Шишмарев И. А.

Лекции по нелинейным дифференциальным уравнениям.

Первое полугодие.

Оглавление

Глава 1

Уравнения гидродинамики

1.1 Уравнение движения жидкости.

1.1.1 Координаты Лагранжа и Эйлера.

Лагранж рассматривал жидкость, состоящую из точек, за которыми он и предлагал вести наблюдение, зная положение в начальный момент времени.

$$t,\ \overrightarrow{r} = \{x,\, y,\, z\}\ -\ \text{в момент времени}\, t$$

$$t_0,\ \overrightarrow{r_0} = \{x_0,\, y_0,\, z_0\}\ -\ \text{в начальный момент времени}\, t_0.$$

Отсюда получаем, что координаты Лагранжа имеют вид:

$$\overrightarrow{R} = \overrightarrow{R}(t,\, \overrightarrow{r_0}). \tag{1.1}$$

откуда можно найти скорость и ускорение:

$$\overrightarrow{v}(t,\, x_0,\, y_0,\, z_0) = \frac{\partial \overrightarrow{R}}{\partial t}(t,\, x_0,\, y_0,\, z_0) \tag{1.2}$$

$$\overrightarrow{a}(t,\, x_0,\, y_0,\, z_0) = \frac{\partial^2 \overrightarrow{R}}{\partial t^2}(t,\, x_0,\, y_0,\, z_0) \tag{1.3}$$

Эйлер же рассматривал неподвижное пространство с координатами $\{x,\, y,\, z\}$ и изучал изменение всех характеристик движения каждой точки во времени и изменение характеристик при переходе из одной точки в другую.

$$(x,\, y,\, z,\, t)\ -\ \text{координаты Эйлера}$$

Связь координат Лагранжа и Эйлера осуществляется через формулу (1.1).

Пример. $f = F(t, \overrightarrow{r})$ — в координатах Эйлера. Перепишем в координатах Эйлера скорость и ускорение.

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial t}$$

$$\Rightarrow \frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + v_1\frac{\partial F}{\partial x} + v_2\frac{\partial F}{\partial y} + v_3\frac{\partial F}{\partial z} = \frac{\partial F}{\partial t} + (\overrightarrow{v},\, \nabla)F \tag{1.4}$$

Где $\overrightarrow{v} = (v_1,\, v_2,\, v_3)$. Применим выражение (1.4) к скорости, получим:

$$\overrightarrow{a}(\overrightarrow{r},\, t) = \frac{d\overrightarrow{v}}{dt} = \frac{\partial\overrightarrow{v}}{\partial t} + (\overrightarrow{v},\, \nabla)\overrightarrow{v} \tag{1.5}$$

1.1.2 Уравнения движения Эйлера и уравнение неразрывности для идеальной несжимаемой жидкости.

Определение. Жидкость называется идеальной, если можно пренебречь силами трения (вязкости).

Определение. Жидкость называется несжимаемой, если $\frac{\partial\rho}{\partial t} = 0$, ρ — ее плотность, т.е. ρ по времени является константой.

Пусть V — объем, с границей S. Относитильно сил, действующих внутри объема, будем предполагать, что их всего два вида:

1. Те, величина которых не зависит от наличия других элементов жидкости (массовые силы).

2. Силы внутреннего взаимодействия между частицами (по III закону Ньютона они уравновешены).

Могут оставаться силы, действующие на поверхность снаружи объема (поверхностные силы). Так как жидкость идеальна, то эти силы действуют по нормали к поверхности.

$$\overrightarrow{f}_p = -\overrightarrow{n}p\,dS$$

Где $\overrightarrow{f}_p$ — сила нормального давления, $\overrightarrow{n}$ — внешняя нормаль, p — давление.

По второму закону Ньютона:

$$\int\limits_V \rho\overrightarrow{a}\,dV = -\int\limits_S \overrightarrow{n}p\,dS + \int\limits_V \rho\overrightarrow{f}\,dV. \tag{1.6}$$

Где $\overrightarrow{f}$—плотность массовых сил, $\overrightarrow{a}$—ускорение. По теореме Остроградского-Гаусса:

$$\int\limits_S \overrightarrow{n}p\,dS = \int\limits_V \nabla p\,dV$$

$$\Rightarrow \int\limits_V \left[\rho\overrightarrow{a} + \nabla p - \rho\overrightarrow{f}\right] dV = 0 \tag{1.7}$$

Так как V—произвольное, то

$$\overrightarrow{a} + \frac{1}{\rho}\nabla p - \overrightarrow{f} = 0$$

Используя для ускорения $\overrightarrow{a}$ формулу (1.5), получим уравнение Эйлера движения жидкости:

$$\frac{\partial \overrightarrow{v}}{\partial t} + (\overrightarrow{v},\, \nabla)\overrightarrow{v} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \overrightarrow{f}. \tag{1.8}$$

Распишем покоординатно это уравнение:

$$\begin{cases} \frac{\partial v_1}{\partial t} + v_1\frac{\partial v_1}{\partial x} + v_2\frac{\partial v_1}{\partial y} + v_3\frac{\partial v_1}{\partial z} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + f_1 \\ \frac{\partial v_2}{\partial t} + v_1\frac{\partial v_2}{\partial x} + v_2\frac{\partial v_2}{\partial y} + v_3\frac{\partial v_3}{\partial z} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} + f_2 \\ \frac{\partial v_3}{\partial t} + v_1\frac{\partial v_3}{\partial x} + v_2\frac{\partial v_3}{\partial y} + v_3\frac{\partial v_3}{\partial z} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} + f_3 \end{cases} \tag{1.9}$$

В данной системе надо определить скорость $\overrightarrow{v} = (v_1,\, v_2,\, v_3)$ и давление p. Поэтому нужно еще четвертое уравнение, которое получается, если посчитать поток жидкости через границу S.

$$\Phi = \int\limits_S (\overrightarrow{v},\, \overrightarrow{n})dS.$$

Так как $\rho \equiv const$, то в объеме V количество жидкости постоянно $\Rightarrow \Phi = 0$, но по теореме Остроградского-Гаусса:

$$\Phi = \int\limits_V div\overrightarrow{v}dV = 0.$$

Откуда и получается четвертое уравнение, уравнение неразрывности:

$$div\overrightarrow{v} \overset{\mathrm{V}}{=} 0. \tag{1.10}$$

Которое вместе с уравнениями (1.9) дает систему уравнений.

1.1.3 Начальные и граничные условия.

Начальные условия: $\overrightarrow{v}(\overrightarrow{r}, t)|_{t=t_0} = \overrightarrow{v}_0(\overrightarrow{r})$.

Граничные условия: объем V примыкает к границе S вплотную без пустот, и через S жидкость не протекает. Но сама стенка может двигаться, и пусть $\zeta(\overrightarrow{r}, t) = 0$ — уравнение стенки. Тогда:

$$\frac{d\zeta}{dt} = \frac{\partial\zeta}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial\zeta}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial\zeta}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial t} + \frac{\partial\zeta}{\partial t} = 0.$$

При этом на границе:

$$\left.\frac{d\overrightarrow{r}}{dt}\right|_S = \left.\left\{\frac{dx}{dt},\, \frac{dy}{dt},\, \frac{dz}{dt}\right\}\right|_S = \overrightarrow{v}|_S$$

Откуда получаем кинематическое уравнение:

$$\left.\left(\frac{\partial\zeta}{\partial t} + (\overrightarrow{v}, \nabla\zeta)\right)\right|_S = 0 \tag{1.11}$$

Если $\frac{\partial\zeta}{\partial t}=0$, т.е. стенка неподвижна, то

$$(\overrightarrow{v},\nabla\zeta)=c(\overrightarrow{v},\overrightarrow{n})=cv_n|_S=0. \tag{1.12}$$

При рассмотрении поверхностных волн нужно еще динамическое условие:

$$p|_{S_+}=p|_{S_-},\ -\text{непрерывность давления на}\,S \tag{1.13}$$

1.2 Закон сохранения энергии. Интеграл Бернулли-Коши.

Скалярно умножим на $\rho\overrightarrow{v}$ уравнение (1.8), получим:

$$\frac{1}{2}\rho\frac{d}{dt}(|\overrightarrow{v}|^2)+(\overrightarrow{v},\nabla p)-\rho(\overrightarrow{f},\overrightarrow{v})=0. \tag{1.14}$$

Пусть силы стационарны и потенциальны, т.е. $\overrightarrow{f}=\frac{1}{\rho}\nabla u$, где u - потенциальная энергия, и $\frac{\partial u}{\partial t}=0$ из-за стационарности. Поэтому уравнение (1.14) можно переписать следующим образом:

$$\frac{1}{2}\rho\frac{d}{dt}(|\overrightarrow{v}|^2)+(\overrightarrow{v},\nabla p)+(\overrightarrow{v},\nabla u)=0. \tag{1.15}$$

Из формулы (1.4) следует, что

$$(\overrightarrow{v},\nabla p)=\frac{dp}{dt}-\frac{\partial p}{\partial t},$$

$$(\overrightarrow{v},\nabla u)=\frac{du}{dt}.$$

Учитывая эти равенства получим закон изменения энергии:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\rho|\overrightarrow{v}|^2+u\right)+\frac{dp}{dt}-\frac{\partial p}{\partial t}=0, \tag{1.16}$$

где:

$$\frac{1}{2}\rho|\overrightarrow{v}|^2\ -\ \text{кинетическая энергия,}$$

$$u\ -\ \text{потенциальная энергия}$$

$$\mu\overset{\mathrm{df}}{=}\frac{dp}{dt}-\frac{\partial p}{\partial t}\ -\ \text{плотность диссипации или рассеяние энергии}$$

Пусть $\varepsilon=\frac{1}{2}\rho|\overrightarrow{v}|^2+u$, тогда по формуле (1.4):

$$\frac{\partial\varepsilon}{\partial t}+\frac{1}{2}\rho\left[(\overrightarrow{v},\nabla|\overrightarrow{v}|^2)\right]+(\overrightarrow{v},\nabla u)+(\overrightarrow{v},\nabla p)=0 \tag{1.17}$$

Так как в теории поля справедливо соотношение $(\overrightarrow{a}, \nabla\varphi) = div(\overrightarrow{a}\varphi) - \varphi\, div\, \overrightarrow{a}$, то положив $\overrightarrow{a}$ равным $\overrightarrow{v}$ и учитывая, что $div\, \overrightarrow{v} = 0$, получим, что $(\overrightarrow{v}, \nabla\varphi) = div(\overrightarrow{v}\varphi)$ или:

$$0 = \frac{\partial\varepsilon}{\partial t} + div\left(\overrightarrow{v}\left[\frac{1}{2}\rho|\overrightarrow{v}|^2 + u + p\right]\right). \tag{1.18}$$

Где $\overrightarrow{v}p$ — мощность давления, $\overrightarrow{v}u$ — плотность потока энергии, а вектор $\overrightarrow{v}\left[\frac{1}{2}\rho|\overrightarrow{v}|^2 + u + p\right] = \overrightarrow{\Pi}$ — вектор Умова-Пойнтинга. Поэтому

$$\frac{\partial\varepsilon}{\partial t} + div\, \overrightarrow{\Pi} = 0 \tag{1.18^{bis}}$$

Если S неподвижна и выполнены условия непроникновения жидкости, то так как $v_n|_S = 0$, то

$$\int\limits_S \left(\overrightarrow{\Pi}, \overrightarrow{n}\right) dS = 0. \tag{1.19}$$

Отсюда, если силы потенциальны и стационарны, получаем закон сохранения энергии:

$$\int\limits_V \varepsilon\, dV = const \tag{1.20}$$

Пусть движение стационарно, т.е. $\frac{\partial p}{\partial t} = 0 \Rightarrow$. Из (1.16) следует, что

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\rho|\overrightarrow{v}|^2 + u + p\right) = 0$$

Откуда получается интеграл Бернулли:

$$\frac{1}{2}\rho|\overrightarrow{v}|^2 + u + p = const, \tag{1.21}$$

который сохраняется вдоль траектории движения, но зависит от самой траектории.

Пусть же теперь величины потенциальны, но не обязательно стационарны: $\overrightarrow{v} = \nabla\Phi$, $\overrightarrow{f} = -\nabla u$. Тогда уравнение движения жидкости (1.8) примет вид:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + (\overrightarrow{v}, \nabla)\overrightarrow{v} + \frac{1}{\rho}\nabla p + \nabla u = 0.$$

Или с учетом потенциальности скорости:

$$\frac{\partial}{\partial t}\nabla\Phi + (\nabla\Phi, \nabla)\nabla\Phi + \nabla\frac{p}{\rho} + \nabla u = 0.$$

Учитывая, что $(\nabla\Phi, \nabla)\nabla\Phi = \frac{1}{2}\nabla|\nabla\Phi|^2$, получим

$$\nabla\left(\frac{\partial\Phi}{\partial t} + \frac{1}{2}|\nabla\Phi|^2 + \frac{p}{\rho} + u\right) = 0. \tag{1.22}$$

Откуда получается интеграл Коши-Бернулли:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2}|\nabla \Phi|^2 + \frac{p}{\rho} + u = c(t). \tag{1.23}$$

Так как Φ определена с точностью до произвольной функции от времени, то можно положить $\Phi_1 \stackrel{\text{df}}{=} \Phi + \int\limits_0^t c(\tau)\, d\tau$. Тогда на функции Φ_1 интеграл (1.23) обратиться в нуль.

Движение разбивается на два класса:

1. то для которого $rot\,\overrightarrow{v} = 0$ в D — безвихревое
2. такое, что $rot\,\overrightarrow{v} \neq 0$ в D — вихревое

Теорема (Лагранжа). *Если в начальный момент времени движение безвихревое, то оно будет безвихревым и во все оставшиеся моменты времени.*

$rot\,\overrightarrow{v} \equiv 0$ в односвязной области D $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{v} = \nabla \Phi$. Откуда получаем:

$$div\,\overrightarrow{v} = 0 \;\Rightarrow\; div \nabla \Phi \equiv \Delta \Phi = 0 \;\text{ в D}. \tag{1.24}$$

Получается задача для отыскания Φ и p:

$$\begin{cases} \Delta \Phi = 0, \;\text{ в D} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2}|\nabla \Phi|^2 + \frac{p}{\rho} + u = 0 \end{cases}$$

1.3 Общая нелинейная задача о волнах на поверхности жикости

Рассматриваем слой несжимаемой жидкости с плотностью $\rho = 1$. Пусть D — слой воды, заключенный между поверхностью, описываемой уравнением $z = \eta(x, y, t)$ и дном с уравнением $z = -h(x, y)$. Уравнение поверхности зависит от времени потому что, предполагается на ней наличие волн. Пусть $\overrightarrow{n}$ — нормаль к уровню дна, напрвленная внутрь D, g — ускорение свободного падения. Рассматриваем в этом слое потенциальное и безвихревое движение жидкости, и пусть Φ — ее потенциал. Тогда:

$$\Delta \Phi(x, y, z\, t) = 0, \;\text{в } D \tag{1.25}$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2}|\nabla \Phi|^2 + gz + p = 0, \;\text{на } z = \eta(x, y, t) \tag{1.26}$$

$$v_n|_{z=-h(x,y)} = \frac{\partial \Phi}{\partial n} = 0 \tag{1.27}$$

Пусть

$$\zeta = \eta(x, y, t) - z \;\Rightarrow\; \frac{\partial \zeta}{\partial t} + (\overrightarrow{v}, \nabla \zeta)|_{\zeta=0} = 0 \text{ — кинематическое условие} \tag{1.28}$$

Расписывая это условие, получим

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \Phi_x \eta_x + \Phi_y \eta_y - \Phi_z = 0 \text{ на } z = \eta(x,\, y,\, t). \tag{1.29}$$

На $z = \eta(x,\, y,\, t)$ выполняется динамическое условие:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2}|\nabla \Phi| + g\eta(x,\, y,\, t) = -p_0(x,\, y,\, t), \tag{1.30}$$

где p_0 атмосферное давление. Пусть в начальный момент выполнены условия:

$$\Phi(x,\, y,\, z,\, t)|_{t=0} = \Phi_0(x,\, y,\, z) \tag{1.31}$$

$$\eta(x,\, y,\, t)|_{t=0} = \eta_0(x,\, y). \tag{1.32}$$

Плюс, если надо, выполнено условие на бесконечности. Из этого получаем задачу на отыскание Φ и η:

$$\begin{cases} \Delta\Phi(x,\, y,\, z\, t) = 0, \text{ в } D \\ \frac{\partial \Phi}{\partial n}\big|_{z=-h(x,\, y)} = 0 \\ \frac{\partial \eta}{\partial t} + \Phi_x \eta_x + \Phi_y \eta_y - \Phi_z = 0,\ z = \eta(x,\, y,\, t) \\ \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2}|\nabla \Phi|^2 + g\eta(x,\, y,\, t) = -p_0(x,\, y,\, t),\ z = \eta(x,\, y,\, t) \\ \Phi_0,\ \eta_0,\ \text{условие на бесконечности, если нужно} \end{cases} \tag{1.33}$$

Эта нелинейная задача со свободной границей $\eta(x,\, y,\, t)$, которую надо найти. Если она известна, то задачу для Φ можно переписать в виде:

$$\begin{cases} \Delta\Phi = 0 \text{ в } D \\ \frac{\partial \Phi}{\partial n} = -\frac{\eta_t}{\sqrt{1+\eta_x^2+\eta_y^2}},\ z = \eta(x,\, y,\, t) \\ \frac{\partial \Phi}{\partial n} = 0,\ z = -h(x,\, y) \end{cases} \tag{1.34}$$

Это вторая краевая задача (задача Неймана). Самая большая трудность — отыскание η.

Линеаризация задачи относительно неподвижного положения жидкости. Так как возмущения малы, то можно пренебречь квадратами производных.

Из третьего уравнения задачи (1.33) получим:

$$\eta_t - \Phi_z = 0,\ z = \eta(x,\, y,\, t).$$

Из четвертого уравнения следует, что

$$\Phi_t + g\eta = -p_0,\ z = \eta(x,\, y,\, t).$$

Перенесем эти уравнения на уровень $\{z = 0\}$. Тогда можно исключить переменную. Получим:

$$g\eta_t - g\Phi_z = 0, \tag{$*$}$$

$$\Phi_t + g\eta = -p_0 \left(\frac{\partial}{\partial t}\right) \Rightarrow \Phi_{tt} + g\eta_t = -\frac{\partial p_0}{\partial t} \tag{$**$}$$

После проделанных преобразовиний получим линеаризованную задачу:

$$\begin{cases} \Delta\Phi = 0, \ -h(x, y) < z < 0 \\ \Phi_{tt} + g\Phi_z = -\frac{\partial p_0}{\partial t}, \ z = 0 \\ \frac{\partial\Phi}{\partial n} = 0, \ z = -h(x, y) \end{cases} \tag{1.35}$$

После решения задачи (1.35) из условий $(*)$ и $(**)$ находим η:

$$\eta(x, y, z, t) = -\frac{1}{g}\Phi_t\Big|_{z=0} - \frac{1}{g}p_0(x, y, t) \tag{1.36}$$

Решение задачи (1.35). Пусть $p_0 \equiv 0$ (однородная задача), дно плоское: $h(x, y) \equiv h_0$. Решение ищем в виде плоских волн:

$$\eta(x, y, t) = Ae^{-i\omega t + ik_1x + ik_2y},$$

Где ω — частота, $k = (k_1, k_2)$ — волновой вектор.

$$\Phi(x, y, z, t) = Y(z)e^{-i\omega t + ik_1x + ik_2y}.$$

Подставим это в уравнение (1.35), получим:

$$\begin{cases} Y''(z) - |k|^2Y(z) = 0, \ -h_0 < z < 0 \\ Y'(z)\big|_{z=-h_0} = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Y(z) = C\,ch\left(|k|(z + h_0)\right).$$

Подставим в (1.36) η и Φ:

$$A = \frac{i\omega}{g}C\,ch\left(|k|h_0\right) \Rightarrow C = \frac{Ag}{i\omega\,ch\left(|k|h_0\right)} \tag{1.37}$$

$$\Phi = -\frac{iAg}{\omega\,ch\left(|k|h_0\right)}ch\left(|k|(z + h_0)\right)e^{-i\omega t + ik_1x + ik_2y}. \tag{1.38}$$

Из второго условия задачи (1.35) получаем дисперсионное соотношение (связь частоты с волновым вектором):

$$\omega^2 = g|k|\,th\left(|k|h_0\right) \tag{1.39}$$

1.4 Волны на мелкой воде

1.4.1 Уравнение волн на мелкой воде

Задача (1.33) довольно сложна. Для ее упрощения введем следующие параметры:

$$\alpha = \frac{a}{h_0}, \ a \text{ — амплитуда волн на поверхности}$$

$$\beta = \frac{h_0^2}{l^2},\ l \text{ — длина волн на поверхности}$$

В задачах (1.27) - (1.33) изучается движение в плоскости, параллельной плоскости xOz. Введем новые переменные (они безразмерные):

$$\left(\frac{x}{l},\, \frac{z}{h_0},\, \frac{t\sqrt{gh_0}}{l},\, \frac{\eta - h}{h_0},\, \sqrt{\frac{h_0}{g}} \cdot \frac{\varPhi}{l\,a}\right) \overset{\text{переобозначим}}{\longrightarrow} (x,\, z,\, t,\, \eta,\, \varPhi)\,.$$

Подставив это в (1.27) - (1.33), учитывая, что зависимости от y нет, получим:

$$\begin{cases} \beta\varPhi_{xx} + \varPhi_{zz} = 0,\ 0\ < z\ < 1 + \alpha\eta \\ \varPhi_z\big|_{z=0} = 0 \\ \eta_t + \alpha\varPhi_x\eta_x - \frac{\alpha}{\beta}\varPhi_z = 0,\ z = 1 + \alpha\eta \\ \varPhi_t + \eta + \frac{1}{2}\alpha\varPhi_x^2 + \frac{1}{2}\frac{\alpha}{\beta}\varPhi_z^2 = 0,\ z = 1 + \alpha\eta \end{cases} \tag{1.40}$$

Пусть $\varPhi = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} f(x,\, t)z^n$. Подставим это выражение в два первых уравнения задачи (1.40). Получим:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\beta f_n'' z^n + n(n+1)f_n z^{n-2}\right) = 0, \tag{1.41}$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x,\, t)nz^{n-1}\big|_{z=0} = 0 \overset{n=1}{\Rightarrow} f_1(x, t) \equiv 0 \tag{1.42}$$

Из уравнения (1.41) получаем, что

$$\beta f_n'' + (n+1)(n+2)f_{n+2} = 0 \overset{(1.42)}{\Rightarrow} f_{2k+1}(x,\, t) \equiv 0.$$

Обозначим $f_0 \equiv f$ и найдем с его помощью

$$f_{2k}(x,\, t) = \frac{(-1)^k\beta^k}{(2k)!}\frac{\partial^{2k}}{\partial x^2 k}f(x,\, t)$$

Откуда:

$$\varPhi(x,\, z,\, t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k\beta^k}{(2k)!} z^{2k} \frac{\partial^{2k}}{\partial z^{2k}} f(x,\, t)\ = \tag{1.43}$$

$$=\ f(x,\, t) - \frac{\beta}{2}z^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\beta^2}{4!}z^4 f_x^{(4)}(x,\, t) - \ldots$$

Это выражение удовлетворяет первым двум уравнениям, остались третье и четвертое уравнения в (1.40). Подставив полученный ряд в эти уравнения, получим:

$$\begin{cases} \eta_t + \frac{\partial}{\partial x}\left[(1+\alpha\eta)f_x\right] - \\ -\left\{\frac{1}{6}(1+\alpha\eta)^3\frac{\partial^4 f}{\partial x^4} + \frac{1}{2}\alpha(1+\alpha\eta)^2\eta_x\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}\right\}\beta + O(\beta^2) = 0 \\ \eta + f_t + \frac{1}{2}\alpha f_x^2 - \\ -\frac{1}{2}(1+\alpha\eta)\left\{\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial t} + \alpha f_x\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} - \alpha(f_{xx})^2\right\}\beta + O(\beta^2) = 0 \end{cases} \tag{1.44}$$

Пусть $\beta = \frac{h_0^2}{l_2}$ — малый параметр $\ll 1$ — мелкая вода. Тогда в (1.44) можно пренебречь членами порядка $O(\beta)$. Получим:

$$\begin{cases} \eta_t + \frac{\partial}{\partial x}\left[(1+\alpha\eta)f_x\right] = 0 \\ \eta + f_t + \frac{1}{2}\alpha f_x^2 = 0 \end{cases} \tag{1.45}$$

Если $\beta = 0$, то из (1.43) следует, что $\Phi(x, z, t) \equiv f(x, t)$, и $f_x = \Phi_x = u$ — горизонтальная составляющая скорости. Продифференцируем второе уравнение (1.45) по x:

$$\eta_x + f_{xt} + \alpha f_x f_{xx} = 0.$$

Откуда получаем (уже в координатах с размерностями):

$$\begin{cases} \eta_t + [(h_0+\eta)u]_x = 0 \\ u_t + u\,u_x + g\,\eta_x = 0 \end{cases} \tag{1.45^{bis}}$$

Системы уравнений (1.45) и (1.45^{bis}) есть системы уравнений мелкой воды.

Если же течение объемное, то потенциал скорости имеет две компоненты: $\overrightarrow{u} = (u_1, u_2)$, откуда получаем (аналогично (1.45^{bis})) систему мелкой воды в пространстве:

$$\begin{cases} \eta_t + \nabla(h_0+\eta)\overrightarrow{u} = 0 \\ \overrightarrow{u}_t + (\overrightarrow{u}, \nabla)\overrightarrow{u} + g\eta = 0 \end{cases} \tag{1.46}$$

1.4.2 Система Буссинеска и уравнение Картевега-де Фриза (КдФ)

Из системы (1.45), при $\alpha = 0$, т.е. при движении с малой амплитудой получим систему:

$$\begin{cases} \eta_t + u_x = 0 \\ u_t + \eta_x = 0 \end{cases} \tag{1.47}$$

Откуда получим, что:

$$\begin{cases} \eta_{tt} = c_0^2\eta_{xx} \\ u_{tt} = c_0^2 u_{xx} \end{cases} \tag{1.48}$$

Где $c_0^2 = gh_0$ — скорость волны. Пусть α и β одного порядка и малы, т.е. $\alpha = O(\beta)$. Тогда в уравнениях (1.44) удерживаем лишь те члены, которые содержат α и β только в суммарной первой степени. После таких преобразований, дифференцируя второе уравнение по x, получим систему уравнений Буссинеска:

$$\begin{cases} \eta_t + [(1+\alpha\eta)u]_x + \frac{1}{6}\beta u_{xxx} = 0 \\ u_t + \alpha u u_x + \eta_x - \frac{1}{2}\beta u_{xxx} = 0 \end{cases} \tag{1.49}$$

Рассмотрим движение в правую сторону, и пусть α и β равны нулю, тогда из системы (1.49) получается (1.47), и $u = \eta$, $\eta_x + \eta_t = 0$ будет решением системы. Тогда пусть $u = \eta + \alpha A + \beta B + O(\alpha^2 + \beta^2)$. A и B зависят от η и ее производных по x. И ищем в этом виде решение системы (1.49):

$$\begin{cases} \eta_t + \eta_x + \alpha(A_x + 2\eta\eta_x) + \beta(B_x - \frac{1}{6}\eta_{xxx}) + O(\alpha^2 + \beta^2) = 0 \\ \eta_t + \eta_x + \alpha(A_t + \eta\eta_x) + \beta(B_t - \frac{1}{2}\eta_{xxt}) + O(\alpha^2 + \beta^2) = 0 \end{cases} \tag{1.50}$$

Приравниваем коэффициенты при α и β в обоих уравнениях. Учитывая, что $\eta_t = -\eta_x$, откуда следует, что $A_x = -A_t$, и $B_x = -B_t$, получим:

$$A_x + 2\eta\eta_x = A_t + \eta\eta_x + O(\alpha, \beta) = -A_x + \eta\eta_x + O(\alpha, \beta) \Rightarrow 2A_x = -\eta\eta_x \Rightarrow \underline{A = -\frac{1}{4}\eta^2}$$

$$B_x - \frac{1}{6}\eta_{xxx} = B_t - \frac{1}{2}\eta_{xxt} = -B_x + \frac{1}{2}\eta_{xxx} \Rightarrow 2B_x = \frac{2}{3}\eta_{xxx} \Rightarrow \underline{B = \frac{1}{3}\eta_{xx}}.$$

Подставив A и B в одно из уравнений (1.50), получим:

$$\eta_t + \eta_x + \frac{3}{2}\alpha\eta\eta_x + \frac{1}{6}\beta\eta_{xxx} = 0 \ \ (mod\, O(\alpha, \beta)).$$

Откуда получим уравнение Картевега-де Фриза (1895г. для исследования волн в канале):

$$\eta_t + \eta_x + C_1\eta\eta_x + C_2\eta_{xxx} = 0 \tag{1.51}$$

Или:

$$\eta_t + C_0\eta\eta_x + C\eta_{xxx} = 0 \tag{1.52}$$

Где $\eta\eta_x$ — простейшая нелинейность, а η_{xxx} — простейшая дисперсия.

При выводе этого уравнения рассматривалось движение только в одну правую сторону. Если бы рассматривалось в другую, то в уравнении изменились бы знаки.

Глава 2

Метод обратной задачи рассеяния.

2.1 Уравнение Штурма-Лиувилля на полупрямой.

Рассмотрим задачу:

$$y'' - q(x)y + \lambda^2 y = 0,\ x > 0,\ \lambda \in \mathbb{C} \tag{2.1}$$

$$y(0) = 0 \tag{2.2}$$

q(x) — вещественная функция такая, что

$$\int\limits_0^{+\infty} (1 + x)|q(x)|dx \,<\, +\infty. \tag{2.3}$$

Введем обозначения:

$$\sigma(x) = \int\limits_t^{+\infty} |q(t)|dx,\ \ \sigma_1(x) = \int\limits_x^{+\infty} \sigma(t)dt \tag{2.4}$$

2.1.1 Оператор преобразования, свойства ядра $K(x,\, t)$.

Теорема 2.1.1. *Для любых λ таких, что $Im\lambda \geq 0$ существует решение уравнения (2.1) вида:*

$$e(\lambda,\, x) = e^{i\lambda x} + \int\limits_x^{+\infty} K(x,\, t)e^{i\lambda t}dt, \tag{2.5}$$

где $K(x,\, t)$ удовлетворяет следующим условиям:

$$K(x,\, x) = \frac{1}{2}\int\limits_{x}^{+\infty} q(t)dt, \quad \frac{dK(x,\, x)}{dx} = -\frac{1}{2}q(x), \tag{2.6}$$

$$|K(x,t)| \leq \frac{1}{2}\sigma\left(\frac{x+t}{2}\right)e^{\sigma_1(x)-\sigma_1\left(\frac{x+t}{2}\right)} \tag{2.7}$$

Доказательство. Уравнение $y'' + \lambda^2 y = q(x)y$ решается с помощью метода вариации постоянных, откуда и получается формула $y = e(\lambda,\, x)$ для решения. Это уравнение эквивалентно следующему интегральному:

$$e(\lambda,\, x) = e^{i\lambda x} + \int\limits_{x}^{+\infty} \frac{sin[\lambda(t-x)]}{\lambda} q(t)e(\lambda,\, t)dt \tag{2.8}$$

Подставив в (2.8) формулу (2.5):

$$\int\limits_{x}^{+\infty} K(x,\, t)e^{i\lambda t}dt = \int\limits_{x}^{+\infty} \frac{sin[\lambda(t-x)]}{\lambda} q(t)e^{i\lambda t}dt +$$

$$+ \int\limits_{x}^{+\infty} \frac{sin[\lambda(x-t)]}{\lambda} q(t)dt \int\limits_{t}^{+\infty} K(t,\, y)e^{i\lambda y}dy \tag{2.9}$$

Продолжим оператор $K(x,\, t)$ нулем при $t < x$, и перепишем (2.9):

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left\{ K(x,\, t) - \frac{1}{2}\int\limits_{\frac{x+t}{2}}^{+\infty} q(y)dy - \int\limits_{x}^{+\infty} q(s)ds \int\limits_{t-(s-x)}^{t+(s-x)} K(s,\, u)du \right\} e^{i\lambda t}dt = 0. \tag{2.10}$$

Что выполнено при всех вещественных λ, т.е. преобразование Фурье от $\{\ldots\}$ равно нулю $\forall\lambda \in \mathbb{R}$, откуда следует, что сама $\{\ldots\} = 0$:

$$K(x,\, t) = \frac{1}{2}\int\limits_{\frac{x+t}{2}}^{+\infty} q(y)dy + \frac{1}{2}\int\limits_{x}^{+\infty} q(s)ds \int\limits_{t-(s-x)}^{t+(s-x)} K(s,\, u)du \tag{2.11}$$

Пусть $u + s = 2\alpha$, $u - s = 2\beta$, $H(\alpha,\beta) = K(\alpha-\beta,\, \alpha+\beta)$. Используя новые обозначения, перепишем фурмолу (2.11) в виде:

$$H(u,\, v) = \frac{1}{2}\int\limits_{u}^{+\infty} q(y)dy + \int\limits_{u}^{+\infty} d\alpha \int\limits_{0}^{v} q(\alpha-\beta)H(\alpha,\, \beta)d\beta \tag{2.12}$$

Где $\frac{x+t}{2} = u$, $\frac{x-t}{2} = v$, $\Rightarrow$ $t = u + v$, $x = u - v$, и

$$H(u,\, v) = K(u - v,\, u + v) = K(x,\, t). \tag{2.13}$$

Уравнение (2.12) решается методом последовательных приближений.

$$H_0(u,\, v) = \frac{1}{2}\int\limits_u^{+\infty} q(y)dy$$

$$H_n(u,\, v) = \int\limits_u^{+\infty} d\alpha \int\limits_0^v q(\alpha - \beta)H_{n-1}(\alpha,\, \beta)d\beta$$

Тогда надо доказать, что ряд

$$H(u,\, v) = \sum_{n=0}^{+\infty} H_n(u,\, v) \tag{2.14}$$

сходится равномерно на $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$, и выполнена оценка:

$$|H(u,\, v)| \,\le\, \frac{1}{2}\sigma(u)e^{\sigma_1(u-v)-\sigma_1(u)}\,, \tag{2.15}$$

и $H(u,\, v)$ — единственное решение уравнения.

По индукции докажем оценку:

$$|H_n(u,\, v)| \,\le\, \frac{1}{2}\sigma(u)\frac{(\sigma_1(u-v) - \sigma_1(u))^n}{n!} \tag{2.16}$$

При $n = 0$

$$|H_0(u,\, v)| \,\le\, \frac{1}{2}\int\limits_u^{+\infty} |q(y)|dy = \frac{1}{2}\sigma(u)$$

оценка выполнена. Пусть теперь она выполнена при $n - 1$, и докажем ее для n.

$$|H_n(u,\, v)| \le \int\limits_u^{+\infty} d\alpha \int\limits_0^v |q(\alpha - \beta)| \cdot \frac{1}{2}\sigma(\alpha)\frac{(\sigma_1(\alpha - \beta))}{(n-1)!}d\beta \,\le$$

Учитывая, что $\sigma(\alpha) \le \sigma(u)$, т.к. $\alpha \in [u,\, +\infty)$, и функция $\sigma(x)$ — убывающая, получим:

$$\le\, \frac{1}{2}\sigma(u)\int\limits_u^{+\infty} \frac{(\sigma_1(\alpha - v) - \sigma_1(\alpha))^{n-1}}{(n-1)!}d\alpha \int\limits_0^v |q(\alpha - \beta)|d\beta.$$

Учитывая, что

$$\int\limits_0^v |q(\alpha-\beta)|d\beta = \int\limits_{\alpha-v}^{\alpha} |q(y)|dy = \sigma(\alpha-v)-\sigma(\alpha),\ y = \alpha-\beta \text{ - замена переменных}$$

получаем, что выражение равно:

$$\frac{1}{2}\sigma(u)\int\limits_u^{+\infty}\frac{(\sigma_1(\alpha-v)-\sigma_1(\alpha))^{n-1}}{(n-1)!}(\sigma(\alpha-v)-\sigma(\alpha))d\alpha =$$

и так как $(\sigma(\alpha-v)-\sigma(\alpha))d\alpha = -d[\sigma_1(\alpha-v)-\sigma_1(\alpha)]$, то:

$$= -\frac{1}{2}\left.\frac{(\sigma_1(\alpha-v)-\sigma_1(\alpha))^n}{n!}\right|_{\alpha=u}^{\alpha=+\infty} = \frac{1}{2}\frac{(\sigma_1(u-v)-\sigma_1(u))^n}{n!}$$

индукция доказана.

Из (2.16) следует равномерная и абсолютная сходимость ряда (2.14) и оценка (2.15). Учитывая (2.13) получается (2.7). Пусть $x = t$, тогда из формулы (2.11), и того, что при таких аргументах $K(s,\,u) \equiv 0$, следуют фурмулы (2.6). **Теорема 2.1.1 доказана.**

Теорема 2.1.2. *Ядро $K(x,\,t)$ дифференцируемо по обоим аргументам, и выполнены оценки*

$$\left|\frac{\partial K}{\partial x} + \frac{1}{4}q\left(\frac{x+t}{2}\right)\right| \le \sigma(x)\sigma\left(\frac{x+t}{2}\right)e^{\sigma_1(x)-\sigma_1\left(\frac{x+t}{2}\right)} \tag{2.17}$$

$$\left|\frac{\partial K}{\partial t} + \frac{1}{4}q\left(\frac{x+t}{2}\right)\right| \le \sigma(x)\sigma\left(\frac{x+t}{2}\right)e^{\sigma_1(x)-\sigma_1\left(\frac{x+t}{2}\right)}. \tag{2.17^{bis}}$$

Если функция $q(x)$ дифференцируема, то ядро K дифференцируемо два раза, и

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 K}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 K}{\partial t^2} = -q(x)K(x,\,t) \\ \lim\limits_{x+t\to+\infty}\frac{\partial K}{\partial x} = \lim\limits_{x+t\to+\infty}\frac{\partial K}{\partial t} = 0 \end{cases} \tag{2.18}$$

Доказательство. Так как выполнено равенство (2.13), то можно рассматривать производные функции $H(u,\,v)$. Из (2.12) следует существование производных:

$$\begin{cases} \frac{\partial H}{\partial u} = -\frac{1}{2}q(u) - \int\limits_0^v q(u-\beta)H(u,\,\beta)d\beta \\ \frac{\partial H}{\partial v} = \int\limits_u^{+\infty} q(\alpha-v)H(\alpha,\,v)d\alpha \end{cases} \tag{2.19}$$

Откуда следуют оценки:

$$\left|\frac{\partial H}{\partial u} + \frac{1}{2}q(u)\right| \le \int\limits_0^v |q(u-\beta)|\frac{1}{2}\sigma(u)e^{\sigma_1(u-\beta)-\sigma_1(u)} \le$$

$$\leq \frac{1}{2}\sigma(u)e^{\sigma_1(u-v)-\sigma_1(u)}\int\limits_0^v |q(u-\beta)|d\beta \leq$$

так как $\int\limits_0^v |q(u-\beta)|d\beta \leq \sigma(u-v)$, то

$$\leq \frac{1}{2}\sigma(u)\sigma(u-v)e^{\sigma_1(u-v)-\sigma_1(u)} \tag{2.20}$$

Аналогично получается оценка

$$\left|\frac{\partial H}{\partial v}\right| \leq \frac{1}{2}\sigma(u)\sigma(u-v)e^{\sigma_1(u-v)-\sigma_1(u)}. \tag{2.21}$$

Так как (в силу обозначений, введенных в теореме 2.1.1)

$$\frac{\partial K}{\partial x} = \frac{\partial H}{\partial x} = \frac{\partial H}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial H}{\partial u} - \frac{\partial H}{\partial v}\right),$$

то из оценок (2.20) и (2.21) следует оценка (2.17). Аналогичными рассуждениями получается оценка (2.17^{bis}). Из них сразу же следует существование пределов в (2.18). Верно следующее соотношение (из-за того, что при переходе от функции K к H производилась гиперболическая замена переменных):

$$\frac{\partial^2 H}{\partial u \partial v} = \frac{\partial^2 K}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 K}{\partial t^2}$$

С другой стороны

$$\frac{\partial^2 H}{\partial u \partial v} = -q(u-v)H(u,\, v) = -q(x)K(x,\, t),$$

что и доказывает первое соотношение в (2.18). **Теорема 2.1.2 доказана.**

2.1.2 Свойства функций e(λ, x) и e($-\lambda$, x)

Лемма 2.1.1. *Функция $e(\lambda,\, x)$ аналитична по λ в верхней полуплоскости $\{Im\,\lambda \geq 0\}$, и непрерывна по λ вплоть до вещественной оси, и в $\{Im\,\lambda \geq 0\}$ выполнены оценки:*

$$|e(\lambda,\, x)| \leq e^{-Im\,\lambda x + \sigma_1(x)} \overset{df}{=} A \tag{2.22}$$

$$\left|e(\lambda,\, x) - e^{i\lambda x}\right| \leq \left(\sigma_1(x) - \sigma_1\left(x + \frac{1}{|\lambda|}\right)\right) e^{-Im\,\lambda x + \sigma_1(x)} \tag{2.23}$$

$$\left|e'_x(\lambda,\, x) - i\lambda e^{i\lambda x}\right| \leq \sigma(x)e^{-Im\,\lambda x + \sigma_1(x)} \tag{2.24}$$

И при вещественных $\lambda \neq 0$ функции $e(\lambda,\, x)$ и $e(-\lambda,\, x)$ образуют фундаментальную систему решений уравнения Штурма-Лиувилля, их определитель Вронского (вронскиан) равен $W = 2i\lambda$.

Доказательство. Напомним формулы для функции $e(\lambda,\, x)$:

$$e(\lambda,\, x) = e^{i\lambda x} + \int\limits_x^{+\infty} K(x,\, t)e^{i\lambda t}dt \qquad (v)$$

$$e(\lambda,\, x) = e^{i\lambda x} + \int\limits_x^{+\infty} \frac{sin[\lambda(x-t)]}{\lambda}q(t)e(\lambda,\, t)dt \qquad (vv)$$

Из формулы (v) сразу следует аналитичность функции, так как интеграл сходится равномерно, а экспонента — аналитическая функция. Учитывая, что $|e^z| = e^{Re\, z} \le e^{|z|}$,докажем (2.22):

$$|e(\lambda,\, x)| = \left| e^{i\lambda x} + \int\limits_x^{+\infty} K(x,\, t)e^{i\lambda t}dt \right| \le e^{-Im\, \lambda x}\left(1 + \int\limits_x^{+\infty} |K(x,\, t)|dt\right)$$

Учитывая оценку (2.7), можно написать, что это

$$\le e^{-Im\, \lambda x}\left(1 + \frac{1}{2}\int\limits_x^{+\infty} \sigma\left(\frac{x+t}{2}\right)e^{\sigma_1(x)-\sigma_1\left(\frac{x+t}{2}\right)}dt\right)$$

Посчитаем интеграл, стоящий в выражении:

$$\frac{1}{2}\int\limits_x^{+\infty} \ldots dt = \frac{1}{2}e^{\sigma_1(x)}\int\limits_x^{+\infty} \sigma\left(\frac{x+t}{2}\right)e^{-\sigma_1\left(\frac{x+t}{2}\right)}dt$$

Так как $\sigma\left(\frac{x+t}{2}\right)dt = -\frac{1}{2}d\sigma_1\left(\frac{x+t}{2}\right)$, то можно продолжить равенство, и написать чему равен этот интеграл:

$$= e^{\sigma_1(x)} \cdot e^{-\sigma_1\left(\frac{x+t}{2}\right)}\Big|_{t=x}^{t=+\infty} = e^{\sigma_1(x)}\left(1 - e^{-\sigma_1(x)}\right) = e^{\sigma_1(x)} - 1$$

Поэтому в оценке можно продолжить равенство. Получим:

$$|e(\lambda,\, x)| \le e^{-Im\, \lambda x + \sigma_1(x)}.$$

Оценка (2.22) доказана. Докажем оценки (2.23) и (2.24). Они доказываются одинаковым методом.

$$\left|e(\lambda,\, x) - e^{i\lambda x}\right| \le \int\limits_x^{+\infty} \left|\frac{sin[\lambda(t-x)]}{\lambda}\right| |q(t)|e^{-Im\, \lambda(t-x) - Im\, \lambda x + \sigma_1(t)}dt$$

Так как $\sigma_1(t) \le \sigma_1(x)$ в этом интеграле, то можно продолжить оценку:

$$\le A\int\limits_x^{+\infty} \left|\frac{sin[\lambda(t-x)]}{\lambda}\right| |q(t)|e^{-Im\, \lambda(t-x)}dt \qquad (2.25)$$

Для получения оценки (2.24) продифференцируем (vv). Получим:

$$\left|e'_x(\lambda,\, x) - i\lambda e^{i\lambda x}\right| \leq A \int\limits_x^{+\infty} |cos[\lambda(t-x)]| e^{-Im\,\lambda(t-x)}|q(t)|dt \tag{2.26}$$

Оценим в (2.25) подынтегральную функцию, при условии, что $y > 0$:

$$\left|\frac{sin(\lambda y)}{\lambda}e^{-Im\,\lambda y}\right| = \left|\frac{e^{-Im\,\lambda y + iRe\,\lambda y} - e^{Im\,\lambda y - iRe\,\lambda y}}{2i\lambda}e^{-Im\,\lambda y}\right| =$$

$$= \left|\frac{e^{-2Im\,\lambda y + 2iRe\,\lambda y} - 1}{2i\lambda}\right| \{\stackrel{\text{df}}{=} B\} \leq \frac{1}{|\lambda|}$$

при этом:

$$B = \frac{1}{2|\lambda|}\left|e^{2i\lambda y}\right| = \left|\int\limits_0^y e^{2i\lambda t}dt\right| \leq y \;\text{ так как }\left|e^{2i\lambda t} \leq 1\right|$$

Откуда получается оценка:

$$\left|\frac{sin(\lambda y)}{\lambda}e^{-Im\,\lambda y}\right| \leq min\{\frac{1}{|\lambda|},\, y\},\; y \geq 0 \tag{2.27}$$

Аналогично получается:

$$\left|cos(\lambda y)e^{-Im\,\lambda y}\right| \leq 1 \tag{2.28}$$

Оцениваем (2.25):

$$\left|e(\lambda,\, x) - e^{i\lambda x}\right| \leq A \int\limits_x^{x+\frac{1}{|\lambda|}} (t-x)|q(t)|dt + A \int\limits_{x+\frac{1}{|\lambda|}}^{+\infty} \frac{1}{|\lambda|}|q(t)|dt =$$

первый интеграл считается по частям

$$= -A\;(t-x)\sigma(t)|_x^{x+\frac{1}{|\lambda|}} + A \int\limits_x^{x+\frac{1}{|\lambda|}} \sigma(t)dt + A\frac{1}{|\lambda|}\sigma\left(x+\frac{1}{|\lambda|}\right) =$$

$$= A\left(\sigma_1(x) - \sigma_1\left(x+\frac{1}{|\lambda|}\right)\right)$$

Оценка (2.23) доказана. Оцениваем (2.26):

$$\left|e'_x - i\lambda e^{i\lambda x}\right| \leq A \int\limits_x^{+\infty} |q(t)|dt = A\sigma(x)$$

оценка (2.24) доказана.

При вещественных $\lambda \neq 0$ обе функции $e(\lambda, x)$ и $e(-\lambda, x)$ есть решения уравнения Штурма-Лиувилля, поэтому вронскиан не зависит от x т.к. из курса обыкновенных дифференциальных уравнений следует, что либо вронскиан нуль, либо константа, отличная о нуля. Пусть $x \to +\infty$, тогда при подстановке в выражение для определителя формул (2.23) и (2.24) получим, что $W(e(\lambda, x), e(-\lambda, x)) = 2i\lambda$, поэтому эти функции линейно независимы. **Лемма 2.1.1 доказана.**

Лемма 2.1.2. $\forall\, \lambda$ *существует решение уравнения Штурма-Лиувилля* $w(\lambda, x)$*:*

$$\begin{cases} w(\lambda, x) = x(1 + o(1)), \ x \to 0 \\ w'(\lambda, x) = 1 + o(1), \ x \to 0 \end{cases} \tag{$*$}$$

Доказательство. Методом вариации постоянных получаем, что

$$w(\lambda, x) = \frac{sin(\lambda x)}{\lambda} + \int\limits_0^x \frac{sin[\lambda(x-t)]}{\lambda} q(t) w(\lambda, t) dt \tag{2.29}$$

Решение этого уравнения эквивалентно решению уравнения Штурма-Лиувилля. Решение ищем в виде $w = xe^{-i\lambda x} Z(\lambda, x)$. Подставим это представление в (2.29), получим:

$$Z(\lambda, x) = \frac{sin(\lambda x)}{\lambda x} e^{i\lambda x} + \int\limits_0^x t \frac{sin[\lambda(x-t)]}{\lambda x} q(t) e^{i\lambda(x-t)} Z(\lambda, t) dt. \tag{2.30}$$

Решение данного уравнения ищем методом последовательных приближений.

$$Z(\lambda, x) = \sum_{k=0}^{+\infty} Z_k(\lambda, x) \tag{2.31}$$

где

$$Z_0(\lambda, x) = \frac{sin(\lambda x)}{\lambda x} e^{i\lambda x}$$

$$Z_k(\lambda, x) = \int\limits_0^x t \frac{sin[\lambda(x-t)]}{\lambda x} q(t) e^{i\lambda(x-t)} Z_{k-1}(\lambda, t) dt$$

Учитывая, что

$$\left| \frac{sin(\lambda x)}{\lambda x} e^{i\lambda x} \right| = \left| \frac{1}{x} \int\limits_0^x e^{2i\lambda\xi} d\xi \right| \leq 1,$$

то ряд (2.31) мажорируется рядом

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \xi_k(x), \ \xi_0(x) \equiv 1, \ \xi_k(x) = \int\limits_0^x t|q(t)|\xi_{k-1}(t) dt \tag{2.32}$$

Докажем по индукции следующую оценку:

$$0 \le \xi_k(x) \le \frac{1}{k!}\left(\int\limits_0^x t|q(t)|dt\right)^k \tag{2.33}$$

При $k=0$ оценка верна. Пусть она верна для $k-1$, докажем ее для k:

$$\xi_k(x) \le \int\limits_0^x t|q(t)|\frac{1}{(k-1)!}\left(\int\limits_0^t y|q(y)|dy\right)^{k-1} dt =$$

$$= \frac{1}{(k-1)!k}\int\limits_0^x \frac{d}{dt}\left(\int\limits_0^t y|q(y)|dy\right)^k dt = \frac{1}{k!}\left(\int\limits_0^x y|q(y)|dy\right)^k$$

Оценка (2.33) доказана. Из нее следует, что

$$\xi(x) \le exp\left\{\int\limits_0^x t|q(t)|dt\right\} \tag{2.34}$$

Так же из (2.33) следует, что ряд (2.32) сходится равномерно на $x \in [0, +\infty)$, так как функция $t|q(t)|$ интегрируема. Поэтому и ряд (2.31) сходится равномерно, и он является решением уравнения (2.30), откуда следует, что $w(\lambda, x)$ — решение уравнения Штурма-Лиувилля и она аналитична по λ в $\{Im\,\lambda \ge 0\}$ и непрерывна по λ вплоть до $\{Im\,\lambda = 0\}$ (это показывется аналогично как и для функции $e(\lambda, x)$). Аналогично можно показать, что $w(\lambda, x)$ аналитична в $Im\,\lambda \le 0$, откуда следует, что она целая.

$$w(\lambda, x) = xe^{-i\lambda x}Z(\lambda, x) \Rightarrow \left|w(\lambda, x)e^{i\lambda x}\right| = |xZ(\lambda, x)|$$

Тогда из оценки для функции (2.34) следует, что

$$|Z(\lambda, x)| \le exp\left\{\int\limits_0^x t|q(t)|dt\right\}, \tag{2.35}$$

поэтому

$$\left|w(\lambda, x)e^{i\lambda x}\right| \le x \cdot exp\left\{\int\limits_0^x t|q(t)|dt\right\} \tag{2.36}$$

Из чего и следует аналитичность функции. Используя (2.36) и (2.29) получим:

$$\left|w(\lambda, x) - \frac{sin(\lambda x)}{\lambda}\right| \le x\left|\int\limits_0^x \frac{sin[\lambda(x-t)]}{\lambda x}e^{i\lambda(x-t)}e^{i\lambda t}w(\lambda, t)e^{-i\lambda x}q(t)dt\right| \le$$

$$\leq \int\limits_0^x t \cdot exp\left\{\int\limits_0^x y|q(y)|dy\right\} \cdot e^{|Im\,\lambda x|}|q(t)|dt \leq$$

$$\leq x \cdot exp\left\{|Im\,\lambda x| + \int\limits_0^x t|q(t)|dt\right\} \cdot \int\limits_0^x t|q(t)|dt \qquad (2.37)$$

Откуда и следует первая асимптотическая оценка $(*)$. Докажем вторую оценку. Дифференцируя по x выражение (2.29), получим:

$$|w'(\lambda,\, x) - cos(\lambda x)| \leq \left|\int\limits_0^x cos[\lambda(x-t)]q(t)e^{-i\lambda t}e^{i\lambda t}w(\lambda,\, t)dt\right| \leq$$

аналогичными оценками получаем:

$$\leq exp\left\{|Im\,\lambda x| + \int\limits_0^x t|q(t)|dt\right\} \cdot \int\limits_0^x t|q(t)|dt$$

Откуда и следует вторая асимптотика в $(*)$. **Лемма 2.1.2 доказана.**

Лемма 2.1.3. $\forall\,\lambda$ — *вещественных и отличных от нуля выролнено тождество:*

$$-\frac{2i\lambda w(\lambda,\, x)}{e(\lambda,\, 0)} = e(-\lambda,\, x) - s(\lambda)e(\lambda,\, x)$$

где

$$s(\lambda) = \frac{e(-\lambda,\, 0)}{e(\lambda,\, 0)} \qquad (2.38)$$

Доказательство. В силу определения функции $s(\lambda)$ выполнены следующие соотношения:

$$s(\lambda) = \overline{\left(\frac{e(\lambda,\, 0)}{e(-\lambda,\, 0)}\right)} = \overline{s(-\lambda)} = (s(-\lambda))^{-1}.$$

Так как $\lambda \neq 0$ и вещественное, то $e(\lambda,\, x)$ и $e(-\lambda,\, x)$ образуют фундаментальную систему решений. Поэтому

$$w(\lambda,\, x) = a^-(\lambda)e(-\lambda,\, x) + a^+(\lambda)e(\lambda,\, x) \qquad (i)$$

И вронскиан равен:

$$W(w(\lambda,\, x),\, e(\mp\lambda,\, x)) = \pm 2i\lambda a^{\pm}(\lambda)$$

и в силу асимптотических оценок из леммы (2.1.2)

$$\lim_{x\to 0}[w'(\lambda,\, x)e(\mp\lambda,\, x) - w(\lambda,\, x)e'(\mp\lambda,\, x)] = e(\mp\lambda,\, 0)$$

Откуда получаем, что:

$$\pm 2i\lambda a^{\pm}(\lambda) = e(\mp\lambda,\, 0) \;\Rightarrow\; a^{+} = \frac{1}{2i\lambda}e(-\lambda,\, 0),\;\; a^{-} = -\frac{1}{2i\lambda}e(\lambda,\, 0)$$

При подстановке этих выражений в (i) получим:

$$2i\lambda w(\lambda,\, x) = -e(\lambda,\, 0)e(-\lambda,\, x) + e(-\lambda,\, 0)e(\lambda,\, x)$$

Так как $e(-\lambda,\, 0) = \overline{e(\lambda,\, 0)}$, то при любом $\lambda \neq 0$ функция $e(\lambda,\, 0) \neq 0$, поэтому можно разделить на нее последнее соотношение, что и приведет к равенству, указанному в формулировке леммы. **Лемма 2.1.3 доказана.**

2.1.3 Нули функции $\mathbf{e}(\lambda,\, \mathbf{0})$ в полуплскости $\{Im\,\lambda \geq 0\}$

Так как функция $e(\lambda,\, x)$ удовлетворяет уравнению Штурма-Лиувилля в пространстве $\mathcal{L}_2$, что будет показано ниже, то отсюда и из выкладок следующей леммы следует, что нули функции $e(\lambda,\, 0)$ являются собственными числами дифференциального оператора $-\frac{d^2}{dx^2} + q(x)$.

Лемма 2.1.4. *Функция $e(\lambda,\, 0)$ может иметь в $Im\,\lambda \geq 0$ лишь конечное число нулей, при этом все они являются простыми и чисто мнимыми.*

Доказательство. Рассмотрим формулу (2.23). При $x = 0$ функция $e(\lambda,\, 0) \to 1$, при $\lambda \to \infty$. Следовательно, нули находятся в некоторой ограниченной области. А поскольку, $e(\lambda,\, 0)$ аналитична, то нулей может быть не более, чем счетное число, и предельной точкой может быть лишь $e(0,\, 0)$. Пусть μ — нуль функции, тогда либо $\mu = 0$, либо $Im\,\mu > 0$. Учитывая оценки для $w(\lambda,\, x)$ из леммы (2.1.2) посчитаем следующий предел для определителя Вронского:

$$\lim_{x\to 0} W(w(\mu,\, x),\, \overline{e(\mu,\, x)}) = \lim_{x\to 0}(w'(\mu,\, x)\overline{e(\mu,\, x)} - w(\mu,\, x)\overline{e'(\mu,\, x)}) = \overline{e(\mu,\, 0)} = 0$$

Откуда следует, что эти функции линейно зависимы, т.е.

$$e(\mu,\, x) = c(\mu)w(\mu,\, x) \;\Rightarrow\; e'(\mu,\, x) = c(\mu)w'(\mu,\, x)$$

Так как $w'(\mu,\, 0) = 1$, то

$$e'(\mu,\, 0) = c(\mu) \;\Rightarrow\; e(\mu,\, x) = e'(\mu,\, 0)w(\mu,\, x) \tag{2.39}$$

Пусть μ_1 и μ_2 — какие-нибудь нули функции $e(\lambda,\, 0)$. Тогда

$$\lim_{x\to 0} W(e(\mu_1,\, x),\, \overline{e(\mu_2,\, x)}) =$$

$$= \lim_{x\to 0}\Big(e'(\mu_1,\, 0)w'(\mu_1,\, x)\overline{e'(\mu_2,\, 0)w(\mu_2,\, x)} -$$

$$- e'(\mu_1,\, 0)w(\mu_1,\, x)\overline{e'(\mu_2,\, 0)w'(\mu_2,\, 0)}\Big) = 0 \tag{2.40}$$

Так как функции $e(\mu_{1,2},\, x)$ — являются решениями соответствующих уравнений Штурма-Лиувилля, то:

$$e''(\mu_1,\, x) - q(x)e(\mu_1,\, x) + \mu_1^2 e(\mu_1,\, x) = 0 \ \times \overline{e(\mu_2,\, x)}$$

$$\overline{e''(\mu_2,\, x)} - q(x)\overline{e(\mu_2,\, x)} + \overline{\mu_2^2 e(\mu_2,\, x)} = 0 \ \times e(\mu_1,\, x)$$

Вычтем одно уравнение из другого и проинтегрируем от a до b.

$$0 = (\mu_1^2 - \overline{\mu_2^2}) \int\limits_a^b e(\mu_1,\, x)\overline{e(\mu_2,\, x)}dx + W[e(\mu_1,\, x)\overline{e(\mu_2,\, x)}]\Big|_a^b \tag{2.41}$$

Пусть $a \to 0$, а $b \to +\infty$.Тогда из фурмул (2.40), (2.22), (2.23), (2.24) следует, что $W|_0^{+\infty} = 0$, поэтому:

$$0 = (\mu_1^2 - \overline{\mu_2^2}) \int\limits_0^{+\infty} e(\mu_1,\, x)\overline{e(\mu_2,\, x)}dx \tag{2.42}$$

Пусть $\mu_1 = \mu_2$, тогда $e(\mu_1,\, x)\overline{e(\mu_2,\, x)} = |e(\mu_1,\, x)|^2 > 0$. Поэтому получается, что $\mu_1^2 = \overline{\mu_2^2}$, откуда следует, что μ_1 и μ_2 чисто мнимые.

Если $e(0,\, 0) \neq 0$, то нулей конечное число, так как у ограниченной последовательности нет предельной точки. Пусть теперь $e(0,\, 0) = 0$. И пусть функция $e(\lambda,\, 0)$ имеет бесконечное количество нулей. Определим $\delta = inf\, \rho(\mu_k,\, \mu_{k+1})$. Для доказательства утверждения леммы надо показать, что δ строго больше нуля. Пусть это не так. Тогда существуют последовательности нулей $\{i\tilde{\lambda}_k\}$ и $\{i\lambda_k\}$ такие, что $\tilde{\lambda}_k > \lambda_k \geq 0,\, \lambda_k,\, \tilde{\lambda}_k \leq M < +\infty$. Функция

$$e(\lambda,\, x) = e^{i\lambda x} + \int\limits_x^{+\infty} K(x,\, t)e^{i\lambda t}dt$$

и из оценки (2.5) следует, что, при больших A выполнена оценка:

$$e(i\lambda,\, x) > \frac{1}{2}e^{-\lambda x},\; x \in [A,\, +\infty),\, \lambda \in [0,\, +\infty)$$

Тогда:

$$\int\limits_A^{+\infty} e(i\tilde{\lambda}_k,\, x)\overline{e(i\lambda_k,\, x)}dx > \frac{1}{4}\int\limits_A^{+\infty} e^{-x(\tilde{\lambda}_k+\lambda_k)}dx =$$

$$= \frac{1}{4}\frac{e^{-A(\tilde{\lambda}_k+\lambda_k)}}{(\tilde{\lambda}_k+\lambda)} > \frac{e^{-2AM}}{8M} \tag{2.43}$$

Положим в формуле (2.42) $\{\mu_1 = i\tilde{\lambda}_k\} \neq \{\mu_2 = i\lambda_k\}$, тогда

$$\int\limits_0^{+\infty} e(i\tilde{\lambda}_k,\, x)\overline{e(i\lambda_k,\, x)}dx = 0$$

Откуда следует:

$$0 = \int\limits_0^A e(i\tilde{\lambda}_k,\, x)\left[\overline{e(i\lambda_k,\, x)} - \overline{e(i\tilde{\lambda}_k,\, x)}\right]dx +$$

$$+\int\limits_0^A e(i\tilde{\lambda}_k,\, x)\overline{e(i\tilde{\lambda}_k,\, x)}dx + \int\limits_A^{+\infty} e(i\tilde{\lambda}_k,\, x)\overline{e(i\lambda_k,\, x)}dx \tag{2.44}$$

Теперь пусть в (2.44) $k \to +\infty$, тогда по предположению $\tilde{\lambda}_k - \lambda_k \to 0$, поэтому

$$\int\limits_0^A e(i\tilde{\lambda}_k,\, x)\left[\overline{e(i\lambda_k,\, x)} - \overline{e(i\tilde{\lambda}_k,\, x)}\right]dx \to 0$$

Учитывая оценку (2.43), получим:

$$0 \geq \varliminf_{k\to+\infty} \int\limits_0^A e(i\tilde{\lambda}_k,\, x)\overline{e(i\tilde{\lambda}_k,\, x)}dx \tag{2.45}$$

Но формулы (2.43), (2.44) и (2.45) находятся в противоречии. Так как при $k \to +\infty$ интеграл будет стремиться к

$$\int\limits_0^A |e(0,\, x)|^2 dx$$

откуда следует, что $e(0,\, x) \equiv 0$, что противоречит оцеке (2.43), поэтому наше предположение не верно, и $\rho(\mu_k,\, \mu_{k+1}) \nrightarrow 0$ и, следовательно, нулей конечное число.

Простота корней. В дальнейшем будем обозначать $\frac{d}{d\lambda}e = \dot{e}$. Уравнение Штурма-Лиувилля

$$e''(\lambda,\, x) - q(x)e(\lambda,\, x) + \lambda^2 e(\lambda,\, x) = 0$$

продифференцируем по λ:

$$\dot{e}''(\lambda,\, x) - q(x)\dot{e}(\lambda,\, x) + \lambda^2\dot{e}(\lambda,\, x) + 2\lambda e(\lambda,\, x) = 0$$

Умножим его на $e(\lambda,\, x)$ и проинтегрируем по x от a до b, а затем вычтем одно уравнение из другого. Тогда получим:

$$2\lambda\int\limits_a^b e^2(\lambda,\, x)dx - W\left(\dot{e}(\lambda,\, x),\, e(\lambda,\, x)\right)\Big|_a^b = 0$$

Пусть $a \to 0$, $b \to +\infty$, $\lambda = i\mu$, $\mu > 0$. Учитывая формулы (2.39) и (2.40), получим:

$$2\lambda \int\limits_0^{+\infty} e^2(\lambda,\, x)dx + e'(\lambda,\, 0)\dot{e}(\lambda,\, 0) = 0 \;\Rightarrow$$

$$2i\mu \int\limits_0^{+\infty} |e(i\mu,\, x)|^2\, dx = -\dot{e}(i\mu,\, 0)e'(i\mu,\, 0)$$

Так как $\int\limits_0^{+\infty} |e(i\mu,\, x)|^2\, dx \neq 0$, то и $\dot{e}(i\mu,\, 0) \neq 0$, что и означает простоту корней. **Лемма 2.1.4 доказана.**

2.2 Равенство Парсеваля и уравнение Гельфанда-Левитана-Марченко.

Нулей $\{i\lambda_k\}$ — конечное число, $0 < \lambda_1 < \ldots < \lambda_n$.

$$m_k^{-2} \stackrel{\text{df}}{=} \int\limits_0^{+\infty} |e(i\lambda_k,\, x)|^2\, dx = -\frac{1}{2i\lambda_k}\dot{e}(i\lambda_k,\, 0)e'(i\lambda_k,\, 0) \text{ — норма} \tag{2.46}$$

$$\begin{cases} u(\lambda,\, x) = e(-\lambda,\, x) - s(\lambda)e(\lambda,\, x) \\ u(i\lambda_k,\, x) = m_k e(i\lambda_k,\, x) \end{cases} \tag{2.47}$$

Это решение задачи Штурма-Лиувилля с начальным условием $y(0) = 0$. Надо показать полноту и замкнутость функций (2.47).

Полнота показывается при помощи равенства Парсеваля: $\forall\, f,\, g \in \mathcal{L}_2(\mathbb{R}^+)$

$$(f,\, g)_{\mathcal{L}_2} = \sum_{k=1}^{n} u(i\lambda_k,\, f)\overline{u(i\lambda_k,\, g)} + \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{+\infty} u(\lambda,\, f)\overline{u(\lambda,\, g)}d\lambda \tag{2.48}$$

где сумма отвечает дискретному спектру, а интеграл — непрерывному, где

$$u(\lambda,\, f) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{+\infty} f(x)u(\lambda,\, x)dx, \quad (f,\, g)_{\mathcal{L}_2} \int\limits_0^{+\infty} f(x)\overline{g(x)}dx$$

Надо доказать это равенство. Введем оператор:

$$K(x,\, t): \quad [Kf](x) = \int\limits_x^{+\infty} K(x,\, t)f(t)dt$$

и найдем его сопряженный. По определению $K^*: (Kf, g) = (f, K^*g)$ при $0 \le x \le t < +\infty$.

$$\int_0^{+\infty} \left(\int_x^{+\infty} K(x, t) f(t) dt \right) \overline{g(x)} dx =$$

$$= \int_0^{+\infty} f(t) \int_0^t K(x, t) \overline{g(x)} dx\, dt = \int_0^{+\infty} f(t) \overline{K^* g(t)} dt$$

откуда следует, что

$$[K^* g](t) = \int_0^t K(x, t) g(x) dx.$$

Используя (2.47), найдем $u(\lambda, f)$:

$$\int_0^{+\infty} f(x) e(\lambda, x) dx = \int_0^{+\infty} f(x) \left[e^{-i\lambda x} + \int_x^{+\infty} K(x, t) e^{-i\lambda t} dt \right] dx =$$

$$= \int_0^{+\infty} f(x) e^{-i\lambda x} dx + \int_0^{+\infty} f(x) \left[\int_x^{+\infty} K(x, t) e^{-i\lambda t} dt \right] dx =$$

$$= \int_0^{+\infty} f(t) e^{-i\lambda t} dt + \int_0^{+\infty} e^{-i\lambda t} \left[\int_0^t K(x, t) f(x) dx \right] dt =$$

$$= \int_0^{+\infty} e^{-i\lambda t} \left[f(t) + \int_0^t K(x, t) f(x) dx \right] dt =$$

Обозначим

$$f^*(t) \stackrel{\mathrm{df}}{=} (I + K^*) f = \left[f(t) + \int_0^t K(x, t) f(x) dx \right]$$

и положим $f^*(t) \equiv 0$, $t \le 0$. Продолжим равенство:

$$= \int_0^{+\infty} e^{-i\lambda t} f^*(t) dt = \tilde{f}^*(\lambda), \quad \text{— преобразование Фурье.}$$

Тогда:

$$\begin{cases} u(\lambda, f) = \tilde{f}^*(\lambda) - s(\lambda) \tilde{f}^*(-\lambda) \\ \overline{u(\lambda, g)} = \overline{\tilde{g}^*(\lambda)} - \overline{s(\lambda)}\, \overline{\tilde{g}^*(-\lambda)} \\ u(i\lambda_k, f) = m_k \int\limits_0^{+\infty} f^*(x) e^{-\lambda_k x} dx \end{cases} \tag{2.49}$$

Подставим (2.49) в (2.48):

$$J=\int\limits_0^{+\infty}\int\limits_0^{+\infty}\left\{\sum_{k=1}^{n}m_k^2e^{-\lambda_k(x+y)}\right\}f^*(x)\overline{g^*(y)}dx\,dy+$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{+\infty}\tilde{f}^*(\lambda)\overline{\tilde{g}^*(\lambda)}d\lambda-\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{+\infty}\tilde{f}^*(\lambda)\overline{s(\lambda)}\,\overline{\tilde{g}^*(-\lambda)}d\lambda-$$

$$-\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{+\infty}s(\lambda)\tilde{f}^*(-\lambda)\overline{\tilde{g}^*(\lambda)}+\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{+\infty}s(\lambda)\overline{s(\lambda)}\tilde{f}^*(-\lambda)\overline{\tilde{g}^*(-\lambda)}$$

По лемме 2.1.3 $s(\lambda)\overline{s(\lambda)}=1$. Учитывая, что:

$$\int\limits_0^{+\infty}\tilde{f}^*(-\lambda)\overline{\tilde{g}^*(\lambda)}d\lambda=\int\limits_{-\infty}^{0}\tilde{f}^*(\lambda)\overline{\tilde{g}^*(\lambda)}d\lambda$$

$$\int\limits_0^{+\infty}\overline{s(\lambda)}\tilde{f}^*(\lambda)\overline{\tilde{g}^*(-\lambda)}d\lambda=\int\limits_{-\infty}^{0}s(\lambda)\tilde{f}^*(-\lambda)\overline{\tilde{g}^*(\lambda)}d\lambda$$

Так как по лемме 2.1.3 $\overline{s(-\lambda)}=s(\lambda)$. Используя равенство Парсеваля для преобразрвания Фурье в $\mathcal{L}_2$, получим:

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\tilde{f}^*(\lambda)\overline{\tilde{g}^*(\lambda)}d\lambda=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f^*(x)\overline{g^*(x)}dx=(f^*,\,g^*)_{\mathcal{L}_2}$$

$$\frac{1}{2\pi}\tilde{f}^*(-\lambda)\overline{\tilde{g}^*(\lambda)}d\lambda=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f^*(-x)\overline{g^*(x)}dx=0$$

так как по определению $f^*(x)\equiv 0,\, x\le 0$. Учитывая все эти выкладки, можно написать, что:

$$J=\int\limits_0^{+\infty}\int\limits_0^{+\infty}\left\{\sum_{k=1}^{n}m_k^2e^{-\lambda_k(x+y)}\right\}f^*(x)\overline{g^*(y)}dx\,dy+$$

$$+(f^*,\,g^*)+\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}(1-s(\lambda))\tilde{f}^*(-\lambda)\overline{\tilde{g}^*(\lambda)}d\lambda$$

Определим вещественную функцию:

$$F(x)\overset{df}{=}\sum_{k=1}^{n}m_k^2e^{-\lambda_k x}+\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}(1-s(\lambda))e^{i\lambda x}d\lambda \tag{2.50}$$

Поэтому можно переписать:

$$J = \int\limits_0^{+\infty} \int\limits_0^{+\infty} F(x+y) f^*(x) \overline{g^*(y)} dx\, dy + (f^*,\, g^*) \tag{2.51}$$

Определим самосопряженный и ограниченный в $\mathcal{L}_2$ оператор:

$$F[f](x) \stackrel{\mathrm{df}}{=} \int\limits_0^{+\infty} F(x+y) f(y) dy$$

Учитывая это определение, J можно записать в виде скалярного произведения:

$$J = ((I+F)[f^*],\, g^*) = ((I+F)(I+K^*)f,\, (I+K^*)g) =$$

$$= ((I+K)(I+F)(I+K^*)f,\, g)$$

И надо доказать, что это выражение равно $(f,\, g)$, т.е. опреатор

$$(I+K)(I+F)(I+K^*) \equiv I$$

Или, что вытекает после раскрытия скобок,

$$K + F + K^* + KF + KK^* + FK^* + KFK^* \equiv 0 \tag{2.52}$$

Это интегральный оператор с ядром:

$$\Phi(x,\, y) = K(x,\, y) + F(x+y) + K(y,\, x) +$$

$$+ \int\limits_x^{+\infty} K(x,\, t) F(t+y) dt + \int\limits_y^{+\infty} K(y,\, t) F(t+x) dt +$$

$$+ \int\limits_0^{+\infty} K(x,\, t) K(y,\, t) dt + \int\limits_x^{+\infty} K(x,\, t) \int\limits_y^{+\infty} K(y,\, \xi) F(t+\xi) d\xi\, dt$$

И это должно равняться нулю. Так как $\Phi(x,\, y) = \Phi(y,\, x)$, то достаточно показать, что

$$\Phi(x,\, y) = 0,\ y > x \tag{2.53}$$

Так как $K(y,\, x) = 0,\ y > x$, то определим функцию

$$\varphi_x(y) \stackrel{\mathrm{df}}{=} K(x,\, y) + F(x+y) + \int\limits_x^{+\infty} K(x,\, t) F(t+y) dt$$

Поэтому можно написать, что

$$\Phi(x,\, y) = \varphi_x(y) + \int\limits_{y}^{+\infty} K(y,\, t)\varphi_x(t)dt = (I+K)[\varphi_x(y)] \qquad (2.54)$$

В силу теоремы 2.1.1 следует, что оператор $(I+K)$ обратим в $\mathcal{L}_2$, поэтому $\Phi(x,\, y) = 0,\ y > x \Leftrightarrow \varphi_x(y) = 0,\, y > x \geq 0$. Поэтому при любом фиксированном $x > 0$ и $y \geq x \geq 0$ должно выполняться $\varphi_x(y) \equiv 0$, что означает, что для ядра $K(x,\, t)$ должно выполняться уравнение Гельфанда-Левитана-Марченко:

$$K(x,\, y) + F(x+y) + \int\limits_{y}^{+\infty} K(x,\, t)F(t+y)dt = 0 \qquad (2.55)$$

С помощью соотношений из леммы 2.1.3 можно получить, что $K(x,\, t)$ — единственное решение уравнения (2.55). Таким образом равенство Парсеваля доказано.

2.2.1 Свойства функции $s(\lambda)$ и число собственных значений задачи Штурма-Лиувилля.

Лемма 2.2.1. *Функция $s(\lambda)$ непрерывна на вещественной прямой, и число мнимых корней функции $e(\lambda,\, 0)$ равно*

$$n = \frac{ln(s(+0)) - ln(s(+\infty))}{2\pi i} - \frac{1-s(0)}{4}$$

Доказательство. Функция

$$e(\lambda,\, x) = e^{i\lambda x} + \int\limits_{x}^{+\infty} K(x,\, t)e^{i\lambda t}dt$$

где ядро $K(x,\, t)$ удовлетворяет уравнению ГЛМ:

$$F(x+y) + K(x,\, y) + \int\limits_{x}^{+\infty} K(x,\, t)F(x+y)dt = 0$$

Функция $s(\lambda) = \frac{e(-\lambda,\, 0)}{e(\lambda,\, 0)}$ непрерывна всюду на вещественной оси кроме, быть может, точки $\lambda = 0$.

1. Если $e(0,\, 0) \neq 0$, то $s(0) = 1$, и поэтому непрерывна.
2. Если же $e(0,\, 0) = 0$, то:

$$e(0,\, 0) = 1 + \int\limits_{0}^{+\infty} K(0,\, t)dt = 0 \qquad (2.56)$$

Положим в уравнении (2.55) $x = 0$:

$$F(y) + K(0,\, y) + \int\limits_0^{+\infty} K(0,\, t)F(t+y)dt = 0$$

Проинтегрируем полученное соотношение по y от z до $+\infty$:

$$\int\limits_z^{+\infty} F(y)dy + \int\limits_z^{+\infty} K(0,\, y)dy + \int\limits_z^{+\infty} dy \int\limits_0^{+\infty} K(0,\, t)F(t+y)dt = 0$$

Обозначим:

$$a = \int\limits_z^{+\infty} F(y)dy$$

$$b = \int\limits_z^{+\infty} K(0,\, y)dy$$

и проведем замену переменных в повторном интеграле: $t + y = \xi$. Получим, что выражение равно:

$$a+b+\int\limits_0^{+\infty} K(0,\, t)dt \int\limits_{t+z}^{+\infty} F(\xi)d\xi = a+b+\int\limits_0^{+\infty} K(0,\, t)dt \left[\int\limits_z^{+\infty} F(\xi)d\xi - \int\limits_z^{z+t} F(\xi)d\xi\right] =$$

$$= a + b + \int\limits_0^{+\infty} K(0,\, t)dt \int\limits_z^{+\infty} F(\xi)d\xi - \int\limits_0^{+\infty} K(0,\, t)dt \int\limits_0^{t} F(z+y)dy =$$

Меняя порядок интегрирования в последнем интеграле, продолжим равенство:

$$= a + b + \int\limits_0^{+\infty} K(0,\, t)dt \int\limits_z^{+\infty} F(\xi)d\xi - \int\limits_0^{+\infty} F(z+y)dy \int\limits_y^{+\infty} K(0,\, t)dt =$$

$$= \left(1 + \int\limits_0^{+\infty} K(0,\, t)dt\right) \int\limits_z^{+\infty} F(y)dy + \int\limits_z^{+\infty} K(0,\, y)dy -$$

$$- \int\limits_0^{+\infty} F(z+y)dy \int\limits_y^{+\infty} K(0,\, t)dt = 0$$

Учитывая (2.56) и определяя функцию

$$K_1(z) \overset{\text{df}}{=} \int\limits_z^{+\infty} K(0,\, t)dt, \tag{2.57}$$

получим:

$$K_1(z) - \int\limits_0^{+\infty} F(z+y)K_1(y)dy = 0 \qquad (2.58)$$

Справедливо утверждение, что всякое ограниченное решение уравнения (2.58) суммируемо на полуоси. Решаем это уравнение методом последовательных приближений из $\mathcal{L}_1[0, +\infty)$. Это возможно, потому что:

$$K_1(z) - \int\limits_N^{+\infty} F(z+y)K_1(y)dy = f_N(z)$$

где

$$f_N(z) = \int\limits_0^{N} F(z+y)K_1(y)dy$$

И справедлива оценка:

$$\left| \int\limits_N^{+\infty} \int\limits_N^{+\infty} F(x+y)f(y)dy\,dx \right| \leq \int\limits_N^{+\infty} |f(y)|dy \int\limits_{N+y}^{+\infty} |F(\xi)|d\xi \leq$$

$$\leq \|f\|_{\mathcal{L}_1[0,+\infty)} \|F\|_{\mathcal{L}_1[0,\,+\infty)}$$

из которой и следует сходимость. Поэтому $K_1(z) \in \mathcal{L}_1[N, +\infty)$, но в силу непрерывности и произвольности N она принадлежит $\mathcal{L}_1[0+\infty)$. Поэтому можно написать:

$$e(\lambda, 0) = 1 + \int\limits_0^{+\infty} K(0, t)e^{i\lambda t}dt =$$

проинтегрируем по частям

$$= 1 - e^{i\lambda t} \int\limits_t^{+\infty} K(0, y)dy \Bigg|_0^{+\infty} + i\lambda \int\limits_0^{+\infty} K_1(t)e^{i\lambda t}dt =$$

учитывая (2.56), и то что подстановка обращается в нуль, получим

$$= i\lambda \tilde{K}_1(-\lambda)$$

Это преобразование Фурье, если $K_1(t) \equiv 0,\ t < 0$. Отсюда следует, что

$$s(\lambda) = -\frac{\tilde{K}_1(\lambda)}{\tilde{K}_1(-\lambda)} \qquad (2.59)$$

Поэтому справедливо равенство:

$$2w(\lambda, x) = \tilde{K}_1(-\lambda)(e(-\lambda, x) - s(\lambda)e(\lambda, x))$$

Откуда следует, что $K_1(0) \neq 0$, так как при этом было бы, что $w(0,\, x) \equiv 0$, что невозможно. Поэтому из (2.59) следует, что при $\lambda \to 0$, $s(\lambda) \to -1$ и непрерывна.

При подсчете нулей функции воспользуемся принципом аргумента.Функция $e(\lambda,\, 0)$ аналитична по λ в верхней полуплоскости, непрерывна вплоть до границы и стремиться к 1, при $\lambda \to \infty$. И при действительных λ выполнено соотношение: $e(\lambda,\, 0) = \overline{e(-\lambda,\, 0)}$. Пусть

$$\eta(\lambda) \overset{\mathrm{df}}{=} arg\, e(\lambda,\, 0)$$

Область обходится по $Im\,\lambda = 0$ из $-\infty$ до $Re\,\lambda = -\varepsilon$, затем по полуокружности радиуса ε, лежащей в полуплоскости $Im\,\lambda \geq 0$, до точки $Re\,\lambda = +\varepsilon$, $Im\,\lambda = 0$ и от этой точки по $Im\,\lambda = 0$ до $+\infty$. При таком обходе получим, что аргумент изменился на $2\pi n$:

$$2\pi n = [\eta(-\varepsilon) - \eta(-\infty)] + [\eta(+\varepsilon) - \eta(-\varepsilon)] + [\eta(+\infty) - \eta(+\varepsilon)] =$$

$$= 2[\eta(+\infty) - \eta(+\varepsilon)] + [\eta(+\varepsilon) - \eta(-\varepsilon)]$$

Рассмотрим

$$\lim_{\varepsilon\to 0}[\eta(+\varepsilon) - \eta(-\varepsilon)] = \begin{cases} 0, & e(0,0) \neq 0 \\ -\pi, & e(0,0) = 0, \text{ так как нуль однократный} \end{cases}$$

Поэтому:

$$\frac{2[\eta(+\infty) - \eta(+0)]}{2} = \begin{cases} n, & e(0,0) \neq 0 \\ n + \frac{\pi}{2}, & e(0,0) = 0 \end{cases}$$

Но спектральная функция

$$s(\lambda) = \begin{cases} 1, & e(0,0) \neq 0 \\ -1, & e(0,0) = 0 \end{cases}$$

И так как комплексный логарифм отэтой функции равен:

$$\mathcal{L}n(s(\lambda)) = ln(|s(\lambda)|) + 2i\, arg(s(\lambda)) = i\, arg(s(\lambda))$$

то справедливо соотношение:

$$ln(s(\lambda)) = -2i\, arg(e(\lambda,\, 0)) = -2i\eta(\lambda)$$

Откуда следует, что

$$\frac{ln(s(+0)) - ln(s(+\infty))}{2\pi i} = n + \frac{1 - s(0)}{4}$$

Лемма 2.2.1 доказана.

2.3 Обратная задача квантовой теории рассеяния.

Рассматривается стационарное состояние частиц, m_1, m_2 — их массы, x — расстояние между ними, $V(x)$ — потенциал взаимодействия. Запишем уравнение Шредингера:

$$-\frac{\hbar^2}{2M}\Delta\psi + V(x)\psi = E\psi \tag{2.60}$$

где

$$M = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

E — энергия стационарного состояния. Решением этого уравнения будет функция:

$$\psi(\overrightarrow{x}) = x^{-l}u_l(E,\, x)Y^l_{(m)}(\theta,\, \varphi)$$

Где $Y^l_{(m)}(\theta,\, \varphi)$ — сферическая функция. Пусть $l = 0$, т.е. в задаче радиально-сферическая симметрия, следовательно есть зависимость от радиуса. Пусть

$$\frac{2MV(x)}{\hbar^2} = q(x), \quad \frac{E}{\hbar^2}2M = \lambda^2$$

Тогда можно записать задачу Штурма-Лиувилля на собственные функции:

$$\begin{cases} u''(\lambda,\, x) - q(x)u(\lambda,\, x) = \lambda^2 u(\lambda,\, x) \\ u(\lambda,\, 0) = 0,\ x > 0 \end{cases}$$

В классе ограниченных функций решение имеет вид:

$$u(\lambda,\, x) = e^{-i\lambda x} - s(\lambda)e^{i\lambda x} + o(1),\ x \to +\infty$$

Дискретный спектр $\lambda \in \mathbb{R}$ при $x \to +\infty$:

$$u(\lambda_k,\, x) = m_k e^{-\lambda_k x}(1 + O(1))$$

Пусть известны следующие величины:

$$\{s(\lambda),\, \lambda \in \mathbb{R};\, m_k,\, \lambda_k,\, k = \overline{1, n}\}$$

Задача о восстановлении потенциала по спектральным данным и есть обратная задача квантового рассеяния. Сами же спектральные данные — данные рассеяния.

Эта задача имеет положительное решение:

1. Сначала надо построить функцию $F(x)$.

2. Затем из уравнения ГЛМ найти $K(x,\, t)$

3. Потенциал ищется по формуле:

$$q(x) = -\frac{\partial}{\partial x}K(x,\, x)$$

2.4 Интегрирование нелинейных уравнений с помощью обратной задачи рассеяния

Этот метод будет рассматриваться на примере уравнения Картевега-де Фриза.

$$u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0$$

2.4.1 Задача Штурма-Лиувилля на всей прямой. Функции Йоста

Рассмотрим спектральную задачу:

$$y'' - q(x)y + \lambda^2 y = 0,\ x \in \mathbb{R}$$

На $q(x)$ налагаются стандартные условия (2.3).

$\psi_{1,\,2}(\lambda,\,x),\ \varphi_{1,\,2}(\lambda,\,x)$ — функции Йоста при $\lambda \in \mathbb{R}$, если

1. при $x \to +\infty$

$$\psi_1(\lambda,\,x) = e^{-i\lambda x} + o(1)$$

$$\psi_2(\lambda,\,x) = e^{i\lambda x} + o(1)$$

2. при $x \to -\infty$

$$\varphi_1(\lambda,\,x) = e^{-i\lambda x} + o(1)$$

$$\varphi_2(\lambda,\,x) = e^{i\lambda x} + o(1)$$

При $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq 0$ $\psi_{1,\,2}$ и $\varphi_{1,\,2}$ образуют два различных базиса пространства решений задачи Штурма-Лиувилля на всей прямой.

$$\psi_1(\lambda,\,x) = \overline{\psi_2(\lambda,\,x)} = \psi_2(-\lambda,\,x)$$

$$\varphi_1(\lambda,\,x) = \overline{\varphi_2(\lambda,\,x)} = \varphi_2(-\lambda,\,x)$$

Выразим один базис через другой

$$\varphi_i(\lambda,\,x) = \sum_{j=1}^{2} T_{ij}(\lambda)\psi_j(\lambda,\,x) \tag{2.61}$$

Где $T = \{T_{ij}\}$ — матрица перехода.

$$T = \begin{pmatrix} \frac{a(\lambda)}{b(\lambda)} & \frac{b(\lambda)}{a(\lambda)} \end{pmatrix} \tag{2.62}$$

Тогда $\{\psi,\,\overline{\psi}\}$ и $\{\varphi,\,\overline{\varphi}\}$ — два независимых базиса и вронскиан

$$W(\varphi,\,\overline{\varphi}) = W(\psi,\,\overline{\psi}) = 2i\lambda \tag{2.63}$$

Из (2.61) следует, что

$$\varphi(\lambda,\,x) = a(\lambda)\psi(\lambda,\,x) + b(\lambda)\overline{\psi(\lambda,\,x)} \tag{2.64}$$

Подставив (2.64) в (2.63) получим:

$$2i\lambda = W(\varphi,\,\overline{\varphi}) = W(a(\lambda)\psi + b(\lambda)\overline{\psi},\,\overline{a(\lambda)}\overline{\psi} + \overline{b(\lambda)}\psi) =$$

$$= |a(\lambda)|^2 W(\psi,\,\overline{\psi}) + |b(\lambda)|^2 W(\overline{\psi},\psi) = \left(|a(\lambda)|^2 - |b(\lambda)|^2\right) 2i\lambda$$

Откуда следует, что

$$det\,T = |a(\lambda)|^2 - |b(\lambda)|^2 = 1$$

Это так называемая унимодулярная матрица.

Рассмотрим волну, идущую из $+\infty$ на поенциал $q(x)$ в $-\infty$. Посчитаем коэффициеты прохождения и отражения волны:

$$\frac{\varphi(\lambda,\,x)}{a(\lambda)} = \psi(\lambda,\,x) + \frac{b(\lambda)}{a(\lambda)}\overline{\psi(\lambda,\,x)} =$$

При $x \to +\infty$

$$= e^{-i\lambda x} + \frac{b(\lambda)}{a(\lambda)}e^{i\lambda x} + o(1)$$

Где $e^{-i\lambda x}$ — падающая волна, $\frac{b(\lambda)}{a(\lambda)}e^{i\lambda x}$ — отраженная волна.

Рассмотрим теперь при $x \to -\infty$:

$$\frac{\varphi(\lambda,\,x)}{a(\lambda)} = \frac{1}{a(\lambda)}e^{-i\lambda x} + o(1)$$

Где $\frac{1}{a(\lambda)}e^{-i\lambda x}$ — прошедшая волна.

Обозначим:

$$r(\lambda) \overset{\mathrm{df}}{=} \frac{b(\lambda)}{a(\lambda)}$$

$$t(\lambda) \overset{\mathrm{df}}{=} \frac{1}{a(\lambda)}$$

Тогда: $|t(\lambda)|^2 + |r(\lambda)|^2 = 1$ — это унитарное рассеяние.

Теперь можно написать решение задачи Штурма-Лиувилля:

$$\begin{cases} \psi(\lambda,\,x) = e^{-i\lambda x} + \int\limits_x^{+\infty} K(x,\,t)e^{-i\lambda t}dt \\ \varphi(\lambda,\,x) = e^{-i\lambda x} - \int\limits_{-\infty}^{x} K(x,\,t)e^{-i\lambda t}dt \end{cases} \tag{2.65}$$

Или

$$\begin{cases} \psi(\lambda,\,x) = e^{-i\lambda x} - \int\limits_x^{+\infty} \frac{sin[\lambda(x-t)]}{\lambda}q(t)\psi(\lambda,\,t)dt \\ \varphi(\lambda,\,x) = e^{-i\lambda x} + \int\limits_{-\infty}^{x} \frac{sin[\lambda(x-t)]}{\lambda}q(t)\varphi(\lambda,\,t)dt \end{cases} \tag{2.66}$$

Положим

$$\chi_+(\lambda,\, x) \overset{\text{df}}{=} \varphi(\lambda,\, x)e^{i\lambda x}$$

$$\chi_-(\lambda,\, x) \overset{\text{df}}{=} \psi(\lambda,\, x)e^{i\lambda x}$$

Тогда:

$$\begin{cases} \chi_- = 1 - \int\limits_x^{+\infty} \frac{e^{2i\lambda(x-t)}-1}{2i\lambda} q(t)\chi_-(\lambda,\, t)dt \\ \chi_+ = 1 + \int\limits_{-\infty}^{x} \frac{e^{2i\lambda(x-t)}-1}{2i\lambda} q(t)\chi_+(\lambda,\, t)dt \end{cases} \tag{2.67}$$

Откуда следует, что

$$\chi_- \in A(Im\,\lambda < 0)$$

$$\chi_+ \in A(Im\,\lambda > 0)$$

В области аналитичности уравнения (2.67) можно решать методом последовательных приближений. Поэтому:

$$\chi_- = 1 + \frac{1}{2i\lambda}\int\limits_x^{+\infty} q(t)dt + O\left(\frac{1}{|\lambda|^2}\right). \tag{2.68}$$

Из (2.65):

$$\chi_- = 1 + \int\limits_x^{+\infty} K(x,\, t)e^{i\lambda(x-t)}dt = 1 + \frac{1}{i\lambda}K(x,\, x) + O\left(\frac{1}{|\lambda|^2}\right),\ \lambda \to \infty \tag{2.69}$$

Сравнивая (2.68) и (2.69), получим:

$$\frac{1}{i\lambda}K(x,\, x) = \frac{1}{2i\lambda}\int\limits_x^{+\infty} q(t)dt$$

Откуда следует, что

$$q(x) = -2\frac{\partial}{\partial x}K(x,\, x) \tag{2.70}$$

но теперь это выполнено уже на всей прямой.

Из (2.64) следует, что

$$W(\varphi,\, \overline{\psi}) = a(\lambda)W(\psi,\, \overline{\psi}) + b(\lambda)W(\overline{\psi},\, \overline{\psi}) = a(\lambda)2i\lambda$$

Откуда следует, что:

$$a(\lambda) = \frac{1}{2i\lambda}W(\varphi,\, \overline{\psi}) = \frac{1}{2i\lambda}[\varphi_x\overline{\psi} - \varphi\overline{\psi}_x] \tag{2.71}$$

Поэтому в $Im\,\lambda \geq 0$ из (2.66) следует:

$$a(\lambda) = 1 + O\left(\frac{1}{|\lambda|}\right),\ |\lambda| \to \infty$$

Пусть $\lambda_0 : a(\lambda_0) = 0,\ Im\,\lambda_0 \geq 0$. Тогда из (2.71) следует, так как $W = 0$, что $\varphi(\lambda_0,\, x) = C\overline{\psi(\lambda_0,\, x)}$, но

$$\varphi(-\lambda_0,\, x) = e^{i\lambda_0 x}(1 + o(1)),\ x \to -\infty$$

$$\overline{\psi(\lambda_0,\, x)} = e^{i\lambda_0 x}(1 + o(1)),\ x \to +\infty$$

Поэтому $\varphi(\lambda_0,\, x) \in \mathcal{L}_2(\mathbb{R})$, т.е. λ_0 принадлежит дискретному спектру. Это следует из тех же соображений, что и для нулей функции $e(\lambda,\, 0)$ (см. выше лемму 2.1.4).

Пусть $y(\lambda,\, x)$ — решение уравнения Штурма-Лиувилля. Тогда:

$$y'' - q(x)y + \lambda^2 y = 0 \mid \times\, \overline{y(\lambda,\, x)} \text{ скалярно}$$

Получим:

$$0 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} y''\overline{y}dx - \int\limits_{-\infty}^{+\infty} q(x)y\overline{y}dx + \lambda^2 \int\limits_{-\infty}^{+\infty} y\overline{y}dx =$$

$$= y'\overline{y}|_{-\infty}^{+\infty} - \int\limits_{-\infty}^{+\infty} y'\overline{y}'dx - \int\limits_{-\infty}^{+\infty} q(x)|y|^2dx + \lambda^2 \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |y|^2dx$$

Так как подстановка обращается в нуль, а все остальные интегралы вещественны, то и λ^2 так же вещественна. Поэтому сама λ либо вещественна, либо чисто мнимая. Поэтому нули лежат на мнимой полуоси в $Im\,\lambda \geq 0$, все мнимые нули простые и их конечное количество. Все дискретные собственные значения являются нулями $a(\lambda)$ в верхней полуплоскости.

2.4.2 Уравнение ГЛМ на всей прямой.

Выведем уравнение ГЛМ.

$$\psi(\lambda,\, x) = e^{-i\lambda x} + \int\limits_{x}^{+\infty} K(x,\, t)e^{-i\lambda t}dt \tag{2.72}$$

$$\overline{\psi(\lambda,\, x)} = e^{i\lambda x} + \int\limits_{x}^{+\infty} K(x,\, t)e^{i\lambda t}dt \tag{2.73}$$

$$\frac{\varphi(\lambda,\, x)}{a(\lambda)} = \psi(\lambda,\, x) + r(\lambda)\overline{\psi(\lambda,\, x)}$$

Поэтому можно написать:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{\varphi(\lambda,\, x)}{a(\lambda)} - e^{-i\lambda x}\right] e^{i\lambda y}d\lambda = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} [\psi(\lambda,\, x) - e^{i\lambda x} + r(\lambda)\overline{\psi(\lambda,\, x)}]e^{i\lambda y}d\lambda \tag{2.74}$$

Используя лемму Жордана, теорию вычетов и то, что $y > x$, получим, что этот интеграл равен:

$$2\pi i \sum_{k=1}^{N} \frac{\varphi(i\varkappa_k,\, x)}{a'(i\varkappa_k)} e^{i\varkappa y}$$

где $\varkappa_k$ — дискретный спектр. Так как $\varphi(i\varkappa_k,\, x) = b_k\overline{\psi(i\varkappa_k,\, x)}$, то используя (2.73), после подстановки получим:

$$2\pi i \sum_{k=1}^{N} b_k \frac{e^{-\varkappa_k(x+y)}}{a'(i\varkappa_k)} + 2\pi i \int\limits_{x}^{+\infty} K(x,\, t) \sum_{k=1}^{N} b_k \frac{e^{-\varkappa_k(y+t)}}{a'(i\varkappa_k)} dt \tag{2.75}$$

Вычислим правую часть (2.74):

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left[\int\limits_{x}^{+\infty} K(x,\, t) e^{i\lambda t} dt + r(\lambda)\overline{\psi(\lambda,\, x)} \right] e^{i\lambda y} d\lambda =$$

Продолжим пределы интегрирования до $-\infty$ в интеграле

$$\int\limits_{x}^{+\infty} K(x,\, t) e^{i\lambda t} dt$$

Получим преобразование Фурье. Внешнее интегрирование — обратное преобразование. Воспользуемся равенством Парсеваля. Тогда можно продолжить равенство:

$$= 2\pi K(x,\, t) + \int\limits_{-\infty}^{+\infty} r(\lambda) \left[e^{i\lambda x} + \int\limits_{x}^{+\infty} K(x,\, t) e^{i\lambda t} dt \right] e^{i\lambda y} d\lambda \tag{2.76}$$

Из чего следует равенство выражений (2.75) и (2.76). Определим функцию:

$$F(x) \overset{\mathrm{df}}{=} \sum_{k=1}^{N} b_k \frac{e^{\varkappa_k x}}{i a'(i\varkappa_k)} + \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} r(\lambda) e^{i\lambda x} d\lambda \tag{2.77}$$

Сравнивая (2.76) и (2.77) получим уравнение ГЛМ на всей прямой:

$$F(x+y) + K(x,\, y) + \int\limits_{-\infty}^{+\infty} K(x,\, t) F(t+y) dt = 0 \tag{2.78}$$

2.4.3 Унитарная эквивалентность операторов $L(t)$.

Пусть H — произвольное гильбертово пространство; $L(t)$ — однопараметрическое дифференцируемое семейство самосопряженных операторов, заданных на одном и том же всюду плотном множестве из H; $U(t)$ — однопараметрическое дифференцируемое семейство унитарных операторов, заданных на том же множестве и такое, что:

$$U(0) = E;\ U^*(t)U(t) = U(t)U^*(t) = E$$

Определение. Семество $L(t)$ называется унитарно эквивалентным, если существует $U(t)$ такой, что

$$U^*(t)L(t)U(t) = L(0) \tag{2.79}$$

Лемма 2.4.1. *Дифференцируемое семейство $U(t)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению:*

$$\dot{U}(t) = A(t)U(t) \tag{2.80}$$

где $A(t)$ — кососимметрический оператор:

$$A^*(t) = -A(t) \tag{2.81}$$

И обратно: если выполнены условия (2.80) и (2.81), $U(0) = E$, то $U(t)$ — дифференцируемое семейство унитарных операторов.

Доказательство. Продифференцируем выражение:

$$U^*(t)U(t) = E$$

Получим:

$$\dot{U}^*U + U^*\dot{U} = 0 \ \Rightarrow\ U^*\dot{U} = -\dot{U}^*U$$

Умножим слева на $U(t)$:

$$\dot{U}(t) = -U(t)\dot{U}^*(t)U(t) = A(t)U(t)$$

где $A(t) = -U(t)\dot{U}^*(t)$ и этот оператор кососимметрический.

Обратно: из (2.80) и (2.81) следует:

$$\dot{U}^* = U^*A^*$$

умножим это на U справа, а формулу (2.80) на U^* слева:

$$U^*\dot{U} = U^*AU$$

$$\dot{U}^*U = U^*A^*U = -U^*AU$$

и сложим полученные соотношения:

$$U^*\dot{U} + \dot{U}^*U = 0 = (U^*U)_t \ \Rightarrow\ U^*U = E$$

Лемма 2.4.1 доказана.

Лемма 2.4.2. *Семейство $L(t)$ — унитарно эквивалентно тогда и только тогда, когда верно соотношение:*

$$\dot{L} = [A,\, L] = AL - LA \tag{2.82}$$

$[A,\, L]$ — коммутатор. Это соотношение называется LA-пара или представление Лакса.

Доказательство. *Необходимость.* Продифференцируем по t соотношение:

$$U^* L U = L(0)$$

получим:

$$0 = \dot{U}^* L U + U^* \dot{L} U + U^* L \dot{U} =$$

учитывая, что

$$\dot{U} = AU \ \Rightarrow \ \dot{U}^* = U^* A$$

то можно продолжить равенство:

$$= U^* A L U + U^* \dot{L} U + \dot{U} L A U$$

умножим справа на U^*, а слева на U. Получим:

$$-AL + \dot{L} + LA = 0$$

необходимость доказана.

Достаточность. Построим по оператору $A(t)$ семейство $U(t)$ как указано в лемме (2.4.1), а затем проходим цепочку в обратном порядке:

$$-AL + \dot{L} + LA = 0$$

умножим справа на U^*, а слева на U:

$$-U^* A L U + U^* \dot{L} U + U^* L A U = 0 \ \Rightarrow$$

$$\dot{U}^* L U + U^* \dot{L} U + U^* L \dot{U} = 0 \ \Rightarrow$$

$$U^* L U = CONST$$

Положим $t = 0$:

$$CONST = L(0)$$

Лемма 2.4.2 доказана.

2.4.4 Представление Лакса.

Пусть $L = -\frac{d^2}{dx^2} + u(x,\, t)$, и потенциал $u(x,\, t)$ при каждом фиксированном t убывает на бесконечности. Тогда $\dot{L} = \dot{u}$ — оператор умножения на функцию.

Лемма 2.4.3. *Для любого $q \in \mathbb{Z}$, $q \geq 0$ существует дифференциальный оператор A_q порядка $2q+1$, кососимметрический и такой, что $[A_q,\, L]$ — оператор умножения на функцию.*

Доказательство. Гильбертово пространство $H = \mathcal{L}_2(\mathbb{R})$, пространство C_0^∞ всюду плотно в H.

Пусть $q = 0$, тогда $A_0 = \frac{d}{dx}$ в $\mathcal{L}_2$. Поэтому можно написать:

$$[A_0,\, L]f = \frac{d}{dx}\left(-\frac{d^2}{dx^2} + u\right) f - \left(-\frac{d^2}{dx^2} + u\right)\frac{df}{dx} =$$

$$-f''' + u'f + uf' + f''' - uf' = u'f$$

из этого соотношения и леммы 2.4.3 следует, что

$$\dot{u} = u' \ \Rightarrow u = u(x+t)$$

Пусть теперь $q = 1$. Тогда кососимметрический оператор A_1 имеет вид:

$$A_1 = D^3 + a_1(x)D + a_2(x)$$

Распишим представление Лакса:

$$[A_1, L]f = (D^3 + a_1D + a_2)(-D^2 + u)f - (-D^2 + u)(D^3 + a_1D + a_2)f =$$

$$= (D^3 + a_1D + a_2)(-D^2f + uf) + (D^2 - u)(D^3f + a_1Df + a_2f) =$$

$$= -D^5f - a_1D^3f - a_2D^2f + D^3uf + 3D^2uDf + 3DuD^2f + 4D^3f +$$

$$+ a_1Duf + a_1uDf + a_2uf + D^3f + D^2a_1Df + 2Da_1D^2f + a_1D^3f +$$

$$+ d^2a_2f + 2Da_2Df + a_2D^2f - uD^3f - a_1uDf - a_2uf$$

После сокращений и приведений подобных слагаемых, получим, что надо приравнять нулю коэффициенты, стоящие при производных функции f, так как надо, чтобы этот оператор был умножением некоторой функции на f.

$$D^2f: \ 3Du + 2Da_1 = 0 \ \Rightarrow \ a_1 = -\frac{3}{2}u$$

$$Df: \ 3D^2u + D^2a_1 + 2Da_2 = 0 \ \Rightarrow \ a_2 = -\frac{3}{4}u_x$$

$$f: \ D^3u + a_1Du + D^2a_2 = \frac{1}{4}u''' - \frac{3}{2}uu'$$

$$\Rightarrow \ \dot{L} = [A_1, L] = \dot{u} = u_{xxx} - 6uu_x \ \text{— уравнение КдФ}$$

$$A_1 = 4\frac{d^3}{dx^3} - 6u\frac{d}{dx} - 3u'$$

Аналогичным образом для любого q можно посторить нужный оператор

$$A_q = D^{2q+1} + \sum_{j=1}^{q} \left(a_jD^{2j-1} + D^{2j-1}a_j\right)$$

кососимметрический при любых a_j, поэтому $[A_q, L]$ — симметрический оператор порядка $\leq 2q$. Коэффициенты находятся последовательно, они зависят от функции u и ее производных по x.

$$Z_q(u) = [A_q, L] \ \Rightarrow \ \dot{u} = Z_q(u)$$

При $q \geq 2$ эти уравнения называются высшими уравнениями КдФ. **Лемма 2.4.2 доказана.**

2.4.5 Уравнения ГГКМ

ГГКМ — Гарднер Грин Крузкал Миура

Рассмотрим уравнение Штурма-Лиувилля:

$$y'' - u(x,\, t)y + \lambda^2 y = 0,\ x \in \mathbb{R} \tag{2.83}$$

Функция $u(x,\, t)$ быстро убывает при $x \to \infty$ при любом фиксированнном t. Это уравнение можно записать в операторном виде:

$$(L - \lambda^2)y = 0 \tag{2.84}$$

Решением этого уравнения будет функция Йоста $\varphi(\lambda,\, x,\, t)$.

$$\varphi(\lambda,\, x) = e^{-i\lambda x} + o(1),\ x \to -\infty$$

Зависимость от t на главный член не влияет, она находится в o. Тогда:

$$\varphi(\lambda,\, x) = a(\lambda,\, t)e^{-i\lambda x} + b(\lambda,\, t)e^{i\lambda x} + o(1)$$

В общем случае нельзя выяснить зависимость функций a и b от t, но если $u(x,\, t)$ — решение уравнения КдФ, то эта проблема решается.

$$\begin{cases} u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0 \\ u|_{t=0} = u_0(x) \end{cases} \tag{2.85}$$

Если функция $u_0(x)$ быстро убывает по x на бесконечности, то и при $t \neq 0$ решение так же будет быстро убывать по x.

Если $u(x,\, t)$ — решение (2.85), то оператор L можно представить в виде LA-пары:

$$\dot{L} = [A_1,\, L],\ A \equiv A_1 = 4\frac{d^3}{dx^3} - 6u\frac{d}{dx} - 3u_x$$

Поэтому оператор L — унитарно эквивалентный, откуда следует, что λ не зависит от t:

$$L(t) = U(t)L(0)U^*(t)$$

Поэтому:

$$L(0)\varphi(\lambda,\, x) = U^*(t)U(t)L(0)U^*(t)U(t)\varphi =$$

Обозначим $\varphi(\lambda,\, x,\, t) \overset{\mathrm{df}}{=} U(t)\varphi(\lambda,\, x)$, и продолжим равенство:

$$= U^*(t)L(t)\varphi(\lambda,\, x,\, t) = \lambda^2 U^*(t)\varphi(\lambda,\, x,\, t)$$

$$\Rightarrow\ L(t)\varphi(\lambda,\, x,\, t) = \lambda^2\varphi(\lambda,\, x,\, t)$$

откуда и следует независимость λ от t.

Продифференцируем по t выражение:

$$(L - \lambda^2)\varphi = 0$$

получим:

$$\dot{L}\varphi + L\dot{\varphi} - \lambda^2\dot{\varphi} = 0$$

Учитывая, что $\dot{L} = AL - LA$, получим

$$AL\varphi - LA\varphi + L\dot{\varphi} - \lambda^2\dot{\varphi} = 0$$

Так как $L\varphi = \lambda^2\varphi$, продолжим:

$$(L - \lambda^2)(\dot{\varphi} - A\varphi) = 0$$

Обозначим $\hat{\varphi} = \dot{\varphi} - A\varphi$, тогда:

$$(L - \lambda^2)\hat{\varphi} = 0$$

Таким образом $\hat{\varphi}$ — собственная функция, отвечающая λ^2. Поэтому $\hat{\varphi} = c\varphi$. Пусть $x \to -\infty$, тогда

$$\hat{\varphi} = \dot{\varphi} - A\varphi \to -A\varphi =$$
$$= -4\varphi''' + 6u\varphi' + 3u_x\varphi \to$$

Так как $u \to 0$ и $u_x \to 0$, при $x \to -\infty$ в пределе подучим:

$$\to -4\varphi''' = -4(-i\lambda)^3 e^{-i\lambda x}$$

Откуда следует, что $c = -4i\lambda^3$. Таким образом мы получили уравнение ГГКМ:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} - A\varphi = -4i\lambda^3\varphi \tag{2.86}$$

Это уравнение дает эволюцию рассеяния по времени. Теперь рассмотрим дискретный спектр $\{i\varkappa_k\}$, $k = \overline{1, N}$,

$$\varphi(\varkappa_k, x) = \begin{cases} e^{-\varkappa_k x}, \ x \to -\infty \\ b_k e^{-\varkappa_k x}, \ x \to +\infty \end{cases}$$

$\varkappa_k$ также не зависит от времени, как и λ^2. Воспользуемся уравнением (2.86) при $x \to +\infty$:

$$\dot{a}e^{-i\lambda x} + \dot{b}e^{i\lambda x} = A\varphi - 4i\lambda^3\varphi =$$
$$= \left(4\frac{d^3}{dx^3} - 4i\lambda^3\right)\left(ae^{-i\lambda x} + be^{i\lambda x}\right) =$$
$$= 4b(i\lambda)^3 e^{i\lambda x} - 4bi\lambda^3 e^{i\lambda x} + o(1) = -8i\lambda^3 e^{i\lambda x}$$

Откуда следует система:

$$\begin{cases} \dot{a}(\lambda, t) = 0 \\ \dot{b}(\lambda, t) = -8i\lambda^3 \end{cases} \tag{2.87}$$

Эта система также называется ГГКМ. Получили эволюцию по времени спектральных данных рассеяния:

$$\dot{b}_k(t) = -8\varkappa_k^2 b_k, \ m_k = i\dot{a}(i\varkappa) \Rightarrow \dot{m}_k = -8\varkappa_k^3 m_k$$

2.4.6 Интегрирование уравнения КдФ с помощью обратной задачи рассеяния.

Данные рассеяния имеют вид:

$$S(t) = \left\{ r(\lambda,\, 0)e^{-8i\lambda^3 t};\ \varkappa_k b_k(t) = e^{-8\varkappa_k^3 t};\ m_k(t) = m_k(0)e^{-8i\varkappa_k^3 t},\ k = \overline{1, N} \right\}$$

где

$$\frac{b(\lambda,\, t)}{a(\lambda,\, t)} = r(\lambda,\, 0)e^{-8i\lambda^3 t}$$

Решим задачу Коши для уравнения КдФ:

$$u_0(x) = u(x,\, 0) \xrightarrow{I} s(0) \xrightarrow{II} s(t) \xrightarrow{III} u(x,\, t)$$

На шаге I рассматривается задача Штурма-Лиувилля на $\mathbb{R}$ с $q(x) = u_0(x)$ и находится $s(0)$.

На шаге II по формулам ГГКМ находится функция $s(t)$.

На шаге III по обратной задачи рассеяния (см. раздел 2.3) находится потенциал $u(x,\, t)$. Функция $F(x)$ записывается по непрерывному и дискретному спектру. Из уравнения ГЛМ находится ядро $K(x,\, y,\, t)$ и потенциал:

$$u(x,\, t) = -2\frac{d}{dx}K(x,\, x,\, t)$$

2.4.7 Многосолитонные и односолитонные решения уравнения КдФ.

Рассматриваются безотражательные (безстолкновительные) потенциалы, т.е. $r(\lambda) \equiv 0$ откуда следует, что

$$b(\lambda) \equiv 0,\ \Rightarrow\ |a(\lambda)| \equiv 1$$

Задача: проинтегрировать полностью шаги I и II из подраздела 2.4.6.

По формуле Адамара:

$$a(\lambda) = \prod_{k=1}^{N} \frac{\lambda - i\varkappa_k}{\lambda + i\varkappa_k}\ \Rightarrow\ \left.\frac{da(\lambda)}{d\lambda}\right|_{\lambda = i\varkappa_k} = a'(i\varkappa_k)$$

$$m_k = ia'(i\varkappa_k);\ \beta_k = \frac{b_k}{ia'(i\varkappa_k)} > 0$$

$$F(x) = \sum_{k=1}^{N} \beta_k e^{-\varkappa_k x} + \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} r(\lambda)e^{i\lambda x}d\lambda = \sum_{k=1}^{N} \beta_k e^{-\varkappa_k x} \tag{2.88}$$

Теперь можно записать уравнение ГЛМ:

$$K(x,\, y) + F(x+y) + \int_{x}^{+\infty} K(x,\, t)F(t+y)dt = 0$$

Так как ядро $F(x)$ — вырожденное, то $K(x,\, y)$ ищем в виде:

$$K(x,\, y) = \sum_{l=1}^{N} k_l(x) e^{-\varkappa_l y}$$

Подставим в уравнение ГЛМ:

$$\sum_{l=1}^{N} k_l(x) e^{-\varkappa_l y} + \sum_{k=1}^{N} \beta_l e^{\varkappa_l (x+y)} + \int\limits_{x}^{+\infty} \sum_{j=1}^{N} k_j(x) e^{-\varkappa_j t} \sum_{l=1}^{N} \beta_l e^{-\varkappa_l (t+y)} dt = 0 \quad (2.89)$$

Введем матрицу коэффициентов $A = \{a_{ij}\}$:

$$a_{kl} = \delta_{kl} + \frac{\beta_k}{\varkappa_k + \varkappa_l} e^{-(\varkappa_l + \varkappa_k)x}$$

Откуда по формулам Крамера:

$$k_l(x) = \frac{det\, A^{(l)}(x)}{det\, A(x)}$$

Поэтому:

$$K(x,\, x) = \sum_{l=1}^{N} \frac{det\, A^{(l)}(x)}{det\, A(x)} e^{-\varkappa_l x} = \frac{1}{det\, A(x)} \frac{d}{dx} (det\, A(x)) =$$

$$= \frac{d}{dx} ln(det\, A(x))$$

Откуда получаем:

$$u(x) = -\frac{d^2}{dx^2} \left(ln(det\, A(x)) \right) \quad (2.90)$$

Формула (2.90) дает все безотражательные потенциалы. Если же интересует зависимость по времени, то:

$$\beta_k = \beta_k(t) = \beta_k(0) e^{-8\varkappa_k^3 t}$$

$$r(\lambda,\, t) = r(\lambda,\, 0) e^{-8i\lambda^3 t} \equiv 0$$

Пусть имеется лишь один дискретный уровень, т.е. $N = 1$, тогда

$$A = \frac{1+\beta}{2\varkappa_0} e^{-2\varkappa_0 x - 8\varkappa_0^3 t}$$

Откуда получим, что

$$u_0(x,\, t) = \frac{2\varkappa_0^2}{ch^2[\varkappa_0(x - 4\varkappa_0^2 t - 2)]} \quad (2.91)$$

Это солитон — уединенная волна, которая с другими солитонами взаимодействует упругим образом. Если же имеется несколько дискретных уровней, то уравнение (2.90) описывает и взаимодействие солитонов. Если же уровней несколько, то происходит суперпозиция солитонов:

$$u(x,\, t) = \sum_{k=1}^{N} u_k(x,\, t)$$

Это равенство выполнено приблизительно, и где $u_k(x,\, t)$ — солитон, отвечающий уровню $\varkappa_k$.

Глава 3

Метод теории групп в применении к нелинейным уравнениям.

3.1 Однопараметрическая группа Ли.

Пусть $x \in \mathbb{R}^N$, $x = \{x_1 \dots x_N\}$, $x' \in \mathbb{R}^N$, $x' = \{x'_1 \dots x'_N\}$ и $f\colon x \to x'$ — непрерывное отображение, задаваемое формулой:

$$x' = f(x,\, a)$$

где a — параметр, а функции $x'_i = f^i(x,\, a)$ — гладкие. Обозначим это преобразование через T_a, т.е. $x' = T_a x$. Пусть $\{T_a\}$ — совокупность преобразований.

Определение. Совокупность преобразований $\{T_a\}\,(G_1)$ — однопараметрическая группа Ли, если:

1. Параметр a меняется в некотором интервале Δ, и существует единственный элемент $a_0 \in \Delta$ такой, что $T_{a_0} x = x$

2. Для любых a и b из окрестности точки a_0 выполнено соотношение:

$$T_b T_a = T_c,\; T_c \in \{T_a\}$$

3. Для любого элемента a из окрестности точки a_0 существует элемент $b = a^{-1}$ такой, что $(T_a)^{-1} = T_{a^{-1}}$

Пусть $x' = f(x,\, a)$, $x'' = f(x',\, b) = f(f(x,\, a),\, b)$, тогда существует T_a такое, что $x'' = f(x,\, a)$. Откуда следует, что $f(f(x,\, a),\, b) = f(x,\, c)$ и $c = c(a,\, b)$ — гладкая.

Так как все эти преобразования задаются в окрестности, то группа называется локльной.

Пример. Сдвиг: $x' = x + a$, $x'' = x + a + b$, $\Delta = \mathbb{R}$, $a_0 = 0$
Пример. Растяжение: $x' = e^a x$, $x'' = e^{a+b} x$, $\Delta = \mathbb{R}$, $a_0 = 0$
Пример. Поворот:

$$\begin{cases} x' = x\,cos(a) - y\,sin(a) \\ y' = x\,sin(a) - y\,cos(a) \end{cases}$$

$\Delta = (-\pi,\, \pi)$, $a_0 = 0$
Пусть $a_0 = 0$, и

$$\xi^i(x) = \left.\frac{\partial}{\partial a} f^i(x,\, a)\right|_{a=0},\ i = \overline{1, N}$$

Определение. $\xi(x) = \big(\xi^1(x) \dots \xi^N(x)\big)$ — касательное векторное поле.

3.1.1 Инфинитезимальный оператор.

Построим систему обыкновенных дифференциальных уравнений или систему Ли:

$$\begin{cases} \frac{df^i}{da} = \xi^i(f) \\ f^i\big|_{a=0} = x_i \end{cases} \tag{3.1}$$

Теорема (Ли). *Пусть $\{T_a\}$ задается системой функций $\{f^i(x,\, a)\}$. Тогда эти функции являются решением системы (3.1). Обратно: решение системы (3.1) порождает $\{T_a\}$*

Таким образом между $\{\xi_i\}$ и $\{T_a\}$ устанавливается взаимнооднозначное соответствие. Рассмотрим дифференциальный оператор:

$$X = \sum_{i=1}^{N} \xi^i(x) \frac{\partial}{\partial x_i} = \xi^i(x) \frac{\partial}{\partial x_i} \tag{3.2}$$

Где

$$\xi^i(x) = \left.\frac{\partial}{\partial a} f^i(x,\, a)\right|_{a=0}$$

В формуле (3.2) применено обозначение для сокращенного суммирования.

Пример. Оператор преобразования сдвига: $X = \sum\limits_{i=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i}$

Пример. Оператор преобразования растяжения: $X = \sum\limits_{i=1}^{N} x_i \frac{\partial}{\partial x_i}$

Пример. Оператор преобразования вращения: $X = -y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y}$

Определение. Оператор (3.2) называется оператором группы G_1 или инфинитезимальным оператором.

3.2 Инварианты группы Ли преобразований.

Рассмотрим функцию $F(x)$, где $x \in \mathbb{R}^N$. Определим действие преобразования T_a на эту функцию:

$$T_a F(x) \overset{\mathrm{df}}{=} F(T_a x) = F(x')$$

при этом

$$\frac{\partial}{\partial a} T_a F(x)\bigg|_{a=0} = \frac{\partial F(x')}{\partial x'_i}\frac{\partial x'_i}{\partial a}\bigg|_{a=0} = \xi^i(x)\frac{\partial F}{\partial x'_i} \equiv XF$$

Тогда:

$$\frac{\partial^n}{\partial a^n} T_a F(x)\bigg|_{a=0} = X^{(n)}F$$

Запишем приращение функции F:

$$F(x') - F(x) = (XF(x))a + o(a)$$

Где $(XF(x))a$ — линейное приращение функции.

Вопрос: какие у группы G_1 инварианты?

Критерий инвариантности функции $F(x)$:

$$XF(x) = 0 \tag{3.3}$$

Или:

$$\xi^i \frac{\partial F}{\partial x_i} = 0 \tag{3.3^{bis}}$$

Получили линейное дифференциальное уравнение в частных производных первого порядка. Откуда получается $N-1$ функционально независимых решения. И пусть $I^\nu(x),\ \nu = \overline{1, N-1}$ — эти решения. Тогда

$$\varPhi(I^1(x), \dots I^{N-1}(x)) \ \text{— инвариант, если она гладкая.}$$

Пример. Сдвиг: $x'_i = x_i + \lambda^i a$, откуда получаем, что $\xi^i(x) = \lambda^i$. Тогда:

$$\lambda^i \frac{\partial F}{\partial x_i} = 0$$

Тогда получим:

$$I^i(x) = \frac{x^{i+1}}{\lambda^{i+1}} - \frac{x^i}{\lambda^i}$$

Проверить, что это будет инвариантом можно из выражений для a:

$$a = \frac{x'_i - x_i}{\lambda^i} = \frac{x'i + 1 - x_{i+1}}{\lambda^{i+1}}$$

Пример. Вращение.

$$\begin{cases} x' = x\,cos(a) - y\,sin(a) \\ y' = x\,sin(a) + y\,cos(a) \end{cases}$$

Поэтому $X = -y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y}$, откуда:

$$XF = -y\frac{\partial F}{\partial x} + x\frac{\partial F}{\partial y} = 0$$

Откуда получается, что

$$I = x^2 + y^2$$

Рассмотрим в $\mathbb{R}^N$ многообразие размерности $N - M$, задаваемое системой:

$$\varPhi_j(x) = 0,\ j = \overline{1, M}$$

Когда это многообразие будет инвариантным относительно группы G_1?

1. Если это многообразие задано посредством формул

   $$\varPhi_j(I^1(x) \dots I^{N-1}(x)) = 0,$$

   то оно будет инвариантным.

2. Если же оно задано в общем виде, то инвариантность будет тогда и только тогда, когда

   $$X\varPhi_j|_{\varPhi_j=0} = 0,\ j = \overline{1, M}$$

   И это является критерием.

Выпишем необходимое условие:

$$\xi^i \frac{\partial \varPhi_j}{\partial x_i}\bigg|_{\varPhi_j=0} = 0 \tag{3.4}$$

Из (3.4) ищутся функции ξ^i, а затем по ним строится группа G_1, относительно которой это многообразие будет инвариантным.

3.3 Группы преобразований, допускаемые дифференциальными уравнениями.

3.3.1 Понятие определяющих уравнений.

Пусть в векторе $x \in \mathbb{R}^N$ координаты подразделяются на независимые: x_i, $i = \overline{1, n}$ и координаты u_k, $k = \overline{1, m}$ и пусть:

$$x_i' = f^i(x,\, u,\, a)$$

$$u_k' = g^k(x,\, u,\, a)$$

Тогда инфинитезимальный оператор можно записать в виде:

$$X = \xi^i \frac{\partial}{\partial x_i} + \eta^k \frac{\partial}{\partial u_k},\ \xi^i = \frac{\partial f^i}{\partial a}\bigg|_{a=0},\ \eta^k = \frac{\partial g^k}{\partial a}\bigg|_{a=0} \tag{3.5}$$

Введем обозначения:

$$u_k^i = \frac{\partial u_k}{\partial x_i},\ k = \overline{1, m},\ i = \overline{1, n}$$

Всего таких u_i^k будет mn штук. Пусть $\tilde{N} = N + nm$, и рассмотрим так называемое продолженное пространство: $\mathbb{R}^{\tilde{N}}$, и вектор из этого пространства имеет вид:

$$x = \left(x_i,\, u_k,\, \frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right)$$

Пусть $\tilde{G}_1$ — продолженная группа. В нее входят дополнительно формулы преобразований:

$$u'^i_k = \psi_k^i(x_i,\, u_k,\, u_k^i,\, a)$$

Положим по определению:

$$\zeta_k^i = \left.\frac{\partial \psi_k^i}{\partial a}\right|_{a=0} \tag{3.6}$$

Тогда продолженный оператор будет иметь вид:

$$\tilde{X} = \xi^i \frac{\partial}{\partial x_i} + \eta^k \frac{\partial}{\partial u_k} + \zeta_k^i \frac{\partial}{\partial u_k^i} \tag{3.7}$$

Подробнее распишем, чему равно ζ_k^i:

$$\zeta_k^i = \frac{\partial \eta^k}{\partial x_i} + u_l^i \frac{\partial \eta^k}{\partial u_l} - u_j^k \left(\frac{\partial \xi^j}{\partial x_i} + u_i^l \frac{\partial \xi^j}{\partial u_l}\right) \tag{3.8}$$

Пусть

$$D_i = \frac{\partial}{\partial x_i} + u_i^l \frac{\partial}{\partial u^l} \tag{3.9}$$

Тогда:

$$\zeta_k^i = D_i \eta^k - u_j^k D_i \xi^j \tag{3.10}$$

Таким образом при продолжении получили неизмененный оператор на исходном пространстве. Но при этом полученный оператор работает со старыми переменными x_i и u_k как с независимыми. Также инварианты непродолженной группы будут инвариантами продолженной группы, однако появляется еще и mn инвариантов:

$$\tilde{X} F(x,\, u,\, \overset{1}{u}) = 0,\ \overset{1}{u} = u_k^i$$

Таким образом получается система в частных производных относительно неизвестных u:

$$F_\alpha(x,\, u,\, \overset{1}{u}) = 0,\ \alpha = \overline{1, m} \tag{3.11}$$

Вопрос: какую группу допускает система (3.11)? Эта система допускает группу G_1, если система (3.11) не меняется под действием продолжения преобразований $\{T_a\}$ (или если многообразие в $\mathbb{R}^{\tilde{N}}$, задаваемое системой (3.11), является инвариантным подпространством группы G_1). Запишем критерий инвариантности:

$$\tilde{X}F_\alpha\Big|_{F_\alpha=0} = 0,\; \alpha = \overline{1, m} \tag{3.12}$$

Получили систему линейных дифференциальных уравнений для определения $\xi^i(x, u)$ и $\eta^k(x, u)$, несмотря на то, что система (3.11) может быть и нелинейной. Система (3.12) называется определяющей системой уравнений для группы G_1.

3.3.2 Околозвуковое движение газа.

Рассмотрим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} u_2 = v_1 \\ v_2 = -uu_1 \end{cases} \tag{3.13}$$

Где

$$u_1 = \frac{\partial}{\partial x}u(x, y),\; u_2 = \frac{\partial}{\partial y}u(x, y),\; v_1\frac{\partial}{\partial x}v(x, y),\; v_2 = \frac{\partial}{\partial y}v(x, y)$$

Расписывая подробнее эту систему, получим:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial y}u(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}v(x, y) \\ \frac{\partial}{\partial y}v(x, y) = -u(x, y)\frac{\partial}{\partial x}u(x, y) \end{cases} \tag{3.14}$$

Эта система описывает околозвуковое установившееся плоскопараллельное течение газа. Если в этой системе принять за независимые переменные u и v, то система станет линейной.

Процесс выяснения условия инвариантности состоит из следующих этапов:

1. Вычисление продолженного оператора.

   На этом этапе сначала вычисляется сам инфинитезимальный оператор, а затем по формулам (3.7)-(3.10) вычисляется продолженный оператор.

2. Действие продолженным оператором на исходную систему.

3. Переход на многообразие, определяемое исходной системой.

   При этом выбирается s координат $r_1 \ldots r_2$ продолженного вектора, относительно которых уравнения многообразия, описываемого системой, могут быть алгебраически разрешены. Эти координаты выражаются через свободные переменные $\{t\}$, количество которых зависит от многообразия. Число s — размерность векторного пространства $\mathbb{R}^s$, в которое переводит входной вектор данная система. Затем полученные соотношения $r = r(t)$ подставляются в найденные на втором этапе функции и результат приравнивается нулю.

4. Следующий этап — расщепление полученных уравнений относительно $\{t\}$.

   В обозначениях предыдущего раздела расщепление проводится относительно переменных $\{u\}$ в уравнениях (3.11). Таким образом порождается цепочка уравнений (3.12). Как правило это проводится путем разложения функции F_α в ряд Тейлора в окрестности $u = 0$, и приравниваются нулю все производные по u в этой точке, что приводит к системе определяющих уравнений.

Первый этап. Используя формулу (3.5), зададим вид инфинитезимального оператора для системы (3.13):

$$X = \xi\frac{\partial}{\partial x} + \eta\frac{\partial}{\partial y} + \sigma\frac{\partial}{\partial u} + \tau\frac{\partial}{\partial v} \tag{3.15}$$

Теперь надо построить продолжение этого оператора. Согласно с формулой (3.9) введем координаты оператора полного дифференцирования $\overset{1}{D}=(D_1,\, D_2)$:

$$D_1 = \frac{\partial}{\partial x} + u_1\frac{\partial}{\partial u} + v_1\frac{\partial}{\partial v},\ D_2 = \frac{\partial}{\partial y} + u_2\frac{\partial}{\partial u} + v_2\frac{\partial}{\partial v}$$

Тогда продолженный оператор будет иметь вид:

$$\tilde{X} = X + \xi_1\frac{\partial}{\partial u_1} + \xi_2\frac{\partial}{\partial u_2} + \eta_1\frac{\partial}{\partial v_1} + \eta_2\frac{\partial}{\partial v_2}$$

Где дополнительные координаты $\xi_i,\ \eta_i,\ i = 1, 2$ вычисляются по формулам (3.10) и равны:

$$\xi_1 = D_1\sigma - u_1D_1\xi - u_2D_1\eta, \quad \xi_2 = D_2\sigma - u_1D_2\xi - u_2D_2\eta$$

$$\eta_1 = D_1\tau - v_1D_1\xi - v_2D_1\eta, \quad \eta_2 = D_2\tau - v_1D_2\xi - v_2D_2\eta$$

Второй этап заключается в действии оператором $\tilde{X}$ на каждое из уравнений системы (3.13), что приводит к системе:

$$\begin{cases} \xi_2 = \eta_1 \\ \eta_2 = -\sigma u_1 - u\xi_1 \end{cases} \tag{3.16}$$

Или, если переписать в более развернутом виде:

$$\begin{cases} \sigma_y + u_2\sigma_u + v_2\sigma_y - u_1(\xi_y + u_2\xi_u + v_2\xi_y) - u_2(\eta_y + u_2\eta_u + v_2\eta_v) = \\ \quad = \tau_x + u_1\tau_u + v_1\tau_y - v_1(\xi_x + u_1\xi_u + v_1\xi_v) - v_2(\eta_x + u_1\eta_u + v_1\eta_v) \\ \tau_y + u_2\tau_u + v_2\tau_y - v_1(\xi_y + u_2\xi_u + v_2\xi_v) - v_2(\eta_y + u_2\eta_u + v_1\eta_y) = \\ \quad = -u_1\sigma - u[\sigma_x + u_1\sigma_u + v_1\sigma_y - u_1(\xi_x + u_1\xi_u + v_1\xi_v) - \\ \qquad\qquad -u_2(\eta_x + u_1\eta_u + v_1\eta_y)] \end{cases}$$

Третий этап выполняется довольно просто. Надо заменить в развернутых равенствах (3.16) величины u_2 и v_2 при помощи соотношений (3.13) на u_1 и v_1. После перегруппировки слагаемых результат этого этапа записывается в виде уравнений, выражающих условие инвариантности уравнений (3.13) относительно оператора (3.15):

$$\begin{cases} (\sigma_y - \tau_x) + u_1(\tau_u + u\sigma_v + \xi_y + u\eta_x) + v_1(\tau_y - \sigma_u + \eta_y - \xi_x) + \\ \quad +u_1^2(u\eta_u - u\xi_v) + v_2^2(\eta_u - \xi_v) = 0 \\ (u\sigma_x + \tau_y) + u_1(\sigma + u\sigma_u - u\tau_v + u\eta_y - u\xi_x) + v_1(\tau_u + u\sigma_y - \xi_y - u\eta_x) - \\ \quad -u_1^2(u^2\eta_v + u\xi_u) - v_1^2(u\eta_v + \xi_u) = 0 \end{cases}$$

Видно, что левые части являются неоднородными квадратичными формами от свободных переменных u_1 и v_1.

Четвертый этап сводится к тому, что надо приравнять к нулю коэффициенты, при u_1, v_1, u_1^2 и v_1^2. В данном случае четыре из получающихся уравнений выполнены тождественно, а остальные восемь, после небольших преобразований выписываются в виде двух подсистем

$$\begin{cases} \xi_v = \eta_u \\ \xi_u = -u\eta_v \\ \xi_y = -u\eta_x \\ \xi_x = \eta_y + \sigma/(1u) \end{cases} \tag{3.17}$$

$$\begin{cases} \tau_u = -u\sigma_v \\ \tau_v = \sigma_u + \sigma/(2u) \\ \tau_x = \sigma_y \\ \tau_y = -u\sigma_x \end{cases} \tag{3.18}$$

Построим пространство решений системы (3.17), (3.18). Следует заметить, что уравнения (3.18) дают выражения для всех производных для τ, из чего следуют шесть условий совместимости, имеющих вид уравнений второго порядка для одной функции σ. Необходимым следствием этих уравнений являются равенства $\sigma_x = \sigma_y = 0$, но тогда из (3.18) получается также, что и $\tau_x = \tau_y = 0$. Таким образом функции σ и τ есть функции только от u и v, которые должны удовлетворять первым двум уравнениям (3.18).

Аналогично, уравнения (3.17) дают выражения всех производных для ξ, откуда следуют еще шесть условий совместности, необходимыми следствиями которых являются уравнения:

$$\eta_x = -\frac{1}{2}\sigma_v,\ \sigma_u = \frac{\sigma}{u} \tag{3.19}$$

Общее решение второго уравнения есть $\sigma = uf(v)$. Подставляя это выражение в первые два уравнения (3.18), получим общий вид функций σ и τ, удовлетворяющих системе (3.18):

$$\sigma = 2C_1uv + 2C_2u,\ \tau = C_1\left(-\frac{2}{3}u^3 + \frac{3}{2}v^2\right) + 3C_2v + C_3 \tag{3.20}$$

где C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные. Из (3.19) с учетом (3.20) следует равенство $\eta_x = -C_1 u$, присоединение которого к уравнениям (3.17) позволяет найти общий вид ξ и η:

$$\begin{cases} \xi = C_1(-xv + yu^2) + C_2 x + C_4 y + \xi^0 \\ \eta = -C_1(xu + 2yv) + C_4 y + \eta^0 \end{cases} \tag{3.21}$$

где C_4 — еще одна произвольная постоянная, а ξ^0 и η^0 — функции $\mathbb{R}^2(u,\, v) \to \mathbb{R}$, удовлетворяющие уравнениям:

$$\xi^0_v = \eta^0_u,\ \xi^0_u = -u\eta^0_v \tag{3.22}$$

Таким образом общее решение определяющих уравнений дается формулами (3.20), (3.21) и зависит от четырех произвольных констант и произвольного решения $(\xi^0,\, \eta^0)$ системы (3.22). Так как уравнения (3.22) имеют бесконечно много линейно независимых решений, то само пространство L решений системы определяющих уравнений бесконечномерно. Видно, что L можно представить в виде прямой суммы двух пространств: L^4, которое является четырехмерным пространством решений, для которых $\xi^0 = \eta^0 = 0$; и L^∞, которое явлшяется бесконечномерным пространством решений, для которых все $C_i = 0$.

Базис в L^4 можно выбрать, полагая одну постоянную C_i равной единице, а остальные равными нулю. Это дает следующие операторы:

$$\begin{cases} X_1 = (-xv + yu^2)\frac{\partial}{\partial x} - (xu + 2yv)\frac{\partial}{\partial y} + 2uv\frac{\partial}{\partial u} + \\ \quad + \left(-\frac{2}{3}u^3 + \frac{3}{2}v^2\right)\frac{\partial}{\partial v} \\ X_2 = x\frac{\partial}{\partial x} + 2u\frac{\partial}{\partial u} + 3v\frac{\partial}{\partial v} \\ X_3 = \frac{\partial}{\partial v} \\ X_4 = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} \end{cases} \tag{3.23}$$

Общий оператор в L^4 есть произвольная линейная комбинация этих четырех:

$$X = A_1 X_1 + A_2 X_2 + A_3 X_3 + A_4 X_4 \tag{3.24}$$

Подпространству L^∞ соответствует бесконечное множество линейно независимых операторов вида

$$X_0 = \xi^0(u,\, v)\frac{\partial}{\partial x} + \eta^0(u,\, v)\frac{\partial}{\partial y} \tag{3.25}$$

3.3.3 Инвариантность дифференциальных уравнений, допустимые группы.

Если есть допустимая группа, то из-за того, что она определяется линейными дифференциальными уравнениями, существуют и другие допускаемые группы, и любая их линейная комбинация будет образовывать допустимую группу. Таким образом множество допустимых групп образует линейное пространство $\{G_1\} = L_r,\ dim\, L_r = r > 0$. Пусть:

$$X_1 = \xi_1^i \frac{\partial}{\partial x_i},\ X_2 = \xi_2^i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

Тогда можно задать коммутатор:

$$[X_1,\, X_2] = X_1 X_2 - X_2 X_1 = (X_1 \xi_2^i - X_2 \xi_1^i) \frac{\partial}{\partial x_i} = X_3$$

Причем эта операция не выводит за множество инфинитезимальных операторов. При этом выполнены следующие свойства:

1. линейность:

$$[\alpha X_1 + \beta X_2,\, X_3] = \alpha [X_1,\, X_3] + \beta [X_2,\, X_3]$$

2. Выполнено свойство антисимметрии:

$$[X_1,\, X_2] = -[X_2,\, X_1]$$

3. Выполнено тождество Якоби:

$$[[X_1,\, X_2],\, X_3] + [[X_2,\, X_3],\, X_1] + [[X_3,\, X_1],\, X_2] \equiv 0$$

Поэтому множество $\{X\}$ определяет алгебру Ли.

Пусть (3.11) имеет решение $u_k(x) \equiv \varphi^k(x),\ k = \overline{1, m}$. Воспользуемся преобразованием T_a:

$$\begin{cases} x_i' = f^i(x,\, u,\, a) \\ u_k' = g^k(x,\, u,\, a) \end{cases}$$

Тогда $u_k' = \varphi^k(x')$ также будет решением (3.11). Откуда следует, что $g^k(x,\, u,\, a) = \varphi^k(f^i(x,\, u,\, a))$ снова будет решением. Таким образом получили новое решение $u^k = \psi^k(x,\, a)$. Такой переход называется преобразованием Ли-Беклунда.

Глава 4

Нелинейные нелокальные уравнения.

4.1 Введение.

Рассмотрим уравнение:

$$u_t + uu_x + \int\limits_{-\infty}^{+\infty} K(x-s)u_s(s,\,t)ds = 0,\ s,t \in \mathbb{R} \tag{4.1}$$

Это нелинейное нелокальное уравнение Уизема (1967 г.). Рассмотрим линейную часть:

$$u_t + \int\limits_{-\infty}^{+\infty} K(x-s)u_s(s,\,t) = 0$$

Ищем решение в виде бегущей волны:

$$u(x,\,t) = Ae^{ipx-i\omega t}$$

Где p — волновое число, ω — частота. Тогда:

$$i\omega e^{i\omega t} + \int\limits_{-\infty}^{+\infty} K(x-s)(ip)e^{ips}ds = 0$$

Откуда:

$$\frac{\omega}{p} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} K(x-s)e^{-ip(x-s)}ds = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} K(y)e^{-ipy}dy$$

В последнем переходе проведена замена переменных $x-s=y$, в результате чего получили преобразование Фурье. Величина $\frac{\omega}{p}$ — дисперсия (фазовая скорость). Таким образом в уравнении (4.1) интеграл представляет полную дисперсию. Это весьма общее уравнение, описывающее все эффекты, типичные для распространения волн.

Перейдем от записи уравнения в виде (4.1) к записи с псевдодифференциальным оператором (ПДО):

$$u_t + uu_x + \mathbb{K}(u) = 0, \text{ где } \mathbb{K} - \text{ПДО}. \tag{4.2}$$

И этот ПДО выписывается в виде:

$$\mathbb{K}(u) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{ipx}K(p)\hat{u}(p,\,t)dp,\ K(p) - \text{символ оператора } \mathbb{K} \tag{4.3}$$

$$\hat{u}(p,\,t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} u(x,\,t)e^{-ipx}dx$$

Примеры уравнений в форме (4.2):

1. Уравнение КдФ:
$$u_t + uu_x + \nu u_{xxx} = 0$$
Символ оператора равен $\nu(ip)^3 = -ip^3\nu$

2. Уравнение Бюргерса:
$$u_t + uu_x - \nu u_{xx} = 0$$
Где u_{xx} — диссипация энергии. Символ оператора равен νp^2.

3. Уравнение Картевега-де Фриза-Бюргерса:
$$u_t + uu_x + \alpha u_{xxx} - \nu u_{xx} = 0$$
Символ оператора равен $\nu p^2 - i\alpha p^3$

4. Уравнение Бенджамена-Оно:
$$u_t + uu_x + v.p.\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{u_{ss}(s,\,t)}{x-s}ds = 0$$
Символ оператора равен $ip|p|$

5. Уравнение Джексона или промежуточное уравнение Джексона:
$$u_t + uu_x + v.p.\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left[\frac{1}{2\delta}cth\,\frac{\pi(x-s)}{2\delta} - \frac{1}{2\delta}sign\,(x-s)\right]u_{ss}(s,\,t)ds = 0$$

Это уравнение описывает длинные волны в стратифицированной среде, где δ — глубина волн. При $\delta \to 0$ это уравнение переходит в уравнение КдФ, а при $\delta \to +\infty$ — в уравнение Бенджамена-Оно.

Символ оператора равен $-ip^2 \left(cth\,(2\delta p) - \frac{1}{2\delta p} \right)$.

6. Уравнение магнитной электро-динамики:

$$u_t + uu_x + \int\limits_{-\infty}^{+\infty} K_0(|x-s|)u_s(s,\,t)ds = 0$$

Где K_0 — функция МакДональда нулевого порядка, u — скорость ионов.

Символ оператора равен $-ip\sqrt{1+p^2}$

7. Уравнение Отто-Судана-Островского:

$$u_t + uu_x + \alpha u_{xxx} + u + \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{sign\,(s-x)}{\sqrt{|s-x|}} u_s(s,\,t)ds = 0$$

Это уравнение описывает ионно-акустические эффекты в плазме.

Символ оператора равен $-i\alpha p^3 + 1 + |p|^{1/2}$

8. Уравнение Калахара:

$$u_t + uu_x + \alpha u_{xxx} - u_{xxxxx} = 0$$

Уравнение сигналов при распространении электропередач или распространение длинных волн подо льдом.

Символ оператора равен $-i\alpha p^3 - ip^5$

4.2 Законы сохранения. Уединенные волны.

4.2.1 Законы сохранения.

Под законом сохранения подразумевается величина, которая не меняется с течением времени при рассмотрении конкретного уравнения.

Законы сохранения для уравнения Уизема. Пусть:

$$t' = t,\; x' = x + ct,\; u'(x',\,t') = u(x,\,t) + c$$

Это преобразование Галилея. Уранение Уизема инвариантно относительно этого преобразования.

Пусть решение уравнения гладкое, классическое и быстро убывает по x на ∞. Ядро симметрично: $K(x) = K(-x)$, и $K(x)$, $K_x(x)$ абсолютно интегрируемы на $\mathbb{R}$, т.е. принадлежат $\mathcal{L}_1(\mathbb{R})$.

Введем оператор:

$$\tilde{K}(v) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} K(x-s)v(s,\, t)ds$$

Этот оператор симметричен в $\mathcal{L}_2(\mathbb{R})$: $(\tilde{K}u,\, v) = (u,\, \tilde{K}v)$, и перестановочен с оператором дифференцирования: $\frac{\partial}{\partial x}\tilde{K} = \tilde{K}\frac{\partial}{\partial x}$.

Законы сохранения:

1. Закон сахранения массы. Введем величину:

$$I_1(u) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} u(x,\, t)dx$$

Тогда производная по времени:

$$\dot{I}_1(u) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} u_t(x,\, t)dt =$$

Выразим из уравнения Уизема производную u_t и подставим в интеграл:

$$= -\int\limits_{-\infty}^{+\infty} uu_x dx - \int\limits_{-\infty}^{+\infty} dx \int\limits_{-\infty}^{\infty} K(x-s)u_s(s,\, t)ds =$$

$$-\left.\frac{1}{2}u^2\right|_{-\infty}^{+\infty} - \int\limits_{-\infty}^{+\infty} u_s(s,\, t)ds \int\limits_{-\infty}^{+\infty} K(x-s)dx =$$

Учитывая, что подстановка обращается в нуль, и проводя замену переменных во втором интеграле $x - s = y$, получим:

$$= -\, c(0)u|_{-\infty}^{+\infty} = 0$$

где:

$$c(0) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} K(y)dy$$

Таким образом, показано, что $I_1(u)$ не зависит от времени.

2. Закон сохранения импульса. Рассмотрим величину:

$$I_2(u) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} u^2(x,\, t)dx$$

Посчитаем производную по времени:

$$\frac{1}{2}\dot{I}_2(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} u u_t dx =$$

учитывая уравнение Уизема, получим:

$$= -\int_{-\infty}^{+\infty} u^2 u_x dx - \int_{-\infty}^{+\infty} u\tilde{K}u_x dx$$

Так как $u^2 u_x = \frac{1}{3}\frac{\partial}{\partial x}u^3$, то первый интеграл равен нулю. Второй интеграл есть скалярное произведение:

$$-\left(u,\, \tilde{K}\frac{\partial}{\partial x}u\right) = -\left(\tilde{K}u,\, \frac{\partial}{\partial x}u\right) = \left(\frac{\partial}{\partial x}\tilde{K}u,\, u\right) = \left(\tilde{K}\frac{\partial}{\partial x}u,\, u\right)$$

Откуда следует, что

$$\left(\tilde{K}\frac{\partial}{\partial x}u,\, u\right) = 0$$

Поэтому $I_2(u)$ не зависит от времени.

3. Закон сохранения энергии. Введем величину:

$$I_3(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{u^3}{3} + u\tilde{K}u\right) dx$$

Тогда:

$$\dot{I}_3 = -\int_{-\infty}^{+\infty} u^2 u_t dx + \int_{-\infty}^{+\infty} (u_t\tilde{K}u + u\tilde{K}u_t) dx =$$

$$= 2(u_t,\, \tilde{K}u) - \int_{-\infty}^{+\infty} u^2 \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{u^2}{2} + \tilde{K}u\right) dx$$

Подставив в первое слагаемое выражение для u_t, получим:

$$-2\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{u^2}{2} + \tilde{K}u\right),\, \tilde{K}u\right) - \frac{1}{4}u^4\Big|_{-\infty}^{+\infty} - (u^2,\, \tilde{K}\frac{\partial}{\partial x}u) =$$

$$= 2\left(\tilde{K}u,\, \frac{\partial}{\partial x}\tilde{K}u\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial}{\partial x}(\tilde{K}u)^2 dx = (\tilde{K}u)^2\Big|_{-\infty}^{+\infty} = 0$$

Откуда следует, что I_3 также не зависит от времени.

4. Центр тяжести. Введем величину:

$$I_4(u) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} xu(x,\, t)dx$$

$$\dot{I}_4(u) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} xu_t dx = -\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{u^2}{2} + \tilde{K}u\right)dx =$$

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{u^2}{2}dx + \int\limits_{-\infty}^{+\infty} = \frac{1}{2}I_2(u) + \int\limits_{-\infty}^{+\infty} dx\int\limits_{-\infty}^{+\infty} K(x-s)u(s,\, t)ds =$$

$$\frac{1}{2}I_2 + \int\limits_{-\infty}^{+\infty} u(s,\, t)ds\int\limits_{-\infty}^{+\infty} K(x-s)dx = \frac{1}{2}I_2(u) + c(0)I_1(u)$$

Откуда следует, что

$$I_4[u](t) = \frac{t}{2}I_2(u) + tc(0)I_1(u) + c$$

Пусть координата центра тяжести $R(t)$ выражается формулой:

$$R(t) = \left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} xu(x,\, t)\right)\Bigg/ I_1(u)$$

Тогда:

$$\dot{R}(t) = \frac{\dot{I}_4(t)}{I_1(u)} = \frac{I_2(u)}{I_1(u)} + c(0)$$

Т.е. скорость перемещения центра тяжести постоянна.

Для уравнений КдФ, Бенджамена-Оно, Джексона существуе бесконечно много законов сохранения.

4.2.2 Уединенные волны для уравнения Уизема.

Пусть:

$$K_0(x) = \frac{\pi}{4}e^{-\nu|x|},\ \nu = \frac{\pi}{2}$$

Тогда

$$\left(\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 - \nu^2\right)\tilde{K}v = -\nu^2 v \tag{$*$}$$

для любых $v \in \mathcal{L}_2(\mathbb{R}) \cap C(\mathbb{R})$. Решение уравнения Уизема с ядром K_0 ищем в виде бегущей волны $u(x,\, t) = \varphi(x - \lambda t)$, где λ — ее скорость. Подставим в уравнение Уизема:

$$-\lambda\varphi' + \varphi\varphi' + \tilde{K}_0\varphi' = 0$$

Проинтегрируем это уравнение, получим:

$$-\lambda\varphi + \frac{\varphi^2}{2} + \tilde{K}_0\varphi = c = 0 \tag{4.4}$$

Подействуем на это уравнение оператором

$$\left(\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 - \nu^2\right)$$

и учтем соотношение $(*)$, получим

$$\left(\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 - \nu^2\right)\left(-\lambda\varphi + \frac{\varphi^2}{2}\right) - \nu^2\varphi = 0 \tag{4.5}$$

Умножим это уравнение на

$$2\frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda\varphi + \frac{\varphi^2}{2}\right)$$

и проинтегрируем, тогда:

$$0 = \int dx 2\frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda\varphi - \frac{\varphi^2}{2}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^2\left(\lambda\varphi - \frac{\varphi^2}{2}\right) - \nu^2\int dx\left(\lambda\varphi - \frac{\varphi^2}{2}\right)^2\frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda\varphi - \frac{\varphi^2}{2}\right) +$$

$$+\nu^2\int dx\varphi 2\frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda\varphi - \frac{\varphi^2}{2}\right) =$$

Учитывая, что

$$2\frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda\varphi - \frac{\varphi^2}{2}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^2\left(\lambda\varphi - \frac{\varphi^2}{2}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda\varphi - \frac{\varphi^2}{2}\right)\right)^2$$

$$\left(\lambda\varphi - \frac{\varphi^2}{2}\right)^2\frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda\varphi - \frac{\varphi^2}{2}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda\varphi - \frac{\varphi^2}{2}\right)^2$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda\varphi - \frac{\varphi^2}{2}\right) = (\lambda - \varphi)\varphi'$$

продолжим равенство:

$$\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda\varphi - \frac{\varphi^2}{2}\right)\right]^2 - \nu^2\left(\lambda\varphi - \frac{\varphi^2}{2}\right)^2 + 2\nu^2\int dx(\lambda\varphi\varphi' - \varphi^2\varphi') =$$

$$= (\lambda - \varphi)^2\varphi'^2 - \nu^2\left[\left(\lambda\varphi - \frac{\varphi^2}{2}\right) - \lambda\varphi^2 + \frac{2}{3}\varphi^3\right] = 0 \tag{4.6}$$

Поэтому:

$$(\lambda - \varphi)^2\varphi'^2 = \nu^2\varphi^2\left[\left(\lambda - \frac{\varphi}{2}\right) - \lambda + \frac{2}{3}\varphi\right] =$$

$$\nu^2\varphi^2\left[\lambda^2 - \lambda\varphi + \frac{\varphi^2}{4} - \lambda + \frac{2}{3}\varphi\right] = \nu^2\varphi^2\left[\frac{\varphi^2}{4} - \left(\lambda - \frac{2}{3}\right)\varphi + \lambda^2 - \lambda\right] \tag{4.7}$$

При $1 < \lambda < \frac{3}{4}$ в (4.7) квадратный трехчлен имеет корни:

$$\varphi_{0,\,1} = 2\left(\lambda - \frac{2}{3}\right) \mp 2\sqrt{\frac{4}{9} - \frac{\lambda}{3}}$$

И $0 < \varphi_0 < \lambda < \varphi_1$. Если поделить левую часть равенства (4.7) на левую, учитывая формулу для производной обратной функции $x' = \frac{dx}{d\varphi}$, соотношение:

$$\nu^2\left(\frac{dx}{d\varphi}\right)^2 = \frac{(\lambda - \varphi)^2}{\varphi^2\left[\frac{\varphi^2}{4} - \left(\lambda - \frac{2}{3}\right)\varphi + \lambda^2 - \lambda\right]} \equiv f^2(\varphi) \tag{4.8}$$

Пусть $0 < \varphi < \varphi_0$, т.е. изменеие приосходит там, где парабола имеет положительную часть. Тогда можно перенисать:

$$(x - x_0)^2 = h^2(\varphi),\ h(\varphi) = \int\limits_{\varphi}^{\varphi_0} f(\xi)d\xi$$

Константа x_0 отвечает условию при $\varphi = \varphi_0$. Производная из (4.8) при $\varphi \to +0$ стремиться к бесконечности, если же $\varphi \to \varphi_0 - 0$, то стремиться к нулю.

Итак, уединенная волна получена, и описывается уравнением (4.8), а ядро K_0 дает эту волну.

Глава 5

Периодическая задача для уравнения Уизема.

5.1 Опракидывание волн.

Рассмотрим задачу

$$\begin{cases} u_t + uu_x + \int\limits_{-L}^{L} K(x-s)u_s(s,\, t)ds = 0 \\ u|_{t=0} = \bar{u}(x) \end{cases}$$

где функция $K(x)$ вещественная и $2L$-периодичная. Функция $\bar{u}(x) \in C_L^{+\infty}(\mathbb{R})$ — бесконечно дифференцируемая и $2L$-периодичная. Псевдодифференциальный оператор имеет вид:

$$\mathbb{K}(u) = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} ipK_p\hat{u}_p(t)e^{ipx\frac{\pi}{L}}$$

где K_p — его символ:

$$K_p = \int\limits_{-L}^{L} e^{-ipx}K(x)dx$$

В дальнейшем все будет рассматриваться при $L = \pi$.

Определение. Ядро $K(x)$ называется строго диссипативным, если

$$K_p^1 = Re\,(ipK_p) \geq 0$$

для любого $p \in \mathbb{Z}$, и найдется номер $p_0 \geq 1$, что $K_p^1 \geq \varepsilon > 0$, для всех p таких, что $|p| \geq p_0$.

Определение. Ядро $K(x)$ называется сильно диссипативным, если

$$K_p^1 \geq 0,\ K_p^1 \geq \varepsilon|p|^\alpha,\ |p| \geq p_0 > 0,\, p \in \mathbb{Z},\ \alpha, \varepsilon > 0 \tag{5.1}$$

Определение. Ядро $K(x)$ называется регулярным, если оно не имеет особенности в нуле, выполнено условие:

$$K(x) \in C^1(\Omega\{0\}),\ |K(x)| < C|x|^{-\alpha},\ C > 0$$

$$|K'(x)| \leq C|x|^{-1-\alpha},\ \alpha \leq \frac{3}{5} - \gamma,\ \gamma \in \left(0,\ \frac{1}{10}\right],\ K_p^1 \geq 0,\ |p| \geq p_0 > 0,\ p \in \mathbb{Z}$$

И выполнено соотношение:

$$|K(+0)| + |K(-0)| + \int\limits_{-\pi}^{\pi} |K'(x)|dx < N \tag{5.2}$$

Введем следующие обозначения:

$$\Omega = [-\pi,\ \pi]$$

$$m_0 = |\min_{x\in\Omega} \bar{u}'(x)|$$

$$u_1 = \max_{x\in\Omega} |\bar{u}'(x)|$$

$$K_p = \int\limits_{-\pi}^{+\pi} e^{-ipx} K(x)dx$$

$$K_p^1 = Re\,(ipK_p),\ K_p^2 = Im\,(ipK_p)$$

$$\frac{\partial^j u(x,\ y)}{\partial x^j} = u_{(j)}(x,\ t)$$

$$u_j(t) = \max_{x\in\Omega} |u_{(j)}(x,\ t)|$$

$$J_j(t) = \int\limits_{\Omega} u_{(j)}^2(x,\ t)dx$$

$$I_j(t) = \int\limits_{\Omega} u_{(j)}(x,\ t)K(u_{(j)}(x,\ t))dx$$

Итак, рассматривается периодическая задача:

$$\begin{cases} u_t + uu_x + \int\limits_{-\pi}^{\pi} K(x-s)u_s(s,\ t)ds = 0 \\ u|_{t=0} = \bar{u}(x) \end{cases} \tag{5.3}$$

Под опракидыванием волны в момент времени T понимается:

$$\max_{x\in\Omega} |u'(x,\ t)| \to +\infty,\ t \to T$$

Помимо классической нормы в $H^2(\Omega)$ дальше будет использоваться норма, записанная через преобразование Фурье функции $\hat{u}$:

$$\|u\|_{H^2(\Omega)}^2 = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} (1 + |p|)^4 |\hat{u}(p)|^2$$

5.1.1 Локальное по времени существование решения периодической задачи для регулярного ядра.

Лемма 5.1.1. *Пусть $T > 0$, рассмотрим задачу:*

$$\begin{cases} \dot{y} = u(y, t) \\ y(t_0) = \xi \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{5.4}$$

Пусть $u(y, t) \in C^\infty([0, T], C^\infty_\pi(\mathbb{R}))$.

Тогда существует единственное решение задачи (5.4) $y(\xi, t) \in C^\infty(\mathbb{R} \times [0, T])$. И для любого $x \in \mathbb{R}$ существует единственная функция $\xi(x, t)$ такая, что $y(\xi, t) = x$, и для любого $t \in [0, T]$ функция $y(\xi, t)$ устанавливает диффеоморфизм из $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}$.

Доказательство. Учебник Понтрягина по дифурам **Лемма 5.1.1 доказана.**

Лемма 5.1.2. *Пусть ядро $K(x)$ — регулярное, функция $\bar{u}(x) \in C^\infty_\pi(\mathbb{R})$. Тогда существует момент времени $T > 0$ такой, что решение задачи (5.3) существует и принадлежит классу $C^\infty([0, T], C^\infty_\pi(\mathbb{R}))$. Причем это решение может разрушаться при $t \to T$ только посредством опаркидывания.*

Доказательство. Решение ищется методом последовательных приближений. $w^{(0)}(x, t) = \bar{u}(x)$. Пусть $s - 1$ приближений построено. Сторим приближение для шага s:

$$\frac{\partial}{\partial t}(w^{(s)}) + w^{(s-1)} w^{(s)}_x + K(w^{(s-1)}) = 0 \tag{5.5}$$

Это линейное уравнение. Сама функция $w^{(s-1)} \in C^\infty(\mathbb{R}_+, C^\infty_\pi(\mathbb{R}))$, но так как ядро регулярное, то и $K(w^{(s-1)})$ также принадлежит этому классу, из чего следует, что и $w^{(s-1)}$.

Теперь рассмотрим вопрос о существовании T. Так как равномерно по s выполнено вложение $w^{(s)} \in C^\infty(\mathbb{R}_+, C^\infty_\pi(\mathbb{R}))$, то продифференцируем уравнение (5.5) n раз по x:

$$\frac{\partial w^{(s)}_{(n)}}{\partial t} + \sum_{j=0}^{n} C^j_n w^{(s-1)}_{(j)} w^{(s)}_{(n+1-j)} +$$

$$+ K(x-y) w^{(s-1)}_{(1)} \Big|_{y=x+0}^{y=x-0} + \int_{-\pi}^{\pi} K'(x-y) w^{(s-1)}_{(n)} dy = 0 \tag{5.6}$$

Так как ядро 2π-периодитчно, то верно соотношение:

$$\frac{\partial^n}{\partial x^n} \int_{-\pi}^{\pi} K(x-y) w^{(s-1)}_y dy = \frac{\partial^n}{\partial x^n} \int_{-\pi}^{\pi} K(y) w^{(s-1)}_x (x-y, t) dy =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} K(y) w_{(n+1)}^{(s-1)}(x-y,\, t) dy = \int_{-\pi}^{\pi} K(x-y) w_{(n+1)}^{(s-1)}(y,\, t) dy$$

Последний интеграл берется по частям один раз и разбивается на сумму двух: от $-\pi$ до x, и от x до π. Из этих соотношений и следует формула (5.6).

Обозначим через $y^{(s)}(\xi,\, t)$ решение задачи (5.4), у которой в правой части $u(y,\, t) = w^{(s-1)}(y,\, t)$. Определим функцию:

$$v_{(n)}^{(s)} \stackrel{\mathrm{df}}{=} w_{(n)}^{(s)} \left(y^{(s)}(\xi,\, t),\, t \right)$$

Так как $y^{(s)}$ — диффеоморфизм, то максимумы модулей по периоду у этих функций совпадают, т.е.:

$$v_n^{(s)} = w_n^{(s)}$$

Также справедливо соотношение:

$$\dot{v}_{(n)}^{(s)} = \dot{w}_{(n)}^{(s)} + w_{(n+1)}^{(s)} \dot{y}^{(s)} = \dot{w}_{(n)}^{(s)} + w_{(n+1)}^{(s)} w_{(0)}^{(s-1)} \tag{5.7}$$

В (5.6) при $j = 0$ стоит $w_{(n+1)}^{(s)}$, поэтому его нельзя рассматривать как дифференциальное уравнение относительно $w_{(n)}^{(s)}$.Заменим $w_{(i)}^{(j)}$ на $v_{(i)}^{(j)}$. В силу определения функции $v_{(i)}^{(j)}$ это можно сделать, а затем оценим полученные выражения:

$$\begin{cases} |\dot{v}_{(0)}^{(s)}| \leq N v_0^{(s-1)},\; n = 0 \\ n \geq 1 \Rightarrow |\dot{v}_{(n)}^{(s)}| \leq \sum\limits_{j=1}^{n} C_j^n v_j^{(s-1)} v_{n+1-j}^{(s)} + N v_n^{(s-1)} \\ v_{(n)}^{(s)} \Big|_{t=0} = \bar{u}_{(n)}(x) \; \text{—начальное условие } n \geq 0 \end{cases} \tag{5.8}$$

Построим для этой системы мажорирующую систему:

$$\begin{cases} \dot{p}_0 = N p_0,\; n = 0 \\ \dot{p}_n = 2 \sum\limits_{j=1}^{n} C_n^j p_j p_{n+1-j} + N P_n,\; n \geq 1 \\ p_n|_{t=0} \bar{u}_n(x) \end{cases} \tag{5.9}$$

У этой системы лишь одно нелинейное уравнение: при $n+1$:

$$\dot{p}_1 = 2p_1^2 + N p_1$$

Решение уравнения ищем в виде $p(t) = v(t) e^{Nt}$, откуда получается уравнение на функцию v:

$$\frac{\dot{v}}{v^2} = 2e^{Nt}$$

Проинтегрируем это уравнение от 0 до t:

$$-\frac{1}{v(t)}+\frac{1}{v(0)}=\frac{2}{N}(e^{Nt}-1)$$

Откуда получаем, что

$$p_1(t)=\frac{e^{Nt}Np_1(0)}{N+2(1-e^{Nt})p_1(0)}$$

Видно, что при

$$T_0=\frac{1}{N}ln\left(1+\frac{N}{2p_1(0)}\right)$$

знаменатель обращается в нуль, т.е. решение опракидывается. Однако при $t<T_0$ решение принадлежит классу $C^\infty(0,\,T_0)$ и ограничено, поэтому и при остальных n решение будет заведомо существовать только при $t<T_0$ и эти функции будут из этого же класса и ограничены.

Докажем, что система (5.9) мажорирует (5.8), т.е. что

$$v_n^{(s)}\le p_n,\ \forall n,\,\forall s,\,t\in[o,\,T_0) \tag{5.10}$$

При $t=0$ это выполнено. При $s=0$ это также ваполнено. Остальное будем доказывать индукцией по s от противного.

Пусть $s>0$ и (5.10) не выполнено. Т.е. существует n_1, и пусть $t_1<T_0$ — первый момент времени, когда нарушается неравенство, т.е.:

$$v_{n_1}^{(s)}\Big|_{t_1}>p_{n_1}|_{t_1}$$

и $p_{n_1}\ge 0$ и непрерывна. Тогда существует момент времени $t_2>t_1$ такой, что:

$$v_{n_1}^{(s)}(t_2)\le 2p_{n_1}(t_2) \tag{5.11}$$

Это соотношение выполнено для любого $t\in[0,\,t_2]$ и $n\le n_1$. Подставим в (5.8), (5.11) и оценку (5.10) для $s-1$. Получим:

$$|\dot v_{(n)}^{(s)}(\xi,\,t)|\le\dot p_n,\ \forall n\le n_1,\,t\in[0,\,t_2]$$

$$|\ v_{(n)}^{(s)}\Big|_{t=0}|\le p_n|_{t=0}-\bar u_n$$

Откуда следует мажорируемость. Но что противоречит нашему предположению, что при $n=n_1$ и при $t_1<t_2$ неравенство нарушается. Следовательно это предположение неверно. Аналогично показывается мажорируемость для производных по t. При этом:

$$\max_{t\in[0,\,T_0)}\max_{x\in\Omega}\left|\frac{\partial^k}{\partial t^k}w_{(n)}^{(s)}(x,\,t)\right|\le N$$

равномерно по s. Поэтому $w^{(s)} \in C^\infty([0,\, T_0),\, C^\infty_\pi(\mathbb{R}))$. Откуда следует, что существует подпоследовательность

$$\{w^{(s_p)}\} \to u(x,\, t)$$

сходящаяся в этом классе к решению задачи.

Так как пока $p_1(t)$ ограничено, то и все остальные $p_n(t)$ ограничены, то решение существет по времени, пока $p_1(t) < \infty$, поэтому решение существует и может разрушаться только опракидыванием. **Лемма 5.1.1 доказана.**

5.1.2 Локальное по времени существование решения периодической задачи для диссипативного ядра.

Лемма 5.1.3. *Пусть* $\bar{u}(x) \in C^\infty_\pi(\mathbb{R})$, $K^1_p \geq 0$ *для любого* $|p| \geq p_0 > 0$, $p \in \mathbb{Z}$. *Тогда существует единственное решение задачи (5.3) из класса* $C^\infty([0,\, T],\, C^\infty_\pi(\mathbb{R}))$, *где* T *зависит от* $\|\bar{u}\|_{H^2(\Omega)}$

Доказательство. Введем оператор:

$$K^{(l)}_p = \begin{cases} K_p, & |p| \leq l \\ 0, & |p| > l \end{cases}$$

$$K^{(l)}(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{p=-\infty}^{+\infty} e^{ipx} K^{(l)}_p$$

Этот оператор действует по правилу:

$$K^{(l)}\varphi = \int\limits_{-\pi}^{\pi} K^{(l)}(x-s)\varphi'(s)ds$$

Но, так как сумма, определяющая этот оператор, конечная, то функция $K^{(l)}(x)$ бесконечно дифференцируема, поэтому, заведомо, оператор, порожденный данной функцией, будет регулярным, откуда следует, что для уравнения с таким оператором можно пользоваться леммой 5.1.2, учитывая, что по условию $K^{(l)1}_P \geq 0,\ |p > p_0|$.

Пусть

$$b \overset{\mathrm{df}}{=} 2 \max_{|p|\leq p_0} |K^1_p| \ \Rightarrow K^{(l)1}_p \leq \frac{b}{2},\ |p| < p_0$$

Напомним обозначения:

$$J_n = \int\limits_{-\pi}^{\pi} u^2_{(n)} dx$$

$$I_n = \int\limits_{\Omega} u_{(n)} K^{(l)}(u_{(n)}) dx$$

Если продифференцировать уравнение Уизема n раз, а затем умножить на $u_{(n)}$ и проиньегрировать по Ω, то будет справедливо следующее соотношение:

$$\dot{J}_n + 2\int\limits_{\Omega}\sum_{j=0}^{n} C_n^j u_{(n)}u_{(n+1-j)}u_{(j)}dx + 2I_n = 0 \tag{5.12}$$

Докажем, что

$$u_n(t) \le 2J_n^{1/4}\left(J_n^{1/4} + J_{n+1}^{1/4}\right) \tag{5.13}$$

Рассмотрим два случая:

1. Существует точка $x_0 \in \Omega$ такая, что

   $$|u_{(n)}(x_0,\, t)| = \frac{u_n(t)}{2}$$

   Тогда:

   $$\frac{3}{4}u_n^2(t) = |u_{(n)}^2(x_0,\, t) - u_{(n)}^2(x_1,\, t)| = \left|\int\limits_{x_1}^{x_0}\frac{\partial}{\partial x}u_{(n)}^2(x,\, t)dx\right| \le 2\sqrt{J_nJ_{n+1}}$$

   Откуда получается, что

   $$u_n(t) \le 2J_n^{1/4}J_{n+1}^{1/2} \tag{$*$}$$

2. Не существует такой точки x_0, поэтому

   $$\frac{u_n(t)}{2} < |u_{(n)}(x,\, t)|,\ x \in \Omega$$

   Откуда следует, что

   $$J_n(t) = \int\limits_{\Omega} u_{(n)}^2(x,\, t)dx > \frac{\pi u_n^2(t)}{2}$$

   $$\Rightarrow\ u_n(t) \le 2J_n^{1/2}(t) \tag{$**$}$$

Складывая $(*)$ $(**)$ подучим (5.13).

Теперь докажем соотношение:

$$2\int\limits_{\Omega} u_{(n)}u_{(n+1)}u_{(0)}dx = -\int\limits_{\Omega} u_{(n)}^2u_{(1)}dx \tag{5.14}$$

Это делается при помощи интегрирования по частям:

$$\int\limits_{\Omega} u_{(n)}u_{(n+1)}u_{(0)}dx = -\int\limits_{\Omega} u_{(n+1)}u_{(n)}u_{(0)}dx - \int\limits_{\Omega} u_{(n)}^2u_{(1)}dx$$

Используя (5.13) и (5.14) преобразуем (5.12):

1. $\underline{n=0}$.

$$\dot{J}_0 + 2\int\limits_\Omega u_{(0)}^2 u_{(1)} dx + 2I_0 = \dot{J}_0 + 2I_0 = 0$$

так как в силу периодичности:

$$2\int\limits_\Omega u_{(0)}^2 u_{(1)} dx = 2\int\limits_\Omega \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{2}{3}u_{(0)}^3\right) dx = 0$$

2. $\underline{n=1}$. Учитывая (5.14), получим:

$$\dot{J}_1 + 2\int\limits_\Omega u_{(1)} u_{(2)} u_{(0)} dx + 2\int\limits_\Omega u_{(1)}^3 dx + 2I_1 =$$

$$\dot{J}_1 + \int\limits_\Omega u_{(1)}^3 + 2I_1 = 0$$

Из этого и (5.13) следует неравенство:

$$\dot{J}_1 + 2I_1 \le 2J_1 J_1^{1/4}\left(J_1^{1/4} + J_2^{1/4}\right)$$

3. $\underline{n=2}$. Проводя аналогичные рассуждения:

$$\dot{J}_2 + 2I_2 + 2\int\limits_\Omega u_{(2)} u_{(3)} u_{(0)} dx + 6\int\limits_\Omega u_{(2)}^2 u_{(1)} dx =$$

$$= \dot{J}_2 + 2I_2 + 5\int\limits_\Omega u_{(2)}^2 u_{(1)} dx = 0$$

$$\Rightarrow\ \dot{J}_2 + 2I_2 \le 2\cdot 5 J_2 J_1^{1/4}\left(J_1^{1/4} + J_2^{1/4}\right)$$

...

4. $\underline{n=n}$. В (5.12) из суммы вынесем слагаемые при $j = 0,\ 1,\ n$:

$$0 = \dot{J}_n + 2I_n + 2\int\limits_\Omega u_{(n)} u_{(n+1)} u_{(0)} dx + 2n\int\limits_\Omega u_{(n)}^2 u_{(1)} dx + 2\int\limits_\Omega u_{(n)}^2 u_{(1)} dx +$$

$$+2\int\limits_\Omega \sum_{j=2}^{n-1} C_n^j u_{(n)} u_{(n+1-j)} u_{(j)} dx$$

Используя неравенство Коши-Буняковского и (5.13), получим при $n \ \ge\ 3$:

$$\dot{J}_n + 2I_n \le (2n+1)2J_n J_1^{1/4}\left(J_1^{1/4} + J_2^{1/4}\right) +$$

$$+4\sum_{j=2}^{n-1} C_N^j \sqrt{J_n J_{n+1-j}}\, J_j^{1/4}\left(J_j^{1/4} + J_{j+1}^{1/4}\right)$$

Таким образом получили оценки:

$$\begin{cases} n=0: \ \dot{J}_0 + 2I_0 = 0 \\ n=1: \ \dot{J}_1 + 2I_1 \leq 2J_1 J_1^{1/4}\left(J_1^{1/4} + J_2^{1/4}\right) \\ n=2: \ \dot{J}_2 + 2I_2 \leq 2\cdot 5 J_2 J_1^{1/4}\left(J_1^{1/4} + J_2^{1/4}\right) \\ n\leq 3: \ \dot{J}_n + 2I_n \leq (2n+1)2J_n J_1^{1/4}\left(J_1^{1/4} + J_2^{1/4}\right) + \\ \quad +4\sum\limits_{j=2}^{n-1} C_N^j \sqrt{J_n J_{n+1-j}} J_j^{1/4}\left(J_j^{1/4} + J_{j+1}^{1/4}\right) \end{cases} \tag{5.15}$$

Оценим снизу I_n. Так как $u_{(n)}$ — вещественное, то:

$$I_n = \int\limits_{\Omega} u_{(n)} K^{(l)}(u_{(n)})dx = \frac{1}{2}\left[\int\limits_{\Omega} \overline{u_{(n)}} K^{(l)}(u_{(n)})dx + \int\limits_{\Omega} u_{(n)} K^{(l)}(u_{(n)})dx\right] =$$

используя равенство Парсеваля, получим:

$$= \frac{1}{4\pi}\sum_{p=-\infty}^{+\infty}\left(ipK_p^l + \overline{ipK_p^{(l)}}\right)((ip^n)\hat{u}_p(t))\,\overline{((ip^n)\hat{u}_p(t))} =$$

Так как $(ipK_p^l + \overline{ipK_p^{(l)}}) = Re\,(ipK_p^l) = K_p^{(l)1}$, то

$$= \frac{1}{2\pi}\sum_{p=-\infty}^{+\infty} K_p^{(l)1}(|p^n||\hat{u}_p(t)|)^2 \geq$$

Учитывая, что $K_p^{(l)1} \geq 0$, $|p| \geq p_0$, то

$$\geq \frac{1}{2\pi}\sum_{|p|\leq p_0} K_p^{(l)1}(|p^n||\hat{u}_p(t)|)^2 \geq$$

так как $|K_p^{(l)1}| \leq \frac{b}{2}$, то $K_p^{(l)1} \geq -\frac{b}{2}$, поэтому:

$$\geq -\frac{1}{2\pi}\sum_{|p|\leq p_0}\frac{b}{2}(|p^n||\hat{u}_p|)^2 \geq$$

$$\geq -\frac{b}{2}\frac{1}{2\pi}\sum_{p=-\infty}^{+\infty}(|p^n||\hat{u}_p|)^2 = -\frac{b}{2}J_n$$

Так как по равенству Парсеваля:

$$\sum_{p=-\infty}^{+\infty}(|p^n||\hat{u}_p|)^2 = 2\pi J_n$$

Используя эту оценку, преобразуем оценки (5.15):

$$\begin{cases} \dot{J}_0 \le bJ_0 \\ \dot{J}_1 \le 2J_1 J_1^{1/4}\left(J_1^{1/4}+J_2^{1/4}\right)+bJ_1 \\ \dot{J}_2 \le 10J_2 J_1^{1/4}\left(J_1^{1/4}+J_2^{1/4}\right)+bJ_2 \\ \dot{J}_n \le (2n+1)2J_n J_1^{1/4}\left(J_1^{1/4}+J_2^{1/4}\right)+bJ_n+ \\ \quad +4\sum\limits_{j=2}^{n-1} C_n^j \sqrt{J_n J_{n+1-j}}\, J_j^{1/4}\left(J_j^{1/4}+J_{j+1}^{1/4}\right) \end{cases} \tag{5.16}$$

Определим величину:

$$J(t) \stackrel{\mathrm{df}}{=} J_1(t)+J_2(t)$$

Учитывая неравенства (5.16), получим, что

$$\dot{J}(t) \le 20J^{3/2}(t)+bJ$$

Решаем это неравенство. Функцию J ищем в виде:

$$J(t)=v(t)e^{bt}$$

Откуда, после интегрирования от 0 до t, получим уравнение на функцию v:

$$\frac{\dot{v}}{v^{3/2}} \le 20e^{\frac{1}{2}bt}$$

Откуда следует, что

$$\frac{1}{v^{1/2}(t)} \ge \frac{1}{v^{1/2}(0)}-\frac{20}{b}\left(e^{\frac{1}{2}bt}-1\right)$$

Откуда следует, что

$$J(t) \le \frac{J(0)e^{bt}}{\left(1-\frac{20}{b}\sqrt{J(0)}\left(e^{(bt/2)-1}\right)\right)^2} \tag{5.17}$$

Видно, что при

$$t=T_0 \equiv \frac{2}{b}\, ln\left(1+\frac{b}{20J^{1/2}(0)}\right) \tag{5.18}$$

знаменатель обращается в нуль и решение разрушается. При этом и $J(0)$, и T_0 не зависят от параметра ядра l. Т.е. при любом $t \in [0,\, T_0)$ функция $J(t)$ конечна при любом l.

Интегрируем первое и четвертое неравенства в (5.16). Все эти неравенства мажорируются линейными. Поэтому существует C_n, независящее от l, такое, что

$$J_n(t) \le C_n,\ t \in [0,\, T_0)$$

Аналогичным образом показывается, что и для решения $u^{(l)}(x,\,t)$ задачи (5.3) с ядром $K^{(l)}$:

$$J_{n,m}^{(l)} \stackrel{\mathrm{df}}{=} \int\limits_{\Omega} \left[\frac{\partial^m}{\partial t^m} u_{(n)}^{(l)}(x,\,t)\right]^2 dx \leq C_{n,m}$$

где $C_{n,m}$ не зависит от l. Таким образом получены решения, которые равномерно по l определены т ограничены на интервале $[0,\,T_0)$. Все эти решения принадлежат классу $C^{\infty}([0,\,T_0),\,C_{\pi}^{\infty}(\mathbb{R}))$. И так как они ограничены, то существует подполедовательность, сходящаяся к $u(x,\,t)$, и эта функция принадлежит тому же пространству. Теперь надо доказать, что эта предельная функция удовлетворяет исходному уравнению и единственная.

В силу равенства Парсеваля, коэффициенты Фурье

$$\hat{u}_p^{(l)}(t) \to \hat{u}_p(t) \ \text{ в } C^n([0,\,T_0), H^{\alpha}).$$

Покажем, что равномерно по x и по $t \in [o,\,T_0)$:

$$K^{(l)}(u^{(l)}) \to K(u)$$

$$K^{(l)}(u^{(l)}) = K(u) + \frac{1}{2\pi}\sum_{p=-\infty}^{+\infty} e^{ipx}\frac{ip[K_p^l - K_p]}{(1+|p|)^{\alpha}}\hat{u}_p^{(l)}(t)\times$$

$$\times\frac{1}{2\pi}\sum_{p=-\infty}^{+\infty} e^{ipx} ipK_p^{(l)}\hat{u}_p^{(l)}(t)\cdot(1+|p|)^{\alpha}+$$

$$+\frac{1}{2\pi}\sum_{p=-\infty}^{+\infty} e^{ipx}\frac{ipK_p}{(1+|p|)^{\alpha}}[\hat{u}_p^{(l)}(t) - \hat{u}_p(t)](1+|p|)^{\alpha}$$

Обозначим:

$$A = K(u) + \frac{1}{2\pi}\sum_{p=-\infty}^{+\infty} e^{ipx}\frac{ip[K_p^l - K_p]}{(1+|p|)^{alpha}}\hat{u}_p^{(l)}(t)\times$$

$$\times\frac{1}{2\pi}\sum_{p=-\infty}^{+\infty} e^{ipx} ipK_p^{(l)}\hat{u}_p^{(l)}(t)\cdot(1+|p|)^{\alpha}+$$

$$B = \frac{1}{2\pi}\sum_{p=-\infty}^{+\infty} e^{ipx}\frac{ipK_p}{(1+|p|)^{\alpha}}[\hat{u}_p^{(l)}(t) - \hat{u}_p(t)](1+|p|)^{\alpha}$$

Пусть α_1 — порядок оператора K_p, тогда:

$$pK_p \leq C(1+|p|)^{\alpha_1}$$

Оценим A и B. Воспользуемся неравенством Коши-Буняковского:

$$|A| \leq \sum_{p=-\infty}^{+\infty}\frac{|pK_p|^2}{(1+|p|)^{2\alpha}}\cdot\sum_{p=-\infty}^{+\infty}|\hat{u}_p^{(l)}(t)|^2(1+|p|)^{2\alpha}$$

Вторая сумма сходится при любом α. Первая же сумма сходится только при α, удовлетворяющем неравенству:

$$2\alpha_1 - 2\alpha > 1$$

Выберем такое α. Такой ряд сходится и при $l \to +\infty$ в силу определения $K_p^{(l)}$ стремиться к нулю. Аналогично оценивается B. Откуда и следует необходимая сходимость равномерно по x и по $t \in [, T_0)$:

$$K^{(l)}(u^{(l)}) \to K(u)$$

Таким образом существование решения доказано. Осталось доказать единственность.

Напомним задачу:

$$\begin{cases} u_1 + uu_x + K(u) = 0 \\ u|_{t=0} = \bar{u}(x) \end{cases}$$

Пусть существует два решения: $u^{(1)}$ и $u^{(2)}$. Пусть

$$w = u^{(1)} - u^{(2)}$$

Тогда:

$$w_t + (u^{(1)}w_x + u_x^{(2)}w) + K(w) = 0$$

Умножим это уравнение на w и проинтегрируем по Ω:

$$\dot{J}_0(w) + 2\int\limits_\Omega (u^{(1)}ww_x + u_x^{(2)}w^2)dx + 2I_0(w) = 0$$

Учитывая оценку для I_0 и то, что $ww_x = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}w^2$, получим:

$$\dot{J}_0(w) + 2\int\limits_\Omega \left(-\frac{1}{2}u_x^{(1)} + u_x^{(2)}\right)w^2dx + 2I_0 = 0$$

Так как решения гладкие, то $max\{|u_x^{(1)}|, |u_x^{(2)}|\} \le C$

$$\Rightarrow \dot{J}_0 + 2CJ_0(w) + bJ_0(w) \le 0$$

$$\Rightarrow \dot{J}_0(w) \le C_1 J_0$$

Решая это неравенство, получим, что

$$J_0 \le J_0(0)e^{C_1 t}$$

Но:

$$J_0|_{t=0} \equiv 0$$

Откуда следует, что

$$J_0(w) \equiv 0 \;\Rightarrow\; u^{(1)} \equiv u^{(2)}$$

Лемма 5.1.3 доказана.

5.1.3 Опракидывание волн для сингулярного ядра порядка $< 3/5$.

Теорема 5.1.1. *Пусть выполнены условия:*

1.

$$K(x) \in C^1(\Omega\{0\}),\ |K(x)| < C|x|^{-\alpha},\ C > 0,\ |K'(x)| \leq C|x|^{-1-\alpha}$$

$$\alpha \leq \frac{3}{5} - j,\ j \in \left(0,\ \frac{1}{10}\right]$$

$$K_p^1 \geq 0,\ |p| \geq p_0 > 0,\ p \in \mathbb{Z}$$

2.

$$\bar{u}(x) \in C_\pi^\infty$$

3.

$$m_0 = |\min_{x\in\Omega} \bar{u}'(x)|,\ b = 2 \max_{|p|<p_0} |K_p^1|$$

$$m_0^2 \geq \frac{b^2}{j^2} + \frac{40C}{j}\left(u_1 + J_3^{1/2}(0)\right)$$

Тогда существует решение задачи (5.3) из класса $C^\infty([0,\, T_0),\, C_\pi^\infty(\mathbb{R}))$*, в момент времени* T_0 *решение опракидывается, и выполнена оценка:*

$$T_0 \leq \frac{1}{m_0\left(1 - \frac{j}{4}\right)}$$

Доказательство. В силу леммы 5.1.3 решение из нужного класса существует, но в этой лемме не дана оценка на время T_0. Таким образом, надо показать, что решение не может существовать глобально во времени, т.е. надо дать верхнюю оценку на момент времени T_0.

Пусть

$$m(t) \stackrel{\text{df}}{=} \min_{x\in\Omega} u_{(1)}(x,\, t) = u_{(1)}(y_1(t),\, t)$$

$$n(t) \stackrel{\text{df}}{=} \max_{x\in\Omega} u_1(x,\, t) = u_{(1)}(y_2(t),\, t)$$

Причем

$$y_j(t) \in C^1[0,\, T_0),\ j = 1, 2$$

Уравнение Уизема:

$$0 = u_1 + uu_x + \int\limits_{\pi}^{\pi} K(x-s)u_s(s,\, t) = u_t + uu_x + \int\limits_{-\pi}^{\pi} K(s)u_x(x-s,\, t)ds$$

дифференцируем по x:

$$0 = u_{tx} + u_x^2 + uu_{xx} + \int\limits_{-\pi}^{\pi} K(s)u_{xx}(x-s,\, t)ds$$

Теперь положим в этом соотношении $x = y_j(t)$:

$$\begin{cases} \dot{m}(t) + m^2(t)(1 - A_1(t)) = 0,\ x = y_1(t) \\ \dot{m}(t) + n^2(t) + m^2(t)A_2(t) = 0,\ x = y_2(t) \end{cases} \tag{5.19}$$

Так как

$$\dot{m}(t) = u_{xt} + u_{xx}\dot{y}_1(t)|_{x=y_1} = u_{xt}$$

потому что $x = y_1(1)$ — точка минимума функции $u_x(x,\, t)$. Функции A_j определяются по формулам:

$$A_j(t) = m^{-2}(t)\int\limits_{-\pi}^{\pi} K(s)u_{(2)}(y_j(t)-s,\, t)ds \tag{5.20}$$

Таогда получем, что:

$$\frac{\dot{m}}{-m(t)} = (1 + A_1(t))$$

Интегрируем от 0 до t:

$$\frac{1}{m(t)} - \frac{1}{m(0)} = \int\limits_0^t (1 + A_1(\tau))d\tau$$

При этом $-m(0) = m_0 > 0$, и

$$m(t) = \frac{-m_0}{1 - m_0\int\limits_0^t (1 + A_1(\tau))d\tau}$$

Обозначим:

$$z(t) \stackrel{\mathrm{df}}{=} 1 - m_0\left(t + \int\limits_0^t A_1(\tau)d\tau\right) \tag{5.21}$$

Тогда:

$$m(t) = -\frac{m_0}{z(t)} \tag{5.22}$$

Теперь мы хотим доказать, что если $|A_j(0)| < \frac{j}{4}$, то и при $t \in [0,\, T_0)$ будет выполнено неравенство $|A_j(t)| < \frac{j}{4}$. Доказывать будем от противного. Пусть это утвержление не верно, и пусть t_1 — первый момент времени.

когда это неравенство нарушается. Но в силу непрерывности функции A_j, найдется момент времени $T_0 > t_2 > t_1$ такой, что выполнено неравенство:

$$|A_j(t)| \leq \frac{j}{2},\ t \in [0,\, t_2] \tag{5.23}$$

При этом выполнены сотношения для функции z:

$$z(t) = 1 - m_0 \left(t + \int\limits_0^t A_1(\tau) d\tau \right) \leq 1 - m_0 \left(1 - \frac{j}{2} \right) t \leq 1 \tag{5.24}$$

$$\dot{z}(t) = -m_0(1 + A_1(t)) < -m_0 \left(1 - \frac{j}{2} \right) < 0 \tag{5.25}$$

Откуда следует, что функция $z(t)$ убывает.

Рассмотрим

$$\dot{n}(t) = -n^2(t) - m^2(t)A_2(t) < -m^2(t)A_2(t) = -\frac{m_0^2}{z^2(t)} A_2(t) <$$

$$< -\frac{m_0^2}{z^2(t)} \frac{\dot{z}(t)}{m_0} = -m_0 z^{-2}(t)\dot{z}(t) \tag{5.26}$$

Последнее неравенство справедливо, так как:

$$-\frac{\dot{z}}{m_0} > 1 - \frac{j}{2} > \frac{j}{2} > -A_2(t)$$

так как $\frac{j}{2} < \frac{1}{20}$. Проинтегрируем (5.26):

$$n(t) \leq n(0) - \frac{m_0}{z(0)} + m_0 z^{-1}(t) \leq u_1(0) z^{-1}(t) \tag{5.27}$$

Где $u_1(0) = \max\limits_{x \in \Omega} |\ u_{(1)}(x,\, t)\big|_{t=0}|$. Последнее неравенство мы хотим доказать. Пусть $n(0) = n_0$. Рассмотрим два случая:

1. $m_0 \geq n_0$
$$\Rightarrow n(t) \leq \frac{m_0}{z(t)} \leq u_1(0) z^{-1}(t)$$

2. $m_0 < n_0$
$$\Rightarrow m(t) \leq \frac{n_0 - m_0 + m_0}{z(t)} = \frac{n_0}{z(t)} \leq u_1(0) z^{-1}(t)$$

Теперь продифференцируем три раза уравнение Уизема по x, умножим на $u_{(3)}(x,\, t)$ и проинтегрируем по Ω. Получим:

$$\dot{J}_3 + 8 \int\limits_\Omega u_{(1)} u_{(3)}^2 dx + 2 \int\limits_\Omega u_{(0)} u_{(3)} u_{(4)} dx + 2 \int\limits_\Omega u_{(3)} K(u_{(3)}) dx = 0$$

Используя соотношение (5.14), получим:

$$\dot{J}_3 + 7\int\limits_{\Omega} u_{(1)}u_{(3)}^2 dx + 2\int\limits_{\Omega} u_{(3)}K(u_{(3)})dx = 0 \tag{5.28}$$

По формуле Парсеваля и условия, что $K_p^1 \geq 0$, $|p| \geq p > 0$ оценим последний интеграл:

$$-\int\limits_{\Omega} u_{(3)}K(u_{(3)})dx \leq bJ_3(t) \ \text{ см. оценку для } I_n$$

При этом:

$$\int\limits_{\Omega} u_{(1)}u_{(3)}^2 \geq m(t)J_3(t)$$

Подставляя эти оценки в (5.28), получим:

$$\dot{J}_3 \leq (-7m(t) + b)J_3(t) \tag{5.29}$$

Из условия (*3*) теоремы следует, что $b \leq jm_0$, поэтому справедливы оценки:

$$-7m(t)+b \leq -7m(t)+jm_0 = \frac{m_0}{z(t)}(7+jz(t)) \leq \frac{m_0}{z(t)}(7+j) = (7+j)\frac{\dot{z}(t)}{\dot{z}(t)}\frac{m_0}{z(t)} \leq$$

$$\leq -\frac{7+j}{1-\frac{j}{2}}\dot{z}(t)z^{-1}(t) < -7(1+j)\dot{z}(t)z^{-1}(t)$$

Эта цепочка неравенств справедлива, т.к. $\dot{z}(t) < 0$, и

$$\frac{7+j}{1-\frac{j}{2}} < 7(1+j)$$

Таким образом получается неравенство:

$$\dot{J}_3 \leq -7(1+j)z^{-1}\dot{z}J_3 \tag{5.30}$$

Решая это неравенство, получим

$$J_3(t) \leq J_3(0)[z(t)]^{-7(1+j)} \tag{5.30^{bis}}$$

Оценим $A_j(t)$ на $t \in [0,\, t_2]$:

$$m^2(t)|A_j(t)| = \left|\int\limits_{-\pi}^{\pi} K(s)u_{(2)}(y_j(t)-s,\, t)ds\right| = \left|\int\limits_{-\delta}^{\delta} + \int\limits_{\delta \leq |s| \leq \pi}\right| \tag{5.31}$$

Определим функцию:

$$F(s,\, \delta) \stackrel{\text{df}}{=} \begin{cases} -\int\limits_{s}^{\delta} K(\xi)d\xi, \ s \in (0,\, \delta] \\ \int\limits_{-\delta}^{s} K(\xi)d\xi, \ s \in [-\delta,\, 0) \end{cases}$$

При этом $F(\pm\delta,\,\delta)=0$. Тогда:

$$\int\limits_{-\delta}^{\delta} K(s)u_{(2)}(y_j(t)-s,\,t)ds = \int\limits_{-\delta}^{\delta} \frac{\partial}{\partial s}F(s,\,\delta)u_{(2)}(y_j(t)-s,\,t)ds =$$

$$= \int\limits_{-\delta}^{\delta} F(s,\,\delta)u_{(3)}(y_j(t)-s,\,t)ds \tag{5.32}$$

$$\int\limits_{\delta\le|s|\le\pi} K(s)u_{(2)}(y_j(t)-s,\,t)ds = K(\delta)u_{(1)}(y_j(t)-\delta,\,t)-$$

$$-K(-\delta)u_{(1)}(y_j(t)+\delta,\,t) + \int\limits_{\delta\le|s|\le\pi} K'(s)u_{(1)}(y_j(t)-s,\,t)ds \qquad (5.32^{bis})$$

Подставим в (5.31) (5.32) и (5.32^{bis}), и воспользуемся неравенством Коши-Буняковского:

$$|A_j(t)| \le m_0^{-2}z^2(t)\left\{\left(\int\limits_{-\delta}^{\delta} F^2(s,\,\delta)ds\int\limits_{y_j(t)-\delta}^{y_j(t)+\delta} u^2_{(3)}(s,\,t)ds\right)^2 +\right.$$

$$\left. +u_1(t)\left(|K(\delta)|+|K(-\delta)|+\int\limits_{\delta\le|s|\le\pi}|K'(s)|ds\right)\right\} \tag{5.33}$$

Справедливы оценки:

$$\begin{cases} \int\limits_{|s|\le\delta} F^2(s,\,\delta)ds \le 48C^2\delta^{3-2\alpha} \\ \int\limits_{\delta\le|s|\le\pi} |K'(s)|ds \le 4C\delta^{-\alpha} \end{cases}$$

Сопоставляя эти оценки, (5.30^{bis}) и (5.33), получим:

$$|A_j(t)| \le z^2(t)m_0^{-2}\left\{(48C^2\delta^{3-2\alpha}J_3(0)z^{-7(1+j)})^{1/2}+\right.$$

$$\left.+u_1(0)z^{-1}(t)6C\delta^{-\alpha}\right\} \le$$

$$\le 7Cm_0^{-2}\left\{j_3^{1/2}(0)\delta^{\frac{3}{2}-\alpha}[z(t)]^{2-\frac{7}{2}(1+j)}+\delta^{-\alpha}u_1(0)z(t)\right\} \tag{$*$}$$

где $j=1,2$, а δ —произвольное, строго больше нуля. Поэтому, пусть

$$\delta = (z(t))^{1/2},\; 0<z(t)\le 1,\; t\in[0,\,t_2]$$

Тогда из условий теоремы следует:

$$|A_j(t)| \leq 7Cm_0^{-2}\left(u_1(0) + J_3^{1/2}(0)\right) \leq \frac{j}{4}$$

Что противоречит нашему предположению. Поэтому $|A_j(t)| < \frac{j}{4}$, $t \in [0, T_0)$. Поэтому из (5.21), (5.22) следует, что $z(t) = 0$ не позже, чем в момент

$$T_0 = \frac{1}{m_0\left(1 - \frac{j}{4}\right)}$$

Теорема 5.1.1 доказана.

5.2 Глобальное существование решения по времени.

Еще раз напомним задчу:

$$\begin{cases} u_t + uu_x + \int\limits_{-\pi}^{\pi} K(x-s)u_s(s,\, t)ds = 0 \\ u|_{t=0} = \bar{u}(x) \end{cases}$$

Согласно теореме 5.1.1, если начальная крутизна достаточно велика, то решение разрушается за конечное время. Можно показать, что это является и необходимым условием.

Пусть оператор K имеет произвольный положительный порядок α.

$$K(u) = \frac{1}{2\pi}\sum_{p=-\infty}^{+\infty} ipK_p\hat{u}_p(t)e^{ipx} \tag{5.34}$$

В дальнейшем будут рассматриваться два случая:

1. Ядро K — строго диссипативное.
2. Ядро K — сильно диссипативное.

5.2.1 Существование решения периодической задачи в целом по времени.

Рассмотрим случай строго диссипативного ядра.

Теорема 5.2.1. *Пусть выполнены следующие условия:*

1. *Ядро оператора строго диссипативное.*
2. $\bar{u}(x) \in C_\pi^\infty(\mathbb{R})$
3. $\|\bar{u}(x)\|^2_{H^2(\Omega)} \leq a\varepsilon^3$, $a = \frac{1}{80\varepsilon p_0^4}$

Тогда существует единственное решение периодической задачи (5.3) из класса $C^{\infty}(\mathbb{R}_+,\, C^{\infty}_{\pi}(\mathbb{R}))$.

Доказательство.

$$\|\bar{u}(x)\|^2_{H^2(\Omega)} = J_0(0) + J_1(0) + J_2(0) \le a\varepsilon^3,\ t_0 = 0$$

По лемме 5.1.3 существует $T > 0$, что решение этой задачи существует по времени при $t \in [0,\, T)$. Тогда в силу непрерывности функций $J_n(t)$, $n = 0, 1, 2$ найдется другой момент времени $t_0 > 0$ такой, что выполнены неравенства:

$$J_0(t_0) \le a\varepsilon^3,\ J_n(t_0) \le \varepsilon^2,\, n = 1, 2 \tag{5.35}$$

Надо доказать что на интервале $[t_0,\, t_0 + T]$ также выполнены эти неравенства.

Рассмотрим для $n = 0, 1, 2$ соотношение (5.12):

$$\dot{J}_n(t) + 2\sum_{j=0}^{n} C_n^j \int\limits_{-\pi}^{\pi} u_{(n)} u_{(n+1-j)} u_{(j)} dx + 2I_n$$

При этом справедливы следующие неравенства:

$$\begin{cases} \dot{J}_0(t) = -2I_0(t) \\ \dot{J}_1(t) \le 2J_1 J_1^{1/2}(J_1^{1/4} + J_2^{1/4}) - 2I_1 \\ \dot{J}_2(t) \le 10 J_2 J_1^{1/4}(J_1^{1/4} + J_2^{1/4}) - 2I_2 \end{cases} \tag{5.36}$$

Оценим I_n:

$$I_n(t) = \int\limits_{\Omega} u_{(n)} K(u_{(n)}) dx = \frac{1}{2\pi} \sum_{p=-\infty}^{+\infty} K_p^1 |p^n \hat{u}_p(t)|^2 =$$

Этот переход возможен блягодаря равенству Парсеваля. Добавим и вычтем $40\varepsilon J_n$, $n = 0, 1, 2$, получим:

$$= 40\varepsilon J_n + \frac{1}{2\pi} \sum_{|p| \ge p_0} (K_p^1 - 40\varepsilon)|p^n \hat{u}_p(t)|^2 +$$

$$+ \frac{1}{2\pi} \sum_{|p| < p_0} (K_p^1 - 40\varepsilon)|p^n \hat{u}_p(t)|^2 \ge$$

$$\ge 40\varepsilon J_n - 40\varepsilon \frac{p_0^4}{2\pi} \sum_{|p| \le p_0} |\hat{u}_p(t)|^2 \ge$$

Учитывая, что по обратному равенству Парсеваля

$$\sum_{|p| \le p_0} |\hat{u}_p(t)|^2 \le \sum_{p=-\infty}^{+\infty} |\hat{u}_p(t)|^2 = 2\pi J_0(t)$$

получим:

$$\geq 40\varepsilon J_n(t) - 40\varepsilon p_0^4 J_0(t) \qquad (*)$$

При $n = 0$ продолжим неравенство

$$\geq 40\varepsilon J_0 - \frac{1}{2a} J_0(t)$$

Из (5.36) следует, что $\dot{J}_0(t) \leq 0$, откуда получаем, что

$$J_0(t) \leq J_0(t_0) \leq a\varepsilon^3 \qquad (5.37)$$

Остальные неравенства из (5.35) доказываются от противного. Пусть t_1 — первый момент времени, когда нарушаются эти неравенства. Тогда для времени $t \in [t_0,\, t_1]$ выполнена оценка:

$$J_n(t) \leq 2\varepsilon^2 \qquad (5.38)$$

Подставим эту оценку и $(*)$ в (5.36):

$$\begin{cases} \dot{J}_1(t) \leq -80\varepsilon J_1 + 2J_1 J_1^{1/4}(J_1^{1/4} + J_2^{1/4}) + \frac{1}{a} J_0(t) \\ \dot{J}_2(t) \leq -80\varepsilon J_2 + 10J_2 J_1^{1/4}(J_1^{1/4} + J_2^{1/4}) + \frac{1}{a} J_0(t) \end{cases} \qquad (5.39)$$

Подставляя в эти оценки (5.37) и (5.38), получим:

$$\dot{J}_n \leq -\varepsilon J_n + \varepsilon^2,\ t \in [t_0,\, t_1]$$

Решение ищемв виде:

$$J_n(t) = v(t) e^{-\varepsilon(t-t_0)}$$

Откуда следует, что

$$J_n(t) \leq \varepsilon^2 + \left(J_n(t_0) - \varepsilon^2\right) e^{-\varepsilon(t-t_0)} \leq \varepsilon$$

Последнее неравенство верно, так как $J_0(t_0) \leq \varepsilon^2$. Таким образом получено противоречие, из чего следует, что оценки (5.35) выполнены и на интервале $[t_0,\, t_0 + T]$. Но так как оценки на производные не зависят от t, то интервал, на котором выполнены эти оценки, можно продолжить еще на T, и так далее. Таким методом за конечное число шагов мы доберемся до любого момента времени. **Теорема 5.2.1 доказана.**

5.2.2 Существование решения периодической задачи по времени с немалыми начальными данными.

Теперь рассмотрим случай сильно диссипативного ядра.

Теорема 5.2.2. *Пусть ядро задачи (5.3) является сильно диссипативным с* $\alpha > \frac{3}{2}$. *Пусть также* $\bar{u}(x) \in C_\pi^\infty(\mathbb{R})$. *Тогда существует и единственное решение задачи (5.3) из класса* $C^\infty([0, +\infty), C_\pi^\infty(\mathbb{R}))$.

Доказательство. В силу леммы 5.1.3 существует единственное решение этой задачи до некоторого момента $T = T(\|u\|^2_{H^2(\Omega)})$. Покажем, что эту норму решения можно продолжить на все время $t \in [0, +\infty)$.

Докажем, что верны следующие оценки:

$$J_n(t) \leq 4J_n(0)e^{2Ct},\ C > 0,\ n = 0, 1, 2 \tag{5.40}$$

По теореме 5.2.1 для J_0 верно соотношение: $\dot{J}_0(t) < 0$. Поэтому

$$J_0 \leq J_0(0)$$

Откуда следует, что при $n = 0$ соотношения (5.40) выполнены.

Пусть T — время существования решения. Представим решение в виде

$$u(x,\, t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{p=-\infty}^{+\infty} e^{-ipx} \hat{u}_p(t)$$

Подставим это представление в исходную задачу. Получим задачу на коэффициенты Фурье:

$$\begin{cases} \dot{\hat{u}}_p(t) + \frac{ip}{2} \sum\limits_{q=-\infty}^{+\infty} \hat{u}_{p-q}(t)\hat{u}_q(t) + ipK_p\hat{u}_p(t) = 0 \\ \hat{u}_p(t)|_{t=0} = \hat{\hat{u}}_p \end{cases} \tag{5.41}$$

В уравнении сумму перебросим в правую часть, затем решим это уравнение и умножим на $(ip)^n$:

$$(ip)^n\hat{u}_p(t) = (ip)^n\hat{\hat{u}}_p e^{-ipK_pt} -$$

$$-\frac{(ip)^{n+1}}{2} \int\limits_0^t e^{-ipK_p(t-\tau)} \sum_{q=-\infty}^{+\infty} \hat{u}_{p-q}(\tau)\hat{u}_p(\tau)d\tau \tag{5.42}$$

При $n = 1, 2$ выполнено неравенство:

$$|p|^n \leq 2^2(|p-q|^n + |q|^n) \leq 4(|p-q|^n + |q|^n)$$

Занесем под сумму $(p)^n$. Обозначим через W интегральную часть равенства (5.42) и, используя неравенство Коши-Буняковского и оценку для $|p|$, проведем оценку:

$$W \leq 2|p| \int\limits_0^t e^{-K_p^1(t-\tau)} \sqrt{J_0(\tau)J_n(\tau)}d\tau$$

Тогда можно написать следующую оценку:

$$|p^n\hat{u}_p(t)| \leq |p^n\hat{\hat{u}}_p| + 2|p| \int\limits_0^t e^{-K_p^1(t-\tau)} \sqrt{J_0(\tau)J_n(\tau)}d\tau \tag{5.43}$$

Пусть $\bar{u}(x) \not\equiv const$. Оценки (5.40) будем доказывать от противного.

Пусть t_1 — первый момент времени, когда эти оценки нарушаются. Но так как функции $J_n(t)$ непрерывны и $J_n(0) \neq 0$, то

$$J_n(t) \leq 6J_n(0)e^{2Ct}, \ t \in [0, \, t_1] \tag{5.44}$$

Введем обозначения:

$$\begin{cases} A^2 = 40J_0(0), \quad \beta = \frac{1}{2}\left(\alpha - \frac{3}{2}\right) > 0 \\ N = max\left\{p_0 + 4, \, \left(2^{\alpha+\beta}A\varepsilon^{-1}\beta^{-1/2}\right)^{1/\beta}\right\} \\ C = 2AN^{3/2} \end{cases} \tag{5.45}$$

Подставим (5.44) в (5.43) и возьмем норму в ℓ_2:

$$J_n^{1/2}(t) \leq J_n^{1/2}(0) + 2\sqrt{6}\times$$

$$\times \left\| |p| \int\limits_0^t e^{-K_p^1(t-\tau)} J_0^{1/2}(0) J_n^{1/2}(0) e^{C\tau} d\tau \right\|_{\ell_2} \tag{5.46}$$

Откуда получается, что

$$J_n(t) \leq J_n(0) \left\{ 1 + A \left\| |p| \int\limits_0^t e^{-K_p^1(t-\tau)+C\tau} d\tau \right\|_{\ell_2} \right\}^2 \tag{5.47}$$

Рассмотрим подробнее интеграл:

$$I = |p| \int\limits_0^t e^{-K_p^1(t-\tau)+C\tau} d\tau = |p| e^{-K_p^1 t} \int\limits_0^t e^{\tau(K_p^1+C)} d\tau =$$

$$= |p| e^{K_p^1 t} \frac{1}{K_p^1 + C}\left(e^{(K_p^1+C)t} - 1\right) \leq |p| \frac{e^{Ct}}{K_p^1 + C}, \ |p| \geq N \text{ когда } K_p^1 > 0$$

Если же $|p| < N$, то

$$I \leq N \frac{e^{Ct}}{C}$$

Рассмотрим случай $|p| \geq N$:

$$0 \leq \frac{|p|}{K_p^1 + C} \leq \frac{1}{\varepsilon |p|^{\beta} |p|^{\beta+1/2}} \leq$$

$$\leq \frac{2^{\alpha}}{\varepsilon N^{\beta}(1+p)^{\beta+1/2}} \leq \frac{\beta^{1/2}}{8A(1+p)^{\beta+1/2}} \tag{5.48}$$

Тогда:

$$\sum_{p=-\infty}^{+\infty} \left(|p| \int\limits_0^t e^{-K_p^1(t-\tau)+C\tau} d\tau \right)^2 = \sum_{|p|\leq N} + \sum_{|p|>N} \leq$$

Используя оценку (5.48), получим:

$$\left(\frac{2N^3}{C^2} + \frac{\beta}{16A^2\beta}\right) \leq A^2 e^{2Ct} \tag{5.49}$$

Подставим эту оценку в (5.47), откуда получим:

$$J_n(t) \leq 4J_n(0)e^{2Ct}$$

Мы получили противоречие, что доказывает оценки (5.40) на всем промежутке времени существоввания решения. Из этих оценок следуют следующие:

$$\|u(x,\, t)\|^2_{H^2(\Omega)} \leq 4\|\bar{u}(x)\|^2_{H^2(\Omega)} e^{2Ct} \tag{5.50}$$

Поэтому можно продолжить решение за время T. Это доказывается от противного, отступая чуть от этого момента времени и пользуясь этими оценками продолжаем за этот момент времени T, получая противоречие с предположением. **Теорема 5.2.2 доказана.**