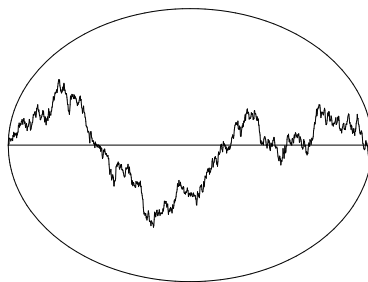


Б.М. Миллер

А.Р. Панков

ТЕОРИЯ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

В ПРИМЕРАХ И ЗАДАЧАХ



ББК 16.2.12
М 60
УДК 519.2

Рецензенты:

кафедра проблем управления Московского физико-технического
института (государственного университета),
зав. кафедрой д-р техн. наук, проф. В.Н. Бурков;

академик РАН Н.А. Кузнецов

Миллер Б.М., Панков А.Р.

М 60 Теория случайных процессов в примерах и задачах. — М.: Наука,
2001. — 320 с.: ил.
ISBN 5-7035-2321-4

В книге изложены основы современной теории случайных процессов. Описаны важнейшие модели процессов с дискретным и непрерывным временем, методы их исследования и использования для решения прикладных задач. Рассмотрены решения многочисленных типовых примеров, приведены задачи для самостоятельного решения.

Книга предназначена для студентов и аспирантов технических университетов, специализирующихся в области прикладной математики, теории управления, обработки информации и экономики.

М $\frac{1602120000 - 420}{094(02) - 01}$

ББК 16.2.12

ISBN 5-7035-2321-4

© Б.М. Миллер,
А.Р. Панков, 2001

СОДЕРЖАНИЕ

| | |
|---|-----------|
| Предисловие редактора серии | 6 |
| Предисловие | 7 |
| Список основных сокращений и обозначений | 9 |
| Г л а в а I. Основные понятия теории случайных процессов | 11 |
| § 1. Случайные процессы и их вероятностные характеристики | 11 |
| 1.1. Определение случайного процесса (11). 1.2. Конечномерные распределения случайного процесса (13). 1.3. Теорема Колмогорова (17). 1.4. Моментные характеристики случайного процесса (21). 1.5. Задачи для самостоятельного решения (27). | |
| § 2. Основные классы случайных процессов | 29 |
| 2.1. Гауссовские случайные процессы (29). 2.2. Случайные процессы с конечными моментами второго порядка (35). 2.3. Стационарные случайные процессы (38). 2.4. Марковские процессы (39). 2.5. Диффузионные процессы (46). 2.6. Задачи для самостоятельного решения (48). | |
| Г л а в а II. Случайные последовательности | 52 |
| § 3. Стационарные случайные последовательности | 52 |
| 3.1. Основные характеристики ССП (52). 3.2. Примеры ССП (55). 3.3. Спектральное представление ССП (58). 3.4. Задачи для самостоятельного решения (62). | |
| § 4. Линейные преобразования случайных последовательностей | 65 |
| 4.1. Линейные преобразования последовательностей общего вида (65). 4.2. Линейные преобразования стационарных СП (70). 4.3. Линейное прогнозирование стационарных последовательностей (75). 4.4. Задачи для самостоятельного решения (81). | |
| § 5. Цепи Маркова | 83 |
| 5.1. Вероятностные характеристики цепей Маркова (83). 5.2. Эргодические цепи Маркова (87). 5.3. Предельные вероятности состояний цепи Маркова (91). 5.4. Задачи для самостоятельного решения (96). | |
| § 6. Разностные стохастические уравнения | 98 |
| 6.1. Модели авторегрессии и скользящего среднего (98). 6.2. Спектральные характеристики АРСС-последовательностей (103). 6.3. Многомерные разностные линейные стохастические уравнения (106). 6.4. Фильтр Калмана (110). 6.5. Нелинейная фильтрация марковских случайных последовательностей (117). 6.6. Алгоритмы субоптимальной нелинейной фильтрации (122). 6.7. Задачи для самостоятельного решения (129). | |

| | |
|---|------------|
| § 7. Мартингалы с дискретным временем | 131 |
| 7.1. Основные определения (131). 7.2. Марковские моменты. Случайная замена времени в мартингале (138). 7.3. Теоремы сходимости мартингалов и их приложения (141). 7.4. Задачи для самостоятельного решения (145). | |
| Г л а в а III. Случайные функции | 147 |
| § 8. Элементы анализа случайных функций | 147 |
| 8.1. Непрерывность случайных функций (147). 8.2. Дифференцирование случайных функций (153). 8.3. Интегрирование случайных функций (157). 8.4. Дифференциальные уравнения со случайной правой частью (161). 8.5. Задачи для самостоятельного решения (166). | |
| § 9. Стационарные случайные функции | 167 |
| 9.1. Основные характеристики стационарных случайных функций (167). 9.2. Примеры ССФ (170). 9.3. Линейные преобразования ССФ (175). 9.4. Задачи для самостоятельного решения (185). | |
| § 10. Случайные функции с ортогональными и независимыми приращениями | 188 |
| 10.1. Основные понятия и определения (188). 10.2. Однородные процессы с ортогональными приращениями (193). 10.3. Мартингалы (непрерывное время) (196). 10.4. Винеровский процесс (205). 10.5. Задачи для самостоятельного решения (210). | |
| § 11. Стохастические дифференциальные уравнения | 212 |
| 11.1. Стохастический интеграл Ито (212). 11.2. Стохастическое дифференциальное уравнение. Формула Ито (217). 11.3. Линейные стохастические дифференциальные уравнения (225). 11.4. Формирующий фильтр для стационарной случайной функции (231). 11.5. Стохастические дифференциальные уравнения и диффузионные процессы (236). 11.6. Фильтр Калмана–Бьюси (239). 11.7. Задачи для самостоятельного решения (245). | |
| § 12. Марковские случайные функции с дискретным множеством состояний | 247 |
| 12.1. Потоки событий (247). 12.2. Вероятностное описание марковских случайных функций с дискретным множеством значений (250). 12.3. Эргодические свойства однородных марковских случайных функций (254). 12.4. Процессы рождения и гибели (257). 12.5. Задачи для самостоятельного решения (262). | |
| Г л а в а IV. Математическое приложение | 264 |
| § 13. Необходимые сведения из функционального анализа | 264 |
| 13.1. Алгебры и σ -алгебры множеств (264). 13.2. Меры (определения и свойства) (265). 13.3. Способы задания мер (266). 13.4. Измеримые функции (270). 13.5. Интеграл Лебега (272). 13.6. Гильбертово пространство (279). 13.7. Ряды Фурье в гильбертовом пространстве (282). 13.8. Ортогональное проектирование в гильбертовом пространстве (283). | |

| | |
|---|-----|
| § 14. Необходимые сведения из теории вероятностей | 284 |
| 14.1. Случайные события и их вероятности (284). 14.2. Случайные величины и векторы (286). 14.3. Математическое ожидание (290). 14.4. Последовательности случайных величин (294). 14.5. Условное математическое ожидание (296). 14.6. Гауссовские случайные величины и векторы (299). 14.7. Гильбертово пространство случайных величин с конечным вторым моментом (301). 14.8. Ортогональная стохастическая мера (303). 14.9. Стохастический интеграл по ортогональной мере (305). | |
| § 15. Вычисление специальных интегралов | 307 |
| 15.1. Интеграл вероятностей (307). 15.2. Интегралы от дробно-рациональных функций (308). | |
| Список литературы | 310 |
| Предметный указатель | 312 |

ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРА СЕРИИ

В 1973 году на факультете прикладной математики Московского государственного авиационного института (технического университета) академиком В.С. Пугачевым была создана кафедра теории вероятностей и математической статистики. За прошедшее время на кафедре под научно-методическим руководством В.С. Пугачева были созданы и прочитаны оригинальные учебные курсы по таким дисциплинам, как «Теория вероятностей и математическая статистика», «Случайные процессы», «Математический анализ» и др. На суд читателя выносятся серия учебных пособий по трем названным дисциплинам, которые отражают накопленный опыт преподавания этих дисциплин студентам технического университета МАИ, специализирующимся в области прикладной математики, радиоэлектроники, машиностроения и систем управления. Отличительной чертой данных пособий является максимально лаконичное изложение материала при достаточно полном описании современного состояния изучаемых предметов. Кроме того, значительную часть пособий занимают многочисленные примеры и задачи с решениями, что позволяет использовать эти пособия не только для чтения лекционных курсов, но и для проведения практических и лабораторных занятий. Структура изложения курсов такова, что эти пособия могут одновременно играть роль учебника, задачника и справочника. Поэтому пособия могут быть полезны как преподавателям и студентам, так и инженерам.

Д.ф.-м.н. А.И. Кибзун

ПРЕДИСЛОВИЕ

Содержание данного учебника отражает многолетний опыт преподавания студентам и аспирантам факультета прикладной математики Московского государственного авиационного института (технического университета) курса теории случайных процессов, в становлении которого решающая роль принадлежит академику РАН В.С. Пугачеву. При подготовке учебника авторы основывались на следующих базовых принципах:

- математически корректное изложение материала и обоснование всех методов, используемых для решения конкретных задач;
- иллюстрирование основных теоретических положений примерами различного уровня сложности;
- более подробное рассмотрение тех моделей случайных процессов, которые в настоящее время являются наиболее важными для решения прикладных задач.

В книге приведено значительное количество строгих определений и аккуратных формулировок теорем. Доказательства теорем можно найти в многочисленных учебниках по теории случайных процессов [2, 4, 10, 20–22, 25]. Для понимания основного материала достаточно знания курсов математического анализа, линейной алгебры и теории вероятностей в объемах, принятых для изучения в техническом университете. Для овладения материалом в полном объеме необходимо знакомство с основами функционального анализа (теория меры, интеграл Лебега, гильбертово пространство). Исчерпывающие сведения по теории вероятностей содержатся в учебниках [1, 19, 22, 25] и справочнике [9], а по функциональному анализу — в [8, 13, 18].

Использование всех приведенных теоретических положений проиллюстрировано многочисленными примерами, снабженными подробными решениями. В наиболее важных примерах изучаются модели и методы исследования случайных процессов, на которых базируются эффективные алгоритмы обработки информации, принятия решений, анализа и прогнозирования реальных процессов в физических, биологических, сложных технических и экономических системах. В конце каждого параграфа приведены задачи для самостоятельного решения. Все задачи снабжены ответами, а наиболее сложные — указаниями к решению. Отметим также задачки [3, 7], которые могут быть использованы для самостоятельной проработки материала.

Наконец, для изучения были отобраны те математические модели случайных процессов, которые имеют особое значение для постановки и решения прикладных задач в следующих областях:

- управление сложными системами [6, 15, 16, 23];

- управление движением летательных аппаратов [11];
- обработка измерительной информации [20, 24];
- исследование надежности систем [10];
- исследование операций и системный анализ [27];
- идентификация систем [12];
- системы массового обслуживания [5, 27];
- математическая экономика и теория финансов [14, 26, 28].

Поэтому наряду со стандартными разделами курса (гауссовские процессы, стационарные процессы и их преобразования, цепи Маркова и др.) в книге присутствуют нетрадиционные разделы, посвященные стохастическому анализу, разностным и дифференциальным стохастическим уравнениям, оптимальному оцениванию, теории рекуррентной фильтрации Калмана–Бьюси, методам нелинейной фильтрации, теории мартингалов. Так, например, теория мартингалов эффективно используется в настоящее время для исследования и оптимизации процессов на финансовых рынках [26].

Книга состоит из четырех глав. В первой главе приведены основные определения и теоретические положения общего характера, необходимые для изучения остального материала, а также кратко описаны важнейшие типы случайных процессов, применяемых для решения прикладных задач.

Вторая глава посвящена случайным процессам с дискретным временем (случайным последовательностям). В последние годы значение этого класса случайных процессов повысилось в связи с тем, что на смену аналоговым методам обработки информации пришли цифровые методы, реализованные в виде компьютерных алгоритмов и программ.

В третьей главе книги изучаются случайные процессы с непрерывным временем (случайные функции). Модели таких процессов адекватно описывают движение механических систем в случайных средах, распространение радиосигналов, функционирование систем массового обслуживания, процессы изменения курсов ценных бумаг и многое другое.

Четвертая глава имеет справочный характер и содержит сведения по функциональному анализу и теории вероятностей, необходимые для изучения материала в полном объеме.

При подготовке рукописи книги мы постоянно пользовались советами и помощью наших коллег по кафедре «Теории вероятностей» Московского государственного авиационного института (технического университета) А.В. Борисова, А.В. Босова, Е.Н. Платонова и В.И. Синицына, которым мы выражаем искреннюю признательность. Авторы выражают особую благодарность К.В. Семенихину за работу по научному редактированию рукописи и подготовку оригинал-макета.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Аддитивность 266
— счетная 265
Алгебра 264
Алгоритм рекуррентной фильтрации Калмана 111
— с.к.-оптимальной нелинейной фильтрации 117
— субоптимальной нелинейной фильтрации первого порядка 123
— условно-оптимальной нелинейной фильтрации 126
Асимптотическая нормальность 230, 301

Базис гильбертова пространства 283
— линейного пространства 280
Белый шум гауссовский 16
— — дискретный 16, 57, 98
— — многомерный 106
— — с непрерывным временем 27, 156
— — стандартный 57, 106
— — стационарный 57, 106, 171
— — широкополосный 171
Броуновский мост 49

Вектор сноса (дрейфа) 46, 236
Вероятности предельные 254
— финальные 93
Вероятностные гипотезы 286
Вероятность 284
— перехода 40, 250
— — за один шаг 83
— состояния 84, 250
— условная 285
Винеровский процесс 33, 205
Время возвращения в состояние 90

Дельта-функция Дирака 279
Дисперсия 292
— случайного процесса 22

Единственность (\mathbf{P} -п.н.) решения стохастического дифференциального уравнения 219

Закон больших чисел 69
— — — усиленный 141
— распределения 287

Импульсный отклик 178
Интеграл Лебега 273
— Стильеса 277
— в среднем квадратическом 157
— вероятностей 15, 299
— по ортогональной стохастической мере 306
— стохастический Ито 214
— — Стратоновича 217
Интенсивность гибели 258
— однородного процесса с ортогональными приращениями 193
— перехода 251
— потока событий 247
— рождения 258

Квадратическая характеристика 136, 202
Классификация состояний марковской цепи 88
Ковариация 293
Компенсатор субмартингала 136, 200
Коэффициенты Фурье 283
Критерий Коши с.к.-сходимости 295
— регулярности стационарной последовательности 76
— с.к.-дифференцируемости 153
— с.к.-интегрируемости 157
— с.к.-непрерывности 148
— сходимости в гильбертовом пространстве 281
— эргодичности марковской случайной функции 255
— — цепи Маркова 90, 91

Лемма Кронекера 142
— Лозва 296
Линейная комбинация 279
— независимость 280

- оболочка 280
- регрессия 111
- система 175
- Линейное преобразование 60, 65, 175
 - — стационарное 60, 70, 176
 - — физически реализуемое (фильтр) 71, 181
- Марковская случайная функция с дискретным множеством значений 250
 - — — — — однородная 251
 - — — — — эргодическая 254
- Марковское свойство 40, 83
 - —, альтернативная формулировка 86
- Мартингал 131, 197
 - квадратично-интегрируемый 136, 201
- Математическое ожидание (среднее) 290
 - — векторного случайного процесса 25
 - — случайного вектора 292
 - — процесса 22
 - — условное 296
 - — — в широком смысле 303
 - — — относительно случайного события 298
 - — — случайной величины 297
- Матрица диффузии 46, 236
 - интенсивностей белого шума 165
 - ковариационная 293
 - — условная 117
 - переходная 83
 - стохастическая 85
- Мера 265
 - Дирака 278
 - Лебега (на \mathbb{R}^1) 267
 - — на \mathbb{R}^n 269
 - абсолютно непрерывная 275
 - вероятностная 284
 - конечная 265
 - нормированная 284
 - ортогональная стохастическая 304
 - пуассоновская 195
 - элементарная стохастическая 303
- Метод Эйлера 224
 - моментов 226
 - наименьших квадратов 284
 - — — обобщенный 115
 - — — статистического моделирования 127
 - — — формирующих фильтров 231
- Множество борелевское 267, 269
 - состояний 83
- Модель наблюдения Калмана 112
 - — — стационарная 115
- Модификация (версия) случайного процесса 19
 - — — — непрерывная 152
- Момент марковский 138
 - — остановки 138
- Независимые случайные величины 289
 - события 285
 - σ -алгебры 289
- Неравенство Гельдера 274
 - Иенсена 274, 297
 - Коши–Буняковского 275, 280, 293
 - Маркова 292
 - Минковского 274
 - Чебышева 274, 293
- Норма 280
 - в пространстве \mathcal{H} 52, 75, 302
- Опорная траектория 122
- Ортогональная проекция 284
- Ортогональное дополнение 283
- Ортогональные элементы 282
- Отсутствие последствия 39
- Оценка метода наименьших квадратов 143
 - наилучшая линейная 115, 284, 302
 - несмещенная 68
 - прогноза с.к.-оптимальная 244
 - с.к.-оптимальная 110, 298
 - сильно состоятельная 142
 - состоятельная 68
 - фильтрации с.к.-оптимальная 117
- Плотность переходная 41
 - распределения вероятностей 288
 - условная 298
 - — ненормированная 118
- Подпространство всюду плотное 281
 - замкнутое 281
 - линейное 279
 - нулевое 280

- Пополнение пространства 281
 Последовательность весовая 65, 70
 — предсказуемая 131
 — стохастическая 131
 — фундаментальная 281
 — — по вероятности 295
 — — почти наверное 295
 Поток событий 247
 — — без последствия 248
 — — однородный (стационарный) 247
 — — ординарный 247
 — — простейший 248
 — — пуассоновский 174, 248
 Поток σ -алгебр 131, 196, 212
 Почти всюду 266
 Почти наверное (с вероятностью 1) 286
 Прогноз абсолютно точный 75
 — наилучший линейный 75
 — с.к.-оптимальный 244
 — тривиальный 76
 Прогнозирование 244
 Продолжение меры 266
 Производная Радона–Никодима 275
 — в среднем квадратическом 153
 — обобщенная 156
 Прообраз 270
 Пространство вероятностное 284
 — гильбертово 281
 — измеримое 264
 — — дискретное 266
 — линейное 279
 — — вещественное (действительное) 279
 — — комплексное 279
 —, порожденное случайной последовательностью 75
 — с мерой 266
 — случайных величин с конечным вторым моментом 52, 302
 — элементарных событий 284
 Процесс Орнштейна–Уленбека 242
 — броуновского движения 33
 — рождения и гибели 257
 Пуассоновский процесс 194
 — — неоднородный 194
 — — обобщенный 202
 Равенство Парсеваля 283
 Разложение Вольда 76
 — Дуба для субмартингала 136
 Размерность линейного пространства 280
 Распределение Бернулли 289
 — Пуассона 289
 — абсолютно непрерывное 278
 — биномиальное 289
 — вероятностей состояний 84, 251
 — гауссовское (нормальное) 290
 — — n -мерное 300
 — дискретное 287
 — непрерывное 288
 — равномерное 290
 — стационарное 91, 254
 — экспоненциальное (показательное) 290
 Ряд Фурье 283
 С.к.-интеграл 157
 С.к.-предел 147, 295
 С.к.-производная 153
 С.к.-сходимость 295
 Семейство конечномерных распределений случайного процесса 13
 Сечение случайного процесса 11
 Симметричное блуждание 207
 Система элементов ортогональная 282
 — — ортонормальная 282
 Скалярное произведение 280
 — — в пространстве \mathcal{H} 52, 75, 302
 Случайная величина 286
 — — (абсолютно) непрерывная 288
 — — гауссовская (нормальная) 299
 — — — стандартная 299
 — — дискретная 287
 — — центрированная 291
 Случайная замена времени 138
 Случайная последовательность 12
 — — авторегрессии–скользящего среднего порядка (p, q) 99
 — — авторегрессионная порядка p 98
 — — гильбертова 65
 — — детерминированная 76
 — — подчиненная 76
 — — почти периодическая 55
 — — скользящего среднего порядка q 99
 — — стационарная 53

- — — двустороннего скользящего среднего 57
- — — линейная 57
- — — одностороннего скользящего среднего 57
- — — регулярная 75
- — — сингулярная 75
- — — скользящего среднего порядка p 57
- Случайная функция 12, 147
 - — дифференцируемая (потраекторно) 154
 - — непрерывная (потраекторно) 148
 - — — почти на верное 148
 - — неупреждающая 212
 - — простая 212
 - — регулярная 12
 - — с.к.-дифференцируемая 153
 - — с.к.-интегрируемая 157
 - — с.к.-непрерывная 147
 - — согласованная 197
 - — стационарная 167
- Случайные величины независимые 289
 - — некоррелированные 293
 - — ортогональные 293, 302
 - — эквивалентные 286
- Случайные процессы неотличимые 20
 - — эквивалентные 19, 152
 - — — в широком смысле 18
- Случайный вектор 288
 - — гауссовский (нормальный) 300
- Случайный процесс 11
 - — вещественный (действительный) 12
 - — выходящий из нуля 188
 - — гауссовский 25, 29
 - — гильбертов 23
 - — диффузионного типа 46, 237
 - — комплексный 12
 - — марковский 39
 - — — однородный 40
 - — обновляющий 76, 241
 - — с дискретным временем 12
 - — — конечными моментами второго порядка 23
 - — — независимыми приращениями 190
 - — — непрерывным временем 12
 - — — ортогональными приращениями 188
 - — — — однородный 193
 - — — стационарный в узком смысле 38
 - — — — широком смысле 38
 - — считающий 194
 - — центрированный 22
- Смешанный момент порядка k случайного процесса 26
- Событие достоверное 285
 - невозможное 285
 - противоположное 285
- События независимые 285
 - несовместные 285
- Состояние апериодическое 88
 - возвратное 88
 - невозвратное 88
 - несущественное 88
 - нулевое 88
 - периодическое 88
 - существенное 88
- Состояния сообщающиеся 88
- Спектральная плотность 54, 168
 - — дробно-рациональная 231
 - функция 54, 168
- Спектральное разложение ковариационной функции 54, 169
 - — стационарной последовательности 59
 - — — функции 170
- Среднеквадратическая погрешность 68, 75
- Стохастический граф 85, 256
 - дифференциал 217
- Субмартингал 131, 197
- Супермартингал 131, 197
- Сходимость в среднем квадратическом 295
 - — — порядка p 295
 - — относительно нормы 280
 - по вероятности 294
 - — мере 272
 - — распределению (слабая) 296
 - почти всюду 272
 - почти на верное (с вероятностью 1) 294
- Телеграфный сигнал 175

- Теорема Бохнера–Хинчина 168
- Герглотца 54
 - Калмана 112
 - Калмана–Бьюси 240
 - Каратеодори 266
 - Колмогорова о существовании непрерывной модификации 152
 - — — — случайного процесса 18
 - Лёви 276
 - Лебега 276
 - Радо–Никодима 275
 - Фату 277
 - о σ -аддитивности интеграла Лебега 275
 - — виде наилучшей линейной оценки 303
 - — — с.к.-оптимальной оценки 110, 298
 - — — — в гауссовском случае 110
 - — замене переменной в интеграле Лебега 276
 - — нормальной корреляции 111, 300
 - — связи различных видов вероятностной сходимости 296
 - — существовании интеграла Ито 214
 - — — решения стохастического дифференциального уравнения 218
 - — сходимости мартингала 141
 - об абсолютной непрерывности интеграла Лебега 275
- Тождества Вальда 140
- Траектория (реализация) случайного процесса 12
- Управляемость (полная) 239
- Уравнение Колмогорова–Фоккера–Планка 47, 237
- Колмогорова–Чепмена 40, 251
 - дифференциальное со случайной правой частью (линейное) 161
 - — — — —, с постоянными коэффициентами 179
 - диффузии 48
 - — с дискретным временем 119
 - стохастическое дифференциальное
 - — — — линейное 219
 - — — —, порожденное пуассоновским процессом 230
 - — разностное 106
 - — — стационарное, асимптотически устойчивое 106
 - — характеристическое 98
- Уравнения Колмогорова алгебраические 255
- — дифференциальные 252
 - стационарные метода моментов 107, 228
 - — фильтра Калмана 115
 - — — Калмана–Бьюси 243
- Условие Липшица 219
- Условия согласованности семейства конечномерных распределений 17
- Устойчивость (асимптотическая) 99, 228
- многочлена 233
 - нестационарной системы 230
 - стохастическая 224
- Факторизация спектральной плотности 105
- Фильтр Калмана (дискретный) 112
- — линеаризованный 123
 - — расширенный 124
 - Калмана–Бьюси 241
 - формирующий 105, 233
 - экспоненциального сглаживания 69
- Формула дифференцирования с.к.-интеграла по верхнему пределу 159
- интегрирования по частям для с.к.-интеграла 159
 - — — — стохастического интеграла 192
 - — — — полного математического ожидания 298
 - — — — полной вероятности 286
 - — — — преобразования спектральной плотности при линейном преобразовании 61, 176
 - — — — стохастического дифференцирования Ито 221
- Функции эквивалентные 272
- Функция Коши 164
- Лапласа 15, 299, 307
 - абсолютно непрерывная 278

- борелевская 270
- весовая 178
- выборочная 12
- дискретного распределения 278
- дисперсионная 22, 106
- дробно-рациональная 308
- измеримая 270
- интегрируемая (суммируемая) по мере 273
- ковариационная 22
- — векторного случайного процесса 25
- — взаимная 25
- — комплексного случайного процесса 23
- — стационарной случайной последовательности 53
- — — функции 167
- корреляционная 53
- неотрицательно-определенная 24, 36, 53, 167
- плотности распределения 278
- простая 271
- распределения 267
- — вероятностей 287
- — — случайного вектора 288
- структурная 304
- характеристическая 292
- — k -мерного распределения случайного процесса 26
- эрмитова 36, 53, 168
- θ -интеграл 216
- σ -аддитивность 265
- σ -алгебра 264
- борелевская 267, 269
- , порожденная системой множеств 265
- , — случайной величиной 286
- , — — функцией 212
- , — случайным вектором 288
- , — функцией 271
- тривиальная 264
- Центральная предельная теорема 301
- Цепь Маркова (дискретная) 83
 - — апериодическая 89
 - — конечная 42, 83
 - — неразложимая 89, 92
 - — однородная 84
 - — эргодическая 91
- Частотная характеристика 60, 73, 176
- Экстраполяция 244
- n -мерная плотность распределения случайного процесса 13
 - функция распределения 269
 - — — случайного процесса 13