Математические заметки

том 50 выпуск 1 июль 1991

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

ОДНА ТЕОРЕМА О МИНИМАКСЕ

О. Ю. Боренштейн, В. С. Шульман

Теорема фон Неймана о минимаксе [1] устанавливает равенство

$$\inf_{t\in T}\sup_{x\in X} f(t, x)=\sup_{x\in X}\inf_{t\in T} f(t, x) \tag{1}$$

для непрерывной функции f на произведении выпуклых компактов, удовлетворяющей условиям выпуклости по $t\in T$ и вогнутости по $x\in X$. Мы докажем, что в случае, когда T — отрезок, равенство (1) сохраняет силу, если X считать произвольным метризуемым компактом, а условие вогнутости заменить более слабым условием «глобальности максимума». В качестве приложения будет получено обобщение теоремы Асплунда и Птака [2] об операторном минимаксе.

В дальнейшем T — отрезок, (X, ρ) — метрический компакт. Для $G\subset T\times X$ определим X-сечения $G(t)$ и T-сечения G^x:

$$G(t)=\{x\in X\colon (t, x)\in G\},\qquad G^x=\{t\in T\colon (t, x)\in G\}.$$

Следующий результат, по существу, установлен в [3].

ЛЕММА 1. *Если замкнутое подмножество $F\subset T\times X$ имеет непустые и выпуклые T-сечения, то любая его окрестность содержит график непрерывного отображения пространства X в T.*

Будем называть подмножество $G\subset T\times X$ правильным, если его X-сечения непусты и плотны в сечениях множества $\overline{G}$. Отображение $\varphi\colon T\to X$ называется ε-непрерывным, если любая точка $t_0\in T$ обладает окрестностью V, для которой $\operatorname{diam}\varphi(V)<\varepsilon$.

ЛЕММА 2. *Если открытое подмножество $G\subset T\times X$ правильно, то при любом $\varepsilon>0$ оно содержит график ε-непрерывного отображения.*

Доказательство. Покажем, вначале, что любая точка $t_0\in T$ обладает такой окрестностью V, для которой

$$\bigcup_{t\in V} G(t)\subset\Big(\bigcap_{t\in V} G(t)\Big)_\varepsilon \tag{2}$$

(мы полагаем $A_\varepsilon=\bigcup_{x\in A}\{y\in X\colon \rho(y, x)<\varepsilon\}$ для любого $A\subset X$). Если это неверно, то, взяв последовательность $\delta_n\searrow 0$ и полагая $V_n=\{t\colon |t-t_0|<\delta_n\}$, можно найти такие $(t_n, x_n)\in G$, что $t_n\in V_n$, $\operatorname{dist}(x_n, \bigcap_{t\in V_n} G(t))\geqslant\varepsilon$. С другой стороны, $\bigcup_{n=0}^\infty(\bigcap_{t\in V_n} G(t))\supset G(t_0)$ ввиду открытости G. Следовательно, $\underline{\lim}\,\rho(x_n, x)\geqslant\varepsilon$ при $x\in G(t_0)$. Это означает, что предельные точки последовательности (t_n, x_n) содержатся в $\overline{G}(t_0)$, но не в $\overline{G(t_0)}$,— противоречие с правильностью G.

Выберем теперь конечное покрытие $\{V_j\}_{j=1}^n$ отрезка T окрестностями удовлетворяющими (2). Можно считать, что $V_i \cap V_j = \varnothing$ при $|i-j|>1$. Пусть $x_1 \in \bigcap_{t\in V_1} G(t)$; так как $V_1 \cap V_2 \neq \varnothing$, то $x_1 \in \bigcup_{t\in V_2} G(t)$ и, следовательно, найдется такой элемент $x_2 \in \bigcap_{t\in V_2} G(t)$, что $\rho(x_1, x_2) < \varepsilon$. Продолжая эту конструкцию, найдем элементы $x_k \in \bigcap_{t\in V_k} G(t)$ $(1 \leqslant k \leqslant n)$ такие, что $\rho(x_k, x_{k+1}) < \varepsilon$. Легко видеть, что отображение $\varphi\colon T \to V$, определенное условием $\varphi(t) = x_k$ при $t \in V_k \setminus V_{k+1}$, ε-непрерывно.

Будем говорить, что функция на топологическом пространстве удовлетворяет условию глобальности максимума (GM), если ее значения в точках локального максимума совпадают с ее точной верхней гранью. Аналогично определяется условие глобальности минимума (Gm).

ТЕОРЕМА 1. *Для непрерывной функции $f\colon T\times X \to \mathbf{R}$, выпуклой по t и удовлетворяющей условию GM по x справедливо равенство* (1).

Доказательство. Обозначим через a и b левую и правую части (1) и допустим, что $a > b$. Выберем r_1, r_2 так, что $a > r_1 > r_2 > b$. Множество $\{(t, x)\colon f(t, x) \leqslant r_2\} = F$ удовлетворяет условиям леммы 1, а множество $\{(t, x)\colon f(t, x) < (r_1 + r_2)/2\}$ является его окрестностью, поэтому существует такая непрерывная функция $\psi\colon X \to T$, что $f(\psi(x), x) < (r_1 + r_2)/2$. Пусть $\varepsilon > 0$ таково, что $|f(t_1, x) - f(t_2, x)| < (r_1 - r_2)/2$ при $|t_1 - t_2| < \varepsilon$, $x \in X$, и пусть $\delta > 0$ таково, что $|\psi(x_1) - \psi(x_2)| < \varepsilon$ при $\rho(x_1, x_2) < \delta$.

Множество $G = \{(t, x)\colon f(t, x) > r_1\}$ — открытое и правильное. В самом деле, пусть $(t_0, x_0) \in \overline{G}$ и $x_0 \notin \overline{G(t_0)}$. Тогда $f(t_0, x_0) \geqslant r_1$ и $f(t_0, x) \leqslant r_1$ для всех x из некоторой окрестности точки x_0. Это значит, что r_1 — локальный максимум функции $f(t_0, \cdot)$, в противоречие с GM, поскольку $\sup\{f(t_0, x)\colon x \in X\} > a$.

Применяя лемму 2, найдем δ-непрерывную функцию $\varphi\colon T \to X$, график которой содержится в G. Функция $\psi \circ \varphi\colon T \to T$ является ε-непрерывной, и потому $|\psi(\varphi(t_1)) - t_1| < \varepsilon$ для некоторой точки $t_1 \in T$. Следовательно,

$$|f(\psi(\varphi(t_1)), \varphi(t_1)) - f(t_1, \varphi(t_1))| < (r_1 - r_2)/2,$$

что невозможно, поскольку $f(\psi(\varphi(t_1)), \varphi(t_1)) < (r_1 + r_2)/2$, $f(t_1, \varphi(t_1)) > r_1$. Теорема доказана.

Покажем, что для функций на прямоугольнике можно и оставшееся условие выпуклости ослабить до Gm.

ТЕОРЕМА 2. *Пусть T и X — отрезки, и пусть $f\colon T\times X \to \mathbf{R}$ — непрерывная функция, удовлетворяющая условию GM по $x \in X$ и условию Gm по $t \in T$. Тогда справедливо равенство* (1).

Доказательство. Предполагая противное, определим a, b, r_1, r_2 как при доказательстве теоремы 1. Пусть $\varepsilon > 0$ таково, что $|f(t, x_1) - f(t, x_2)| < r_1 - r_2$ при $|x_1 - x_2| < \varepsilon$.

Множество $\{(t, x)\colon f(t, x) > r_1\}$ правильное, и потому существует ε-непрерывная функция $\varphi\colon T \to X$ такая, что $f(t, \varphi(t)) > r_1$. Пусть $\delta > 0$ таково, что из $|t_1 - t_2| < \delta$ следует $|\varphi(t_1) - \varphi(t_2)| < \varepsilon$. Из Gm следует, что $\{(t, x)\colon f(t, x) < r_2\}$ — правильное множество, и значит, существует δ-непрерывная функция $\psi\colon X \to T$, для которой $f(\psi(x), x) < r_2$. Функция $\varphi \circ \psi$ ε-непрерывна, поэтому найдется такая точка $x_0 \in X$, что $|\varphi(\psi(x_0)) - x_0| < \varepsilon$. Следовательно,

$$|f(\psi(x_0), \varphi(\psi(x_0))) - f(\psi(x_0), x_0)| < r_1 - r_2,$$

что противоречит условиям

$$f(\psi(x_0), \varphi(\psi(x_0))) > r_1,\quad f(\psi(x_0), x_0) < r_2.$$

Следствие 1. *Пусть H — вещественное гильбертово пространство, A, B — ограниченные линейные операторы в H. Для любого интервала $T \subset \mathbf{R}$ справедливо равенство*

$$\inf_{t\in T} \|A - tB\| = \sup_{\|x\|=1} \inf_{t\in T} \|Ax - tBx\|. \tag{3}$$

Доказательство. Если пространство H конечномерно, а интервал T компактен, то (3) сразу следует из теоремы 1: выпуклость функции $(t, x) \mapsto \| Ax - tBx \|$ по t очевидна, а отсутствие неглобальных максимумов (условие GM) на единичной сфере проверяется элементарно (функцию $x \mapsto \| Ax - tBx \|^2$ в подходящей системе координат можно записать в виде $\sum \lambda_i^2 x_i^2$, где λ_i — сингулярные числа оператора $A - tB$). Пусть теперь T некомпактен; так как обе части (3) не меняются при замене T на $\bar{T}$, то можно считать T замкнутым. Пусть $a = \inf\limits_{t \in T} \| A - tB \|$ и $t_0 \in T$ — одна из точек, в которых нижняя грань достигается; пусть также $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$ — возрастающая последовательность содержащих t_0 компактных интервалов, объединение которых совпадает с T. По только что доказанному $\sup\limits_{\|x\|=1} \inf\limits_{t \in T_n} \| Ax - tBx \| = a$, и, следовательно, для любого $\varepsilon > 0$ найдутся такие $x_n \in H$, что $\| x_n \| = 1$ и $\| Ax_n - tBx_n \| > a - \varepsilon$ для всех $t \in T_n$. Поэтому, если x_0 — предельная точка последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, то $\| Ax_0 - tBx_0 \| > a - \varepsilon$ для всех $t \in \bigcup_{n=1}^{\infty} T_n = T$. Это означает, что правая часть (3) не меньше $a - \varepsilon$, т. е. равна a.

В случае $\dim H = \infty$ положим $b = \sup\limits_{\|x\|=1} \inf\limits_{t \in T} \| Ax - tBx \|$. Выбирая последовательность (в несепарабельном случае — сеть) $\{P_n\}_{n=1}^{\infty}$ проекторов конечного ранга, сильно сходящуюся к единичному оператору, обозначим через A_n и B_n операторы $P_n A P_n$, $P_n B P_n$, действующие в пространствах $H_n = P_n H$. Так как

$$\sup_{\substack{x \in H_n \\ \|x\|=1}} \inf_{t \in T} \| A_n x - tB_n x \|$$

не превосходит b, то по только что доказанному $\inf\limits_{t \in T} \| A_n - tB_n \| \leqslant b$. Пусть $t_n \in T$ — числа, доставляющие минимум функции $\| A_n - tB_n \|$, и t_* — предельная точка последовательности $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$, тогда $\overline{\lim} \| A_n - t_* B_n \| \leqslant b$ и, следовательно, $\| A - t_* B \| \leqslant b$, что и требовалось доказать.

Замечание. При $T = \mathbf{R}$ этот результат получен в [2], где получен аналогичный результат и для комплексных гильбертовых пространств. Отметим, что комплексный результат легко вывести из вещественного, используя теорему Теплица — Хаусдорфа [4]. Мы, однако, этого не делаем, поскольку стремились не к упрощению доказательства теоремы Асплунда — Птака (такое упрощение можно найти в [5], где указаны и новые приложения), а к включению ее в общетопологический контекст.

Вологодский политехнический институт

Поступило 28.10.88

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Фон Нейман Дж. // Матричные игры. М.: Физматгиз, 1961. 2. Asplund E., Ptak V. // Acta Math. 1971. V. 126. P. 53—62. 3. Kakutani S. // Duke Math. J. 1941. V. 8. P. 457—459. 4. Hausdorff F. // Math. Z. 1919. V. 3. P. 314—316. 5. Шульман В. С. // Спектральная теория операторов. Баку: Элм, 1984. С. 192—225.