;

$$(\sigma_A)_y = \frac{Mc}{I} = \frac{(400 \text{ N} \cdot \text{m})(0.02 \text{ m})}{\frac{\pi}{4}(0.02 \text{ m})^4} = 63.662(10^6) \text{ N/m}^2 = 63.662 \text{ MPa}$$



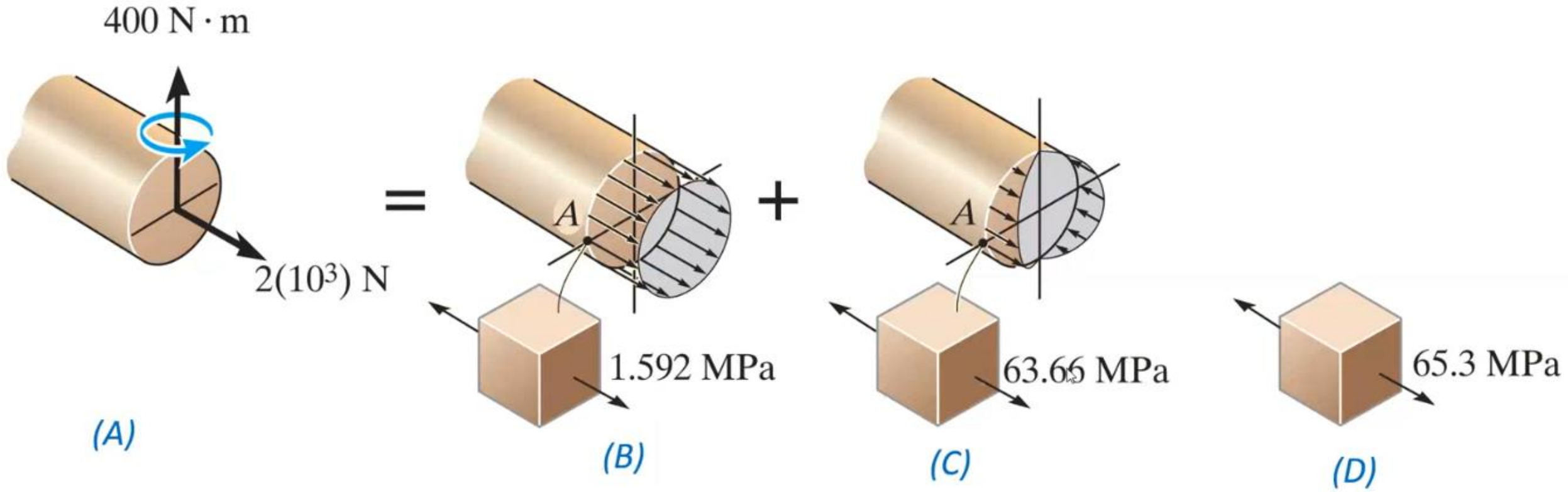
Birleşik Yükleme

Çözüm;

Süperpozisyon;

Yukarıdaki sonuçlar süperpozisyon ilkesine göre üst üste bindirildiğinde, Şekil-D'deki gibi A noktasındaki hacim elemanının 65.3 MPa büyüklüğünde bir normal gerilmeye maruz kaldığı görülmektedir.

$$(\sigma_A)_y = 1.592 \text{ MPa} + 63.66 \text{ MPa} = 65.25 \text{ MPa} = 65.3 \text{ MPa}$$

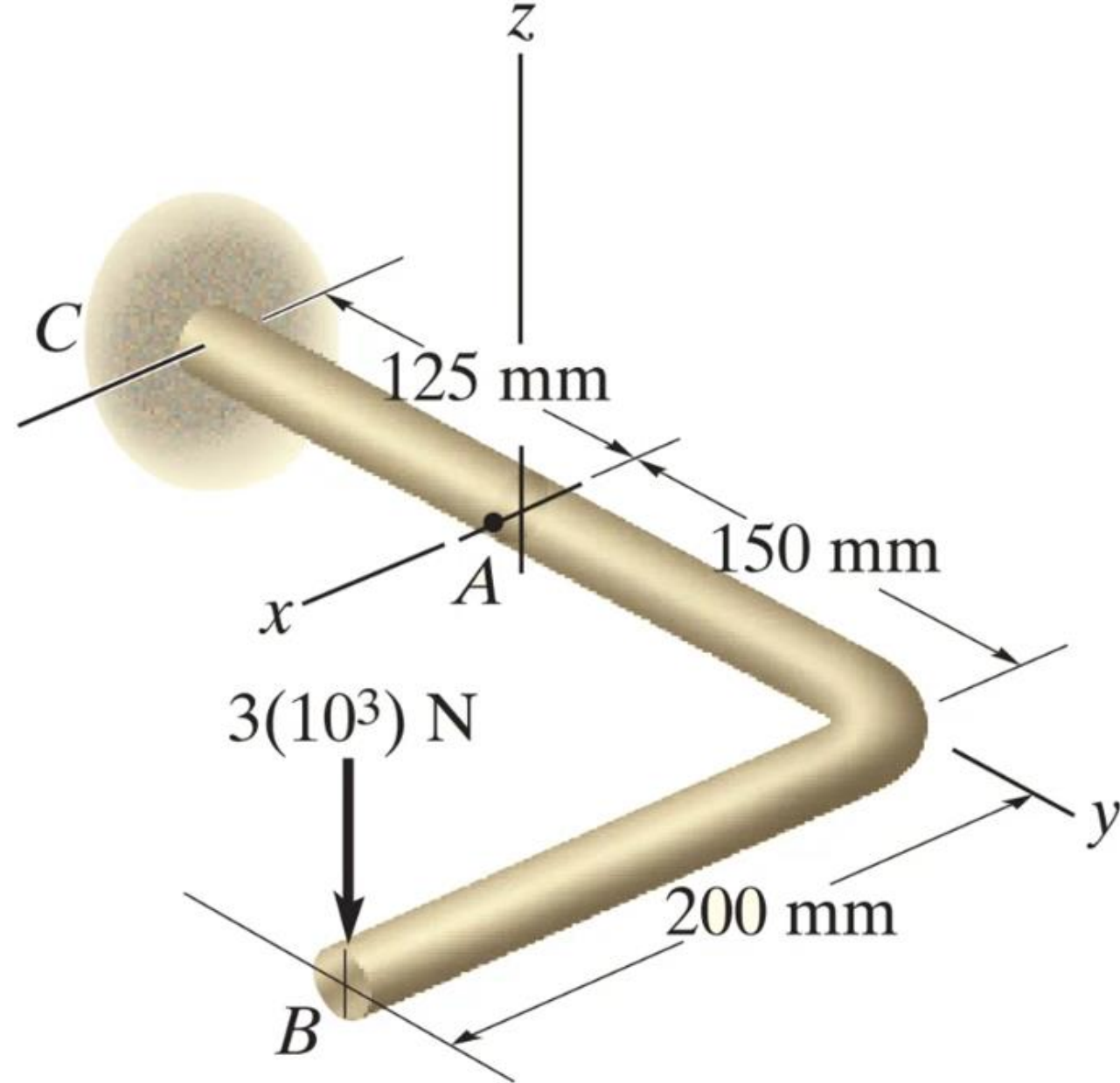


Örnek 8.8

Birleşik Yükleme

Örnek;

Şekilde gösterilen içi dolu çubuğun yarıçapı 20 mm'dir. B noktasından 3 kN şiddetinde bir yük uygulanmaktadır. Buna göre A noktasındaki gerilme durumunu belirleyiniz.



Birleşik Yükleme

Çözüm;

İç kuvvetlerin belirlenmesi;

Çubuk, A noktası boyunca kesilir. AB segmentinin serbest cisim diyagramı kullanılarak kesite etki eden iç yükler denge denklemlerinden elde edilir. AC segmentinde ise bu yüklere eşit fakat ters yöndeki bileşenler olarak gösterilir.

$$\Sigma F_z = 0; \quad V_z - 3(10^3)N = 0$$

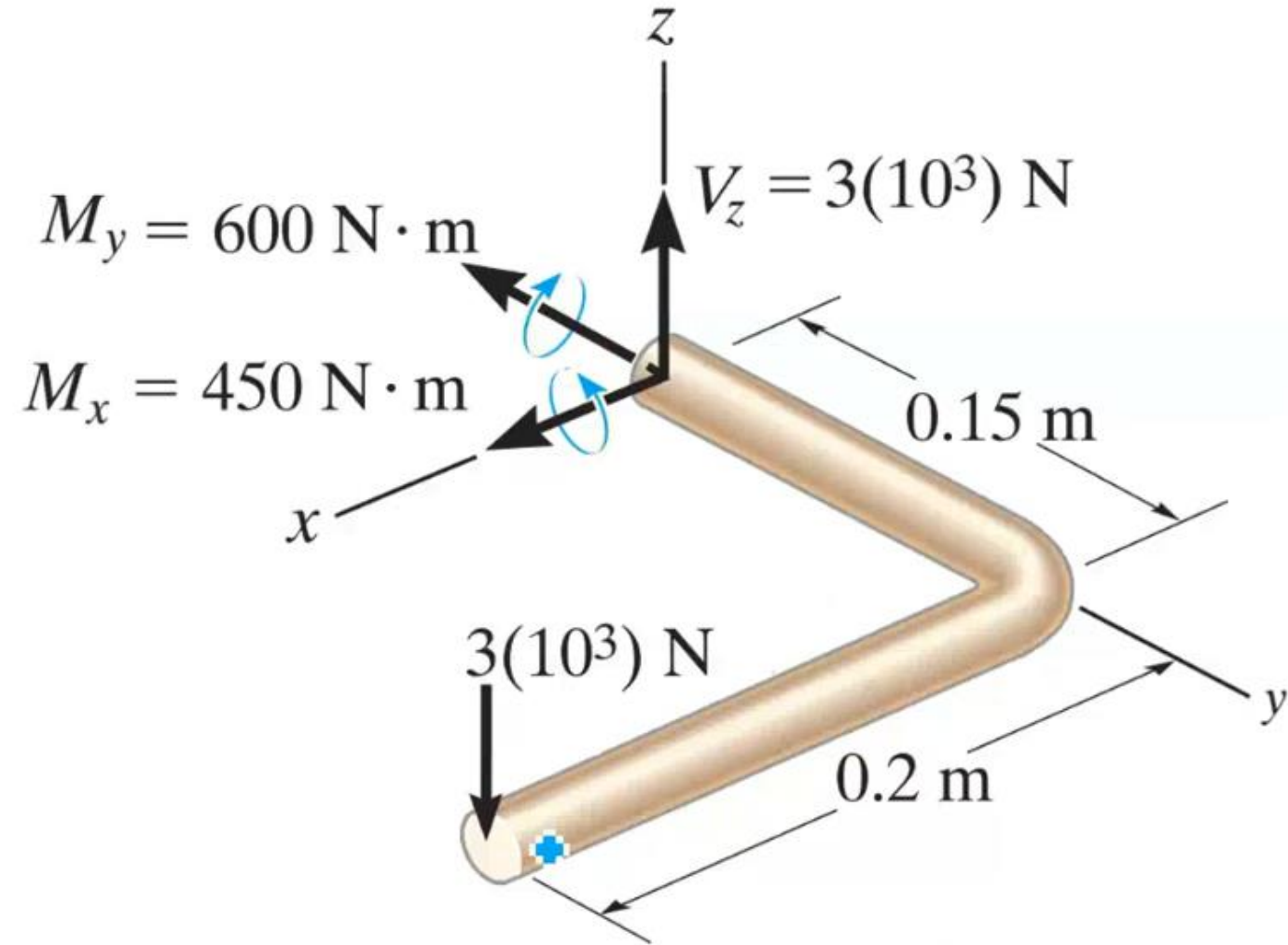
$$V_z = 3(10^3)N$$

$$\Sigma M_x = 0; \quad M_x - [3(10^3)N](0.15m) = 0$$

$$M_x = 450 N \cdot m$$

$$\Sigma M_y = 0; \quad -T_y + [3(10^3)N](0.2m) = 0$$

$$T_y = 600 N \cdot m$$



Birleşik Yükleme

Çözüm;

Gerilme Bileşenleri;

Kesme Kuvveti

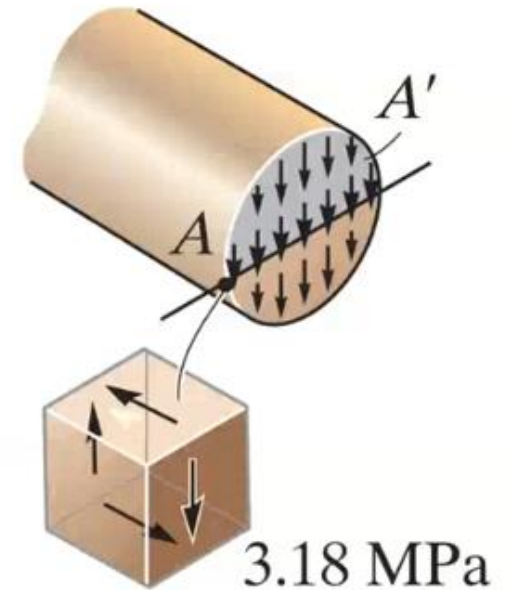
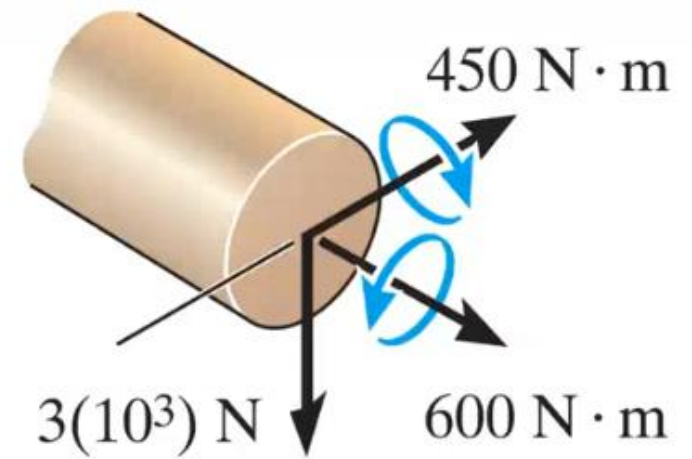
Çubuk kesiti dairesel olduğu için A noktası için Q değerini hesaplarken yarı dairesel kesit göz önüne alınmalıdır.

$$Q = \bar{y}' A' = \left[\frac{4(0.02m)}{3\pi} \right] \left[\frac{1}{2} \pi (0.02m)^2 \right]$$

$$\rightarrow Q = 5.3333(10^{-6})m^3$$

$$\left[(\tau_{yz})_V \right]_A = \frac{VQ}{It} = \frac{[3(10^3)N][5.3333(10^{-6})m^3]}{\left[\frac{\pi}{4} (0.02m)^4 \right] [2(0.02m)]} = 3.183(10^6)N/m^2$$

$$\rightarrow \left[(\tau_{yz})_V \right]_A = 3.18 \text{ MPa}$$



Kesme Kuvveti

Birleşik Yükleme

Çözüm;

Eğilme Momenti;

A noktası tarafsız eksen üzerinde olduğu için eğilme momenti nedeniyle meydana gelen normal gerilme sıfırdır.

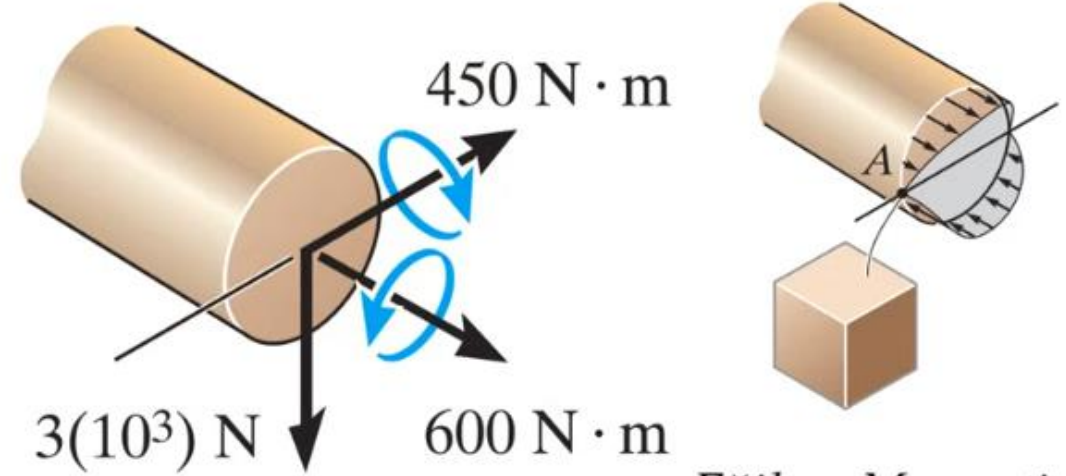
$$(\sigma_e)_A = 0$$

Burulma Momenti;

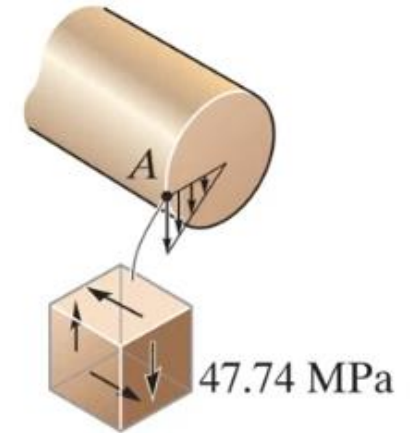
A noktasında $\rho_A = c = 0.02m$ olduğundan kayma gerilmesi;

$$[(\tau_{yz})_T]_A = \frac{Tc}{J} = \frac{(600N.m)(0.02m)}{\left[\frac{\pi}{2}(0.02m)^4\right]} = 47.746 (10^6)N/m^2$$

$$[(\tau_{yz})_T]_A = 47.74 \text{ MPa}$$



Eğilme Momenti



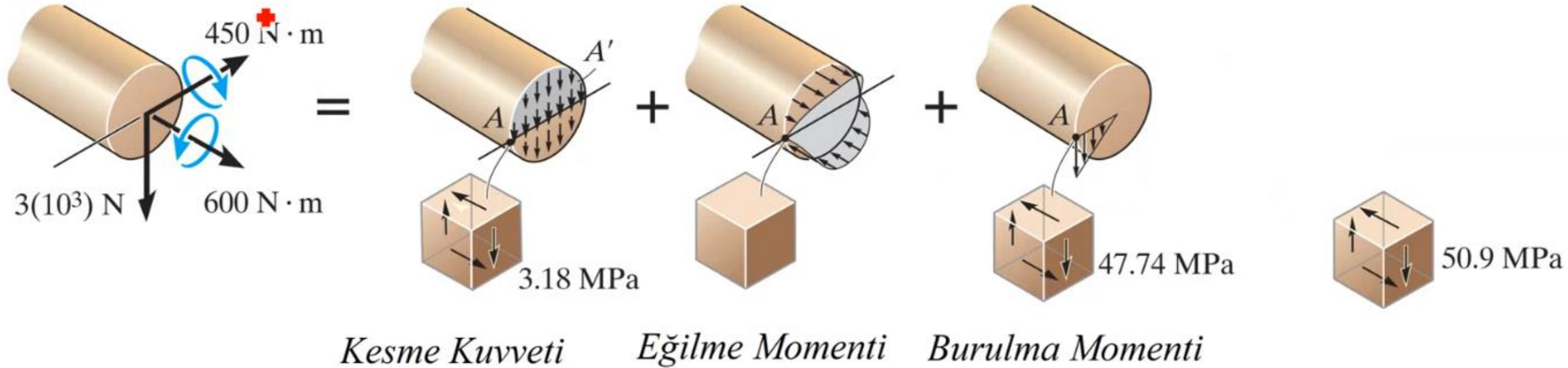
Burulma Momenti

Birleşik Yükleme

Çözüm;

Süperpozisyon

$$\left[(\tau_{yz})_T \right]_A = 3.18 \text{ MPa} + 47.74 \text{ MPa} = 50.9 \text{ MPa}$$

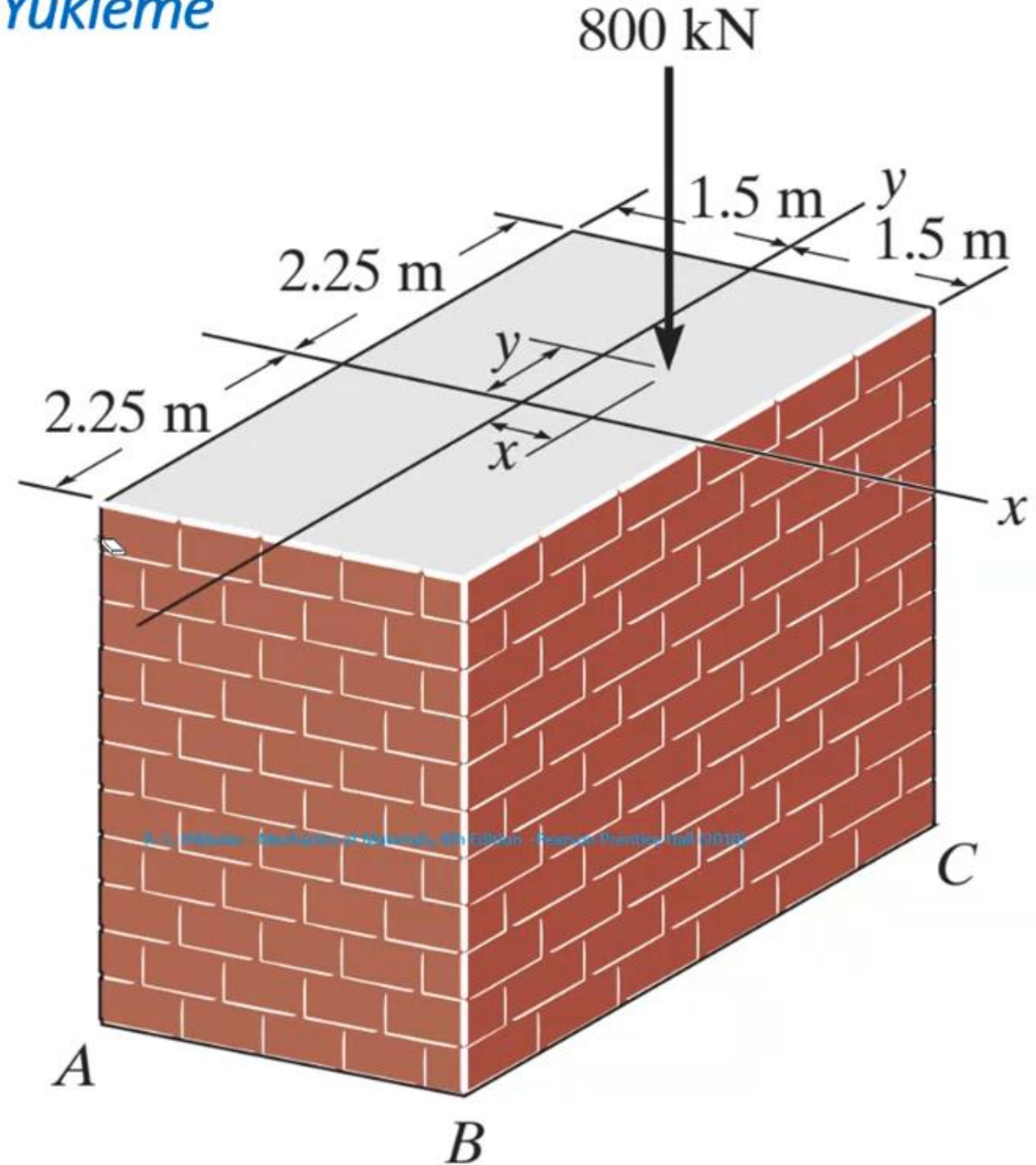


Örnek 7.8-54 (Problems)

Birleşik Yükleme

Örnek;

Şekilde gösterilen yığma kolon 800 kN'luk yüke maruz kalmaktadır. $x = 0.25\text{ m}$, $y = 0.5\text{ m}$ olduğuna göre kolonun A, B, C, D (gösterilmemiştir) köşelerindeki normal gerilmeyi belirleyiniz. Kolonun ağırlığını ihmal ediniz.



Birleşik Yükleme

Çözüm;

Kesitin alanı, x ve y eksenlerine göre atalet momentleri;

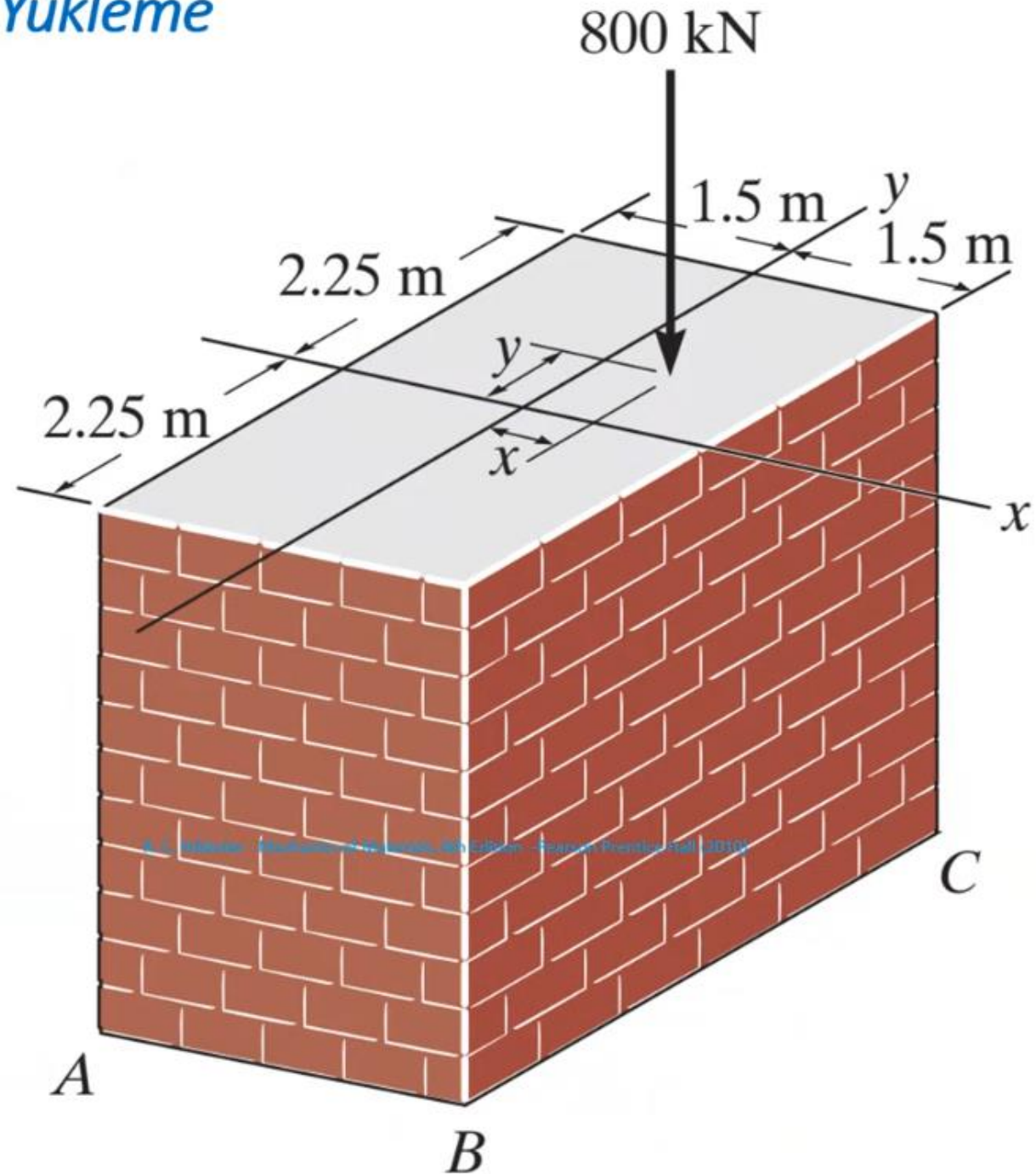
$$A = 3(4.5) = 13.5 \text{ m}^2$$

$$I_x = \frac{1}{12} (3)(4.5^3) = 22.78125 \text{ m}^4$$

$$I_y = \frac{1}{12} (4.5)(3^3) = 10.125 \text{ m}^4$$

$$M_x = [800(10^3)N](0.5m) = 400 \text{ kN.m}$$

$$M_y = [800(10^3)N](0.25m) = 200 \text{ kN.m}$$



Birleşik Yükleme

Çözüm;

$$\sigma = \frac{P}{A} + \frac{M_x y}{I_x} + \frac{M_y x}{I_y}$$

A noktasındaki gerilme durumu;

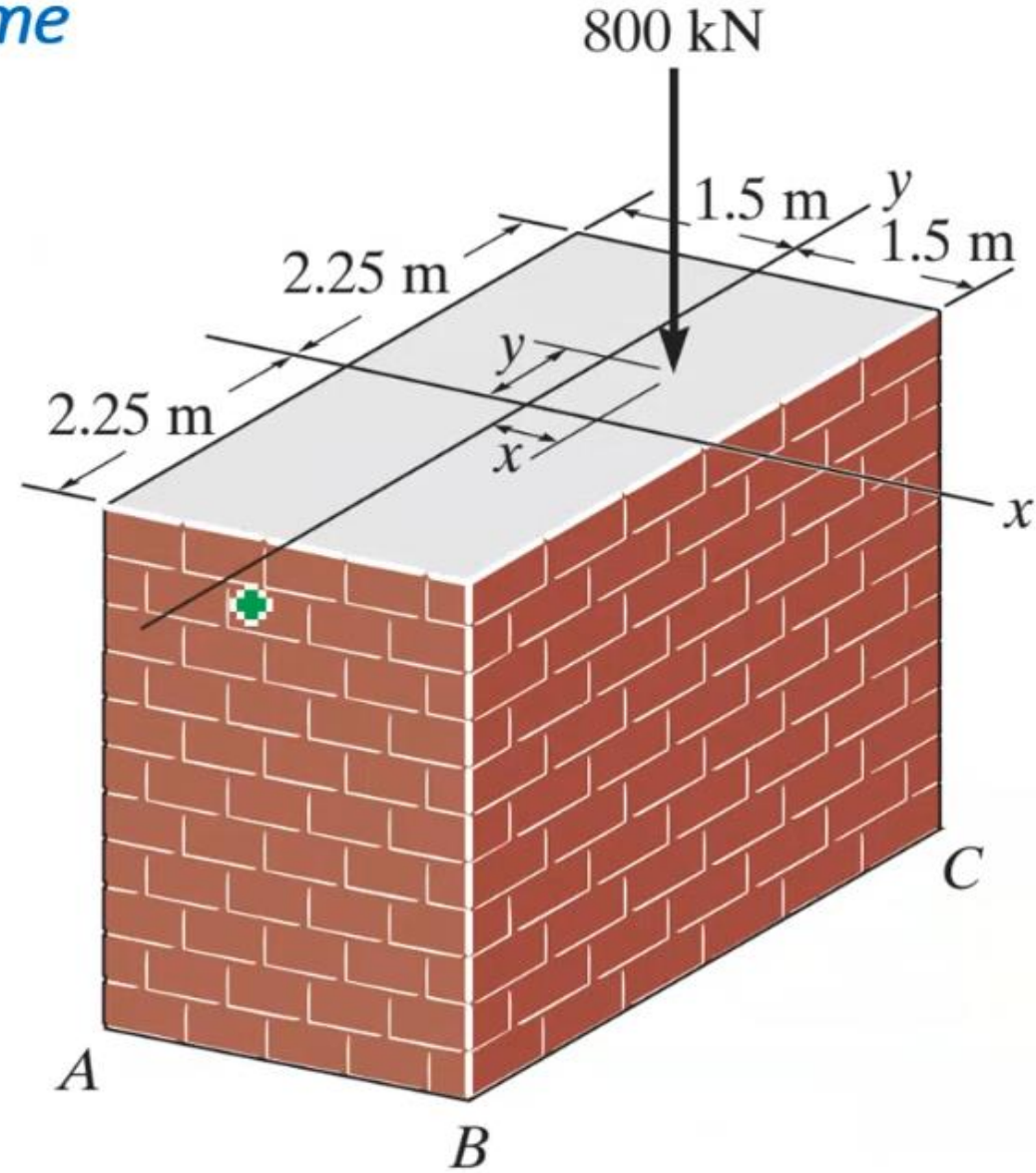
$$\sigma_A = \frac{-800(10^3)}{13.5} + \frac{400(10^3)(2.25)}{22.78125} + \frac{200(10^3)(1.5)}{10.125}$$

$$= 9.88 \text{ kPa (Çekme)}$$

B noktasındaki gerilme durumu;

$$\sigma_B = \frac{-800(10^3)}{13.5} + \frac{400(10^3)(2.25)}{22.78125} - \frac{200(10^3)(1.5)}{10.125}$$

$$= -49.4 \text{ kPa} = 49.4 \text{ kPa (Basma)}$$



Birleşik Yükleme

Çözüm;

$$\sigma = \frac{P}{A} + \frac{M_x y}{I_x} + \frac{M_y x}{I_y}$$

C noktasındaki gerilme durumu;

$$\sigma_C = \frac{-800(10^3)}{13.5} - \frac{400(10^3)(2.25)}{22.78125} + \frac{200(10^3)(1.5)}{10.125}$$

$$= -128 \text{ kPa} = 128 \text{ kPa (Basma)}$$

D noktasındaki gerilme durumu;

$$\sigma_D = \frac{-800(10^3)}{13.5} - \frac{400(10^3)(2.25)}{22.78125} + \frac{200(10^3)(1.5)}{10.125}$$

$$= -69.1 \text{ kPa} = 69.1 \text{ kPa (Basma)}$$

