Московский Государственный Университет им.М.В.Ломоносова
Факультет вычислительной математики и кибернетики

Конспект лекций по курсу «Теория устойчивости и стабилизации»

Преподаватель:
Точилин П. А.

Составители:
Байрамов Н. Р.
Нагапетян Т. А.

Москва, 2009 г.

Содержание

1. Лекция 1

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = f(t,x), \quad x \in \mathbb{R}^n. \tag{1.1}$$

Также рассмотрим множество $\mathcal{H}_t^0 = \{(t,x) : t \geqslant t_0, x \in \mathbb{R}^n : \|x\| < h\}$.

Для любого $(t_0, x_0) \in \mathcal{H}_t^0$ обозначим через $x(t,t_0,x_0)$, $t \geqslant t_0$ решение системы (5.1), выпущенное из точки (t_0, x_0).

Назовем некоторое решение $\widetilde{x}(t,t_0,\widetilde{x}_0)$ системы (5.1) невозмущенным, при этом требуется, чтобы

$$(t_0, \widetilde{x}_0) \in \mathcal{H}_t^0, \quad \forall t \geqslant t_0 : (t, \widetilde{x}(t,t_0,\widetilde{x}_0)) \in \mathcal{H}_t^0.$$

Определение 1. *Решение $\widetilde{x}(t,t_0,\widetilde{x}_0)$ системы (5.1) называется устойчивым по Ляпунову, если*

1) $\exists \delta_1 > 0, \forall x_0 : \|x_0 - \widetilde{x}_0\| < \delta_1$ *существует решение* $x(t,t_0,x_0)$: $(t, x(t,t_0,x_0)) \in \mathcal{H}_t^0, \forall t \geqslant t_0$.

2) $\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta_2 = \delta_2(\varepsilon, t_0, x_0) > 0 \ (\delta_2 < \delta_1) : \quad \forall x_0,\ \|x_0 - \widetilde{x}_0\| < \delta_2 \Longrightarrow \|x(t,t_0,x_0) - \widetilde{x}(t,t_0,\widetilde{x}_0)\| < \varepsilon, \forall t \geqslant t_0$.

Часто условие 1) не пишут явно, вместо этого говоря, что решение системы (5.1) непрерывно продолжаемо на полупрямой $t \geqslant t_0$.

Определение 2. *Решение $\widetilde{x}(t,t_0,\widetilde{x}_0)$ системы (5.1) называется асимптотически устойчивым, если выполнены пункты* 1) *и* 2) *в* ***Опр.***1 *и*

3) $\exists \delta_3 = \delta_3(t_0,x_0) > 0, \forall x_0,\ \|x_0 - \widetilde{x}_0\| < \delta_3 \Longrightarrow \exists \lim\limits_{t\to\infty} \|x(t,t_0,x_0) - \widetilde{x}(t,t_0,\widetilde{x}_0)\| = 0.$

Упражнение. Покажем, что из условия 3) в **Опр.**2 не вытекает условие 2).

Рассматривается система дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} = xy, \\ \dot{y} = y^2 - x^4. \end{cases} \tag{1.2}$$

Уравнение траекторий записывается в виде $y^2 + x^4 = Cx^2$, поскольку $\dfrac{y^2}{x^2} + x^2 = C$ является первым интегралом системы.

Невозмущенное решение состоит из одной точки $(0,0)$, а любое другое решение $(x(t), y(t))$ с начальными условиями из любой окрестности точки $(0,0)$ сходится к этой точке: $\lim\limits_{t\to\infty}(x^2(t) + y^2(t)) = 0$.

При этом, очевидно, в любой окрестности $(0,0)$ найдется такая точка, что траектория системы (1.2), выпущенная из нее, проходит через заданную точку плоскости $(\overline{x}, \overline{y})$ (достаточно задать для этого величину параметра C) (см. рис. 1). Это означает неустойчивость нулевого решения системы (1.2).

Пример 1. *Покажем, что неустойчивое решение при замене переменных может стать устойчивым.*

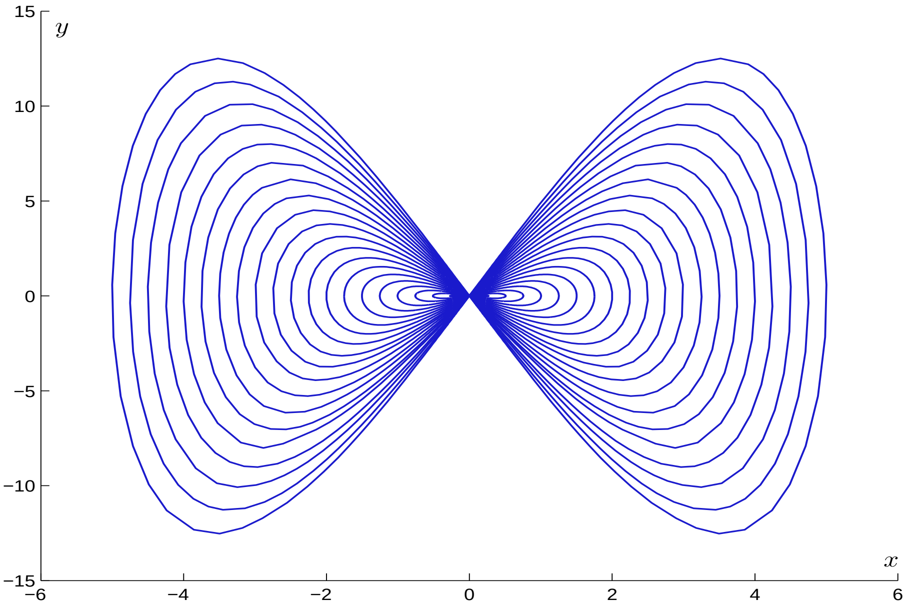

Рис. 1. Семейство траекторий системы (1.2).

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} = -y\sqrt{x^2+y^2}, \\ \dot{y} = x\sqrt{x^2+y^2}. \end{cases} \tag{1.3}$$

Его решение записывается в виде

$$\begin{cases} x(t) = c\cos(ct+d), \\ y(t) = c\sin(ct+d). \end{cases}$$

Нулевое решение системы устойчиво, любое ненулевое неустойчиво, поскольку в этом случае у близкого решения угловая скорость $\widetilde{c} \neq c$ и для достаточно большого t разность между двумя решениями (1.3) достигнет, например, величины c.

Сделаем замену переменных

$$x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta,\ \textit{где}\ \theta = r(t)t + d(t).$$

Поскольку для системы (1.3) величины $r = \sqrt{x^2+y^2}$ и $d = \operatorname{arctg}\dfrac{y(t)}{x(t)} - r\cdot t$ являются первыми интегралами (что очевидно вытекает из самого решения), то для новой системы получим

$$\begin{cases} \dot{r} = 0, \\ \dot{\theta} = 0. \end{cases}$$

Очевидно, любое решение данной системы является устойчивым.

Пример 2. *Рассмотрим две модели рынка. Пусть имеется n товаров,*
Q — вектор из объемов производства товаров,
$P_1, \dots, P_n$ — их цены,
$D_1, \dots, D_n$ — величины спроса на товары,
$S_1, \dots, S_n$ — величины предложения товаров.

I) *Модель Вальраса. Согласно этой модели спрос регулируют цены. Модель описывается системой*

$$\begin{cases} P_i = P_i(Q), \\ \dot{Q}_i = a(P_i^d - P_i^s), \end{cases}$$

где P_i^d, P_i^s *— цена спроса и предложения соответственно.*

Система приводится к общему виду $\dot{Q}_i = a(P_i^d(Q) - P_i^s(Q))$ *и в общем случае является нелинейной.*

II) *Модель Маршалла. В этой модели спрос регулируют производители товаров. Модель описывается системой*

$$\begin{cases} Q_i = Q_i(P), \\ \dot{P}_i = b(Q_i^d - Q_i^s), \end{cases}$$

где Q_i^d, Q_i^s *— объем товаров для спроса и предложения соответственно.*

Система приводится к общему виду $\dot{P}_i = a(Q_i^d(P) - Q_i^s(P))$ *и в общем случае является нелинейной.*

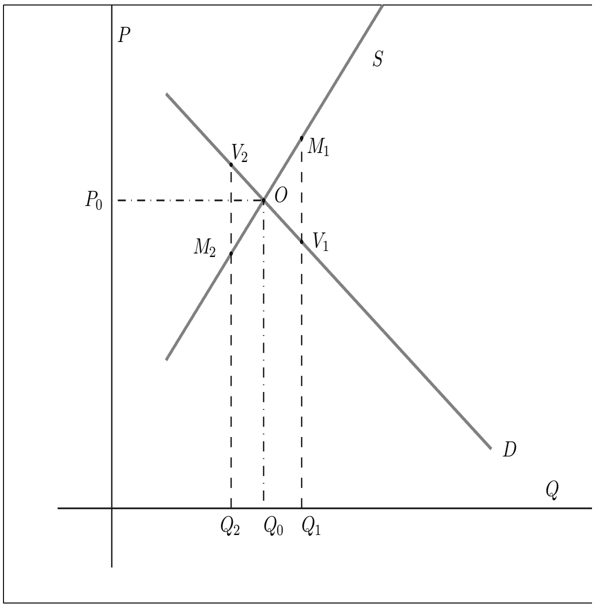

Рис. 2. Устойчивая система в моделях Вальраса и Маршалла.

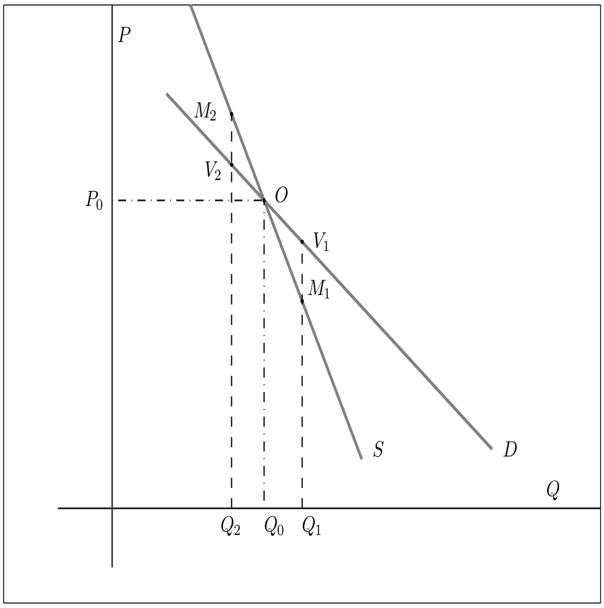

Рис. 3. Устойчивая по Вальрасу и неустойчивая по Маршаллу система.

В рамках каждой модели удовлетворяющие ей уравнения цены и объема товаров должны образовывать устойчивую систему.

Приведем примеры функций спроса и предложения, как удовлетворяющих той или иной модели, так и нет.

Их вид показан на рис. 2-5.

1) *Удовлетворяет моделям Вальраса и Маршалла.*

В модели Вальраса колебания цен приводят в положение V_1 *или* V_2*. Производители товаров в связи с разностью реальной и предлагаемой цены соответственно либо сокращают производство (положение* V_1*), либо увеличивают (положение* V_2*). Это приводит к возвращению в исходное положение*

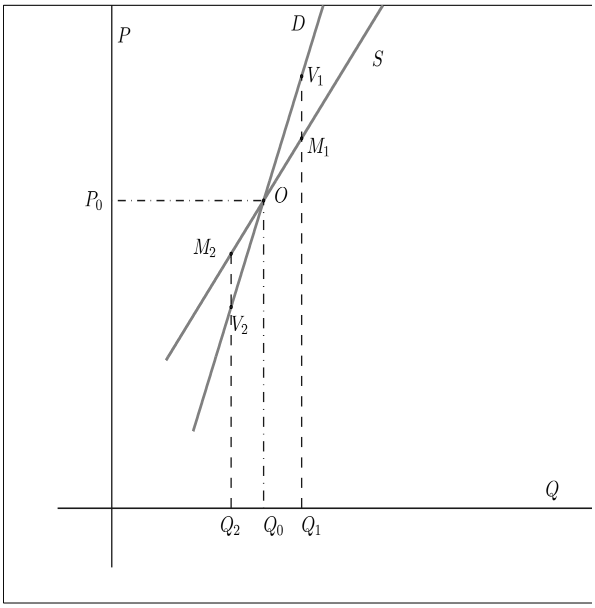

Рис. 4. Устойчивая система в модели Маршалла и неустойчивая по Вальрасу.

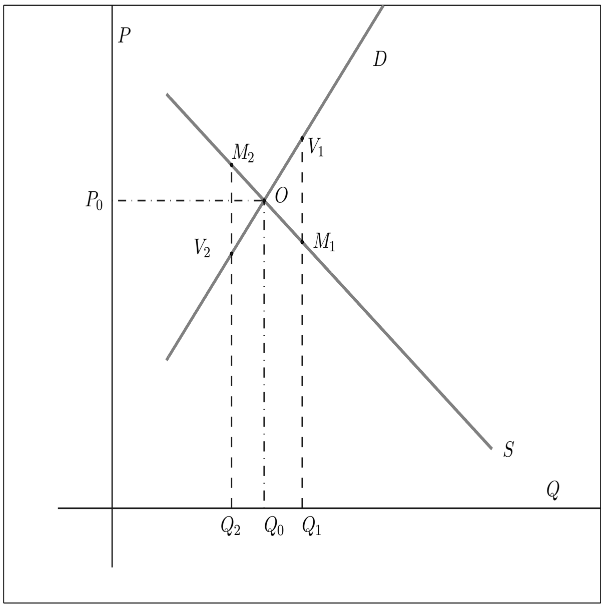

Рис. 5. Неустойчивая по Вальрасу и по Маршаллу система.

O, что означает асимптотическую устойчивость данного положения равновесия.

В модели Маршалла колебания производства приводят в положение M_1 или M_2. Производители товаров из-за возникшего избытка или недостатка товаров соответственно либо сокращают производство (положение M_1), либо увеличивают (положение M_2). Это также приводит к возвращению в исходное положение O, что означает его асимптотическую устойчивость.

2) Удовлетворяет модели Вальраса, не удовлетворяет модели Маршалла.

3) Удовлетворяет модели Маршалла, не удовлетворяет модели Вальраса.

4) Не удовлетворяет моделям Вальраса и Маршалла.

В пп.2)-4) проходят те же рассуждения, что и в п.1), согласно которым выясняется, является ли положение макроэкономического равновесия в той или иной модели устойчивым или нет.

Так, на рис. 3 функции спроса и предложения не удовлетворяют модели Маршалла. В точке M_1 из-за недостатка товаров производители увеличивают производство, из-за чего макроэкономическое положения еще более отдаляется от положения O, как и в точке M_2, в которой из-за избытка товаров происходит дальнейшее сокращение производства.

Та же неустойчивость наблюдается в модели на рис. 4, не удовлетворяющей модели Вальраса.

Вновь обратимся к системе (5.1), пусть $\widetilde{x}(t, t_0, \widetilde{x}_0)$— ее решение. Перейдем к новой функции $y(t) = x(t) - \widetilde{x}(t)$. Тогда

$$\dot{y}(t) = f(t, x(t)) - f(t, \widetilde{x}(t)) = f(t, y + \widetilde{x}(t)) - f(t, \widetilde{x}(t)) = g(t, y).$$

В итоге система (5.1) приведена к виду

$$\dot{y} = g(t, y),$$

где $g(t, 0) = 0$, поэтому $y \equiv 0$ является положением равновесия.

Это означает, что всегда при исследовании устойчивости некоторого решения системы можно перейти к рассмотрению нулевого решения.

Определение 3. *Решение $\widetilde{x}(t, t_0, \widetilde{x}_0)$ системы (5.1) называется устойчивым по Лагранжу, если*

1) $\exists \delta_1 > 0, \forall x_0 : \|x_0 - \widetilde{x}_0\| < \delta_1$ существует решение $x(t, t_0, x_0)$: $(t, x(t, t_0, x_0)) \in \mathcal{H}_t^0, \forall t \geqslant t_0$.

2) $\exists \delta_2 = \delta_2(t_0, x_0) > 0$ $(\delta_2 < \delta_1)$: $\quad \forall x_0,\ \|x_0 - \widetilde{x}_0\| < \delta_2$ $\Longrightarrow \exists M > 0 : \|x(t, t_0, x_0)\| < M,\ \forall t \geqslant t_0$.

Теорема 1. *Рассмотрим линейную систему дифференциальных уравнений*

$$\dot{x} = A(t)x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{1.4}$$

где $A(t)$— матрица с непрерывными коэффициентами.

Тогда система (1.4) устойчива по Ляпунову $\iff$ система (1.4) устойчива по Лагранжу.

Доказательство.

Первые пункты в определениях устойчивости по Ляпунову и по Лагранжу совпадают. Остается показать эквивалентность вторых пунктов определений при выполненном первом пункте.

Вводим в рассмотрение матрицу Коши $X(t, t_0)$. Она удовлетворяет матричному дифференциальному уравнению

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t} X(t, t_0) = A(t)X(t, t_0), \\ X(t_0, t_0) = E. \end{cases}$$

Пусть $\widetilde{x}(t), x(t)$ — два произвольных решения (1.4). Из курса ОДУ известно, что $\widetilde{x}(t) = x(t) + X(t, t_0)(\widetilde{x}(t_0) - x(t_0))$.

Заметим, что для линейных систем устойчивость по Лагранжу и ограниченность матрицы Коши: $\exists M > 0,\ \|X(t, t_0)\| < M, \forall t \geqslant t_0$ — эквивалентные условия.

Действительно, из устойчивости по Лагранжу следует ограниченность решений $x^j(t)$ системы (1.4) с начальными данными $x^j(t_0) = e^j$, где $(e^1, \ldots, e^n)$ — стандартный ортонормированный базис в $\mathbb{R}^n$, т.е. столбцы матрицы $X(t, t_0)$ ограничены по норме, следовательно, норма матрицы $X(t, t_0)$ ограничена. Обратно, из ограниченности нормы матрицы $X(t, t_0)$ следует ограниченность норм ее столбцов, а поскольку любое решение (1.4) записывается как $x(t) = X(t, t_0)x(t_0)$, то решение системы ограничено для любых начальных условий, что означает устойчивость системы по Лагранжу.

Достаточность. Система (1.4) устойчива по Лагранжу, тогда

$$\exists M > 0 : \|X(t, t_0)\| < M,\ \forall t \geqslant t_0.$$

Имеем

$$\|\widetilde{x}(t) - x(t)\| \leqslant \|X(t,t_0)\| \cdot \|\widetilde{x}(t_0) - x(t_0)\| < M \cdot \|\widetilde{x}(t_0) - x(t_0)\|.$$

Выбрав $\delta_2 = \dfrac{\varepsilon}{M}$, получим $\|\widetilde{x}(t) - x(t)\| < \varepsilon$, $\forall t \geqslant t_0$ при условии $\|\widetilde{x}(t_0) - x(t_0)\| < \delta_2$, что совпадает с определением устойчивости по Ляпунову.

Необходимость. Система (1.4) устойчива по Ляпунову. Это означает, что

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta_2 > 0 : \|\widetilde{x}(t_0) - x(t_0)\| < \delta_2 \implies \|\widetilde{x}(t) - x(t)\| < \varepsilon.$$

Рассмотрим при заданном $\varepsilon > 0$ решение $x(t)$ с начальным значением $x(t_0)$, состоящим из компонент

$$x_i(t_0) = \widetilde{x}_i(t_0) + \delta, \ \text{ где } \delta \leqslant \delta_2,$$

$$x_j(t_0) = \widetilde{x}_j(t_0),\ j \neq i.$$

Тогда получаем $\widetilde{x}(t) - x(t) = \delta X_i(t,t_0)$, где $X_i(t,t_0)$ — i-ый столбец матрицы $X(t,t_0)$. Устойчивость по Ляпунову влечет $\|\widetilde{x}(t) - x(t)\| < \varepsilon$, откуда $\|X_i(t,t_0)\| < \dfrac{\varepsilon}{\delta}$. Из ограниченности нормы каждого из столбцов следует ограниченность нормы матрицы $X(t,t_0)$, а это, как выяснялось, означает устойчивость системы по Лагранжу.

Теорема доказана.

Определение 4. *Решение $\widetilde{x}(t,t_0,\widetilde{x}_0)$ системы (5.1) называется устойчивым по Пуассону, если*

1) $\exists \delta_1 > 0,\ \forall x_0 : \|x_0 - \widetilde{x}_0\| < \delta_1$, *существует решение* $x(t,t_0,x_0)$: $(t, x(t,t_0,x_0)) \in \mathcal{H}_t^0, \forall t \geqslant t_0$.
2) $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta_2 = \delta_2(\varepsilon, t_0, x_0) > 0$ $(\delta_2 \leqslant \delta_1)$, $\quad \forall x_0,\ \|x_0 - \widetilde{x}_0\| < \delta_2$ $\implies \forall T \geqslant t_0,\ \exists t \geqslant T : \|x(t,t_0,x_0) - \widetilde{x}(t,t_0,\widetilde{x}_0)\| < \varepsilon$.

Упр. 1 демонстрирует случай, когда система устойчива по Пуассону и неустойчива по Ляпунову.

2. Лекция 2

Рассмотрим класс линейных систем дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = Ax, \quad A \in \mathbb{R}^{n\times n}. \tag{2.1}$$

Для линейных систем устойчивость по Ляпунову и по Лагранжу выполняется либо не выполняется одновременно. Кроме того, из устойчивости некоторого отдельного решения следует устойчивость нулевого решения, а потому и устойчивость любого решения системы. Поэтому для линейных систем можно говорить о глобальной устойчивости или неустойчивости.

Обозначим через $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ попарно различные собственные значения матрицы A. Алгебраическую кратность λ_r (кратность как корня характеристического многочлена) обозначим μ_r, геометрическую кратность (размерность ядра $A - \lambda_r E$) обозначим ν_r. Известно, что $\nu_r \leqslant \mu_r$. Следующее утверждение из линейной алгебры показывает, когда алгебраическая и геометрическая кратность собственного значения совпадают.

Утверждение 1. *$\forall A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ $\exists P \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\det P \neq 0$, т.ч. $A = P^{-1}JP$, где J — жорданова форма матрицы A, $\quad J = \mathrm{diag}(C_1, \ldots, C_s)$, где*

$$C_r = \begin{pmatrix} \lambda_r & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_r & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \lambda_r \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n_r\times n_r} \text{ — жорданова клетка .}$$

При этом $C_r = \lambda_r \in \mathbb{R} \iff \mu_r = \nu_r$.

Используя разложение в жордановой форме матрицы A, решение системы (2.1) записывается в виде

$$x(t) = e^{(t-t_0)A}x(t_0) = P^{-1}\,\mathrm{diag}\left[e^{(t-t_0)C_1}, \ldots, e^{(t-t_0)C_s}\right] Px_0,$$

где

$$e^{(t-t_0)C_r} = e^{\lambda_r(t-t_0)}\left[I_0^{(r)} + \frac{(t-t_0)}{1!}I_1^{(r)} + \ldots + \frac{(t-t_0)^{n_r-1}}{(n_r-1)!}I_{n_r-1}^{(r)}\right],$$

$$I_\sigma^{(r)} = \begin{pmatrix} 0 & \ldots & 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ldots & \vdots & \vdots & \ddots & \ldots & \vdots \\ 0 & \multicolumn{4}{c}{\ldots\ldots\ldots\ldots} & 1 & 0 \\ 0 & \multicolumn{5}{c}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots} & 1 \\ 0 & \multicolumn{5}{c}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots} & 0 \\ \multicolumn{7}{c}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots} \\ 0 & \multicolumn{5}{c}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots} & 0 \end{pmatrix}.$$

Здесь в матрице $I_\sigma^{(r)}$ первые σ элементов первой строки являются нулями.

Теорема 2. *Система $\dot{x} = Ax$ устойчива по Ляпунову $\quad\iff$*

1) $\forall\lambda$ — собственного значения матрицы A: $\mathrm{Re}\,\lambda \leqslant 0$;

2) $\forall\lambda$ — собственного значения матрицы A, т.ч. $\mathrm{Re}\,\lambda = 0 \quad\Longrightarrow\quad \nu(\lambda) = \mu(\lambda)$ — его алгебраическая и геометрическая кратность совпадают.

Доказательство.

Достаточность. Разобьем попарно различные собственные значения на две группы:

$$\lambda_j = \alpha_j + i\beta_j,\ j = 1, \ldots, p,\ \alpha_j < 0; \quad \lambda_j = i\gamma_j,\ j = p+1, \ldots, q\,(q \leqslant n).$$

Тогда решение системы записывается в виде

$$x(t) = P^{-1}\,\mathrm{diag}\left[e^{(t-t_0)C_1}, \ldots, e^{(t-t_0)C_s}\right] Px_0 =$$

$$= \sum_{j=1}^{p} e^{\alpha_j(t-t_0)}(\cos\beta_j(t-t_0) + i\sin\beta_j(t-t_0))P_j(t)x_0 + \sum_{j=p+1}^{n}(\cos\gamma_j(t-t_0) + i\sin\gamma_j(t-t_0))c_j,$$

где $P_j(t)$ — матричный многочлен, c_j — некоторые постоянные векторы.

При $t \to +\infty$ первая сумма стремится к нулю, вторая сумма ограничена сверху при любом $t \geqslant t_0$, поэтому искомая система устойчива по Лагранжу $\Longrightarrow$ по **Т.1** устойчива по Ляпунову.

Необходимость.

1) Пусть $\exists\lambda_r$ — собственное значение матрицы A: $\mathrm{Re}\ \lambda_r > 0$, с соответствующим собственным вектором x_0. Тогда $x(t) = e^{\lambda_r t}x_0$ является решением системы, но при этом $\|x(t)\| \xrightarrow{t\to+\infty} +\infty$, что противоречит устойчивости системы.

2) Пусть $\exists\lambda_r = i\gamma_r, \quad \nu_r < \mu_r$, тогда найдется жорданова клетка

$$C_r = \begin{pmatrix} \lambda_r & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_r & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_r \end{pmatrix}.$$

Матрица $B(t) = P^{-1}\,\mathrm{diag}\left[0,\dots,0,e^{(t-t_0)C_r},0,\dots,0\right] P$ является решением матричного уравнения $\dot{B}(t) = AB(t)$.

Беря норму матрицы $\|B(t)\| = \max\limits_{i,j}|b_{ij}(t)|$, при достаточно больших t получим: $\quad \|B(t)\| = \dfrac{(t-t_0)^{n_r-1}}{(n_r-1)!}$, откуда

$\|B(t)\| \xrightarrow{t\to+\infty} +\infty$, что противоречит устойчивости системы по Лагранжу.

Теорема доказана.

Теорема 3. *Система* $\dot{x} = Ax$ *асимптотически устойчива* $\quad \Longleftrightarrow \forall\lambda$ *— собственного значения матрицы* A*:* $\mathrm{Re}\ \lambda < 0$.

Доказательство.

Достаточность. По предыдущей теореме система устойчива. Тем же рассуждения, что и в предыдущем док-ве, дают:

$$x(t) = \sum_{j=1}^{p} e^{\alpha_j(t-t_0)}(\cos\beta_j(t-t_0) + i\sin\beta_j(t-t_0))P_j(t)x_0, \quad \alpha_j < 0 \quad \Longrightarrow$$

$\|x(t)\| \xrightarrow{t\to+\infty} 0$, что доказывает асимптотическую устойчивость системы.

Необходимость.

Согласно предыдущей теореме, $\forall\lambda$ — собственные значения A, $\quad \mathrm{Re}\,\lambda \leqslant 0$. При этом в случае $\lambda_r = i\gamma_r \quad \nu_r = \mu_r$. Покажем, что для асимптотически устойчивой системы случай чисто комплексные собственные значения не реализуются.

Пусть $\lambda_r = i\gamma_r$, ему соответствует собственный вектор x_0. Тогда

$$x(t) = (\cos\gamma_r(t-t_0) + i\sin\gamma_r(t-t_0))x_0$$

является решением системы. Но в таком случае $\forall t > t_0, \quad \|x(t)\| = \|x_0\|$, и условие $\|x(t)\| \xrightarrow{t\to+\infty} 0$ не выполняется. Полученное противоречие завершает доказательство.

Определение 5. *Многочлен*

$$f(\lambda) = a_0 + a_1\lambda + \ldots + a_n\lambda^n$$

называется многочленом Гурвица, если действительные части всех его корней отрицательны: $\mathrm{Re}\,\lambda_i < 0$, $i = 1,\dots,n$.

Теорема 4. *Пусть $f(\lambda)$ — многочлен Гурвица, $a_n \neq 0$, $a_0 > 0$. Тогда*

$$a_n > 0, a_{n-1} > 0, \ldots, a_1 > 0.$$

Доказательство.

Обозначим $\lambda_j = -\alpha_j \pm i\beta_j$, $j = 1, \ldots, p$ — p пар комплексно сопряженных корней многочлена Гурвица; $\lambda_j = -\gamma_j$, $j = p+1, \ldots, m$. Здесь $\alpha_j > 0$, $\gamma_j > 0$.

Пусть m_j — кратность корня λ_j. Имеем

$$f(\lambda) = a_n \prod_{j=1}^{p} (\lambda^2 + 2\lambda\alpha_j + \alpha_j^2 + \beta_j^2)^{m_j} \prod_{j=p+1}^{m} (\lambda + \gamma_j)^{m_j}.$$

Отсюда имеем: $f(0) = a_0 = a_n \cdot C_0, \quad C_0 > 0 \quad \Longrightarrow a_n > 0$. Далее беря производную $f'(0) = a_1$, получим $f'(0) = a_n \cdot C_1, \quad C_1 > 0 \Longrightarrow a_1 > 0$ и т.д., взяв k-ую производную $f^{(k)}(0)$, получим $a_k > 0$. Теорема доказана.

Следствие. *Пусть система (2.1) асимптотически устойчива. Взяв в качестве многочлена Гурвица $f(\lambda) = \det(\lambda E - A)$, получаем $a_n = 1 > 0 \Longrightarrow a_0 > 0, \ldots, a_{n-1} > 0$. Из определения $f(\lambda)$ вытекает, что $(-1)^{i+1} a_i$ есть сумма всех главных миноров порядка $i+1$ матрицы A, поэтому обозначая через A_k сумму всех главных миноров порядка k матрицы A, получим*

$$-A_1 = -\operatorname{tr} A > 0, A_2 > 0, \ldots, (-1)^n A_n = (-1)^n \det A > 0.$$

Упражнение. Покажем, что обратное утверждение к **Т.4** не выполняется. Рассмотрим многочлен

$$g(\lambda) = (2\lambda^2 + 3 - \lambda)(2\lambda^2 + 3 + \lambda) = 4\lambda^4 + 11\lambda^2 + 9.$$

Все коэффициенты многочлена положительны. При этом одним из его корней является $\lambda_1 = \dfrac{1 + i\sqrt{23}}{4}$, для которого $\operatorname{Re} \lambda_1 > 0 \quad \Longrightarrow \quad$ соответствующая система неустойчива, т.е. условие **Т.4** не выполнено.

Определим матрицу

$$M_f = \begin{pmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & 0 & \ldots & 0 \\ \multicolumn{7}{c}{\dotfill} \\ 0 & \multicolumn{2}{c}{\ldots\ldots\ldots\ldots} & a_n & a_{n-1} & & a_{n-2} \\ 0 & 0 & \multicolumn{3}{c}{\ldots\ldots\ldots\ldots} & 0 & a_n \end{pmatrix}.$$

Теорема 5 (Критерий Рауса-Гурвица). *Обозначим через*

$$\Delta_1 = a_1, \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix}, \ldots, \Delta_n = a_n \Delta_{n-1}$$

последовательные миноры матрицы M_f, при этом $a_0 > 0$.

Тогда $f(\lambda)$ является многочленом Гурвица $\iff$ все последовательные миноры матрицы M_f положительны: $\Delta_1 > 0, \ldots, \Delta_n > 0$.

Теорема 6. *Функция $f(\lambda)$ — полином Гурвица $\iff$ при $\omega \in [0, +\infty)$ кривая $f(i\omega)$ на комплексной плоскости совершает вокруг начала координат оборот (против часовой стрелки) на угол $\varphi = \dfrac{\pi}{2}n$.*

Теорема 7. *1) Пусть $f(0) \neq 0$, m — количество корней λ функции $f(\cdot)$, для которых $\operatorname{Re}\lambda > 0$. Тогда при $\omega \in [0; +\infty)$ кривая $f(i\omega)$ совершает вокруг начала координат оборот на угол $\varphi = \dfrac{\pi}{2}(n - 2m)$.*

2) Если при $\omega \in [0; +\infty)$ кривая $f(i\omega)$ совершает вокруг начала координат оборот на угол $\varphi = \dfrac{\pi}{2}(n - 2m)$, то m — количество корней λ функции $f(\cdot)$, для которых $\operatorname{Re}\lambda > 0$.

Пример 3. *Пусть $f(\lambda) = \lambda^3 + p\lambda^2 + q\lambda + r$. Тогда*

$$f(i\omega) = i(q\omega - \omega^3) + (r - p\omega^2).$$

Значения ω, которым соответствуют точки пересечения кривой $f(i\omega)$ с осями координат на комплексной плоскости, равны $\omega_0 = 0, \omega_1 = \sqrt{\dfrac{r}{p}}, \omega_2 = \sqrt{q}$ (пример такой кривой показан на рис. 6). Условия применимости этих формул имеют вид $\omega_0 < \omega_1 < \omega_2$, что можно записать в виде:

$$r > 0,\ p > 0,\ q > \frac{r}{p} > 0.$$

Кроме того, из условия

$$\operatorname{Re} f(i\omega) < 0 \text{ при } \omega > \omega_2, \quad \lim_{\omega \to +\infty} \frac{\operatorname{Im} f(i\omega)}{\operatorname{Re} f(i\omega)} = \infty$$

*следует $\lim\limits_{\omega \to +\infty} [\arg(f(i\omega)) - \arg(f(0))] = \dfrac{3\pi}{2}$, что также непосредственно следует из **Т.7**.*

2.1 Характеристический показатель Ляпунова

Определение 6. *Рассмотрим функцию $f(t)$, $t \in [t_0, +\infty)$; пусть $f(t) \neq 0, \forall t > T$. Характеристическим показателем Ляпунова функции $f(t)$ называется величина*

$$\chi(f) = \overline{\lim_{t \to +\infty}} \frac{1}{t} \ln |f(t)|, \quad \chi(f) \in [-\infty, +\infty].$$

Из определения и свойств верхнего предела вытекают следующие свойства характеристического показателя функции:

1° $\forall c \neq 0, \quad \chi(cf) = \chi(f)$;

2° $\chi(|f|) = \chi(f)$;

3° Если $|f| \leqslant |g|$, то $\chi(f) \leqslant \chi(g)$;

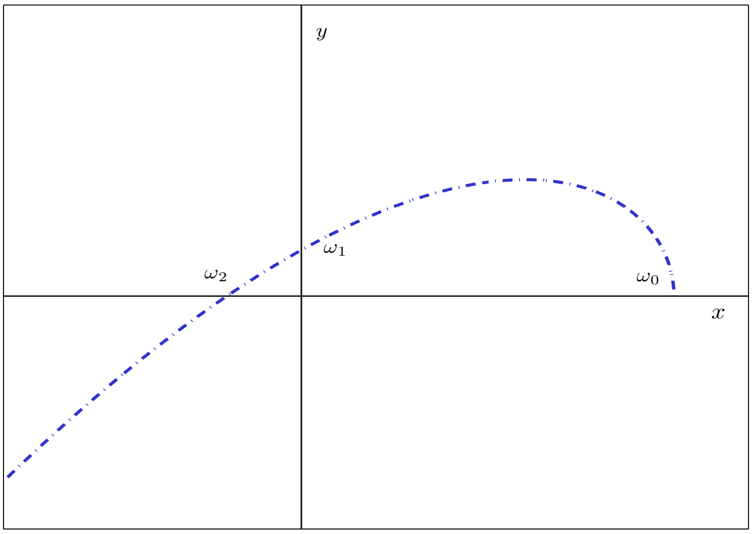

Рис. 6. Годограф Михайлова для функции $f(\cdot)$ в примере 3.

4° $\chi(\sum\limits_{i=1}^{m} f_i) \leqslant \max\limits_{i=\overline{1,m}} \chi(f_i)$, равенство достигается $\Longleftrightarrow$ $\exists! i^* : \chi(f_{i^*}) = \max\limits_{i=\overline{1,m}} \chi(f_i)$;

5° $\chi(\prod\limits_{i=1}^{m} f_i) \leqslant \sum\limits_{i=1}^{m} \chi(f_i)$;

6° Пусть c_i : $|c_i(t)| \leqslant M, \forall i = 1, \dots, n,\ \forall t \geqslant t_0$, тогда $\chi(\sum\limits_{i=1}^{m} c_i(t) f_i(t)) \leqslant \max\limits_{i=\overline{1,m}} \chi(f_i(t))$.

Теперь определим характеристический показатель матрицы:

$$F(t) = \{f_{ij}(t)\},\ t \geqslant t_0 \Rightarrow \chi(F) = \max_{i,j} \chi(f_{ij}).$$

Отсюда вытекают аналогичные свойства характеристических показателей матриц:

1° $\chi(F) = \chi(\|F\|)$;

2° $\chi(\sum\limits_{i=1}^{m} F_i) \leqslant \max\limits_{i=\overline{1,m}} \chi(F_i)$, равенство достигается $\Longleftrightarrow$ $\exists! i^* : \chi(F_{i^*}) = \max\limits_{i=\overline{1,m}} \chi(F_i)$;

3° $\chi(\prod\limits_{i=1}^{m} F_i) \leqslant \sum\limits_{i=1}^{m} \chi(F_i)$.

3. Лекция 3

Рассматривается линейная система

$$\dot{x} = A(t)x, \quad x \in \mathbb{R}^n. \tag{3.1}$$

Теорема 8 (Ляпунов)**.** *Пусть $A(t) \in C[t_0, +\infty)$, $\exists c > 0 : \|A(t)\| < c$. Тогда характеристические показатели решений (3.1) являются ограниченными.*

Доказательство.

Решение системы (3.1) записывается в виде

$$x(t) = x_0 + \int\limits_{t_0}^{t} A(\tau)x(\tau)d\tau \Rightarrow \|x(t)\| \leqslant \|x_0\| + \int\limits_{t_0}^{t} \|A(\tau)\| \cdot \|x(\tau)\|d\tau.$$

По лемме Гронуола-Беллмана

$$\|x_0\| \cdot e^{-\int_{t_0}^{t} \|A(\tau)\|d\tau} \leqslant \|x(t)\| \leqslant \|x_0\| \cdot e^{\int_{t_0}^{t} \|A(\tau)\|d\tau} \Rightarrow$$

$$-c \leqslant -\varlimsup_{t\to\infty} \frac{1}{t} \int\limits_{t_0}^{t} \|A(\tau)\|d\tau \leqslant \chi(x(t)) \leqslant \varlimsup_{t\to\infty} \frac{1}{t} \int\limits_{t_0}^{t} \|A(\tau)\|d\tau \leqslant c,$$

откуда следует утверждение теоремы.

Теорема 9. *Решения системы (3.1), которым соответствуют различные характеристические показатели, являются линейно независимыми.*

Доказательство. Пусть $\sum\limits_{i=1}^{m} c_i x^{(i)}(t) \equiv 0$, $c_i \neq 0$.

Обозначим i^*:

$$\chi(x^{(i^*)}(t)) \text{ — максимальный из } \chi(x^{(i)}(t)),\ i = \overline{1, m}.$$

Тогда $x^{(i^*)}(t) = \sum\limits_{\substack{i=1\\ i\neq i^*}}^{m} -\frac{c_i}{c_{i^*}} x^{(i)}(t)$.

Из свойств $\chi(f)$ получаем $\chi(x^{(i^*)}(t)) \leqslant \max\limits_{\substack{i=\overline{1,m}\\ i\neq i^*}} \chi(x^{(i)}(t))$.

Но согласно выбору i^*, поскольку все характеристические показатели различны, имеем $\chi(x^{(i^*)}(t)) > \max\limits_{\substack{i=\overline{1,m}\\ i\neq i^*}} \chi(x^{(i)}(t))$.

Полученное противоречие завершает доказательство.

Теорема 10. *Система (3.1) устойчива по Ляпунову $\Rightarrow$ для любого решения $x(t)$, $t \geqslant t_0$, имеем $\chi(x(\cdot)) \leqslant 0$.*

Доказательство. Обозначим через $z_1(t), \ldots, z_n(t)$ фундаментальную систему решений (3.1). Тогда решение $x(t)$ представимо в виде $x(t) = \sum\limits_{i=1}^{n} c_i z_i(t)$. Из устойчивости системы любое решение $z_i(t)$ ограничено на $[t_0, +\infty)$, поэтому $\chi(z_i(\cdot)) \leqslant 0$, $\forall i$.

Из свойств $\chi(f)$ получаем $\chi(x(\cdot)) \leqslant \max\limits_{i=\overline{1,n}} \chi(z_i(\cdot))$, откуда $\chi(x(\cdot)) \leqslant 0$, что завершает доказательство.

Упражнение. Покажем, что для стационарной системы $\dot{x} = Ax$ характеристический показатель $\chi(x(t))$ любого решения равен действительной части одного из собственных значений матрицы A.

Ранее было получено решение стационарной системы в виде

$$x(t) = P^{-1} \operatorname{diag}\left[e^{(t-t_0)C_1}, \ldots, e^{(t-t_0)C_s}\right] Px_0 =$$

$$= \sum_{j=1}^{p} e^{\alpha_j(t-t_0)}(\cos\beta_j(t-t_0)+i\sin\beta_j(t-t_0))P_j(t)x_0+\sum_{j=p+1}^{m}(\cos\gamma_j(t-t_0)+i\sin\gamma_j(t-t_0))c_j,$$

где $P_j(t)$ — матричный многочлен, c_j — некоторые постоянные векторы, $\alpha_j+i\beta_j, i\gamma_j$— собственные числа матрицы A.

Рассматривая предел

$$\overline{\lim_{t\to+\infty}}\,\frac{1}{t}\ln|x(t)|,$$

легко получить, что он равен одному из α_j либо нулю, в зависимости от значений $P_j(t)x_0$ и c_j, т.е. действительной части одного из собственных значений матрицы A, что и требовалось показать.

Определение 7. *Рассмотрим $X(t)$ — фундаментальную матрицу системы (3.1), $X(t) = \big(x^{(1)}(t), \ldots, x^{(n)}(t)\big)$.*

$X(t)$ называется нормальной системой, если $\forall$ набора $c_k, k=\overline{1,n}$:

$$\chi\Big(\sum_{k=1}^{n} c_k x^{(k)}(t)\Big) = \max_{\substack{k=\overline{1,n}\\ c_k\neq 0}} \chi(x^{(k)}(t)).$$

Эквивалентное определение. $X(t)$ называется нормальной системой, если величина $\sum\limits_{k=1}^{n}\chi(x^{(k)}(t)) = \sum\limits_{k=1}^{n}\alpha_k$ минимальна из всех таких сумм для всевозможных ФСР.

Обозначим всевозможные различные характеристические показатели системы (3.1) через $\alpha_1 < \ldots < \alpha_m$; как следствие из **Т.9**, $m \leqslant n$. Введем множество

$$N_k = \{x(t)\text{— решения (3.1): } \chi(x(t)) \leqslant \alpha_k\}\,;$$

а также числа

n_k — максимальное число ЛНЗ решений (3.1) с характеристическим показателем α_k.

Теорема 11. $\forall$ *системы (3.1) выполнены соотношения $n_1 < n_2 < \ldots < n_m$, причем $n_k = \dim N_k$.*

Доказательство.

1) Из определения следует $n_k \leqslant \dim N_k$.
2) Пусть $\{x^{(p)}(t), x^{(q)}(t)\}$ — базис N_k, где $x^{(p)}(t), x^{(q)}(t)$ — его подсистемы, $\chi(x^{(p)}(t)) = \alpha_k$, $\chi(x^{(q)}(t)) < \alpha_k$.

   Если $x^{(q)}(t) = \varnothing$, то теорема доказана.

   Иначе выберем некоторое решение $x^j(t)$ из подсистемы $x^{(p)}(t)$, и составим новый базис $\{x^{(p)}(t), x^{(q)}(t)+x^j(t)\}$. По доказанным свойствам характеристических показателей в данном базисе все элементы имеют характеристический показатель α_k. Это означает, что $n_k \geqslant \dim N_k$.

В итоге получим $n_k = \dim N_k$, соотношения $n_1 < n_2 < \ldots < n_m$ при этом будут следовать из определения, что завершает доказательство.

Следствие. *Будем строить нормальную систему согласно доказанной теореме, применяя эквивалентное определение. Обозначим через M_k количество ЛНЗ решений из ФСР, у которых характеристический показатель равен α_k, и будем требовать минимальность суммы $\sum\limits_{k=1}^{n} \chi(x^{(k)}(t))$.*

1) Возьмем систему векторов из базиса N_1. Более векторов с характеристическим показателем α_1 нет.

2) Дополним систему до базиса в N_2, для чего надо взять $n_2 - n_1$ векторов. Тогда в полученной системе $M_1 = n_1$, $M_2 = n_2 - n_1$.

k) Дополняем систему из n_{k-1} векторов до базиса в N_k, для чего надо взять $n_k - n_{k-1}$ векторов. Тогда в полученной системе $M_k = n_k - n_{k-1}$.

Данный способ, очевидно, обеспечивает минимальность суммы $\sum\limits_{k=1}^{n} \chi(x^{(k)}(t))$, поэтому построенная система решений $\{x^{(i)}(t)\}$ нормальная. Получаем достаточное условие нормальности системы: $M_1 = n_1$, $M_2 = n_2 - n_1, \ldots, M_m = n_m - n_{m-1}$. Это условие будет и необходимым, поскольку в любом другом случае выбора $\{x^{(i)}(t)\}$ сумма $\sum\limits_{k=1}^{n} \chi(x^{(k)}(t))$ будет больше.

Следствие. *Покажем эквивалентность двух определений нормальности системы решений для (3.1).*

1. Из второго определения следует $M_1 = n_1$, $M_2 = n_2 - n_1, \ldots, M_m = n_m - n_{m-1}$, а это, в свою очередь, означает, что

$$\chi(\sum_{k=1}^{n} c_k x^{(k)}(t)) = \max_{\substack{k=\overline{1,n} \\ c_k \neq 0}} \chi(x^{(k)}(t)).$$

   Доказываем от противного: если $\chi(\sum\limits_{k=1}^{n} c_k x^{(k)}(t)) < \max\limits_{\substack{k=\overline{1,n} \\ c_k \neq 0}} \chi(x^{(k)}(t)) = \alpha_s$, то для некоторого $i > 0$, $\chi(\sum\limits_{k=1}^{n} c_k x^{(k)}(t)) = \alpha_{s-i}$. Тогда некоторая система векторов из N_s, не лежащая целиком в N_{s-1}, линейно выражается через векторы пространства N_{s-i}, а значит, через векторы из N_{s-1}. Получаем противоречие.

2. Обратно, из условия $\chi(\sum\limits_{k=1}^{n} c_k x^{(k)}(t)) = \max\limits_{\substack{k=\overline{1,n} \\ c_k \neq 0}} \chi(x^{(k)}(t)) = \alpha_s$, следует $M_1 = n_1$, $M_2 = n_2 - n_1, \ldots, M_m = n_m - n_{m-1}$.

   Также доказываем от противного: пусть

$$M_1 = n_1,\ M_2 = n_2 - n_1, \ldots, M_{k-1} = n_{k-1} - n_{k-2},\ M_k < n_k - n_{k-1}.$$

   Тогда можно выбрать вектор $y(t)$ из пространства N_k, не лежащего в линейной оболочке векторов из $\{x^{(i)}(t)\}$ с характеристическим показателем α_k.

Решение $y(t)$ линейно выражается через векторы из системы $x^{(i)}(t)$ с набором коэффициентов c'_k, включая векторы с характеристическим показателем $\widetilde{\alpha} \geqslant \alpha_{k+1}$. Имеем

$$\chi(y(t)) = \chi(\sum_{k=1}^{n} c'_k x^{(k)}(t)) = \max_{\substack{k=\overline{1,n} \\ c_k \neq 0}} \chi(x^{(k)}(t)) \geqslant \alpha_{k+1}.$$

Но $y(t) \in N_k$, поэтому $\chi(y(t)) \leqslant \alpha_k < \alpha_{k+1}$. Получаем противоречие.

Теорема 12. *Если для фиксированной ФСР системы (3.1)* $\max\limits_{k=\overline{1,m}} \alpha_k < 0$, *где* $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ — *набор попарно различных характеристических показателей, то данная система асимптотически устойчива.*

Доказательство.

Любое решение $x(t)$ линейно выражается через элементы ФСР, поэтому из свойств характеристических показателей $\chi(x(t)) = \alpha < 0$. Тогда

$$\forall \varepsilon > 0,\ \alpha + \varepsilon < 0 :\ x(t) = \overline{o}(e^{(\alpha+\varepsilon)t}).$$

Это означает, что

I. $\lim\limits_{t\to\infty} x(t) = 0$;

II. $\exists M > 0, \exists \delta > 0 :\ \|x(t_0)\| < \delta \Rightarrow \|x(t)\| \leqslant M$.

Второе условие означает устойчивость по Лагранжу. Для линейных систем (3.1) это равносильно устойчивости по Ляпунову, что вкупе с первым условием дает асимптотическую устойчивость.

Утверждение 2 (Неравенство Важевского)**.** *Обозначим* $A^H(t) = \frac{1}{2}(A(t) + A^T(t))$, $\lambda_{\min}(A^H(t)), \lambda_{\max}(A^H(t))$ — *минимальное и максимальное собственные значения матрицы* $A^H(t)$. *Тогда для решения* $x(t)$ *системы (3.1) справедливо соотношение*

$$\|x_0\| \cdot e^{\int_{t_0}^{t} \lambda_{\min}(A^H(\tau))d\tau} \leqslant \|x(t)\| \leqslant \|x_0\| \cdot e^{\int_{t_0}^{t} \lambda_{\max}(A^H(\tau))d\tau}.$$

Доказательство.

$$\frac{d}{dt}(\|x\|^2) = x^T\dot{x} + \dot{x}^T x = x^T A(t)x + x^T A(t)^T x = 2x^T A^H(t)x.$$

Тогда по свойствам эрмитовых матриц

$$2\lambda_{\min}(A^H(t)) \cdot \|x(t)\|^2 \leqslant \frac{d}{dt}(\|x(t)\|^2) \leqslant 2\lambda_{\max}(A^H(t)) \cdot \|x(t)\|^2. \tag{3.2}$$

Рассматривая вместо $\|x(t)\|^2$ функцию $\|x(t)\|$, разделив все три части неравенства (3.2) на $\|x(t)\|$ и проинтегрировав от t_0 до t, получим искомое неравенство Важевкого.

Следствие. *Характеристический показатель решения системы (3.1)*

$$\chi(x(t)) \in \left[\varlimsup_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int\limits_{t_0}^{t} \lambda_{\min}(A^H(\tau))d\tau,\ \varlimsup_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int\limits_{t_0}^{t} \lambda_{\max}(A^H(\tau))d\tau\right].$$

Рассмотрим ФСР системы (3.1), обозначим через S сумму характеристических показателей ее элементов. Введем функцию $F(t) = e^{\int_{t_0}^{t} trA(s)ds}$ и числа $\lambda_1 = \chi(F(t))$, $\lambda_2 = \chi(\frac{1}{F(t)})$.

Утверждение 3. *В данных обозначениях $\lambda_1 \geqslant -\lambda_2$.*

Доказательство. Распишем

$$\lambda_1 = \varlimsup_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int\limits_{t_0}^{t} \operatorname{tr} A(s)ds,$$

$$\lambda_2 = \varlimsup_{t\to\infty} -\frac{1}{t}\int\limits_{t_0}^{t} \operatorname{tr} A(s)ds = -\varliminf_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int\limits_{t_0}^{t} \operatorname{tr} A(s)ds.$$

Тогда

$$-\lambda_2 = \varliminf_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int\limits_{t_0}^{t} \operatorname{tr} A(s)ds \leqslant \varlimsup_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int\limits_{t_0}^{t} \operatorname{tr} A(s)ds = \lambda_1,$$

что завершает доказательство.

Теорема 13 (Неравенство Ляпунова)**.** $\forall$ *ФСР системы (3.1) выполнено неравенство $S \geqslant \lambda_1 \geqslant -\lambda_2$.*

Доказательство. Рассмотрим ФСР $X(t) = (x^1(t), \ldots, x^n(t))$ системы (3.1) и определитель Вронского $W(t) = \det X(t)$. По формуле Остроградского-Лиувилля $W(t) = W(t_0)e^{\int_{t_0}^{t} \operatorname{tr} A(s)ds}$.

Тогда $\chi(W(t)) = \varlimsup\limits_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int\limits_{t_0}^{t} \operatorname{tr} A(s)ds = \lambda_1$. С другой стороны, расписывая определитель

$$W(t) = \sum_{(p_1,\ldots,p_n)} (-1)^{\sigma(p)} x^1_{p_1}(t)\ldots x^n_{p_n}(t),$$

из свойств характеристических показателей получим

$$\chi(W(t)) \leqslant \max_{(p_1,\ldots,p_n)} \left[\chi(x^1_{p_1}(t)) + \ldots + \chi(x^n_{p_n}(t))\right] \leqslant S.$$

Отсюда и получим, вкупе с предыдущим утверждением, неравенство $S \geqslant \lambda_1 \geqslant -\lambda_2$.

Следствие. *Достаточное условие нормальности системы: $S = \lambda_1$.*

Определение 8. *Система (3.1) называется правильной (по Ляпунову), если для некоторой ее нормальной ФСР: $S = -\lambda_2$.*

Рассмотрим класс матричных функций $L(t) \in \mathbb{R}^{n\times n}$, удовлетворяющих следующим условиям

1) $L(t) \in C^1[t_0, +\infty)$,
2) $\sup\limits_{t\geqslant t_0} \|L(t)\| < \infty$,
3) $\sup\limits_{t\geqslant t_0} \|\dot{L}(t)\| < \infty$,
4) $|\det L(t)| \geqslant m > 0$, $\forall t \geqslant t_0$.

Такие матрицы $L(t)$ называются матрицами Ляпунова.

Определение 9. *Преобразование $y(t) = L(t)x(t)$ называется преобразованием Ляпунова, где $L(t)$ — матрица Ляпунова.*

Из определения следует, что $\exists L^{-1}(t)$, т.е. $\exists$ обратное преобразование Ляпунова.

Определение 10. *Система (3.1) называется приводимой, если $\exists L(t)$ — матрица Ляпунова, такая что преобразование Ляпунова $y = L(t)x$ приводит систему к виду $\dot{y} = By$, где B — постоянная матрица.*

Теорема 14. *Преобразование Ляпунова сохраняет характеристические показатели системы (3.1).*

Доказательство. $y = L(t)x$, $x = L^{-1}(t)y \quad \Rightarrow$

$$\|y\| \leqslant \|L(t)\| \cdot \|x\|, \quad \|x\| \leqslant \|L^{-1}(t)\| \cdot \|y\|.$$

Тогда из свойств характеристических показателей $\chi(y) \leqslant \chi(x)$, $\chi(x) \leqslant \chi(y)$. Отсюда получаем требуемое равенство $\chi(x) = \chi(y)$.

Следствие. *Для систем с постоянной матрицей ранее была получена общая формула решения, из которой видно, что ее нормальную ФСР можно искать среди ФСР с вещественными элементами. Поэтому согласно данной теореме для приводимых систем нормальную ФСР также можно искать среди ФСР с вещественными элементами.*

Применяя утверждение из **Упр. 3**, получим

Утверждение 4. *Если система (3.1) приводима, то данная система асимптотически устойчива $\Leftrightarrow$ характеристический показатель любого решения системы $\alpha_k < 0$.*

Теорема 15 (Н.П.Еругин)**.** *Система (3.1) приводима $\Leftrightarrow$ $\exists X(t)$ — ФСР системы: $X(t) = L^{-1}(t)e^{tB}$, где $L(t)$ — матрица Ляпунова.*

Доказательство.

Необходимость. Пусть система приводима преобразованием $y = L(t)x$, тогда имеется ФСР полученной системы $Y(t) = e^{tB}$, где B — постоянная матрица.

В таком случае соответствующая ФСР исходной системы записывается в виде $X(t) = L^{-1}(t)e^{tB}$.

Достаточность.

Имеется ФСР системы вида $X(t) = L^{-1}(t)e^{tB}$. Рассмотрим преобразование Ляпунова $y = L(t)x$, откуда $x = L^{-1}(t)y$.

Согласно системе (3.1) $\dot{x} = A(t)x$, при этом $\dot{x} = \dot{L}^{-1}(t)y + L^{-1}\dot{y}$.

По условия $L^{-1}(t) = X(t)e^{-tB}$, откуда

$$\dot{L}^{-1}(t) = \dot{X}e^{-tB} - X(t)Be^{-tB} = A(t)X(t)e^{-tB} - X(t)Be^{-tB}.$$

Поэтому $\dot{x} = A(t)x = A(t)L^{-1}(t)y = A(t)X(t)e^{-tB}y$, с другой стороны

$$\dot{x} = A(t)X(t)e^{-tB}y - X(t)Be^{-tB}y + X(t)e^{-tB}\dot{y},$$

откуда $\dot{y} = By$, что доказывает приводимость системы.

4. Лекция 4

Теорема 16. *Если система $\dot{x} = A(t)x$ приводима, то она правильная.*

Доказательство.

а) Из условия теоремы имеем:

$$\exists L(t) \text{ — матрица Ляпунова, т.ч.} \quad X(t) = L(t)Y(t),$$

$$\text{где } X(t) \text{ — ФСР для системы } \dot{x} = A(t)x,$$

$$Y(t) \text{ — ФСР для системы } \dot{y} = By,\ B = \mathrm{const}.$$

б) Раннее вводилось $\lambda_1 = \chi(F(t))$, $\lambda_2 = \chi(F^{-1}(t))$, где $F(t) = e^{\int_{t_0}^{t} \operatorname{tr} A(s)ds}$.

Получим соотношение между λ_1, λ_2 и $\operatorname{tr} B$.

Используем теорему Остроградского-Лиувилля. Имеем

$$\det X(t) = \det L(t) \cdot \det Y(t),$$

$$\det X(t) = \det X(t_0) \cdot \exp(\int_{t_0}^{t} \operatorname{tr} A(s)ds),$$

$$\det Y(t) = \det Y(t_0) \cdot \exp((t - t_0) \operatorname{tr} B),$$

$$\Rightarrow \exp(\int_{t_0}^{t} \operatorname{tr} A(s)ds) = c(t_0) \cdot \det L(t) \cdot \exp((t - t_0) \operatorname{tr} B),$$

$$\frac{1}{t - t_0} \int_{t_0}^{t} \operatorname{tr} A(s)ds = \frac{1}{t - t_0} \cdot \ln(|c(t_0) \det L(t)|) + \operatorname{tr} B.$$

Поскольку $\sup\limits_{t \geqslant t_0} \|L(t)\| < \infty$, тогда и $\sup\limits_{t \geqslant t_0} |\det L(t)| < \infty \Rightarrow$ при $t \to +\infty$ получим $\lambda_1 = \operatorname{tr} B$. Аналогично доказывается, что $-\lambda_2 = \operatorname{tr} B$.

в) Рассмотрим S_X, S_Y — суммы характеристических показателей столбцов (решений) соответствующих ФСР. По **Т.14** $S_X = S_Y$, при этом для систем с постоянной матрицей можно выбрать ФСР $Y(t)$ таким образом, чтобы

$$S_Y = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(B) = \operatorname{tr} B, \quad \lambda_i(B) \text{— собственные числа матрицы } B.$$

Согласно предыдущему пункту, тогда $S_X = \lambda_1 = -\lambda_2$, что является определением правильной системы $\dot{x} = A(t)x$. Теорема доказана.

Утверждение 5 (теорема Ляпунова)**.** *Пусть $A(t)$ — треугольная матрица,*

$$\exists \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t-t_0} \int_{t_0}^{t} a_{kk}(\tau)d\tau < \infty,\ k = \overline{1,n}.$$

Тогда система $\dot{x} = A(t)x$ правильная.

Для правильных систем можно проводить исследование устойчивости. В остальных случаях аппарат характеристических показателей в той форме, в которой его разработал Ляпунов, неприменим.

Теорема 17 (об устойчивости по первому приближению)**.** *Дана система*

$$\dot{x} = f(t,x),\ f(t,0) \equiv 0. \tag{4.1}$$

Представим правую часть системы в виде

$$f(t,x) = A(t)x + g(t,x),\ \text{где } g(t,x) = \overline{o}(\|x\|), g(t,x) \xrightarrow{t\to+\infty} 0.$$

Рассмотрим линейную систему

$$\dot{x} = A(t)x, \tag{4.2}$$

предполагаем, что эта система правильная. Пусть все характеристические показатели данной системы $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ таковы, что $\alpha_i < 0, i = \overline{1,n}$.

Тогда $x(t) \equiv 0$ — асимптотически устойчивое решение системы (4.1)*.*

Теорема 18. *Дана система*

$$\dot{x} = f(t,x),\ f(t,0) \equiv 0. \tag{4.3}$$

Представим правую часть системы в виде

$$f(t,x) = A(t)x + g(t,x),\ \text{где } g(t,x) = \overline{o}(\|x\|), g(t,x) \xrightarrow{t\to+\infty} 0.$$

Пусть соответствующая линейная система

$$\dot{x} = A(t)x,$$

является правильной, а среди характеристических показателей этой системы $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ найдется положительное число: $\alpha_k > 0$.

Тогда нулевое решение системы (4.3) *неустойчиво.*

4.1 Устойчивость периодических систем

Для доказательства теоремы Флоке используем следующие факты.

Определение 11. *Пусть X — квадратная матрица. Матрица Y, удовлетворяющая условию*

$$e^Y = X,$$

называется логарифмом матрицы X и обозначается $\quad Y = \operatorname{Ln} X$.

Утверждение 6. *Всякая невырожденная матрица имеет логарифм.*

Логарифм матрицы в общем случае является матрицей комплекснозначной.

Теорема 19 (Теорема Флоке)**.** *Рассмотрим линейную систему*

$$\dot{x} = A(t)x,\ A(t+T) = A(t),\ T > 0. \tag{4.4}$$

Пусть $X(t)$ — нормированная ФСР, т.е. решение матричной системы

$$\begin{cases} \dot{X} = A(t)X, \\ X(0) = E. \end{cases}$$

Тогда $X(t) = \Phi(t)e^{\Lambda t}$, где $\Phi(t) \in C^1(-\infty, +\infty)$, $\Phi(t+T) = \Phi(t)$, Λ — матрица. ($\Phi(t), \Lambda$ — вообще говоря, комплекснозначны).

Доказательство.

а) $X(t)$ — ФСР $\Rightarrow$ $X(t+T)$ — тоже ФСР.

При этом $\dot{X}(t+T) = A(t+T)X(t+T) = A(t)X(t+T)$. Поэтому $X(t+T)$ есть ФСР для (4.4), поэтому найдется матрица C, так что $X(t+T) = X(t)C$. Рассматривая равенство при $t = 0$, имеем

$$X(t+T) = X(t)X(T).$$

$X(T)$ называется матрицей монодромии, ее собственные числа $\rho_1, \ldots, \rho_n$ — мультипликаторами.

б) Введем $\Lambda = \frac{1}{T}\operatorname{Ln} X(T)$, $\Phi(t) = X(t)e^{-\Lambda t}$. Из условия $X(t) \in C^1(-\infty, +\infty)$ следует $\Phi(t) \in C^1(-\infty, +\infty)$.

$$\Phi(t+T) = X(t+T)e^{-\Lambda t}e^{-\Lambda T} = X(t)X(T)e^{-\Lambda T}e^{-\Lambda t} = X(t)e^{-\Lambda t} = \Phi(t).$$

Таким образом, $\Phi(t)$ удовлетворяет условиям теоремы, что завершает доказательство.

Определение 12. *Собственные числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ матрицы Λ называются характеристическими показателями периодической системы* (4.4).

Из свойств собственных значений логарифма матрицы

$$\lambda_i = \frac{1}{T}\operatorname{Ln}\ \rho_i = \frac{1}{T}[\ln|\rho_i| + i(\arg\ \rho_i + 2\pi k)].$$

Поэтому характеристические показатели определяются с точностью до мнимых слагаемых $2\pi ki/T$.

Их связь с характеристическими показателями Ляпунова системы (4.4):

$$\alpha_i = \operatorname{Re}\ \lambda_i,\ i = \overline{1, n}.$$

Теорема 20. *1) Пусть ρ — мультипликатор системы* (4.4), $\rho \neq 0$.

Тогда $\exists\, \xi(t)$ *— решение системы* (4.4)*:* $\xi(t+T) = \rho\xi(t)$.

$\xi(t)$ *называется нормальным решением системы.*

2) Пусть $\xi(t) \neq 0$ *— решение системы* (4.4)*:* $\xi(t+T) = \rho\xi(t)$.

Тогда ρ *— мультипликатор системы* (4.4).

Доказательство.

1) $\exists \xi(0) \neq 0 : \; X(T)\xi(0) = \rho\xi(0)$.

Рассмотрим $\xi(t) = X(t)\xi(0)$ — очевидно, решение системы (4.4).

$$\xi(t+T) = X(t+T)\xi(0) = X(t)X(T)\xi(0) = X(t)\rho\xi(0) = \rho\xi(t),$$

что доказывает данную часть теоремы.

2) $\xi(t+T) = \rho\xi(t) \;\Rightarrow$ поскольку $\xi(t) = X(t)\xi(0)$, получим

$$X(t)X(T)\xi(0) = \rho X(t)\xi(0).$$

Из невырожденности $X(t)$ следует $X(T)\xi(0) = \rho\xi(0)$. Это означает, что ρ — собственное значение $X(T)$, что является определением мультипликатора системы (4.4).

Теорема доказана.

Утверждение 7. *Периодическая система* (4.4) *является приводимой.*

Доказательство.
По теореме Флоке $X(t) = \Phi(t)e^{\Lambda t},\; \Phi(t) \in C^1(-\infty, +\infty)$.
Из периодичности $\Phi(t)$ следует, что

$$\sup_{\mathbb{R}_+} \|\Phi(t)\| < \infty, \sup_{\mathbb{R}_+} \|\dot{\Phi}(t)\| < \infty, \inf_{\mathbb{R}_+} |\det \Phi(t)| \geqslant m > 0.$$

По теореме Еругина в таком случае система (4.4) приводима к стационарной системе

$$\dot{y} = \Lambda y,$$

что завершает доказательство.

В качестве следствия получаем следующие условия устойчивости периодической системы.

Теорема 21. *1) Периодическая система* (4.4) *устойчива по Ляпунову* $\Leftrightarrow$

а) $|\rho_i| \leqslant 1$,

б) $\forall \rho_i : \; |\rho_i| = 1$, *число ЛНЗ собственных векторов матрицы монодромии* $X(T)$ *с собственным значением* ρ_i *равно алгебраической кратности* ρ_i *(как собственного значения* $X(T)$*).*

2) Периодическая система (4.4) *асимптотически устойчива* $\Leftrightarrow$

$|\rho_i| < 1, \quad \forall \rho_i$ *— мультипликатора системы* (4.4).

5. Лекция 5

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n. \tag{5.1}$$

$$f(x) \in C(\Omega), \quad \Omega = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leqslant R\}.$$

$$f(0) = 0 \Rightarrow x(t) \equiv 0 \text{ — положение равновесия.}$$

Вводим функцию $V(x) \in C^1(\Omega)$, $V(0) = 0$.

Определение 13. *Функция $V(x)$ называется*

1) *определенно положительной, если $V(x) > 0$, $\forall x \in \Omega, x \neq 0$;*

2) *определенно отрицательной, если $-V(x)$ — определенно положительна;*

3) *знакоопределенной, если она определенно положительна либо определенно отрицательна;*

4) *знакоположительной, если $V(x) \geqslant 0$, $\forall x \in \Omega$;*

5) *знакоотрицательной, если $-V(x)$ — знакоположительна;*

6) *знакопостоянной, если она знакоположительна либо знакоотрицательна;*

7) *знакопеременной, если она не является знакопостоянной.*

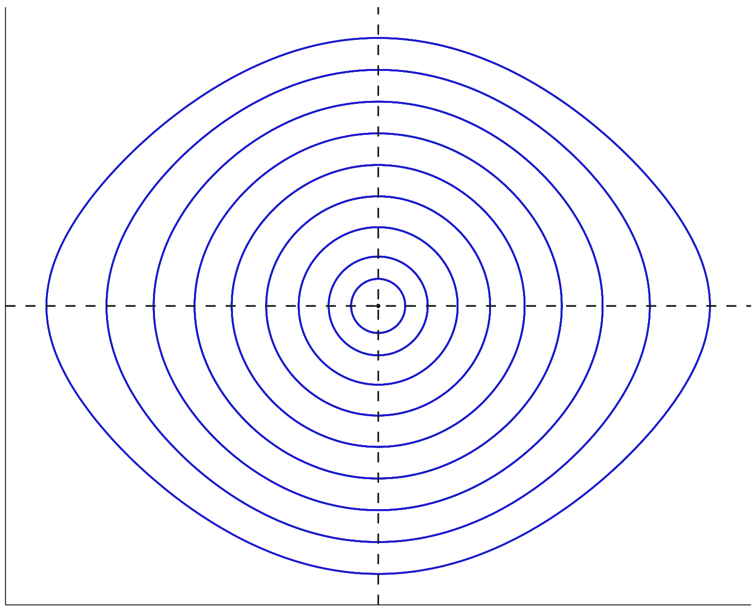

Рис. 7. Примерный вид линий уровня функции $V(x)$ в окрестности нуля.

Утверждение 8. *Пусть $V(x)$ — знакоопределенная функция. Тогда $\exists \delta > 0$ ($\delta < R$), т.ч. $\forall c : |c| < \delta$, множество $\{x : V(x) = c\}$ замкнуто.*

Доказательство.

Выберем $r > 0 : B_r(0) \subset \Omega$. Для определенности считаем $V(x)$ определенно положительной.

$$m = \min\{V(x)|x \in S_r(0)\}$$

Тогда положим $\delta = m$, зафиксируем $0 < c < \delta$. Любая непрерывная кривая $\xi(t) : \xi(t_0) = 0, \xi(t_1) = y \in S_r(0)$, содержит точку $\xi(t^*)$, $t^* \in [t_0, t_1] : V(\xi(t^*)) = c$.

Поэтому множества вида $\{x : V(x) = c\}$ являются замкнутыми.

Следствие. *Если функция $V(x)$ знакоопределена, то*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists r > 0, т.ч.\ \forall x \in \Omega : \|x\| > r \Rightarrow |V(x)| > \varepsilon.$$

Графически утверждение теоремы проиллюстрировано на рис. 7.

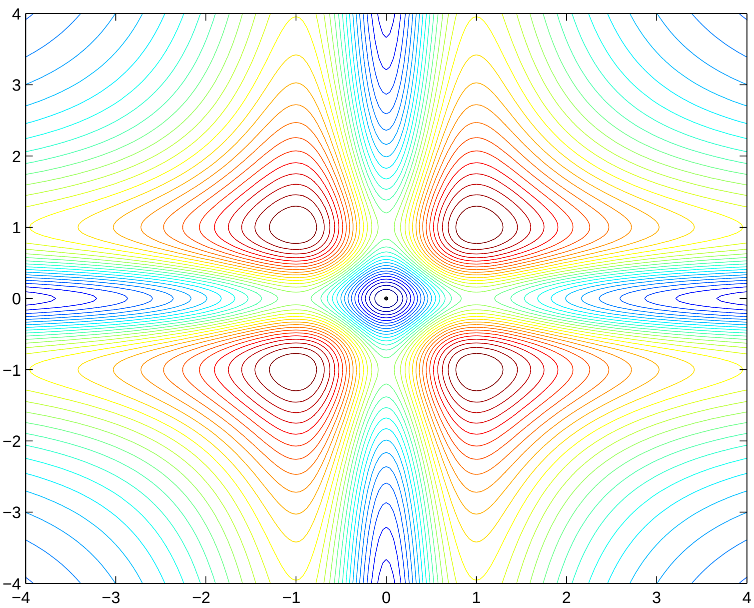

Рис. 8. Линии уровня функции (5.2).

Упражнение. Построим линии уровня функции

$$V(x_1, x_2) = \frac{x_1^2}{(1 + x_1^2)^2} + \frac{x_2^2}{(1 + x_2^2)^2}. \tag{5.2}$$

Экстремальные значения функции:

1. $V(x) = \frac{1}{2}$ при $(x_1, x_2) = (\pm 1, \pm 1)$ (максимум);
2. $V(x) = 0$ при $(x_1, x_2) = (0, 0)$ (минимум).

В окрестности точек экстремума линии уровня представляют собой замкнутые кривые(рис. 8).

Частным случаем функций $V(x)$ является квадратичная форма:

$$V(x) = \langle x, Qx \rangle,\ Q = Q^T.$$

Случаи $Q > 0, Q < 0, Q \geqslant 0, Q \leqslant 0$ соответствуют функциям $V(x)$: соответственно определенно положительной, определенно отрицательной, знакоположительной и знакоотрицательной.

Теорема 22 (Ляпунова об устойчивости)**.** *Пусть в* Ω $\exists V(x)$*:*

1) $V(x)$ *— определенно положительная функция;*

2) $\left.\dfrac{dV}{dt}\right|_{\dot{x}=f(x)} = \langle \bigtriangledown V(x), f(x) \rangle$ *— знакоотрицательная функция.*

Тогда $x(t) \equiv 0$ *— устойчивое положение равновесия системы* (5.1)*.*

Доказательство.

$\forall \varepsilon > 0$, т.ч. $B_\varepsilon \subset \Omega$, рассмотрим

$$m = \min \left\{ V(x) : \, x \in S_\varepsilon(0) \right\}, \, \delta > 0 : \, |V(x)| < m, \forall x \in B_\delta(0).$$

Рассмотрим соответствующее решение $x(t, t_0, x_0)$, $x_0 \in B_\delta(0)$.

Допустим, $\exists t^* \geqslant t_0 : \, x(t^*, t_0, x_0) \in S_\varepsilon(0)$. Имеем

$$m \leqslant V(x(t^*, t_0, x_0)) = V(x_0) + \int_{t_0}^{t^*} \left.\frac{dV}{dt}\right|_{\dot{x}=f(x)} (\tau) d\tau \leqslant V(x_0) < m.$$

Получаем противоречие $\Longrightarrow$ $\forall t \geqslant t_0 : |x(t, t_0, x_0)| < \varepsilon$, что означает устойчивость решения $x(t) \equiv 0$.

Теорема 23 (Ляпунова об асимптотической устойчивости)**.** *Пусть в* Ω $\exists V(x)$*:*

1) $V(x)$ *— определенно положительная функция;*

2) $\left.\dfrac{dV}{dt}\right|_{\dot{x}=f(x)}$ *— определенно отрицательная функция.*

Тогда $x(t) \equiv 0$ *— асимптотически устойчивое положение равновесия системы* (5.1)*.*

Доказательство.

Согласно предыдущей теореме $x(t) \equiv 0$ — устойчивое положение равновесия.

Имеем: $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta = \delta(\varepsilon) < \varepsilon$, т.ч. $\forall x_0 \in B_\delta(0) \Rightarrow x(t, t_0, x_0) \in B_\varepsilon(0)$, $\forall t \geqslant t_0$.

Тогда $\forall R > 0$, $B_R(0) \subset \Omega$, $\exists r > 0$, т.ч. $x_0 \in B_r(0) \Rightarrow \; \forall t \geqslant t_0 : x(t, t_0, x_0) \in B_R(0)$.

Допустим, для некоторого $\varepsilon > 0$, $x_0 \in B_r(0)$ найдется сколь угодно большое t^* : $x(t^*, t_0, x_0) \notin B_\varepsilon(0)$. Это значит, что $x_0 \in B_r(0) \backslash B_\delta(0), \; x(t, t_0, x_0) \in B_R(0) \backslash B_\delta(0)$, $\forall t \geqslant t_0$.

Обозначим

$$m = \min \left\{ -\left.\frac{dV}{dt}\right|_{\dot{x}=f(x)} : x \in B_R(0) \setminus B_\delta(0) \right\} > 0.$$

Тогда

$$V(x(t, t_0, x_0)) = V(x_0) + \int_{t_0}^{t} \left.\frac{dV}{dt}\right|_{\dot{x}=f(x)} (\tau) d\tau \leqslant V(x_0) - m(t - t_0) < 0$$

для достаточно больших $t > t_0$. Это противоречит определенной положительности функции $V(x)$.

Поэтому исходное предположение неверно, т.е. $x(t) \xrightarrow{t \to \infty} 0$, что завершает доказательство.

Теорема 24 (Красовского об асимптотической устойчивости)**.** *Пусть в* Ω $\exists V(x)$*:*

1) $V(x)$ *— определенно положительная функция;*

2) $\left.\dfrac{dV}{dt}\right|_{\dot{x}=f(x)}$ *— знакоотрицательная функция;*

3) *множество* $K = \left\{ x \in \Omega : \left.\dfrac{dV}{dt}\right|_{\dot{x}=f(x)} = 0 \right\}$ *не содержит целых полутраекторий системы* (5.1) *(т.е. при* $t \geqslant t_0$*).*

Тогда $x(t) \equiv 0$ *— асимптотически устойчивое положение равновесия.*

Доказательство.

По теореме Ляпунова $x(t) \equiv 0$ — устойчивое положение равновесия.

Далее доказываем от противного:

пусть $\exists \varepsilon_0 > 0$, т.ч. для некоторого $x_0 \in B_\delta(0):\ x(t, t_0, x_0) \in B_\varepsilon(0)$, $\forall t \geqslant t_0$, но в бесконечной последовательности точек

$$x(t_k, t_0, x_0) \notin B_{\varepsilon_0}(0),\ t_k \xrightarrow{k\to\infty} +\infty\ (\varepsilon_0 < \varepsilon).$$

Тогда, рассматривая последовательность $x^{(k)} = x(t_k, t_0, x_0)$, лежащую в компакте $C = \overline{B_\varepsilon(0) \setminus B_{\varepsilon_0}(0)}$, выбираем из нее сходящуюся подпоследовательность $x^{(k_n)} \xrightarrow{n\to\infty} x^* \in C$. Из непрерывности функции $V(x)$ имеем $V(x(t_{k_n}, t_0, x_0)) \xrightarrow{n\to\infty} V(x^*)$.

Из знакоотрицательности $\left.\dfrac{dV}{dt}\right|_{\dot{x}=f(x)}$ следует, что функция $V(x(t, t_0, x_0))$ невозрастает по t, при этом ограничена снизу: $V(x(t, t_0, x_0)) > 0$. Поэтому любая последовательность $V(x(t_k, t_0, x_0))$ сходится, причем к одному пределу, значит,

$$V(x(t, t_0, x_0)) \xrightarrow{t\to\infty} V(x^*).$$

Затем рассмотрим траекторию $x(t, t_0, x^*)$. Поскольку $\{x(t, t_0, x^*), t \geqslant t_0\} \notin K$,

$$\exists \widehat{t} \geqslant t_0 : \left.\frac{dV}{dt}\right|_{\dot{x}=f(x)} (\widehat{t}) < 0,$$

откуда

$$V(x(\widehat{t} + \Delta t, t_0, x^*)) = V(x^*) + \int_{t_0}^{\widehat{t}+\Delta t} \left.\frac{dV}{dt}\right|_{\dot{x}=f(x)} (\tau) d\tau < V(x^*).$$

Из непрерывной зависимости решений ОДУ от начальных данных

$$V(x(\widehat{t} + \Delta t, t_0, x^{(k_n)})) \xrightarrow{n\to\infty} V(x(\widehat{t} + \Delta t, t_0, x^*)) < V(x^*). \tag{5.3}$$

Поскольку $x(\widehat{t} + \Delta t, t_0, x^{(k_n)}) = x(\widehat{t} + \Delta t + t_{k_n} - t_0, t_0, x_0) = x(t'_n, t_0, x_0)$, то, как ранее выяснилось,

$$V(x(\widehat{t} + \Delta t, t_0, x^{(k_n)})) = V(x(t'_n, t_0, x_0)) \xrightarrow{n\to\infty} V(x^*).$$

Получили противоречие с (5.3), поэтому исходное предположение неверно, т.е. $x(t) \xrightarrow{t\to\infty} 0$, что завершает доказательство.

Теорема 25 (Ляпунова о неустойчивости №1)**.** *Пусть в* Ω $\exists V(x)$*:*

1) $\left.\dfrac{dV}{dt}\right|_{\dot{x}=f(x)}$ *— определенно положительная функция;*

2) $\forall\varepsilon>0,\ \exists x_0\in B_\varepsilon(0):\ V(x_0)>0.$

Тогда $x(t)\equiv 0$ *— неустойчивое положение равновесия системы* (5.1)*.*

Доказательство.
Доказываем от противного:
пусть $\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta=\delta(\varepsilon)<\varepsilon$, т.ч. $\forall x_0\in B_\delta(0)\Rightarrow\ x(t,t_0,x_0)\in B_\varepsilon(0),\forall t\geqslant t_0$.

Рассмотрим $x_0\in B_\delta(0):V(x_0)>0$. Поскольку $\left.\dfrac{dV}{dt}\right|_{\dot{x}=f(x)}$ — определенно положительна, $V(x(t,t_0,x_0))$ убывает по $t\Rightarrow\ V(x(t,t_0,x_0))>V(x_0)>0$. Поэтому $\exists\eta>0$, $x(t,t_0,x_0)\notin B_\eta(0)$, $\forall t\geqslant t_0$.

Обозначим $m=\min\{\left.\dfrac{dV}{dt}\right|_{\dot{x}=f(x)},\ x\in B_\varepsilon(0)\setminus B_\eta(0)\}>0$.

$$V(x(t,t_0,x_0))=V(x_0)+\int_{t_0}^{t}\left.\frac{dV}{dt}\right|_{\dot{x}=f(x)}(\tau)d\tau\geqslant V(x_0)+m(t-t_0)\xrightarrow{t\to\infty}+\infty. \tag{5.4}$$

Но $x(t,t_0,x_0)\in C=\overline{B_\varepsilon(0)\setminus B_\eta(0)}$, функция $V(x)$ в компакте C ограничена — противоречие с (5.4), что и доказывает неустойчивость нулевого решения.

Теорема 26 (Ляпунова о неустойчивости №2)**.** *Пусть в* Ω $\exists V(x)$*:*

1) $\left.\dfrac{dV}{dt}\right|_{\dot{x}=f(x)}=\alpha V+W,\ \alpha>0,\ W$ *— знакоположительная функция;*

2) $\forall\varepsilon>0,\ \exists x_0\in B_\varepsilon(0):\ V(x_0)>0.$

Тогда $x(t)\equiv 0$ *— неустойчивое положение равновесия системы* (5.1)*.*

Доказательство.
Доказываем от противного:
пусть $\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta=\delta(\varepsilon)<\varepsilon$, т.ч. $\forall x_0\in B_\delta(0)\Rightarrow\ x(t,t_0,x_0)\in B_\varepsilon(0),\forall t\geqslant t_0$.
Рассмотрим $x_0\in B_\delta(0):V(x_0)>0$. Имеем

$$V(x(t,t_0,x_0))=e^{\alpha t}\left(\int_{t_0}^{t}e^{-\alpha\tau}W(x(\tau,t_0,x_0))d\tau+e^{-\alpha t_0}V(x_0)\right)\geqslant e^{\alpha(t-t_0)}V(x_0)\xrightarrow{t\to\infty}+\infty. \tag{5.5}$$

Но $\forall t\geqslant t_0:x(t,t_0,x_0)\in B_\varepsilon(0)$, а функция $V(x)$ ограничена на компакте $B_\varepsilon(0)$, что противоречит с (5.5). Этим завершается доказательство неустойчивости нулевого решения системы (5.1).

6. Лекция 6

Теорема 27 (Красовского о неустойчивости движения). *Пусть в* Ω $\exists V(x)$*:*

1) $\left.\dfrac{dV}{dt}\right|_{\dot{x}=f(x)}$ *— знакоположительная функция;*

2) множество $K = \left\{x \in \Omega : \left.\dfrac{dV}{dt}\right|_{\dot{x}=f(x)} = 0\right\}$ *не содержит целых полутраекторий системы* (5.1)*, кроме* $x(t) \equiv 0$*;*

3) $\forall \varepsilon > 0,\ \exists x_0 \in B_\varepsilon(0) :\ V(x_0) > 0.$

Тогда $x(t) \equiv 0$ *— неустойчивое положение равновесия системы* (5.1).

Доказательство.
Доказываем от противного:
пусть $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 :\ x_0 \in B_\delta(0) \Rightarrow x(t, t_0, x_0) \in B_\varepsilon(0)$.
Рассмотрим $x_0 :\ V(x_0) > 0$.
Из последовательности $x^{(k)} = x(t_k, t_0, x_0), t_k \xrightarrow{k\to\infty} +\infty$, лежащей в компакте $B_\varepsilon(0)$, выберем сходящуюся подпоследовательность $x^{(k_n)} \xrightarrow{n\to\infty} x^* \in B_\varepsilon(0)$.
Из непрерывности функции $V(x)$ имеем $V(x(t_{k_n}, t_0, x_0)) \xrightarrow{n\to\infty} V(x^*)$.
Вследствие знакоположительности $\left.\dfrac{dV}{dt}\right|_{\dot{x}=f(x)}$ $V(x(t, t_0, x_0))$ не убывает по t:

$$V(x^*) \geqslant V(x_0) > 0 \Rightarrow x^* \neq 0.$$

Кроме того, любая последовательность $V(x(t'_k, t_0, x_0))$, $t'_k \xrightarrow{k\to\infty} +\infty$, является неубывающей и, поэтому, сходится к одному и тому же числу $V(x^*)$.

Далее рассмотрим траекторию $x(t, t_0, x^*)$. Поскольку $\{x(t, t_0, x^*), t \geqslant t_0\} \notin K$,

$$\exists \widehat{t} \geqslant t_0 : \left.\frac{dV}{dt}\right|_{\dot{x}=f(x)}(\widehat{t}) > 0,$$

откуда

$$V(x(\widehat{t} + \Delta t, t_0, x^*)) = V(x^*) + \int_{t_0}^{\widehat{t}+\Delta t} \left.\frac{dV}{dt}\right|_{\dot{x}=f(x)}(\tau) d\tau > V(x^*).$$

Из непрерывной зависимости решений ОДУ от начальных данных

$$V(x(\widehat{t} + \Delta t, t_0, x^{(k_n)})) \xrightarrow{n\to\infty} V(x(\widehat{t} + \Delta t, t_0, x^*)) > V(x^*). \tag{6.1}$$

Поскольку $x(\widehat{t} + \Delta t, t_0, x^{(k_n)}) = x(\widehat{t} + \Delta t + t_{k_n} - t_0, t_0, x_0) = x(t'_n, t_0, x_0)$, то, как ранее выяснилось,

$$V(x(\widehat{t} + \Delta t, t_0, x^{(k_n)})) = V(x(t'_n, t_0, x_0)) \xrightarrow{n\to\infty} V(x^*).$$

Получили противоречие с (6.1), поэтому исходное предположение об устойчивости нулевого решения неверно, что завершает доказательство.

Теорема 28 (Четаева о неустойчивости). *Пусть в* Ω $\exists V(x)$*:*

1) $\forall \varepsilon > 0,\ \exists x_0 \in B_\varepsilon(0):\ V(x_0) > 0$*;*

2) $\forall x \in \Omega:\ V(x) \geqslant \alpha > 0\ \Rightarrow \left.\dfrac{dV}{dt}\right|_{\dot{x}=f(x)}(x) \geqslant \beta > 0,\ \beta = \beta(\alpha).$

Тогда $x(t) \equiv 0$ *— неустойчивое положение равновесия системы* (5.1).

Доказательство.

Доказываем от противного:

пусть $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta = \delta(\varepsilon) < \varepsilon$, т.ч. $\forall x_0 \in B_\delta(0) \Rightarrow\ x(t, t_0, x_0) \in B_\varepsilon(0), \forall t \geqslant t_0$.

Рассмотрим $x_0 \in B_\delta(0) : V(x_0) > 0$. Тогда $V(x(t, t_0, x_0))$ возрастает по t: $V(x(t, t_0, x_0)) > V(x_0) > 0$, поэтому

$$V(x(t, t_0, x_0)) = V(x_0) + \int_{t_0}^{t} \left.\frac{dV}{dt}\right|_{\dot{x}=f(x)}(\tau)d\tau > V(x_0) + \beta(V(x_0)) \cdot (t - t_0) \xrightarrow{t\to\infty} +\infty.$$

Но это противоречит ограниченности функции $V(x)$ на компакте $B_\varepsilon(0)$, что и завершает доказательство неустойчивости нулевого решения системы (5.1).

Определение 14. *Вновь рассматривается система* (5.1).

Область допустимых возмущений M *для заданного множества* $\mathfrak{L}$ *— это множество точек* x_0 :

$$\forall x_0 \in M\ \Rightarrow\ x(t, t_0, x_0) \in \mathfrak{L}.$$

Получим некоторые результаты для устойчивых систем из теорем Ляпунова.

1. Пусть $\mathfrak{L}$ — замкнутое множество с непустой внутренностью, например, шар $B_r(0)$, а для системы (5.1) выполнена теорема Ляпунова об асимптотической устойчивости с функцией Ляпунова $V(x) > 0, \forall x \neq 0$.

   Обозначим $m = \min\limits_{\partial\mathfrak{L}} V(x) > 0$. Тогда в качестве множества допустимых возмущений $M \subset \mathfrak{L}$ можно взять множество таких точек x, что $V(x) < m$.

2. Пусть для системы (5.1) выполнена теорема Ляпунова об асимптотической устойчивости с функцией Ляпунова $V(x) > 0, \forall x \neq 0$.

   В начальный момент система находится в позиции $\{t_0, x_0\}$, $x_0 \in B_R(0)$ — инвариантное относительно траекторий системы (5.1) множество, например, для которого множество допустимых возмущений есть $B_\varepsilon(0), \varepsilon < R$ (см. рис. 9). Найдем время захода системы в ε-окрестность нуля, для чего выберем $\delta > 0$:

   $$\forall x_0 \in B_\delta(0)\ \Rightarrow\ x(t, t_0, x_0) \in B_\varepsilon(0),\ \forall t \geqslant t_0.$$

   Обозначим

   $$m = \min\left\{ -\left.\frac{dV}{dt}\right|_{\dot{x}=f(x)}(x) : x \in B_R(0) \setminus B_\delta(0) \right\} > 0,$$

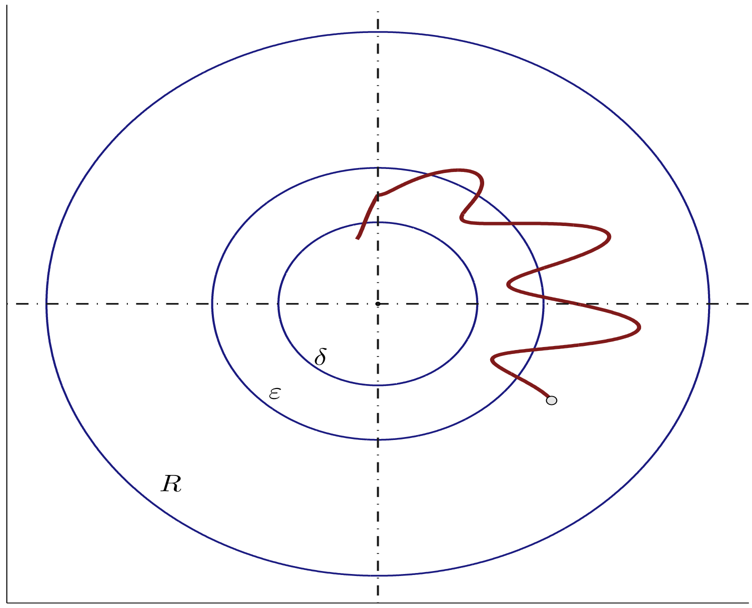

Рис. 9. Часть траектории асимптотически устойчивой системы во время переходного процесса, т.е. до момента захода в ε-окрестность нуля.

$$p = \min\{V(x) : x \in S_\delta(0)\} > 0.$$

Тогда момент захода траектории в ε-окрестность нуля произойдет до момента $\widehat{t} : V(x(\widehat{t}, t_0, x_0)) \leqslant p$, и время захода оценивается как

$$t(x_0, \varepsilon) \leqslant \frac{V(x_0) - p}{m}.$$

6.1 Второй метод Ляпунова для линейных систем

Зададимся вопросом поиска функции Ляпунова $V(x) = \langle Bx, x\rangle$, $B = B^T > 0$ для линейных систем

$$\dot{x} = Ax, \quad x \in \mathbb{R}^n. \tag{6.2}$$

Если $\left.\dfrac{dV}{dt}\right|_{\dot{x}=Ax} = \langle Cx, x\rangle$, $C = C^T < 0$, то отсюда вытекает асимптотическая устойчивость нулевого решения системы (6.2). В таком случае получаем матричное уравнение для поиска $B = B^T > 0$ — уравнение Ляпунова

$$C = A^T B + BA, \tag{6.3}$$

либо неравенство Ляпунова

$$A^T B + BA < 0.$$

Можно определить оператор $F(B) = A^T B + BA$, $F : \mathbb{R}^{\frac{n(n+1)}{2}} \to \mathbb{R}^{\frac{n(n+1)}{2}}$ (поскольку $\frac{n(n+1)}{2}$ — размерность пространства самосопряженных матриц) .

Теорема 29. *Пусть $\lambda_i, i = \overline{1, n}$ — собственные значения матрицы A, и*

$$\forall i, k : \lambda_i + \lambda_k \neq 0.$$

Тогда $F(B)$ — невырожденный оператор.

Доказательство.

1. Покажем, что $F(B)$ имеет собственные значения $(\lambda_i + \lambda_k)$, $i, k = \overline{1, n}$.

   Рассмотрим собственный вектор $x^{(k)}$ матрицы A^T, соответствующий собственному значению λ_k:
   $$A^T x^{(k)} = \lambda_k x^{(k)}.$$
   Положим $B_{ik} = x^{(i)}(x^{(k)})^T$. Тогда
   $$F(B_{ik}) = A^T x^{(i)}(x^{(k)})^T + (A^T x^{(k)}(x^{(i)})^T)^T = (\lambda_i + \lambda_k)B_{ik}$$

2. Рассмотрим случай, когда все числа $(\lambda_i + \lambda_k)$ различны. Тогда спектр
   $$\{B_{ik}, i \leqslant k,\ i, k = \overline{1, n}\}$$
   образует базис из $\frac{n(n+1)}{2}$ элементов. Поскольку все $(\lambda_i + \lambda_k) \neq 0$, то невырожденность оператора $F(\cdot)$ очевидна.

3. Рассмотрим общий случай, когда у матрицы A^T имеются как собственные, так и присоединенные векторы. Набор элементов
   $$\{B_{ik} = x^{(i)}(x^{(k)})^T, i, k = \overline{1, n},\ i \leqslant k\},$$
   где $\{x^{(i)}, i = \overline{1, n}\}$ — жорданов базис матрицы A^T, в этом случае также образует базис из $\frac{n(n+1)}{2}$ элементов (легко показывается их линейная независимость).

   Поскольку все $(\lambda_i + \lambda_k) \neq 0$, то разложением векторов по базису из элементов B_{ik}, так же как и в предыдущем пункте, показывается невырожденность оператора $F(\cdot)$.

Теорема полностью доказана.

Теорема 30. *Пусть* $\forall i = \overline{1, n}$ *собственные значения матрицы* A : $\operatorname{Re} \lambda_i < 0$, *а* $C = C^T \leqslant 0$.

Далее, пусть множество $K = \{x : \langle Cx, x\rangle = 0\}$ *не содержит целых полутраекторий системы* (6.2) *(кроме* $x(t) \equiv 0$*). Тогда* $\exists! B = B^T > 0$, *удовлетворяющее уравнению Ляпунова* (6.3).

Доказательство. Условие предыдущей теоремы выполнено, а поскольку из невырожденности линейного оператора $F(B)$ следует его обратимость, то $\exists! B = B^T$, удовлетворяющее уравнению Ляпунова (6.3).

Остается доказать, что $B > 0$.

1. Пусть $\exists x_0 : \langle Bx_0, x_0\rangle < 0 \Rightarrow \forall k > 0$, $\langle B(kx_0), kx_0\rangle < 0$.

   Значит, для функции $V(x) = \langle Bx, x\rangle$, $\left.\dfrac{dV}{dt}\right|_{\dot{x}=Ax} = \langle Cx, x\rangle$:
   $$\forall \varepsilon > 0, \exists \widetilde{x}_0 \in B_\varepsilon(0) : V(\widetilde{x}_0) < 0.$$

   Тогда для системы (6.2) с функцией Ляпунова $V(x)$ выполнена теорема Красовского о неустойчивости движения, что противоречит устойчивости линейных систем, поскольку согласно условию теоремы $\forall i = \overline{1, n}$, $\operatorname{Re} \lambda_i < 0$.

2. Пусть $\exists x_0 : \langle Bx_0, x_0\rangle = 0$.

   Рассмотрим траекторию $x(t, t_0, x_0)$ системы (6.2). Имеем $V(x_0) = 0$.

   Поскольку $\{x(t, t_0, x_0),\, t \geqslant t_0\} \notin K$, найдется t^*:

$$\left.\frac{dV}{dt}\right|_{\dot{x}=Ax} (x(t^*, t_0, x_0)) < 0 \Rightarrow V(x(t^* + \Delta t, t_0, x_0)) < 0.$$

   Итак, найден вектор $\widetilde{x}_0 = x(t^* + \Delta t, t_0, x_0)$: $\langle B\widetilde{x}_0, \widetilde{x}_0\rangle < 0$.

   Согласно предыдущему пункту, данный случай также невозможен.

Теорема полностью доказана.

Теорема 31. *Пусть* $\exists\lambda_i$ *— собственное значение матрицы* A : $\operatorname{Re}\lambda_i > 0$*, при этом* $\forall i, k : (\lambda_i + \lambda_k) \neq 0$ *и* $C = C^T \geqslant 0$.

Далее, пусть множество $K = \{x : \langle Cx, x\rangle = 0\}$ *не содержит целых полутраекторий системы* (6.2) *(кроме* $x(t) \equiv 0$*). Тогда* $\exists! B = B^T$*, удовлетворяющее уравнению Ляпунова* (6.3) *и не являющееся отрицательно определенной матрицей.*

Доказательство. По **Т.29** $\exists! B = B^T$ — удовлетворяет уравнению Ляпунова (6.3). Остается доказать, что B не является отрицательно определенной матрицей.

Доказываем от противного:

пусть B — отрицательно определена. Тогда с функцией Ляпунова $V(x) = \langle Bx, x\rangle$ для системы (6.2) выполнена теорема Красовского об асимптотической устойчивости, что противоречит условию теоремы:

$$\exists\lambda_i : \operatorname{Re}\lambda_i < 0 \Rightarrow \text{ линейная система (6.2) неустойчива.}$$

На этом завершается доказательство теоремы.

Перечислим некоторые методы поиска функции Ляпунова.

1. Доказанные **Т.29-Т.31** гарантируют в случае линейных стационарных систем нахождение функции Ляпунова в виде квадратичной формы.

2. Метод связки первых интегралов (метод Четаева).

   Если $F_1(x), \ldots, F_n(x)$ — первые интегралы системы $\dot{x} = f(x)$, то функция Ляпунова ищется в виде

$$V(x) = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k (F_k(x) - F_k(0))^2 + \sum_{k=1}^{m} \chi_k (F_k(x) - F_k(0)).$$

3. Для консервативных или диссипативных систем в качестве функции Ляпунова $V(x)$ можно брать полную энергию.

   В таком случае $\left.\dfrac{dV}{dt}\right|_{\dot{x}=f(x)} \leqslant 0$, надо проверить условие $V(x) \geqslant 0$.

Упражнение. Для системы

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= ax_1 + bx_2^2, \\ \dot{x}_2 &= cx_1x_2 + dx_2^3 \end{cases} \tag{6.4}$$

построить функцию Ляпунова $V(x) = \frac{1}{2}(\lambda x_1^2 + 2\mu x_1 x_2 + x_2^2)$ при различных комбинациях (a, b, c, d).

Решение.

Запишем

$$\left.\frac{dV}{dt}\right|_{\dot{x}=f(x)} = \langle \bigtriangledown V(x), f(x) \rangle =$$

$$= a\lambda x_1^2 + a\mu x_1 x_2 + (b\lambda + c)x_1 x_2^2 + b\mu x_2^3 + c\mu x_1^2 x_2 + d\mu x_1 x_2^3 + dx_2^4.$$

Если $V(x)$ — функция Ляпунова, то $\left.\frac{dV}{dt}\right|_{\dot{x}=f(x)}$ по меньшей мере знакопостоянна в окрестности нуля. При малых $|x_1|, |x_2|$ знак $\left.\frac{dV}{dt}\right|_{\dot{x}=f(x)}$ определяется только членами наименьшего, второго порядка — знаком величины $a\lambda x_1^2 + a\mu x_1 x_2$.

Знакопостоянство величины $a\lambda x_1^2 + a\mu x_1 x_2$ в окрестности нуля возможно, очевидно, только в случае $a\mu = 0$, поэтому дальнейший поиск функции Ляпунова разбивается на два случая.

1. Пусть $a = 0$. Тогда $\left.\frac{dV}{dt}\right|_{\dot{x}=f(x)}$ имеет постоянный знак в окрестности нуля лишь в случае, когда $\left.\frac{dV}{dt}\right|_{\dot{x}=f(x)} = dx_2^4$, т.е. при $\mu = 0, c + b\lambda = 0$.

   Теоремы Ляпунова и Четаева о неустойчивости здесь неприменимы , поскольку функция $\left.\frac{dV}{dt}\right|_{\dot{x}=f(x)}$ не является знакоопределенной.

   Далее заметим, что множество

   $$K = \left\{ x : \left.\frac{dV}{dt}\right|_{\dot{x}=f(x)} = 0 \right\} = \{x : x_2 = 0\}$$

   содержит целые полутраектории системы (6.4) — положения равновесия $(x_1^0, 0), \forall x_1^0$. Поэтому теоремы Красовского в данном случае также неприменимы.

   Можно найти лишь условия применимости теоремы Ляпунова об устойчивости:

   $$V(x) = \frac{1}{2}(\lambda x_1^2 + x_2^2) \text{— определенно положительна при } \lambda > 0;$$

   $$\left.\frac{dV}{dt}\right|_{\dot{x}=f(x)} = dx_2^4 \text{— знакоотрицательна при } d < 0.$$

Таким образом, при

$$\begin{cases} a = 0, \quad \mu = 0, \\ c + b\lambda = 0, \quad \lambda > 0, \quad d < 0 \end{cases}$$

нулевое положение равновесия системы (6.4) устойчиво.

2. Пусть $\mu = 0$, $a \neq 0$. Тогда

$$\left.\frac{dV}{dt}\right|_{\dot{x}=f(x)} = a\lambda x_1^2 + dx_2^4 + (b\lambda + c)x_1x_2^2$$

Надо потребовать $\lambda \neq 0$, поскольку иначе нельзя применить ни одну из теорем об устойчивости или неустойчивости: ни одна из функций $V(x)$, $\left.\dfrac{dV}{dt}\right|_{\dot{x}=f(x)}$ не является знакоопределенной и множество $K = \left\{ x : \left.\dfrac{dV}{dt}\right|_{\dot{x}=f(x)} = 0 \right\} = \{x : x_2 = 0\}$ не удовлетворяет условию в теоремах Красовского.

Дальшее исследование разбивается на два случая.

1) Пусть $d = 0$. Для знакопостоянства $\left.\dfrac{dV}{dt}\right|_{\dot{x}=f(x)}$ требуем

$$(b\lambda + c) = 0 \Rightarrow \left.\frac{dV}{dt}\right|_{\dot{x}=f(x)} = a\lambda x_1^2.$$

Множество $K = \left\{ x : \left.\dfrac{dV}{dt}\right|_{\dot{x}=f(x)} = 0 \right\}$ не содержит целых полутраекторий системы (6.4), и можно применить теорему Красовского о неустойчивости в следующих случаях:

а) $a\lambda > 0$,

б) $\lambda < 0$, $a > 0$.

Поэтому при

$$\begin{cases} \mu = 0, \quad d = 0, \\ c + b\lambda = 0, \quad \lambda \neq 0, \\ a > 0 \quad \text{либо} \quad a < 0 \,\&\, \lambda < 0 \end{cases}$$

нулевое положение равновесия системы (6.4) неустойчиво.

Соответственно, по теореме Красовского об асимптотической устойчивости при

$$\begin{cases} \mu = 0, \quad d = 0, \\ c + b\lambda = 0, \\ a < 0, \quad \lambda > 0 \end{cases}$$

нулевое положение равновесия системы (6.4) асимптотически устойчиво.

2) Пусть $d \neq 0$. Тогда

$$\left.\frac{dV}{dt}\right|_{\dot{x}=f(x)} = a\lambda x_1^2 + dx_2^4 + (b\lambda + c)x_1 x_2^2$$

является квадратным трехчленом относительно x_1 и x_2^2 и является знакоопределенной функцией при

$$(b\lambda + c)^2 < 4a\lambda d.$$

Можно также убедиться, что в этом случае множество $K = \left\{ x : \left.\frac{dV}{dt}\right|_{\dot{x}=f(x)} = 0 \right\}$ не содержит целых полутраекторий системы (6.4). Поэтому достаточно требовать знакопостоянства производной $\left.\frac{dV}{dt}\right|_{\dot{x}=f(x)}$, что выполнено при $(b\lambda + c)^2 \leqslant 4a\lambda d$.

При данном ограничении знак производной $\left.\frac{dV}{dt}\right|_{\dot{x}=f(x)}$ определяется знаком величины $a\lambda$.

Можно применить теорему Красовского об асимптотической устойчивости нулевого решения системы (6.4) при

$$\begin{cases} a < 0, \quad \lambda > 0, \quad \mu = 0, \\ \quad (b\lambda + c)^2 \leqslant 4a\lambda d. \end{cases}$$

Соответственно, по теореме Красовского о неустойчивости при

$$\begin{cases} \mu = 0, \\ (b\lambda + c)^2 \leqslant 4a\lambda d, \\ a > 0 \quad \text{либо} \quad a < 0 \,\&\, \lambda < 0 \end{cases}$$

нулевое решение системы (6.4) неустойчиво.

Пример 4. *Рассматривается колебательная система*

$$\ddot{x} + f(x) + g(\dot{x}) = 0, \quad f(0) = g(0) = 0. \tag{6.5}$$

Канонический вид системы

$$\begin{cases} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= -f(x) - g(y). \end{cases}$$

Предполагается, что система диссипативна: выполнено условие диссипации

$$y \cdot g(y) > 0, \forall y \neq 0.$$

В качестве функции Ляпунова берем полную энергию: $V(x, y) = \dfrac{y^2}{2} + \int_0^x f(\xi) d\xi$. *Тогда производная в силу системы*

$$\left.\frac{dV}{dt}\right|_{\dot{x}=f(x)} = -y \cdot g(y) \quad \text{— \textit{отрицательно определена.}}$$

Чтобы применить теорему Ляпунова об асимптотической устойчивости, достаточно потребовать $x \cdot f(x) > 0$, $\forall x \neq 0$, откуда следует, что функция $V(x, y)$ положительна определена.

Таким образом, если $x \cdot f(x) > 0$, $\forall x \neq 0$ и $y \cdot g(y) > 0$, $\forall y \neq 0$, то нулевое решение колебательной системы (6.5) *асимптотически устойчиво.*

Пример 5. *Рассматривается m колебательных систем*

$$\begin{cases} \dot{x}_i &= y_i, \quad i = \overline{1, m} \\ \dot{y}_i &= -f_i(x_i) - g_i(y_i) - \sum_{k=1}^{m} h_{ik}(x_i - x_k). \end{cases} \tag{6.6}$$

Здесь

$$\forall i = \overline{1, m},\, x_i \neq 0, y_i \neq 0: \quad x_i \cdot f_i(x_i) > 0,\, y_i \cdot g_i(y_i) > 0,\, (x_i - x_k) \cdot h_{ik}(x_i - x_k) \geqslant 0;$$

$$f_i(0) = g_i(0) = h_{ik}(0) = 0, \quad \forall i, k = \overline{1, m};$$

$$h_{ik}(x_i - x_k) = -h_{ik}(x_k - x_i), \quad h_{ik}(x_i - x_k) = -h_{ki}(x_k - x_i).$$

Полная энергия системы складывается из кинетических энергий $\dfrac{y_i^2}{2}$, потенциальных энергий $\int\limits_0^{x_i} f_i(\xi) d\xi$ и энергий взаимодействия $\sum\limits_{k=1}^{m} \int\limits_0^{x_i - x_k} h_{ik}(\xi) d\xi$ подсистем системы (6.6).

В качестве функции Ляпунова снова берется полная энергия, записываемая в виде

$$V(x, y) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{m} y_i^2 + \sum_{i=1}^{m} \int\limits_0^{x_i} f_i(\xi) d\xi + \sum_{i<k} \int\limits_0^{x_i - x_k} h_{ik}(\xi) d\xi.$$

Тогда производная в силу системы

$$\left.\frac{dV}{dt}\right|_{\dot{x} = f(x)} = -\sum_{i=1}^{m} y_i \cdot g_i(y_i) \quad \text{— \textit{отрицательно определена.}}$$

Поскольку из условий задачи следует, что функция $V(x, y)$ положительна определена, можно применить теорему Ляпунова об асимптотической устойчивости, откуда следует асимптотическая устойчивость нулевого решения системы (6.6).

7. Лекция 7

7.1 Устойчивость потенциальных систем. Влияние гироскопических и диссипативных сил.

Обозначим $q_1, \ldots, q_s$ — обобщенные координаты,

$Q_1, \ldots, Q_s$ — обобщенные силы.

Механическая система описывается уравнениями

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}(\dfrac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}) - \dfrac{\partial T}{\partial q_k} &= Q_k, \\ \dot{q}_k &= \dfrac{dq_k}{dt},\ k = \overline{1, s}. \end{cases} \tag{7.1}$$

Потребуем, чтобы при $q_1 = \ldots = q_s = 0$, $\dot{q}_1 = \ldots = \dot{q}_s = 0$: $\quad Q_1 = \ldots = Q_s = 0$. Тогда начало координат $q = 0$ является положением равновесия системы (7.1).

Будем рассматривать случай $T = \frac{1}{2}\dot{q}^T A\dot{q}$, $A = A^T > 0$ — не зависит от q.

Далее, пусть Q_k — консервативные силы (работа этих сил по любому замкнутому контуру равна нулю). Это значит, что найдется функция Π — потенциальная энергия, $\Pi(0) = 0$, так что

$$Q_k = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_k}.$$

Теорема 32 (Лагранжа-Дирихле)**.** *Пусть при* $q = 0$ *потенциальная энергия* Π *имеет локальный минимум и* $(q, \dot{q}) = (0, 0)$ *является изолированным положением равновесия. Тогда данное положение равновесия устойчиво по Ляпунову.*

Доказательство.

1. Введем функцию Ляпунова $V = T + \Pi$.

   По условию $T > 0$ при $\dot{q} \neq 0$, а $q = 0$ — изолированный минимум функции Π, поэтому функция Ляпунова $V = V(q, \dot{q})$ положительно определена в окрестности нуля ($q = 0$, $\dot{q} = 0$).

2. Производная в силу системы (7.1) имеет вид

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dT}{dt} + \frac{d\Pi}{dt} = (A\dot{q})^T\ddot{q} + (\frac{\partial \Pi}{\partial q})^T\dot{q} =$$

$$= (A\dot{q})^T\ddot{q} - \dot{q}^T\frac{d}{dt}(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}) = \dot{q}^T(A^T\ddot{q} - A\ddot{q}) = 0,$$

   поскольку $A = A^T$.

   Тогда по теореме Ляпунова $(q, \dot{q}) = (0, 0)$ — устойчивое положение равновесия.

Теорема 33 (Ляпунов)**.** *Пусть в точке* $(q, \dot{q}) = (0, 0)$ *функция* Π *не имеет локального минимума (а именно, матрица квадратичной формы из вторых производных* Π *в нуле имеет собственное значение* $\lambda < 0$*). Тогда нулевое положение равновесия неустойчиво.*

Теорема 34 (Ляпунов)**.** *Пусть в точке* $(q, \dot{q}) = (0, 0)$ Π *имеет локальный максимум (а именно, матрица квадратичной формы из вторых производных* Π *в нуле отрицательно определена). Тогда нулевое положение равновесия неустойчиво.*

Теорема 35 (Четаев). *Если в точке $(q, \dot{q}) = (0, 0)$ аналитическая функция* Π *не имеет локального минимума, то нулевое положение равновесия неустойчиво.*

Рассмотрим случай, когда обобщенные силы $Q = (Q_1, \ldots, Q_s)^T$ представимы в виде
$$Q = -B_1 q - C_1 \dot{q}.$$
Имеет место представление матриц B_1 и C_1 в виде
$$\begin{cases} B_1 = B + P, \\ C_1 = C + D. \end{cases}$$

B, C — симметрические, P, D — кососимметрические матрицы. Тогда $Q = -Bq - Pq - C\dot{q} - D\dot{q}$.

Имееется следующая интерпретация каждого из слагаемых.

1) $-Bq$ — консервативные силы, $\Pi = q^T Bq$ — потенциальная энергия.

2) $-Pq$ — неконсервативные позиционные силы.

3) $-C\dot{q}$ — диссипативные силы, $F = \dot{q}^T C\dot{q}$ — функция диссипации (функция Релея).

   При $F \geqslant 0$ диссипация называется положительной,

   при $F > 0$ диссипация полная,

   при $F \not\geqslant 0$ диссипация отрицательная (наличие ускоряющих сил).

4) $-D\dot{q}$ — гироскопические силы.

Аналогично в общем случае определяются данные силы:
$$Q = Q_{11}(q) + Q_{12}(q) + Q_{21}(\dot{q}) + Q_{22}(\dot{q}). \tag{7.2}$$
Здесь $Q_{11}(q)$ — консервативные силы, $Q_{12}(q)$ — неконсервативные позиционные силы, $Q_{21}(q)$ — диссипативные силы, $Q_{22}(q)$ — гироскопические силы.

Данные слагаемые определяются таким образом, чтобы были выполнены соотношения
$$(Q_{12}(q))^T q \equiv 0, \ (Q_{22}(\dot{q}))^T \dot{q} \equiv 0.$$

Поскольку для кососимметрических матриц P, D также выполнены равенства
$$q^T Pq = (Pq)^T q = q^T P^T q = -q^T Pq \Rightarrow \quad (Pq)^T q = 0,$$
и аналогично $(Dq)^T q = 0$, то общее определение типов сил совпадает с определением сил для линейного случая.

Как и в линейном случае, различают виды диссипации:
$(Q_{21}(\dot{q}))^T \dot{q} \leqslant 0$ — диссипация называется положительной,
$(Q_{21}(\dot{q}))^T \dot{q} < 0$ — диссипация полная,
$(Q_{21}(\dot{q}))^T \dot{q} \not\leqslant 0$ — диссипация отрицательная.

Теорема 36. *1. Пусть в представлении* (7.2) $Q_1(q) \in C^1(\Omega)$. *Тогда* $\exists \Pi, R$*:*
$$Q_1(q) = -\operatorname{grad} \Pi + R,$$

R — неконсервативные позиционные силы.

2. Пусть в представлении (7.2) $Q_2(q) \in C^1(\Omega)$. *Тогда* $\exists F, G$:

$$Q_2(q) = -\operatorname{grad} F + G,$$

F — *функция Релея,* G — *гироскопические силы .*

Итак, в линейном случае система (7.1) запишется в виде

$$\frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial T}{\partial \dot q}\Big) - \frac{\partial T}{\partial q} = -Bq - Pq - C\dot q - D\dot q$$

$$\Rightarrow A\ddot q + Bq + Pq + C\dot q + D\dot q = F(q, \dot q). \tag{7.3}$$

Поскольку $A = A^T > 0$, то $\exists A^{-1} > 0$. Выбрав базис Λ из собственных векторов симметрической матрицы $A^{-1}B$, переходом к новой переменной $z = \Lambda q$ система (7.3) примет вид

$$\ddot z + \widetilde{B} z + \widetilde{P} z + \widetilde{C}\dot z + \widetilde{D}\dot z = \widetilde{F}(z, \dot z),$$

где $\widetilde{B} = \operatorname{diag}(b_{11}, \dots, b_{ss})$, $b_{11}, \dots, b_{ss}$ — собственные числа матрицы B.

Матрица Λ является ортогональной, при этом $\widetilde{B} = A^{-1}B\Lambda^{-1}$. Кроме того, из критерия Сильвестра $\det A > 0$. Поэтому

$$\det \widetilde{B} = b_{11} \cdot \ldots \cdot b_{ss} = \frac{\det B}{\det A}, \tag{7.4}$$

т.е. знаки $\det \widetilde{B}$ и $\det B$ совпадают.

Определение 15. *Индексом неустойчивости системы* (7.3) *называется количество отрицательных собственных чисел матрицы* B.

Из равенства (7.4) получаем, что индекс неустойчивости системы (7.3) является четным $\Leftrightarrow$ $\det B > 0$, и нечетным $\Leftrightarrow$ $\det B < 0$.

Пример 6. *Рассмотрим двумерную систему с консервативными и гироскопическими силами:*

$$\begin{cases} \ddot z_1 + b_1 z_1 - g\dot z_2 &= 0, \\ \ddot z_2 + b_2 z_2 + g\dot z_1 &= 0, \end{cases}$$

где $b_1 < 0$, $b_2 < 0$.

Характеристическое уравнение имеет вид

$$\lambda^4 + \lambda^2(g^2 + b_1 + b_2) + b_1 b_2 = 0.$$

Единственный случай, когда возможна стабилизация системы (ее называют гироскопической): решения характеристического уравнения таковы, что $\lambda^2 < 0$, $\lambda^2 \in \mathbb{R}$. *Это выполнено* $\Leftrightarrow$ $g > \sqrt{-b_1} + \sqrt{-b_2}$.

Теорема 37 (Томпсон-Четаев). *Если позиционная консервативная система с изолированным положением равновесия* $(q, \dot q) = (0, 0)$ *имеет нечетный индекс неустойчивости, то положение равновесия неустойчиво.*

Доказательство По условию теоремы система записывается следующим образом:

$$\ddot{z} + \widetilde{B}z + \widetilde{D}\dot{z} = F(z, \dot{z}). \tag{7.5}$$

Характеристическое уравнение системы

$$\Delta = \begin{vmatrix} \lambda^2 + b_{11} & \lambda\widetilde{d}_{12} & \dots & \lambda\widetilde{d}_{1s} \\ \lambda\widetilde{d}_{21} & \lambda^2 + b_{22} & \dots & \lambda\widetilde{d}_{2s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda\widetilde{d}_{s1} & \lambda\widetilde{d}_{s2} & \dots & \lambda^2 + b_{ss} \end{vmatrix} = \lambda^{2s} + \ldots + a_{2s} = 0,$$

где $a_{2s} = b_{11} \cdot \ldots \cdot b_{ss} \neq 0$.

По условию индекс неустойчивости нечетный, откуда $a_{2s} < 0$.

Поскольку левая часть характеристического уравнения является вещественным многочленом, то в таком случае найдется корень $\lambda_j : \operatorname{Re}\lambda_j > 0$. Выполнены условия теоремы неустойчивости для линейных систем, поэтому исходная система (7.5) неустойчива.

Теорема 38. *Пусть в системе с потенциальными силами изолированное нулевое положение равновесия устойчиво по Ляпунову (потенциальная энергия имеет в нуле локальный минимум). Тогда для любых гироскопических, диссипативных сил (с положительной диссипацией) нулевое положение равновесия устойчиво по Ляпунову.*

Доказательство

Система имеет следующий вид:

$$\frac{d}{dt}(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}) = -\operatorname{grad}\,\Pi - C\dot{q} - D\dot{q}. \tag{7.6}$$

Умножая обе части равенства на $\dot{q}$, после преобразования получим

$$\frac{d}{dt}(T + \Pi) = -\langle \dot{q}, C\dot{q} \rangle = -F,$$

F — функция Релея, по условию положительно определена как функция от $\dot{q}$.

Взяв в качестве функции Ляпунова полную энергию $V(q, \dot{q}) = T + \Pi$, по условию теоремы получаем, что $V(q, \dot{q})$ положительно определена и ее производная в силу системы знакоотрицательна.

Поэтому по теореме Ляпунова нулевое положение равновесия устойчиво, ч.т.д.

Теорема 39. *Пусть в системе с потенциальными силами изолированное нулевое положение равновесия устойчиво по Ляпунову (потенциальная энергия имеет в нуле локальный минимум). Тогда для любых гироскопических, диссипативных сил (с полной диссипацией) нулевое положение равновесия асимптотически устойчиво.*

Доказательство

Как и в предыдущей теореме, берем в качестве функции Ляпунова полную энергию $V(q, \dot{q}) = T + \Pi$, которая положительно определена и ее производная в силу системы знакоотрицательна.

Для доказательства асимптотической устойчивости используем теорему Красовского.

$$\frac{dV}{dt} = -\langle \dot{q}, C\dot{q} \rangle = -F \leqslant 0,$$

при этом

$$K = \left\{ (q, \dot{q}) : \frac{dV}{dt} = 0 \right\} = \{(q, \dot{q}) : q \neq 0, \dot{q} = 0\}.$$

Если $\dot{q} = 0$, то $q = \text{const}$, поэтому на траекториях системы (7.6), лежащих на множестве K, имеем $\Pi = \text{const}$.

Поскольку в некоторой окрестности нуля нет других положений равновесия системы, то единственно возможный случай — траектория состоит из одной точки нуль.

Значит, выполнено условие теоремы Красовского об асимптотической устойчивости, на чем завершается доказательство.

Теорема 40. *Пусть в системе с потенциальными силами в любой окрестности нулевого положения равновесия найдется точка, в которой потенциальная энергия* $\Pi < 0$. *Тогда для любых гироскопических, диссипативных сил (с полной диссипацией) нулевое положение равновесия неустойчиво.*

Доказательство

Выберем в качестве функции Ляпунова $V(q, \dot{q}) = -(T+\Pi)$. Из условия теоремы получим, что в любой окрестности нуля найдется точка $(q, \dot{q})$: $V(q, \dot{q}) > 0$.

Далее,

$$\frac{dV}{dt} = \langle \dot{q}, C\dot{q} \rangle = F > 0 \quad \text{при } \dot{q} \neq 0.$$

Рассмотрев

$$K = \left\{ (q, \dot{q}) : \frac{dV}{dt} = 0 \right\} = \{(q, \dot{q}) : q \neq 0, \dot{q} = 0\},$$

аналогично предыдущему доказательству получаем, что единственная траектория, лежащая в K, состоит из одной точки нуль.

Значит, выполнено условие теоремы Красовского о неустойчивости в нуле, на чем завершается доказательство.

8. Лекция 8

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = f(t, x), \quad x \in \mathbb{R}^n. \tag{8.1}$$

Здесь $f(t, x) \in C([t_0, +\infty) \times D)$, D — область в $\mathbb{R}^n$; $f(t, 0) \equiv 0, \quad \forall t \geqslant t_0$.

Также рассмотрим множество $\mathcal{H}_t^0 = \{(t, x) : t \geqslant t_0, x \in \mathbb{R}^n : \|x\| < h\}$.

Предполагается, что в области $\mathcal{H}_t^0$ решение системы (9.1) существует и продолжаемо.

Для исследования устойчивости нулевого решения системы (9.1) рассматриваем функцию $V(t, x) \in C(\mathcal{H}_t^0)$, $V(t, 0) \equiv 0$.

Определение 16. *Функция $V(t,x)$ называется*

1) *определенно положительной, если $\exists W(x)$ — определенно положительная функция, т.ч. $\forall (t,x) \in \mathcal{H}_t^0, \quad V(t,x) \geqslant W(x)$;*

2) *определенно отрицательной, если $-V(t,x)$ — определенно положительна;*

3) *знакоопределенной, если она определенно положительна либо определенно отрицательна;*

4) *знакоположительной, если $V(t,x) \geqslant 0$, $\forall (t,x) \in \mathcal{H}_t^0$;*

5) *знакоотрицательной, если $-V(t,x)$ — знакоположительна;*

6) *знакопостоянной, если она знакоположительна либо знакоотрицательна;*

7) *Функция $V(t,x) \geqslant 0$ допускает бесконечно малый высший предел, если $\exists W(x)$ — определенно положительная функция, т.ч. $\forall (t,x) \in \mathcal{H}_t^0, \quad V(t,x) \leqslant W(x)$.*

Далее по умолчанию считается $V(t,x) \geqslant 0$.

Лемма 1. *Функция $W(x) \in C^1(D)$ является определенно положительной функцией $\quad \Leftrightarrow$*

$$\exists \omega(\cdot) : [0,h] \to [0,+\infty),\ \omega \in C[0,h],\ \omega(0) = 0,\ \omega(\cdot) \text{ — строго возрастает }, \tag{8.2}$$

т.ч. $W(x) \geqslant \omega(\|x\|), \quad \forall x : \|x\| \leqslant h$.

Класс функций (8.2) обозначим как Ω_h.

Доказательство

Достаточность очевидна. Доказываем необходимость. Введем функцию

$$\varphi(r) = \min\{W(x) : r \leqslant \|x\| \leqslant h\},\ r \in [0,h].$$

Очевидно, $\varphi(r)$ — неубывающая неотрицательная функция, $\varphi(r) > 0$ при $r > 0$, $W(x) \geqslant \varphi(\|x\|)$. Условие $W(x) \in C^1(D)$ обеспечивает непрерывность функции $\varphi(r)$.

Выберем некоторую функцию $\alpha(\cdot) \in \Omega_h$: $\quad \alpha(r) \leqslant 1$, $\forall r \in [0,h]$.

Тогда $\omega(r) = \alpha(r)\varphi(r)$ удовлетворяет условию леммы, ч.т.д.

Лемма 2. *Пусть функция $W(x) \in C^1(D)$ является определенно положительной функцией.*

Тогда $\exists \widetilde{\omega}(\cdot) \in \Omega_h$:

$$W(x) \leqslant \widetilde{\omega}(\|x\|), \quad \forall x : \|x\| \leqslant h$$

Доказательство

Введем функцию

$$\varphi(r) = \max\{W(x) : \|x\| \leqslant r\},\ r \in [0,h].$$

Очевидно, $\varphi(r)$ — неубывающая неотрицательная функция, $\varphi(r) > 0$ при $r > 0$, $W(x) \leqslant \varphi(\|x\|)$. Условие $W(x) \in C^1(D)$ обеспечивает непрерывность функции $\varphi(r)$.

Выберем некоторую функцию $\alpha(\cdot) \in \Omega_h$: $\quad \alpha(r) \geqslant 1$, $\forall r \in [0,h]$.

Тогда $\widetilde{\omega}(r) = \alpha(r)\varphi(r)$ удовлетворяет условию леммы, ч.т.д.

Теорема 41 (Ляпунова об устойчивости). *Пусть в* $\mathcal{H}_t^0$ $\exists V(t,x)$*:*

1) $V(t,x)$ *— определенно положительная функция;*

2) $\left.\dfrac{dV}{dt}\right|_{\dot{x}=f(t,x)} = \dfrac{\partial V}{\partial t} + \langle \bigtriangledown V(x), f(x)\rangle$ *— знакоотрицательная функция.*

Тогда $x(t) \equiv 0$ *— устойчивое положение равновесия системы* (9.1).

Доказательство.

1. $\exists W(x)$ — положительно определенная функция, т.ч. $V(t,x) \geqslant W(x), \quad \forall (t,x) \in \mathcal{H}_t^0$.

   $\forall \varepsilon > 0$, рассмотрим $m = \min\{W(x) : x \in S_\varepsilon(0)\} > 0$.

   t_0 — фиксировано, $V(t_0, 0) = 0 \quad \Rightarrow \quad$ из непрерывности $V(t,x)$, $\exists \delta > 0 (\delta < \varepsilon)$: $V(t_0, x) < m, \quad \forall x : \|x\| \leqslant \delta$.

2. Рассмотрим начальное условие $x_0 : \|x_0\| \leqslant \delta$. Тогда соответствующее решение $x(t, t_0, x_0) \in B_\varepsilon(0)$.

   Докажем это от противного: пусть $\exists t^* \geqslant t_0 : \; x(t^*, t_0, x_0) \in S_\varepsilon(0)$. Имеем

$$m - V(t_0, x_0) \leqslant V(t^*, x(t^*, t_0, x_0)) - V(t_0, x_0) = \int_{t_0}^{t^*} \left.\frac{dV}{dt}\right|_{\dot{x}=f(t,x)} (\tau) d\tau \leqslant 0.$$

   Получаем неравенство $m \leqslant V(t_0, x_0)$, что противоречит выбору x_0.

   Значит, $\forall t \geqslant t_0 : |x(t, t_0, x_0)| < \varepsilon$, что завершает доказательство устойчивости нулевого решения системы (9.1).

Теорема 42 (Ляпунова об асимптотической устойчивости). *Пусть в* $\mathcal{H}_t^0$ $\exists V(t,x)$*:*

1) $V(t,x)$ *— определенно положительная функция и допускает бесконечно малый высший предел;*

2) $\left.\dfrac{dV}{dt}\right|_{\dot{x}=f(t,x)}$ *— определенно отрицательная функция.*

Тогда $x(t) \equiv 0$ *— асимптотически устойчивое положение равновесия системы* (9.1).

Доказательство.

1. Согласно предыдущей теореме $x(t) \equiv 0$ — устойчивое положение равновесия системы (9.1). Поэтому

$$\forall \varepsilon > 0 (\varepsilon < h), \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0, \forall x_0 : \; \|x_0\| \leqslant \delta \Rightarrow \|x(t, t_0, x_0)\| \leqslant \varepsilon, \forall t \geqslant t_0.$$

2. Рассмотрим $V(t, x(t, t_0, x_0))$ — монотонно убывает как функция от t(условие (2) теоремы), ограничена снизу(условие (1) теоремы). Поэтому

$$\exists \lim_{t\to+\infty} V(t, x(t, t_0, x_0)) = \inf_{t\geqslant t_0} V(t, x(t, t_0, x_0)) = \alpha \geqslant 0.$$

Пусть $\alpha > 0$, тогда $\exists \beta > 0 :\ \|x(t, t_0, x_0)\| \geqslant \beta$, $\forall t \geqslant t_0$.

Действительно, иначе $\exists x_k = x(t_k, t_0, x_0)$, $t_k \xrightarrow{k\to\infty} +\infty$, $\|x_k\| \xrightarrow{k\to\infty} 0$.

Из условия теоремы найдется положительно определенная функция $W_1(x)$:

$$V(t_k, x_k) \leqslant W_1(x_k) \leqslant \omega_1(\|x_k\|) \xrightarrow{k\to\infty} 0,$$

где $\omega_1(\cdot)$ — функция из Леммы 2.

Отсюда вытекало бы $V(t_k, x_k) \xrightarrow{k\to\infty} 0$, что противоречит предположению $\alpha > 0$.

3. Итак, $\|x(t, t_0, x_0)\| \geqslant \beta$, $\forall t \geqslant t_0$, $\beta < \varepsilon$.

Согласно условию теоремы найдется положительно определенная функция $W_2(x)$:

$$\left.\frac{dV}{dt}\right|_{\dot{x}=f(t,x)} (t, x) \leqslant -W_2(x).$$

Выберем $l = \min\{W_2(x) : \|x\| \in [\beta, \varepsilon]\} > 0$. Тогда

$$V(t, x(t, t_0, x_0)) - V(t_0, x_0) \leqslant -l(t - t_0) \xrightarrow{t\to\infty} -\infty,$$

что противоречит положительной определенности $V(t, x)$. Поэтому $\alpha = 0$.

4. Тогда имеем $\lim\limits_{t\to+\infty} V(t, x(t, t_0, x_0)) = 0$. Отсюда следует $x(t, t_0, x_0) \xrightarrow{t\to\infty} 0$.

Действительно, из условия теоремы найдется положительно определенная функция $W_3(x)$ с соответствующей функцией $\omega_3(\cdot)$ из Леммы 1, т.ч.

$$V(t, x(t, t_0, x_0)) \geqslant W_3(x(t, t_0, x_0)) \geqslant \omega_3(\|x(t, t_0, x_0)\|) > 0 \text{ при } x(t, t_0, x_0) \neq 0.$$

Таким образом, $x(t, t_0, x_0) \xrightarrow{t\to\infty} 0$, чем завершается доказательство теоремы.

Теорема 43 (Ляпунова о неустойчивости)**.** *Пусть в $\mathcal{H}_t^0$ $\exists V(t, x)$:*

1) $|V(t, x)|$ — допускает бесконечно малый высший предел;

2) $\left.\dfrac{dV}{dt}\right|_{\dot{x}=f(t,x)} = \dfrac{\partial V}{\partial t} + \langle \bigtriangledown V(x), f(x)\rangle$ *— знакоопределенная функция;*

3) $\forall \varepsilon > 0, \forall t \geqslant t_0,\ \exists t^* \geqslant t, x_0 \in B_\varepsilon(0) :$

$V(t^*, x_0)$ *имеет тот же знак, что и* $\left.\dfrac{dV}{dt}\right|_{\dot{x}=f(t,x)}$.

Тогда $x(t) \equiv 0$ — неустойчивое положение равновесия системы (9.1).

Теорема 44 (Четаева о неустойчивости). *Пусть в* $\mathcal{H}_t^0$ $\exists V(t,x)$*:*

1) $V(t,x)$ *— ограничена сверху;*

2) $\forall \varepsilon > 0, \forall t \geqslant t_0,\ \exists t^* \geqslant t, x_0 \in B_\varepsilon(0) : V(t^*, x_0) > 0$*;*

3) $\left.\dfrac{dV}{dt}\right|_{\dot{x}=f(t,x)}$ *— определенно положительная функция в области* $\{(t,x) \in \mathcal{H}_t^0 : V(t,x) > 0\}$.

Тогда $x(t) \equiv 0$ *— неустойчивое положение равновесия системы* (9.1).

Примеры

1) $V(t,x) = a_1(t)x_1^2 + a_2(t)x_2^2$, $x \in \mathbb{R}^2$, $a_1(t) \geqslant 0$, $a_2(t) \geqslant 0$.
$V(t,x)$ — определенно положительная функция, если

$$\exists a_0 > 0 : \quad \forall t \geqslant t_0, \quad a_1(t) \geqslant a_0, a_2(t) \geqslant a_0.$$

$V(t,x)$ допускает бесконечно малый высший предел, если

$$\exists a_3 > 0 : \quad \forall t \geqslant t_0, \quad a_1(t) \leqslant a_3, a_2(t) \leqslant a_3.$$

2) Рассмотрим систему $\dot{x} = \alpha x + K(t,x)x$, $\quad K(t,x)$ — кососимметрическая матрица.

Выберем функцию Ляпунова $V(t,x) = \|x\|^2$, тогда

$$\left.\frac{dV}{dt}\right|_{\dot{x}=f(t,x)} = \dot{x}^T x + x^T \dot{x} = (\alpha x + K(t,x)x)^T x + x^T(\alpha x + K(t,x)x) =$$

$$= \alpha x^T x - x^T K(t,x)x + \alpha x^T x + x^T K(t,x)x = 2\alpha\|x\|^2.$$

По теореме Ляпунова

- при $\alpha \leqslant 0$, $\quad x(t) \equiv 0$ — устойчивое положение равновесия;
- при $\alpha < 0$, $\quad x(t) \equiv 0$ — асимптотически устойчивое положение равновесия.

8.1 Исследование равномерной устойчивости систем

Определение 17. *Решение* $x(t) \equiv 0$ *системы* (9.1) *называется устойчивым положением равновесия равномерно по* t_0*, если*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0,\ \text{т.ч.}\ \forall (t_0, x_0) \in \mathcal{H}_t^0, \|x_0\| \leqslant \delta \Rightarrow \|x(t, t_0, x_0)\| < \varepsilon,\ t \geqslant t_0.$$

Теорема 45 (Персидского об устойчивости, равномерной по t_0). *Пусть в* $\mathcal{H}_t^0$ $\exists V(t,x)$*:*

1) $V(t,x)$ — определенно положительная функция, допускает бесконечно малый высший предел;

2) $\left.\dfrac{dV}{dt}\right|_{\dot{x}=f(t,x)}$ *— знакоотрицательная функция.*

Тогда $x(t) \equiv 0$ — устойчивое равномерно по t_0 положение равновесия системы (9.1).

Доказательство

Согласно **Леммам** 1-2 $\exists\, \omega_1(\cdot), \omega_2(\cdot) \in \Omega_h$, т.ч.

$$V(t,x) \geqslant W_1(x) \geqslant \omega_1(\|x\|), \quad V(t,x) \leqslant W_2(x) \leqslant \omega_2(\|x\|).$$

Из свойств функций из класса Ω_h

$$\forall \varepsilon > 0,\, \exists \delta > 0 :\, \omega_2(\delta) < \omega_1(\varepsilon).$$

По условию теоремы $V(t, x(t,t_0,x_0))$ не возрастает по t, поэтому $\forall x_0 \in B_\delta(0)$

$$\omega_1(\|x(t,t_0,x_0)\|) \leqslant V(t, x(t,t_0,x_0)) \leqslant V(t_0,x_0) \leqslant \omega_2(\|x_0\|) \leqslant \omega_2(\delta). \tag{8.3}$$

Предположим, что $\exists t^* :\, \|x(t^*,t_0,x_0)\| = \varepsilon$, тогда из (8.3) получим $\omega_1(\varepsilon) \leqslant \omega_2(\delta)$, что противоречит выбору δ.

Поэтому из условия $x_0 \in B_\delta(0)$ следует $x(t,t_0,x_0) \in B_\varepsilon, \forall t \geqslant t_0$. Теорема доказана.

Запишем определение асимптотической устойчивости в области $\mathcal{H}_t^0$:

$$\forall x_0, t_0, \forall \varepsilon > 0,\, \exists T^* = T^*(\varepsilon, t_0, x_0) > 0, \text{ т.ч. } \forall t \geqslant t_0 + T^* :\, \|x(t,t_0,x_0)\| < \varepsilon. \tag{8.4}$$

Определение 18. *Сходимость траектории $x(t,t_0,x_0)$ к нулю называется равномерной по t_0 (x_0) $[t_0$ и $x_0]$, если в (8.4) T^* не зависит от t_0 (x_0) $[t_0$ и $x_0]$.*

Определение 19. *Решение $x(t) \equiv 0$ системы (9.1) называется асимптотически устойчивым равномерно по t_0 (x_0) $[t_0$ и $x_0]$, если $x(t) \equiv 0$ — устойчивое по Ляпунову решение, и в некоторой окрестности нуля все траектории системы при $t \to +\infty$ сходятся к нулю равномерно по t_0 (x_0) $[t_0$ и $x_0]$.*

9. Лекция 9

Продолжаем рассматривать систему дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = f(t,x), \quad x \in \mathbb{R}^n. \tag{9.1}$$

Здесь $f(t,x) \in C([t_0,+\infty) \times D)$, D — область в $\mathbb{R}^n$; $f(t,0) \equiv 0, \quad \forall t \geqslant t_0$.

В области

$$\mathcal{H}_t^0 = \{(t,x) : t \geqslant t_0, x \in \mathbb{R}^n :\, \|x\| < h\}$$

решение системы (9.1) существует и продолжаемо.

Лемма 3 (Красовский)**.** *Если положение равновесия $x(t) \equiv 0$ устойчиво равномерно по t_0 и асимптотически устойчиво, то это положение равновесия асимптотически устойчиво равномерно по x_0.*

Теорема 46. *Пусть в Ω $\exists V(t,x)$:*

1) $V(t,x)$ — определенно положительная функция, допускает бесконечно малый высший предел;

2) $\left.\dfrac{dV}{dt}\right|_{\dot{x}=f(t,x)}$ — определенно отрицательная функция.

Тогда $x(t) \equiv 0$ — асимптотически устойчивое положение равновесия равномерно по t_0 и x_0.

Доказательство.

По **Т.**Персидского $x(t) \equiv 0$ — устойчивое положение равновесия равномерно по t_0; по **Т.**Ляпунова $x(t) \equiv 0$ — асимптотически устойчивое положение равновесия. Поэтому по лемме Красовского $x(t) \equiv 0$ — асимптотически устойчивое положение равновесия равномерно по x_0.

Остается доказать, что $x(t) \equiv 0$ — асимптотически устойчивое положение равновесия равномерно по t_0.

Обозначим момент захода траектории с начальной позицией $\{t_0, x_0\}$ в ε-окрестность нуля через $t^* = t^*(t_0, x_0, \varepsilon)$. Уже показано, что t^* не зависит от x_0. Достаточно показать, что $t^* = t^*(t_0, \varepsilon)$ не зависит от t_0.

Из свойств положительно определенных функций $\exists\, \omega_1(\cdot)$, $\omega_2(\cdot)$, $\omega_3(\cdot) \in \Omega_h$:

$$\omega_1(\|x\|) \leqslant V(t,x) \leqslant \omega_2(\|x\|), \quad \left.\frac{dV}{dt}\right|_{\dot{x}=f(t,x)} \leqslant -\omega_3(\|x\|).$$

$V(t_0, x_0) \leqslant \omega_2(h)$, для момента попадания $\widetilde{t}$ в окрестность $B_\varepsilon(0)$:

$$V(\widetilde{t}, x(\widetilde{t}, t_0, x_0)) \geqslant \omega_1(\varepsilon), \left.\frac{dV}{dt}\right|_{\dot{x}=f(t,x)} \leqslant -\omega_3(\varepsilon),\ \forall t \in [t_0, \widetilde{t}].$$

Тогда из соотношения

$$V(t, x(t, t_0, x_0)) - V(t_0, x_0) = \int\limits_{t_0}^{t} \left.\frac{dV}{dt}\right|_{\dot{x}=f(t,x)} (\tau) d\tau$$

следует, что $t^*(t_0, \varepsilon) \leqslant \dfrac{\omega_2(h) - \omega_1(\varepsilon)}{\omega_3(\varepsilon)}$, поэтому момент захода в окрестность $B_\varepsilon(0)$ можно считать не зависящим от t_0, что завершает доказательство теоремы.

Теорема 47 (Красовский)**.** *Пусть в Ω $\exists V(x)$:*

1) $V(t,x)$ — определенно положительная функция, допускает бесконечно малый высший предел;

2) $\left.\dfrac{dV}{dt}\right|_{\dot{x}=f(t,x)}$ *— знакоотрицательная функция;*

3) $\forall \eta > 0$, *функция*

$$m_\eta(t) = \inf\left\{ -\left.\frac{dV}{dt}\right|_{\dot{x}=f(t,x)} : \|x\| \geqslant \eta, (t,x) \in \mathcal{H}_t^0 \right\}$$

такова, что $\int\limits_{t_0}^{+\infty} m_\eta(t)dt = +\infty$.

Тогда $x(t) \equiv 0$ *— асимптотически устойчивое положение равновесия равномерно по* x_0.

Доказательство.

1. Сначала докажем, что $x(t) \equiv 0$ — асимптотически устойчивое положение равновесия. Предположим противное. Тогда, поскольку по условию теоремы $V(t, x(t, t_0, x_0))$ невозрастает по t, имеем $V(t, x(t, t_0, x_0)) \xrightarrow{t\to+\infty} V_0 > 0$. При этом очевидно, что $\forall t \geqslant t_0, V(t, x(t, t_0, x_0)) \geqslant V_0$.

   Из условия (1) теоремы $\exists \omega_2(\cdot) \in \Omega_h$: $\omega_2(\|x(t, t_0, x_0)\|) \geqslant V(t, x(t, t_0, x_0))$. Очевидно, функция $\omega_2(\cdot)$ обратима и $\omega_2^{-1}(\cdot)$ строго возрастает и неотрицательна. Имеем
   $$\|x(t, t_0, x_0)\| \geqslant \omega_2^{-1}(V(t, x(t, t_0, x_0))) \geqslant \omega_2^{-1}(V_0).$$
   По условию $\int\limits_{t_0}^{+\infty} m_{\omega_2^{-1}(V_0)}(t)dt = +\infty$. Запишем
   $$V(t, x(t, t_0, x_0)) - V(t_0, x_0) = \int_{t_0}^{t} \left.\frac{dV}{dt}\right|_{\dot{x}=f(t,x)} (\tau)d\tau \leqslant -\int_{t_0}^{t} m_{\omega_2^{-1}(V_0)}(t)dt \xrightarrow{t\to+\infty} -\infty.$$
   Это противоречит положительной определенности $V(t,x)$. Асимптотическая устойчивость доказана.

2. Условие теоремы позволяет применить **Т.**Персидского, откуда $x(t) \equiv 0$ — устойчивое положение равновесия равномерно по t_0. Данное свойство вкупе с асимптотической устойчивостью нулевого решения позволяет применить лемму Красовского, из которой следует утверждение теоремы.

Теорема 48 (Марачков)**.** *Пусть в* Ω $\exists V(t,x)$*:*

1) $V(t,x)$ *— определенно положительная функция;*

2) $\left.\dfrac{dV}{dt}\right|_{\dot{x}=f(t,x)}$ *— определенно отрицательная функция;*

3) $\exists M : \|f(t,x)\| \leqslant M,\ \forall (t,x) \in \mathcal{H}_t^0$.

Тогда $x(t) \equiv 0$ — асимптотически устойчивое положение равновесия системы (9.1).

Упражнение. Дана система

$$\dot{x} = -a(t)x + K(t,x)x,$$

где $K(t,x)$ — кососимметрическая матрица. Исследуем на равномерную устойчивость и асимптотическую устойчивость нулевое положение равновесия $x(t) \equiv 0$.

Рассмотрим функцию Ляпунова $V(t,x) = \|x\|^2$. Имеем

$$\left.\frac{dV}{dt}\right|_{\dot{x}=f(x)} = \dot{x}^T x + x^T \dot{x} = (-a(t)x + K(t,x)x)^T x + x^T(-a(t)x + K(t,x)x) = -2a(t)\|x\|^2.$$

Очевидно, $V(t,x)$ — определенно положительна и допускает бесконечно малый высший предел.

1. При $a(t) \geqslant 0$, $\forall t \geqslant t_0$ применима **Т.**Персидского, т.е. нулевое решение устойчиво по Ляпунову равномерно по t_0.

2. Заметим, что

$$m_\eta(t) = \left\{ -\left.\frac{dV}{dt}\right|_{\dot{x}=f(t,x)} : \|x\| \geqslant \eta, (t,x) \in \mathcal{H}_t^0 \right\} = 2\eta^2 a(t).$$

   Поэтому расходимость интеграла $\int\limits_{t_0}^{+\infty} m_\eta(t)dt$ эквивалентна расходимости $\int\limits_{t_0}^{+\infty} a(t)dt$.

   Значит, при $a(t) \geqslant 0$, $\int\limits_{t_0}^{+\infty} a(t)dt = +\infty$, по **Т.**Красовского нулевое решение асимптотически устойчиво равномерно по x_0.

3. При $a(t) > 0$, $\forall t \geqslant t_0$ применима **Т.46**, т.е. нулевое решение асимптотически устойчиво равномерно по t_0 и x_0.

9.1 Устойчивость систем в целом

Определение 20. *Положение равновесия $x(t) \equiv 0$ называется асимптотически устойчивым в целом, если*

1) $x(t) \equiv 0$ *устойчиво по Ляпунову;*

2) $\forall x_0 \in \mathbb{R}^n, \quad x(t,t_0,x_0) \xrightarrow{t \to +\infty} 0$.

Пример 7. *Покажем, что из асимптотической устойчивости системы не следует асимптотическая устойчивость в целом. Рассматривается система*

$$\begin{cases} \dot{x} = -\dfrac{2x}{(1+x^2)^2} + 2y, \\ \dot{y} = -\dfrac{2y}{(1+x^2)^2} - \dfrac{2x}{(1+x^2)^2}, \end{cases} \tag{9.2}$$

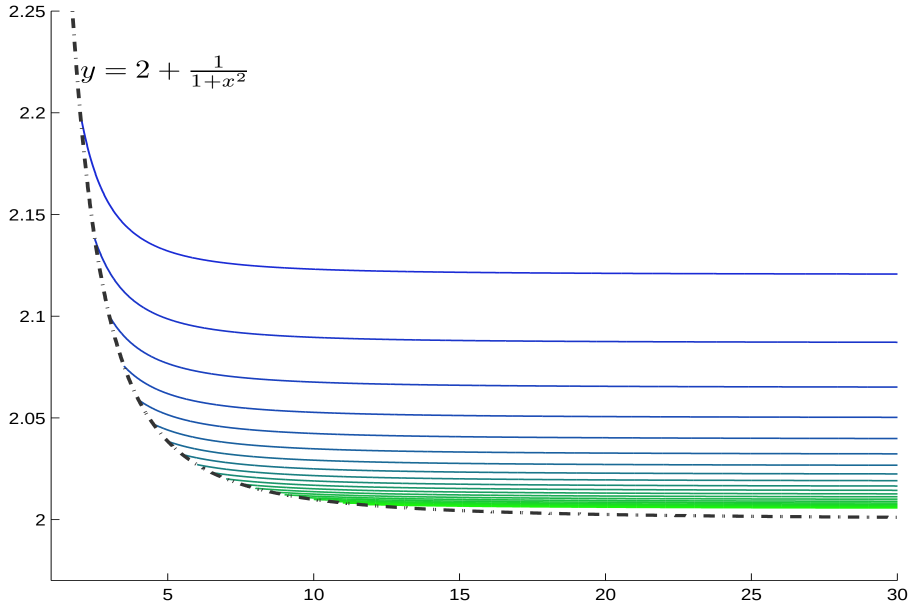

Рис. 10. Семейство траекторий системы (9.2) в инвариантной области D.

с функцией Ляпунова $V(x,y) = \dfrac{x^2}{1+x^2} + y^2$, *которая является определенно положительной и допускает бесконечно малый высший предел (в качества верхнего предела можно взять* $W(x,y) = x^2 + y^2$*). Производная в силу системы*

$$\left.\frac{dV}{dt}\right|_{\dot{x}=f(x)} = -4\left(\frac{x^2}{(1+x^2)^4} + \frac{y^2}{(1+x^2)^2}\right)$$

определенно отрицательна, поэтому по теореме Ляпунова нулевое решение системы асимптотически устойчиво.

С другой стороны, область $D = \{(x,y) : x \geqslant 2, y \geqslant 2 + \frac{1}{1+x^2}\}$, *отделенная от нуля, является инвариантной областью относительно системы* (9.2), *поскольку касательные векторы траекторий данной автономной системы на границе* ∂D *направлены внутрь области* D *(рис. 10). Значит, траектории рассматриваемой системы с начальными значениями из области* D *не сходятся к нулю при* $t \to +\infty$, *поэтому система* (9.2) *не является асимптотически устойчивой в целом.*

Определение 21. *Говорят, что функция* $V(t,x)$ *допускает бесконечно большой низший предел, если*

$$\forall M > 0, \exists R = R(M) > 0 : \forall t \geqslant t_0, \forall x : \|x\| \geqslant R \Rightarrow V(t,x) \geqslant M.$$

Эквивалентное определение Функция $V(t,x)$ допускает бесконечно большой низший предел, если $\exists \omega(\cdot) \in \Omega_h : \omega(\|x\|) \leqslant V(t,x), \forall t \geqslant t_0, \forall x \in \mathbb{R}^n$, при этом $\omega(r) \xrightarrow{r\to+\infty} +\infty$.

Теорема 49 (Барбашин-Красовский)**.** *Пусть* $\exists V(t,x)$, *заданная при* $t \geqslant t_0$, $x \in \mathbb{R}^n$:

1) $V(t,x)$ *— определенно положительная функция;*

2) $V(t,x)$ — допускает бесконечно малый высший предел при $x \to 0$;

3) $V(t,x)$ — допускает бесконечно большой низший предел при $x \to +\infty$;

4) функция $\left.\dfrac{dV}{dt}\right|_{\dot{x}=f(t,x)}$ определенно отрицательна.

Тогда $x(t) \equiv 0$ — асимптотически устойчивое в целом положение равновесия системы (9.1).

Доказательство.

Выполнены условия теоремы Ляпунова об устойчивости нулевого решения. Надо доказать, что $\forall x_0 \in \mathbb{R}^n, \quad x(t,t_0,x_0) \xrightarrow{t\to+\infty} 0$.

1. $\forall x_0 \in \mathbb{R}^n,$ рассмотрим компакт K: $x_0 \in intK$.

   Из условия (3) теоремы имеем:

   $$\exists R > 0, \forall x:\ \|x\| \geqslant R \Rightarrow V(t,x) \geqslant \sup\{V(t,x) : t \geqslant t_0, x \in K\} = M.$$

   Из условия (4) теоремы $V(t, x(t,t_0,x_0))$ убывает как функция от t, поэтому

   $$V(t,x(t,t_0,x_0)) \leqslant V(t_0,x_0) \leqslant M, \text{ откуда } x(t,t_0,x_0) \in B_R(0).$$

2. Предположим, что нет асимптотической устойчивости в целом, тогда для некоторого $x_0 \in \mathbb{R}^n$ $V(t,x(t,t_0,x_0)) \xrightarrow{t\to+\infty} V_0 > 0$. Это значит, что

   $$\exists r > 0 :\ \|x(t,t_0,x_0)\| \geqslant r, \forall t \geqslant t_0.$$

   $$\text{Обозначим } m = \inf\left\{-\left.\frac{dV}{dt}\right|_{\dot{x}=f(t,x)} :\ t \geqslant t_0, x \in B_R(0) \setminus B_r(0)\right\} > 0. \text{ Тогда}$$

   $$V(t,x(t,t_0,x_0)) - V(t_0,x_0) = \int\limits_{t_0}^{t} \left.\frac{dV}{dt}\right|_{\dot{x}=f(t,x)}(\tau)d\tau \leqslant -m(t-t_0) \xrightarrow{t\to+\infty} -\infty.$$

   Это противоречит положительной определенности $V(t,x)$. Теорема доказана.

9.2 Экспоненциальная устойчивость

Определение 22. *Положение равновесия $x(t) \equiv 0$ называется экспоненциально устойчивым, если*

$$\forall (t_0,x_0) \in \mathcal{H}_t^0,\ \exists L, \alpha > 0 :\ \|x(t,t_0,x_0)\| \leqslant Le^{-\alpha(t-t_0)},\ \forall\, t \geqslant t_0.$$

Упражнение. Показать, что если линейная стационарная система асимптотически устойчива, то положение равновесия $x(t) \equiv 0$ экспоненциально устойчиво.

По теореме об асимптотической устойчивости линейной стационарной системы $\dot{x} = Ax$, $\forall \lambda$ — собственного значения матрицы A: $\operatorname{Re}\lambda < 0$.

Поэтому все различные собственные значения

$$\lambda_j = \alpha_j + i\beta_j,\ j = \overline{1,p},\ \text{где}\,\forall j : \alpha_j < 0.$$

Тогда решение системы записывается в виде

$$x(t,t_0,x_0) = \sum_{j=1}^{p} e^{\alpha_j(t-t_0)}(\cos\beta_j(t-t_0) + i\sin\beta_j(t-t_0))P_j(t)x_0,$$

где $P_j(t)$ — матричные многочлены.

Выберем в качестве $\widetilde{\alpha} < 0$ наибольшее из чисел α_j, $j = \overline{1,p}$. Рассмотрим $\alpha = -\frac{\widetilde{\alpha}}{2} > 0$. Обозначим

$$L = \sup\left\{ e^{-\alpha(t-t_0)} \sum_{j=1}^{p} \|P_j(t)x_0\| : t \geqslant t_0,\ \|x_0\| \leqslant h \right\} < \infty.$$

Тогда

$$\forall (t_0,x_0) \in \mathcal{H}_t^0,\ \|x(t,t_0,x_0)\| \leqslant Le^{-\alpha(t-t_0)},\ \forall\, t \geqslant t_0.$$

Это означает экспоненциальную устойчивость нулевого решения линейной стационарной системы, ч.т.д.

Теорема 50. *Пусть* $\exists V(t,x)$, *заданная при* $t \geqslant t_0$, $\|x\| \leqslant h$, *т.ч.* $\exists c_1, c_2, c_3 > 0$:

1) $c_1\|x\|^2 \leqslant V(t,x) \leqslant c_2\|x\|^2$;

2) $c_3\|x\|^2 \leqslant -\left.\dfrac{dV}{dt}\right|_{\dot{x}=f(t,x)}$.

Тогда $x(t) \equiv 0$ *— экспоненциально устойчивое положение равновесия системы* (9.1).

Доказательство. Из условия теоремы имеем:

$$\|x(t,t_0,x_0)\|^2 \leqslant \frac{1}{c_1}V(t,x(t,t_0,x_0)) \leqslant \frac{1}{c_1}V(t_0,x_0),$$

$$\left.\frac{dV}{dt}\right|_{\dot{x}=f(t,x)} \leqslant -c_3\|x(t,t_0,x_0)\|^2 \leqslant -\frac{c_3}{c_2}V(t,x(t,t_0,x_0)),$$

откуда $V(t,x(t,t_0,x_0)) \leqslant V(t_0,x_0)e^{-\frac{c_3}{c_2}(t-t_0)}$. Тогда

$$\|x(t,t_0,x_0)\|^2 \leqslant \frac{1}{c_1}V(t_0,x_0)e^{-\frac{c_3}{c_2}(t-t_0)} \leqslant \frac{c_2}{c_1}\|x_0\|^2 e^{-\frac{c_3}{c_2}(t-t_0)},$$

поэтому $\|x(t,t_0,x_0)\| \leqslant \sqrt{\frac{c_2}{c_1}}\|x_0\|e^{-\frac{c_3}{2c_2}(t-t_0)}$, что означает экспоненциальную устойчивость с параметрами $L = \sqrt{\frac{c_2}{c_1}}\|x_0\|, \alpha = \frac{c_3}{2c_2}$.

Замечание Заметим, что если в условии теоремы, помимо условий 1), 2), выполнено условие

3) $\exists c_4 > 0 : \| \bigtriangledown V \| \leqslant c_4 \|x\|$,

то говорят, что $V(t,x)$ удовлетворяет условиям, характерным для квадратичных форм.

Упражнение. Покажем, что из асимптотической устойчивости, равномерной по t_0 и x_0, не следует экспоненциальная устойчивость.

Рассмотрим систему $\dot{x} = -x^3$, $x(t_0) = x_0$.

Решение имеет вид $x(t, t_0, x_0) = \dfrac{\text{sign } x_0}{\sqrt{2(t-t_0) + \frac{1}{x_0^2}}}$. Получим

$$\forall t_0, x_0, \forall \varepsilon > 0, \exists T^*(\varepsilon) > 0, \forall t \geqslant t_0 + T^* \Rightarrow \|x(t, t_0, x_0)\| < \varepsilon,$$

если выбрать $T^*(\varepsilon) = \dfrac{1}{2\varepsilon^2}$. Таким образом, имеется асимптотическая устойчивость нулевого решения равномерно по t_0 и x_0.

При этом из свойств экспоненты известно, что нельзя выбрать такие $L, \alpha > 0$, чтобы

$$\|x(t, t_0, x_0)\| \leqslant L e^{-\alpha(t-t_0)}, \ \forall t \geqslant t_0.$$

Поэтому нулевое решение рассматриваемой системы не является экспоненциально устойчивым.

10. Лекция 10

10.1 Обращение теорем Ляпунова

Теорема 51 (Персидского)**.** *Рассмотрим систему*

$$\dot{x} = f(t,x), \ f(t,0) \equiv 0, \ t \geqslant t_0; \tag{10.1}$$

$$f(t,x) \in C^{1,1}(\mathcal{H}_t^0).$$

Пусть $x(t) \equiv 0$ — устойчиво по Ляпунову. Тогда $\exists V(t,x)$ — непрерывно дифференцируемая функция на $\mathcal{H}_t^0$, удовлетворяющая в окрестности нуля условиям первой теоремы Ляпунова для неавтономных систем.

Доказательство. Рассмотрим функцию Ляпунова

$$V(t,x) = (1 + e^{-t}) \cdot \|x(t_0, t, x)\|^2, \quad (t,x) \in \mathcal{H}_t^0.$$

1. Производная в силу системы равна

$$\frac{dV}{dt} = \left\{ \frac{d}{d\tau} [(1+e^{-\tau}) \|x(t_0, \tau, x_\tau)\|^2] \right\} \Bigg|_{\tau = t},$$

где $x_\tau = x(\tau, t, x)$.

Согласно полугрупповому свойству (из единственности решения задачи Коши)

$$x(t_0, \tau, x_\tau) = x(t_0, \tau, x(\tau, t, x)) = x(t_0, t, x).$$

Поэтому
$$\frac{dV}{dt} = \|x(t_0,t,x)\|^2 \left\{ \frac{d}{d\tau}(1+e^{-\tau}) \right\} \Bigg|_{\tau=t} =$$
$$= -e^{-t}\|x(t_0,t,x)\|^2 < 0 \ \text{ при } \ x \neq 0,$$
т.е. производная $\dot{V}(t,x)$ в силу системы знакоотрицательна.

2. Покажем, что функция $V(t,x)$ — положительно определенная.

   Поскольку нулевое решение системы (10.1) устойчиво по Ляпунову,
$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 (\delta < \varepsilon < h) : \ \|x_0\| < \delta \Rightarrow \|x(t,t_0,x_0)\| < \varepsilon, \, \forall t \geqslant t_0.$$
   Выберем x_0: $0 < \varepsilon \leqslant \|x_0\| < h$. Тогда из устойчивости нулевого решения имеем
$$\|x(t_0,t,x_0)\| \geqslant \delta, \, \forall t \geqslant t_0.$$
   Отсюда $V(t,x) > \delta^2 = \eta$ при $\varepsilon \leqslant \|x_0\| < h$.

   Полагая $\varepsilon = \frac{h}{2}, \ldots, \frac{h}{n+1}, \ldots$, получим последовательность чисел $\eta_1 > \eta_2 > \ldots > \eta_n > 0$, таких что
$$V(t,x) > \eta_n \ \text{ при } \ \frac{h}{n+1} \leqslant \|x\| < \frac{h}{n}, \quad n = 1,2,\ldots$$
   Тогда можно подобрать непрерывную положительно определенную функцию $W(x)$, такую что
$$V(t,x) \geqslant W(x) > 0 \ \text{ при } \ x \neq 0,$$
   к примеру, в виде
$$W(x) = \eta_{n+1} + \frac{n(n+1)}{h}(\eta_n - \eta_{n+1}) \left(\|x\| - \frac{h}{n+1} \right)$$
   при $\dfrac{h}{n+1} \leqslant \|x\| < \dfrac{h}{n}$, $W(0) = 0$.

   Положительная определенность функции $V(t,x)$ доказана.

Наконец, по теореме о непрерывной дифференцируемости решения задачи Коши $x(t,t_0,x_0)$ по начальным данным t_0 и x_0 следует непрерывная дифференцируемость функции Ляпунова: $V(t,x) \in C^{1,1}(\mathcal{H}_t^0)$. Теорема полностью доказана.

Теорема 52 (Массера)**.** *Пусть в условиях предыдущей теоремы функция $f(t,x)$ — периодическая, либо стационарная, либо линейная по x, а решение $x(t) \equiv 0$ — асимптотически устойчивое.*

Тогда $\exists V(t,x)$ — непрерывно дифференцируемая функция на $\mathcal{H}_t^0$, удовлетворяющая в окрестности нуля условиям второй теоремы Ляпунова для неавтономных систем.

Пример (Массер)

Рассмотрим систему
$$\dot{r} = r\,\frac{\dot{g}(t,\varphi)}{g(t,\varphi)},$$

где $\varphi = \varphi_0$, $g(t,\varphi) = \dfrac{\sin^2\varphi}{\sin^2\,\varphi + (1-\sqrt{t\sin\varphi})^2} + \dfrac{1}{1+\sin^2\varphi}\cdot\dfrac{1}{1+t^2}$.

Решение системы имеет вид

$$r(t) = r_0\left(\frac{1}{1+(\sqrt{t}-\sqrt{t_0})^2} + \frac{t_0}{1+t_0}\cdot\frac{1}{1+t^2}\right),$$

где $\varphi_0 \neq \pi k$.

Заметим, что при $t \in [(\sqrt{t_0}-1)^2, (\sqrt{t_0}+1)^2]$ — на временном интервале длины $4\sqrt{t_0}$, выполнено $r(t) > \dfrac{r_0}{2} > 0$.

Как видно, нулевое положение равновесия системы асимптотически устойчиво. Предположим, что в данной задаче существует функция $V(t,r)$, удовлетворяющая условиям второй теоремы Ляпунова. Тогда производная $\left.\dfrac{dV}{dt}\right|_{\dot{x}=f(t,r)}$ определенно отрицательна, и при $r > \dfrac{r_0}{2}$, $\exists k > 0 :\ \dfrac{dV}{dt} < -k$.

При $t \geqslant (\sqrt{t_0}+1)^2$ получим

$$V(t,r(t)) - V(t_0,r_0) < -4\sqrt{t_0}k.$$

Заметим, что в условиях второй теоремы Ляпунова функция $V(t,r)$ положительно определена. С другой стороны, при $t_0 \to +\infty$ имеем $V(t,r(t)) \to -\infty$, где $t \geqslant (\sqrt{t_0}+1)^2$.

Из данного противоречия заключаем, что для искомой системы не существует функции Ляпунова, удовлетворяющей условиям второй теоремы Ляпунова для неавтономных систем. При этом нулевое решение данной системы асимптотически устойчиво.

10.2 Устойчивость систем с запаздыванием

Рассматривается система дифференциальных уравнений с запаздыванием:

$$\dot{x}_i = f_i(t, x_1(t+\theta), \ldots, x_n(t+\theta)),\ \theta \in [-h, 0],\ i = \overline{1,n}. \tag{10.2}$$

Здесь θ — параметр запаздывания, h — максимальное запаздывание. Введем при фиксированном θ норму

$$\|x(\theta)\| = \sup\{|x_i(\tau)| :\ i = \overline{1,n},\ \tau \in [-\theta, 0]\}.$$

Будем рассматривать системы (10.2) с функциями f_i в правой части, удовлетворяющие следующим свойствам:

1) f_i — кусочно непрерывны по t при $t \geqslant t_0$, т.е. $\exists\{t_k\}$: $t_k < t_{k+1}$, $t_k > t_0$, так что $\forall x :\ f_i(t,x)$ непрерывны по t на (t_k, t_{k+1}).

2) f_i — удовлетворяют условию Липшица по $x(\theta)$:

$$\exists L > 0 :\ \forall t \geqslant t_0,\ \forall i = \overline{1,n} \Rightarrow\ |f_i(t, x'(\theta)) - f_i(t, x''(\theta))| \leqslant L\|x'(\theta) - x''(\theta)\|.$$

При данных ограничениях задача Коши для системы (10.2) имеет единственное решение, продолжаемое вправо.

Естественно далее полагать $f_i(t,0) \equiv 0$, $t \geqslant t_0$.

Определение 23. *Нулевое решение системы с запаздыванием* (10.2) *устойчиво, если*
$$\forall \varepsilon > 0,\, \exists \delta > 0 (\delta < \varepsilon) : \|x_0(\theta_0)\| < \delta \Rightarrow \|x(t+\theta, t_0, x_0(\theta_0))\| < \varepsilon.$$
Если при этом
$$\forall \varepsilon > 0,\, \exists t^* \geqslant t_0 : \|x(t+\theta, t_0, x_0(\theta_0))\| < \varepsilon, \forall t \geqslant t^*,$$
то нулевое решение называется асимптотически устойчивым.

Введем функционал Ляпунова $V(t,x)$, аргументы которого — время t и функция $x(\cdot)$, определенная на $[-\theta, 0]$.

Определение 24. *Функционал Ляпунова $V(t,x)$ называется положительно определенным, если $\exists \omega_1(r) \in \Omega_h$, т.ч. в некоторой окрестности нуля выполнено неравенство*
$$V(t,x) \geqslant \omega_1(\|x(\theta)\|).$$

Определение 25. *Функционал Ляпунова $V(t,x)$ допускает бесконечно малый высший предел, если $\exists \omega_2(r) \in \Omega_h$, т.ч. в некоторой окрестности нуля выполнено неравенство*
$$V(t,x) \leqslant \omega_2(\|x(\theta)\|).$$

Определение 26. *Производной от функционала Ляпунова $V(t,x)$ в силу системы* (10.2) *будем называть предел*
$$\limsup \frac{dV}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0+0} \sup \frac{V(t+\Delta t, x(t+\Delta t+\cdot, t_0, x_0(\theta_0))) - V(t, x(t+\cdot, t_0, x_0(\theta_0)))}{\Delta t}.$$
Аргументами производной $\limsup \dfrac{dV}{dt}$ являются время t и функция $x(t+\cdot, t_0, x_0(\theta_0))$ (определенная на $[-\theta_0, 0]$).

Определение 27. *Производная $\limsup \dfrac{dV}{dt}$ называется отрицательно определенной, если $\exists \omega_3(r) \in \Omega_h$, так что в некоторой окрестности нуля*
$$\limsup \frac{dV}{dt} \leqslant -\omega_3(\|x(\theta)\|),\, \forall t \geqslant t_0.$$

Теорема 53 (Красовский)**.** *Пусть для системы с запаздыванием* (10.2) *существует функционал Ляпунова $V(t,x)$, который положительно определен и допускает бесконечно малый высший предел, а производная $\limsup \dfrac{dV}{dt}$ отрицательно определена. Тогда нулевое решение системы* (10.2) *асимптотически устойчиво.*

Доказательство.

1. Вначале покажем, что нулевое решение системы (10.2) устойчиво.

   Поскольку функционал Ляпунова $V(t,x)$ положительно определен и допускает бесконечно малый высший предел, выберем согласно определению функции $\omega_1(\cdot), \omega_2(\cdot) \in \Omega_h$. Очевидно,
$$\forall \varepsilon > 0,\, \exists \delta > 0\, (\delta < \varepsilon) : \omega_1(\varepsilon) > \omega_2(\delta).$$

Отсюда получим

$$\forall t \geqslant t_0,\ \inf\{V(t,x):\ \|x(\theta)\| = \varepsilon\} > \sup\{V(t,x):\ \|x(\theta)\| = \delta\}. \tag{10.3}$$

Теперь пусть $\|x_0(\theta_0)\| < \delta$. Поскольку $\limsup \dfrac{dV}{dt} \leqslant 0,\ V(t, x(t+\theta, t_0, x_0(\theta_0)))$ убывает как функция от t. Тогда из соотношения (10.3) имеем

$$\|x(t+\theta, t_0, x_0(\theta_0))\| < \varepsilon,\ \forall t \geqslant t_0.$$

Это по определению означает устойчивость нулевого решения.

2. Остается показать, что $\|x(t+\theta, t_0, x_0(\theta_0))\| \xrightarrow{t\to\infty} 0$.

   Рассмотрим $x_0(\theta_0):\ \|x_0(\theta_0)\| < \varepsilon$. Достаточно показать, что

$$\forall r > 0, \exists t^* \geqslant t_0:\ \|x(t+\theta, t_0, x_0(\theta_0))\| < r, \forall t \geqslant t^*.$$

   Достаточно рассматривать только $r < \varepsilon$. Тогда при $r \leqslant \|x(t+\theta, t_0, x_0(\theta_0))\| \leqslant \varepsilon$ найдется $\alpha > 0$:

$$\limsup \frac{dV}{dt} < -\alpha < 0.$$

   В таком случае траектория $x(t+\theta, t_0, x_0(\theta_0))$ может находиться в области $\{r < \|x\| < \varepsilon\}$ только до момента

$$t^* \leqslant t_0 + \frac{\omega_2(\varepsilon) - \omega_1(r)}{\alpha}.$$

   Вторая часть теоремы доказана.

Также заметим, что доказательства обеих частей теоремы нигде не опирались на t_0 и x_0, поэтому асимптотическая устойчивость является равномерной по t_0 и x_0. Теорема полностью доказана.

11. Лекция 11

11.1 Метод сравнения

Идея состоит в аппроксимации системы более простой, так чтобы новая система была устойчивой или неустойчивой одновременно с исходной системой.

$$\dot{x} = f(t,x),\ x \in \mathbb{R}^n, \tag{11.1}$$

$$\dot{x} = g(t,x), \tag{11.2}$$

$$f(t,0) = g(t,0) = 0.$$

В некоторой окрестности нуля выполнено соотношение

$$\|f(t,x) - g(t,x)\| \leqslant \alpha \|x\|^\beta,\ \beta \geqslant 1,\ t \geqslant t_0.$$

Пусть для системы (11.2) найдена функция Ляпунова $V(t,x)$, удовлетворяющая условиям:

1) $\exists c_1, c_2 > 0: \ c_1\|x\|^2 \leqslant V(t,x) \leqslant c_2\|x\|^2$;

2) $\exists c_3 > 0: \ \|\frac{\partial V}{\partial x}\| \leqslant c_3\|x\|$;

3) $\exists c_4 > 0: \ \frac{\partial V}{\partial t} + \langle \frac{\partial V}{\partial x}, g(t,x)\rangle \leqslant -c_4\|x\|^2$.

Ранее доказывалось, что при данных ограничениях нулевое решение системы (11.2) экспоненциально устойчиво. Необходимо выяснить, будет ли нулевое решение системы (11.1) экспоненциально устойчивым.

Рассмотрим производную от $V(t,x)$ в силу системы (11.1):

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \langle \frac{\partial V}{\partial x}, f(t,x)\rangle = \frac{\partial V}{\partial t} + \langle \frac{\partial V}{\partial x}, g(t,x)\rangle + \langle \frac{\partial V}{\partial x}, f(t,x) - g(t,x)\rangle \leqslant$$

$$\leqslant -c_4\|x\|^2 + c_3\|x\| \cdot \alpha\|x\|^\beta.$$

Далее имеем два случая.

1. $\beta = 1 \ \Rightarrow \ \frac{\partial V}{\partial t} + \langle \frac{\partial V}{\partial x}, f(t,x)\rangle \leqslant (\alpha c_3 - c_4)\|x\|^2$.

   Если $c_4 - \alpha c_3 > 0$, то нулевое решение системы (11.1) экспоненциально устойчиво.

2. $\beta > 1 \ \Rightarrow \ \frac{\partial V}{\partial t} + \langle \frac{\partial V}{\partial x}, f(t,x)\rangle \leqslant -c_4\|x\|^2 + \bar{o}(\|x\|^2)$.

   Здесь имеем локальную экспоненциальную устойчивость нулевого решения системы (11.1).

11.2 Устойчивость дифференциальных включений

Рассматривается дифференциальное включение

$$\dot{x} \in F(x),\ x \in \mathbb{R}^n,\ \|x\| \leqslant h,\ t \geqslant t_0. \tag{11.3}$$

Решением дифференциального включения (11.3) называется абсолютно непрерывная функция $x(t)$, почти всюду удовлетворяющая (11.3).

Пусть также выполнены условия теоремы Филиппова о существовании решения дифференциального включения (11.3): для каждого x, множество $F(x)$ — выпуклый компакт, многозначное отображение $F(x)$ полунепрерывно сверху по x.

Пусть $0 \in F(0)$, т.е. нулевое решение удовлетворяет (11.3).

Определение 28. *Решение* $x(t) \equiv 0$ *дифференциального включения* (11.3) *слабо (сильно) устойчиво по Ляпунову, если*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0: \ \forall x_0 \in B_\delta(0),\ \exists(\forall) x(t,t_0,x_0)\ \text{— решение (11.3)},$$

$$\text{выполнено } \|x(t,t_0,x_0)\| < \varepsilon,\ \forall t \geqslant t_0.$$

Определение 29. *Решение* $x(t) \equiv 0$ *дифференциального включения* (11.3) *слабо (сильно) асимптотически устойчиво, если оно слабо (сильно) устойчиво по Ляпунову и*

$$\exists \delta_0 > 0: \ \forall x_0 \in B_{\delta_0}(0),\ \exists(\forall) x(t,t_0,x_0)\ \text{— решение (11.3)},$$

$$\text{выполнено } \lim_{t\to+\infty} x(t,t_0,x_0) = 0.$$

Теорема 54. *Пусть* $\exists V(x)$ *— гладкая функция Ляпунова, удовлетворяющая следующим условиям:*

1) $V(x)$ *— определенно положительна ;*

2) $\min\limits_{v \in F(x)} \langle \triangledown V(x), v \rangle$ *— определенно отрицательна (как функция от* x*) .*

Тогда решение $x(t) \equiv 0$ *дифференциального включения* (11.3) *слабо асимптотически устойчиво.*

Если же вместо 2) *выполнено условие*

2′) $\max\limits_{v \in F(x)} \langle \triangledown V(x), v \rangle$ *— определенно отрицательна (как функция от* x*) ,*

то решение $x(t) \equiv 0$ *дифференциального включения* (11.3) *сильно асимптотически устойчиво.*

11.2.1 Проксимальный анализ

Определение 30. *Рассмотрим функцию* $f(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$*. Вектор* $\xi \in \mathbb{R}^n$ *называется проксимальным субградиентом функции* $f(x)$ *в точке* x*, если выполнено проксимально субградиентное неравенство*

$$\exists \sigma > 0, \eta > 0, \;\; \text{т.ч. } \forall y \in B_\eta(x) : \; f(y) \geqslant f(x) + \langle \xi, y - x \rangle - \sigma \|x - y\|^2.$$

Множество всех таких векторов $\partial_p f(x) = \{\xi\}$ *называется проксимальным субдифференциалом.*

Определение 31. *Рассмотрим компакт* $S \subset \mathbb{R}^n$ *и точку* $s \in \partial S$*. Проксимальным нормальным конусом множества* S *в точке* s *называется множество всех векторов* $\xi \in \mathbb{R}^n$*, таких что расстояние между множеством* S *и точкой* $s + t\xi$ *для некоторого* $t > 0$ *равно длине вектора* $t\xi$*:*

$$N_S^p(s) = \{\xi \in \mathbb{R}^n \, : \, \exists t > 0, \;\; \text{т.ч. } d(S, s + t\xi) = t\|\xi\|\}.$$

Проксимальный конус $N_S^p(s)$ может оказаться пустым множеством.

Если полагать, что функция $f(x)$ полунепрерывна снизу, то можно дать эквивалентное определение для проксимального субградиента функции $f(x)$ в точке x, используя понятие проксимального нормального конуса.

Определение 32. *Вектор* $\xi \in \mathbb{R}^n$ *называется проксимальным субградиентом функции* $f(x)$ *в точке* x*, если вектор* $(\xi, -1)$ *лежит в проксимальном нормальном конусе множества* $\operatorname{epi} f(\cdot)$ *в точке* $(x, f(x))$*:*

$$(\xi, -1) \in N^p_{\operatorname{epi} f(\cdot)}(x).$$

Определение 33. *Производная по Гато в точке* x *функции* $f(x)$ *определяется как линейный функционал* L*, т.ч. для любого направления* Δx

$$f(x + \Delta x) - f(x) = L\Delta x + \bar{o}(\|\Delta x\|).$$

Пример 8. *Рассмотрим функцию $f(x) = -\sqrt{|x|}$, $x \in \mathbb{R}$ в точке $x = 0$. Если в нуле существует проксимальный субградиент $\xi \in \mathbb{R}$, то $\forall x \in B_\eta(0)$:*

$$-\sqrt{|x|} \geqslant x \cdot (\xi - \sigma) \Rightarrow \sqrt{|x|} \leqslant x \cdot (\sigma - \xi).$$

Поскольку $\sigma - \xi > 0$, при достаточно малых $x > 0$ данное неравенство невозможно. Значит, проксимальный субдифференциал $\partial_p f(0)$ является пустым.

Из определения вытекают следующие свойства проксимального субдифференциала:

1) $\partial_p f(x)$ является выпуклым множеством;

2) Если функция f выпукла, то проксимальный субградиент ξ совпадает с субградиентом, т.е.
$$f(y) \geqslant f(x) + \langle \xi, y - x \rangle.$$

3) Если функция $f(\cdot)$ дифференцируема по Гато в точке x, то
$$\partial_p f(x) \subseteq \{f'_G(x)\}.$$

4) Если функция $f(\cdot) \in C^2$, то
$$\partial_p f(x) = \{f'(x)\}.$$

5) $\forall f(\cdot), g(\cdot), c > 0$ выполнено
$$\partial_p(f(x) + g(x)) \subseteq \partial_p f(x) + \partial_p g(x),\ \partial_p(cf(x)) = c\partial_p f(x).$$

Определение 34. *Пара (φ, F) называется слабо убывающей, если $\forall x_0$, $\exists x(t, t_0, x_0)$ — решение дифференциального включения* (11.3), *т.ч.*

$$\varphi(x(t, t_0, x_0)) \leqslant \varphi(x_0),\ \forall t \geqslant t_0.$$

Для доказательства последующей теоремы понадобится следующая лемма.

Лемма 4. *Пара (φ, F) является слабо убывающей $\Leftrightarrow$ $\forall x$:*

$$\max_{p \in \partial_p \varphi(x)} \min_{v \in F(x)} \langle p, v \rangle \leqslant 0.$$

Теорема 55. *Рассмотрим дифференциальное включение* (11.3). *Пусть $\exists V(x)$ — полунепрерывная снизу функция, удовлетворяющая условиям:*

1) $V(x)$ — определенно положительна;

2) $\max\limits_{p \in \partial_p V(x)} \min\limits_{v \in F(x)} \langle p, v \rangle$ — определенно отрицательная функция.

Тогда решение $x(t) \equiv 0$ слабо асимптотически устойчиво.

Доказательство.

1. Вначале покажем, что нулевое решение дифференциального включения (11.3) слабо устойчиво.

   По условию $\exists W(x)$ — положительно определенная функция, т.ч.

$$\max_{p\in\partial_p V(x)} \min_{v\in F(x)} \langle p, v\rangle \leqslant -W(x).$$

   Рассмотрим $\widetilde{V}(x,y) = V(x) + y$, $\widetilde{F}(x,y) = F(x)\times W(x)$. Получим новое дифференциальное включение

$$(\dot{x},\dot{y}) \in \widetilde{F}(x,y). \tag{11.4}$$

   Покажем, что пара $(\widetilde{V},\widetilde{F})$ — слабо убывающая.

$$\forall(\xi,r)\in\partial_p\widetilde{V}(x,y) \Rightarrow \xi\in\partial_p V(x),\ r=1.$$

$$\langle(\xi,r),(v_1,v_2)\rangle = \langle\xi,v_1\rangle + W(x).$$

   Из условия теоремы тогда получаем: $\exists v_1\in F(x) : \langle(\xi,r),(v_1,v_2)\rangle \leqslant 0$. Тогда по **Лемме** 4 пара $(\widetilde{V},\widetilde{F})$ — слабо убывающая.

   Тогда из определения слабо убывающей пары $\forall x_0$, при $y_0 = 0, t\geqslant t_0$,

$$\exists(x(t,t_0,x_0),y(t,t_0,y_0)) \text{ — решение}(11.4), \text{т.ч. } \widetilde{V}(x(t),y(t)) \leqslant \widetilde{V}(x_0,0) \Leftrightarrow$$

$$V(x(t,t_0,x_0)) + \int_{t_0}^{t} W(x(\tau,t_0,x_0))d\tau \leqslant V(x_0). \tag{11.5}$$

   Из неравенства (11.5), поскольку функции $V(x)$ и $W(x)$ неотрицательны, следует, что для всех $t\geqslant t_0$ функция $V(x(t,t_0,x_0))$ ограничена, откуда следует ограниченность $\|x(t,t_0,x_0)\|$, а также слабая устойчивость нулевого решения (11.3), поскольку из данного неравенства имеем:

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists\delta>0, \text{ т.ч. } \forall x_0,\ \|x_0\|<\delta \Rightarrow \exists x(t,t_0,x_0) :\ \|x(t,t_0,x_0)\|<\varepsilon.$$

2. Осталось показать, что для решения (11.3) выполнено $\|x(t,t_0,x_0)\| \xrightarrow{t\to+\infty} 0$.

   Было показано, что существуют ограниченные решения $x(t,t_0,x_0)$ дифференциального включения (11.3), поэтому правая часть $F(x)$ почти везде ограничена (т.к. отображение $F(x)$ полунепрерывно сверху), а следовательно, почти везде ограничена производная $\dot{x}(t,t_0,x_0)$ и функция $x(t,t_0,x_0)$ удовлетворяет условию Липшица с некоторой константой $L>0$.

   Доказываем от противного. Тогда $\exists\varepsilon>0, \{t_i\}\to+\infty : \|x(t_i,t_0,x_0)\|\leqslant\varepsilon$. Выберем последовательность $\{t_i\}$ так, чтобы $t_{i+1} > t_i + \dfrac{\varepsilon}{L}$.

   Поскольку функция $W(x)$ определенно положительна, то

$$\exists\eta>0 :\ \forall x, \|x\|\geqslant\frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow W(x)\geqslant\eta.$$

   Тогда

$$\forall t,\ |t-t_i|\geqslant\frac{\varepsilon}{2L} :\ \|x(t,t_0,x_0)-x(t_i,t_0,x_0)\|\leqslant\frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow \|x(t,t_0,x_0)\|\geqslant\frac{\varepsilon}{2}.$$

Имеем
$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} W(x(\tau,t_0,x_0))d\tau \geqslant \eta \cdot \frac{\varepsilon}{L}.$$
Тогда интеграл $\int_{t_0}^{t} W(\tau,t_0,x_0)d\tau$ при $t \to +\infty$ расходится, что противоречит неравенству (11.5).

Теорема полностью доказана.

12. Лекция 12

12.1 Устойчивость взаимосвязанных систем. Векторные функции Ляпунова.

1. Линейные связи

Рассматривается m систем ОДУ:
$$\dot{x}_i = f_i(t,x_i) + \sum_{j=1}^{m} b_{ij}x_j, \quad i = \overline{1,m},\ x_i \in \mathbb{R}^{n_i}, \tag{12.1}$$
где $b_{ij} \in \mathbb{R}^{n_i \times n_j}$ — матрицы, $b_{ii} = 0$, $f_i(t,0) \equiv 0$ (т.е. исследуются нулевые положения равновесия систем).

Пусть найдутся функции $V_i(t,x_i)$, такие что
$$c_{i1}\|x_i\|^2 \leqslant V_i(t,x_i) \leqslant c_{i2}\|x_i\|^2,$$
$$\left.\frac{dV_i}{dt}\right|_{\dot{x}_i=f_i(t,x_i)} \leqslant -c_{i3}\|x_i\|^2,$$
$$\|\frac{\partial V_i}{\partial x_i}\| \leqslant c_{i4}\|x_i\|$$
для некоторых $c_{i1},c_{i2},c_{i3},c_{i4} > 0$, $i = \overline{1,m}$. Ранее отмечалось, что в таком случае говорят, что функции $V_i(t,x_i)$ удовлетворяют условиям, характерным для квадратичных форм. Было доказано, что при данном условии нулевое положение равновесия каждой из подсистем $\dot{x}_i = f_i(t,x_i)$ экспоненциально устойчиво.

Лемма 5. *Пусть у матрицы A внедиагональные элементы неотрицательны. Рассмотрим функции $x(t), y(t)$, такие что $\dot{x} \leqslant Ax$, $\dot{y} = Ay$, $t \geqslant t_0$.*

Тогда $\forall x_0,\ x(t,t_0,x_0) \leqslant y(t,t_0,x_0)$.

Доказательство. Для каждого решения $x(t,t_0,x_0)$ найдется $f(t) \leqslant 0$, т.ч.
$$x(t,t_0,x_0) = e^{A(t-t_0)}x_0 + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-\tau)}f(\tau)d\tau,$$
при этом $y(t,t_0,x_0) = e^{A(t-t_0)}x_0$.

Докажем, что $\forall t \geqslant 0$, матрица e^{At} имеет только неотрицательные элементы (тогда из выражений для $x(t,t_0,x_0)$ и $y(t,t_0,x_0)$ будет следовать утверждение леммы).

1. Вначале рассмотрим случай $a_{ij} > 0$, $\forall i \neq j$. Тогда матрица
$$e^{At} = e^{(\frac{At}{N})N} = \left(E + \frac{At}{N} + \frac{1}{2!}\left(\frac{At}{N}\right)^2 + \ldots\right)^N$$
неотрицательная, поскольку неотрицательна при достаточно больших N матрица $(E + \frac{At}{N} + \frac{1}{2!}(\frac{At}{N})^2 + \ldots)$.

2. Общий случай, когда могут иметься элементы матрицы $a_{ij} = 0$, сводится к первому случаю, если сделать предельный переход по матрице A (поскольку при переходе к пределу сохраняется неотрицательность всех элементов матрицы).

Лемма доказана.

При доказательстве последующей теоремы применяется неравенство:
$$\forall a > 0, b > 0,\, x \in \mathbb{R}: \quad -ax^2 + bx \leqslant -\frac{a}{2}x^2 + \frac{b^2}{2a}.$$

Теорема 56. *Пусть для каждой из подсистем $\dot{x}_i = f_i(t, x_i)$ найдется функция $V_i(t, x_i)$, удовлетворяющая условиям, характерным для квадратичных форм. Рассмотрим систему $\dot{r} = Ar$, $r \in \mathbb{R}^m$, где элементы матрицы A имеют следующий вид:*
$$a_{ij} = \begin{cases} -\frac{c_{i3}}{2c_{i2}} & , \text{при } i = j, \\ \frac{c_{i4}^2}{2c_{i3}c_{j1}} \sum\limits_{j=1}^{m} \|b_{ij}\|^2 & , \text{при } i \neq j. \end{cases}$$
Пусть $r(t) \equiv 0$ — асимптотически устойчивое положение равновесия. Тогда $x(t) \equiv 0$ — асимптотически устойчивое положение равновесия в каждой из систем (12.1).

Доказательство.
$$\left.\frac{dV_i}{dt}\right|_{\dot{x}_i = f_i(t,x_i)} = \frac{\partial V_i}{\partial t} + \langle \frac{\partial V_i}{\partial x_i}, f_i(t, x_i) + \sum_{j \neq i} b_{ij}x_j \rangle \leqslant$$
$$\leqslant -c_{i3}\|x_i\|^2 + \|\sum_{j\neq i} b_{ij}x_j\| \cdot c_{i4}\|x_i\| \leqslant -\frac{c_{i3}}{2}\|x_i\|^2 + \frac{c_{i4}^2\|\sum\limits_{j\neq i} b_{ij}x_j\|^2}{2c_{i3}} \leqslant$$
$$\leqslant -\frac{c_{i3}}{2c_{i2}}V_i(t, x_i) + \frac{c_{i4}^2 \sum\limits_{j\neq i}\|b_{ij}\|^2}{2c_{i3}} \cdot \sum_{j\neq i} \frac{V_j(t, x_j)}{c_{j1}}.$$

Отсюда получим
$$\left.\frac{dV}{dt}\right|_{\dot{x} = f(t,x)} \leqslant AV,$$
где V — вектор из функций V_i, $i = \overline{1, m}$ (векторная функция Ляпунова).

Тогда по предыдущей лемме, исходя из теоремы Ляпунова об асимптотической устойчивости, получаем асимптотическую устойчивость нулевого решения для каждой из систем (12.1). Теорема доказана.

Пример 9. *Рассматриваются две взаимосвязанные системы*

$$\begin{cases} \dot{x} &= X(x) + b_{12}y, \\ \dot{y} &= b_{21}x + Y(y), \end{cases} \tag{12.2}$$

где $X(0) = 0, Y(0) = 0$ *и найдены функции* $V_1(t,x), V_2(t,y)$, *удовлетворяющие условиям, характерным для квадратичных форм. В терминах доказанной теоремы строим матрицу*

$$A = \begin{pmatrix} -\dfrac{c_{13}}{2c_{12}} & \dfrac{c_{14}^2}{2c_{13}c_{21}} \cdot \|b_{12}\|^2 \\ \dfrac{c_{24}^2}{2c_{23}c_{11}} \cdot \|b_{21}\|^2 & -\dfrac{c_{23}}{2c_{22}} \end{pmatrix}.$$

По ***Т.56****, применяя критерий Рауса-Гурвица, нулевое решение каждой из систем асимптотически устойчиво при*

$$\frac{c_{13}c_{23}}{c_{14}c_{24}} \geqslant \left(\frac{c_{12}c_{22}}{c_{21}c_{11}}\right)^{\frac{1}{2}} \|b_{21}\| \cdot \|b_{12}\|.$$

2. Нелинейные связи

Рассматриваются m систем ОДУ

$$\dot{x}_i = A_i x_i + f_i(t, x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_m), \quad x_i \in \mathbb{R}^{n_i}, \tag{12.3}$$

где $\|f_i(t, x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_m)\| \leqslant \sum\limits_{j \neq i} l_{ij}\|x_j\|$.

Пусть системы $\dot{x}_i = A_i x_i$ асимптотически устойчивы. Тогда, как было ранее доказано, $\forall C_i$ — определенно положительной матрицы, найдется матрица $B_i > 0$, т.ч.

$$A_i B_i + B_i A_i^T = -C_i.$$

Тогда для функций $V_i(x_i) = x_i^T B_i x_i$ найдутся числа $\lambda_{i1}, \lambda_{i2} > 0$, т.ч.

$$\lambda_{i1}\|x_i\|^2 \leqslant V_i(x_i) \leqslant \lambda_{i2}\|x_i\|^2.$$

Имеем $\bigtriangledown V_i(x_i) = 2B_i x_i \Rightarrow \| \bigtriangledown V_i(x_i)\| \leqslant 2\lambda_{i2}\|x_i\|$,

$$\left.\frac{dV_i}{dt}\right|_{\dot{x}_i = A_i x_i} = -x_i^T C_i x_i \Rightarrow \left.\frac{dV_i}{dt}\right|_{\dot{x}_i = A_i x_i} \leqslant -\mu_i\|x_i\|^2$$

для некоторых $\mu_i > 0$.

Теорема 57. *Пусть каждая из подсистем* $\dot{x}_i = A_i x_i$ *асимптотически устойчива. Рассмотрим систему* $\dot{r} = Ar$, $r \in \mathbb{R}^m$, *где элементы матрицы* A *имеют следующий вид:*

$$a_{ij} = \begin{cases} -\dfrac{\mu_i}{2\lambda_{i2}} & , \text{при } i = j, \\ \dfrac{2\lambda_{i2}^2}{\mu_i \lambda_{j1}} \sum\limits_{k \neq i} l_{ik}^2 & , \text{при } i \neq j. \end{cases}$$

Пусть $r(t) \equiv 0$ *— асимптотически устойчивое положение равновесия. Тогда* $x(t) \equiv 0$ *— асимптотически устойчивое положение равновесия в каждой из систем* (12.3).

Доказательство.

$$\left.\frac{dV_i}{dt}\right|_{\dot{x}_i=A_ix_i+f_i} \leqslant -\mu_i\|x_i\|^2 + \langle\frac{\partial V_i}{\partial x_i}, f_i\rangle \leqslant -\mu_i\|x_i\|^2 + 2\lambda_{i2}\|x_i\|\cdot\sum_{k\neq i} l_{ik}\|x_k\| \leqslant$$

$$\leqslant -\frac{\mu_i}{2}\|x_i\|^2 + \frac{2\lambda_{i2}^2\left(\sum\limits_{k\neq i} l_{ik}\|x_k\|\right)^2}{\mu_i} \leqslant -\frac{\mu_i}{2\lambda_{i2}}V_i(x_i) + \frac{2\lambda_{i2}^2}{\mu_i}\sum_{k\neq i} l_{ik}^2\cdot\sum_{j\neq i}\frac{V_j(x_j)}{\lambda_{j1}}.$$

Отсюда получим

$$\left.\frac{dV}{dt}\right|_{\dot{x}=Ax+f} \leqslant AV,$$

где V — вектор из функций $V_i(x_i) = x_i^TB_ix_i$, $i=\overline{1,m}$ (векторная функция Ляпунова).

Как и в **T.56**, по предыдущей лемме, исходя из теоремы Ляпунова об асимптотической устойчивости, получаем асимптотическую устойчивость нулевого решения для каждой из систем (12.3). Теорема доказана.

12.2 Неограниченная продолжаемость решений

Вновь обратимся к дифференциальным системам с непрерывной правой частью и свойством единственности:

$$\dot{x} = f(t,x), \quad t\geqslant t_0,\, x\in\mathbb{R}^n, \tag{12.4}$$

где $f(t,x)\in C^{(0,1)}([t_0,+\infty)\times\mathbb{R}^n)$.

При данном условии выполнена теорема существования и единственности решения задачи Коши, но она локальная. Поэтому возможны следующие варианты:

1) Решение $x(t,t_0,x_0)$ имеет конечное время продолжения: $t\in[t_0,T)$, $T<\infty$.

2) Решение $x(t,t_0,x_0)$ неограниченно продолжаемо вправо.

Упражнение. Покажем, что в случае 1) имеет место $\|x(t,t_0,x_0)\|\to+\infty$ при $t\to T-0$.

Для этого предварительно отметим, что для рассматриваемых систем (12.4) имеет место интегральная непрерывность решений: если $x(t)$ есть решение системы (12.4), то

$\forall\varepsilon>0$ и $[\alpha,\beta]\subset(a,b)$, $\exists\delta>0$, т.ч. решение $y(t)$ с начальным условием $y(\tau)=y_0$,

где $\tau\in[\alpha,\beta]$ и $\|y(\tau)-x(\tau)\|<\delta$, будет иметь смысл при $t\in[\alpha,\beta]$, причем $\|y(t)-x(t)\|<\varepsilon$.

Пусть $\|x(t)\|\nrightarrow\infty$ при $t\to T-0$. Тогда найдется последовательность $t_k\to T-0$, т.ч. $x(t_k)\to y$ при $k\to\infty$. Рассмотрим решение $y(t)=y(t,T,y)$, определенное по теореме существования и единственности на некотором интервале $(T-\Delta t, T+\Delta t)$. Выбрав $t_k > T-\dfrac{\Delta t}{4}$, из единственности решения следует, что

$$x(t,t_k,x(t_k))\equiv x(t,t_0,x_0),$$

$$y(t, t_k, y(t_k)) \equiv y(t, T, y).$$

Поскольку при $t_k \to T - 0$, $x(t_k)$ можно выбрать сколь угодно близко к y, точки $x(t_k)$ и $y(t_k)$ можно выбрать сколь угодно близкими между собой. Тогда на основании свойства интегральной непрерывности решение $x(t, t_0, x_0)$ определено, например, на $(t_k, t_k + \dfrac{\Delta t}{2}) \supset [T, T + \dfrac{\Delta t}{4}]$, что противоречит максимальности промежутка $[t_0, T)$ существования решения $x(t)$ при $t \geqslant t_0$. Данное противоречие означает, что $\|x(t)\| \to \infty$ при $t \to T - 0$.

Рассмотрим функцию $V(t, x) \leqslant 0$, $\forall (t, x) \in \{t \geqslant t_0, \|x\| \geqslant \rho\}$, и равномерно по t, $V(t, x) \rightrightarrows +\infty$ при $\|x\| \to \infty$.

Теорема 58. *Пусть* $\exists V(t, x)$*:*

1) $\left.\dfrac{dV}{dt}\right|_{\dot{x}=f(t,x)} \leqslant G(t, V)$*;*

2) *Неравенство* $\dot{v} \leqslant G(t, v)$ *не имеет положительных решений с конечным временем продолжения.*

Тогда $\forall x_0$*, решение* $x(t, t_0, x_0)$ *неограниченно продолжаемо вправо.*

Доказательство.

Допустим, найдется решение $x(t, t_0, x_0)$, определенное на конечном интервале времени $[t_0, T)$. Согласно выполненному упражнению, $\|x(t, t_0, x_0)\| \xrightarrow{t \to T-0} +\infty$. Тогда

$$\exists t^* > t_0,\ t^* < T :\ \|x(t, t_0, x_0)\| \geqslant \rho,\ \forall t \in [t^*, T),$$

отсюда $V(t, x(t, t_0, x_0)) > 0$ при $t \in [t^*, T)$.

Тогда найдется решение $v^*(t) = V(t, x(t, t_0, x_0))$, удовлетворяющее неравенству $\dot{v} \leqslant G(t, v)$, при этом положительное и имееющее конечное время продолжения, что противоречит условию. Теорема доказана.

Пример 10. *Рассмотрим дифференциальное неравенство* $\dot{v} \leqslant L(t)X(v)$*, где* $L(t) \geqslant 0$*,* $X(v) > 0$ *— непрерывные функции. Пусть* $\int\limits_{v_0}^{+\infty} \frac{dv}{X(v)} = +\infty$ *(для некоторого* v_0*).*

Тогда решение $v(t)$ *не имеет положительных решений с конечным временем продолжения.*

Доказательство.

Доказываем от противного: пусть найдется решение $v(t) = v(t, t_0, v_0) > 0$ с конечным временем продолжения $[t_0, T)$. Тогда $v(t, t_0, v_0) \xrightarrow{t \to T-0} +\infty$. Имеем

$$\int\limits_{v_0}^{v(t)} \frac{dv}{X(v)} \leqslant \int\limits_{t_0}^{t} L(t)dt.$$

При $t \to T - 0$ левая часть неравенства ограничена (т.к. $L(t)$ непрерывна), а правая часть стремится к $+\infty$ (т.к. $v(t) \xrightarrow{t \to T-0} +\infty$). Полученное противоречие завершает доказательство утверждения.

Рассмотрим дифференциальную систему

$$\dot{x} = f(t, x),$$

где $\|f(t,x)\| \leqslant k(t)\|x\|$, где $k(t)$ — непрерывная функция. Это ограничение носит название условие подлинейного роста.

Выберем $V(x) = \|x\|^2$, тогда

$$\left.\frac{dV}{dt}\right|_{\dot{x}=f(t,x)} \leqslant 2k(t) \cdot V(x).$$

Выбрав $G(t,v) = 2k(t)v$, получим условие 1) в **Т.58**.

Поскольку выполнено условие $\int\limits_{v_0}^{+\infty} \frac{dv}{v} = +\infty$, то из предыдущего примера и **Т.58** можно заключить, что решение $x(t, t_0, x_0)$ неограниченно продолжаемо вправо.

13. Лекция 13

13.1 Устойчивость дискретных процессов

Рассматривается дискретная динамическая система

$$x(k+1) = f(k, x(k)), \quad k \geqslant k_0, f(k,0) \equiv 0. \tag{13.1}$$

Определение 35. *Положение равновесия* $x(k) \equiv 0$ *системы* (13.1) *называется устойчивым, если*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \delta_\varepsilon > 0 \,:\, \forall x_0, \|x_0\| < \delta \,\Rightarrow\, \|x(k, k_0, x_0)\| < \varepsilon.$$

Определение 36. *Положение равновесия* $x(k) \equiv 0$ *системы* (13.1) *называется асимптотически устойчивым, если оно устойчиво и*

$$\exists \delta_2 > 0 \,:\, \forall x_0, \|x_0\| < \delta_2 \,\Rightarrow\, \exists \lim_{k\to\infty} \|x(k, k_0, x_0)\| = 0.$$

1. Линейный стационарный случай

Здесь рассматриваются автономные системы

$$x(k+1) = Px(k), \quad x(k) \in \mathbb{R}^n, P \in \mathbb{R}^{n\times n}. \tag{13.2}$$

В курсе динамических систем была доказана следующая теорема.

Теорема 59. *Если все собственные числа матрицы P: $|\lambda| < 1$, то $x(k) \equiv 0$ — асимптотически устойчивое положение равновесия системы* (13.2).

Рассмотрим квадратичный функционал $V(k,x) = x^T R x$, $R = R^T > 0$. Тогда

$$V(k+1, x(k+1)) - V(k, x(k)) = x^T(k) P^T R P x(k) - x^T(k) R x(k) = -x^T(k) C x(k).$$

Выберем такую матрицу R, для которой $C = C^T > 0$. Имеем

$$P^T RP - R = -C. \tag{13.3}$$

Сводим к задаче об устойчивости системы ОДУ. Рассмотрим систему

$$\dot{x} = Ax, \quad A = (P + E) \cdot (P - E)^{-1}.$$

Для данной системы подберем функцию Ляпунова $\tilde{V}(x) = x^T Bx$, $B = (P^T - E)R(P - E)$. В таком случае получим

$$A^T B + BA = 2(P^T RP - R) = -2C. \tag{13.4}$$

Если λ — собственное значение P, μ — собственное значение A, то $\mu = \dfrac{\lambda + 1}{\lambda - 1}$. Очевидно, $|\lambda| < 1 \Leftrightarrow \operatorname{Re} \mu < 0$.

Таким образом, нахождение матрицы R сводится к поиску функции Ляпунова $\tilde{V}(x)$, связанного с уравнением Ляпунова (13.4). В разделе, связанном со вторым методом Ляпунова для линейных систем, было доказано, что для заданной матрицы $C > 0$ матрица B из (13.4) определяется однозначно, если

$$\forall \mu_i, \mu_k \text{ — собственных значений } A \Rightarrow \mu_i + \mu_k \neq 0.$$

Учитывая связь между собственными значениями матриц P и A, данное условие для дискретных систем переписывается следующим образом.

Утверждение 9. *Матричное уравнение Ляпунова* (13.3) *для дискретных систем разрешимо, если $\forall \lambda_i, \lambda_j$ — собственных значений P: $\lambda_i \lambda_j \neq 1$.*

Очевидно, данное утверждение позволяет говорить о разрешимости уравнения Ляпунова в случае $|\lambda_i| < 1$, $\forall \lambda_i$ — собственного значения P.

2. Общий нелинейный случай

Рассматривается функция Ляпунова $V(k, x) \geqslant 0$, на множестве $M_V(k) = \{x : V(k, x) \leqslant c\}$.

Пусть Ω — класс функций $\omega(\cdot)$, определенных на $[0; +\infty)$, монотонно возрастающих, $\omega(0) = 0$.

Теорема 60. *Пусть $\exists V(k, x) \geqslant 0$:*

1) *$\exists \omega_1(\cdot) \in \Omega$: $\omega_1(\|x\|) \leqslant V(k, x)$, $\forall k \geqslant k_0$, $\forall x \in M_V(k)$;*

2) *$V(k + 1, f(k, x)) \leqslant V(k, x)$, $\forall k \geqslant k_0$, $\forall x \in M_V(k)$;*

3) *$\exists \omega_2(\cdot) \in \Omega$: $V(k_0, x) \leqslant \omega_2(\|x\|)$, $\forall x \in M_V(k)$.*

Тогда положение равновесия $x(k) \equiv 0$ устойчиво.

Доказательство.

$\forall \varepsilon > 0$ можно подобрать $\delta = \delta_\varepsilon > 0$, т.ч. $B_\delta(0) \subseteq M_V(k_0)$, $\omega_2(\delta) \leqslant \omega_1(\varepsilon)$.

Из условия теоремы $\forall k \geqslant k_0 :\ V(k, x(k, k_0, x_0)) \leqslant V(k_0, x_0)$. Тогда для $x_0 :\ \|x_0\| \leqslant \delta$ имеем

$$\|x(k, k_0, x_0)\| \leqslant \omega_1^{-1}(V(k, x(k, k_0, x_0))) \leqslant \omega_1^{-1}(V(k_0, x_0)) \leqslant$$
$$\leqslant \omega_1^{-1}(\omega_2(\|x_0\|)) \leqslant \varepsilon, \ \forall k \geqslant k_0.$$

Теорема доказана.

Теорема 61. *Пусть в условиях предыдущей теоремы также выполнено*

4) $\exists \omega_3(\cdot) \in \Omega$*:* $V(k+1, f(k,x)) \leqslant V(k,x) - \omega_3(\|x\|)$, $\forall x \in M_V(k)$.

Тогда положение равновесия $x(k) \equiv 0$ *асимптотически устойчиво.*

Доказательство.
По предыдущей теореме нулевое решение системы устойчиво.

$$\forall x_0,\ V(k+1, f(k, x(k,k_0,x_0))) \leqslant V(k, x(k,k_0,x_0)) - \omega_3(\|x(k,k_0,x_0)\|)$$

$$\Rightarrow \sum_{k=k_0}^{s} \omega_3(\|x(k,k_0,x_0)\|) \leqslant V(k_0,x_0) - V(s+1, f(s, x(s,k_0,x_0))) \leqslant V(k_0,x_0).$$

Тогда $\exists \lim\limits_{k\to\infty} \omega_3(\|x(k,k_0,x_0)\|) = 0$, откуда, очевидно, $\exists \lim\limits_{k\to\infty} \|x(k,k_0,x_0)\| = 0$.
Теорема доказана.

13.2 Равномерная и экспоненциальная устойчивость для дискретных процессов

Определение 37. $x(k) \equiv 0$ *— устойчивое положение равновесия системы* (13.1) *равномерно по* k_0*, если*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \forall k_0 \geqslant 0,\ \exists \delta = \delta_\varepsilon > 0 \ :\ \forall x_0, \|x_0\| < \delta \ \Rightarrow\ \|x(k,k_0,x_0)\| < \varepsilon.$$

Определение 38. $x(k,k_0,x_0) \xrightarrow{k\to\infty} 0$ *равномерно по* x_0 $[x_0 \text{ и } k_0]$*, если*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists k^* = k^*(\varepsilon, k_0)\, [k^* = k^*(\varepsilon)] \ :\ \forall k \geqslant k^* + k_0 \Rightarrow\ \|x(k,k_0,x_0)\| < \varepsilon,$$

k^* *— время переходного процесса.*

Определение 39. $x(k) \equiv 0$ *— асимптотически устойчивое положение равновесия системы* (13.1) *равномерно по* x_0 $[x_0 \text{ и } k_0]$*, если*

1) $x(k) \equiv 0$ *— устойчивое решение равномерно по* k_0*;*

2) $\forall x_0 \in B_\delta(0)$, $x(k,k_0,x_0) \xrightarrow{k\to\infty} 0$ *равномерно по* x_0 $[x_0 \text{ и } k_0]$.

Определение 40. $V(k,x)$ *допускает сильный бесконечно малый высший предел в нуле, если*

$$\exists \omega(\cdot) \in \Omega : V(k,x) \leqslant \omega(\|x\|), \forall x \in M_V(k), \forall k \geqslant k_0.$$

Определение 41. $V(k,x)$ *допускает слабый бесконечно малый высший предел в нуле, если*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0, \eta > 0 :\ \forall x, \|x\| < \delta,\ \forall k \geqslant \eta \Rightarrow\ V(k,x) < \varepsilon.$$

Теорема 62. *Пусть* $\exists V(k,x) \geqslant 0$, $\omega_1(\cdot), \omega_3(\cdot) \in \Omega$*, т.ч.*

1) $\omega_1(\|x\|) \leqslant V(k,x)$, $\forall k \geqslant k_0, x \in M_V(k)$*;*

2) $V(k+1, f(k,x)) \leqslant V(k,x) - \gamma(k) \cdot \omega_3(\|x\|)$, $\forall k \geqslant 0, x \in M_V(k)$.

3) $\forall k_0 \geqslant 0,\ \sum\limits_{s=k_0}^{\infty} \gamma(s) = +\infty,\ \gamma(k) \geqslant 0.$

Выполнены следующие утверждения:

а) *Пусть $V(k,x)$ допускает слабый бесконечно малый высший предел в нуле, и $\delta_2 > 0$, т.ч. в $B_{\delta_2}(0)$ все решения $x(k,k_0,x_0)$ сходятся к нулю равномерно по x_0. Тогда решение $x(k) \equiv 0$ — асимптотически устойчиво равномерно по x_0.*

б) *Если $V(k,x)$ допускает сильный бесконечно малый высший предел в нуле, то нулевое решение системы асимптотически устойчиво равномерно по x_0.*

в) *Если $V(k,x)$ допускает сильный бесконечно малый высший предел в нуле и ряд $\sum\limits_{s=k_0}^{\infty} \gamma(s)$ расходится равномерно по x_0, то нулевое положение равновесия асимптотически устойчиво равномерно по k_0 и x_0.*

Определение 42. $x(k) \equiv 0$ — *экспоненциально устойчивое положение равновесия, если $\exists N, 0 < \alpha < 1$, т.ч.*

$$\forall x_0 \in B_\delta(0),\ \forall k \geqslant k_0 :\ \|x(k,k_0,x_0)\| \leqslant N \cdot \|x_0\| \alpha^{k-k_0}.$$

Теорема 63. *Пусть $\exists V(k,x) \geqslant 0$, $\exists c_1, c_2, c_3 > 0$:*

1) $c_1\|x\|^2 \leqslant V(k,x) \leqslant c_2\|x\|^2$;

2) $V(k+1, f(k,x)) \leqslant V(k,x) - c_3\|x\|^2,\ \forall k \geqslant k_0, x \in M_V(k).$

Тогда положение равновесия $x(k) \equiv 0$ экспоненциально устойчиво.