25.12.2012
Hafta-11

İkinci Dereceden Çarpanlar : $\left[1+\frac{2\zeta}{w_n}jw+\frac{1}{w_n^2}(jw)^2\right]^{\mp 1}$

$$\left[1+\frac{2\zeta}{w_n}jw+\frac{1}{w_n^2}(jw)^2\right]^{-1}=\frac{1}{\left[1+\frac{2\zeta}{w_n}jw+\frac{1}{w_n^2}(jw)^2\right]}$$

$$Lm\left[1+\frac{2\zeta}{w_n}jw+\frac{1}{w_n^2}(jw)^2\right]^{-1}=-20\log\left[\left(1-\frac{w^2}{w_n^2}\right)+\left(\frac{2\zeta}{w_n}\right)^2\right]^{1/2}$$

$w << w_n$ gibi çok düşük frekanslar için log-modül denklemi;

$$-20\log 1=0 \quad dB$$

$w >> w_n$ gibi çok yüksek frekanslarda;

$$Lm\left[1+\frac{2\zeta}{w_n}jw+\frac{1}{w_n^2}(jw)^2\right]^{-1}\cong-20\log\frac{w^2}{w_n^2}\cong-40\frac{w}{w_n} \quad dB$$

$$\phi=\left\lfloor\frac{1}{1+\frac{2\zeta}{w_n}jw+\frac{1}{w_n^2}(jw)^2}\right.=-\mathrm{Arctan}\frac{2\zeta\frac{w}{w_n}}{1-\left(\frac{w}{w_n}\right)^2}$$

ÖR $G(s)=\frac{2(1+s)}{\left(1+\frac{s}{10}\right)^2}$ verilen transfer fonk. için bode diyagramını çiziniz.

$s\rightarrow jw$ yazıyorduk.

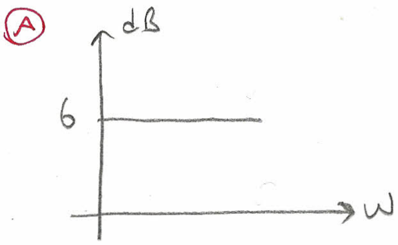
$$G(jw)=\frac{2(1+jw)}{\left(1+\frac{jw}{10}\right)^2}$$

(A) $20\log 2 = 6\ dB$

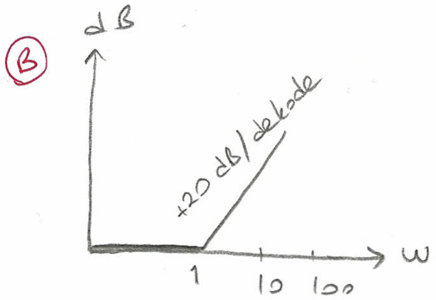
(B) $20\log|1+jw| = 20\log\sqrt{1+\frac{w^2}{1}} \Rightarrow \begin{cases} w \ll 1 \rightarrow 0\ dB \\ w \gg 1 \rightarrow 20\log w \end{cases}$

(C) $20\log\left|\frac{1}{(1+\frac{jw}{10})^2}\right| = -40\log\sqrt{\left(1+\frac{w}{10}\right)^2} \Rightarrow \begin{cases} w \ll 10 \rightarrow 0\ dB \\ w \gg 1 \rightarrow -40\log\frac{w}{10}\ dB \end{cases}$

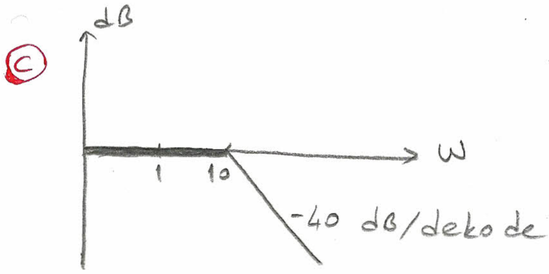
(A)

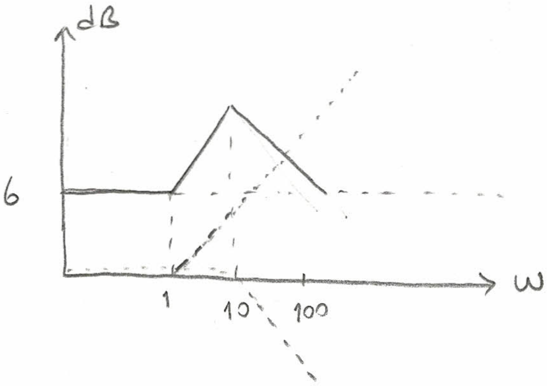


(B)



(C)





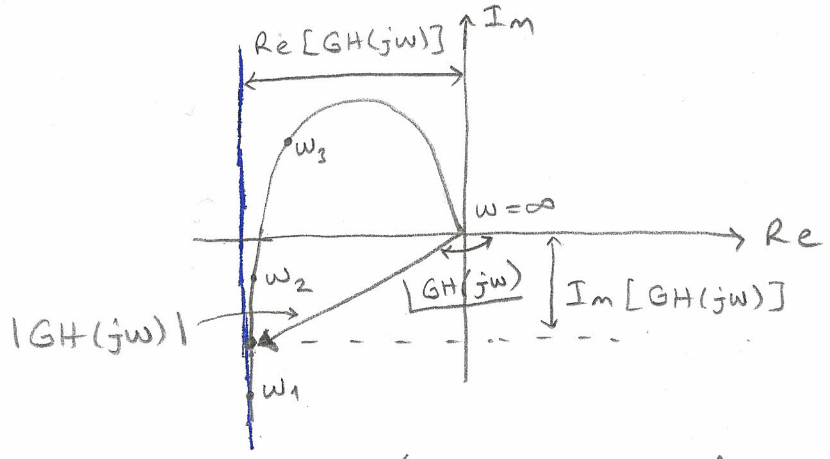
ÖR

$$GH(s) = \frac{5(s+1)}{s(2{,}5s+1)\left[1+\frac{s}{6}+\left(\frac{s}{6}\right)^2\right]}$$

verilen transfer fonksiyonun bode diyagramını çiziniz.

KUTUPSAL EĞRİLER

$GH(jw)$ frekans transfer fonksiyonunun kutupsal eğrisi kutupsal eksen takımı üzerinde w'nın 0'dan ∞'a kadar değişimine bağlı olarak $GH(jw)$ büyüklüğünün faz açısına karşı çizdiği eğridir.



(Kutupsal Eğri)

İntegral ve Türev Çarpanı : $(jw)^{\mp 1}$

$$GH(jw) = \frac{1}{jw} = -j\frac{1}{w} = \frac{1}{w}\angle -90^\circ$$

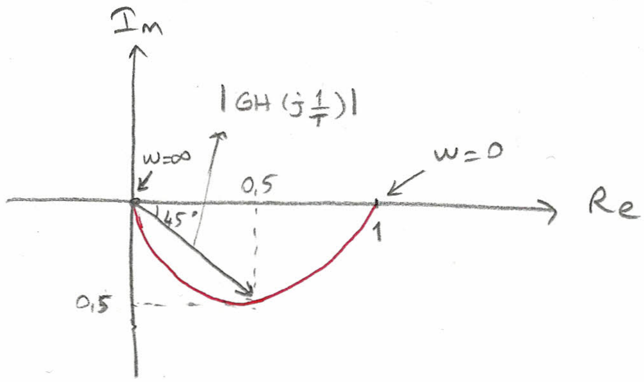
Birinci Dereceden Çarpan : $(1+jwT)^{\mp 1}$

$$GH(jw) = \frac{1}{1+jwT} = \frac{1}{\sqrt{1+w^2T^2}}\angle -\tan^{-1}(wT)$$

$$w=0 \Rightarrow GH(j0) = 1\angle 0^\circ$$

$$w=\infty \Rightarrow GH(j\infty) = 0\angle -90^\circ$$

$$w=\frac{1}{T} \Rightarrow GH\left(j\frac{1}{T}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\angle -45^\circ$$



İkinci Dereceden Çarpanı

$$\left[1+2\zeta\left(j\omega/\omega_n\right)+\left(j\omega/\omega_n\right)^2\right]^{\mp 1} \qquad (0<\zeta<1)$$

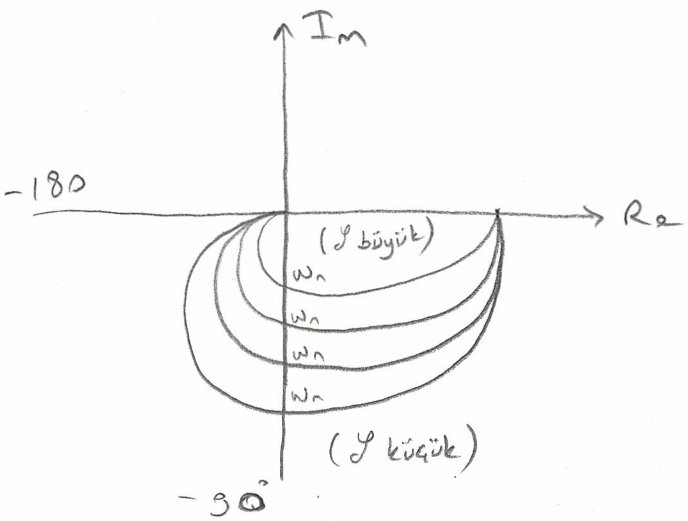
$$GH(j\omega)=\frac{1}{1+2\zeta\left(j\frac{\omega}{\omega_n}\right)+\left(j\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}=\frac{}{\sqrt{\left(1+\frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2+\left(2\zeta\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}}$$

$$\phi=\angle -\tan^{-1}\frac{2\zeta\frac{\omega}{\omega_n}}{1-\frac{\omega^2}{\omega_n^2}}$$

$\omega\to 0 \Rightarrow GH(j\omega)=1\angle 0^\circ$

$\omega\to\infty \Rightarrow GH(j\omega)=0\angle -180^\circ$

$\omega=\omega_n \Rightarrow GH(j\omega_n)=\left(\frac{1}{j2\zeta}\right)$, $\phi=-90^\circ$



Nyquist Kriteri

Kapalı Çevrim transfer fonksiyonu

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1+G(s)H(s)}$$ olan sistemi ele alalım.

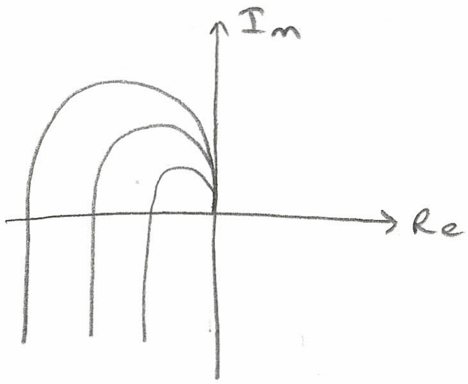
Nyquist kararlılık ölçütü, açık döngü transfer fonksiyonu $(G(jw)H(jw))$ frekans cevabı eğrilerinden sistemin kapalı döngü halinde kararlılığın belirlenmesini sağlar.

Sistemin kararlı olabilmesi özyapısal denklemin $1+G(s)H(s)=0$ 'ın tüm köklerinin sol yarı s düzleminde yer alması gerekir.

Nyquist kararlılık ölçütü açık döngü frekans cevabı ile $1+G(s)H(s)$ in sağ yarı s düzleminde yer alan 0'ların sayısı arasında bir bağlantı kurar. Bu ölçüt kapalı döngü bir sistemin mutlak kararlılığını kapalı döngü kutuplarının bulunmasına gerek kalmadan grafiksel olarak açık döngü frekans cevabı eğrilerinden bulunmasını sağlar. Kapalı döngü bir sistemin kararlılığı açık döngü frekans transfer fonksiyonu $G(jw)H(jw)$ kutupsal eğrisinin $-1+j0$ noktasını çevreleyip çevrelemediği incelenerek öğrenilebilir.

$-1+j0$ noktasının $G(j\omega)H(j\omega)$ eğrisinin içinde kalıp kalmadığına bakılır. $-1+j0$ noktası dışarıda kalıyorsa sistem kararlıdır.

Bağıl Kararlılık: Faz ve Kazanç Payları



$GH(j\omega)$

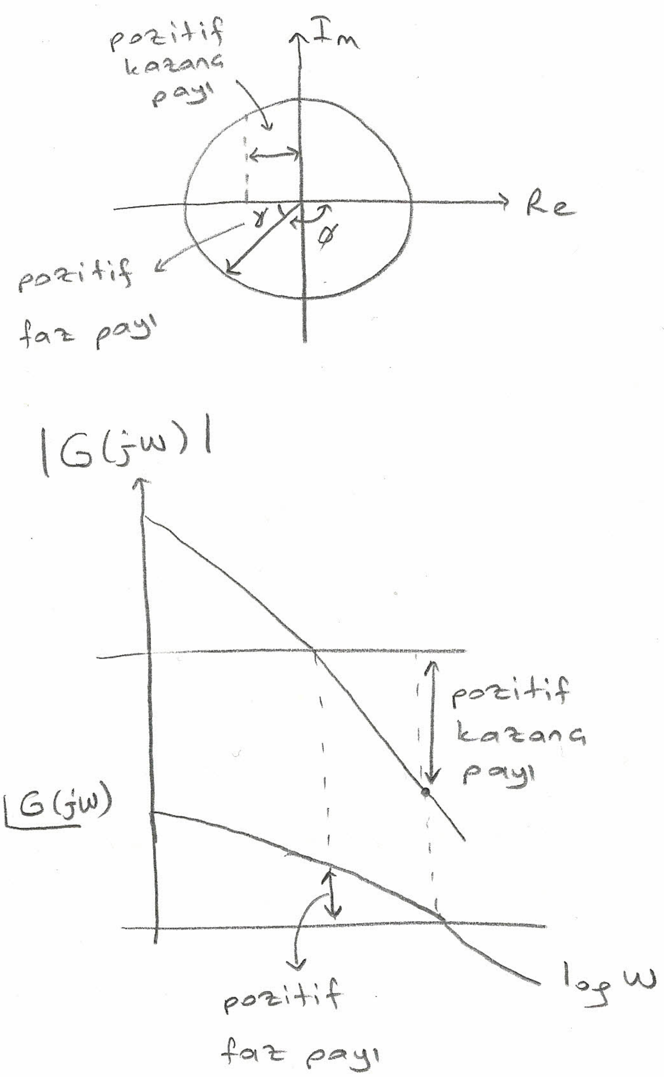
Faz Payı γ gösterilir. ω_1 kazanç geçiş frekansında sistemin kararsızlık eğrisine getirmek için eklenen faz gecikmesidir.

$$\gamma = 180 + \angle G(j\omega)\,H(j\omega)$$

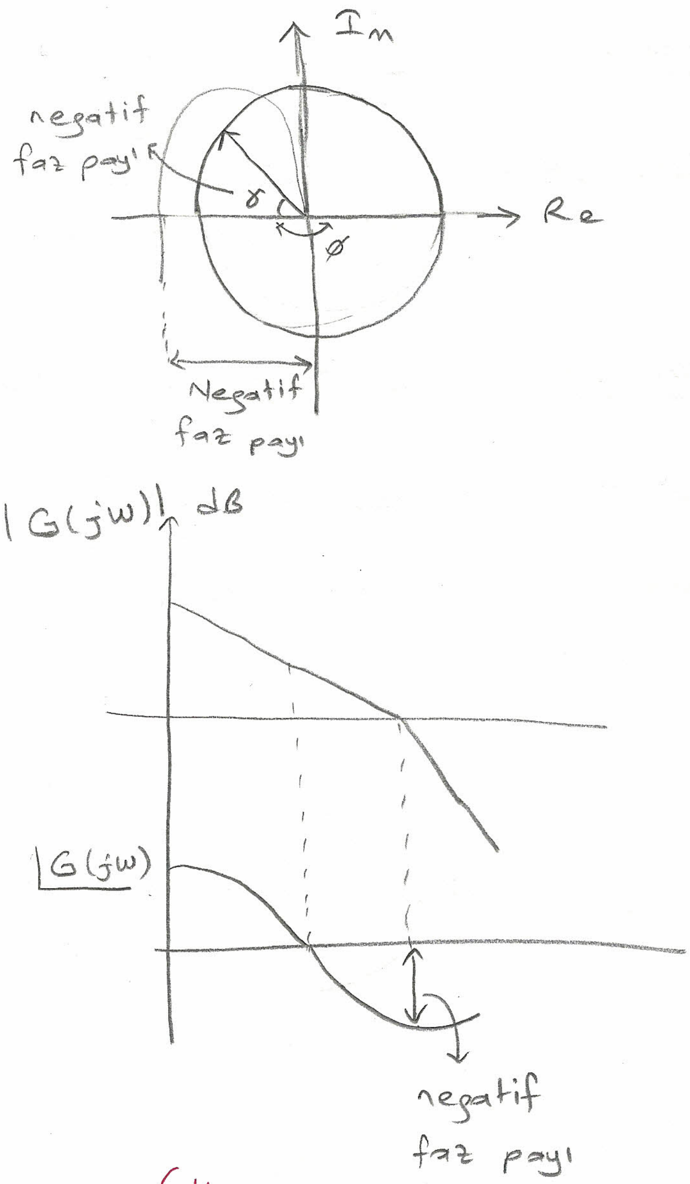
Nyquist diyagramı üzerinde faz payı negatif gerçek eksen ile $G(j\omega)H(j\omega)$ eğrisi ve birim çemberin kesiştiği noktaya çizilen çizgiyi arasında ölçülür. Bu kesişme noktasına karşılık gelen frekans ise ω_1 kazanç geçiş frekansıdır. Kararlı bir sistemde kazanç payı pozitif ve kararsız bir sistemde negatiftir.

Kazanç payı KP = Kazanç payı faz açısının $-180°$ eşit olduğu yerdeki modül değerinin tersine eşittir.

$$KP = \frac{1}{|G(j\omega_\pi)\,H(j\omega_\pi)|} \rightarrow KP = -20\log|G(j\omega_\pi)\,H(j\omega_\pi)|$$



(Kararlı Sistem)



(Kararsız Sistem)

ÖR Açık döngü transfer fonksiyonu

$$GH(jw) = \frac{10}{jw\,(1+jw\,0{,}2)(1+jw\,0{,}05)}$$ olarak verilen sistemin

a-) Kutupsal eğrisini çiziniz. ve Nyquist ölçütüne göre kararlı olup olmadığını belirleyiniz.

b-) Sistemin faz payını ve kazanç payını bulunuz.

c-) Sistemin kararsızlık sınırına (kritik kararlılık) getiren K açık döngü kazancını bulunuz.

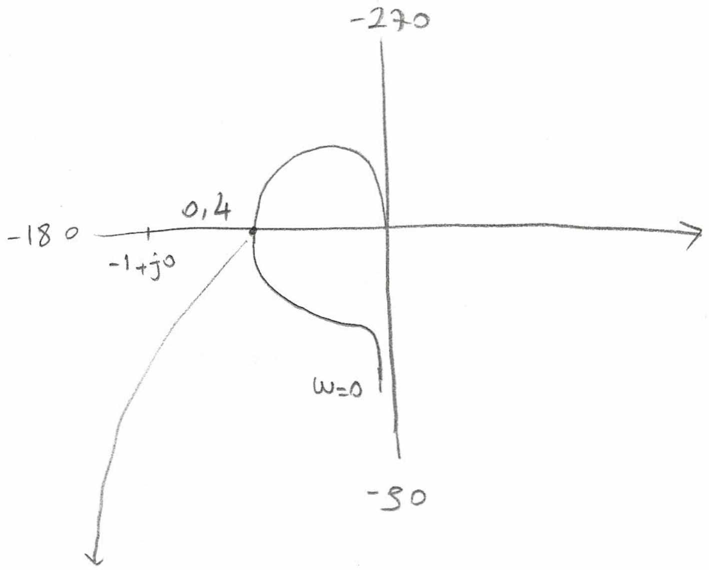
Çözüm:

$$|GH(j\omega)| = \frac{10}{\omega\sqrt{1+(0{,}2\omega)^2}\sqrt{1+(0{,}05\omega)^2}}$$

$$\angle GH(j\omega) = -90^\circ - \arctan 0{,}2\omega - \arctan 0{,}05\,\omega$$

$\omega = 0$ için $\Rightarrow$ $\infty \angle -90^\circ$

$\omega = \infty$ için $\Rightarrow$ $0 \angle -270^\circ$



* Eğrinin $-1+j0$ noktasını kapsamadığından sistem kararlıdır.

-180°'lik ekseni kestiği noktayı bulmak için;

$$-180^\circ = -90^\circ - \arctan 0{,}2\omega - \arctan 0{,}05\,\omega$$

$$\arctan A + \arctan B = \arctan \frac{A+B}{1-AB}$$

$$-90^\circ = -\arctan \frac{0{,}25\,\omega}{1-0{,}01\omega^2}$$

$$1 - 0{,}01\,\omega^2 = 0$$

$$\omega = \omega_\pi = 10 \text{ rad/sn}$$

$$|GH(j\omega_\pi)| = \frac{10}{10\sqrt{1+(0{,}2\cdot 10)^2}\sqrt{1+(0{,}05\cdot 10)^2}} = 0{,}4$$

b-) $K_P = \dfrac{1}{|GH(jw_\pi)|}$

$K_P = \dfrac{1}{0,4} = 2,5$

$$\frac{10}{w\sqrt{1+(0{,}2w)^2}\sqrt{1+(0{,}05w)^2}} = 1$$

$w \cong 6$ rad/sn

$\angle GH(jw) = -90 - \arctan 0{,}2\cdot 6 - \arctan 0{,}05\cdot 6$

$\cong -156{,}9°$

faz payı $\gamma = 180 + \angle GH(jw)$

$= 180 - 156{,}9 = 23{,}1°$

c-) $|GH(jw)| = \dfrac{K}{10\sqrt{1+(0{,}2\cdot 10)^2}\sqrt{1+(0{,}05\cdot 10)^2}} = 1$

$K = 25$

ÖR/ Açık döngü transfer fonksiyonu

$GH(s) = \dfrac{100}{(0{,}1s+1)(s^2+8s+25)}$ olan sistemin

a-) Nyquist eğrisini çiziniz. Faz ve kazanç paylarını bularak sistemin kararlı olup olmadığını tartışınız.

b-) Sınırlı kararlı çalışmasına karşılık gelen K değerini bulunuz.

$$GH(s) = \frac{4}{(0{,}1s+1)\,(0{,}04s^2+0{,}32s+1)}$$

$$GH(jw) = \frac{4}{(0{,}1jw+1)\,(0{,}04(jw)^2+0{,}32jw+1)}$$

$$= \frac{4}{(0{,}1jw+1)\left[(1-0{,}04w^2)+0{,}32\,(wj)\right]}$$

$$|GH(jw)| = \frac{4}{\sqrt{(0{,}1w)^2+1}\;\sqrt{(1-0{,}04w^2)^2+(0{,}32w)^2}}$$

$$\varnothing = -\arctan 0{,}1w - \arctan \frac{0{,}32w}{1-0{,}04w^2}$$

$w=0 \Rightarrow |GH(jw)| = 4$

$\underline{|GH(jw)}\ = 0$

$w=\infty \Rightarrow |GH(jw)| = 0$

$\underline{|GH(jw)}\ = -90$