

# MUKAVEMET

## 5.Burulma

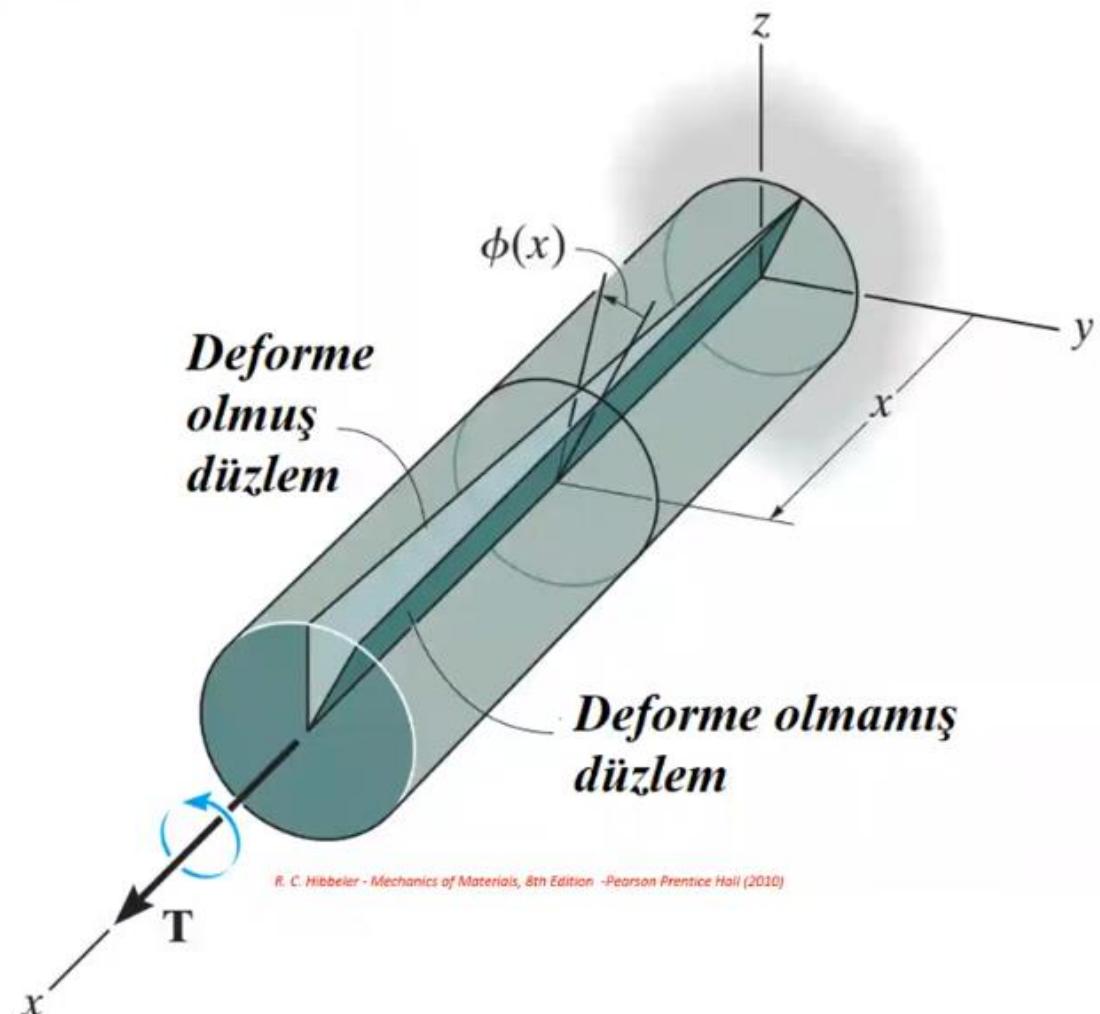


## 5.1 Dairesel Kesitli Şaftların Burulma Deformasyonu

### Burulma

#### Dairesel Kesitli Şaftların Burulma Deformasyonu

- Şaft bir ucundan sabitlenip diğer ucundan bir tork uygulandığında, şekildeki koyu yeşil renkli düzlem gösterildiği gibi çarpık bir forma dönüşecektir.
- Burada, şaftın sabit ucundan  $x$  mesafesinde bulunan enine kesit üzerindeki radyal bir çizgi  $\phi(x)$  açısıyla dönecektir.
- Bu şekilde tanımlanan  $\phi(x)$  açısına **burulma açısı** denir.
- Bu açı  $x$ 'in konumuna bağlıdır ve gösterildiği gibi şaft boyunca değişecektir.

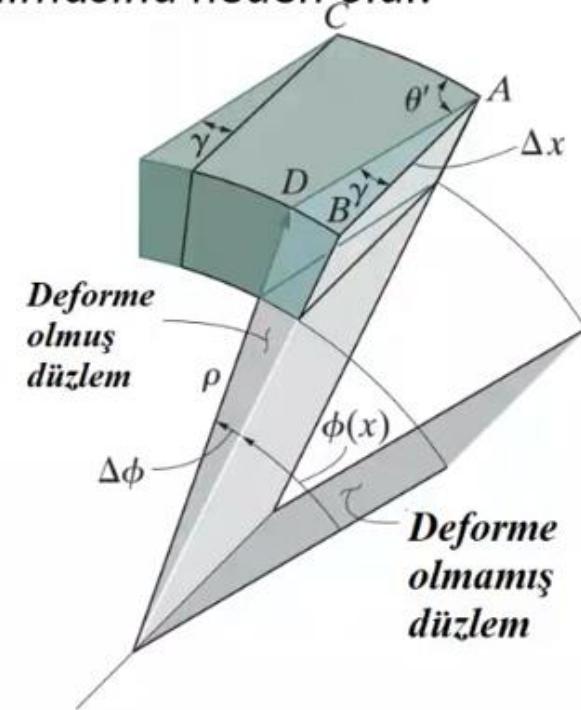
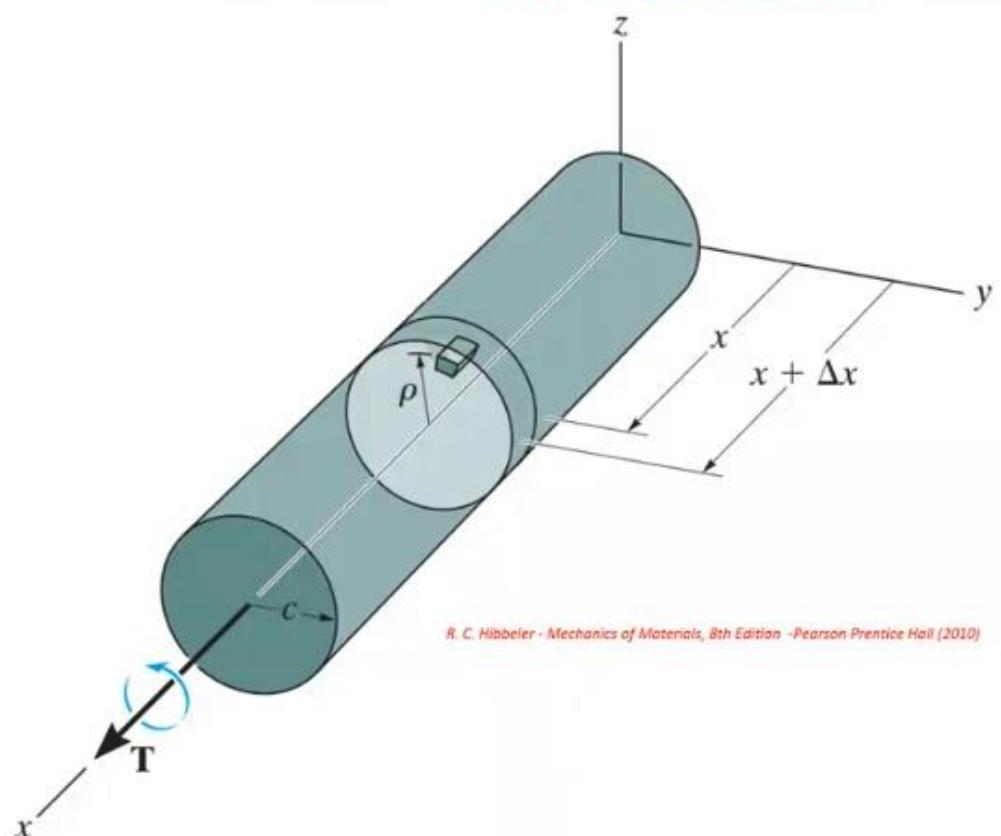


R. C. Hibbeler - Mechanics of Materials, 8th Edition - Pearson Prentice Hall (2010)

## Burulma

### Dairesel Kesitli Şaftların Burulma Deformasyonu

- Bu deformasyonun malzemeyi nasıl zorladığını anlamak için şaftın ekseninden  $\rho$  (rho) radyal mesafesinde bulunan küçük bir elemanı izole edeceğiz.
- Deformasyon nedeniyle, elemanın arka yüzünde  $\phi(x)$  ve ön yüzünde  $\phi(x)+\Delta\phi$  şeklinde bir rotasyon meydana gelecektir.
- Bu rotasyonlardaki  $\Delta\phi$  farkı, elemanın bir **kayma gerilmesine** maruz kalmasına neden olur.



Elemandaki kayma şekil değişimi

## Burulma

### Dairesel Kesitli Şaftların Burulma Deformasyonu

Bu şekil değişimini hesaplamak için;

- Deformasyondan önce AB ve AC kenarları arasındaki açı  $90^\circ$ , deformasyondan sonra da elemanın AD ve AC kenarları arasındaki açı  $\theta'$  olduğundan kayma şekil değişimi;

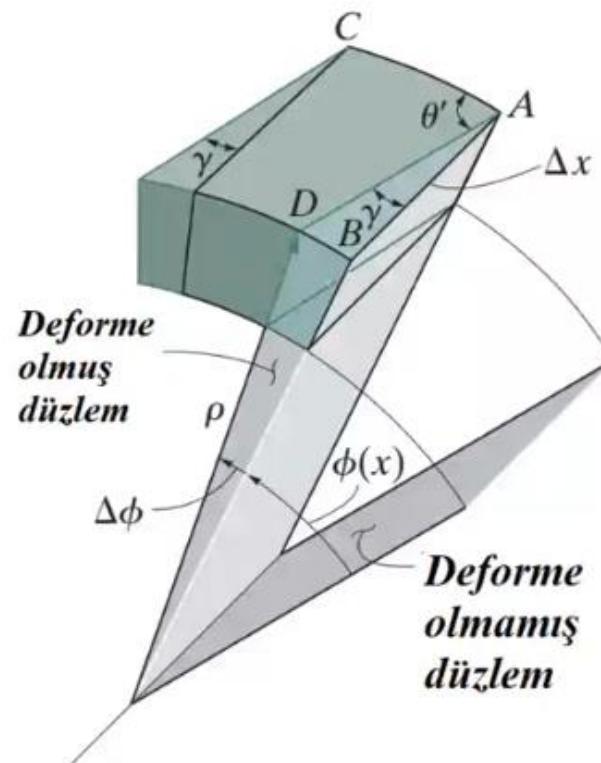
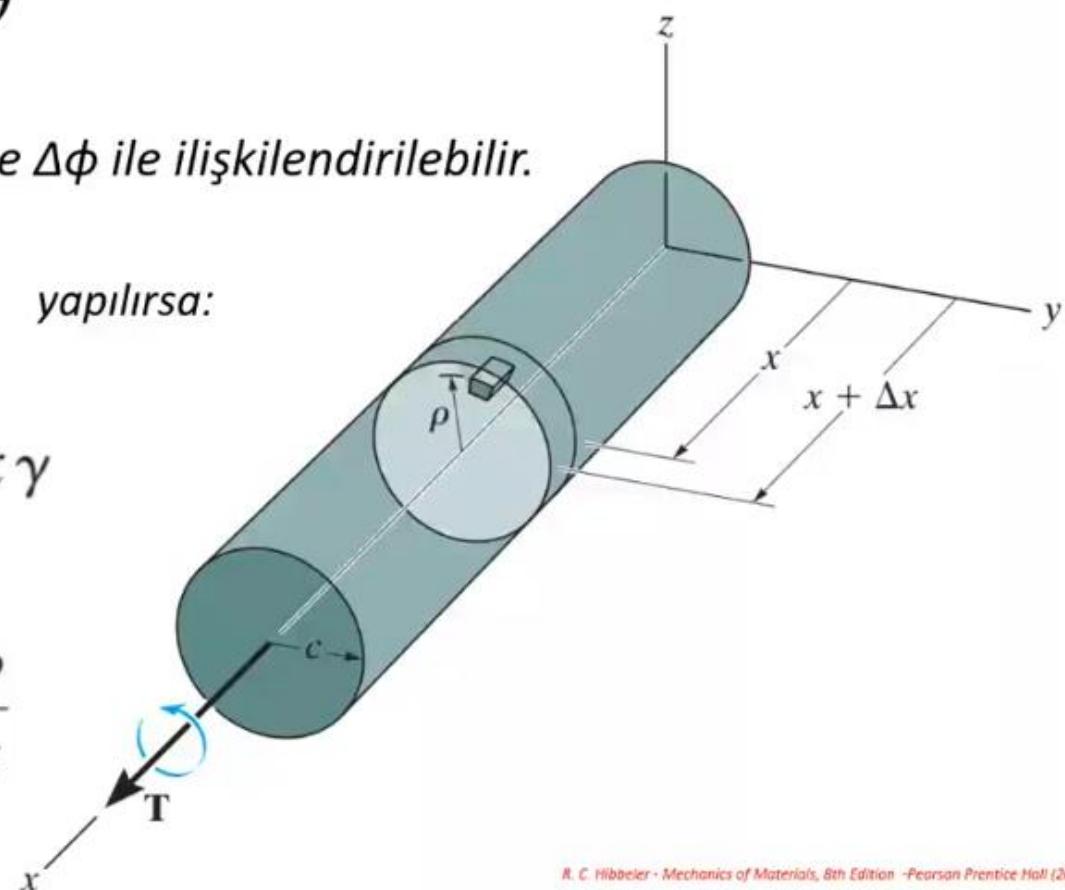
$$\gamma = \frac{\pi}{2} - \theta'$$

$\gamma$  (gama) açısı elemanın  $\Delta x$  boyu ve  $\Delta\phi$  ile ilişkilendirilebilir.

$\Delta x \rightarrow dx$  ve  $\Delta\phi \rightarrow d\phi$  yapılırsa:

$$BD = \rho\Delta\phi = \Delta x \gamma$$

Bu durumda;  $\gamma = \rho \frac{d\phi}{dx}$



Elemandaki kayma şekil değişimi

## Burulma

### Dairesel Kesitli Şaftların Burulma Deformasyonu

Bu şekil değişimini hesaplamak için;

- Deformasyondan önce AB ve AC kenarları arasındaki açı  $90^\circ$ , deformasyondan sonra da elemanın AD ve AC kenarları arasındaki açı  $\theta'$  olduğundan **kayma şekil değişimi**;

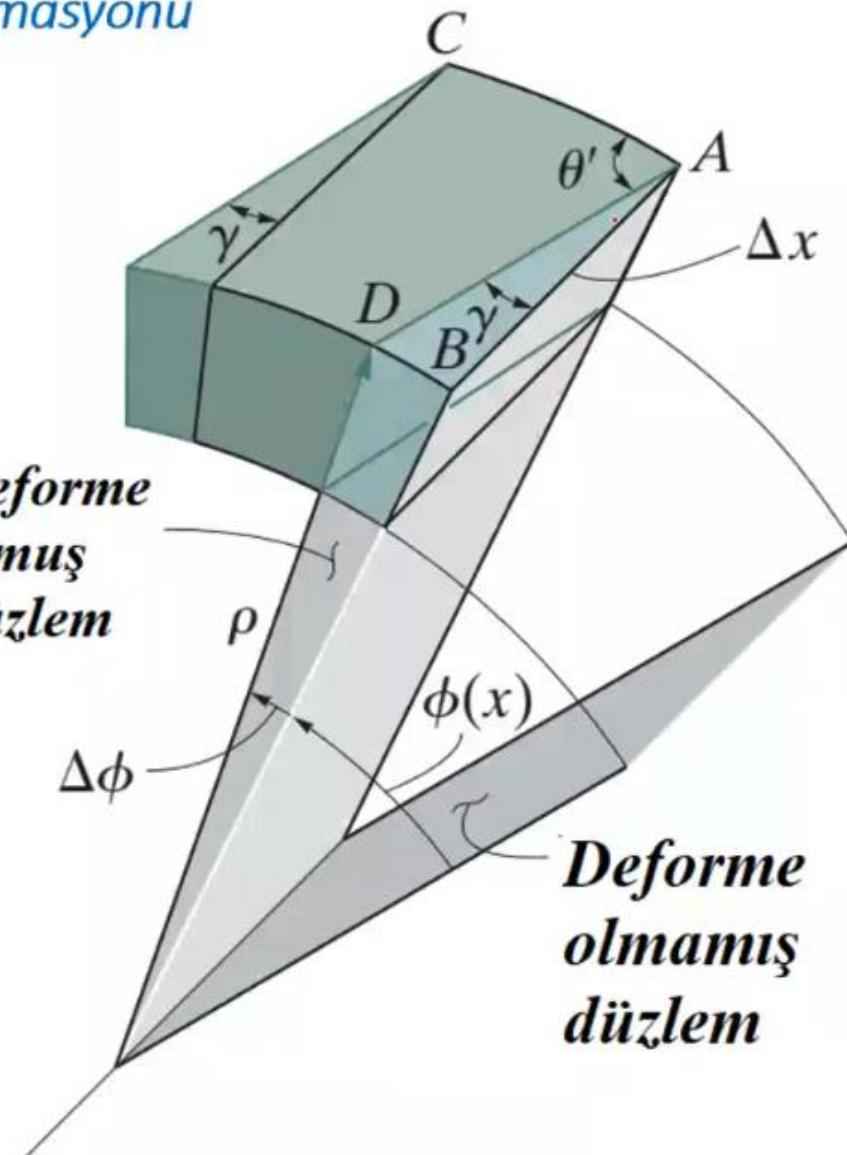
$$\gamma = \frac{\pi}{2} - \theta'$$

$\gamma$  (gama) açısı elemanın  $\Delta x$  boyu ve  $\Delta\phi$  ile ilişkilendirilebilir.

$\Delta x \rightarrow dx$  ve  $\Delta\phi \rightarrow d\phi$  yapılırsa:

$$BD = \rho\Delta\phi = \Delta x \gamma$$

Bu durumda;  $\gamma = \rho \frac{d\phi}{dx}$



## Burulma

### Dairesel Kesitli Şaftların Burulma Deformasyonu

$$\gamma = \rho \frac{d\phi}{dx}$$

- Herhangi bir  $x$  mesafesindeki kesit üzerindeki noktalarda bulunan tüm elemanlar için  $dx$  ve  $d\phi$  aynı olduğundan enine kesit üzerinde bu oran **sabittir**.
- Denklem bu elemanlardan herhangi biri için kayma gerilmesinin büyüklüğünün sadece milin ekseninden olan radyal mesafeye göre değiştiğini belirtir.
- Başka bir deyişle, şaft içindeki kayma gerilmesi, herhangi bir radyal çizgi boyunca, **şaft ekseninden dış sınıra doğru sıfırdan maksimuma doğrusal olarak** değişir.

## Burulma

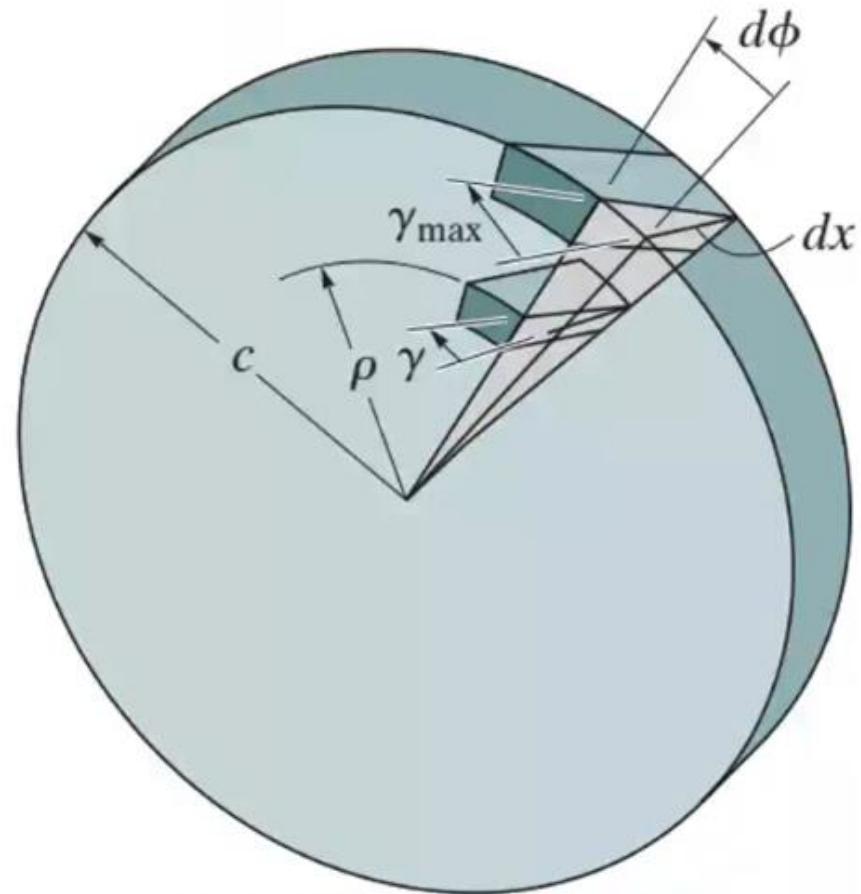
### Dairesel Kesitli Şaftların Burulma Deformasyonu

- Bu durumda aşağıdaki ifade yazılabilir:

$$\frac{d\phi}{dx} : \text{Sabit} \quad \longrightarrow \quad \frac{d\phi}{dx} = \frac{\gamma}{\rho} = \frac{\gamma_{maks}}{c}$$

$$\gamma = \left(\frac{\rho}{c}\right) \gamma_{maks}$$

Burada elde edilen sonuçlar dairesel tüpler için de geçerlidir.



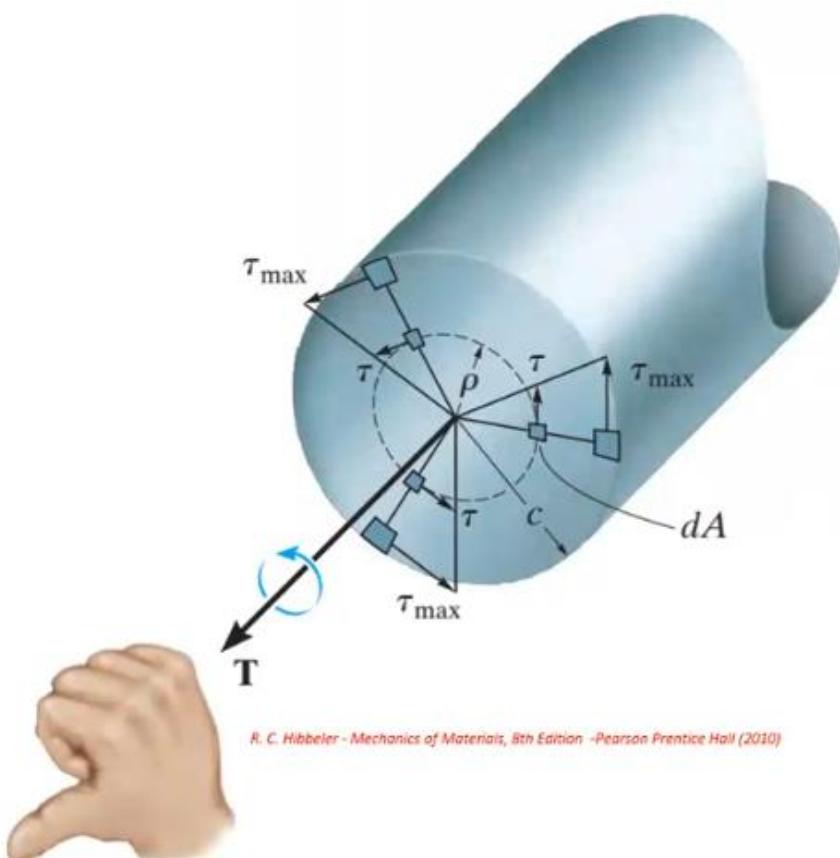
R. C. Hibbeler - Mechanics of Materials, 8th Edition - Pearson Prentice Hall (2010)

Enine kesitteki noktalarda kayma şekil değişimi  $\rho$  ile doğrusal olarak artar.  
Yani  $\gamma = (\rho/c) \gamma_{max}$

## Burulma

### Dairesel Kesitli Şaftların Burulma Deformasyonu

- Dairesel kesitli bir elemana burulma momenti etkidiğinde, şaftın kesitinde iç kuvvet olarak burulma tepkileri oluşur.
- Bu kısımda, **İç burulma momenti tepkileri ile kayma gerilmeleri arasında** bir ilişki geliştireceğiz.
- Bir önceki bölümde gördüğümüz gibi, kesitte oluşan lineer kayma şekil değişimleri, kesitte lineer kayma gerilmeleri oluşturacaktır.
  - Malzeme burulma etkisi altında lineer elastik davranış sergilerse Hooke yasası uygulanabilir:



- $$\tau = G\gamma$$
- $$\gamma = \left(\frac{\rho}{C}\right) \gamma_{\text{maks}} \quad \text{olduğundan}$$
- Sonuç olarak enine kesitteki herhangi bir radyal çizgi boyunca kayma gerilmesinde de doğrusal bir değişim meydana gelir.
  - Bu nedenle,  $\tau$  şaftın uzunlamasına ekseninde sıfırdan dış yüzeyinde  $\tau_{\max}$  maksimum değerine ulaşacaktır.

## Burulma

### Dairesel Kesitli Şaftların Burulma Deformasyonu

- Benzerlikten;

$$\tau = \left(\frac{\rho}{c}\right) \tau_{\max}$$

yazılabilir.

- Bu denklem, elemanın enine kesit üzerindeki kayma gerilmesinin değişiminin  $\rho$  radyal konumuna bağlı olduğunu ifade eder.
- Tüm kesit boyunca gerilme dağılımı tarafından üretilen tork, şaftı dengede tutan iç tork  $T$ 'ye eşit olacaktır.
- Denge şartından dolayı, kesitte oluşan iç burulma momenti, şafta etkiyen dış burulma momentine eşit olmak zorundadır.

$$dF = \tau dA$$

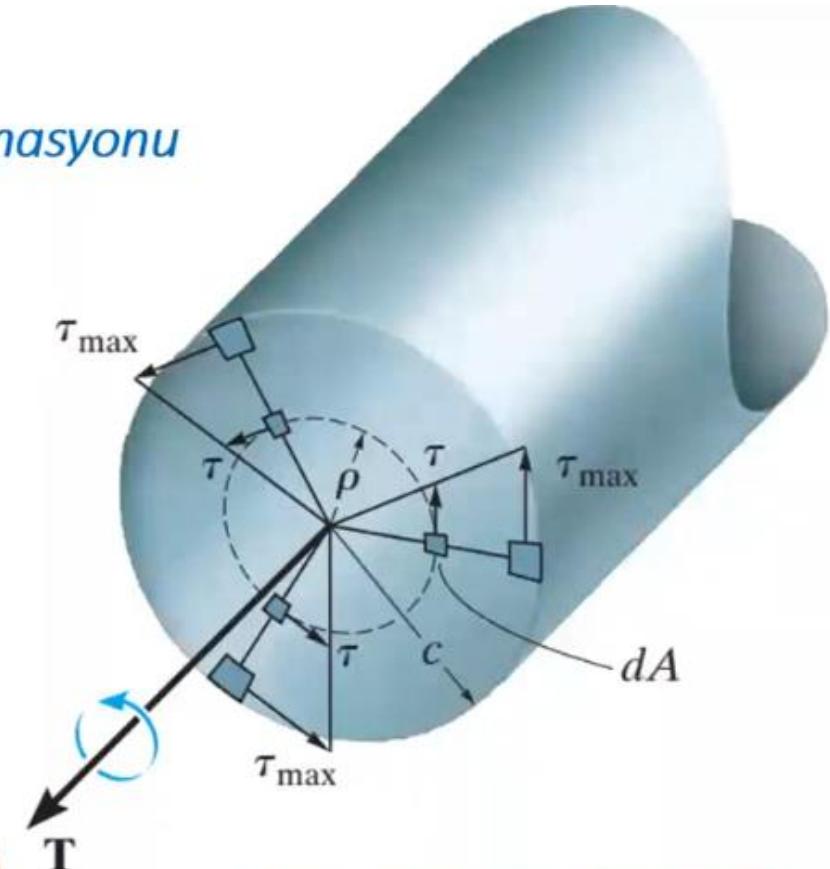
olarak yazılabilir. Bu kuvvetin oluşturduğu tork ise;

$$dT = \rho (\tau dA)$$

olarak ifade edilebilir. Bu ifadeyi tüm kesit boyunca integre edersek;

$$T = \int_A \rho (\tau dA) = \int_A \rho \left( \frac{\rho}{c} \right) \tau_{\max} dA$$

$\tau_{\max}/c$  Sabit old.



R. C. Hibbeler - Mechanics of Materials, 8th Edition - Pearson Prentice Hall (2010)

$$T = \frac{\tau_{\max}}{c} \int_A \rho^2 dA$$

## 5.2 Burulma Formülü

### Burulma Burulma Formülü

$$T = \frac{\tau_{\max}}{c} \int_A \rho^2 dA$$

- Formüldeki integral kesitin sadece geometrisi ile ilişkilidir ve kesitin boyuna eksenin doğrultusundaki **polar atalet momenti** olarak bilinir ve **J** ile gösterilir. Bu durumda, bu denklem aşağıdaki gibi tekrar yazılabilir:

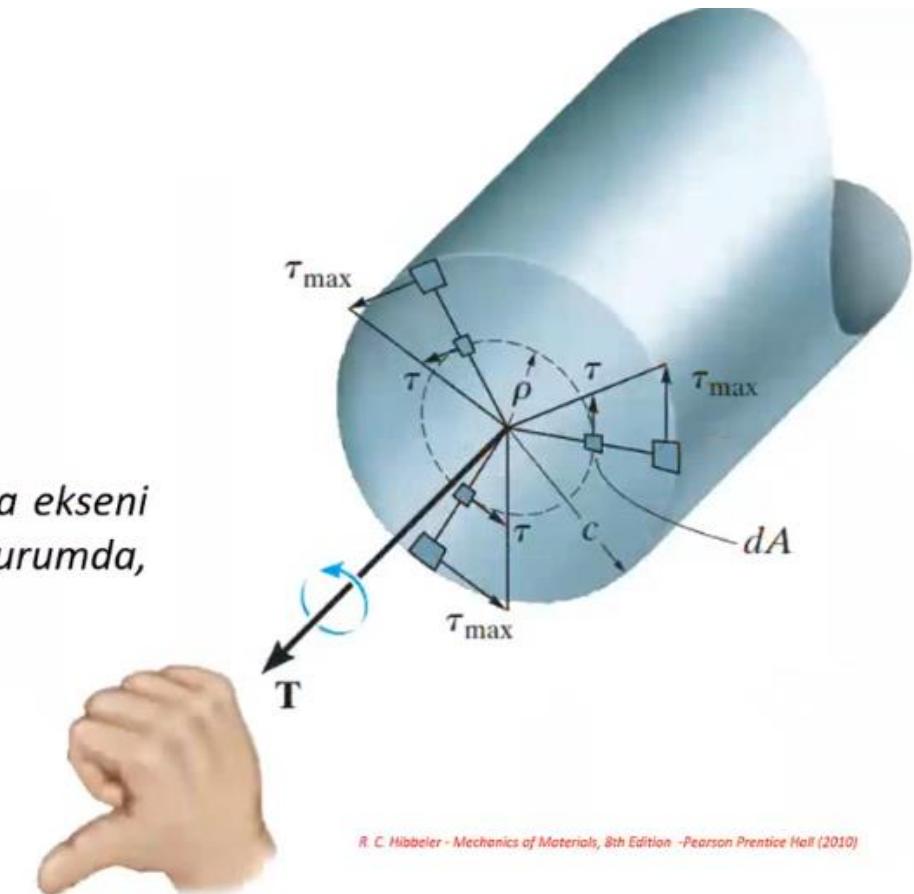
$$\tau_{\max} = \frac{Tc}{J}$$

Kesitte oluşan maksimum kayma gerilmesi

Kesitteki burulma reaksiyon kuvveti

Kesitin polar atalet momenti

Kesitin dış yarıçapı



R. C. Hibbeler - Mechanics of Materials, 8th Edition - Pearson Prentice Hall (2010)

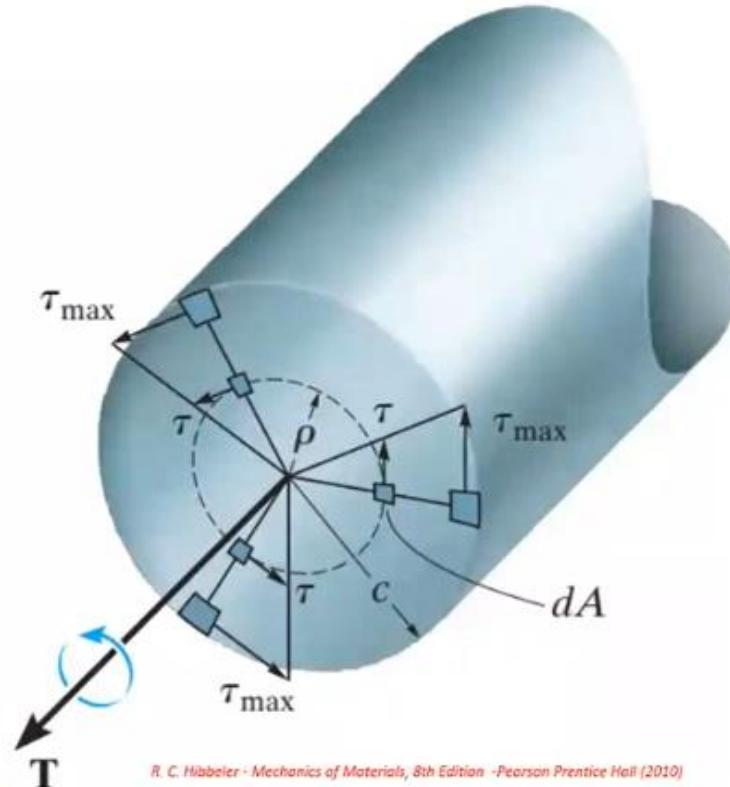
## Burulma

### Burulma Formülü

$$\tau_{maks} = \frac{Tc}{J} \quad \text{ve} \quad \tau = \left(\frac{\rho}{c}\right) \tau_{maks}$$

Denklemlerini kullanarak kesitin aradaki bir noktasında oluşan kayma gerilmeleri bulunabilir:

$$\tau = \frac{T\rho}{J}$$



- Bu formül, **burulma formülü** olarak bilinir.
- Şafit dairesel, malzeme homojen ve lineer elastik davranıyorsa kullanılabilir. (**Burulma formülü Hooke bağıntısı kullanılarak türetildi!**)

*Burulma*  
Polar Atalet Momenti (İçi Dolu Dairesel Kesit)

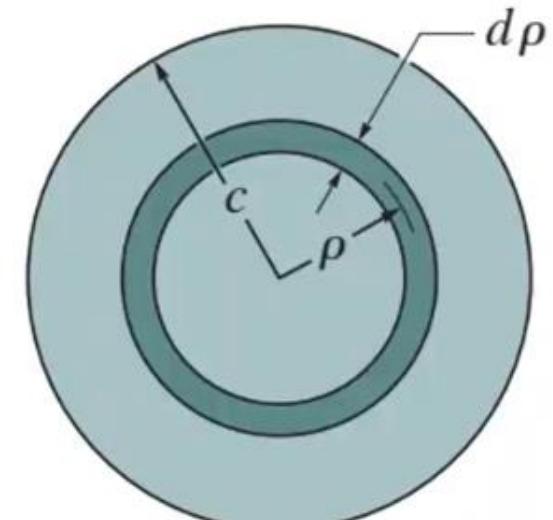
Milin içi dolu dairesel bir kesite sahip bir eleman olması durumunda, **polar atalet momenti  $J$** , kalınlığı  $d\rho$  ve çevresi  $2\pi\rho$  olan bir diferansiyel halka veya halka biçiminde bir alan elemanı kullanılarak belirlenebilir. Bu halka için;

$$dA = 2\pi\rho d\rho$$

yazılabilir. Böylece;

$$J = \int_A \rho^2 dA = \int_0^c \rho^2 (2\pi\rho d\rho) = 2\pi \int_0^c \rho^3 d\rho = 2\pi \left( \frac{1}{4} \right) \rho^4 \Big|_0^c$$

→  $J = \frac{\pi}{2} c^4$

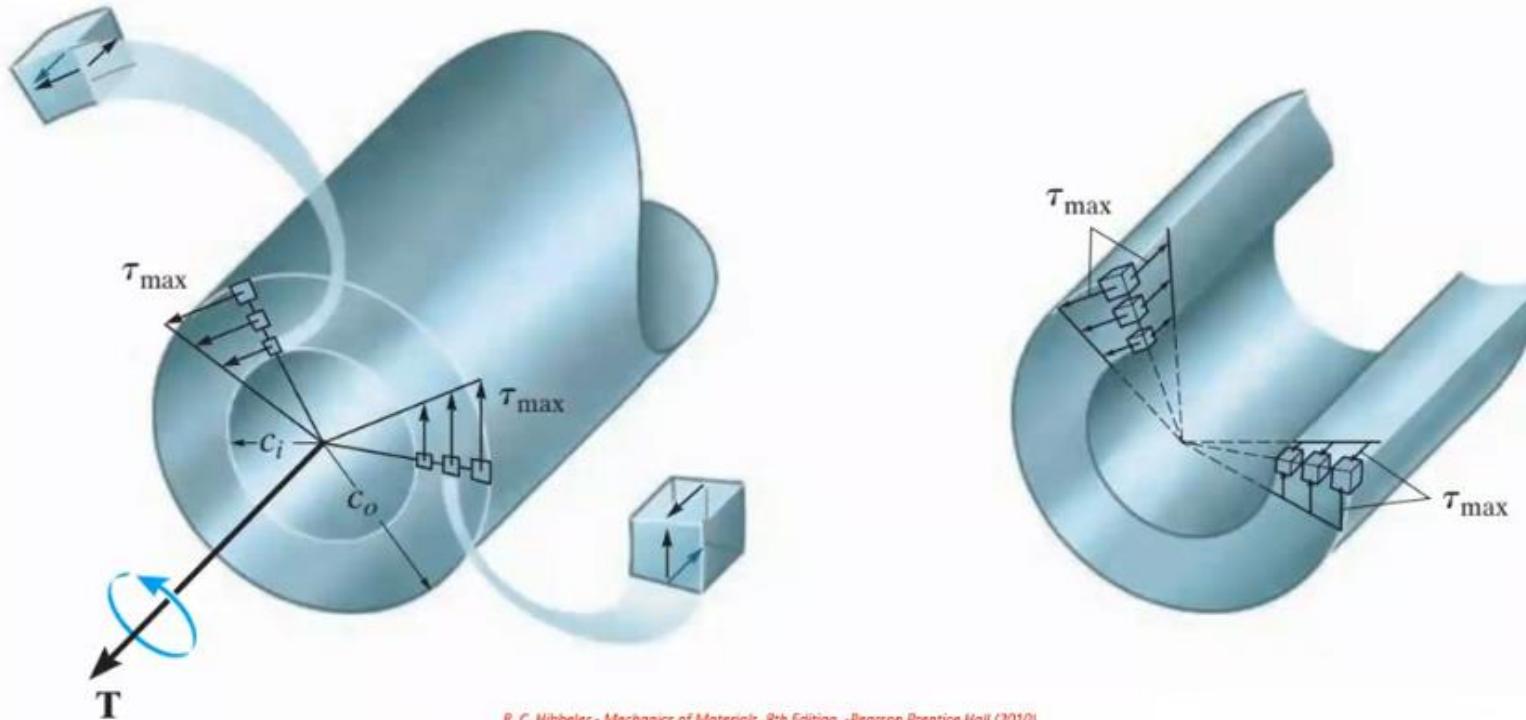


R. C. Hibbeler - Mechanics of Materials, 8th Edition - Pearson Prentice Hall (2010)

*Burulma*  
*Polar Atalet Momenti (İçi Dolu Dairesel Kesit)*

Milin içi belirli bir çapta boşaltılmış dairesel bir kesite sahip bir eleman olması durumunda *polar atalet momenti J*;

$$J = \frac{\pi}{2} (c_o^4 - c_i^4)$$

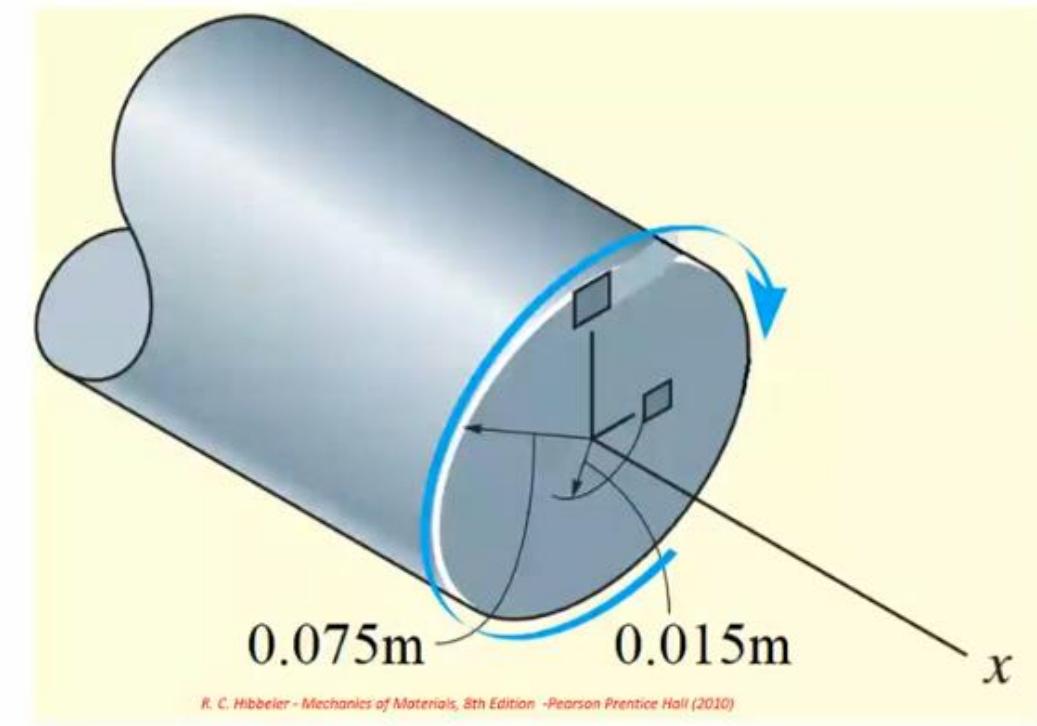
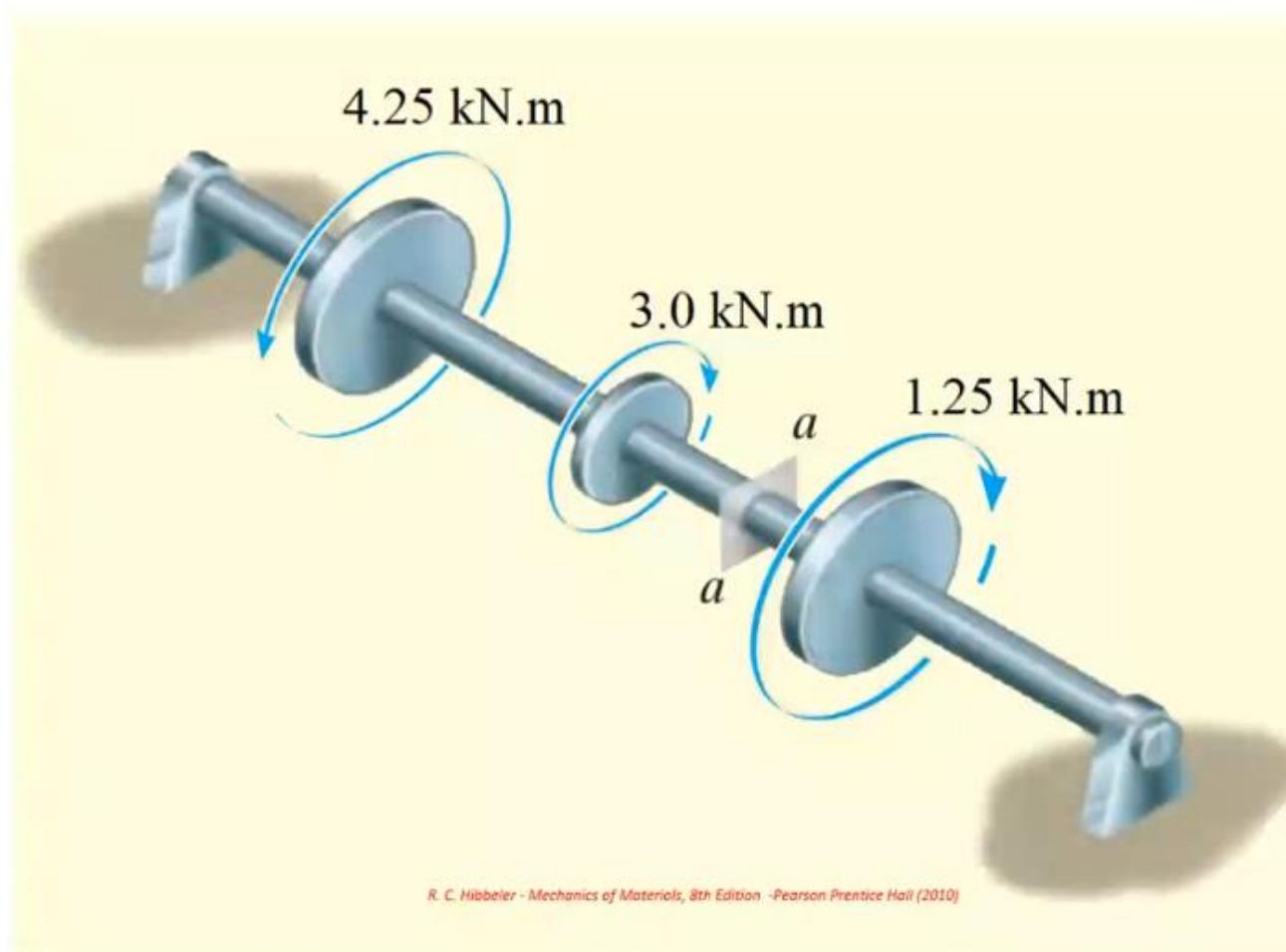


## Örnek 5.2

### Burulma

Örnek;

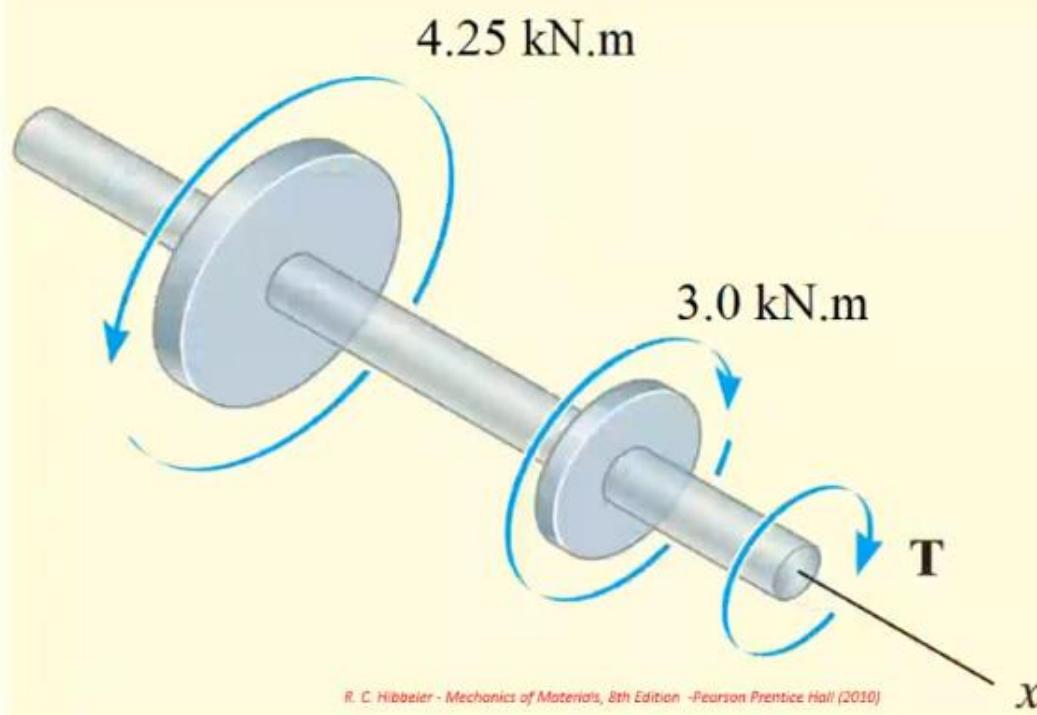
Şekilde gösterilen şaft, iki ucundan mesnetlenmiştir. Şafta üç farklı noktadan burulma momenti etkimektedir.  $a-a$  kesitindeki A ve B noktalarında oluşan kesme gerilmelerini bulunuz.



## Burulma

Çözüm;

İç kuvvetleri bularak işe başlamanızıza, serbest cisim diyagramı dikkate alınarak, a-a kesitindeki burulma momenti hesaplanır:



$$\sum M_x = 0; \rightarrow 4.25kN.m - 3.0kN.m - T = 0 \\ \rightarrow T = 1.25kN.m$$

Kesitin polar atalet momenti  $J$ ;

$$J = \frac{\pi}{2} c^4 \quad c = 0.075m \quad \left. \begin{array}{l} J = \frac{\pi}{2} (0.075m)^4 \\ J = 4.97(10^{-5})m^4 \end{array} \right\}$$

**Çözüm;**

**Kayma gerilmeleri:**

A noktası merkezden  $\rho = 0.075 \text{ m}$  mesafede olduğuna göre,

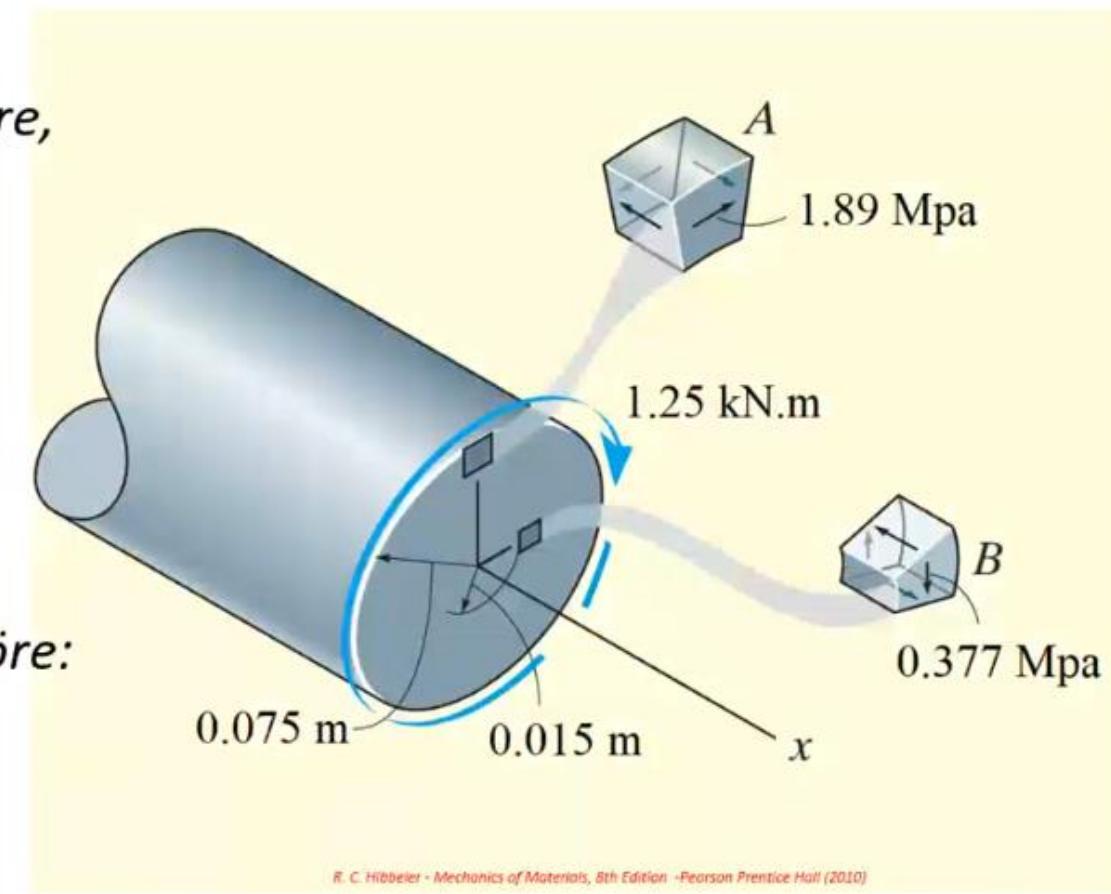
$$\tau_A = \frac{Tc}{J} = \frac{(1.25 \text{ kN.m})(0.075 \text{ m})}{4.97(10^{-5}) \text{ m}^4} = 1886 \text{ kPa}$$

→  $\tau_A = 1886 \text{ kPa}$  yada  $\tau_A = 1.886 \text{ MPa}$

B noktası merkezden  $\rho = 0.015 \text{ m}$  mesafede olduğuna göre:

$$\tau_B = \frac{Tc}{J} = \frac{(1.25 \text{ kN.m})(0.015 \text{ m})}{4.97(10^{-5}) \text{ m}^4} = 377.3 \text{ kPa}$$

→  $\tau_B = 377.3 \text{ kPa}$  yada  $\tau_B = 0.3773 \text{ MPa}$

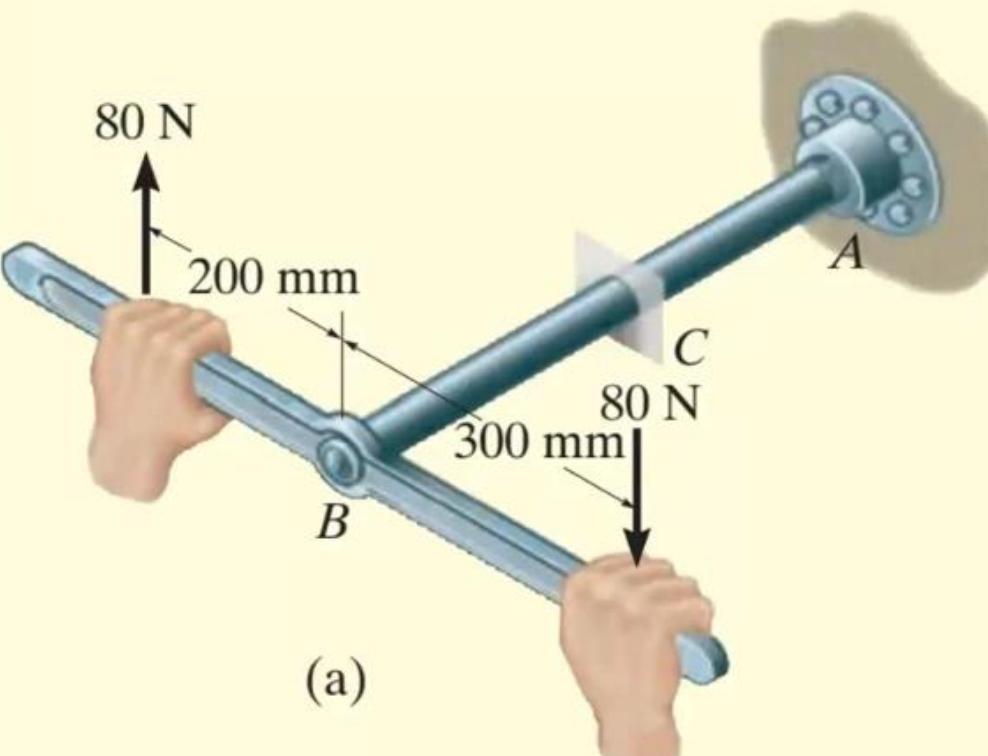


### Örnek 5.3

Örnek;

Burulma

Şekilde gösterilen borunun iç çapı 80 mm, dış çapı ise 100 mm'dir. Boru B ucuna etkiyen 80 N'luk kuvvet çifti ile sıkılıyorsa, borunun iç ve dış yüzlerinde meydana gelen kayma gerilmelerini bulunuz.



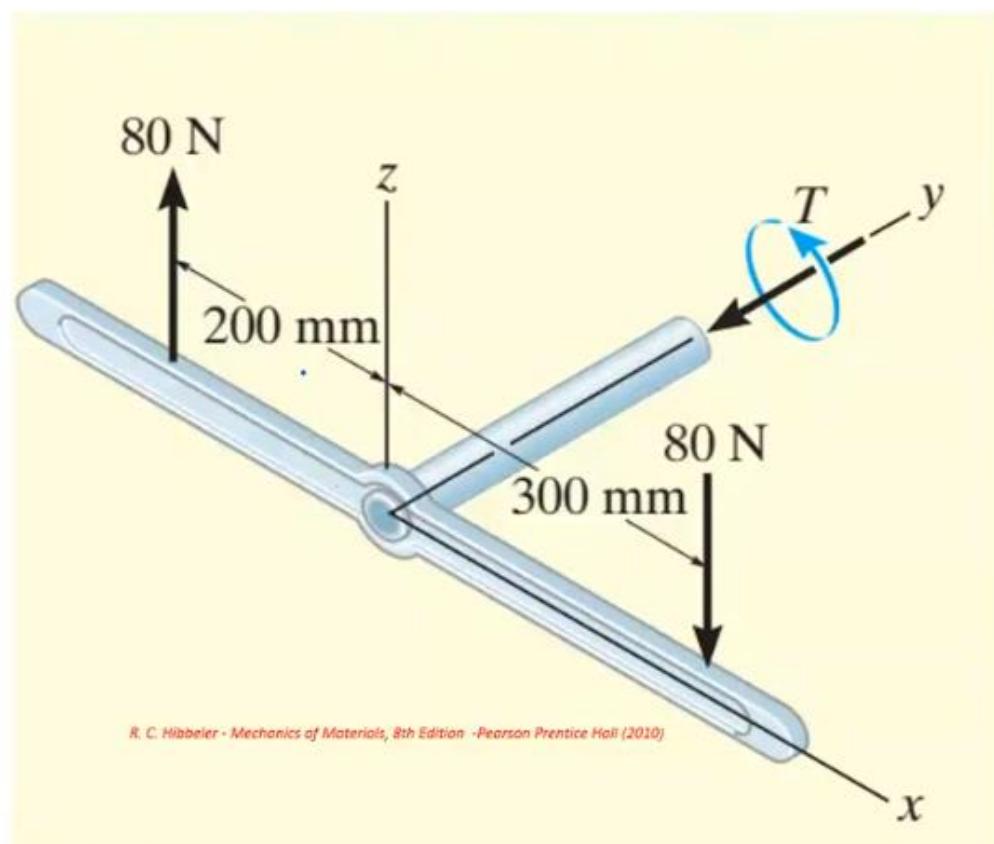
(a)

## Burulma

Çözüm;

Şafta meydana gelen iç tork;

$$\sum M_y = 0; \quad \rightarrow \quad 80N(0.3m) + 80N(0.2m) - T = 0 \quad \rightarrow \quad T = 40N.m$$



Kesitin polar atalet momenti  $J$ ;

$$J = \frac{\pi}{2} [(0.05m)^4 - (0.04m)^4] = 5.796(10^{-6})m^4$$

**Çözüm:**

**Kayma gerilmeleri:**

Kesitin en dış noktasında (D noktasında):

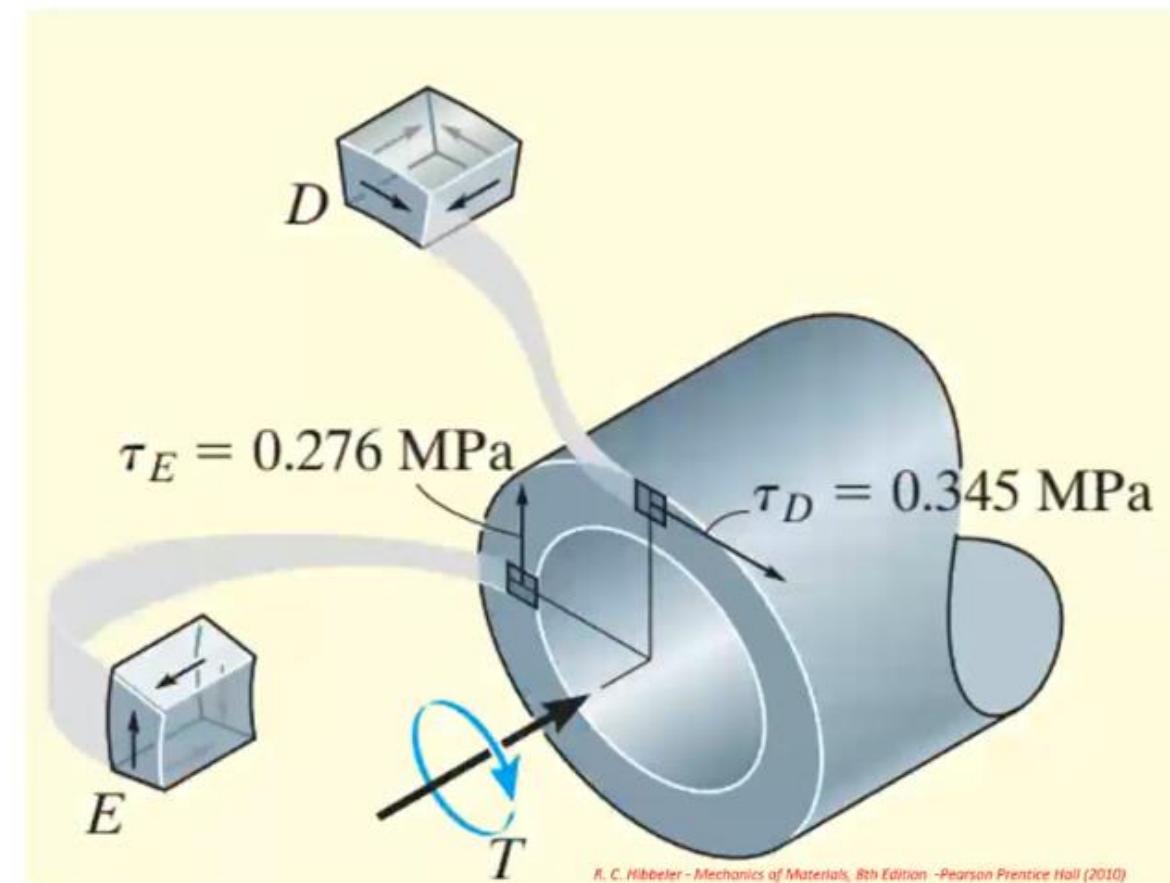
$$\tau_d = \frac{Tc_d}{J} = \frac{(40N.m)(0.05m)}{5.796(10^{-6})m^4} = 0.345 \text{ MPa}$$

→  $\tau_d = 0.345 \text{ MPa}$

Kesitin iç noktasında (E noktasında):

$$\tau_i = \frac{Tc_i}{J} = \frac{(40N.m)(0.04m)}{5.796(10^{-6})m^4} = 0.276 \text{ MPa}$$

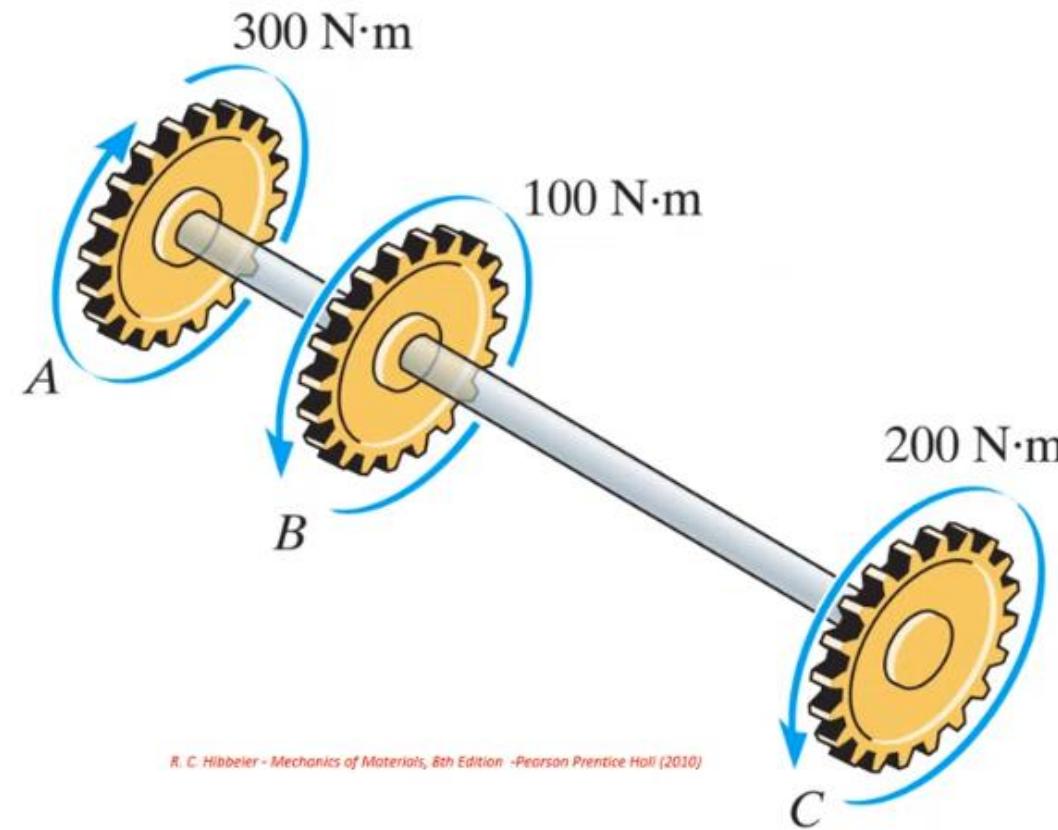
→  $\tau_i = 0.276 \text{ MPa}$



## Örnek 5.5-28 (Problems)

Örnek;

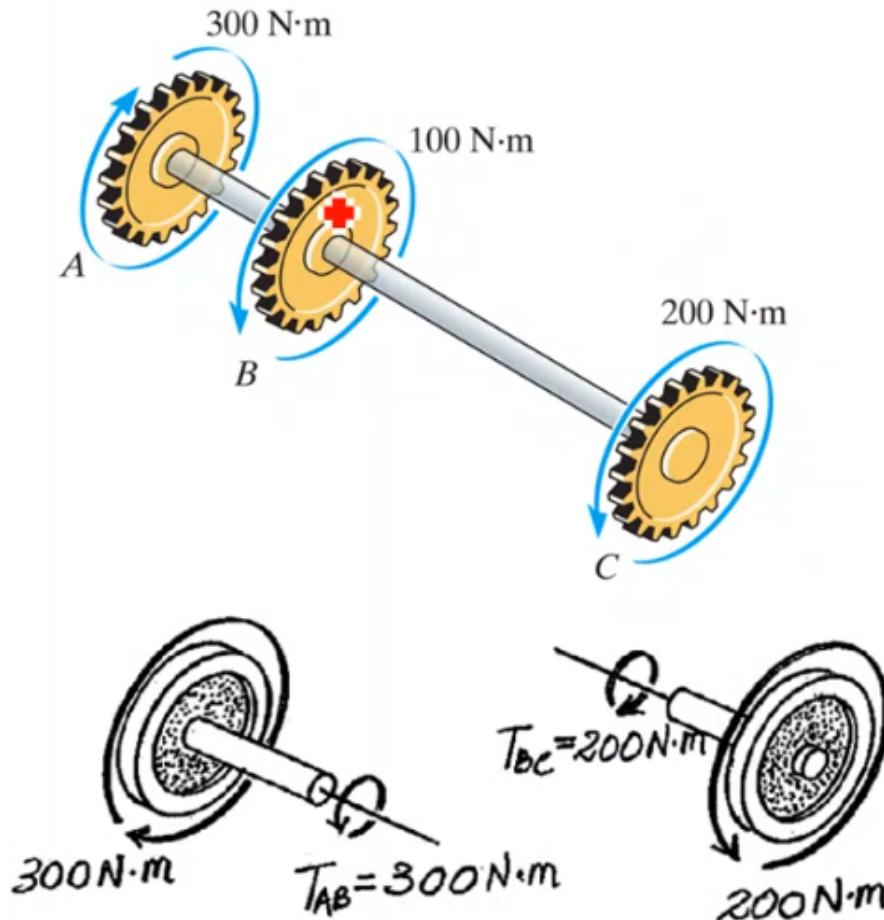
Şekilde gösterilen A-36 çeliğinden imal edilmiş şaft, serbestçe dönmesini sağlayan düz yataklar ile desteklenmiştir. İzin verilen en büyük kayma gerilmesi  $\tau_{m.e} = 60 \text{ MPa}$  olduğuna göre, şaft üzerindeki dişliler gösterilen torklara maruz kaldığında şaft için gerekli olan çapı mm olarak belirleyiniz.



## Burulma

Çözüm;

Şaftın AB ve BC segmentlerinde meydana gelen iç tork serbest cisim diyagramlarında gösterilmiştir.



Burada AB segmenti, iç torku en büyük olduğu için kritiktir.

Milin polar atalet momenti;

$$J = \frac{\pi}{2} \left(\frac{d}{2}\right)^4 = \frac{\pi d^4}{32}$$

$$\tau_{m.e.} = \frac{Tc}{J} ;$$

$$60(10^6) = \frac{300(d/2)}{\pi d^4 / 32}$$



$$d = 0.02942 \text{ m}$$

En yakın onluğa yuvarladığımızda;

$$d = 30 \text{ mm}$$

- Dairesel kesitli şaftlar ve borular genellikle bir makine tarafından üretilen gücü iletmek için kullanılır.
- Bu amaçla kullanıldığında, makine tarafından üretilen güce ve şaftın açısal hızına bağlı olan bir torka maruz kalırlar.
- Güç**, birim zaman başına yapılan **iş** olarak tanımlanır.
- Bu nedenle, anlık bir  $dt$  sırasında uygulanan bir tork  $T$  milin  $d\theta$  kadar döndürülmesine neden olursa, anlık güç;

$$P = \frac{Td\theta}{dt}$$

$$\omega = \frac{d\theta}{dt}$$

$P = T\omega$

SI sisteminde, güç Watt cinsinden ifade edilir.  
(1W=1N.m/s)

Şaftın açısal hızı:  $\omega$  (rad/s)

Güç

Tork

*Burulma*  
*Güç Aktarımı*

- Makineler için genellikle bir şaftın dönme frekansı  $f$  verilir.
- Bu, milin saniyede yaptığı devir veya devir sayısının bir ölçüsüdür ve hertz cinsinden ifade edilir ( $1 \text{ Hz} = 1 \text{ devir/sn}$ ).
- $1 \text{ devir} = 2\pi \text{ radyan}$  olduğundan,  $\omega = 2\pi f$  olur.

Böylece;

$$P = T\omega$$

güç denklemi

$$P = 2\pi f T$$

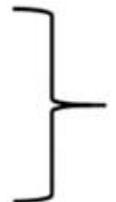
olur.

*Şaft tasarımı:*

Tork ve malzeme için izin verilen kayma gerilmesi  $\tau_{m.e.}$  bilindiğinde, malzeme davranışının lineer elastik olması şartıyla, burulma formülünü kullanarak şaftın kesitinin boyutunu belirleyebiliriz.

$$T = P/2\pi f$$

$$\tau_{m.e.} = \frac{Tc}{J}$$



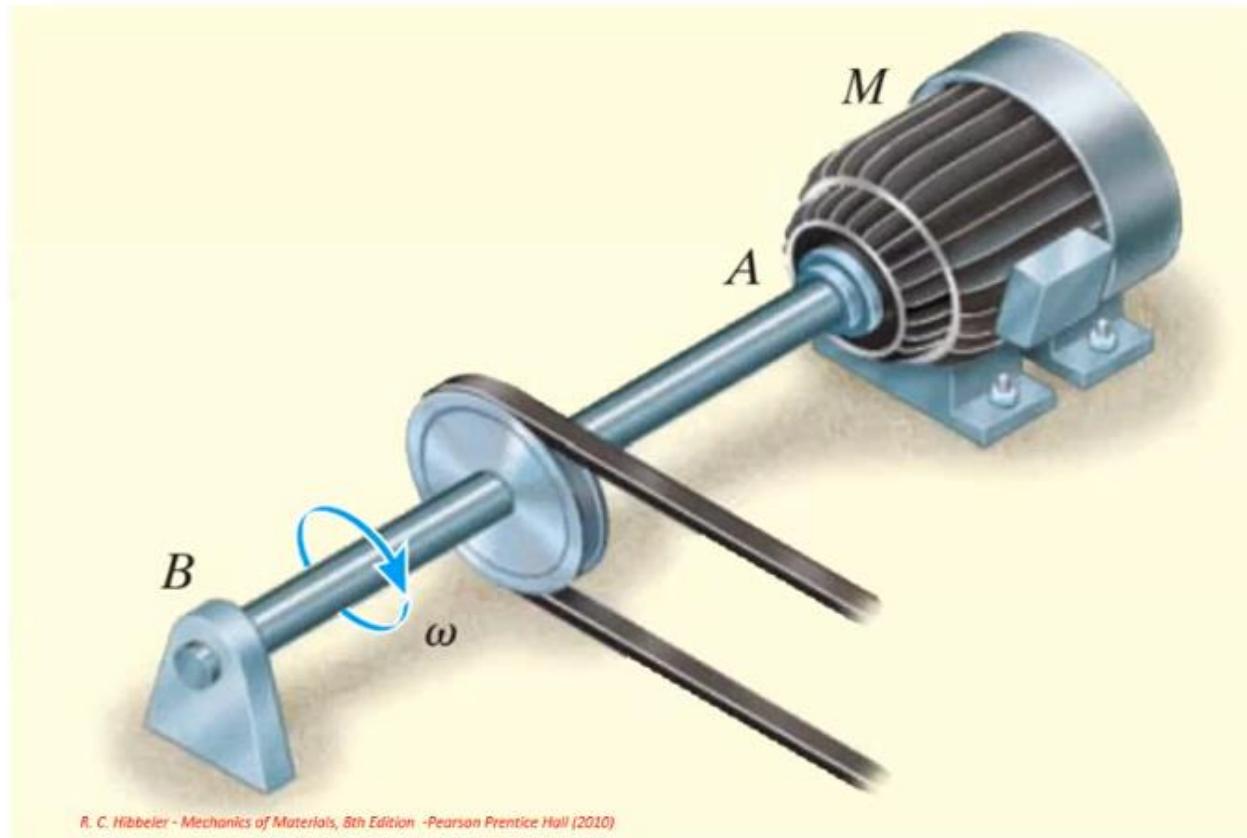
$$\frac{J}{c} = \frac{T}{\tau_{m.e.}}$$

## Örnek 5.4

### Burulma

Örnek;

Şekil gösterilen içi dolu AB çelik şaftı, takıldığı M motorundan  $3750W$  güç aktarımı yapmak için kullanılacaktır. Shaft  $\omega = 175 \text{ rpm}$  hızla dönüyorsa ve çeliğin izin verilen kayma gerilimi  $\tau_{me} = 100 \text{ MPa}$  ise şaftın için gerekli olan çapı en yakın onluğa yuvarlayarak belirleyiniz.



**Çözüm;**

Şafta etki eden tork;

$$P = 3750 \text{ W} = 3750 \text{ N.m/s}$$

$$\omega = \left( \frac{175dev}{dk} \right) \left( \frac{2\pi \text{ rad}}{1dev} \right) \left( \frac{1dk}{60sn} \right) = 18.33 \text{ rad/s}$$

$$P = T\omega$$

$$T = \frac{3750 \text{ N.m/s}}{18.33 \text{ rad/s}}$$

$$T = 204.6 \text{ N.m}$$

$$\frac{J}{c} = \frac{T}{\tau_{m.e.}}$$



$$\frac{\pi c^4}{2 c} = \frac{T}{\tau_{m.e.}}$$

$$c = \left( \frac{2T}{\pi \tau_{m.e.}} \right)^{1/3} = \left( \frac{2(204.6 \text{ N.m})(1000 \text{ mm/m})T}{\pi(100 \text{ N/m}^2)} \right)^{1/3} \rightarrow c = 10.92 \text{ mm}$$

$$d = 2c = 21.84 \text{ mm}$$

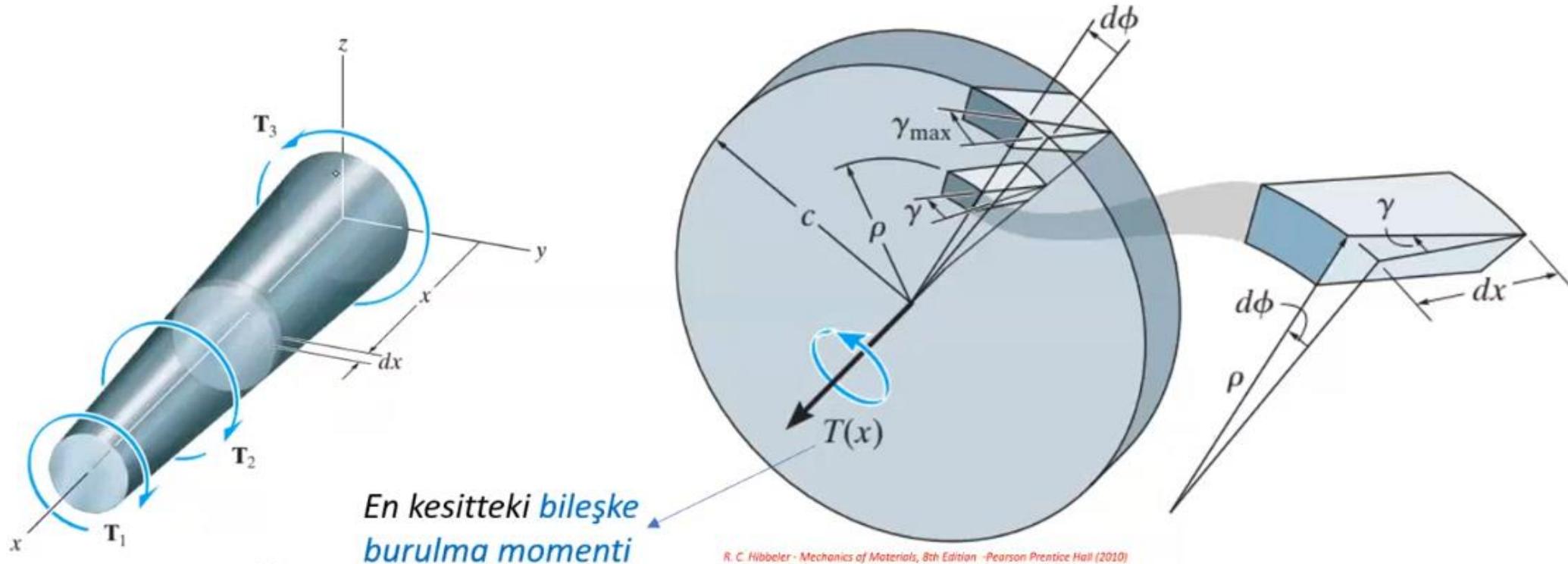
$$d = 22 \text{ mm}$$

### Burulma Burulma Açısı

- *Bazen şaftların dizaynında burulma açısı tasarımı sınırlayan durum olabilir, bu durumda burulma açısının hesabına ihtiyaç vardır.*
- *Ayrıca burulma açısının hesabı, statikçe belirsiz problemlerin çözülebilmesi için de gerekmektedir.*
- *Bu bölümde, şaftın bir ucunun diğer bir ucuna göre yaptığı burulma açısının hesabına ilişkin bir formülü çıkaracağız.*
- *Şaftın en kesitinin dairesel olduğu ve malzemenin lineer elastik davranışlığı kabul edilecektir.*
- *Torkun (burulma momentinin) etkidiği noktalardaki lokal deformasyonlar ise Saint Venant prensibine uygun davranışlığı kabul edilecektir.*
- *Oluşturdukları etki ise genellikle ihmal edilebilir düzeyde olacaktır.*

## Burulma Burulma Açısı

Kesit alanı uzunluğu boyunca değişen bir şafttan kesme yöntemi ile  $x$  uzaklığındaki bir noktadan  $dx$  kalınlığında bir parça çıkaralım.

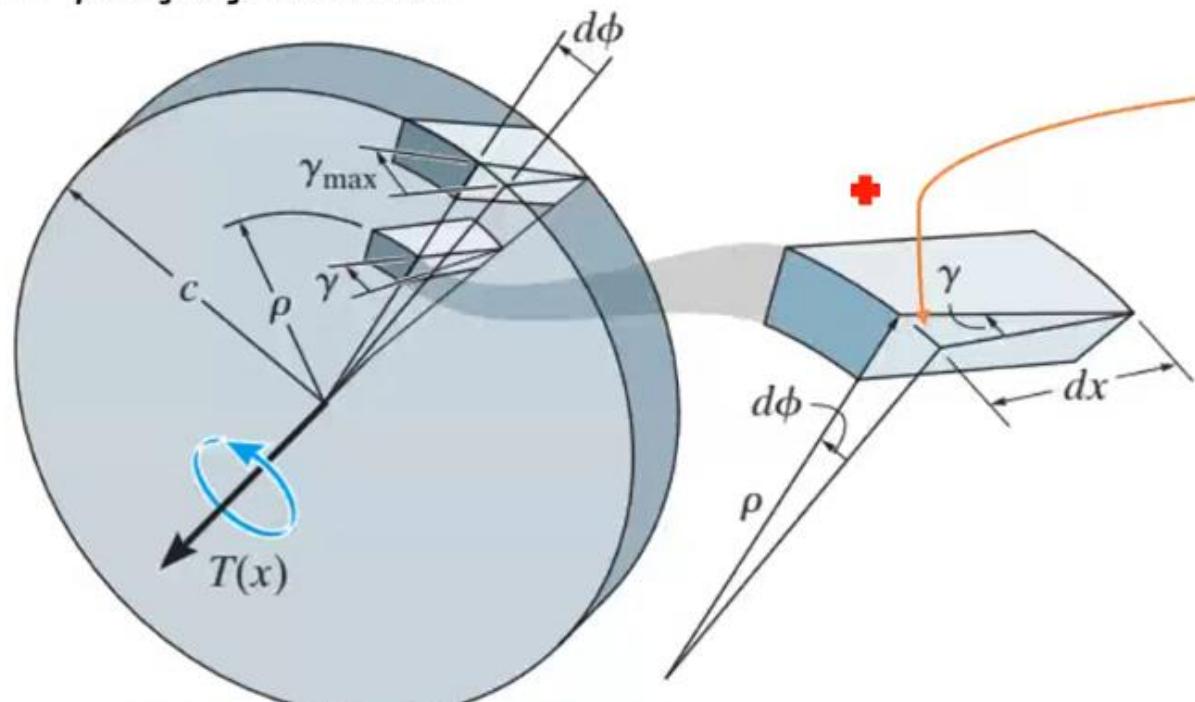


- En kesitteki bileşke burulma momenti  $T(x)$  'dır.
- $T(x)$ 'den dolayı diskin bir yüzü diğer yüzüne göre  $d\phi$  kadar burulacaktır (dönecektir).
- Bu sebeple,  $\rho$  gibi bir mesafedeki eleman  $\gamma$  (gama) kayma şekil değişimine maruz kalacaktır.

## Burulma

### Burulma Açısı

Kesit alanı uzunluğu boyunca değişen bir şafttan kesme yöntemi ile  $x$  uzaklığındaki bir noktadan  $dx$  kalınlığında bir parça çıkaralım.



R. C. Hibbeler - Mechanics of Materials, 8th Edition - Pearson Prentice Hall (2010)

$$\rho d\phi = \gamma dx \quad \rightarrow \quad d\phi = \gamma \frac{dx}{\rho}$$

Hooke yasası ( $\tau = G\gamma$ ) geçerli olduğuna göre:

$$\gamma = \frac{\tau}{G}$$

Kayma gerilmesi burulma formülü kullanılarak uygulanan tork cinsinden ifade edilebilir;

$$\tau = \frac{T(x)\rho}{J(x)} \quad \rightarrow \quad \gamma = \frac{T(x)\rho}{J(x)G}$$

Bu ifade  $d\phi = \gamma \frac{dx}{\rho}$  formülünde  $\gamma$  yerine yazılırsa;

Kesit üzerindeki herhangi bir  $\rho$  mesafesindeki kayma gerilmesi

*Burulma*  
*Burulma Açısı*

Kayma gerilmesi burulma formülü kullanılarak uygulanan tork cinsinden ifade edilebilir;

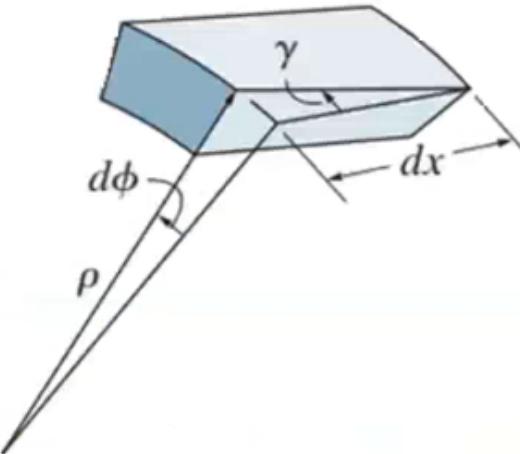
$$\tau = \frac{T(x)\rho}{J(x)}$$



$$\gamma = \frac{T(x)\rho}{J(x)G}$$



Bu ifade  $d\phi = \gamma \frac{dx}{\rho}$  formülünde  $\gamma$  yerine yazılırsa;



Diskin burulma açısı;

$$d\phi = \frac{T(x)}{J(x)G} dx$$

olarak elde edilir.

Bu ifadeyi şaftın  $L$  uzunluğu boyunca integre ettiğimizde şaftın tamamı için burulma açısını elde etmiş oluruz.

$$\phi = \int_0^L \frac{T(x)}{J(x)G} dx$$

*Burulma*  
*Burulma Açısı*

$$\phi = \int_0^l \frac{T(x)}{J(x)G} dx$$

*Burada;*

$\phi$  : *Şaftın bir ucunun diğer ucuna göre dönme açısı (burulma açısı).*

$T(x)$ : *kesit yönteminden ve şaftın ekseni üzerine uygulanan moment denge denkleminden elde edilen, x keyfi konumundaki iç tork.*

$J(x)$ : *Şaftın polar atalet momenti.*

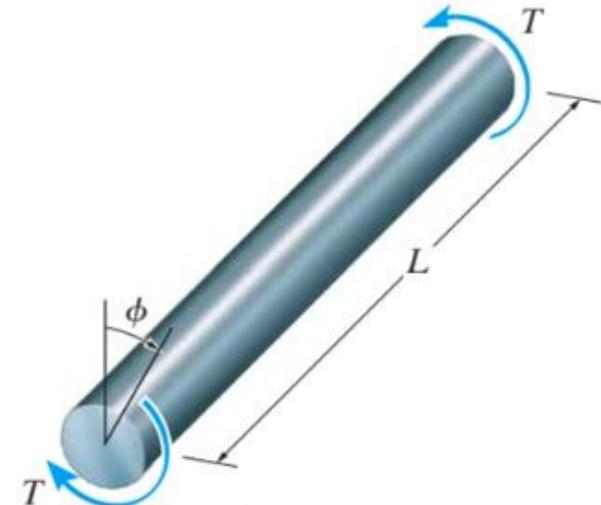
$G$ : *Malzemenin kayma modülü.*

*Burulma*  
*Burulma Açısı*

- Şaftın kesit alanının ve burulma momentinin sabit olması durumunda;

$$\phi = \frac{TL}{JG}$$

+



R. C. Hibbeler - Mechanics of Materials, 8th Edition -Pearson Prentice Hall (2010)

- Şafta birden fazla noktada burulma momenti etkidiğinde toplam burulma açısı;

$$\phi = \sum \frac{TL}{JG}$$

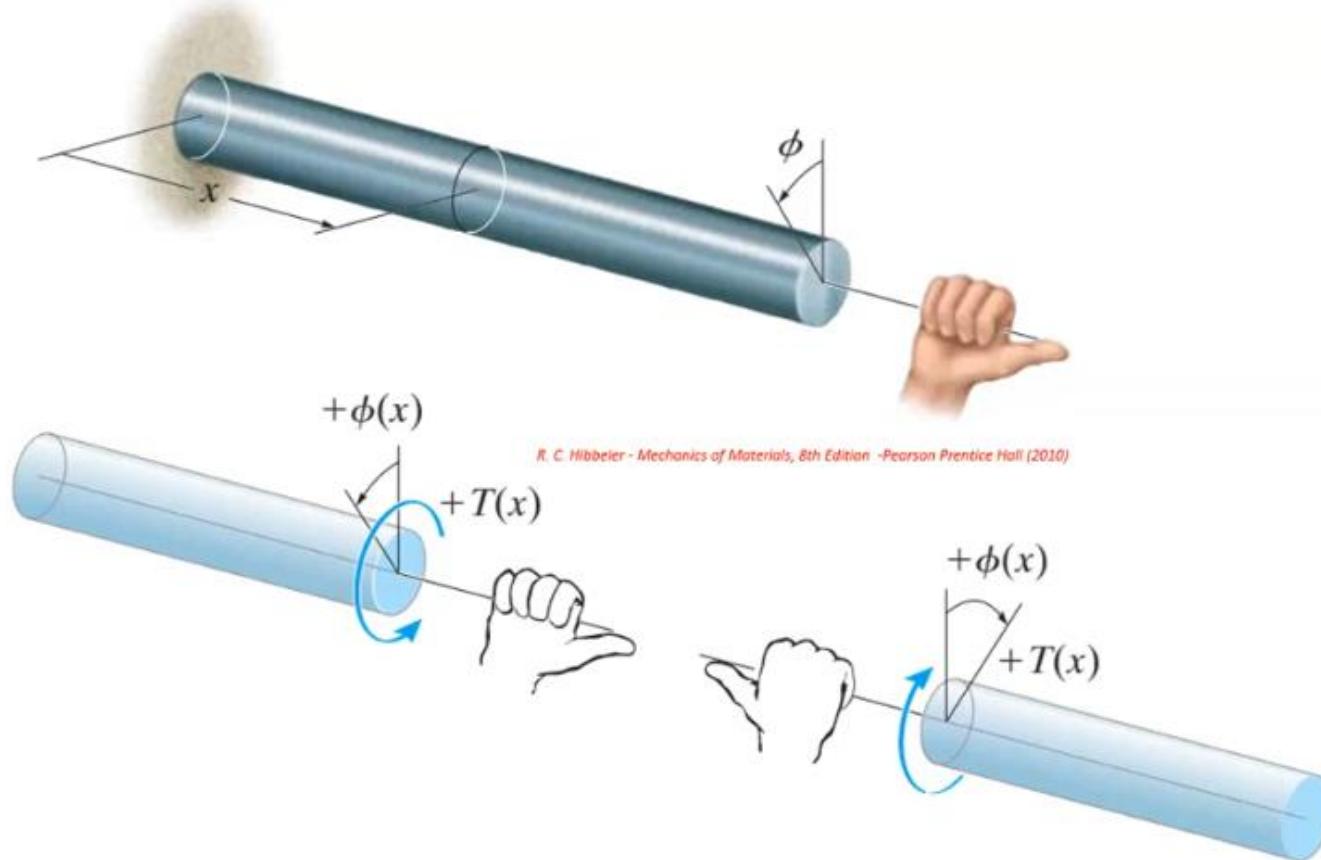
- Bu denklemlle eksenel yüze maruz çubukların şekil değişimini veren formül arasında benzer bir ifade elde edilmişti:

$$\delta = \frac{PL}{AE}$$

$$\delta = \sum \frac{PL}{AE}$$

*Burulma*  
*Burulma Açısı – İşaret Kuralı*

- Şafta birden fazla noktada burulma momenti etkidiğinde toplam burulma açısı bulunurken torklar sağ el kuralına göre göz önünde bulundurulacak;

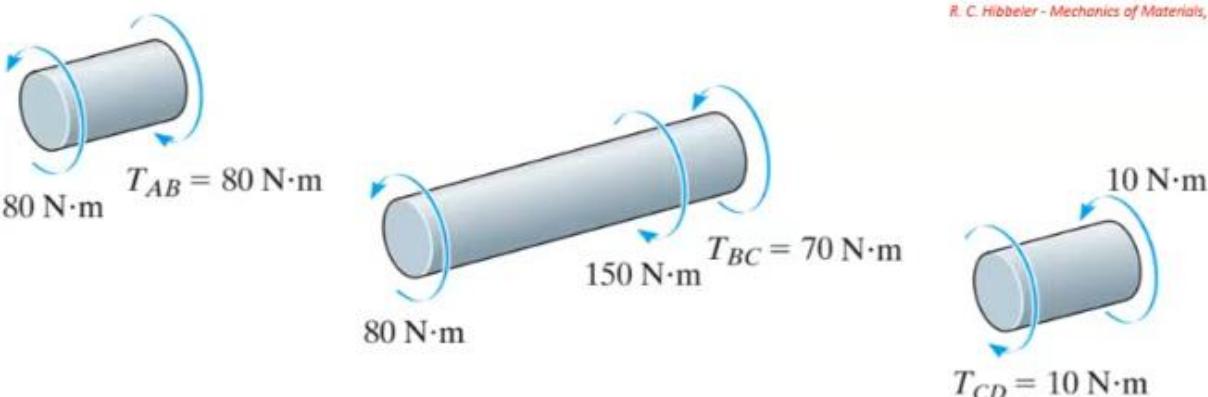
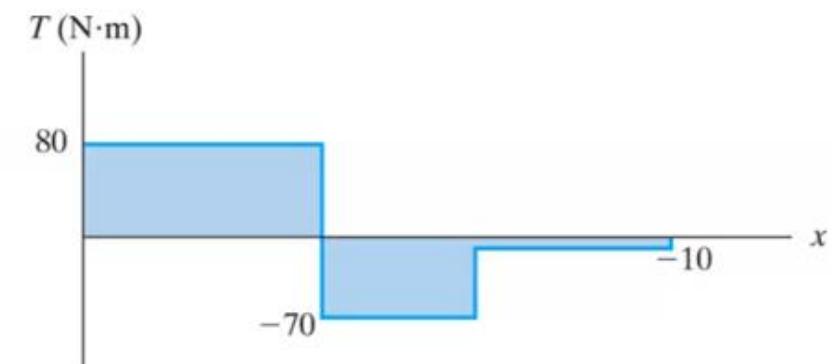
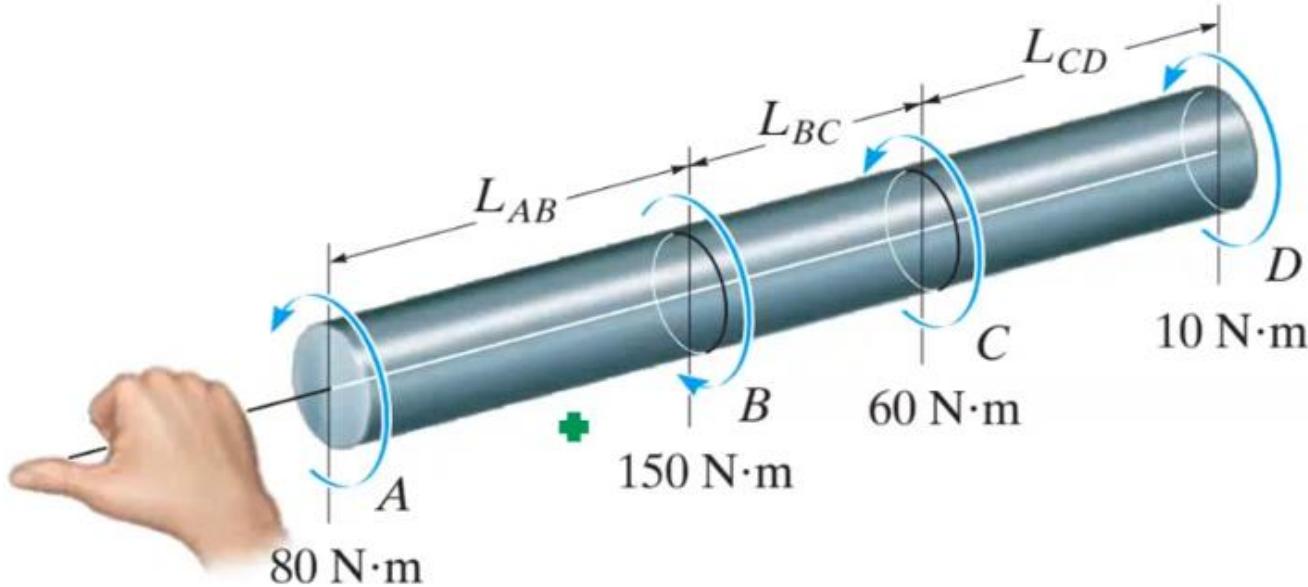


*Tork ve burulma momentinin pozitif yöndeki işaret kabulu*

## Burulma

### Burulma Açısı – İşaret Kuralı

- Şafta birden fazla noktada burulma momenti etkidiğinde toplam burulma açısı bulunurken torklar sağ el kuralına göre göz önünde bulundurulacak;



R. C. Hibbeler - Mechanics of Materials, 8th Edition - Pearson Prentice Hall (2010)

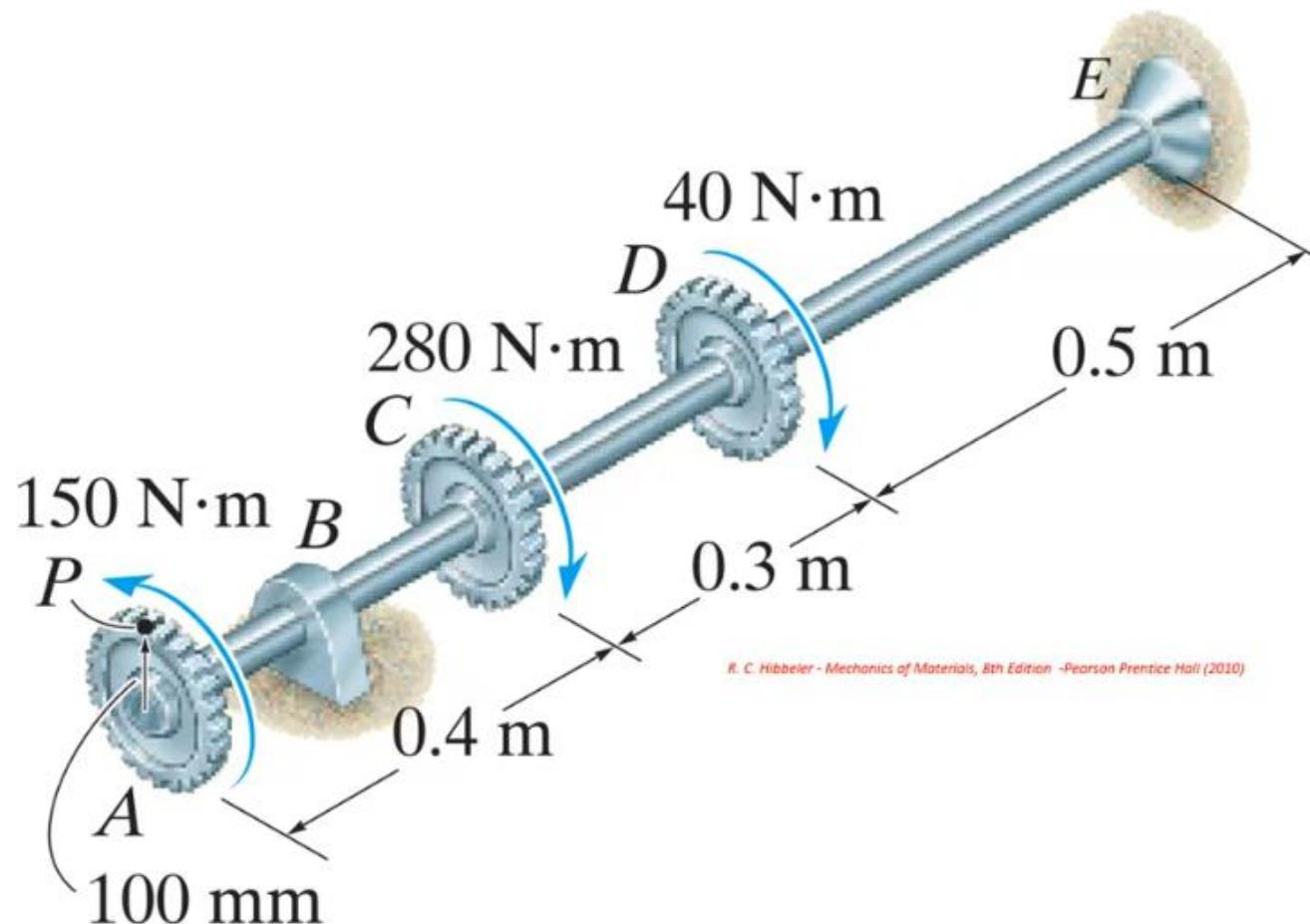
$$\phi_{A/D} = \frac{(+80 \text{ N}\cdot\text{m}) L_{AB}}{JG} + \frac{(-70 \text{ N}\cdot\text{m}) L_{BC}}{JG} + \frac{(-10 \text{ N}\cdot\text{m}) L_{CD}}{JG}$$

## Örnek 5.5

### Burulma

Örnek;

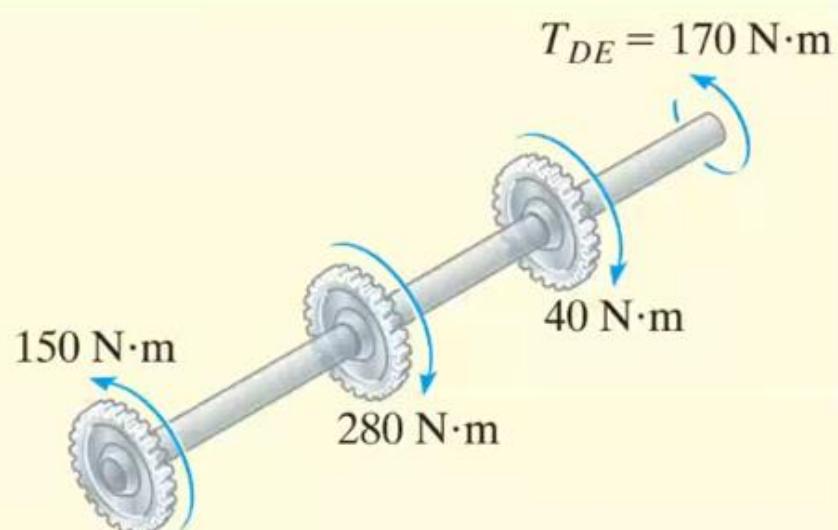
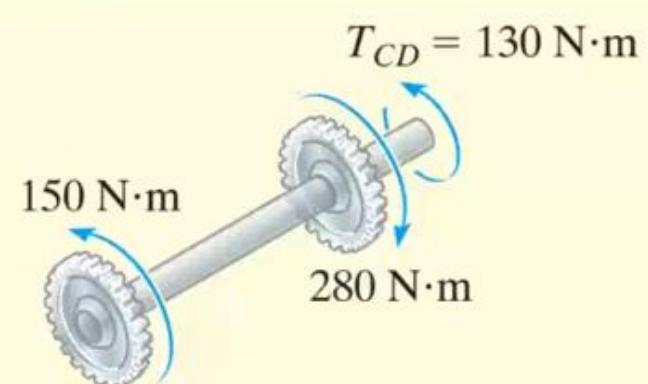
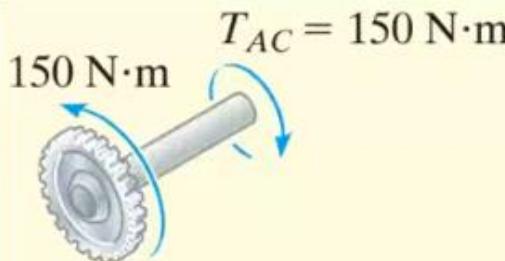
Şekilde gösterilen dişliler bir ucu sabitlenmiş olan mil üzerinde yerleştirilmiştir ve dişlilere gösterilen torklar etki etmektedir. Mil, üzerindeki dişlilere etki eden burulma momentlerinin etkisi altındadır. Milin yapıldığı malzemenin kayma modülü  $G = 80 \text{ GPa}$  ve çapı ise  $14 \text{ mm}$  olduğuna göre A dişlisi üzerindeki  $P$  noktasının ne kadar yer değiştirdiğini bulunuz. Shaft B yatağı içinde serbestçe dönebilmektedir.



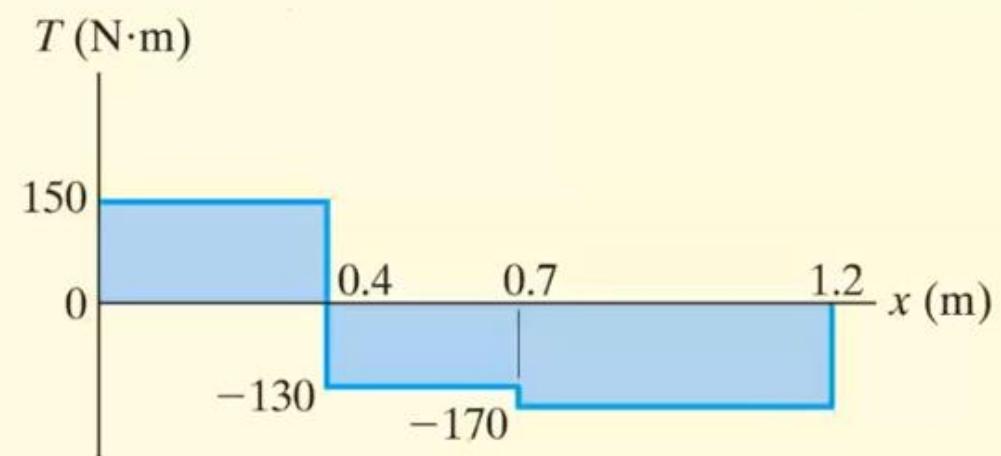
## Burulma

Çözüm;

İç momentleri bulursak, AC, CD ve DE bölgelerinde farklı fakat sabit burulma momentleri olduğunu görürüz;



R. C. Hibbeler - Mechanics of Materials, 8th Edition - Pearson Prentice Hall (2010)



## Burulma

Çözüm;

Kesitin polar atalet momenti

$$J = \frac{\pi}{2} (0.007m)^4 = 3.771(10^{-9})m^4$$

Burulma Açısı:

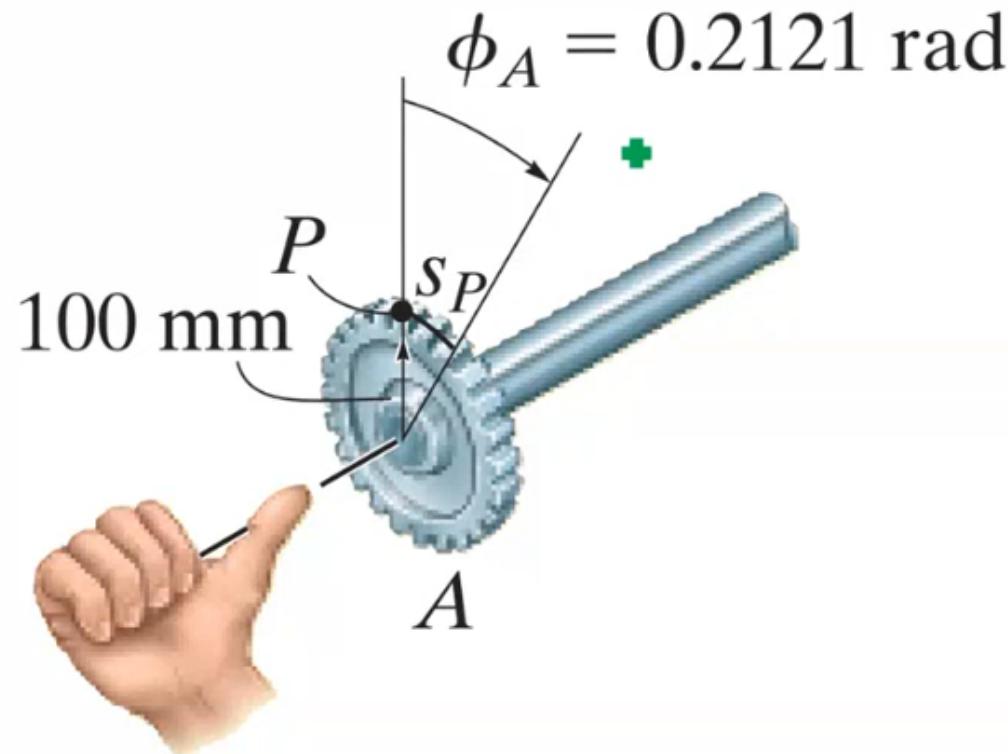
$$\begin{aligned}\Phi_A &= \sum \frac{TL}{JG} = \frac{(150N.m)(0.4m)}{3.771(10^{-9})m^4[80(10^9)N/m]} + \frac{(-130N.m)(0.3m)}{3.771(10^{-9})m^4[80(10^9)N/m]} \\ &\quad + \frac{(-170N.m)(0.5m)}{3.771(10^{-9})m^4[80(10^9)N/m]} = -0.2121 \text{ rad}\end{aligned}$$

$$\boxed{\Phi_A = -0.2121 \text{ rad}}$$

## Burulma

Çözüm;

Sonuç negatif çıktığına göre, P ucu şekildeki gibi döner



$$\phi_A = 0.2121 \text{ rad}$$

$P$  noktasının yer değiştirmesi ise:

$$s_p = \varphi_p r = (0.2121 \text{ rad})(100 \text{ mm}) = 21.2 \text{ mm}$$

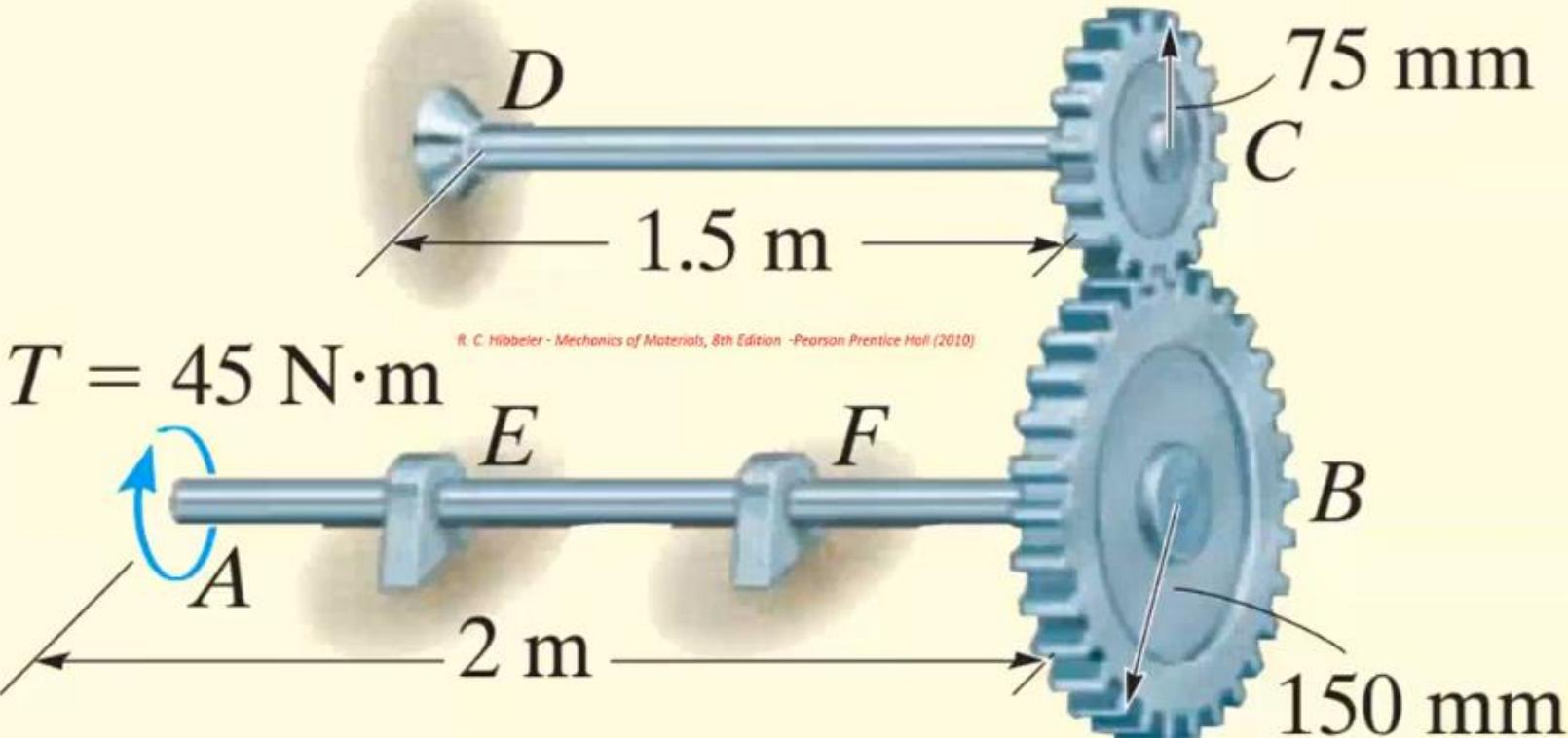
$$s_p = 21.2 \text{ mm}$$

## Örnek 5.6

### Burulma

Örnek;

Şekilde gösterilen iki katı çelik şaft, dişli çarklar kullanılarak birbirine bağlanmıştır. AB şaftına A ucundan  $T=45 \text{ N}\cdot\text{m}$  şiddetinde bir tork uygulandığında AB şaftının A ucunun burulma açısını belirleyiniz. AB şaftı E ve F yatakları içinde serbestçe dönmektedir. DC mili de D noktasından sabitlenmiştir. Her şaftın çapı 20 mm'dir.

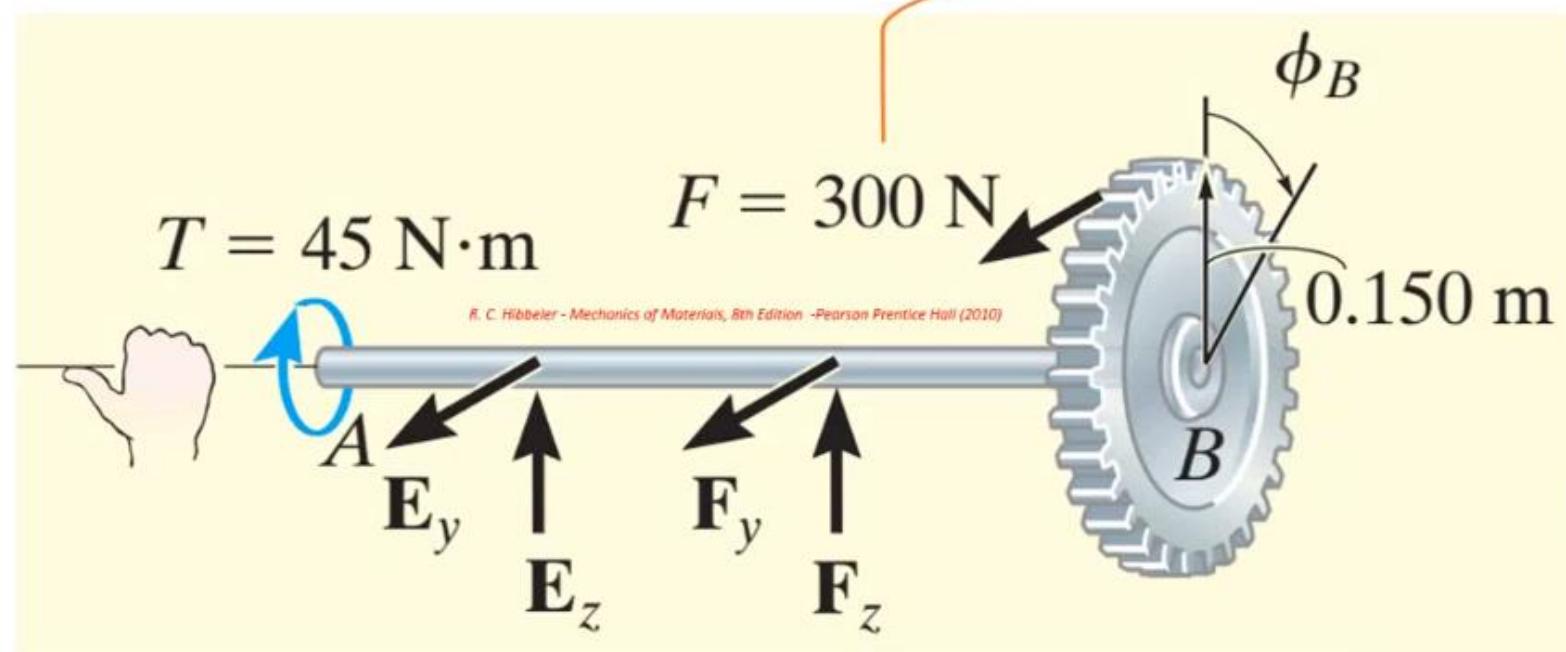


## Burulma

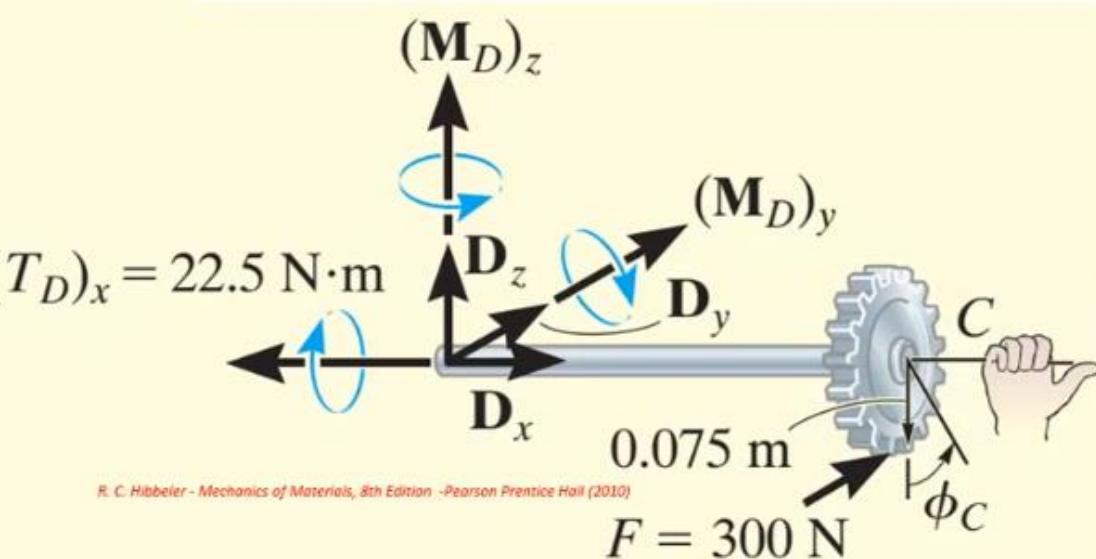
Çözüm;

Bileşke iç torkların bulunması;

$$F = \frac{45 \text{ N}\cdot\text{m}}{0.15\text{m}} = 300\text{N}$$



$$(T_D)_x = 300N (0.075m) = 22.5 N.m$$



## Burulma

Çözüm;

Soruyu çözebilmek için öncelikle DC şaftına etkiyen bileşke iç tork nedeniyle C noktasının burulma açısını bulmalıyız:

$$\Phi_C = \frac{TL_{DC}}{JG} = \frac{(22.5 \text{ N.m})(1.5 \text{ m})}{\left(\frac{\pi}{2}\right)(0.010m)^4[80(10^9)\text{N/m}]} = 0.0269 \text{ rad}$$

Miller birbirine dişli çarklar ile bağlandığından C noktasındaki  $\Phi_C$  kadarlık dönme B noktasının da  $\Phi_B$  kadar dönmesine neden olur.

$$\Phi_B(0.15m) = (0.0269 \text{ rad})(0.075m)$$

$$\Phi_B = 0.0134 \text{ rad}$$

## Burulma

**Çözüm;**

*AB şaftına etkiyen 45 N.m'lik moment nedeniyle A ucunun B ucuna göre dönmesi:*

$$\Phi_{A/B} = \frac{T_{AB}L_{AB}}{JG} = \frac{(45 \text{ N.m})(2 \text{ m})}{\left(\frac{\pi}{2}\right)(0.010m)^4[80(10^9)N/m]} = 0.0716 \text{ rad}$$

$$\boxed{\Phi_{A/B} = 0.0716 \text{ rad}}$$

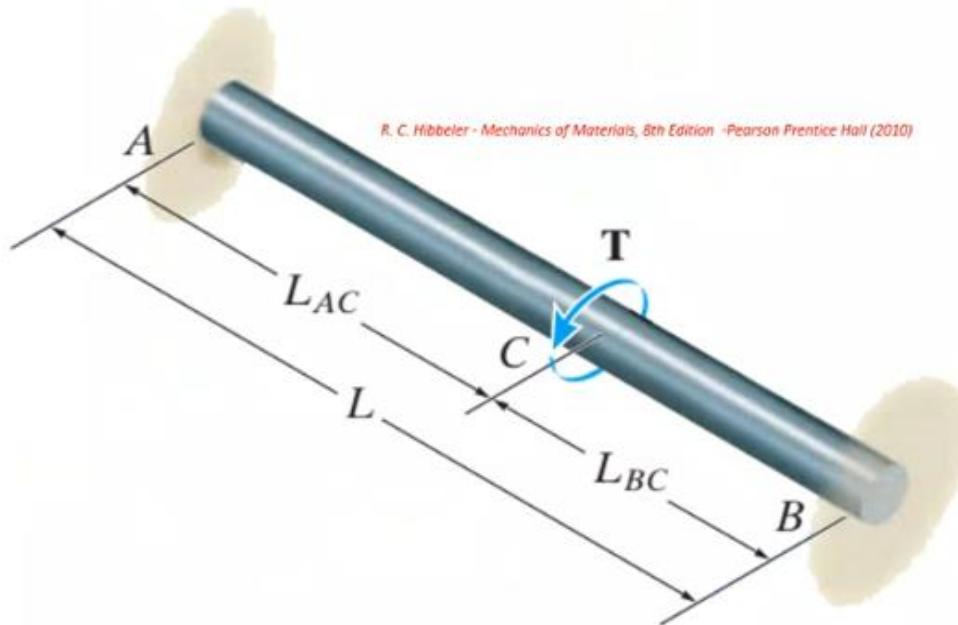
$\phi_B$  ve  $\Phi_{A/B}$  dönmeleri aynı yönlü olduğundan A ucunun dönmesi  $\phi_B$  ve  $\Phi_{A/B}$  açılarının toplamı kadar olacaktır.

$$\boxed{\Phi_A = \phi_B + \Phi_{A/B} = 0.0134 \text{ rad} + 0.0716 \text{ rad} = 0.0850 \text{ rad.}}$$

## Burulma

### Tork Uygulanmış Statikçe Belirsiz Şaftlar

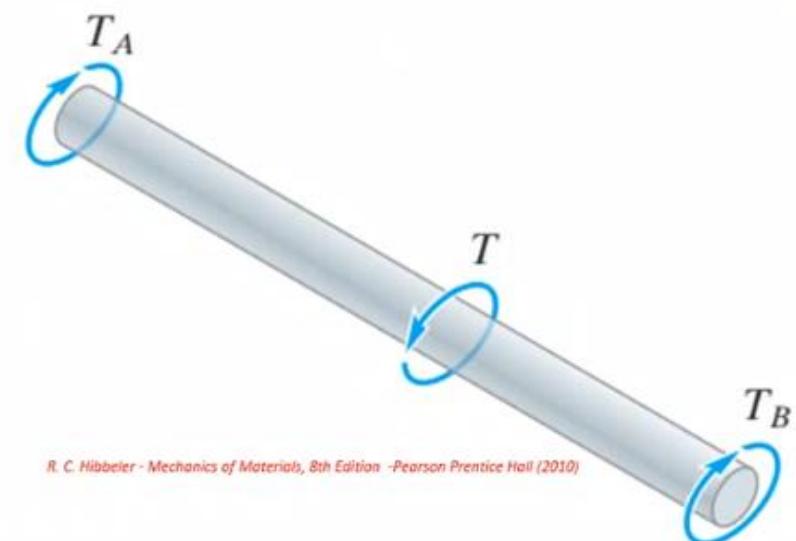
- Denge denklemlerinin çözüm için yetersiz olduğu elemanlara, *statikçe belirsiz elemanlar* denir.
- Örneğin şekilde verilen elemanın mesnet kuvvetlerinin bulunabilmesi için denge denklemleri yeterlidir.



Şaftın serbest cisim diyagramından;

$$\sum M_x = 0;$$

$$T - T_A - T_B = 0 \quad (1)$$

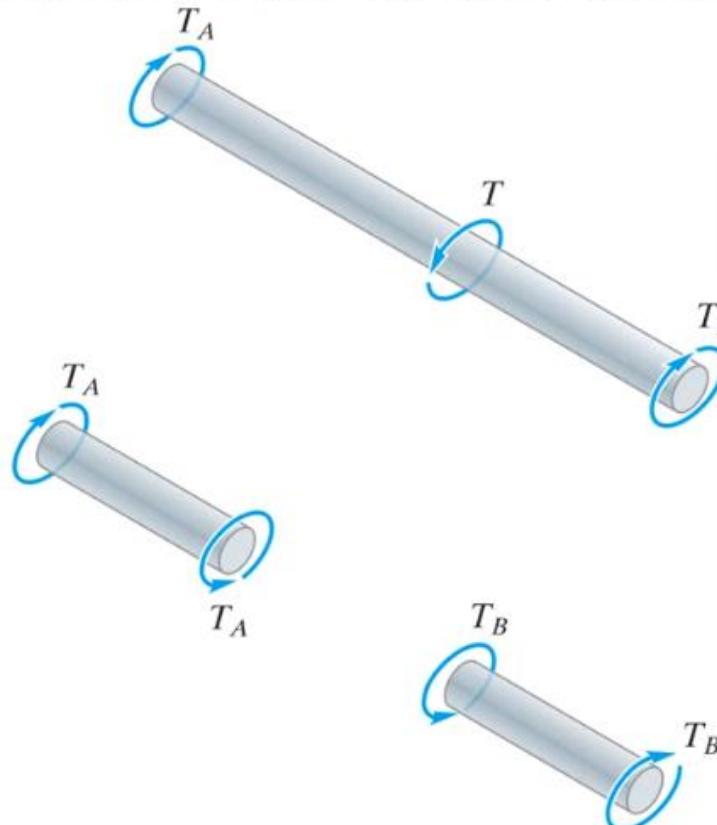


R. C. Hibbeler - Mechanics of Materials, 8th Edition - Pearson Prentice Hall (2010)

## 5.5 Statikçe Belirsiz Tork Yüklü Elemanlar

### Burulma Tork Uygulanmış Statikçe Belirsiz Şaftlar

- Problem için bir çözüm bulmak amacıyla bir önceki bölümde uygulamış olduğumuz prosedürü (uyumluluk denklemi) kullanacağız.
- Gerekli uyumluluk koşulu veya kinematik durum, şaftın üç destekleri sabit olduğundan bir ucunun diğer ucuna göre burulma açısının sıfıra eşit olmasını gerektirir. Bu nedenle,



$$\Phi_{A/B} = 0$$



$$\frac{T_A L_{AC}}{JG} - \frac{T_B L_{BC}}{JG} = 0 \quad (2)$$

$$\Sigma M_x = 0; \quad T - T_A - T_B = 0 \quad (1)$$

$$L = L_{AC} + L_{BC}$$

(1) ve (2) denklemlerinden;

$$T_A = T \left( \frac{L_{BC}}{L} \right)$$

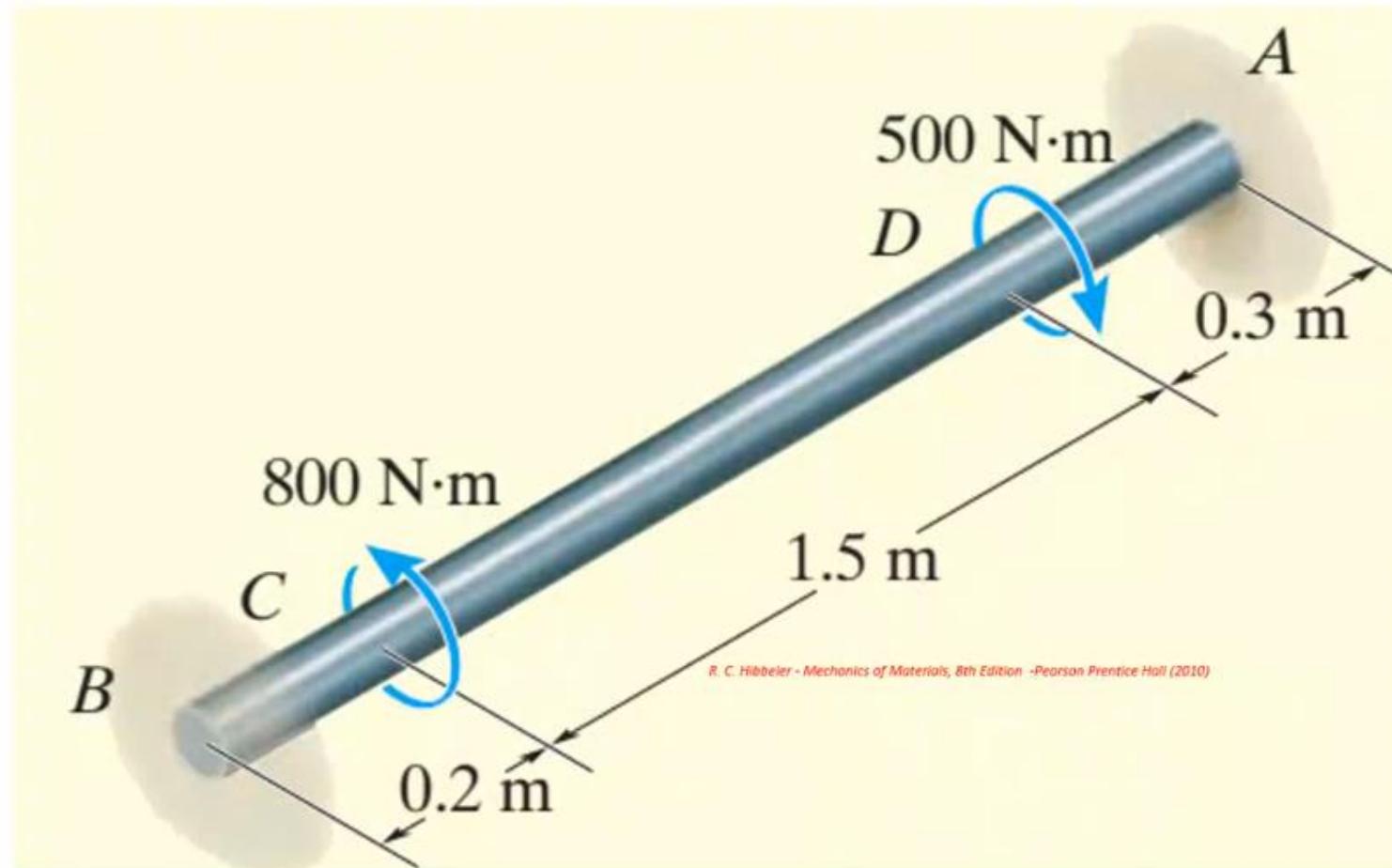
$$T_B = T \left( \frac{L_{AC}}{L} \right)$$

## Örnek 5.8

### Burulma

Örnek;

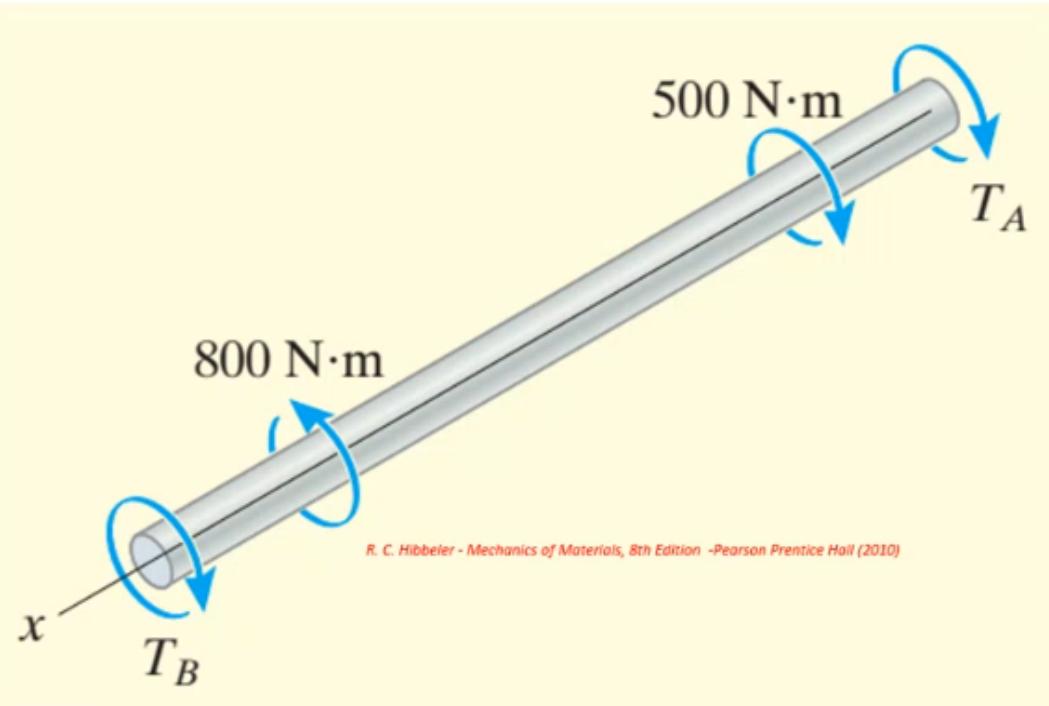
Şekilde gösterilen içi dolu şaftın çapı 20 mm olup her iki ucundan da sabitlenmiştir. Shafta şekilde gösterildiği gibi iki tork etkidiğinde A ve B noktalarındaki tepkileri hesaplayınız.



## Burulma

Çözüm;

Şaftın serbest cisim diyagramı incelendiğinde sadece tek denge denklemi yazılabilen için statikçe belirsiz olduğu görülebilir.



$$\sum M_x = 0 \quad \rightarrow$$

$$-T_B + 800 \text{ N}\cdot\text{m} - 500 \text{ N}\cdot\text{m} - T_A = 0 \quad (1)$$

Şaftın her iki ucu da mesnetli olduğundan:

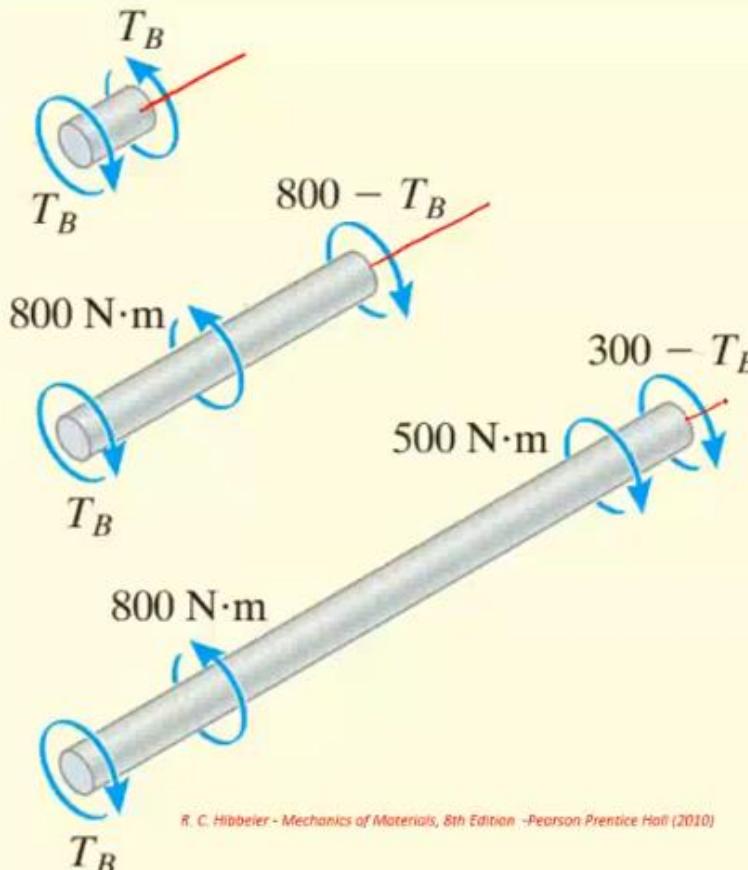
$$\varphi_{A/B} = 0$$

Bu durum, yük-yer değiştirme ilişkisi kullanılarak bilinmeyen torklar cinsinden ifade edilebilir.

## Burulma

Çözüm;

- Serbest cisim diyagramına göre milin **iç torkunun** sabit olduğu üç bölge vardır.
- Şekildeki serbest cisim diyagramlarında, kesilmiş olan şaftın bu bölgelerinin her birinde sol segmentlerine etki eden dahili torklar gösterilmiştir. Buna göre iç torkun sadece  $T_B$ 'nin bir fonksiyonu olduğu görülebilir.



$$\varphi_{A/B} = 0$$

$$\Phi = \sum \frac{TL}{JG}$$

$$\frac{-T_B(0.2 \text{ m})}{JG} + \frac{(800 - T_B)(1.5 \text{ m})}{JG} + \frac{(300 - T_B)(0.3 \text{ m})}{JG} = 0$$

Buradan;

$$T_B = 645 \text{ N.m}$$

$$-T_B + 800 \text{ N.m} - 500 \text{ N.m} - T_A = 0$$

Eşitliğinden;

$$T_A = -345 \text{ N.m}$$

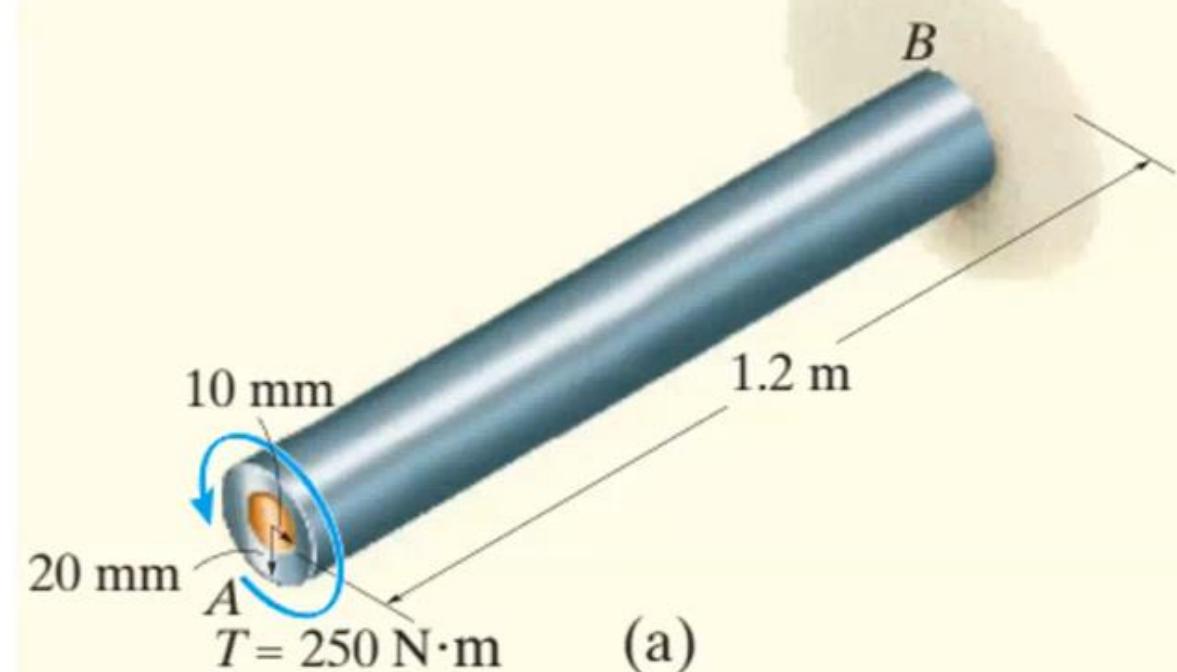
$T_A$ 'nın eksi çıkması yönünün ters olduğunu gösterir.

## Örnek 5.9

### Burulma

Örnek;

Şekilde gösterilen mil, pirinç bir çekirdeğe bağlanmış çelik bir tüpten yapılmıştır. Şaftın ucuna  $T=250 \text{ Nm}$ 'lik bir tork uygulandığında, şafka meydana gelen kayma gerilmesi dağılımını kesitin radyal çizgisi boyunca çiziniz.  $G_{st}=80 \text{ GPa}$ ,  $G_{br}=36 \text{ GPa}$  alınız.



R. C. Hibbeler - Mechanics of Materials, 8th Edition -Pearson Prentice Hall (2010)

## Burulma

**Çözüm;**

*Şaftın dengesinden;*

$$-T_{st} - T_{br} + 250 \text{ N}\cdot\text{m} = 0 \quad (1)$$

*Uyumluluk denklemi;*

*A ucundaki dönme çelik ve pirinç mil için aynı olmalı*

$$\phi = \phi_{st} = \phi_{br}$$

$\phi = TL/JG$       *Burulma açısı bağıntısını uyguladığımızda;*

$$\frac{T_{st}L}{(\pi/2)[(0.020 \text{ m})^4 - (0.010 \text{ m})^4][80(10^9) \text{ N/m}^2]} = \frac{T_{br}L}{(\pi/2)(0.010 \text{ m})^4[36(10^9) \text{ N}\cdot\text{m}^2]}$$

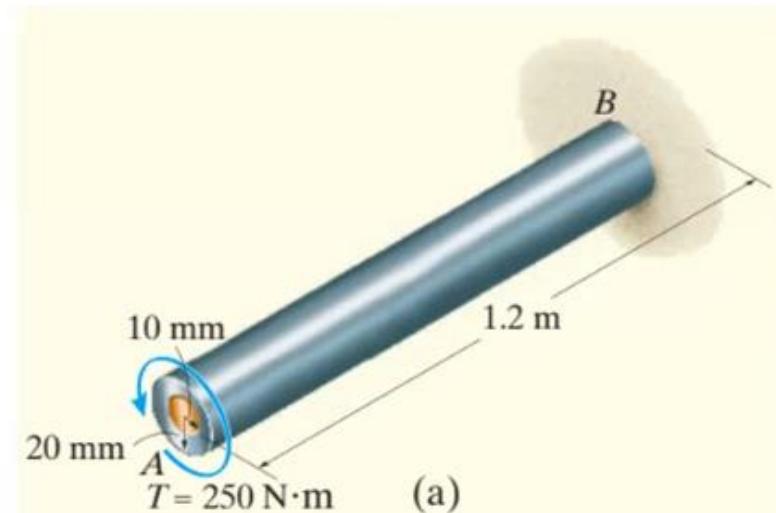
$$T_{st} = 33.33 T_{br} \quad (2)$$

*1 ve 2 denklemelerini beraber  
çözdüğümüzde;*

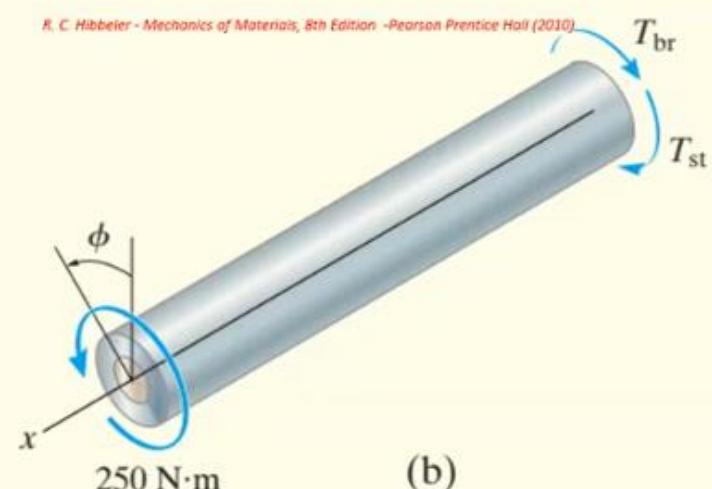


$$T_{st} = 242.72 \text{ N}\cdot\text{m}$$

$$T_{br} = 7.282 \text{ N}\cdot\text{m}$$



R. C. Hibbeler - Mechanics of Materials, 8th Edition - Pearson Prentice Hall (2010)



## Burulma

Çözüm;

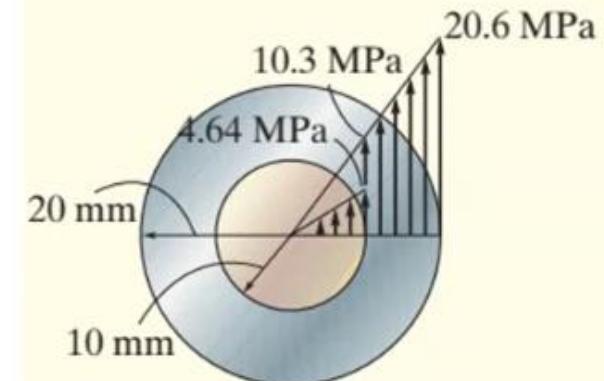
Pirinç mildeki kayma gerilmesi;

$$(\tau_{\text{br}})_{\text{max}} = \frac{(7.282 \text{ N} \cdot \text{m})(0.010 \text{ m})}{(\pi/2)(0.010 \text{ m})^4} = 4.636(10^6) \text{ N/m}^2 = 4.64 \text{ MPa}$$

Çelik mildeki kayma gerilmesi;

$$(\tau_{\text{st}})_{\text{min}} = \frac{(242.72 \text{ N} \cdot \text{m})(0.010 \text{ m})}{(\pi/2)[(0.020 \text{ m})^4 - (0.010 \text{ m})^4]} = 10.30(10^6) \text{ N/m}^2 = 10.3 \text{ MPa}$$

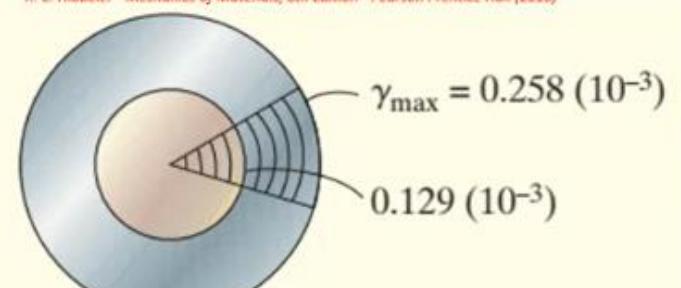
$$(\tau_{\text{st}})_{\text{max}} = \frac{(242.72 \text{ N} \cdot \text{m})(0.020 \text{ m})}{(\pi/2)[(0.020 \text{ m})^4 - (0.010 \text{ m})^4]} = 20.60(10^6) \text{ N/m}^2 = 20.6 \text{ MPa}$$



Shear-stress distribution

(c)

R. C. Hibbeler - Mechanics of Materials, 8th Edition - Pearson Prentice Hall (2010)



(d)