Ayrık Zamanlı ve Sürekli Zamanlı Sinüzoidal İşaretler Arasındaki Bağıntılar

Sürekli zamanlı bir sinyali $x_a(t)$ ile gösterirsek örnekleme sonrasında $t = nT_s$ olarak düşünüldüğünde ayrık zamanlı sinyali $x[n]$ halinde elde edebiliriz.

Buda
$$x[n] = x_a(t)\Big|_{t=nT_s} = x_a(n\underbrace{T_s}_{\text{örnekleme peryodu (s)}})$$
olarak yazabiliriz.

Eğer sürekli zamanlı sinyalimizi
$$x_a(t) = A.\cos(\overbrace{w}^{\text{açısal frekans (rad/s)}}t)$$
olarak düşünürsek

Bu sinyali ayrık zamana dönüştürmek için t gördüğümüz yere nT_s olarak yazılarak sinyalimiz sürekli halden ayrık zamana dönüşmüş olur. Yani

$$x_a(t) = A.\cos(wt) \Rightarrow x[n] = A.\cos(wnT_s)$$

$$\Rightarrow x[n] = A.\cos(\underbrace{\Omega}_{\text{ayrık açısal frekans (rad/örn)}} n)$$ olarak yazabiliriz.

Burada $\boxed{\Omega = wT_s}$ olduğunu görebiliriz

Ayrık açısal frekans ile ayrık frekans arasındaki ilişkiyi

$$\Omega = 2\pi F$$ olarak yazabiliriz

Ω: ayrık açısal frekans (rad/örn)

F: ayrık frekans (1/örn)

Sürekli zamanda açısal frekans ile sürekli zamanda frekans arasındaki ilişkiyi

$$w = 2\pi f$$ olarak yazabiliriz.

w: açısal frekans (rad/s)

f: frekans (Hz)

Bu bilgiler ışığında

$$\Omega = w\,T_s \Rightarrow 2\pi F = 2\pi f\,T_s$$

Yani $\boxed{F = \dfrac{f}{f_s}}$ olarak yazabiliriz

f_s: örnekleme frekansı (Hz)

$$f_s = \frac{1}{T_s} \Rightarrow T_s = \frac{1}{f_s}$$

ÖR

$$x_1(t) = \cos(2\pi 10 t)$$
$$x_2(t) = \cos(2\pi 50 t)$$ olduguna göre

ve isaretler $f_s = 40\,Hz$ örnekleme frekansıyla örneklendigine göre $x_1[n]$ ve $x_2[n] = ?$

Cevap

$$\boxed{x_1[n] = \cos\left(2\pi \frac{10}{40} n\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} . n\right)}$$

$$x_2[n] = \cos\left(2\pi \frac{50}{40} . n\right) = \cos\left(\frac{5\pi}{2} . n\right)$$
$$= \cos\left(\left(2\pi + \frac{\pi}{2}\right) . n\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} n\right)$$

Not

Görüldüğü gibi bu iki sinyal $f_s = 40\,Hz$ ile örneklendiginde $x_2[n]$ sinyali $x_1[n]$ sinyalinin bir sahtesi oldugunu görecegiz. Bu duruma (alias) olarak adlandırılır. Yani $x_1[n] = \cos\left(\frac{\pi}{2} n\right)$ ve $x_2[n] = \cos\left(\frac{\pi}{2} n\right)$ 'le esit oldugunu görebiliriz. Bu konuya ilerleyen ders notlarında tekrar bahsedecegiz!

Not: Açısal frekansların toplamı 2π olan sinüzoidal sinyaller birbirlerinin aynısıdır.

Bu durumu gözlemlemek için

$$x_1[n] = \cos(\Omega_1 n) \qquad x_2[n] = \cos(\Omega_2 n)$$

$\Omega_1 + \Omega_2 = 2\pi$ olduğunu düşünürsek

$\Omega_2 = 2\pi - \Omega_1$ olarak elde ederiz.

İkinci sinyalin yerine yazarsak

$$x_2[n] = \cos((2\pi - \Omega_1)n)$$
$$= \cos(-\Omega_1 n + 2\pi n)$$

$x_2[n] = \cos(-\Omega_1 n)$ olarak elde ederiz

Yani $x_2[n] = \cos(-\Omega_1 n) = \cos(\Omega_1 n)$ olduğunu görebiliriz. Sonuç olarak

$x_1[n] = x_2[n]$ olduğunu gözlemleyebiliriz.

Not : Frekansları arasındaki fark 2π ve katları olan ayrık zamanlı sinüzoidal sinyaller birbirinin aynısıdır!!

Bu notu formüle ederek ispatlayabiliriz.

$x_1[n] = \cos(\Omega_1 n)$ $\quad x_2[n] = \cos(\Omega_2 n)$

Eger bu iki sinyalin arasındaki frekans farkını (2π) olarak kabul edersek

$$\Omega_2 - \Omega_1 = 2\pi r$$ olarak yazabiliriz

Burada (r) bir bakıma sabit bir katsayı olarak düşünebilinir. Yani arasındaki fark $2\pi, 4\pi, 6\pi$ gibi..-Eger $\Omega_2 = 2\pi r + \Omega_1$ olarak oluşturursak ve bu frekans degerini ikinci sinyaldeki yerine yazarsak

$$x_2[n] = \cos([2\pi r + \Omega_1].n)$$
$$= \cos(\Omega_1.n + 2\pi r.n)$$

elde ederiz.

Görüldügü gibi $x_2[n] = \cos(\Omega_1 n + 2\pi r.n)$ sinyalinin $\cos(\Omega_1 n)$ 'e esit oldugunu görebiliriz Yani

$x_1[n] = x_2[n]$ durumunu saglamış oldugunu gözlemleyebiliriz.

Ayrık Zamanlı Sinyallerde Peryot ve Peryodiklik

→ Peryodik Sinyaller

→ Peryodik olmayan Sinyaller.

!! (Ayrık Zamanlı Sinyallerde Peryodik olma şartı)

$x[n] \rightarrow$ Ayrık zamanlı bir sinyaldir.

Burada $-\infty < n < \infty$ n tam sayıdır

Bir sinyalin peryodik olup olmadığını anlamak için sinyalin kendini tekrarlayıp tekrarlamadığını kontrol ederiz.

Yani

$$x[n+N] = x[n]$$ olup olmadığına bakarız.

Yalnız burada dikkat edilmesi gereken kısım "N" değerinin sıfır olmayan bir tam sayı olmasına dikkat edilmelidir.

Peryodikliğin hangi koşullarda olduğunu bulmak için

$x[n] = \cos(\Omega n)$ sinyalini ele alırsak

$$x[n] = x[n+N]$$

$$\Rightarrow \cos(\Omega n) = \cos(\Omega n + \Omega N)$$

olarak yazılabilinir.

$$\Omega = 2\pi F$$ — Ayrık frekans

Ω — Ayrık açısal frekans

olduğunu biliyoruz.

$$\Rightarrow \cos(2\pi F n) = \cos(2\pi F n + 2\pi F N)$$

Bu durum ancak $2\pi FN$'nin 2π'nin katıysa doğru olabilir. Yani, öyle bir ~~m~~ (r) tam sayısı var ise

$$\cancel{2}\cancel{\pi} FN = \cancel{2}\cancel{\pi} r$$ olarak yazabiliriz.

$$\boxed{F = \frac{r}{N}} \Rightarrow \boxed{\frac{N}{r} = \frac{2\pi}{\Omega}}$$ ilişkisini bulabiliriz.

Burada gördüğümüz gibi, sıfır olmayan (r) ve (N) değerleri için F'nin rasyonel olması gerekir. Eğer (F) rasyonel ise sinyal periyodiktir. Yani $\left(\frac{r}{N}\right)$ oranı yada $\left(\frac{N}{r}\right)$ oranı rasyonel ise sinyalimiz periyodiktir.

<u>Not</u> Lütfen rasyonel ve irrasyonel sayıları inceleyiniz!!!

ÖRNEK

a) $x[n] = 5.\sin\left(\frac{3\pi}{5}n\right)$ peryodikliğini inceleyiniz.

$\rightarrow x[n] = 5.\sin\left(\frac{3\pi}{5}.n\right) \Rightarrow \boxed{\Omega = \frac{3\pi}{5}}$

$$\frac{N}{r} = \frac{2\pi}{\Omega} \Rightarrow \frac{N}{r} = \frac{2\pi}{\frac{3\pi}{5}} \Rightarrow \boxed{\frac{N}{r} = \frac{10}{3}}$$

Burada $\frac{N}{r}$ oranı rasyonel olduğundan $x[n]$ peryodiktir. Burada peryod yani (N) değeri r'ye 3 verilirse N değerini 10 olarak bulabiliriz

$\boxed{N=10 \quad r=3}$ //

ÖRNEK

b) $y[n] = 6\cos\left(\frac{3}{8}n\right)$ sinyalinin peryodikliğini inceleyiniz.

$\rightarrow$ Burada $\boxed{\Omega = \frac{3}{8}}$ olarak bulabiliriz.

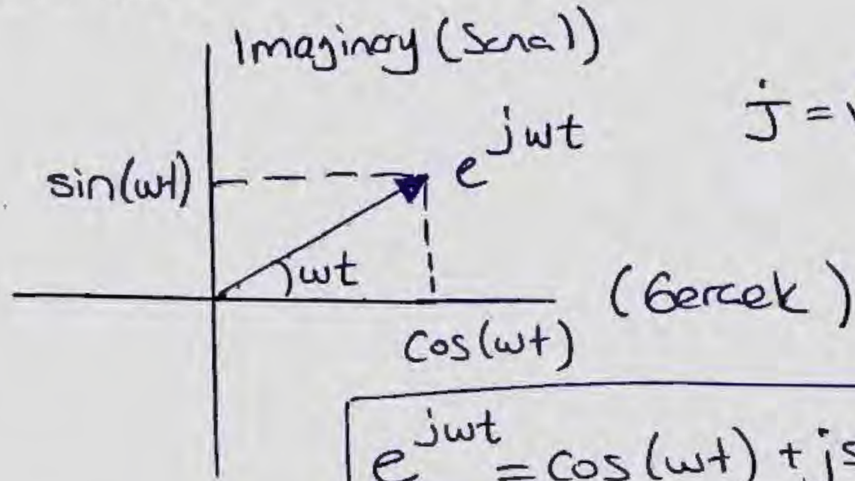
$$\frac{N}{r} = \frac{2\pi}{\Omega} \Rightarrow \frac{N}{r} = \frac{2\pi}{\frac{3}{8}} \Rightarrow \boxed{\frac{N}{r} = \frac{16\pi}{3}}$$

Burada $\frac{N}{r}$ oranı rasyonel olmadığından $y[n]$ peryodik değildir!!

ÖRNEK Aşağıdaki ayrık zamanlı sinüzoidal sinyalin peryodikliğini inceleyiniz.

$$x[n] = e^{-j\frac{6\pi n}{7}}$$

Not Euler formülü



$j = \sqrt{-1}$

$$\boxed{e^{jwt} = \cos(wt) + j\sin(wt)}$$

Soruya dönersek $\Omega = \frac{6\pi}{7}$ $\quad \frac{N}{r} = \frac{2\pi}{\Omega}$

$$\Rightarrow \frac{N}{r} = \frac{2\pi}{\frac{6\pi}{7}} \Rightarrow \boxed{\frac{N}{r} = \frac{14}{6} = \frac{7}{3}}$$

$\frac{N}{r}$ oranı rasyonel olduğundan dolayı $x[n]$ sinyali peryodiktir. Eğer peryod bulunursa;

$$\frac{N}{r} = \frac{7}{3} \Rightarrow N = \frac{7r}{3} \Rightarrow \begin{matrix} N = 7 \\ r = 3 \end{matrix}$$

Sonuç olarak sinyalimiz $N = 7$ ile periyodiktir

Örnek

$$x[n] = 2\sin\left(\frac{3\pi}{5}n\right)$$

$$\Omega = \frac{3\pi}{5} \qquad \frac{N}{r} = \frac{2\pi}{\Omega} \Rightarrow \frac{N}{r} = \frac{2\pi}{\frac{3\pi}{5}}$$

$$\boxed{\frac{N}{r} = \frac{10}{3}}$$

Eğer $\frac{N}{r}$ oranı rasyonel ise $x[n]$ periodik bir sinyaldir. Eğer $r=3$ seçersek ~~[illegible]~~yinin ~~en küçük~~ (N) değerini bulmuş oluruz.

Sinyal $N=10$ peryodu ile peryodiktir.

~~[illegible]~~ Not

Örnek

$$x[n] = \cos\left(\frac{2\pi n}{11}\right) \text{ sinyalinin}$$

periyodikliğini inceleyelim.

$$\Omega = \frac{2\pi}{11} \qquad \frac{N}{r} = \frac{2\pi}{\frac{2\pi}{11}} = 11$$

Yani $\frac{N}{r} = 11 \Rightarrow N = 11 . r \quad r = 1 \quad N = 11$

Sinyal $N = 11$ ~~periyodikliğiyle~~ periyoduyla periyodiktir!!

ÖRNEK

$x[n] = \sin(0{,}8\, n)$ sinyalinin periyodikliğini inceleyiniz.

$$\Omega = 0.8 \qquad \frac{N}{r} = \frac{2\pi}{0.8} \Rightarrow \boxed{\frac{N}{r} = \frac{10}{4}\pi = \frac{5\pi}{2}}$$

Burada $\frac{N}{r}$ oranı rasyonel olmadığından sinyal periyodik değildir

7

Not: Ayrık zamanlı iki farklı sinyalin toplamı yine peryodiktir.

Eğer $x_1[n]$ ve $x_2[n]$ sinyallerine peryodik olarak kabul edersek

$$x_1[n] = x_1[n+N_1]$$
$$x_2[n] = x_2[n+N_2]$$

Bu iki sinyalin toplamı yine peryodik bir sinyaldir.

$$x[n] = x_1[n] + x_2[n]$$

$$x_1[n] = x_1[n+N_1] = x_1[n+m_1N_1]$$
$$x_2[n] = x_2[n+N_2] = x_2[n+m_2N_2]$$

Burada m_1 ve m_2 tam sayıdır.

$$x[n] = x_1[n+m_1N_1] + x_2[n+m_2N_2]$$

olarak yazabiliriz

$$x[n] = x[n+N] = x_1[n+m_1N_1] + x_2[n+m_2N_2]$$

$x_1[n]+x_2[n]$ $\qquad$ $x_1[n+N]+x_2[n+N]$

$$N = m_1N_1 = m_2N_2$$

Yani $\boxed{\dfrac{N_1}{N_2} = \dfrac{m_2}{m_1}}$ veya $\boxed{N = \text{EKOK}(N_1, N_2)}$

Eger k tane peryodik sinyalimiz var ise

$$x_1[n+N_1],\ x_2[n+N_2] \ldots\ x_k[n+N_k]$$

olarak yazabiliriz.

Sonuç olarak

$$x[n+N] = x_1[n+N_1] + \ldots\ \ldots x_k[n+N_k]$$

$$N = OKEK(N_1, N_2, \ldots N_k)$$

olarak bulunabilinir

Örnek $x[n] = 4\sin(0{,}3\pi n) + 5.\cos(0{,}4\pi n)$

sinyalinin peryodik olup olmadığını inceleyelim.

$x_1[n] = 4.\sin(0{,}3\pi n)$ $x_2[n] = 5.\cos(0{,}4\pi n)$

$\Omega_1 = 0{,}3\pi$ $\Omega_2 = 0{,}4\pi$

$$\frac{N_1}{r_1} = \frac{2\pi}{0{,}3\pi} \Rightarrow \boxed{\frac{N_1}{r_1} = \frac{20}{3}}$$

$$\boxed{\frac{N_2}{r_2} = \frac{2\cancel{\pi}}{0{,}4\cancel{\pi}} = 5}$$

Burada $r_1 = 3$ olarak kabul edersek $N_1 = 20$ olarak bulabiliriz

Burada $r_2 = 1$ olarak kabul edersek $N_2 = 5$ olarak bulabiliriz.

Görüldüğü gibi $x_1[t]$ ve $x_2[t]$ sinyallerimiz peryodiktir. Bu nedenle $x[n]$ sinyalide peryodik olacaktır. $N = EKOK(20,5) = 20$. Yani $x[n]$ sinyali $N=20$ peryodunda periyodiktir.

ÖRNEK

$$x_1[n] = x_1[N+6]$$
$$x_2[n] = x_2[N+8]$$
$$x_3[n] = x_3[N+10]$$

olduğunu düşünürsek

a) $x_4[n] = x_1[n] + x_2[n]$ sinyali periyodik mi? Peryodik ise peryodunu bulunuz.

b) $x_5[n] = x_1[n] + x_2[n] + x_3[n]$ sinyali peryodik mi? Peryodik ise peryodunu bulunuz.

CEVAP

b) $N_1 = 6$, $N_2 = 8$, $N_3 = 10$ — b şıkkı!!

$x_5[n]$ sinyali peryodiktir ve peryodu

$$N = EKOK(6, 8, 10) = 120$$

Yani $x_5[n]$ sinyali $N=120$ peryod ile periyodiktir.

~~yada~~

~~N=EKOK(~~

---

a) $N_1 = 6$, $N_2 = 8$ → a şıkkı !!!

$x_4[n]$ sinyali peryodiktir ve peryodu

$$N = EKOK(6,8) = 24$$

Yani $x_4[n]$ sinyali $N=24$ peryod ile periyodiktir.

Not

Ayrık zamanlı sinüzoidal sinyallerde en yüksek osilasyon oluşumu $\Omega = \pi$ veya $F = \frac{1}{2}$ frekanslarıyla elde edilir yada oluşur diyebiliriz.

Ayrık frekans

Ayrık açısal frekans.

Burada önemli bir nokta vardır. Ayrık zamanlı sinüzoidal sinyaller için ayrık açısal frekans (Ω) için frekans aralığımız $0-\pi$ aralığında olmaktadır. Bu frekans aralığının dışındaki frekans değerlerinde sinyaller $0-\pi$ aralığındaki sinyallerin birer görüntüsü olduğunu belirtmek gerekir. Eğer açısal frekans(Ω) bakımından değil de frekans(F) olarak duruma bakılırsa temel frekans aralığımız $0-\frac{1}{2}$ arasında olacağını bilmemiz gerekir.

Özet olarak

Ω Ayrık frekans aralığı $\rightarrow 0-\pi$

F Frekans aralığı $\rightarrow 0-\frac{1}{2}$

Tekrar maksimum osilasyon durumuna dönersek

$$\Omega_{max} = \pi \qquad \Omega_{max} = 2\pi F_{max}$$

$$\cancel{\pi} = 2\cancel{\pi} F_{max} \qquad F_{max} = \frac{1}{2} \text{ olarak bulunur}$$

Yani maksimum osilasyon $\Omega_{max} = \pi$ ve $F_{max} = \frac{1}{2}$ değerlerinde meydana gelecektir

Shanon - Nyquist Örnekleme Teoremi

Sürekli zamanlı bir sinyal örneklenirken alias yani örtüşmenin olmaması için en az Nyquist frekansıyla örneklenmelidir. Bu teoreme göre <u>Nyquist frekansı</u> örneklenen sürekli zamanlı sinüzoidal işaretin <u>max frekans bileşeninin</u> en az iki katı olarak tanımlanmaktadır.

Yani $f_{max} \rightarrow$ sürekli zamanlı sinyalin en büyük frekanslı bileşeni

<u>Özetle</u>

$$f_N = 2 . f_{max} \quad \text{olmalıdır}$$

Nyquist frekansı   maksimum frekansı

Bu kritere göre

$$f_s \geq f_N \quad \text{olmalıdır.}$$

$$f_s \geq 2 . f_{max}$$

örnekleme frekansı

ÖR

$$x_1(t) = \cos(20\pi t)$$
$$x_2(t) = \cos(100\pi t)$$
sinyalleri için

eger $f_s = 40$ Hz ile örneklenirse ayrık zamanlı $x_1[n]$ ve $x_2[n]$ elde ediniz. Bu örnekleme frekansıyla örtüşmenin meydana gelip gelmeyeceğini inceleyiniz.

Cevap

$x_1(t) = \cos(20\pi t)$

$$2\pi f_1 = 20\pi$$
$$\boxed{f_1 = 10\text{ Hz}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} f_{N1} &= 2.f_{1max} = 2.10 \\ f_{N1} &= 20\text{ Hz}\end{aligned}}$$

$f_s \geq f_{N1} \Rightarrow ???$

$40 \geq 20$ (✓)

$$T_s = \frac{1}{40}$$

$$x_1[n] = \cos\left(20\pi n.\frac{1}{40}\right)$$
$$x_1[n] = \cos\left(\frac{\pi}{2}n\right)$$
$$\Omega = \frac{\pi}{2}$$

$x_2(t) = \cos(100\pi t)$

$$2\pi f_2 = 100\pi$$
$$\boxed{f_2 = 50\text{ Hz}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} f_{N2} &= 2.f_{2max} \\ f_{N2} &= 2.50 \\ f_{N2} &= 100\text{ Hz}\end{aligned}}$$

$f_s \geq f_{N2} \Rightarrow ??$

(✗) $40 \geq 100$ Hz

$$T_s = \frac{1}{40}$$

$$x_2[n] = \cos\left(100\pi n.\frac{1}{40}\right)$$
$$x_2[n] = \cos\left(\frac{5\pi}{2}n\right)$$
$$x_2[n] = \cos\left(\frac{\pi}{2}n + 2\pi n\right)$$
$$x_2[n] = \cos\left(\frac{\pi}{2}n\right)$$

Burada dikkat edilmesi gereken kısım $x_1[n]$ sinyali Nyquist kriterini sağladığı ve Ω ayrık açısal frekan $0-\pi$ frekans aralığında olduğu için örtüşme olmaz

Lakin $x_2[n]$ sinyalinde Nyquist kriteri sağlamıyor. Ve elde edilen bu sinyalin aynısını $x_1[n]$ içinde elde etmiştik. Yani $x_1(t)$ sinyalinin aynısı oluştu. Dolayısıyla $x_2(t)$ sinyalindeki frekans bilgisi kayboldu. Oluşan bu bilgi kaybı örtüşme olayından dolayı meydana gelmektedir

---

ÖRNEK

$$x(t) = 5.\cos(2000\pi t) + 10.\sin(6000\pi t) + 10\cos(12000\pi t)$$

analog sinyali için

a) Nyquist frekansını bulunuz.

b) $f_s = 5000$ Hz için $x[n] = ?$

c) İdeal enterpolasyon kullanılarak b şıkkı için elde edilen örneklerden hareketle tekrardan oluşan $x(t)$ analog işaretini bulunuz ve yorumlayınız

a) $f_1 = 1000$ Hz
$f_2 = 3000$ Hz
$f_3 = 6000$ Hz

Burada maksimum frekans $\Rightarrow f_{max} = 6000$ Hz'dir

$$\boxed{f_N = 2 \cdot f_{max} = 2 \cdot 6000 = 12000 \text{ Hz} = 12 \text{ kHz}}$$

b) $x[n] = 5 \cdot \cos(2000\pi n T_s) + 10 \sin(6000\pi n T_s) + 10 \cos(12000 \pi n T_s)$

$T_s = \dfrac{1}{5000}$ sn

$$x[n] = 5 \cdot \cos\left(2000\pi n \frac{1}{5000}\right) + 10 \cdot \sin\left(6000\pi n \frac{1}{5000}\right) + 10 \cos\left(12000\pi n \frac{1}{5000}\right)$$

$$x[n] = 5 \cdot \cos\left(\frac{2\pi n}{5}\right) + 10 \cdot \sin\left(\frac{6\pi}{5} n\right) + 10 \cos\left(\frac{12\pi}{5} n\right)$$

$$x[n] = 5 \cdot \cos\left(\frac{2\pi n}{5}\right) - 10 \cdot \sin\left(\frac{4\pi}{5} n\right) + 10 \cos\left(\frac{2\pi}{5} \cdot n\right)$$

$$x[n] = 15 \cos\left(\frac{2\pi}{5} n\right) - 10 \sin\left(\frac{4\pi}{5} \cdot n\right)$$

c) $t = nT_s \Rightarrow n = \frac{t}{T_s}$

$$x(t) = 15\cos\left(\frac{2\pi}{5}\cdot\frac{t}{T_s}\right) - 10\sin\left(\frac{4\pi}{5}\cdot\frac{t}{T_s}\right)$$

$$x(t) = 15\cos\left(\frac{2\pi}{5}\cdot 5000t\right) - 10\sin\left(\frac{4\pi}{5}\, 5000t\right)$$

$$\boxed{x(t) = 15\cos(2000\pi t) - 10\sin(4000\pi t)}$$

Görüldügü gibi tekrarda elde ettigimiz analog $x(t)$ sinyali ile soruda verilen $x(t)$ sinyal aynı degildir Görüldügü gibi bazı frekans bilesenleri kaybolmustur Bunun nedeni örtüsme meydana gelmesidir. (Örnekleme frekansı uygun degildir)

Sürekli zamanlı sinyalleri modellerken

→ Differansiyel denklemler

→ Transfer fonksiyonu (s-dönüşümü)

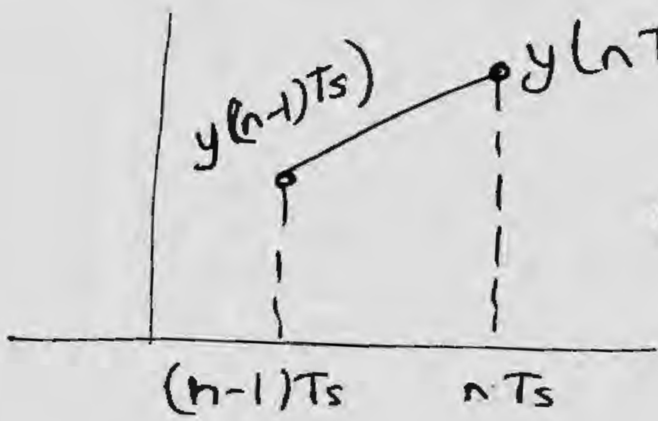
→ Durum uzay gösterimi ile matematiksel model oluşturulur.

Ayrık zamanlı sinyalleri modellerken

→ Fark denklemleri

→ Transfer fonksiyonu (z-dönüşümü)

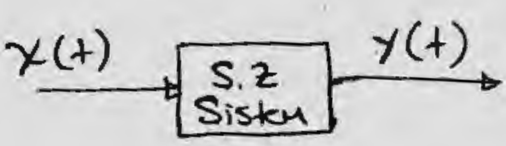
→ Durum uzay gösterimi (ayrık zaman domeni) ile modellenebilinir



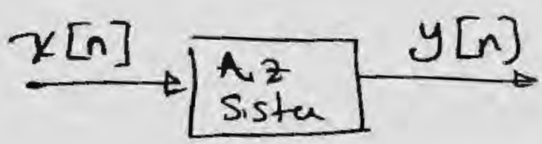
$$\frac{dy(t)}{dt} = \frac{y(nT_s) - y((n-1)T_s)}{T_s}$$

SİSTEM

Sürekli zamanlı



Ayrık zamanlı



Temel Sistem Özellikleri

1) Linerlik (Doğrusallık)

a) Süperpozisyon (Toplamsallık)

b) Homojenite (Çarpımsallık)

a) →
$$x_1[n] \rightarrow y_1[n]$$
$$x_2[n] \rightarrow y_2[n]$$
$$x_1[n]+x_2[n] \rightarrow y_1[n]+y_2[n]$$

b) →
$$x[n] \rightarrow y[n]$$
$$a x_1[n] \rightarrow a y_1[n] \quad a \in \mathbb{R}$$
$$+\; b x_2[n] \rightarrow b y_2[n] \quad b \in \mathbb{R}$$
$$a x_1[n]+b x_2[n] \rightarrow a y_1[n]+b y_2[n]$$

Bu ifade sağlanıyorsa sistem doğrusaldır.

ÖR $y[n]=n x[n]$ sinyali liner midir?

Toplamsallık
$$x_1[n] \rightarrow y_1[n]$$
$$x_2[n] \rightarrow y_2[n]$$
$$y_1[n] \rightarrow n x_1[n]$$
$$y_2[n] \rightarrow n x_2[n]$$

$$y_1[n]+y_2[n] = n x_1[n]+n x_2[n]$$
$$= n\left(x_1[n]+x_2[n]\right)$$

Çarpımsallık

$$x[n] \rightarrow y[n]$$

$$a x[n] \rightarrow a y[n] \quad \text{olması gereken}$$

$$y[n] = n(a x[n])$$

$$= n a x[n] = a(n x[n])$$

Dolayısıyla çarpımsallık ve toplamsallık özelliklerini sağladığı için sistem linerdir.

ÖR $y[n] = x^2[n]$ liner midir?

$$y[n] = x_1^2[n] + x_2^2[n] \rightarrow \text{mevcut durum}$$

$$y[n] = (x_1[n] + x_2[n])^2 \quad \text{olması gereken durum.}$$

toplamsallık şartını sağlamadığı için liner değildir.

2) Zamanla değişmezlik

Bir sistemin girişi örnek kadar geciktirildiğinde veya öte alındığında çıkış da aynı örnek kadar geciktiriliyor veya öne alınıyorsa sistem zamanla değişmezlik özelliğine sahiptir.

$$x[n] \rightarrow y[n]$$

$$x[n \mp n_0] \rightarrow y[n \mp n_0]$$

ÖR $y[n] = n x[n]$ isareti zamanla degismez midir?

$x[n] \rightarrow y[n]$

$x[n-n_0] \rightarrow y[n-n_0]$

$y[n-n_0] = (n-n_0)x(n-n_0)$ olması gereken durum

$y[n-n_0] = n\,x(n-n_0)$

└ mevcut durum

Dolayısıyla sistem, lineer ve zamanla degisen ayrık zamanlı bir sistemdir.

3) Nedensellik

Ayrık zamanlı bir sistemin herhangi bir $n=n_0$ anındaki çıkış, o anki ve/veya daha önceki çıkışlarına ve girisine bağlıysa sistem nedenseldir. Bu özelliği sağlamayan sistemlere de nedensel olmayan sistemler adı verilir.

ÖR $y[n] = x^2[n+1]$ sinyalini lineer, zamanla degismezlik, ve nedensellik bakımından inceleyiniz.

Linearlik → x^2'li terimden dolayı lineer **değil**

Zamanla değişmezlik → Giriş ne kadar kaydırıldığında çıkışta ne kadar kayacağından **zamanla değişmez**

Nedensellik → çıkış değeri, girişin gelecekteki değerlerine bağlı olduğundan **nedensel değildir**

ÖR $y[n]-y[n-1]=x[n]$ sistemi nedensel midir?

Cevap Çıkışın o andaki değeri, girişin o andaki değeri ile çıkışın daha önceki değerlerine bağlı olduğundan sistem **nedenseldir**.

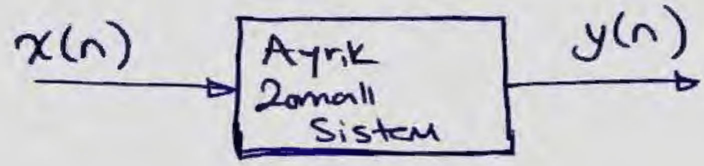
dır. Sistem **lineer** ve **zamanla değişmeyen** bir sistemdir.

Ayrık Zamanlı Sistemlerin Zaman Cevap Analizi

Fark Denklemleri

Fark denklemlerini çözerek bir sistemin hangi giriş için nasıl tepki vereceğini bulabiliriz.

Sabit katsayılı bir fark denkleminin gösterimini aşağıdaki gibi verebiliriz.



$x(n) \to$ Giriş

$y(n) \to$ Çıkış

Yani : $\begin{cases} a_N y(n-N) + a_{N-1} y(n-(N-1)) + \dots + a_1 y(n-1) \\ + a_0 y(n) = b_M x(n-M) + b_{M-1} x(n-(n-M) + \dots \\ \qquad + b_1 x[n-1) + b_0 x(n) \end{cases}$

olarak formülüze edebiliriz.

Buradaki katsayılar $\longrightarrow \begin{pmatrix} a_0, a_1, \dots, a_{N-1}, a_N \in \mathbb{R} \\ b_0, b_1, \dots, b_{M-1}, b_M \in R \end{pmatrix}$

Bir diğer gösterim olarak

$$\boxed{\sum_{K=0}^{N} a_K y[n-K] = \sum_{K=0}^{M} b_K x[n-k]}$$

olarak yazabiliriz.

Bu genel ifadeyi

$$a_0 y[n] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k] - \sum_{k=1}^{N} a_k y[n-k]$$

şeklinde yazarak

$$y[n] = \frac{1}{a_0}\left(\sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k] - \sum_{k=1}^{N} a_k y[n-k]\right)$$

elde ederiz. Burada $y[n]$ iki kısımdan oluşmaktadır.

$$y[n] = y_{zi}[n] + y_{zs}[n]$$

sıfır giriş cevabı

sıfır durum cevabı

Fark Denklemlerinin Çözümü

1) Sıfır giriş cevabının bulunması (homojen çözüm)

Belirtildiği gibi girişin sıfır olduğu durumu inceleyeceğiz. Yani sadece başlangıç şartlarını kullanarak elde edeceğiz çözümü bulmaya çalışacağız.

Eğer genel çözümümüzü yazarsak

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^{N} b_k x[n-k]$$

Giriş kısımlarını sıfır olarak kabul edersek yani

$$x[n], x[n-1], \ldots, x[n-k] = 0$$

Bu denklemi yerine koyarsak genel çözüm denklemimiz

$$a_0 y[n] + a_1 y[n-1] + \ldots + a_{N-1} y[n-(N-1)] + a_N y[n-N] = 0$$

olarak yazılır. Eğer

$$y[n] = c\lambda^n$$ olarak kabul edersek

ve $y[n]$ yerine yazarsak

$$(a_0 c \lambda^n) + a_1 c \lambda^{n-1} + \ldots + a_{N-1} c \lambda^{n-(N-1)} \ldots$$

$$+ a_N c \lambda^{n-N} = 0$$ olarak yazılır.

$c\lambda^{n-N}$ parantezine alırsak

$$c\lambda^{n-N}\left(a_0 \lambda^N + a_1 \lambda^{N-1} + \ldots + a_{N-1}\lambda + a_N\right) = 0$$

Yani $$\boxed{a_0 \lambda^N + a_1 \lambda^{N-1} + \ldots + a_{N-1}\lambda + a_N = 0}$$

Karekteristik Denklem

a) Köklerin Reel ve Farklı olması Durumu

Eğer $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_N \in R$ birbirinden farklı ve reel ise

Sıfır giriş cevabını

$$y_{zi}[n] = c_1 \lambda_1^n + c_2 \lambda_2^n + \ldots + c_{N-1} \lambda_{N-1}^n + c_N \lambda_N^n$$

olarak yazabiliriz.

Örnek

Asagıdaki sistemin sıfır giris cevabını bulunuz.

$$y[n] - 3y[n-1] - 4y[n-2] = x[n]$$

~~Başlangıç~~ Bilinenler $y[-1] = 1$

$$y[-2] = 0$$

Buna göre $y_{zi}[n]$ yani sıfır giris cevabını bulunuz.

CEVAP

$y[n] = c\lambda^n$ sistem denklemine yazılırsa

$$c\lambda^n - 3c\lambda^{n-1} - 4c\lambda^{n-2} = 0 \quad \text{olur}$$

$c\lambda^{n-2}$ parantezine alırsak

$$c\lambda^{n-2}(\lambda^2 - 3\lambda - 4) = 0 \quad \text{olacaktır.}$$

Yani $\lambda^2 - 3\lambda - 4 = 0$

$(\lambda - 4)(\lambda + 1) = 0$ Buradan kökler

$\lambda_1 = 4 \quad \lambda_2 = -1$ olarak bulunacaktır.

$y_{zi} = c_1\lambda_1^n + c_2\lambda_2^n$ olarak sunduğumuzda bulduğumuz kök değerlerini yerine yazalım

$y_{zi} = c_1(4)^n + c_2(-1)^n$ olarak elde ederiz

Sorude verilen $y[-1]=1$ ve $y[-2]=0$ bilgisini kullanırsak

$$y[-1] = c_1(4)^{-1} + c_2(-1)^{-1} = 1$$

$$y[-2] = c_1(4)^{-2} + c_2(-1)^{-2} = 0$$

Yani
$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{4}c_1 - c_2 &= 1 \\ \frac{1}{16}c_1 + c_2 &= 0 \end{aligned}\right\}$$
Buradan $c_1 = \frac{16}{5}$ $c_2 = -\frac{1}{5}$

olarak elde edilir.

$\lambda_1, \lambda_2, c_1, c_2$ değerlerini genel çözümde yerine koyarsak

$$\boxed{y_{zi}[n] = \left[\left(\frac{16}{5}\right)(4)^n - \frac{1}{5}(-1)^n\right]u[n]}$$

elde ederiz

b) Eğer bulunan kökler reel ve tekrarlı (katlı) kökler ise

Bu durumda $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_r \in \mathbb{R}$
Yani kökler aynı ve reel ise

$\lambda_{r+1}, \lambda_{r+2}, \cdots, \lambda_N \in \mathbb{R}$
(birbirinden farklı)

$$y_{zi}[n] = (c_1 + c_2 n + c_3 n^2 + \cdots + c_{r-1}n^{r-2} + c_r n^{r-1})\lambda_1^n + c_{r+1}\lambda_{r+1}^n + c_{r+2}\lambda_{r+2}^n + \cdots + c_N\lambda_N^n$$

olarak elde edilir.

ÖRNEK

$$y[n]-\frac{5}{4}y[n-1]+\frac{1}{2}y[n-2]-\frac{1}{16}y[n-3]=x[n]$$

ise $y_{zi}[n)=?$ ~~Burada~~ Bilinenler $\rightarrow$ $y[-1]=6$
$y[-2]=6$
$y[-3]=-2$

CEVAP

Burada kökleri bulmak için

$$\lambda^3-\frac{5}{4}\lambda^2+\frac{1}{2}\lambda-\frac{1}{16}=0$$ olarak yazabiliriz

Kök değerleri

$\lambda_1=\lambda_2=\frac{1}{2}$ ve $\lambda_3=\frac{1}{4}$ olarak elde edilir.

$$y_{zi}[n]=(c_1+c_2n)\left(\frac{1}{2}\right)^n+c_3\left(\frac{1}{4}\right)^n$$

$$y[-1]=6 \Rightarrow (c_1-c_2)\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}+c_3\left(\frac{1}{4}\right)^{-1}=6$$

$$y[-2]=6 \Rightarrow (c_1-2c_2)\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}+c_3\left(\frac{1}{4}\right)^{-2}=6$$

$$y[-3]=-2 \quad (c_1-3c_2)\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}+c_3\left(\frac{1}{4}\right)^{-3}=-2$$

Yani

$$2c_1-2c_2+4c_3=6$$
$$4c_1-8c_2+16c_3=6$$
$$8c_1-24c_2+64c_3=-2$$

$c_1=9/2$, $c_2=5/4$, $c_3=-1/8$

olarak bulunur.

$\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,c_1,c_2,c_3$ değerleri yerine yazılırsa

Yani $\boxed{y_{zi}[n] = \left(\left(9/2 + 5/4 \cdot n \right) \left(\frac{1}{2} \right)^n - \frac{1}{8} \left(\frac{1}{4} \right)^n \right) u[n]}$

I

$n \geq 0$

olarak elde ederiz

c) Eğer köklerimiz komplekş sayı olarak elde edilirse

$\lambda_1 = \lambda_2 \in I$

$y_{zi}[n] = c_1 (\lambda_1)^n + c_2 (\lambda_2)^n$

$\lambda_1 = \lambda_2^* \qquad c_1 = c_2^*$

Burada $c_1 = a + jb = |c| e^{j\theta}$, $\lambda_1 = \sigma + jw = |r| e^{j\phi}$

$c_2 = c_1^* = |c| e^{-j\theta}$, $\lambda_2 = \lambda_1^* = |r| e^{-j\phi}$

Yani

$$y_{zi}[n] = |c| e^{j\theta} (|r| e^{j\phi})^n + |c| e^{j\theta} (|r| e^{-j\phi})^n$$

$$= |c| (|r|)^n (e^{j\theta} \cdot e^{j\phi n} + e^{-j\theta} \cdot e^{-j\phi n})$$

$$= |c| (|r|)^n (e^{j(\theta + \phi n)} + e^{-j(\theta + \phi n)})$$

$$= 2|c| (|r|)^n \cdot \cos(\phi n + \theta)$$

Yani

$$\boxed{y_{zi}[n] = \underset{\downarrow}{2|c|} (|r|)^n \cos(\theta + \phi n)}$$

$$\boxed{y_{zi}[n] = A (|r|)^n \cos(\theta + \phi n)}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \cos(x) &= \frac{e^{jx} + e^{-jx}}{2} \\ \sin(x) &= \frac{e^{jx} - e^{-jx}}{2j} \end{aligned}}$$

Örnek

$$y[n+2] - 1.56\, y[n+1] + 0.81\, y[n] = 0$$

ise $y_{zi}[n] = ?$ Bilinenler $y[-1] = 2$

$y[-2] = 1$

Çözüm

$$\lambda^2 - 1.56\lambda + 0.81 = 0$$

$\lambda_1 = \lambda_2 = 0.78 \mp j0.45$ olarak bulunur.

$$\lambda_1 = 0.9\, e^{j\pi/6}$$

$$y[n] = c_1(\lambda_1)^n + c_2(\lambda_2)^n = A(0,9)^n \cos\left(\frac{\pi}{6}n + \theta\right)$$

$$y[-1] = 2 \Rightarrow A(0,9)^{-1} \cdot \cos\left(-\frac{\pi}{6} + \theta\right)$$

$$y[-2] = 1 \Rightarrow A(0.9)^{-2} \cdot \cos\left(-\frac{\pi}{3} + \theta\right)$$

$$A.\cos\left(\frac{\pi}{6}\right).\cos(\theta) + A.\sin\left(\frac{\pi}{6}\right).\sin(\theta) = 1.8$$

$$A.\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos(\theta) + A.\sin\left(\frac{\pi}{3}\right).\sin(\theta) = 0.81$$

$$A.0.866\cos(\theta) + A.0.5\sin(\theta) = 1.8$$

$$A.0.5\cos(\theta) + A.0.866\sin(\theta) = 0.81$$

$A.\cos(\theta) = 2.3077$ $\quad$ $A\sin(\theta) = -0.397$

$\theta = -0.174$ rad $\quad$ $A = 2.3416$

Yani $\boxed{y_{zi}[n] = 2.3416\,(0.9)^n \cdot \cos\left(\frac{\pi . n}{6} - 0.174\right) \quad (n \geq 0)}$

ÖRN

$$y[n] + y[n-2] = 0 \qquad y_{zi}[n] = ?$$

$$y(-1) = 0$$
$$y(-2) = 1$$

ÇÖZÜM

$$\lambda^2 + 1 = 0 \qquad \lambda_1 = j \quad \lambda_2 = -j$$

$$\lambda_1 = 1 . e^{j\frac{\pi}{2}}$$

$$y[-1] = 0 \Rightarrow c_1(\lambda_1)^{-1} + c_2(\lambda_2)^{-1}$$

$$y[-2] = 1 \qquad c_1(\lambda_1)^{-2} + c_2(\lambda_2)^{-2}$$

$$c_1 = -\frac{1}{2} \qquad c_2 = -\frac{1}{2}$$

$$c_1 = \frac{1}{2} e^{j\pi} \qquad \lambda_1 = 1 . e^{j\pi/2}$$

$$y_{zi}[n] = \underbrace{2|c|}_{A}\,(|r|)^n \cos(\phi n + \theta)$$

$$y_{zi}[n] = 2.\frac{1}{2}(1)^n \cos\left(\frac{\pi}{2}n+\pi\right)$$

$$\boxed{y_{zi}[n] = \cos\left(\frac{\pi}{2}n+\pi\right) \quad n \geq 0}$$

NoT

Bu sıfır giriş cevabı çözümüne homojen çözüm olarak da adlandırabiliriz. Yani girişin (kaynağın) sıfır olduğu durumdaki çözümdür.

Özel çözüm :- Kaynağın (Girişin) türüne göre olan çözümdür.

Giriş işareti		Özel Çözüm
B (sabit)	$\rightarrow$	A (sabit)
$B.\alpha^n$	$\rightarrow$	$A.\alpha^n$
$B.n^k$	$\rightarrow$	$c_0 n^k + c_1 n^{k-1} + \dots + c_n$
$\left\{\begin{matrix} C.\sin(\Omega n) \\ C.\cos(\Omega . n) \end{matrix}\right\}$	$\rightarrow$	$A.\sin(\Omega . n) + B.\cos(\Omega . n)$

ÖRNEK

$$y[n] - \frac{5}{6} \cdot y[n-1] + \frac{1}{6} y[n-2] = x[n]$$

sisteminde özel çözümünü bulunuz?

$$x[n] = 2^n \quad (n \geq 0)$$

CEVAP

$$y_{özel}[n] = A.2^n$$

$$A.2^n - \frac{5}{6} . A.2^{n-1} + \frac{1}{6} A.2^{n-2} = x[n]$$

$$2^n . \left(A - \frac{5}{6.2} . A + \frac{1}{6.2^2} . A \right) = 2^n$$

$$A - \frac{5}{12} . A + \frac{1}{24} . A = 1 \quad \Rightarrow A = 8/5$$

$$y_{özel}[n] = \frac{8}{5} . 2^n$$

Tam çözüm durumu

Homojen çözüm + özel çözüm

ÖRNEK

$$y[n] - \frac{3}{4} y[n-1] + \frac{1}{8} y[n-2] = 2.\sin\left(\frac{\pi . n}{2}\right)$$

$$y[-1] = 2 \,, \quad y[-2] = 4$$

tam çözümü nedir?

Çözüm

$$\lambda^2 - \frac{3}{4}\lambda + \frac{1}{8} = 0$$

$$\lambda_1 = \frac{1}{2} \qquad \lambda_2 = 1/4$$

$$y_{homojen}[n] = C_1\left(\frac{1}{2}\right)^n + C_2\left(\frac{1}{4}\right)^n$$

$$y_{özel}[n] = A.\sin\left(\frac{\pi.n}{2}\right) + B.\cos\left(\frac{\pi n}{2}\right)$$

$$y_{özel}[n-1] = A.\sin\left(\frac{(n-1)\pi}{2}\right) + B.\cos\left(\frac{(n-1)\pi}{2}\right)$$

$$y_{özel}[n-1] = -A.\cos\left(\frac{\pi.n}{2}\right) + B.\sin\left(\frac{\pi.n}{2}\right)$$

$$y_{özel}[n-2] = A.\sin\left(\frac{(n-2)\pi}{2}\right) + B.\cos\left(\frac{(n-2)\pi}{2}\right)$$

$$= -A.\sin\left(\frac{\pi n}{2}\right) - B.\cos\left(\frac{\pi.n}{2}\right)$$

$$A.\sin\left(\frac{\pi.n}{2}\right) + B.\cos\left(\frac{\pi.n}{2}\right) - \frac{3}{4}\left(-A\cos\left(\frac{\pi n}{2}\right) + B\sin\left(\frac{\pi n}{2}\right)\right)$$

$$+\frac{1}{8}\left(-A.\sin\left(\frac{\pi.n}{2}\right) - B.\cos\left(\frac{\pi.n}{2}\right)\right)$$

$$= 2.\sin\left(\frac{\pi.n}{2}\right)$$

$$A - \frac{3}{4} \cdot B - \frac{1}{8} \cdot A = 2$$

$$B + \frac{3}{4} \cdot A - \frac{1}{8} \cdot B = 0$$

$$A = \frac{112}{85} \quad , \quad B = -\frac{96}{85}$$

$$y_{özel}[n] = \frac{112}{85} \cdot \sin\left(\frac{\pi . n}{2}\right) - \frac{96}{85} \cdot \cos\left(\frac{\pi . n}{2}\right)$$

$$y[n] = c_1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n + c_2\left(\frac{1}{4}\right)^n + \frac{112}{85} \sin\left(\frac{\pi . n}{2}\right)$$

$$- \frac{96}{85} \cdot \cos\left(\frac{\pi . n}{2}\right)$$

$$y[-1] = 2 \Rightarrow 2c_1 + 4c_2 - \frac{112}{85} = 2$$

$$y[-2] = 4 \Rightarrow 4 . c_1 + 16c_2 + \frac{96}{85} = 4$$

$$c_1 = \frac{13}{5} \qquad c_2 = -\frac{8}{17}$$

$$\boxed{y[n] = \frac{13}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^n - \frac{8}{17}\left(\frac{1}{4}\right)^n + \frac{112}{85} \sin\left(\frac{\pi . n}{2}\right) - \frac{96}{85} \cos\left(\frac{\pi . n}{2}\right)}$$

ÖRN

$$y[n] - \frac{5}{6} y[n-1] + \frac{1}{6} y[n-2] = x[n]$$

Nedensel sistem ve $x[n] = 2^n \quad (n \geq 0)$

olduğuna göre $y[n] = ?$

CEVAP

$$\lambda^2 - \frac{5}{6}\lambda + \frac{1}{6} = 0$$

$$\lambda_1 = \frac{1}{2} \qquad \lambda_2 = \frac{1}{3}$$

$$y_{homojen}[n] = c_1 \left(\frac{1}{2}\right)^n + c_2 \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

$$y_{özel}[n] = A.2^n$$

$$A.2^n - \frac{5}{6} A.2^{n-1} + \frac{1}{6}.A.2^{n-2} = x[n]$$

$$2^n \left(A - \frac{5}{6.2}.A + \frac{1}{6.2^2}.A \right) = 2^n$$

$$A - \frac{5}{12}.A + \frac{1}{24}.A = 1$$

$$\boxed{A = \frac{8}{5}}$$

Nedensel sistem olduğundan

$$y[-1] = 0$$

$$y[-2] = 0$$

$n=0 \Rightarrow y[0]=1$

$n=1 \Rightarrow y[1]=2^1+\frac{5}{6}y[0]=\frac{17}{6}$

$$y[n]=c_1\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n+c_2\left(\frac{1}{3}\right)^n+\frac{8}{5}2^n$$

$n=0 \Rightarrow 1=c_1+c_2+\frac{8}{5}$

$n=1 \Rightarrow \frac{17}{6}=c_1\cdot\frac{1}{2}+c_2\cdot\frac{1}{3}+\frac{8}{5}\cdot 2$

$c_1=-1$, $c_2=\frac{2}{5}$

$$\boxed{y[n]=-\left(\frac{1}{2}\right)^n+\frac{2}{5}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^n+\frac{8}{5}\cdot 2^n \quad (n\geq 0)}$$

7

Sıfır Durum Cevabı

Sıfır durum cevabı, bütün başlangıç şartlarının sıfır olduğu durumda (başlangıç enerjisi sıfır) sadece çıkışın oluşturduğu çözümdür veya cevaptır. Sıfır durum cevabının bulunmasında en çok kullanılan yöntem konvolüsyondur. Bu yöntem lineer zamanla değişmeyen, ayrık zamanlı sistemlerde kullanılabilir.

$$\delta[n] \longrightarrow \boxed{LZDAZS} \longrightarrow h(n)$$

(Birim örnek cevabı)

$$\delta[n-k] \longrightarrow \boxed{LZDAZS} \longrightarrow h(n-k)$$

(Zamanla değişmezlik)

$$x(k)\delta(n-k) \longrightarrow \boxed{LZDAZS} \longrightarrow x(k)h(n-k)$$

(Çarpımsallık)

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\delta(n-k) \longrightarrow \boxed{LZDAZS} \longrightarrow \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k)$$

Toplamsallık

$$x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\delta(n-k)$$

$$\boxed{y_{zs}(k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k).\,h(n-k)}$$

(Ayrık zamanda konvolüsyon toplamı)

(Sürekli zamanda konvolüsyon integrali)

Konvolüsyon Toplamının Özellikleri

1) Değişme özelliği

$$x(n) * h(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\, h(n-k)$$

Konvolüsyon sembolü

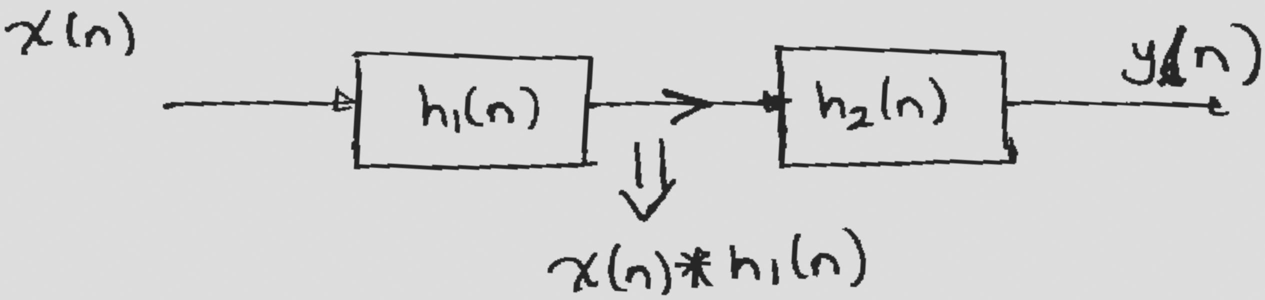
$$h(n) * x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k) \cdot x(n-k) \qquad n-k=m$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(n-m)\, x(m)$$

$$h(n) * x(n) = x(n) * h(n)$$

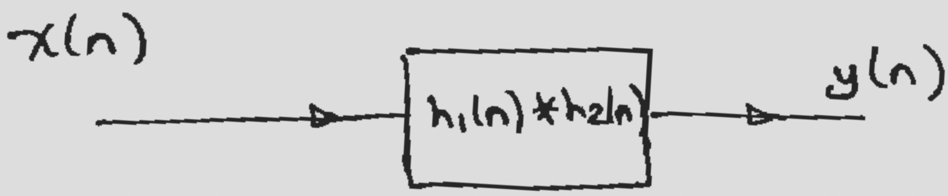
(Aynı sonuç. Dolayısıyla değişme özelliği vardır.)

2) Birleşme özelliği



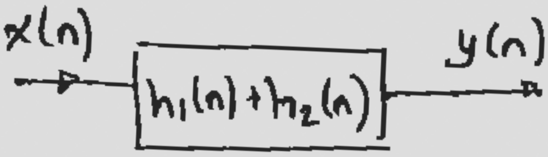
$$y(n) = \big(x(n) * h_1(n)\big) * h_2(n)$$

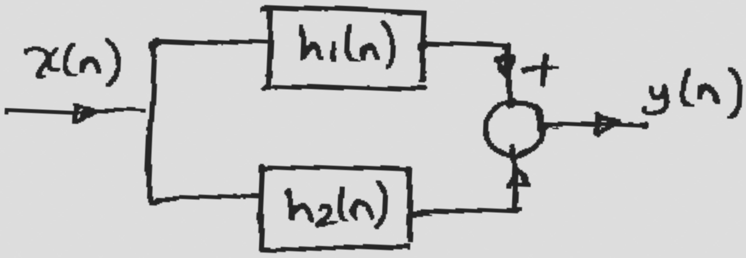
$$y(n) = x(n) * \big(h_1(n) * h_2(n)\big)$$



3) Dağılma özelliği

$$x(n) * (h_1(n) + h_2(n)) = x(n) * h_1(n) + x(n) * h_2(n)$$





4) Birim örnek ile konvolüsyon

$$x(n) * \delta(n) = x(n)$$

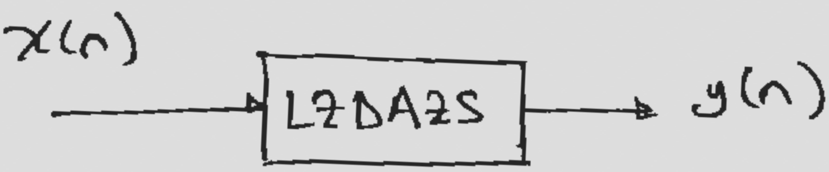
$$x(n) * \delta(n-n_0) = x(n-n_0)$$

Konvolüsyon toplamının bulunması

$$y(n) = y_{zi}(n) + y_{zs}(n)$$

$y_{zi}(n) \rightarrow$ Başlangıç şartlarından gelen çıkış

$y_{zs}(n) \rightarrow$ Sadece girişten gelen çıkış



$$y_{zs}(n) = x(n) * h(n)$$

$h(n) \rightarrow$ birim örnek cevabı

Ayrık zamanlı sistemlerde konvolüsyon toplamı iki farklı yaklaşımla bulunur.

1) Doğrudan yaklaşım 2) Grafiksel yaklaşım

1) Doğrudan yaklaşım

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\, h(n-k)$$

$$\ldots + x(-1)\, h(n+1) + x(0)\, h(n) + x(1)\, h(n-1) + x(2)\, h(n-2) + \ldots$$

Doğrudan yaklaşım yöntemi; sınırsız süreli işaretlerin konvolüsyonunda kullanılır

2) Grafiksel yaklaşım

Grafiksel yaklaşım, sınırlı süreli işaretlerin konvolüsyonunda kullanılır.

ÖRN

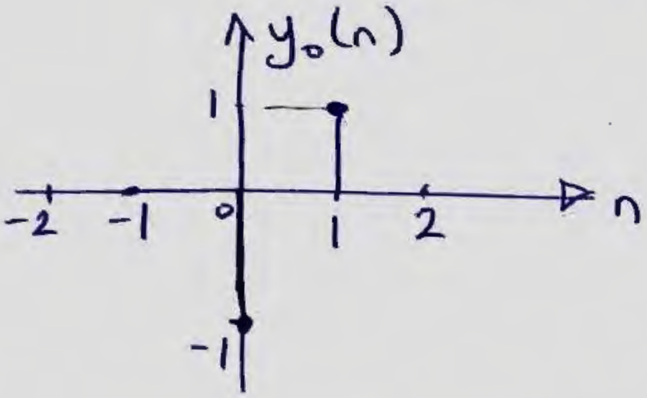
$$x(n) = \{\underset{\substack{\uparrow \\ n=0}}{1}, -1, 2\}, \quad h(n) = \{\underset{\substack{\uparrow \\ n=0}}{-1}, 1\}$$

$y(n) = x(n) * h(n)$ bulunuz?

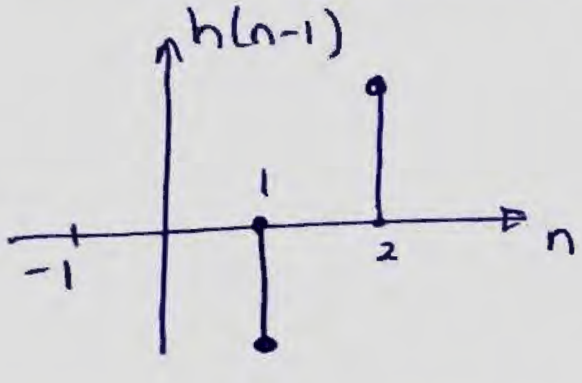
1. Yaklaşım

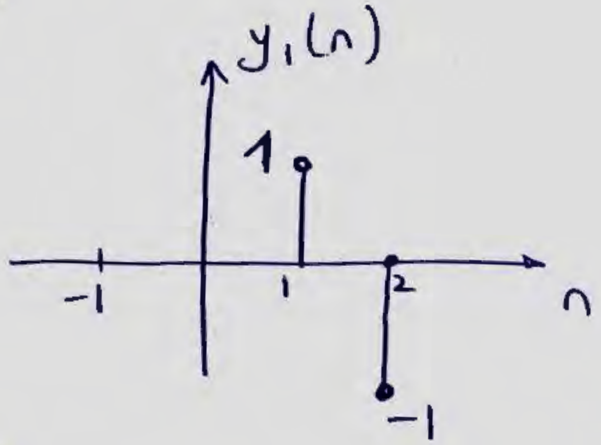
$k=0$ $\qquad y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\, h(n-k)$

$$y_0(n) = x(0).\,h(n) = 1.\,h(n)$$
$$= 1.\,h(n)$$

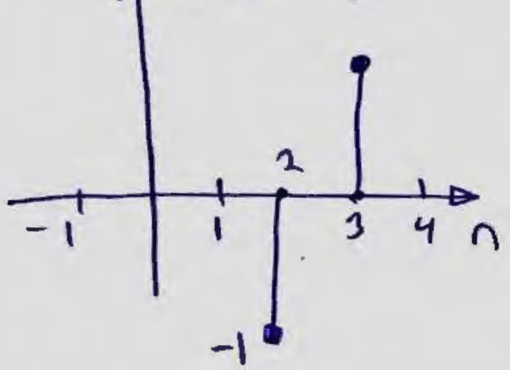


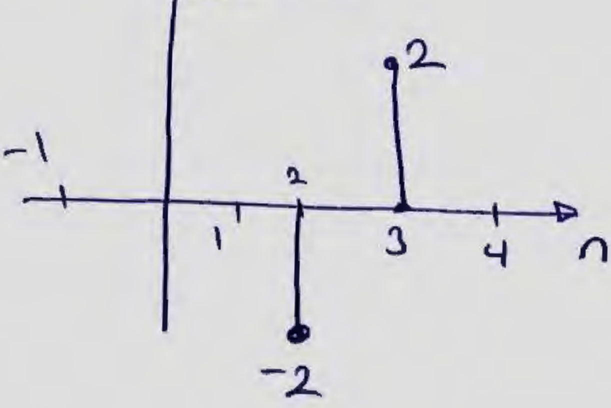
$k=1$ $\qquad y_1(n) = x(1).\,h(n-1)$

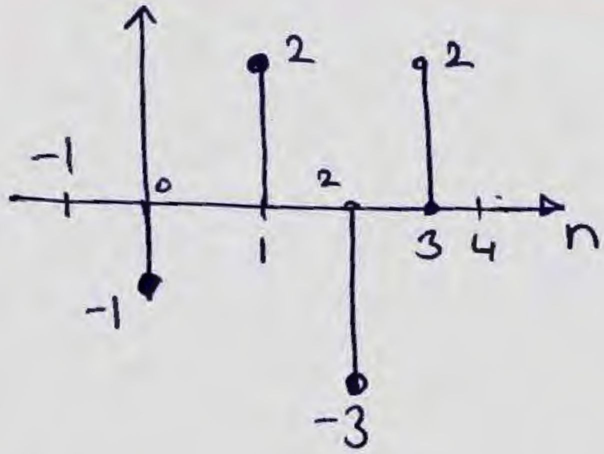




$k=2$ $\qquad y_2(n) = x(2)\, h(n-2)$







$$y(n) = \{-1, \underset{\substack{\uparrow \\ n=0}}{2}, -3, 2\}$$

<u>**NOT**</u> Sınırlı süreli işaretlerin konvolüsyon toplamından elde edilen işaretlerin uzunluğu $N = N_1 + N_2 - 1$ formülü ile bulunabilinir. Burada N, konvolüsyon işlemi sonucunda elde edilen işaretin uzunluğudur. N_1 ve N_2 ise sırasıyla konvolüsyon işlemine tabi tutulan işaretlerin uzunluğudur. Konvolüsyon toplamı sonucunda bulunan işaretin başlangıç ve bitiş indeksleri işleme tabi tutulan indekslerin başlangıç ve bitiş indekslerinden bulunur.

ÖRN/ $\rightarrow$ $x(n) \rightarrow 3$ $\qquad N = N_1 + N_2 - 1 = 4$

$h(n) \rightarrow 2$ $\qquad 3 + 2 - 1 = 4$

$x(n)$ başlangıç indeksi	0		$h(n)$ başl. indexi	0
bitiş	''	2		bitiş index	1

$0 + 0 \rightarrow 0$ 'da başlar

$2 + 1 \rightarrow 3$ biter

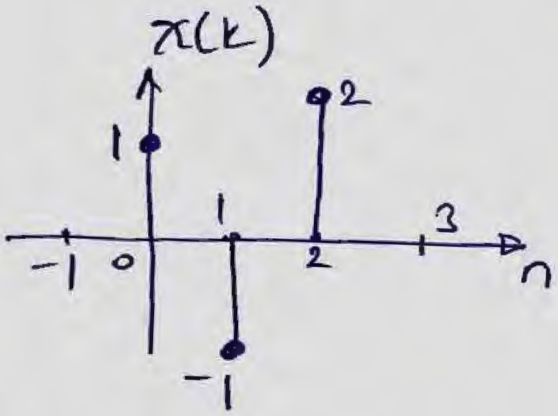
Konvolüsyon sonucunda işaret!!

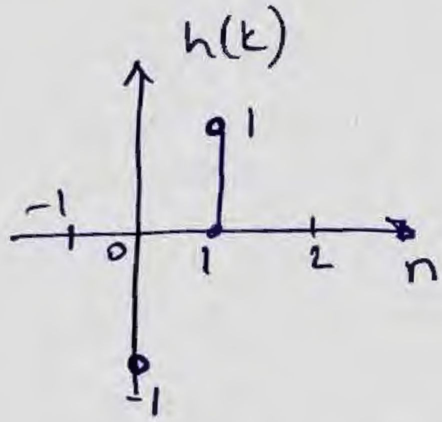
2. Yaklaşım

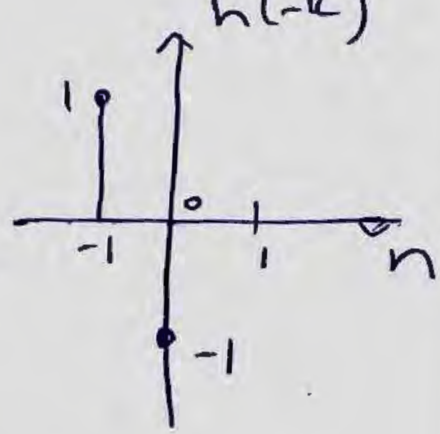
$$y(n)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\,h(n-k) \qquad x(n)=\{\underset{\uparrow n=0}{1},-1,2\}$$

$$h(n)=\{\underset{\uparrow n=0}{-1},1\}$$

$$n=0 \Rightarrow y(n)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\,h(-k)$$

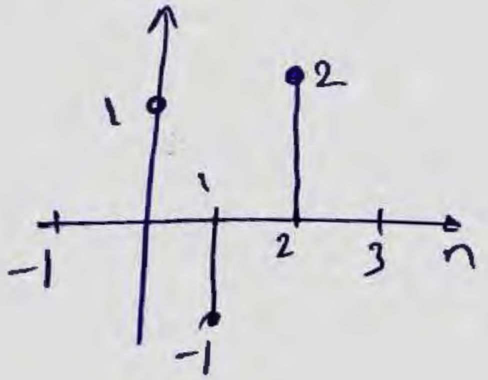


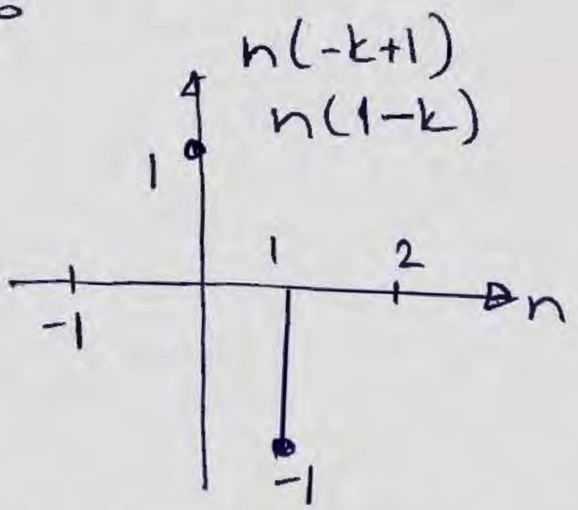




$$y(0)=0.(1)+(1.)(-1)+(-1)(0)+(2)(0)=-1$$

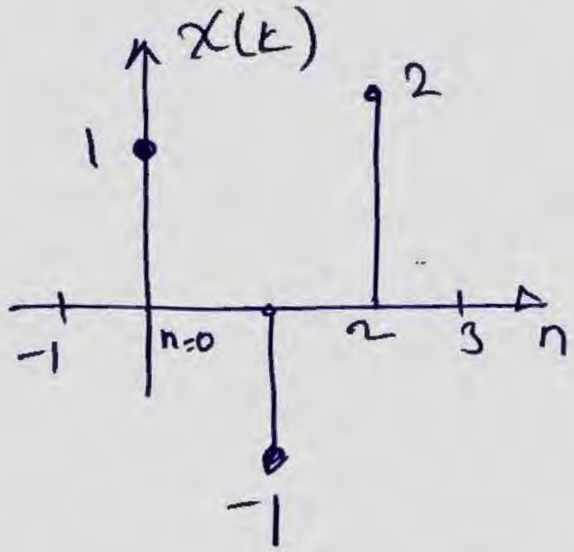
$n=1$ için $\quad y(1)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k).h(1-k)$

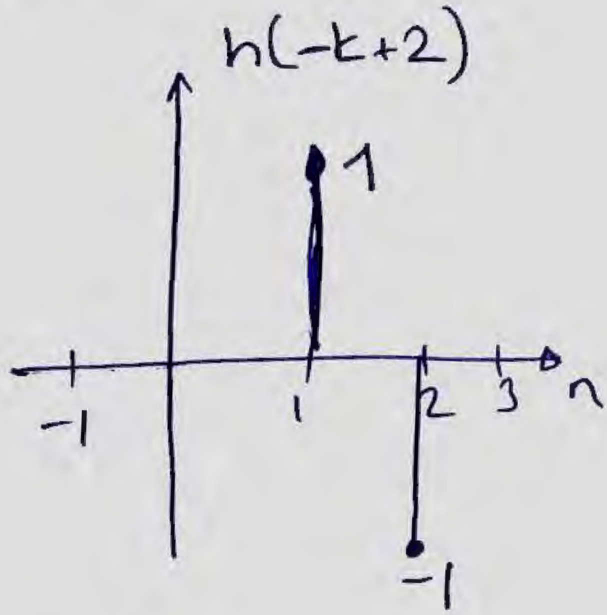




$$y(1)=(1).(1)+(-1)(-1)+(2).(0)=1+1=2$$

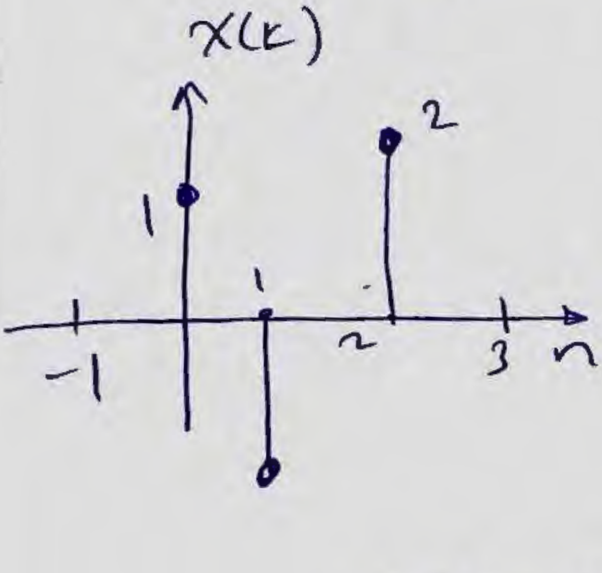
n=2 için $\quad y(2) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k).h(2-k)$

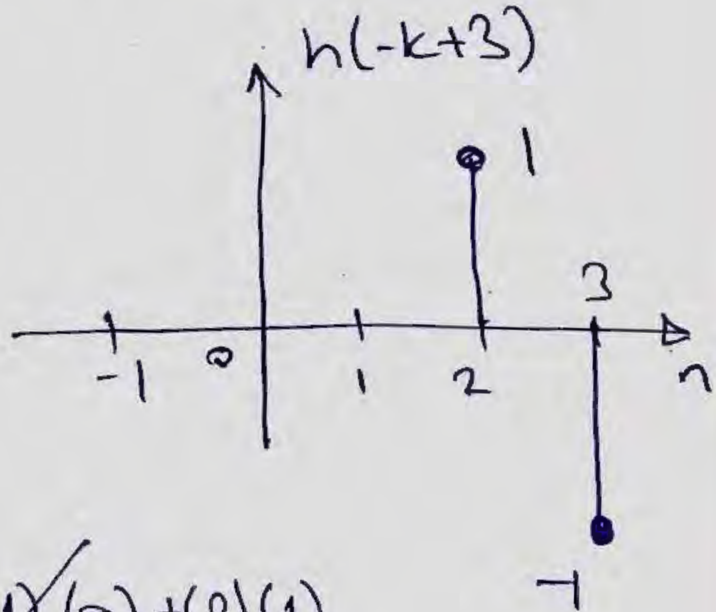




$$y(2) = \cancel{(1).(0)} + (-1).(1) + (2).(-1)$$
$$= -1 + 2 = -3$$

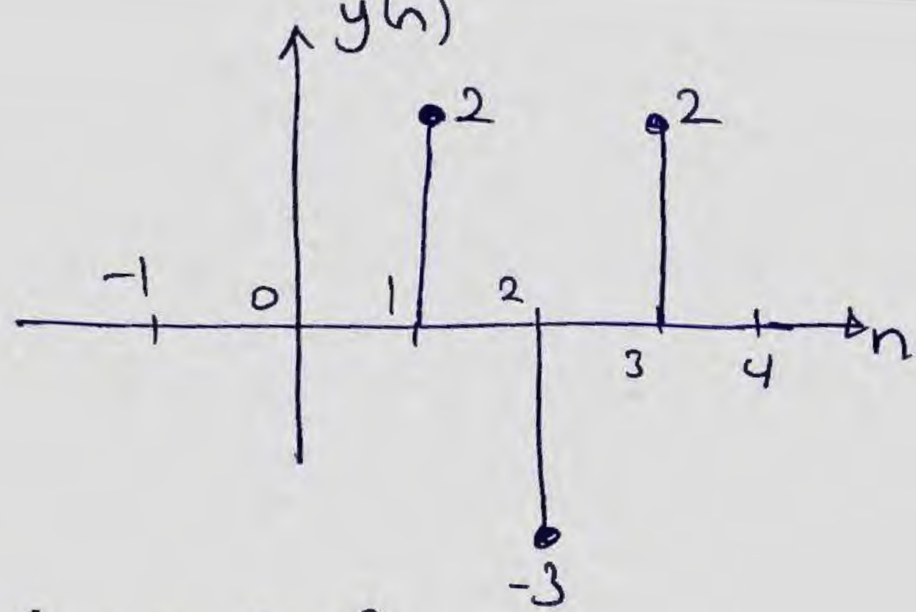
n=3 için $\quad y(3) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k).h(3-k)$





$$y(3) = \cancel{(1)(0)} + \cancel{(-1).(0)} + (2)(1) + \cancel{(0)(-1)}$$

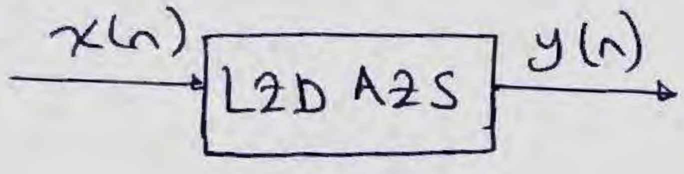
$$y(3) = 2$$



$$y(n)=\{-1,2,-3,2\}$$

$n=0$

ÖRN Aşağıda verilen lineer zamanla değişmeyen (LZD) ayrık zamanlı sistemin (AZS) sıfır durum cevabını bulunuz?



$h(n)=u[n]$

$x(n)=a^n u(n)$

$y_{zs}(n)=\,?$

$$y_{zs}(n)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k) \qquad u(k)=\begin{cases}1 & k\geq 0\\ 0 & k<0\end{cases}$$

$$y_{zs}(n)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} a^k u(k)u(n-k) \qquad u(n-k)=\begin{cases}1 & k\leq n\\ 0 & k>n\end{cases}$$

$$y(n) = \sum_{k=0}^{n} a^k$$

$$y(n) = 1 + a + a^2 + a^3 + \dots + a^n$$

$$a \cdot y(n) = a + a^2 + a^3 + \dots + a^{n+1}$$

$$y(n) - a\,y(n) = 1 - a^{n+1}$$

$$\boxed{y_{zs}(n) = \frac{1 - a^{n+1}}{1-a}}$$

ÖRN $h(n) = u(n-1)$

$x(n) = n\,u(n)$ $\quad y_{zs}(n) = ?$

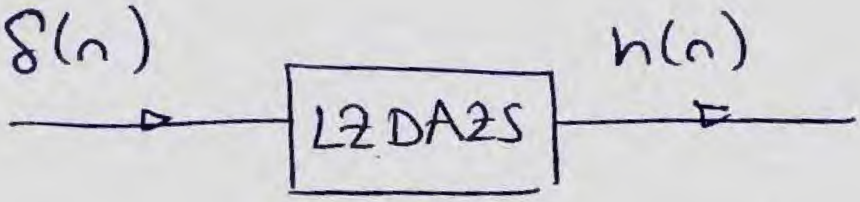
$$y_{zs}(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\,h(n-k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} k\,u(k)\,u(n-k-1)$$

$$u(k) = \begin{cases} 1 & k \geq 0 \\ 0 & k < 0 \end{cases} \qquad u(n-k-1) = \begin{cases} 1 & k \leq n-1 \\ 0 & k > n-1 \end{cases}$$

$$y_{zs} = \sum_{k=0}^{n-1} k \qquad y(n) = 1 + 2 + 3 + \dots + n-1 = \frac{(n-1)n}{2}$$

$$\boxed{y(n) = \frac{(n-1)(n)}{2}}$$

Birim örnek cevabına göre ayrık zamanlı sistemlerin sınıflandırılması



$\delta(n) \rightarrow$ birim impulse sinyali

$h(n) \rightarrow$ birim örnek cevabı

1) Finite impulse Response (FIR)

2) Infinite impulse Response (IIR)

Ayrık zamanlı bir sistem için FIR sistem tanımlaması sonlu birim örnek cevabına sahip sistem olarak yapılır. Yani $n \geq n_0$ $(n_0 \in Z^+)$ için $h(n) = 0$ olacak şekilde bir n değeri mevcut ise bu tür sistemlere FIR sistemler denir. Bu şartı sağlamayan sistemlere ise IIR sistemler adı verilir.

ÖR $y(n) = x(n) + 2x(n-1) - x(n-2)$

lineer, zamanla değişmeyen, nedensel (LZDN) sistem FIR mı?, IIR sistemmidir?

$x(n) \rightarrow \delta(n)$

$y(n) \rightarrow h(n)$

$h(n) = \delta(n) + 2\delta(n-1) - \delta(n-2)$ $h(n) = \{ \underset{\substack{\uparrow \\ n=0}}{1}, 2, -1$

n	$\delta(n)$ $x(n)$	$\delta(n-1)$ $x(n-1)$	$\delta(n-2)$ $x(n-2)$	$h(n)$ $y(n)$
-1	0	0	0	0
0	1	0	0	1
1	0	1	0	2
2	0	0	1	-1
3	0	0	0	0
4	0	0	0	0

$n \geq 3$ $h(n) = 0$

old. FIR sistemdir

ÖRN $y(n) = 4x(n) - 0{,}5\,y(n-1)$ LZDN sistem
(lineer, zamanla değişmeyen nedensel sistem)

FIR, IIR = ?

n	$\delta(n)$ $x(n)$	$h(n-1)$ $y(n-1)$	$h(n)$ $y(n)$
-1	0	0	0
0	1	0	4
1	0	4	-2
2	0	-2	1
3	0	1	-0,5
4	0	-0,5	0,25

$n \geq n_0$

$h(n) \neq 0$ old

IIR sistemdir

NOT

Ayrık zamanlı bir sistemin herhangi bir andaki çıkışı daha önceki çıkış değer veya değerlerine bağlı ise sistem IIR sistemdir. Sadece girişin, o anki ve daha önceki değerleri çıkışın hesaplanmasında kullanılıyorsa sistem FIR'dır.

Birim örnek cevabı ile nedensellik ilişkisi

Lineer zamanla değişmeyen (LZD) bir ayrık zamanlı sistem için (AZS) birim örnek cevabı $h(n)$ olmak üzere; $n<0$ $h(n)=0$ ise sistem nedenseldir.

Birim örnek cevabı ile kararlılık ilişkisi;

LZDAZS için $h(n)$ birim örnek cevabı olmak üzere aşağıdaki şartları sağlıyorsa sistem sınırlı çıkış (BIBO) kararlılığa sahiptir denir.

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| < 0$$ Bu şartı sağlaması için

$$\lim_{n \to \infty} h(n) = 0$$ olmalıdır.

Bu şart gerek şarttır ancak yeter şart değildir.

KAYNAKLAR

1- Prof. Dr. Arif GÜLTEN Ders Notları

2- Digital Signal Processing 1st Edition by Alan V. Oppenheim, Ronald W. Schafer

3- Sayısal Sinyal İşleme: İlkeler, Algoritmalar ve Uygulamalar, John G. Proakis.

4- Doç. Dr. Turgay KAYA Ders Notları

5- Dr. Öğr. Üyesi Barış KARAKAYA Ders Notları