Московский государственный университет
имени М.В. Ломоносова
факультет Вычислительной математики и кибернетики
кафедра системного анализа

Лекции по курсу
“Элементы финансовой математики”

Преподаватель:
Смирнов Сергей Николаевич

Москва
2009

Содержание

Часть I

Введение в теорию случайных процессов с дискретным временем

1 Оператор условного математического ожидания

Здесь и далее будем считать, что задано вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, где Ω — пространство элементарных событий, $\mathcal{F}$ — "класс событий" (σ-алгебра подмножеств Ω), $\mathbb{P}$ — вероятность. Пусть задана некоторая σ-алгебра $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{F}$, описывающая имеющуюся информацию ($\mathcal{F}$ описывает всю информацию, заложенную в модели).

Определение 1.1. Пусть заданы два измеримых пространства: $(\Omega, \mathcal{F})$ и $(E, \mathcal{E})$. Отображение $\xi\colon\ \Omega \to E$ называется **$(\mathcal{F}, \mathcal{E})$-измеримым отображением**, если

$$\forall B \in \mathcal{E} \quad \xi^{-1}(B) \in \mathcal{F}.$$

Определение 1.2. Пусть заданы два измеримых пространства: $(\Omega, \mathcal{F})$ и $(E, \mathcal{E})$. **Случайным элементом** со значениями из множества E, определённым на пространстве Ω, называется отображение

$$\xi\colon\ \Omega \to E,$$

которое является $(\mathcal{F}, \mathcal{E})$-измеримым.

Если $E = \mathbb{R}$ и $\mathcal{E} = \mathcal{B}$ — борелевская σ-алгебра, то случайный элемент ξ называется случайной величиной.

Будем обозначать через $m(\mathcal{A})$ множество всех случайных величин, измеримых относительно $\mathcal{A}$ (т.е. $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$-измеримых). Например, $m(\mathcal{F})$ — это множество всех случайных величин; $m(\{\varnothing, \Omega\})$ – все константы (неслучайные величины). Введём также обозначение $m_+(\mathcal{A})$ – множество всех неотрицательных случайных величин, измеримых относительно $\mathcal{A}$.

Дадим формальное определение оператора условного математического ожидания как математического объекта.

Определение 1.3. Оператор условного математического ожидания (ОУМО) — оператор $\mathbb{E}^{\mathcal{A}}$, действующий на пространстве $m_+(\mathcal{F})$ и удовлетворяющий следующим условиям:

1) условие измеримости:
$$\mathbb{E}^{\mathcal{A}} \xi \in m(\mathcal{A}), \qquad \forall \xi \in m_+(\mathcal{F});$$

2)
$$\mathbb{E}(\mathbf{1}_B \xi) = \mathbb{E}\left(\mathbf{1}_B\, \mathbb{E}^{\mathcal{A}} \xi\right), \qquad \forall B \in \mathcal{A}.$$

Замечание 1.1. ОУМО был определен только для неотрицательных случайных величин:

$$\mathbb{E}^{\mathcal{A}}\colon\ m_+(\mathcal{F}) \to m(\mathcal{A}).$$

Замечание 1.2. ОУМО для неотрицательных случайных величин всегда существует (однако может быть равным $+\infty$).

Замечание 1.3. Существует еще одно, более распространенное, обозначение ОУМО: $\mathbb{E}(\ \cdot\ \mid \mathcal{A})$. Однако мы будем пользоваться более удобной, операторной записью: $\mathbb{E}^{\mathcal{A}}(\cdot)$.

Замечание 1.4. Запись $\mathbb{E}^{\mathcal{A}}\,\xi$ можно интерпретировать как среднее значение случайной величины ξ при условии наличия информации $\mathcal{A}$. Подчеркнем, что ОУМО определяется относительно некоторого класса событий (в данном случае, это $\mathcal{A}$), отвечающего за формализацию знания некоторой информации.

Замечание 1.5. Если убрать условие измеримости, то можно положить $\mathbb{E}^{\mathcal{A}}\,\xi = \xi$, где ξ не обязательно является $\mathcal{A}$-измеримой случайной величиной (однако $\xi \in m\,(\mathcal{F})$), т.е. может полностью не определяться на основе информации, заложенной в $\mathcal{A}$.

Каждой случайной величине $\xi \in m_+\,(\mathcal{F})$ поставим в соответствие меру μ^{ξ}, заданную на $\mathcal{F}$ следующим образом:

$$\mu^{\xi}(B) = \mathbb{E}\left(\mathbf{1}_B\xi\right), \qquad \forall B \in \mathcal{F}. \tag{1.1}$$

Заметим, что все свойства меры (аддитивность, неотрицательность, непрерывность) очевидным образом выполнены (из свойств математического ожидания). Обозначим через $\mu^{\xi}\big|_{\mathcal{A}}$ сужение меры μ^{ξ} на σ-алгебру $\mathcal{A}$ (индуцированную меру).

Таким образом, условие 2) в определении ОУМО можно переписать в следующем виде:

$$\mu^{\xi}\big|_{\mathcal{A}}(B) = \int\limits_B \mathbb{E}^{\mathcal{A}}\,\xi\;d\mathbb{P}\,\big|_{\mathcal{A}} \equiv \int\limits_B \mathbb{E}^{\mathcal{A}}\,\xi(\omega)\;\mathbb{P}\,\big|_{\mathcal{A}}(d\omega), \qquad \forall B \in \mathcal{A}. \tag{1.2}$$

где $\mathbb{P}\,\big|_{\mathcal{A}}$— сужение вероятностной меры $\mathbb{P}$ на σ-алгебру $\mathcal{A}$. Фактически, записанное равенство является определением производной Радона-Никодима:

$$\mathbb{E}^{\mathcal{A}}\,\xi = \frac{d\mu^{\xi}\big|_{\mathcal{A}}}{d\mathbb{P}\,\big|_{\mathcal{A}}}. \tag{1.3}$$

Поскольку правая часть (1.3), очевидно, является $\mathcal{A}$-измеримой случайной величиной, т.е. удовлетворяет условию 1) определения ОУМО, равенство (1.3) можно использовать в качестве эквивалентного определения $\mathbb{E}^{\mathcal{A}}$:

$$\boxed{\mathbb{E}^{\mathcal{A}}\,\xi \overset{\mathsf{def}}{=} \frac{d\mu^{\xi}\big|_{\mathcal{A}}}{d\mathbb{P}\,\big|_{\mathcal{A}}}.} \tag{1.4}$$

Замечание 1.6. ОУМО $\mathbb{E}^{\mathcal{A}}\,\xi$ определен с точностью до почти всюду относительно вероятностной меры $\mathbb{P}\,\big|_{\mathcal{A}}$, поскольку (1.2) никак не изменится, если заменить ξ на эквивалентную, а производная Радона-Никодима определена с точностью до множества меры нуль. Поэтому везде далее мы будем работать с классами эквивалентных случайных величин:

$$\begin{array}{ccc} \xi \sim \xi' & \overset{\mathsf{def}}{\Longleftrightarrow} & \mathbb{P}(\xi = \xi') = 0 \\ & \Longrightarrow & \mathbb{E}^{\mathcal{A}}\,\xi \overset{\text{п.н.}}{=} \mathbb{E}^{\mathcal{A}}\,\xi' \end{array}$$

$$\downarrow$$

$$\begin{array}{ccc} \xi & \longmapsto & \mathbb{E}^{\mathcal{A}}\,\xi \\ \text{(как класс эквивалентных} & & \text{(как класс эквивалентных} \\ \text{случайных величин)} & & \text{случайных величин)} \end{array}$$

Таким образом, $\mathbb{E}^{\mathcal{A}}$ — оператор, отображающий один класс эквивалентности в другой класс эквивалентности.

Замечание 1.7. Для того чтобы определить ОУМО на знакопеременных случайных величинах, достаточно рассмотреть следующее представление произвольной случайной величины[1]:

$$\xi = \xi_+ - \xi_-,$$

где ξ_+ и ξ_- — неотрицательные случайные величины такие, что $|\xi| = \xi_+ + \xi_-$.

Обозначим[2]

$$B = \left\{\omega \in \Omega\colon\ \mathbb{E}^{\mathcal{A}}\,\xi_+(\omega) = +\infty\right\},\ C = \left\{\omega \in \Omega\colon\ \mathbb{E}^{\mathcal{A}}\,\xi_-(\omega) = +\infty\right\}.$$

Если $\mathbb{P}\,(\omega \in \Omega\colon\ \omega \in B,\, \omega \in C) > 0$, то $\mathbb{E}^{\mathcal{A}}\,\xi$ не определено.

Предположим, что $\mathbb{P}\,(\omega \in \Omega\colon\ \omega \in B,\, \omega \in C) = 0$. Тогда

$$\mathbb{E}^{\mathcal{A}}\,\xi(\omega) \overset{\mathsf{def}}{=} \begin{cases} +\infty, & \text{если } \omega \in B; \\ -\infty, & \text{если } \omega \in C; \\ \mathbb{E}^{\mathcal{A}}\,\xi_+(\omega) - \mathbb{E}^{\mathcal{A}}\,\xi_-(\omega), & \text{иначе.} \end{cases}$$

Таким образом, $\mathbb{E}^{\mathcal{A}}\,\xi$ определено и конечно почти наверное тогда и только тогда, когда $\mathbb{P}\left(\omega\colon\ \mathbb{E}^{\mathcal{A}}\,\xi_+(\omega) < +\infty,\, \mathbb{E}^{\mathcal{A}}\,\xi_-(\omega) < +\infty\right) = 1$.

В силу замечания 1.6, $\mathbb{E}^{\mathcal{A}}\,\xi$ определено с точностью до почти наверное.

Свойства оператора условного математического ожидания.

Зафиксируем σ-алгебру $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{F}$.

Напомним, что ОУМО определен с точность до почти наверное. Поэтому в приведенных ниже свойствах все соотношения ($=$, $>$, $<$ и т.д.) нужно понимать с точностью до почти наверное.

1. Если случайные величины ξ_1 и ξ_2 таковы, что ОУМО для них определен и конечен, то выполняется свойство линейности ОУМО:

$$\mathbb{E}^{\mathcal{A}}(a_1\xi_1 + a_2\xi_2) = a_1\,\mathbb{E}^{\mathcal{A}}\,\xi_1 + a_2\,\mathbb{E}^{\mathcal{A}}\,\xi_2, \qquad \forall a_1, a_2 \in \mathbb{R}. \tag{1.5}$$

   Обозначим через $\mathcal{N}$ класс всех случайных величин, имеющих конечное условное математическое ожидание относительно σ-алгебры $\mathcal{A}$. Легко видеть, что $\mathcal{N}$ — линейное пространство, а ОУМО $\mathbb{E}^{\mathcal{A}}\colon\ \mathcal{N} \to \mathcal{N}$ — линейный оператор.

   Замечание 1.8. Оператор $\mathbb{E}^{\mathcal{A}}$ можно рассматривать на разных пространствах, выбор которых зависит от того, что хочется потребовать от случайной величины. Например, если рассматривать только неотрицательные случайные величины, то ОУМО уже не будет линейным, хотя его свойства в основном похожи на те, что характерны для математического ожидания $\mathbb{E}$; к тому же, как было отмечено выше, значение $\mathbb{E}^{\mathcal{A}}\,\xi$, $\xi \geqslant 0$, всегда определено.

2. Если $\xi \geqslant 0$, то и $\mathbb{E}^{\mathcal{A}}\,\xi \geqslant 0$.

3. Если $\xi_1 \geqslant \xi_2$, то и $\mathbb{E}^{\mathcal{A}}\,\xi_1 \geqslant \mathbb{E}^{\mathcal{A}}\,\xi_2$ (свойство монотонности).

4. Если $\xi \in m\,(\mathcal{A})$, то $\mathbb{E}^{\mathcal{A}}\,\xi = \xi$.

[1] Такой же подход применялся при определении оператора математического ожидания на знакопеременных случайных величинах.

[2] На самом деле, имеются в виду не подмножества Ω, а классы эквивалентных подмножеств (см. замечание 1.6); множества B и C при этом можно считать произвольными элементами (представителями) соответствующих классов эквивалентности.

Доказательство. **Общее замечание.** В силу (1.4), а также замечания 1.7, где вводился ОУМО для знакопеременных случайных величин, ОУМО определен однозначно (с точностью до почти наверное). Так как все соотношения (в том числе равенства) написаны с точностью до почти наверное, то при доказательствах свойств ОУМО достаточно проверить выполнение обоих условий из определения ОУМО.

(a) $\xi \in m_+(\mathcal{A})$. Условие измеримости, очевидно, выполнено. Условие 2) из определения ОУМО превращается в тождество. В силу сделанного выше замечания $\mathbb{E}^{\mathcal{A}} \xi = \xi$.

(b) $\xi \in m(\mathcal{A})$. Легко проверить, что ξ_+ и ξ_- ($\xi = \xi_+ - \xi_-$, $|\xi| = \xi_+ + \xi_-$) также являются $\mathcal{A}$-измеримыми случайными величинами. Следовательно, $\mathbb{E}^{\mathcal{A}} \xi_+ = \xi_+$ и $\mathbb{E}^{\mathcal{A}} \xi_- = \xi_-$. Поэтому

$$\mathbb{E}^{\mathcal{A}} \xi_+ = +\infty \iff \xi_+ = +\infty \iff \xi = +\infty; \tag{1.6}$$

$$\mathbb{E}^{\mathcal{A}} \xi_- = +\infty \iff \xi_- = +\infty \iff \xi = -\infty. \tag{1.7}$$

Следовательно, $\mathbb{E}^{\mathcal{A}} \xi = \xi$.

□

Следствие 1.1.

$$\mathbb{E}^{\mathcal{F}} \xi = \xi, \quad \forall \xi.$$

Следствие 1.2. $\mathbf{1}_\Omega$ *– собственный вектор ОУМО с единичным собственным значением:*

$$\mathbb{E}^{\mathcal{A}} \mathbf{1}_\Omega = \mathbf{1}_\Omega.$$

5. Если $\mathcal{A}_1 \subseteq \mathcal{A}_2 \subseteq \mathcal{F}$, то $\mathbb{E}^{\mathcal{A}_1} \mathbb{E}^{\mathcal{A}_2} = \mathbb{E}^{\mathcal{A}_2} \mathbb{E}^{\mathcal{A}_1} = \mathbb{E}^{\mathcal{A}_1}$.

Доказательство. (a) По определению ОУМО, для любой случайной величины ξ, для которой $\exists\, \mathbb{E}^{\mathcal{A}_1} \xi$, $\mathbb{E}^{\mathcal{A}_1} \xi \in m(\mathcal{A}_1)$. Учитывая, что $\mathcal{A}_1 \subseteq \mathcal{A}_2$, получаем $\mathbb{E}^{\mathcal{A}_1} \xi \in m(\mathcal{A}_2)$. Следовательно, по свойству 4, $\mathbb{E}^{\mathcal{A}_2} \mathbb{E}^{\mathcal{A}_1} \xi = \mathbb{E}^{\mathcal{A}_1} \xi$.

(b) Покажем, что $\mathbb{E}^{\mathcal{A}_1} \mathbb{E}^{\mathcal{A}_2} \xi = \mathbb{E}^{\mathcal{A}_1} \xi$, $\forall \xi \in m(\mathcal{F})$. Ясно, что данное равенство достаточно доказать для $\forall \xi \in m_+(\mathcal{F})$. По определению ОУМО $\mathbb{E}^{\mathcal{A}_1}$:

1) условие измеримости:

$$\mathbb{E}^{\mathcal{A}_1} \xi \in m(\mathcal{A}_1), \qquad \forall \xi \in m_+(\mathcal{F}); \tag{1.8}$$

2)

$$\mathbb{E}(\mathbf{1}_B \xi) = \mathbb{E}\left(\mathbf{1}_B \mathbb{E}^{\mathcal{A}_1} \xi\right), \qquad \forall B \in \mathcal{A}_1. \tag{1.9}$$

Значит, достаточно доказать, что

1) условие измеримости:

$$\mathbb{E}^{\mathcal{A}_1} \mathbb{E}^{\mathcal{A}_2} \xi \in m(\mathcal{A}_1), \qquad \forall \xi \in m_+(\mathcal{F}); \tag{1.10}$$

2)

$$\mathbb{E}(\mathbf{1}_B \xi) = \mathbb{E}\left(\mathbf{1}_B \mathbb{E}^{\mathcal{A}_1} \mathbb{E}^{\mathcal{A}_2} \xi\right), \qquad \forall B \in \mathcal{A}_1. \tag{1.11}$$

Условие измеримости выполнено из определения $\mathbb{E}^{\mathcal{A}_1}$ ($\mathbb{E}^{\mathcal{A}_2}\xi \in m_+(\mathcal{F})$). По определению ОУМО $\mathbb{E}^{\mathcal{A}_2}$:

$$\mathbb{E}\left(\mathbf{1}_B\xi\right) = \mathbb{E}\left(\mathbf{1}_B\,\mathbb{E}^{\mathcal{A}_2}\xi\right), \qquad \forall B \in \mathcal{A}_2. \tag{1.12}$$

Так как $\mathcal{A}_1 \subseteq \mathcal{A}_2$, то

$$\mathbb{E}\left(\mathbf{1}_B\xi\right) = \mathbb{E}\left(\mathbf{1}_B\,\mathbb{E}^{\mathcal{A}_2}\xi\right), \qquad \forall B \in \mathcal{A}_1. \tag{1.13}$$

Пользуясь (1.9) и (1.13), получим (1.11).

□

Следствие 1.3. *ОУМО - идемпотентный оператор (проектор):*

$$(\mathbb{E}^{\mathcal{A}})^2 = \mathbb{E}^{\mathcal{A}}. \tag{1.14}$$

Другими словами, ОУМО проецирует случайную величину ξ, измеримую относительно $\mathcal{F}$, в измеримую относительно $\mathcal{A}$.

6. Если $\eta \in m(\mathcal{A})$, то $\mathbb{E}^{\mathcal{A}}\eta\xi = \eta\,\mathbb{E}^{\mathcal{A}}\xi$, $\forall \xi \in m(\mathcal{F})$.

   Следствие 1.4. *Только константа измерима относительно тривиальной σ-алгебры $\mathcal{C} = \{\varnothing, \Omega\}$:*

   $$\mathbb{E}^{\mathcal{C}}\xi = \mathbb{E}\,\xi \cdot \mathbf{1}_\Omega, \qquad \forall \xi \in m(\mathcal{F}). \tag{1.15}$$

   Следствие 1.5.

   $$\mathbb{E}\,\mathbb{E}^{\mathcal{A}}\xi = \mathbb{E}\,\xi, \qquad \forall \xi \in m(\mathcal{F}). \tag{1.16}$$

7. Если σ-алгебры $\mathcal{A}$, $\mathcal{F}_\xi$ и $\mathcal{F}_\eta$ независимы, то справедливо

   $$\mathbb{E}^{\mathcal{A}}(\xi\eta) = \mathbb{E}^{\mathcal{A}}\xi \cdot \mathbb{E}^{\mathcal{A}}\eta. \tag{1.17}$$

   Замечание 1.9. $\mathcal{F}_\xi$ — σ-алгебра, порожденная случайной величиной ξ:

   $$\mathcal{F}_\xi \overset{\mathsf{def}}{=} \{\xi^{-1}(B),\ B \in \mathcal{B}\}.$$

   Под независимостью σ-алгебр $\mathcal{F}_1$ и $\mathcal{F}_2$ подразумевается, что любые два события A и B такие, что $A \in \mathcal{F}_1$ и $B \in \mathcal{F}_2$, независимы.

8. Для ОУМО выполняется неравенство Йенсена:

   $$\mathbb{E}^{\mathcal{A}} f(\xi) \geqslant f\left(\mathbb{E}^{\mathcal{A}}\xi\right), \tag{1.18}$$

   где $f\colon D \to \mathbb{R}$ – это выпуклая функция, $\xi \overset{\text{п.н.}}{\in} D \subseteq \mathbb{R}$, D – выпуклое множество; считается, что если $\mathbb{E}^{\mathcal{A}} f(\xi)$ определено, то и $f\left(\mathbb{E}^{\mathcal{A}}\xi\right)$ также определено.

   Доказательство. Во-первых, в силу выпуклости множества D, а также того, что $\xi \overset{\text{п.н.}}{\in} D$, получаем $\mathbb{E}^{\mathcal{A}}\xi \overset{\text{п.н.}}{\in} D$. Во-вторых, в силу выпуклости функции f, для любого $x^* \in D$ выполнено субградиентное неравенство:

   $$\exists d \in \mathbb{R}: \quad f(x) \geqslant f(x^*) + d(x - x^*), \quad \forall x \in D. \tag{1.19}$$

   Так как $\xi \overset{\text{п.н.}}{\in} D$, $\mathbb{E}^{\mathcal{A}}\xi \overset{\text{п.н.}}{\in} D$, положим в (1.19) $x = \xi$, $x^* = \mathbb{E}^{\mathcal{A}}\xi$:

   $$f(\xi) \geqslant f(\mathbb{E}^{\mathcal{A}}\xi) + d\left(\xi - \mathbb{E}^{\mathcal{A}}\xi\right). \tag{1.20}$$

   Теперь действуем ОУМО $\mathbb{E}^{\mathcal{A}}$:

   $$\mathbb{E}^{\mathcal{A}}(f(\xi)) \geqslant \mathbb{E}^{\mathcal{A}}\left(f(\mathbb{E}^{\mathcal{A}}\xi) + d\left(\xi - \mathbb{E}^{\mathcal{A}}\xi\right)\right) \overset{\text{св-ва 1, 4}}{=} f(\mathbb{E}^{\mathcal{A}}\xi). \tag{1.21}$$

   □

9. Рассмотрим пространство классов эквивалентности случайных величин с конечными моментами p-го порядка ($p \geqslant 1$):

$$\mathcal{L}_p(\mathbb{P}) = \left\{\xi \text{ — класс эквивалентности сл.в.}: \xi \sim \eta \Longleftrightarrow \xi \overset{\text{п.н.}}{=} \eta;\ \mathbb{E}\,|\xi|^p < +\infty\right\},\ p < \infty;$$

$$\mathcal{L}_\infty(\mathbb{P}) = \left\{\xi \text{ — класс эквивалентности сл.в.}: \xi \sim \eta \Longleftrightarrow \xi \overset{\text{п.н.}}{=} \eta;\ \operatorname{esssup}|\xi| < +\infty\right\}.$$

Под операцией сложения классов подразумевается сложение представителей соответствующих классов, а под операцией умножения класса на число — умножение на число представителя этого класса. Очевидно, что эти операции корректны и $\mathcal{L}_p(\mathbb{P})$ является линейным пространством. Формулы

$$\langle \xi, \eta \rangle = \mathbb{E}\,\xi\eta = \int \xi(\omega)\eta(\omega)\ \mathbb{P}(d\omega), \tag{1.22}$$

$$\|\xi\|_p = \left(\mathbb{E}\,|\xi|^p\right)^{\frac{1}{p}},\ p < \infty, \quad \|\xi\|_\infty = \operatorname{esssup}|\xi| \tag{1.23}$$

задают скалярное произведение и норму в пространстве классов эквивалентности. Из функционального анализа известно, что описанное пространство с так введённой нормой полно, а значит, $\mathcal{L}_p(\mathbb{P})$ — банахово пространство.

Теорема 1.1. *Оператор $\mathbb{E}^{\mathcal{A}}\colon \mathcal{L}_p \to \mathcal{L}_p$ является линейным непрерывным ограниченным оператором, причём подчиненная норма равна $\left\|\mathbb{E}^{\mathcal{A}}\right\| = 1$.*

Доказательство. Для начала покажем, что оператор $\mathbb{E}^{\mathcal{A}}$ переводит пространство $\mathcal{L}_p$ в $\mathcal{L}_p$. Действительно, если $p < \infty$, то

$$\mathbb{E}\left|\mathbb{E}^{\mathcal{A}}\xi\right|^p \leqslant \{\text{неравенство Йенсена: } \mathbb{E}^{\mathcal{A}}\left(|\xi|^p\right) \geqslant \left|\mathbb{E}^{\mathcal{A}}\xi\right|^p\} \leqslant$$
$$\leqslant \mathbb{E}\,\mathbb{E}^{\mathcal{A}}\left(|\xi|^p\right) \overset{\text{по сл-вию 1.5}}{=} \mathbb{E}\left(|\xi|^p\right) < \{\xi \in \mathcal{L}_p\} < \infty.$$

Если же $p = \infty$, то

$$\operatorname{esssup}\left|\mathbb{E}^{\mathcal{A}}\xi\right| \leqslant \{\text{св-во монотонности}\} \leqslant \operatorname{esssup}\left|\mathbb{E}^{\mathcal{A}}(\operatorname{esssup}|\xi| \cdot \mathbf{1}_\Omega)\right| =$$
$$= \operatorname{esssup}\left|\operatorname{esssup}|\xi| \cdot \mathbb{E}^{\mathcal{A}}(\mathbf{1}_\Omega)\right| = \operatorname{esssup}|\xi| < \{\xi \in \mathcal{L}_\infty\} < \infty.$$

Следовательно, $\mathbb{E}^{\mathcal{A}}\xi \in \mathcal{L}_p$ при $\xi \in \mathcal{L}_p$.

Линейность оператора следует из свойства 1. Из курса функционального анализа известно, что линейный оператор, действующий в банаховых пространствах, непрерывен тогда и только тогда, когда он ограничен. Следовательно, осталось показать, что норма ОУМО равна $\left\|\mathbb{E}^{\mathcal{A}}\right\| = 1$. По определению,

$$\left\|\mathbb{E}^{\mathcal{A}}\right\| \overset{\text{def}}{=} \sup_{\|\xi\|=1}\left\|\mathbb{E}^{\mathcal{A}}\xi\right\|.$$

(a) Рассмотрим случай $p < +\infty$. Зафиксируем $\forall \xi \in \mathcal{L}_p$:

$$\|\xi\| = \left(\mathbb{E}\,|\xi|^p\right)^{\frac{1}{p}} = 1. \tag{1.24}$$

Тогда, как было показано выше:

$$\left\|\mathbb{E}^{\mathcal{A}}\xi\right\|^p = \mathbb{E}\left|\mathbb{E}^{\mathcal{A}}\xi\right|^p \leqslant \mathbb{E}\left(|\xi|^p\right).$$

Учитывая (1.24), получим

$$\left\|\mathbb{E}^{\mathcal{A}}\xi\right\| \leqslant 1. \tag{1.25}$$

Следовательно,

$$\left\|\mathbb{E}^{\mathcal{A}}\right\| \leqslant 1. \tag{1.26}$$

Если взять $\xi = \mathbf{1}_\Omega$, то видно, что $\left\|\mathbb{E}^{\mathcal{A}}\right\| = 1$.

(b) Осталось рассмотреть случай $p = +\infty$. Действуя аналогично, получим:

$$\begin{gathered}
\|\xi\| = \operatorname{esssup}|\xi| = 1; \\
\left\|\mathbb{E}^{\mathcal{A}}\,\xi\right\| = \operatorname{esssup}\left|\mathbb{E}^{\mathcal{A}}\,\xi\right| \leqslant \{\text{св-во монотонности}\} \leqslant \\
\leqslant \operatorname{esssup}\left|\mathbb{E}^{\mathcal{A}}(\operatorname{esssup}|\xi| \cdot \mathbf{1}_\Omega)\right| = \{\|\xi\| = 1\} = \operatorname{esssup}\left|\mathbb{E}^{\mathcal{A}}\,\mathbf{1}_\Omega)\right| = 1 \implies \\
\left\|\mathbb{E}^{\mathcal{A}}\right\| \leqslant 1 \implies \{\xi = \mathbf{1}_\Omega\} \implies \left\|\mathbb{E}^{\mathcal{A}}\right\| = 1.
\end{gathered}$$

□

10. Рассмотрим случай $p = 2$, т.е. ОУМО, действующий в гильбертовом пространстве. Тогда оператор $\mathbb{E}^{\mathcal{A}}\colon\ \mathcal{L}_2 \to \mathcal{L}_2$ является ортогональным проектором:

$$\langle \mathbb{E}^{\mathcal{A}}\,\xi, \xi - \mathbb{E}^{\mathcal{A}}\,\xi \rangle = 0. \tag{1.27}$$

Доказательство.

$$\begin{gathered}
\langle \mathbb{E}^{\mathcal{A}}\,\xi, \xi - \mathbb{E}^{\mathcal{A}}\,\xi \rangle \overset{(1.22)}{=} \mathbb{E}\left((\mathbb{E}^{\mathcal{A}}\,\xi) \cdot (\xi - \mathbb{E}^{\mathcal{A}}\,\xi)\right) = \mathbb{E}\left(\xi\,\mathbb{E}^{\mathcal{A}}\,\xi\right) - \mathbb{E}\left(\mathbb{E}^{\mathcal{A}}\,\xi\,\mathbb{E}^{\mathcal{A}}\,\xi\right) \overset{\text{сл-вие 1.5}}{=} \\
= \mathbb{E}\,\mathbb{E}^{\mathcal{A}}\left(\xi\,\mathbb{E}^{\mathcal{A}}\,\xi\right) - \mathbb{E}\left(\mathbb{E}^{\mathcal{A}}\,\xi\,\mathbb{E}^{\mathcal{A}}\,\xi\right) \overset{\text{св-во 6}}{=} \mathbb{E}\left(\mathbb{E}^{\mathcal{A}}\,\xi\,\mathbb{E}^{\mathcal{A}}\,\xi\right) - \mathbb{E}\left(\mathbb{E}^{\mathcal{A}}\,\xi\,\mathbb{E}^{\mathcal{A}}\,\xi\right) = 0.
\end{gathered}$$

□

Следствие 1.6. *Задача регрессии. Пусть неизвестная случайная величина ξ принадлежит $\mathcal{L}_2$, а имеющаяся информация формализована в знании σ-алгебры $\mathcal{A}$. Тогда случайная величина $\mathbb{E}^{\mathcal{A}}\,\xi$ есть наилучший в среднеквадратичном смысле предѝктор для ξ.*

Доказательство. Рассматривается задача регрессии — задача наилучшего приближения в среднеквадратичном случайной величины ξ величиной из $m\,(\mathcal{A})$:

$$\|\xi - \eta\|_{\mathcal{L}_2} \to \min_{\eta \in m(\mathcal{A})}.$$

Покажем, что решение этой задачи является ортогональный оператор $\mathbb{E}^{\mathcal{A}}\,\xi$.

$$\begin{gathered}
\|\xi - \eta\|^2_{\mathcal{L}_2} = \mathbb{E}(\xi - \eta)^2 = \mathbb{E}\,\mathbb{E}^{\mathcal{A}}\left(\xi^2 - 2\xi\eta + \eta^2\right) = \{\eta \in m\,(\mathcal{A})\} = \\
= \mathbb{E}\left(\mathbb{E}^{\mathcal{A}}(\xi^2) - 2\eta\,\mathbb{E}^{\mathcal{A}}\,\xi + \eta^2\right) = \mathbb{E}\left(\mathbb{E}^{\mathcal{A}}(\xi^2) - (\mathbb{E}^{\mathcal{A}}\,\xi)^2\right) + \mathbb{E}\left((\mathbb{E}^{\mathcal{A}}\,\xi)^2 - 2\eta\,\mathbb{E}^{\mathcal{A}}\,\xi + \eta^2\right) = \\
= \mathbb{E}\left(\mathbb{E}^{\mathcal{A}}(\xi^2) - (\mathbb{E}^{\mathcal{A}}\,\xi)^2\right) + \mathbb{E}\left(\mathbb{E}^{\mathcal{A}}\,\xi - \eta\right)^2 \to \min_{\eta \in m(\mathcal{A})}.
\end{gathered}$$

Откуда $\eta = \mathbb{E}^{\mathcal{A}}\,\xi$. □

Утверждение 1.1. *Проектор $P\colon\ V \to V$ является ортогональным тогда и только тогда, когда он является самосопряженным оператором:*

$$P^2 = P\ :\quad \langle Px, x - Px \rangle = 0\,\forall x \in V \iff P^* = P. \tag{1.28}$$

Доказательство. (a) Докажем, что из ортогональности проектора следует его самосопряженность. Обозначим:

$$\ker P = \{x \in V \mid \; Px = 0\} \text{ — ядро оператора;} \tag{1.29}$$

$$\mathrm{im} P = \{y \in V \mid \; \exists x \in V : Px = y\} \text{ — образ оператора.} \tag{1.30}$$

Покажем, что $\mathrm{im} P \perp \ker P$: $\forall x \in \ker P$, $\forall y \in \mathrm{im} P$

$$\begin{gathered}\langle x, y\rangle = \langle x, Pz\rangle = \{x \in \ker P\} = \langle x, P(z-x)\rangle = \langle z, P(z-x)\rangle - \langle z-x, P(z-x)\rangle = \\ = \{x \in \ker P\} = \langle z, Pz\rangle - \langle z-x, P(z-x)\rangle = \{\text{ортогональность}\} = \\ = \langle Pz, Pz\rangle - \langle P(z-x), P(z-x)\rangle = \{x \in \ker P\} = 0.\end{gathered}$$

Тогда $\forall x \in V$, $\forall y \in V$

$$\begin{gathered}\langle Px, y\rangle = \langle Px, y - Py + Py\rangle = \{P^2 = P \Longrightarrow y - Py \in \ker P;\; Px \in \mathrm{im} P; \\ \mathrm{im} P \perp \ker P\} = \langle Px, Py\rangle = \langle Px - x + x, Py\rangle = \langle x, Py\rangle.\end{gathered}$$

Откуда получаем, что $P = P^*$.

(b) Теперь докажем, что из самосопряженности проектора следует его ортогональность: $\forall x \in V$

$$\begin{gathered}\langle Px, x - Px\rangle = \langle Px, x\rangle - \langle Px, Px\rangle = \{P^* = P\} = \langle Px, x\rangle - \langle x, P^2x\rangle = \\ = \{P^2 = P\} = \langle Px, x\rangle - \langle x, Px\rangle = 0.\end{gathered}$$

□

11. (a) Если последовательность случайных величин $\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$ сходится в $\mathcal{L}_p$, то последовательность $\mathbb{E}^{\mathcal{A}}\,\xi_n$ сходится в $\mathcal{L}_p$ к случайной величине, полученной в результате применения ОУМО к пределу последовательности случайных величин: $\mathbb{E}^{\mathcal{A}}\,\xi_n \xrightarrow{\mathcal{L}_1} \mathbb{E}^{\mathcal{A}}\,\xi$.

    (b) Если последовательность случайных величин $\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$ сходится по вероятности и равномерно интегрируема, то последовательность $\mathbb{E}^{\mathcal{A}}\,\xi_n$ сходится в $\mathcal{L}_1$ к случайной величине, полученной в результате применения ОУМО к пределу последовательности случайных величин: $\mathbb{E}^{\mathcal{A}}\,\xi_n \xrightarrow{\mathcal{L}_1} \mathbb{E}^{\mathcal{A}}\,\xi$.

Доказательство. Первое утверждение следует из непрерывности ОУМО $\mathbb{E}^{\mathcal{A}}\colon\; \mathcal{L}_p \to \mathcal{L}_p$, а второе — из известного факта о том, что если последовательность случайных величин сходится по вероятности и равномерно интегрируема, то такая последовательность сходится в пространстве $\mathcal{L}_1$. □

Пример 1.1. Рассмотрим разбиение (конечное или счетное) пространства Ω: $A_1, A_2, \ldots$ — попарно непересекающиеся подмножества Ω, причём

$$\sum_i A_i = \Omega,\; \mathbb{P}(A_i) > 0.$$

Введём следующую σ-алгебру, порожденную этими множествами A_i:

$$\mathcal{A} = \sigma\left(\{A_i\}\right),$$

т.е. $\mathcal{A}$ представляет собой σ-алгебру, содержащую пустое множество, все множества A_i, а также их всевозможные объединения.

Зафиксируем некоторую случайную величину $\xi \in m(\mathcal{F})$ и найдем $\mathbb{E}^{\mathcal{A}}\xi$. Напомним, что, по определению, случайная величина $\mathbb{E}^{\mathcal{A}}\xi$ является $\mathcal{A}$-измеримой, т.е. является кусочно-постоянной:

$$\mathbb{E}^{\mathcal{A}}\xi = \sum_i a_i \mathbf{1}_{A_i}, \tag{1.31}$$

где $a_i \in \mathbb{R}$ — это то значение, которое принимает случайная величина $\mathbb{E}^{\mathcal{A}}\xi$ на множестве A_i. Покажем, что a_i равно условному математическому ожиданию (не путать с ОУМО!):

$$a_i = \mathbb{E}(\xi \mid A_i) = \mathbb{E}_{A_i}\xi = \int \xi \, d\,\mathbb{P}_{A_i}, \tag{1.32}$$

где $\mathbb{P}_{A_i}$ — условная вероятность (при условии, что произошло событие $\omega \in A_i$):

$$\mathbb{P}_{A_i}(B) \equiv \mathbb{P}(B \mid A_i) \overset{\mathsf{def}}{=} \frac{\mathbb{P}(A_i \cap B)}{\mathbb{P}(A_i)}. \tag{1.33}$$

Для доказательства достаточно проверить второе условие из определения ОУМО:

$$\mathbb{E}(\mathbf{1}_B\xi) = \mathbb{E}\left(\mathbf{1}_B\,\mathbb{E}^{\mathcal{A}}\xi\right), \qquad \forall B \in \mathcal{A}. \tag{1.34}$$

Пользуясь (1.32), (1.33), можем написать:

$$a_i = \int \xi(\omega)\ \mathbb{P}_{A_i}(d\omega) = \int \xi(\omega)\ \frac{\mathbb{P}(A_i \cap d\omega)}{\mathbb{P}(A_i)} = \frac{1}{\mathbb{P}(A_i)} \int\limits_{A_i} \xi(\omega)\ \mathbb{P}(d\omega) = \frac{\mathbb{E}(\xi \cdot \mathbf{1}_{A_i})}{\mathbb{P}(A_i)}.$$

В результате условие (1.34) перепишется:

$$\mathbb{E}(\mathbf{1}_B\xi) = \mathbb{E}\left(\mathbf{1}_B \sum_i \frac{\mathbb{E}(\xi \cdot \mathbf{1}_{A_i})}{\mathbb{P}(A_i)} \mathbf{1}_{A_i}\right), \qquad \forall B \in \mathcal{A}.$$

Учитывая, что $\mathcal{A}$ представляет собой σ-алгебру, содержащую пустое множество, все множества A_i, а также их всевозможные объединения, получим, что $B \cap A_i \in \{\varnothing, A_i\}$. Воспользовавшись этим, докажем (1.34):

$$\mathbb{E}\left(\mathbf{1}_B \sum_i \frac{\mathbb{E}(\xi \cdot \mathbf{1}_{A_i})}{\mathbb{P}(A_i)} \mathbf{1}_{A_i}\right) = \mathbb{E}\left(\sum_i \frac{\mathbb{E}(\xi \cdot \mathbf{1}_{A_i})}{\mathbb{P}(A_i)} \mathbf{1}_{A_i \cap B}\right) = \sum_{j\colon B\cap A_j = A_j} \frac{\mathbb{E}\left(\xi \cdot \mathbf{1}_{A_j}\right)}{\mathbb{P}(A_j)}\,\mathbb{E}\,\mathbf{1}_{A_j} =$$

$$= \{\mathbb{E}\,\mathbf{1}_{A_j} = \mathbb{P}(A_j)\} = \sum_{j\colon B\cap A_j = A_j} \mathbb{E}\left(\xi \cdot \mathbf{1}_{A_j}\right) = \sum_{j\colon B\cap A_j = A_j} \int\limits_{A_j} \xi \, d\,\mathbb{P} = \int\limits_B \xi \, d\,\mathbb{P} = \mathbb{E}(\mathbf{1}_B\xi).$$

Таким образом,

$$\mathbb{E}^{\mathcal{A}}\xi = \sum_i \left(\mathbb{E}_{A_i}\xi \cdot \mathbf{1}_{A_i}\right), \tag{1.35}$$

что соответствует интерпретации ОУМО $\mathbb{E}^{\mathcal{A}}\xi$ как среднего значения случайной величины $\xi(\omega)$ при условии наличия информации $\mathcal{A}$, т.е. знании о том, в какое из множеств A_i попало ω.

Пример 1.2. Пусть случайная величина ξ имеет распределение Коши[3]:

$$\xi \sim \mathrm{K}(0, 1),$$

[3]Мы не пишем здесь вероятностного пространства, подразумевая, что можно рассмотреть каноническую модель вида $(\mathbb{R}, \mathcal{B}, \mathrm{K}(0,1))$, $\xi(\omega) = \omega$ и показать, что она непротиворечива.

т.е. её плотность распределения равна

$$f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)},\ -\infty < x < \infty.$$

Выберем σ-алгебры $\mathcal{A}_i \subseteq \mathcal{B}$, $i = 1, 2, 3$, таким образом, что

1. $\mathcal{A}_1 = \{\varnothing, \Omega\}$;
2. $\mathcal{A}_2 = \sigma\left(\{(-\infty; 0), [0; +\infty)\}\right)$;
3. $\mathcal{A}_3 = \sigma\left(\{[k; k+1),\ k = 0, \pm1, \pm2, \ldots\}\right)$.

В силу следствия 1.4, а также известного факта о том, что математическое ожидание от случайной величины, имеющей распределение Коши, не существует, можно сделать вывод, что $\mathbb{E}^{\mathcal{A}_1}\xi$ также не определено.

Пользуясь примером 1.1, легко видеть, что

$$\mathbb{E}^{\mathcal{A}_2}\xi = \begin{cases} +\infty, & \text{если } \omega \in [0; +\infty), \\ -\infty, & \text{если } \omega \in (-\infty; 0), \end{cases}$$

т.е. $\mathbb{E}^{\mathcal{A}_2}\xi$ определено, но не является конечным. Также можно показать, что $\mathbb{E}^{\mathcal{A}_3}\xi$ не только определено, но и конечно (кусочно-постоянно):

$$\mathbb{E}^{\mathcal{A}_3}\xi = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \mathbf{1}_{[k;k+1)} \frac{1}{\mathbb{P}(\xi \in [k; k+1))} \int\limits_k^{k+1} x \frac{1}{\pi(1+x^2)}\ dx.$$

Таким образом, ОУМО при действии на одну и ту же случайную величину может давать различный результат в зависимости от того, какая σ-алгебра была выбрана.

Для того чтобы иметь возможность говорить не только в терминах условных средних, но и в терминах условных вероятностей, введём вероятностный аналог ОУМО (также, как вероятность $\mathbb{P}$ есть аналог обычного математического ожидания $\mathbb{E}$).

Для начала напомним понятие переходного ядра. Пусть имеется вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, на нем заданы две случайные величины: X, принимающая значения в измеримом пространстве $(\mathcal{X}, \mathcal{A})$, и Y, принимающая значения в измеримом пространстве $(\mathcal{Y}, \mathcal{B})$.

Определение 1.4. Переходным ядром (или регулярным условным распределением Y) называется функция $Q(x, B)\colon\ (\mathcal{X}, \mathcal{B}) \to [0, 1]$ (по смыслу равная $\mathbb{P}_{Y|X=x}(B)$), удовлетворяющая свойствам:

1) при каждом фиксированном x функция $Q(x, \cdot\,)$ является вероятностной мерой на $(\mathcal{Y}, \mathcal{B})$;

2) при каждом фиксированном B функция $Q(\,\cdot\,, B)$ является измеримой, т.е. $\forall c\ \{x : Q(x, B) < c\} \in \mathcal{A}$ (иными словами, $Q(\,\cdot\,, B)$ является ($\mathcal{A}$,$\mathcal{B}_{[0,1]}$)-измеримой, где $\mathcal{B}_{[0,1]}$ — борелевская σ-алгебра на отрезке [0,1]);

3) совместное распределение X и Y находится по формуле, которая является интегральным аналогом формулы полной вероятности:

$$\mathbb{P}_{XY}(A, B) = \int\limits_A Q(x, B)\ \mathbb{P}_X(dx) = \int\limits_A \mathbb{P}_{Y|X=x}(B)\ \mathbb{P}_X(dx). \tag{1.36}$$

Естественно положить в качестве условной вероятности события A при условии наличия информации $\mathcal{A}$ следующее:

$$\mathbb{P}(A \mid \mathcal{A}) \overset{\mathsf{def}}{=} \mathbb{E}^{\mathcal{A}}\, \mathbf{1}_A. \tag{1.37}$$

Получаем, что условная вероятность $\mathbb{P}(A \mid \mathcal{A})$ есть функция от двух аргументов:

$$\mathbb{P}(A \mid \mathcal{A}) = Q(\omega, A), \tag{1.38}$$

причём, в силу определения ОУМО, эта функция для любого A измерима относительно σ-алгебры $\mathcal{A}$ по первому аргументу: $Q(\,\cdot\,, A) \in m\,(\mathcal{A})$. По аналогии с определение переходного ядра хотелось бы, чтобы $Q(\omega, \,\cdot\,)$ как функция от второго аргумента являлась бы для любого ω вероятностной мерой на $(\Omega, \mathcal{F})$. Покажем, что, вообще говоря, гарантировать выполнения этого свойства нельзя. Напомним, что, по определению, функция $\mu\colon\ \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ является вероятностной мерой, если выполнены четыре свойства: аддитивности, неотрицательности, непрерывности и нормированности. Следовательно, если функция $Q\colon\ A \to Q(\omega, A)$ является вероятностной мерой, то для неё должно быть выполнено свойство счётной аддитивности $\forall A_i$:

$$Q\left(\omega, \sum_i A_i\right) = \sum_i Q(\omega, A_i). \tag{1.39}$$

Заметим, в силу замечания 1.6, функция $Q(\,\cdot\,, A)$ определена почти всюду относительно вероятностной меры $\mathbb{P}\,\big|_{\mathcal{A}}$, а значит, равенство (1.39) надо понимать с точностью до почти наверное, т.е. обозначив

$$\left\{\omega\colon Q\left(\omega, \sum_i A_i\right) \neq \sum_i Q(\omega, A_i)\right\} = N(A_1, A_2, \ldots, A_i, \ldots) \in \mathcal{A}, \tag{1.40}$$

имеем

$$\mathbb{P}\left(N(A_1, A_2, \ldots, A_i, \ldots)\right) = 0. \tag{1.41}$$

Однако нужно иметь в виду, что множества $N(A_1, A_2, \ldots, A_i, \ldots)$, вообще говоря, не совпадают для различных последовательностей $\{A_1, A_2, \ldots, A_i, \ldots\}$, причём может так получиться, что

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{\{A_i\}} N(A_1, A_2, \ldots, A_i, \ldots)\right) > 0. \tag{1.42}$$

Заметим, что (1.42) возможно только если берется несчетное объединение (в силу счетной аддитивности меры $\mathbb{P}$); таким образом, если вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ дискретно, то (1.42) не возможно.

Определение 1.5. Регулярной условной вероятностью события A при условии наличия информации $\mathcal{A}$ (регулярным переходным ядром) $\mathbb{P}(A \mid \mathcal{A})$ называется функция $Q\colon\ (\Omega, \mathcal{F}) \to \mathbb{R}$, удовлетворяющая свойствам:

1) $Q(\omega, A) = \mathbb{E}^{\mathcal{A}}\, \mathbf{1}_A(\omega)$, $\forall A \in \mathcal{F}$;

2) при каждом фиксированном ω функция $Q(\omega, \,\cdot\,)$ является вероятностной мерой на $(\Omega, \mathcal{F})$, причём выполнение свойства счётной аддитивности понимается с точностью до почти всюду относительно меры $\mathbb{P}\,\big|_{\mathcal{A}}$.

Теорема 1.2. *Если вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ изоморфно польскому пространству*[4]*, то функция $Q(\omega, A) = \mathbb{E}^{\mathcal{A}}\, \mathbf{1}_A(\omega)$ является регулярной условной вероятностью (т.е. гарантируется выполнение второго свойства в определении $\mathbb{P}(A \mid \mathcal{A})$).*

Таким образом, существование нерегулярных условных вероятностей — это "артефакт" аксиоматики теории множеств. Например, если рассматривать вероятностное пространство мощности не более, чем континуум, и принять аксиому детерминированности, то выполнение второго свойства в определении $\mathbb{P}(A \mid \mathcal{A})$ также гарантируется.

Проясним теперь связь между ОУМО, который был введён формально, и условным распределением (переходным ядром). Пусть вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ изоморфно польскому пространству (следовательно, по теореме, для любой σ-алгебры $\mathcal{A}$ существует регулярное переходное ядро). Рассмотрим в качестве σ-алгебры $\mathcal{A}$ σ-алгебру, порожденную случайным элементом η со значениями в измеримом пространстве $(E, \mathcal{E})$:

$$\mathcal{A} = \mathcal{F}_\eta \overset{\mathsf{def}}{=} \left\{\eta^{-1}(B),\, B \in \mathcal{E}\right\}. \tag{1.43}$$

Пусть ξ — некоторая случайная величина. Тогда для $\mathbb{E}^{\mathcal{A}}\, \xi$, кроме $\mathbb{E}(\xi \mid \mathcal{A})$, существует ещё одно обозначение: $\mathbb{E}(\xi \mid \eta)$.

Теорема 1.3. *Пусть дано вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Случайная величина $\xi\colon \Omega \to \mathbb{R}$ является измеримой относительно σ-алгебры $\mathcal{F}_\eta$, порожденной случайным элементом $\eta\colon \Omega \to E$ со значениями в измеримом пространстве $(E, \mathcal{E})$, тогда и только тогда, когда она представима в виде:*

$$\xi = \phi(\eta(\omega)), \tag{1.44}$$

где $\phi\colon E \to \mathbb{R}$ — $(\mathcal{E}, \mathcal{B})$-измеримая функция.

Таким образом, $\mathbb{E}(\xi \mid \eta)$ представима в виде:

$$\mathbb{E}(\xi \mid \eta) = \phi(\eta(\omega)), \tag{1.45}$$

где $\phi\colon E \to \mathbb{R}$ — $(\mathcal{E}, \mathcal{B})$-измеримая функция. Получаем, что для определения $\mathbb{E}(\xi \mid \eta)$ важно знать значение не ω, а случайного элемента η, т.е.

$$\mathbb{E}(\xi \mid \eta = x) = \phi(x). \tag{1.46}$$

Но мы знаем, что по определению условного математического ожидания:

$$\mathbb{E}(\xi \mid \eta = x) \overset{\mathsf{def}}{=} \int\limits_{\mathbb{R}} y\ \mathbb{P}_{\xi|\eta=x}(dy). \tag{1.47}$$

Утверждение 1.2. *Пусть дано вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Пусть также даны случайная величина $\xi\colon \Omega \to \mathbb{R}$ и σ-алгебра $\mathcal{A} = \mathcal{F}_\eta$, порожденная случайным элементом $\eta\colon \Omega \to E$ со значениями в измеримом пространстве $(E, \mathcal{E})$. Положим*

$$\phi(x) = \int\limits_{\mathbb{R}} y\ \mathbb{P}_{\xi|\eta=x}(dy).$$

Тогда

$$\mathbb{E}^{\mathcal{A}}\, \xi = \phi(\eta(\omega))$$

[4]Польское пространство – это полное сепарабельное метрическое пространство.

Доказательство. Измеримость следует из определения переходного ядра $\mathbb{P}_{\xi|\eta=x}(B)$. Покажем выполнение второго свойства из определения ОУМО:

$$\mathbb{E}\left(\mathbf{1}_B \xi\right) = \mathbb{E}\left(\mathbf{1}_B \, \mathbb{E}^{\mathcal{A}} \xi\right), \quad \forall B \in \mathcal{A}.$$

Так как $\mathcal{A} = \mathcal{F}_\eta$, достаточно показать, что

$$\mathbb{E}\left(\mathbf{1}_{\eta^{-1}(B)} \xi\right) = \mathbb{E}\left(\mathbf{1}_{\eta^{-1}(B)} \phi(\eta(\omega))\right), \quad \forall B \in \mathcal{E}.$$

Заменяя математическое ожидание интегралом и учитывая выражение для функции $\phi(x)$, получим:

$$\int\limits_{\Omega} \mathbf{1}_{\eta^{-1}(B)}(\omega) \xi(\omega) \; \mathbb{P}(d\omega) = \int\limits_{\eta^{-1}(B)} \left(\int\limits_{\mathbb{R}} y \; \mathbb{P}_{\xi|\eta=\eta(\omega)}(dy) \right) \mathbb{P}(d\omega), \quad \forall B \in \mathcal{E}.$$

Перепишем левую часть, применяя теорему о замене переменных:

$$\int\limits_{\Omega} \mathbf{1}_{\eta^{-1}(B)}(\omega) \xi(\omega) \; \mathbb{P}(d\omega) = \int\limits_{B \times \mathbb{R}} \xi \; \mathbb{P}_{\eta\xi}(d\eta, d\xi).$$

Используя (1.36) и теорему о замене переменных, перепишем правую часть:

$$\int\limits_{\eta^{-1}(B)} \left(\int\limits_{\mathbb{R}} y \; \mathbb{P}_{\xi|\eta=\eta(\omega)}(dy) \right) \mathbb{P}(d\omega) = \int\limits_{B} \left(\int\limits_{\mathbb{R}} y \; \mathbb{P}_{\xi|\eta}(dy) \right) \mathbb{P}_\eta(d\eta) = \int\limits_{B \times \mathbb{R}} \xi \; \mathbb{P}_{\eta\xi}(d\eta, d\xi).$$

□

Таким образом, конструкция $\mathbb{E}^{\mathcal{A}}$ несколько более общая, чем это нужно для приложений, т.к. на практике используется именно $\mathbb{E}(\xi \mid \eta)$. Заметим, что в разобранных выше примерах можно было бы обойтись конструкцией вида $\mathbb{E}(\xi \mid \eta)$. Теоретически, можно предложить такую σ-алгебру, которая не порождается никакой случайной величиной, но такая "экзотика" на практике не применяется. Однако для теории в дальнейшем нам удобнее будет рассматривать условное математическое ожидание как оператор.

Замечание 1.10. Рассмотрим следующую задачу регрессии (см. следствие 1.6): $\mathcal{A} = \mathcal{F}_\eta$ — имеющаяся информация, ξ — неизвестная случайная величина,

$$\mathbb{E}(\xi - \varphi(\eta))^2 \to \min_{\varphi(\cdot)}.$$

Тогда искомая функция регрессии $\varphi(x) = \mathbb{E}(\xi \mid \eta = x)$, т.к. $\mathbb{E}^{\mathcal{A}} \xi = \mathbb{E}(\xi \mid \eta)$.

2 Случайные процессы с дискретным временем. Мартингальное свойство для процессов с дискретным временем. Примеры

Для описания случайных процессов в приложениях обычного вероятностного пространства $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ становится недостаточно, поэтому введём понятие **расширенного (фильтрованного) вероятностного пространства** $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$, в которое добавлен ещё один объект — фильтрация.

Определение 2.1. **Фильтрацией** $\mathbb{F}$ называется поток σ-алгебр $\{\mathcal{F}_t,\ t \in T\}$, т.е. семейство σ-алгебр со следующими свойствами:

1) $\mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{F}, \qquad \forall t \in T$;

2) $\mathcal{F}_{t_1} \subseteq \mathcal{F}_{t_2}, \qquad \forall t_1, t_2 \in T\colon t_1 < t_2$.

В рамках рассматриваемой модели $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$ параметр t при этом интерпретируется как время, причём в данном курсе мы ограничимся изучением моделей с дискретным временем[5] и будем рассматривать два варианта:

1) $T = \{0, 1, 2, \ldots\}$;

2) $T = \{0, 1, 2, \ldots, N\}$.

Первый вариант соответствует модели с бесконечным горизонтом, а второй — модели с конечным горизонтом.

Фильтрация $\mathbb{F}$ интерпретируется как поток информации, а $\mathcal{F}_t$ – информация, доступная нам к моменту времени t (в "будущее" заглядывать не можем). Тогда условие 1) из определения фильтрации можно понимать как достаточность информации в модели, т.е. с течением времени мы все время остаемся в рамках обычной модели $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Условие 2) можно интерпретировать как накопление (аккумуляцию) информации со временем. Появление фильтрации $\mathbb{F}$ обусловлено желанием рассматривать динамику процесса, формализовать прошлое и будущее.

Рассмотрим случайный процесс $\xi = \{\xi_t,\ t \in T\}$, т.е. последовательность (конечную или бесконечную, в зависимости от T) случайных величин.

Определение 2.2. **Адаптированным** (по отношению к фильтрации $\mathbb{F}$) процессом[6] ξ называется такой процесс, что $\xi_t \in m\left(\mathcal{F}_t\right)$ для всех $t \in T$.

С содержательной точки зрения, это означает следующее: информация, касающаяся случайной величины ξ_t, есть часть информации, доступной к моменту времени t. Другими словами, термин "адаптированный процесс" означает, что в то, что мы наблюдаем, входит вся информация о процессе, т.е. значение процесса в текущий момент времени нам доступно.

Замечание 2.1. По умолчанию в этом курсе все случайные процессы будут адаптированными.

Определение 2.3. Адаптированный процесс ξ называется **предсказуемым** (на один шаг), если информация о следующем значении процесса известна на предыдущем шаге: $\xi_{t+1} \in m\left(\mathcal{F}_t\right)$ для всех $t \in T$.

Примером предсказуемого процесса может служить курс ЦБ (он устанавливается сегодня на завтра).

Определение 2.4. Адаптированный процесс ξ называется **прогнозируемым**[7], если $\mathbb{E}^{\mathcal{F}_t}\,\xi_{t+1}$ определено и конечно.

---

[5] Случай непрерывного времени сложнее, однако во многом по сути повторяет теорию моделей с дискретным временем.

[6] Иногда адаптированный процесс с дискретным временем называют стохастической последовательностью.

[7] Термин "прогнозируемый процесс" на является стандартным.

Термин “прогнозируемый процесс” можно объяснить следующим образом: если $\xi_{t+1} \in \mathcal{L}_2$, то $\mathbb{E}^{\mathcal{F}_t}\,\xi_{t+1}$ является наилучшим в среднеквадратичном смысле предиктором для ξ_{t+1} (см. следствие 1.6). Другими словами, если процесс прогнозируемый, то можно дать прогноз на шаг вперед.

Замечание 2.2. Ясно, что предсказуемый процесс является прогнозируемым:

$$\mathbb{E}^{\mathcal{F}_t}\,\xi_{t+1} = \{\xi_{t+1} \in m\,(\mathcal{F}_t)\} = \xi_{t+1}\,\mathbb{E}^{\mathcal{F}_t}\,\mathbf{1}_\Omega = \xi_{t+1}.$$

Очевидно, что обратное неверно, т.е. не всякий прогнозируемый процесс является предсказуемым.

Определение 2.5. Говорят, что адаптированный процесс ξ обладает **мартингальным свойством** (является **обобщенным мартингалом**), если $\mathbb{E}^{\mathcal{F}_t}\,\xi_s = \xi_t$ для всех $s, t \in T$ таких, что $s > t$.

Другими словами, процесс обладает мартингальным свойством, если наилучшим прогнозом для будущего значения процесса является его текущее значение.

Замечание 2.3. Если процесс обладает мартингальным свойством, то он является прогнозируемым.

Определение 2.6. Говорят, что адаптированный процесс ξ обладает **супермартингальным свойством** (является **обобщенным супермартингалом**), если $\mathbb{E}^{\mathcal{F}_t}\,\xi_s \leqslant \xi_t$ для всех $s, t \in T$ таких, что $s > t$.

Определение 2.7. Говорят, что адаптированный процесс ξ обладает **субмартингальным свойством** (является **обобщенным субмартингалом**), если $\mathbb{E}^{\mathcal{F}_t}\,\xi_s \geqslant \xi_t$ для всех $s, t \in T$ таких, что $s > t$.

Таким образом, считая, что t — это текущий момент времени (и $\mathcal{F}_t$ — вся доступная на данный момент информация), можно сказать, что обобщённый мартингал — это процесс, условно сохраняющий в среднем своё значение, обобщённый супермартингал — это процесс, условно убывающий в среднем, а обобщённый субмартингал — это процесс, условно возрастающий в среднем. Получаем, что если

1. ξ — обобщённый мартингал, то $\mathbb{E}\,\xi_t = \mathrm{const}$,
2. ξ — обобщённый супермартингал, то $\mathbb{E}\,\xi_t$ не возрастает,
3. ξ — обобщённый субмартингал, то $\mathbb{E}\,\xi_t$ не убывает.

Определение 2.8. Адаптированный процесс ξ называется **(настоящим) мартингалом ((настоящим) супермартингалом, (настоящим) субмартингалом)**, если он обладает мартингальным (супермартингальным, субмартингальным) свойством и имеет конечное математическое ожидание, т.е. $\xi_t \in \mathcal{L}_1$ для всех $t \in T$.

Замечание 2.4. Если математическое ожидание случайной величины ξ конечно (т.е. $\xi \in \mathcal{L}_1$), то и условное математическое ожидание этой случайной величины относительно любой σ-алгебры $\mathcal{A}$ также определено и конечно, т.к. $\mathbb{E}^{\mathcal{A}}\colon\ \mathcal{L}_1 \to \mathcal{L}_1$ (в силу теоремы 1.1). Обратное неверно, т.е. если условное математическое ожидание случайной величины ξ относительно какой-то σ-алгебры $\mathcal{A}$ определено и конечно, то математическое ожидание этой случайной величины, вообще говоря, может и не существовать (см. пример 1.2).

Теорема 2.1 (Критерий (супер-,суб-)мартингального свойства)**.** *Справедливы следующие три утверждения:*

1) адаптированный процесс ξ обладает мартингальным свойством тогда и только тогда, когда $\mathbb{E}^{\mathcal{F}_t}\xi_{t+1} = \xi_t$ для всех $t \in T$;

2) адаптированный процесс ξ обладает супермартингальным свойством тогда и только тогда, когда $\mathbb{E}^{\mathcal{F}_t}\xi_{t+1} \leqslant \xi_t$ для всех $t \in T$;

3) адаптированный процесс ξ обладает субмартингальным свойством тогда и только тогда, когда $\mathbb{E}^{\mathcal{F}_t}\xi_{t+1} \geqslant \xi_t$ для всех $t \in T$.

Доказательство. Докажем первое утверждение. Пусть для адаптированного процесса ξ выполнено следующее свойство: $\mathbb{E}^{\mathcal{F}_t}\xi_{t+1} = \xi_t$ для всех $t \in T$. Покажем по индукции, что этот процесс обладает мартингальным свойством, т.е. $\mathbb{E}^{\mathcal{F}_t}\xi_s = \xi_t$ для всех $s, t \in T$ таких, что $s > t$.

1. $s = t+1$: $\mathbb{E}^{\mathcal{F}_t}\xi_{t+1} = \xi_t$ (дано по условию).

2. Пусть для некоторого $s > t$ это выполнено; покажем, что $\mathbb{E}^{\mathcal{F}_t}\xi_{s+1} = \xi_t$:

$$\mathbb{E}^{\mathcal{F}_t}\xi_{s+1} = \{\mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{F}_s\} = \mathbb{E}^{\mathcal{F}_t}\mathbb{E}^{\mathcal{F}_s}\xi_{s+1} = \mathbb{E}^{\mathcal{F}_t}\xi_s = \{\text{индуктивное предп-е}\} = \xi_t.$$

В обратную строну доказательство тривиально. Остальные два утверждения доказываются аналогично. □

Определение 2.9. Адаптированный процесс ξ называется **обобщённой мартингал-разностью (обобщённой субмартингал-разностью, обобщённой супермартингал-разностью)** относительно фильтрации $\mathbb{F}$, если

1) ξ – прогнозируем,

2) $\mathbb{E}^{\mathcal{F}_t}\xi_{t+1} = 0$ ($\geqslant$ и $\leqslant$ соответственно).

Определение 2.10. Адаптированный процесс ξ называется **(настоящей) мартингал-разностью ((настоящей) субмартингал-разностью, (настоящей) супермартингал-разностью)** относительно фильтрации $\mathbb{F}$, если

1) ξ – прогнозируем,

2) $\mathbb{E}^{\mathcal{F}_t}\xi_{t+1} = 0$ ($\geqslant$ и $\leqslant$ соответственно),

3) $\xi_t \in \mathcal{L}_1$ для всех $t \in T$.

Замечание 2.5. Если процесс ξ является обобщённой мартингал-разностью, то $\mathbb{E}\,\xi_t = 0$ для всех $t \in T$.

Утверждение 2.1. *1. Если процесс ξ является обобщенным (настоящим) мартингалом, то процесс η такой, что $\eta_t = \xi_t - \xi_{t-1} = \triangle\xi_t$, будет обобщенной (настоящей) мартингал-разностью.*

2. Если процесс η является мартингал-разностью, то процесс ξ такой, что $\xi_t = \xi_0 + \sum\limits_{s=1}^{t}\eta_s$, $\xi_0 \in \mathcal{F}_0$, $\xi_0 \in \mathcal{L}_1$, будет мартингалом.

Доказательство. 1. Адаптированность процесса η очевидна. Покажем, что $\mathbb{E}^{\mathcal{F}_t}\eta_{t+1} = 0$:

$$\mathbb{E}^{\mathcal{F}_t}\eta_{t+1} = \mathbb{E}^{\mathcal{F}_t}\xi_{t+1} - \mathbb{E}^{\mathcal{F}_t}\xi_t = \xi_t - \xi_t = 0.$$

Если $\xi_t \in \mathcal{L}_1$ $\forall t \in T$, то и $\eta_t \in \mathcal{L}_1$ $\forall t \in T$.

2. Так как процесс η является адаптированным и $\xi_0 \in \mathcal{F}_0$, то и процесс ξ будет адаптированным. Покажем выполнение мартингального свойства для процесса ξ:

$$\mathbb{E}^{\mathcal{F}_t}\,\xi_{t+1} = \mathbb{E}^{\mathcal{F}_t}\left(\xi_0 + \sum_{s=1}^{t+1}\eta_s\right) = \xi_0 + \sum_{s=1}^{t}\eta_s + \mathbb{E}^{\mathcal{F}_t}\,\eta_{t+1} = \xi_0 + \sum_{s=1}^{t}\eta_s = \xi_t.$$

Если $\eta_t \in \mathcal{L}_1\ \forall t \in T$, $\xi_0 \in \mathcal{L}_1$, то и $\xi_t \in \mathcal{L}_1\ \forall t \in T$.

□

Замечание 2.6. В первой части утверждения 2.1 берется разность “назад” ($\eta_t = \xi_t - \xi_{t-1} = \triangle\xi_t$) для того, чтобы не выйти из класса адаптированных процессов. Далее всегда под значком $\triangle$ перед процессом будет пониматься разность “назад”.

Замечание 2.7. Во второй части утверждения 2.1 процесс $\triangle\xi$ ($\triangle\xi_t = \eta_t$) является мартингал-разностью, а процесс ξ определяется по процессу η с точностью до начального состояния ξ_0.

Пример 2.1. Пусть случайные величины η_t, $t = 1, 2, \ldots$, независимы, причём для каждого t $\mathbb{E}\,\eta_t = 0$ (подразумевается, что $\eta_t \in \mathcal{L}_1\ \forall t$). Положим

$$\xi_t = \xi_0 + \sum_{s=1}^{t}\eta_s, \tag{2.1}$$

где $\xi_0 \in \mathcal{L}_1$ и случайные величины $\xi_0, \eta_1, \eta_2, \ldots$ независимы. Возьмем в качестве фильтрации $\mathbb{F}$ поток σ-алгебр $\{\mathcal{F}_t, t \in T\}$, порожденный процессом ξ: $\mathcal{F}_t = \sigma\{\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_t\} = \mathcal{F}_{\xi_t}$. Другими словами, $\mathbb{F}$ — это минимальная фильтрация, к которой процесс ξ будет адаптирован, т.е. в каждый момент времени мы наблюдаем процесс ξ и только его (такая фильтрация называется канонической).

Покажем, что процесс ξ является мартингалом (настоящим)[8]. Действительно, нетрудно показать, что процесс η будет мартингал-разностью: $\eta_t \in \mathcal{L}_1$, причём

$$\mathbb{E}^{\mathcal{F}_t}\,\eta_{t+1} = \mathbb{E}\,\eta_{t+1} \cdot \mathbf{1}_\Omega = 0.$$

Здесь мы воспользовались независимостью случайных величин η_t и η_{t+1}, а также следующим утверждением:

Утверждение 2.2. *Если случайные величины η и ξ независимы, то $\mathbb{E}^{\mathcal{F}_\xi}\,\eta = \mathbb{E}\,\eta \cdot \mathbf{1}_\Omega$. Другими словами, если σ-алгебры $\mathcal{A}$ и $\mathcal{F}_\eta$ независимы (под независимостью σ-алгебр $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ подразумевается, что любые два события A и B такие, что $A \in \mathcal{A}$ и $B \in \mathcal{B}$, независимы[9]), то, если $\mathbb{E}\,\eta$ определено, $\mathbb{E}^{\mathcal{A}}\,\eta = \mathbb{E}\,\eta \cdot \mathbf{1}_\Omega$.*

Доказательство. Докажем, что если σ-алгебры $\mathcal{A}$ и $\mathcal{F}_\eta$ независимы, то $\mathbb{E}^{\mathcal{A}}\,\eta = \mathbb{E}\,\eta \cdot \mathbf{1}_\Omega$.

Условие измеримости, очевидно, выполнено: $\mathbb{E}\,\eta \cdot \mathbf{1}_\Omega \in m\,(\mathcal{A})$. Значит, достаточно проверить выполнение второго условия из определения ОУМО:

$$\mathbb{E}\,(\mathbf{1}_B\eta) = \mathbb{E}\,(\mathbf{1}_B \cdot (\mathbb{E}\,\eta \cdot \mathbf{1}_\Omega)), \qquad \forall B \in \mathcal{A}.$$

В силу независимости σ-алгебр $\mathcal{A}$ и $\mathcal{F}_\eta$, случайные величины $\mathbf{1}_B$ и η независимы[10], а значит, используя свойства математического ожидания:

$$\mathbb{E}\,(\mathbf{1}_B\eta) = \mathbb{E}\,\mathbf{1}_B\,\mathbb{E}\,\eta;$$
$$\mathbb{E}\,(\mathbf{1}_B \cdot (\mathbb{E}\,\eta \cdot \mathbf{1}_\Omega)) = \mathbb{E}\,(\mathbf{1}_B \cdot \mathbb{E}\,\eta) = \mathbb{E}\,\eta\,\mathbb{E}\,\mathbf{1}_B.$$

□

[8] Если требование $\xi_0 \in \mathcal{L}_1$ опустить, то процесс ξ будет являться обобщенным мартингалом.

[9] События A и B называются независимыми, если $\mathbb{P}(AB) = \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B)$.

[10] Случайные величины η и ξ независимы, если независимы порожденные ими σ-алгебры $\mathcal{F}_\eta$ и $\mathcal{F}_\xi$.

Итак, мы показали, что процесс $\eta = \triangle\xi$ является мартингал-разностью. Следовательно, по утверждению 2.1, процесс ξ является мартингалом. Пришли к следующему утверждению:

Утверждение 2.3. *Процесс с независимыми приращениями, имеющими нулевое математическое ожидание, обладает мартингальным свойством. Если приращения имеют неотрицательное (неположительное) математическое ожидание, то процесс обладает субмартингальным (супермартингальным) свойством.*

Замечание 2.8. Винеровский процесс является примером квадратично интегрируемого мартингала с непрерывным временем (т.к. этот процесс имеет независимые приращения с нулевым математическим ожиданием).

Приведём ещё одно утверждение, касающееся связи между независимостью / некоррелированностью приращений и мартингальным свойством.

Утверждение 2.4. *Пусть процесс ξ — квадратично интегрируемый мартингал*[11] *(т.е. $\xi_t \in \mathcal{L}_2$ и процесс ξ обладает мартингальным свойством). Тогда приращения $\triangle\xi_t$ некоррелируемы, т.е.*

$$\operatorname{cov}(\xi_{s_2} - \xi_{s_1}, \xi_{t_2} - \xi_{t_1}) = 0, \quad \forall\, s_1 < s_2 \leqslant t_1 < t_2.$$

Доказательство. Покажем, что

$$\operatorname{cov}(\xi_t, \xi_{t_2} - \xi_{t_1}) = 0, \quad \forall\, t \leq t_1 \leq t_2.$$

Учитывая, что $\mathbb{E}^{\mathcal{F}_t}\xi_s = \xi_t$ при $t \leqslant s$, а значит, $\mathbb{E}\,\xi_s = \mathbb{E}\,\xi_t$ при $t \leqslant s$, получим:

$$\operatorname{cov}(\xi_t, \xi_{t_2} - \xi_{t_1}) = \mathbb{E}\left[(\xi_t - \mathbb{E}\,\xi_t)(\xi_{t_2} - \xi_{t_1} - \mathbb{E}\,\xi_{t_2} + \mathbb{E}\,\xi_{t_1})\right] =$$
$$= \mathbb{E}\,\xi_t\xi_{t_2} - \mathbb{E}\,\xi_t\xi_{t_1} - \mathbb{E}\,\xi_t\,\mathbb{E}\,\xi_{t_2} + \mathbb{E}\,\xi_t\,\mathbb{E}\,\xi_{t_1} - \mathbb{E}\,\xi_t\,\mathbb{E}\,\xi_{t_2} + \mathbb{E}\,\xi_t\,\mathbb{E}\,\xi_{t_1} + \mathbb{E}\,\xi_t\,\mathbb{E}\,\xi_{t_2} - \mathbb{E}\,\xi_t\,\mathbb{E}\,\xi_{t_1} =$$
$$= \{\mathbb{E}\,\xi_t = \mathbb{E}\,\xi_{t_1} = \mathbb{E}\,\xi_{t_2}\} = \mathbb{E}\,\xi_t\xi_{t_2} - \mathbb{E}\,\xi_t\xi_{t_1}.$$

Из мартингального свойства следует, что для любых s, t таких, что $t \leqslant s$, справедливо:

$$\mathbb{E}\,\xi_t\xi_s = \mathbb{E}\,\mathbb{E}^{\mathcal{F}_t}\xi_t\xi_s = \mathbb{E}\,\xi_t\,\mathbb{E}^{\mathcal{F}_t}\xi_s = \mathbb{E}\,\xi_t^2 < \infty \quad (\xi_t \in \mathcal{L}_2).$$

В результате получим:

$$\operatorname{cov}(\xi_t, \xi_{t_2} - \xi_{t_1}) = \mathbb{E}\,\xi_t\xi_{t_2} - \mathbb{E}\,\xi_t\xi_{t_1} = \mathbb{E}\,\xi_t^2 - \mathbb{E}\,\xi_t^2 = 0, \quad \forall\, t \leq t_1 \leq t_2.$$

Следовательно, $\operatorname{cov}(\xi_{s_2} - \xi_{s_1}, \xi_{t_2} - \xi_{t_1}) = 0$, для любых $s_1 < s_2 \leqslant t_1 < t_2$. □

Получаем, что мартингальное свойство — это в каком-то смысле “нечто среднее” между независимостью и некоррелированностью приращений: из независимости приращений (при условии их нулевого математического ожидания) следует мартингальное свойство, а из мартингального свойства следует лишь их некоррелируемость.

Приведем пример мартингала ξ с зависимыми приращениями. Пусть случайная величина ξ_0 имеет следующее распределение: $\xi_0 \in \{-1, 0, 1\}$, $\mathbb{P}(\xi_0 = -1) = \mathbb{P}(\xi_0 = 1) = \frac{1}{4}$, $\mathbb{P}(\xi_0 = 0) = \frac{1}{2}$. Обозначим через η_t последовательность независимых случайных величин, принимающих с вероятностью $\frac{1}{2}$ значения -1 и 1. Определим приращения процесса ξ следующим образом:

$$\triangle\xi_t = \begin{cases} 0, & \text{если } t = 1; \\ 0, & \text{если } \triangle\xi_{t-1} \in \{-1, 1\}; \\ \eta_t, & \text{если } \triangle\xi_{t-1} = 0. \end{cases}$$

Так как $\xi_t \in \mathcal{L}_1$ (и даже $\xi_t \in \mathcal{L}_2$) и $\mathbb{E}^{\mathcal{F}_t}\triangle\xi_{t+1} = 0$ ($\mathbb{E}\,\eta_t = 0$), то определённый процесс действительно будет являться мартингалом с зависимыми приращениями.

[11] Очевидно, что квадратично интегрируемый мартингал является настоящим мартингалом, т.к. если $\xi_t \in \mathcal{L}_2$, то $\xi_t \in \mathcal{L}_1$.

Утверждение 2.5. *Пусть процесс ξ — квадратично интегрируемый мартингал. Тогда дисперсия этого процесса не убывает, т.е.* $\mathbb{V}\mathrm{ar}\xi_{t+1} \geqslant \mathbb{V}\mathrm{ar}\xi_t$, $\forall t$.

Доказательство. В силу утверждения 2.4 приращения процесса ξ некоррелируемы. Следовательно, учитывая представление

$$\xi_t = \xi_0 + \sum_{s=1}^{t} \triangle\xi_s,$$

получим:

$$\mathbb{V}\mathrm{ar}\xi_{t+1} = \mathbb{V}\mathrm{ar}\left(\xi_0 + \sum_{s=1}^{t+1} \triangle\xi_s\right) = \mathbb{V}\mathrm{ar}\xi_0 + \sum_{s=1}^{t+1} \mathbb{V}\mathrm{ar}\,\triangle\xi_s = \mathbb{V}\mathrm{ar}\xi_t + \mathbb{V}\mathrm{ar}\,\triangle\xi_{t+1} \geqslant \mathbb{V}\mathrm{ar}\xi_t.$$

Здесь мы воспользовались тем, что дисперсия суммы некоррелированных случайных величин равна сумме их дисперсий, т.к.

$$\mathbb{V}\mathrm{ar}(\eta_1 + \eta_2) = \mathbb{V}\mathrm{ar}\eta_1 + \mathbb{V}\mathrm{ar}\eta_2 + 2\,\mathrm{cov}(\eta_1, \eta_2).$$

□

Таким образом, траектории процесса ξ, обладающего мартингальным свойством, с течением времени начинают “разбалтываться”, причём $\mathbb{E}\,\xi_t = \mathrm{const}$, т.е. среднее значение процесса с течением времени сохраняется.

Пример 2.2. Пусть случайные величины η_t, $t = 1, 2, \ldots$, независимы, причём для каждого t $\mathbb{E}\,\eta_t = 1$ (следовательно, $\prod\limits_{s=1}^{t} \eta_s \in \mathcal{L}_1\ \forall t$). Положим

$$\xi_t = \xi_0 \cdot \prod_{s=1}^{t} \eta_s, \tag{2.2}$$

где $\xi_0 \in \mathcal{L}_1$ и случайные величины $\xi_0, \eta_1, \eta_2, \ldots$ независимы. Возьмем в качестве фильтрации $\mathbb{F}$ поток σ-алгебр $\{\mathcal{F}_t, t \in T\}$ такой, что $\mathcal{F}_t = \sigma\{\xi_0, \eta_1, \ldots, \eta_t\}$. Покажем, что процесс ξ является мартингалом (настоящим):

$$\mathbb{E}^{\mathcal{F}_t}\,\xi_{t+1} = \mathbb{E}^{\mathcal{F}_t}\left(\xi_t\eta_{t+1}\right) = \xi_t \cdot \mathbb{E}^{\mathcal{F}_t}\,\eta_{t+1} = \{\sigma\text{-алгебры } \mathcal{F}_{\eta_{t+1}} \text{ и } \mathcal{F}_t \text{ независимы,}$$
$$\text{а значит, по утверждению 2.2, } \mathbb{E}^{\mathcal{F}_t}\,\eta_{t+1} = \mathbb{E}\,\eta_{t+1} \cdot \mathbf{1}_\Omega\} = \xi_t \cdot \mathbb{E}\,\eta_{t+1} \cdot \mathbf{1}_\Omega = \xi_t.$$

Замечание 2.9. Этот пример может быть использован для построения неотрицательного мартингала: для этого достаточно наложить дополнительные условия вида $\eta_t \geqslant 0$, $\xi_0 \geqslant 0$ (естественно, речь идет о неравенствах с точностью до почти наверное). Если же заменить условие $\mathbb{E}\,\eta_t = 1$ на $\mathbb{E}\,\eta_t \geqslant 1$ ($\mathbb{E}\,\eta_t \leqslant 1$), то полученный в результате процесс ξ будет являться субмартингалом (супермартингалом).

Замечание 2.10. В аддитивном случае (см. пример 2.1) единственным неотрицательным мартингалом будет постоянный процесс, т.к. в противном случае в силу сохранения среднего значения процесса при постепенном “разбалтывании” траектории процесс вида (2.1) должен принимать как положительные, так и отрицательные значения.

Утверждение 2.6. *Мартингал ξ является стационарным (в узком смысле) процессом*[12] *тогда и только тогда, когда он является постоянным, т.е.* $\xi_t \overset{\text{п.н.}}{=} \xi_0$, $\forall t$.

[12]Стационарный процесс (в узком смысле) — случайный процесс, для которого все конечномерные распределения любого сдвинутого процесса совпадают с конечномерными распределениями исходного процесса.

Доказательство. Пусть ξ — квадратично интегрируемый мартингал[13]. Тогда, по утверждению 2.5, дисперсия процесса не убывает, причём

$$\mathbb{V}\mathrm{ar}\xi_{t+1} = \mathbb{V}\mathrm{ar}\xi_t + \mathbb{V}\mathrm{ar} \triangle\xi_{t+1}.$$

В силу стационарности процесса $\mathbb{V}\mathrm{ar}\xi_{t+1} = \mathbb{V}\mathrm{ar}\xi_t$, а значит,

$$\mathbb{V}\mathrm{ar} \triangle\xi_t = 0, \quad \forall t.$$

Как было отмечено выше, из мартингального свойства следует сохранение среднего значения процесса, откуда получим, что

$$\mathbb{E} \triangle\xi_t = 0, \quad \forall t.$$

Как известно, случайная величина, математическое ожидание и дисперсия которой равны нулю, принимает с точностью до почти наверное нулевое значение. Таким образом, $\triangle\xi_t \overset{\text{п.н.}}{=} 0$, $\forall t$, откуда $\xi_t \overset{\text{п.н.}}{=} \xi_0$, $\forall t$.

В обратную сторону утверждение очевидно. □

Пример 2.3. Пусть случайная величина $\eta \in \mathcal{L}_1$, а $\mathbb{F}$ — произвольная фильтрация. Положим

$$\xi_t = \mathbb{E}^{\mathcal{F}_t} \eta. \tag{2.3}$$

Тогда процесс ξ является равномерно интегрируемым настоящим мартингалом.

Доказательство. По теореме 1.1 оператор $\mathbb{E}^{\mathcal{F}_t}$ переводит пространство $\mathcal{L}_1$ в $\mathcal{L}_1$. Следовательно, $\xi_t \in \mathcal{L}_1$, $\forall t$ (т.к. $\eta \in \mathcal{L}_1$).

Проверим теперь мартингальное свойство:

$$\mathbb{E}^{\mathcal{F}_t} \xi_{t+1} = \mathbb{E}^{\mathcal{F}_t} \mathbb{E}^{\mathcal{F}_{t+1}} \eta = \{\mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{F}_{t+1}\} = \mathbb{E}^{\mathcal{F}_t} \eta = \xi_t.$$

Равномерная интегрируемость данного процесса ξ следует из теоремы 6.3, которая будет сформулирована и доказана в главе 6. □

Замечание 2.11. Пример 2.3 можно использовать для численного нахождения условного математического ожидания (а также условных плотностей). Основная идея состоит в следующем. Пусть случайная величина η измерима относительно σ-алгебры, порожденной объединением всех $\mathcal{F}_t$:

$$\eta \in m\left(\sigma\left(\bigcup_{t\in T} \mathcal{F}_t\right)\right).$$

Оказывается, что если взять

$$\xi_t = \mathbb{E}^{\mathcal{F}_t} \eta,$$

то последовательность случайных величин ξ_t сходится к случайной величине η в пространстве $\mathcal{L}_1$ (в силу непрерывности ОУМО, см. теорему 1.1) и почти наверное. Например, если $\sigma\left(\bigcup\limits_{t\in T} \mathcal{F}_t\right)$ — борелевская σ-алгебра на прямой, а последовательность $\mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{F}_1 \subseteq \mathcal{F}_2 \subseteq \ldots$ является вложенной системой интервалов, то $\mathbb{E}^{\mathcal{F}_t} \eta$ — кусочно-постоянная случайная величина, равная соответствующему условному математическому ожиданию при условии, что значение случайной величины η принадлежит соответствующему интервалу (см. пример 1.1).

[13] От этого предположения можно отказаться: суть доказательства не изменится, просто в этом случае говорить о дисперсии процесса может быть уже некорректно.

Пример 2.4. Рассмотрим цепь Маркова[14] X с общим фазовым пространством $\mathcal{X}$, снабженным σ-алгеброй $\mathcal{A}$, $t \in T = \{0, 1, 2, \ldots\}$, $X_t \in \mathcal{X}$. Обозначим

$$\mathbb{P}_{X_{t+h}|X_t=x}(A) = \mathbb{P}^{t,t+h}(x, A)$$

— вероятность перехода из состояния x в момент времени t во множество A в момент времени $t+h$ (переходное ядро). Для процессов с дискретным временем X_t, $t = 0, 1, 2\ldots$, применима теорема Тулча: если известно распределение X_0 и переходные ядра $\mathbb{P}_{X_1|X_0=x_0}$, $\mathbb{P}_{X_2|X_1=x_1,X_0=x_0}, \ldots$, то существует совместное распределение $\mathbb{P}_{X_1\ldots X_n\ldots}$, т.е. модель случайного процесса непротиворечива (т.к. можно построить вероятностное пространство). Таким образом, для полного задания цепи Маркова достаточно знать $\mathbb{P}_{X_0}$ и $\mathbb{P}^{t-1,t}$ для всех $t = 1, 2, \ldots$.

Будем рассматривать однородную по времени цепь Маркова, т.е. $\mathbb{P}^{t,t+h}$ не зависит от t, а значит, можем обозначить $\mathbb{P}^{t,t+h} = \mathbb{P}^h$. Таким образом,

$$\mathbb{P}\left(X_{t+s} \in A \mid X_t = x\right) = \mathbb{P}^s(x, A)$$

— вероятность перейти из состояния x во множество A за время s. По теореме Тулча, для полного задания однородной цепи Маркова достаточно знать начальное распределение $\mathbb{P}_{X_0}$ и переходные вероятности $\{\mathbb{P}^t, t \in \{1, 2, \ldots\}\}$. Пользуясь понятием композиции (свёртки) переходных ядер[15] и уравнением Колмогорова-Чепмена[16], можем записать:

$$\mathbb{P}^t = \underbrace{\mathbb{P} \cdot \mathbb{P} \cdot \ldots \cdot \mathbb{P}}_{t \text{ раз}},$$

т.е. $\mathbb{P}^t$ — композиция ядер $\mathbb{P}$ ($\mathbb{P} = \mathbb{P}^1$). Таким образом, для полного задания однородной цепи Маркова достаточно знать начальное распределение $\mathbb{P}_{X_0}$ и переходную вероятность $\mathbb{P}$.

Рассмотрим произвольное переходное ядро $Q(x, A)$. Ему можно поставить в соответствие линейный оператор Q такой, что

$$Qf(x) = \int Q(x, dy) f(y).$$

Определение 2.11. Функция f называется **гармонической (инвариантной) по отношению к оператору** Q, если $Qf = f$.

Вернемся к нашему примеру.

[14]Случайный процесс X_t, $t \in T$, называется марковским процессом (обладающим марковским свойством), если поведение процесса в будущем зависит от прошлого только через настоящее. Цепь Маркова (марковская цепь) — марковский процесс X_t, $t \in T$, $X_t \in \mathcal{X}$, $(\mathcal{X}, \mathcal{A})$, причем время T дискретно, т.е. $T = \{0, 1, 2, \ldots\}$.

[15]Рассмотрим три измеримых пространства $(C, \mathcal{C})$, $(D, \mathcal{D})$, $(E, \mathcal{E})$ и случайные элементы $X\colon \Omega \to C$, $Y\colon \Omega \to D$, $Z\colon \Omega \to E$. Обозначим через Q — переходное ядро из $(C, \mathcal{C})$ в $(D, \mathcal{D})$ (т.е. $Q(x, A) = \mathbb{P}_{Y|X=x}(A)$), а через R — переходное ядро из $(D, \mathcal{D})$ в $(E, \mathcal{E})$ (т.е. $R(y, B) = \mathbb{P}_{Z|Y=y}(B)$). Тогда композицией (свёрткой) переходных ядер Q и R называется переходное ядро $Q \cdot R$ (обозначения могут быть разными) из $(C, \mathcal{C})$ в $(E, \mathcal{E})$. Можно записать формально:

$$Q \cdot R(x, dz) = \int\limits_{\mathcal{D}} Q(x, dy) R(y, dz).$$

[16]Для однородных по времени марковских процессов уравнение Колмогорова-Чепмена принимает вид $\mathbb{P}^{h_1} \cdot \mathbb{P}^{h_2} = \mathbb{P}^{h_1+h_2}$.

Определение 2.12. Функция f – называется **гармонической функцией цепи**, если $\mathbb{P}^s f = f, \forall s$.

Определение 2.13. Функция f – называется **субгармонической функцией цепи**, если $\mathbb{P}^s f \geqslant f, \forall s$.

Определение 2.14. Функция f – называется **супергармонической функцией цепи**, если $\mathbb{P}^s f \leqslant f, \forall s$.

Замечание 2.12. Так как цепь Маркова — это процесс с дискретным временем, а ядро $\mathbb{P}^s$ есть композиция ядер $\mathbb{P}$, то в определениях гармонической, субгармонической и супергармонической функций можно положить $s = 1$:

- функция f – называется гармонической функцией цепи, если $\mathbb{P} f = f$;
- функция f – называется субгармонической функцией цепи, если $\mathbb{P} f \geqslant f$;
- функция f – называется супергармонической функцией цепи, если $\mathbb{P} f \leqslant f$.

Замечание 2.13. Пользуясь определением условного математического ожидания, получим:

$$\mathbb{P} f(x) = \int \mathbb{P}(x, dy) f(y) = \mathbb{E}(f(X_{t+1}) \mid X_t = x).$$

Также, пользуясь утверждением 1.2, можем написать:

$$\mathbb{P} f(X_t) = \mathbb{E}^{\mathcal{F}_t} f(X_{t+1}).$$

Утверждение 2.7. *Пусть X — однородная по времени марковская цепь, а функция $f\colon \mathcal{X} \to \mathbb{R}$. Положим $Y_t = f(X_t)$. Тогда справедливы следующие три утверждения:*

1) *процесс Y обладает мартингальным свойством тогда и только тогда, когда функция f является гармонической функцией;*
2) *процесс Y обладает субмартингальным свойством тогда и только тогда, когда функция f является субгармонической функцией;*
3) *процесс Y обладает супермартингальным свойством тогда и только тогда, когда функция f является супергармонической функцией.*

Доказательство. Докажем первое утверждение. Остальные два доказываются аналогично.

1. Пусть процесс Y обладает мартингальным свойством, т.е. $\mathbb{E}^{\mathcal{F}_t} Y_{t+1} = Y_t$. Тогда, пользуясь замечанием 2.13, получим:

   $$\mathbb{P} f(X_t) = \mathbb{E}^{\mathcal{F}_t} f(X_{t+1}) = \mathbb{E}^{\mathcal{F}_t} Y_{t+1} = Y_t = f(X_t).$$

   Следовательно, f — гармоническая функция.

2. Пусть f — гармоническая функция. Тогда

   $$\mathbb{E}^{\mathcal{F}_t} Y_{t+1} = \mathbb{E}^{\mathcal{F}_t} f(X_{t+1}) = \mathbb{P} f(X_t) = f(X_t) = Y_t.$$

   Следовательно, процесс Y обладает мартингальным свойством.

$\square$

Замечание 2.14. Если в примерах 2.1 и 2.2 дополнительно потребовать, чтобы случайные величины η_t, $t = 1, 2, \ldots$, были одинаково распределены, то полученный процесс ξ будет однородной цепью Маркова. Таким образом, пример 2.4 сводится к примерам 2.1 и 2.2 при дополнительном предположении об одинаковой распределённости, если взять в качестве цепи X процесс ξ, а в качестве функции $f(x) = x$.

Замечание 2.15. Функция $f(x) \equiv \mathrm{const}$ является гармонической для любого процесса, по отношению к любому оператору, т.к. если $Q(x, A)$ — переходное ядро, то

$$Qf(x) = \int Q(x, dy) f(y) = \mathrm{const} \cdot \int Q(x, dy) = \mathrm{const} = f(x).$$

Выпуклые преобразования.

Рассмотрим теперь некоторые преобразования, сохраняющие мартингальное / субмартингальное / супермартингальное свойство.

Утверждение 2.8. *Рассмотрим процесс η со значениями в пространстве $\mathbb{R}^n$, обладающий мартингальным свойством*[17]*. Пусть числовая функция $g\colon D \to \mathbb{R}$, определенная на выпуклом множестве $D \subseteq \mathbb{R}^n$, выпукла. Пусть также $\eta_t \in D$ почти наверное (для всех $t \in T$). Тогда процесс ξ такой, что $\xi_t = g(\eta_t)$, обладает субмартингальным свойством.*

Доказательство. Для ОУМО выполняется неравенство Йенсена (см. (1.18)):

$$\mathbb{E}^{\mathcal{F}_t} g(\eta_{t+1}) \geqslant g\left(\mathbb{E}^{\mathcal{F}_t} \eta_{t+1}\right).$$

Учитывая, что процесс η является обобщенным мартингалом, получим:

$$\mathbb{E}^{\mathcal{F}_t} \xi_{t+1} = \mathbb{E}^{\mathcal{F}_t} g(\eta_{t+1}) \geqslant g\left(\mathbb{E}^{\mathcal{F}_t} \eta_{t+1}\right) = g\left(\eta_t\right) = \xi_t.$$

Следовательно, процесс ξ является обобщенным субмартингалом. □

Утверждение 2.9. *Рассмотрим процесс η со значениями в пространстве $\mathbb{R}^n$, обладающий субмартингальным свойством. Пусть числовая функция $g\colon D \to \mathbb{R}$, определенная на выпуклом множестве $D \subseteq \mathbb{R}^n$, является выпуклой и неубывающей. Пусть также $\eta_t \in D$ почти наверное (для всех $t \in T$). Тогда процесс ξ такой, что $\xi_t = g(\eta_t)$, обладает субмартингальным свойством.*

Доказательство. Пользуясь неравенством Йенсена, субмартингальным свойством процесса η и монотонностью функции g, получим:

$$\mathbb{E}^{\mathcal{F}_t} \xi_{t+1} = \mathbb{E}^{\mathcal{F}_t} g(\eta_{t+1}) \geqslant g\left(\mathbb{E}^{\mathcal{F}_t} \eta_{t+1}\right) \geqslant g\left(\eta_t\right) = \xi_t.$$

Следовательно, процесс ξ является обобщенным субмартингалом. □

Замечание 2.16. Пользуясь этими двумя утверждениями, можно, в частности, сказать, что если процесс ξ является мартингалом, то процесс ξ^2 обладает субмартингальным свойством; если же процесс ξ является квадратично интегрируемым мартингалом, то процесс ξ^2 является настоящим субмартингалом.

[17] Мартингалы можно рассматривать в значительно более абстрактных пространствах. Например, в случае $\mathbb{R}^n$ мартингалом будет случайный процесс, принимающий значения в пространстве $\mathbb{R}^n$ и каждая компонента которого является мартингалом. Мартингалы можно определить и в линейных пространствах. Однако понятия субмартингалов и супермартингалов возможно ввести только в пространствах, где есть отношения порядка.

3 Интегральное преобразование. Сохранение мартингального свойства при интегральном преобразовании. Игровой смысл мартингала

Интегральное преобразование[18] можно определить двумя способами: интегральным и дифференциальным.

Рассмотрим фильтрованное вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$.

Определение 3.1. Интегральным преобразованием (в дифференциальной форме) (дифференциальным преобразованием) адаптированного процесса X при помощи предсказуемого процесса H называется процесс Y такой, что

$$\triangle Y_t = H_t \triangle X_t, \quad t = 1, 2, \dots. \tag{3.1}$$

Интегральным преобразованием (в интегральной форме) адаптированного процесса X при помощи предсказуемого процесса H называется процесс Y такой, что

$$Y_t = H_0 X_0 + \sum_{s=1}^{t} H_s \triangle X_s, \quad t = 0, 1, 2, \dots. \tag{3.2}$$

Обозначения:

$$Y = HX, \quad Y = H \circ X, \quad Y = H * X. \tag{3.3}$$

Напомним, что под значком $\triangle$ понимается разность “назад” для того, чтобы не выйти из класса адаптированных процессов (см. замечание 2.6).

Замечание 3.1. Интегральное преобразование (3.2) является частным случаем преобразования (3.1), т.к. дифференциальная форма (3.1) сводится к интегральной (3.2) путём добавления начального условия $Y_0 = H_0 X_0$. По умолчанию интегральное преобразование понимается в дифференциальной форме (3.1).

Замечание 3.2. Интегральные преобразования применимы не только к обычным процессам, т.е. процессам, принимающим числовые значения. Процессы X и H могут принимать и векторнозначные значения, т.е. $X_t \in \mathbb{R}^n$, $H_t \in \mathbb{R}^m$, при этом процесс Y может быть как матричнозначным ($Y_t \in \mathbb{R}^{m \times n}$), так и вещественнозначным (если $n = m$). По умолчанию везде далее мы будем иметь дело с вещественнозначными процессами.

Теорема 3.1. 1. *Если процесс X является обобщённым мартингалом, а H — предсказуемый процесс, то процесс $Y = H \circ X$ также будет обобщённым мартингалом. Другими словами, интегральное преобразование в дифференциальной форме сохраняет мартингальное свойство.*

2. *Если процесс X является настоящим мартингалом, а H — предсказуемый существенно ограниченный процесс (т.е. $H_t \in \mathcal{L}_\infty$), то процесс[19] $Y = H \circ X$ также будет настоящим мартингалом.*

Доказательство. 1. В силу утверждения 2.1, достаточно показать, что процесс $\triangle Y$ является обобщённой мартингал-разностью.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}^{\mathcal{F}_t} \triangle Y_{t+1} = \mathbb{E}^{\mathcal{F}_t} (H_{t+1} \triangle X_{t+1}) = \{H \text{ — предсказуемый процесс}\} = \\ = H_{t+1} \cdot \mathbb{E}^{\mathcal{F}_t} \triangle X_{t+1} = \{X \text{ — обобщённый мартингал}\} = 0.\end{aligned}$$

[18] Интегральное преобразование в терминологии А.Н. Ширяева называется мартингальным.

[19] Здесь идет речь об интегральном преобразовании в интегральной форме.

2. Учитывая доказательство первого утверждения, достаточно показать, что $Y_t \in \mathcal{L}_1$. По определению,

$$Y_t = H_0 X_0 + \sum_{s=1}^{t} H_s \vartriangle X_s, \quad t = 0, 1, 2, \ldots .$$

Так как процесс X является настоящим мартингалом, то $\vartriangle X_s \in \mathcal{L}_1$. Умножение на ограниченную (почти всюду) случайную величину и суммирование не выводит из класса случайных величин, принадлежащих $\mathcal{L}_1$. Учитывая это, а также то, что $H_0 X_0 \in \mathcal{L}_1$, получим, что $Y_t \in \mathcal{L}_1$.

□

Замечание 3.3. Требование существенной ограниченности H практически нельзя ослабить, так как сопряжённым к $\mathcal{L}_1(\mathbb{P})$ является пространство $\mathcal{L}_\infty(\mathbb{P})$.

Замечание 3.4. Если в теореме 3.1 дополнительно потребовать, чтобы $H_t \geqslant 0$ для всех t, то из доказательства видно, что такое интегральное преобразование будет сохранять и субмартингальное и супермартингальное свойства.

Замечание 3.5. Интегральное преобразование сохраняет мартингальное свойство и для векторнозначных процессов.

Теорема 3.2. *Процесс Y является обобщённым мартингалом тогда и только тогда, когда существует настоящий мартингал X и предсказуемый процесс H такие, что $Y = H \circ X$.*

Доказательство. Достаточность следует из теоремы 3.1. Докажем необходимость. Пусть процесс Y является обобщённым мартингалом. Построим такие процессы X и H, которые бы удовлетворяли условиям теоремы, т.е. X — мартингал, H — предсказуемый процесс и $Y = H \circ X$. Заметим, что такое представление процесса Y, вообще говоря, неединственно.

Положим

$$H_t = \mathbb{E}^{\mathcal{F}_{t-1}} |\vartriangle Y_t| , \quad t = 1, 2, \ldots . \tag{3.4}$$

Заметим, что $\mathbb{E}^{\mathcal{F}_{t-1}} |\vartriangle Y_t|$ конечно (почти наверное), т.к. процесс Y обладает мартингальным свойством и $\mathbb{E}^{\mathcal{F}_{t-1}} \vartriangle Y_t = 0$. По построению, процесс H является предсказуемым ($H_t \in m(\mathcal{F}_{t-1})$).

Введём следующее обозначение[20] (a — число):

$$a^{\oplus} = \begin{cases} a^{-1}, & \text{если } a \neq 0, \\ 0, & \text{если } a = 0. \end{cases}$$

Положим

$$\vartriangle X_t = H_t^{\oplus} \cdot \vartriangle Y_t, \quad t = 1, 2, \ldots . \tag{3.5}$$

Величины H_0 и X_0 можно определить, например, так: $H_0 = 1$, $X_0 = Y_0$.

Легко видеть, что процесс $\vartriangle X$ – обобщённая мартингал-разность. Действительно, ведь процесс X — интегральное преобразование (в дифференциальной форме) процесса Y, обладающего мартингальным свойством, с помощью предсказуемого процесса $H_t^{\oplus}$. Пользуясь теоремой 3.1, получим, что процесс X обладает мартингальным свойством. Покажем, что $\vartriangle X_t \in \mathcal{L}_1$:

$$\mathbb{E} |\vartriangle X_t| = \mathbb{E} \left| H_t^{\oplus} \cdot \vartriangle Y_t \right| = \{H_t = \mathbb{E}^{\mathcal{F}_{t-1}} |\vartriangle Y_t| \geqslant 0\} = \mathbb{E} \left(H_t^{\oplus} \cdot |\vartriangle Y_t| \right) = \mathbb{E}\, \mathbb{E}^{\mathcal{F}_{t-1}} \left(H_t^{\oplus} \cdot |\vartriangle Y_t| \right) =$$
$$= \{H_t \in m(\mathcal{F}_{t-1})\} = \mathbb{E} \left(H_t^{\oplus}\, \mathbb{E}^{\mathcal{F}_{t-1}} |\vartriangle Y_t| \right) = \mathbb{E} \left(H_t^{\oplus} H_t \right) = \mathbb{E}\, \mathbf{1}_{\{H_t \neq 0\}} \leqslant 1.$$

[20] Строго говоря, $a^{\oplus}$ — это псевдообратная матрица размера 1×1. Ясно, что $a^{\oplus} a = a a^{\oplus} = \mathbf{1}_{\{a \neq 0\}}$.

Таким образом, процесс X — настоящий мартингал.

Осталось доказать, что $Y = H \circ X$, т.е. $\triangle Y_t = H_t \triangle X_t$, $t = 1, 2, \ldots$. Умножая обе части (3.5) на H_t, получим:

$$H_t \triangle X_t = \mathbf{1}_{\{H_t \neq 0\}} \cdot \triangle Y_t, \quad t = 1, 2, \ldots.$$

Таким образом, достаточно доказать, что при $H_t = 0$ выполнено $\triangle Y_t = 0$ для $t = 1, 2, \ldots$. Для этого введём некоторое вспомогательное понятие и приведём несколько утверждений.

Определение 3.2. Говорят, что **событие** A **содержится в событии** B **почти наверное** $A \overset{\text{п.н.}}{\subseteq} B$ (событие A влечёт событие B почти наверное, событие B выполнено на A почти наверное), если выполнено следующее неравенство для индикаторов:

$$\mathbf{1}_A(\omega) \overset{\text{п.н.}}{\leqslant} \mathbf{1}_B(\omega).$$

Утверждение 3.1. *Следующие утверждения эквивалентны:*

1) $A \overset{\text{п.н.}}{\subseteq} B$*;*

2) либо $\mathbb{P}(A) = 0$*, либо* $\mathbb{P}(A) > 0$ *и* $\mathbb{P}(B \mid A) = 1$*;*

3) $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)$*;*

4) $\mathbb{P}(A \setminus B) = 0$.

Доказательство. **1) $\Longrightarrow$ 2)** Пусть $\mathbf{1}_A(\omega) \overset{\text{п.н.}}{\leqslant} \mathbf{1}_B(\omega)$. Покажем, что при $\mathbb{P}(A) > 0$ выполнено $\mathbb{P}(B \mid A) = 1$. Пользуясь определением индикатора, имеем:

$$\mathbf{1}_A(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega \in A, \\ 0, & \omega \notin A; \end{cases} \overset{\text{п.н.}}{\leqslant} \mathbf{1}_B(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega \in B, \\ 0, & \omega \notin B. \end{cases}$$

Откуда имеем, что $\omega \in A \overset{\text{п.н.}}{\Rightarrow} \omega \in B$. Переходя к вероятностям, получим, что $\mathbb{P}(B \mid A) = 1$ при $\mathbb{P}(A) > 0$.

2) $\Longrightarrow$ 3) Пусть $\mathbb{P}(B \mid A) = 1$ при $\mathbb{P}(A) > 0$. Покажем, что $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)$. Если $\mathbb{P}(A) = 0$, то, очевидно, $\mathbb{P}(A \cap B) = 0$ при любом событии B. Если $\mathbb{P}(A) > 0$, то

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\, \mathbb{P}(B \mid A) = \mathbb{P}(A).$$

3) $\Longrightarrow$ 4) Пусть $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)$. Покажем, что $\mathbb{P}(A \setminus B) = 0$:

$$\mathbb{P}(A \setminus B) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A \cap B) = 0.$$

4) $\Longrightarrow$ 1) Пусть $\mathbb{P}(A \setminus B) = 0$. Покажем, что $\mathbf{1}_A(\omega) \overset{\text{п.н.}}{\leqslant} \mathbf{1}_B(\omega)$. Если $\mathbb{P}(A) = 0$, то $\mathbf{1}_A(\omega) \overset{\text{п.н.}}{=} 0$, откуда $\mathbf{1}_A(\omega) \overset{\text{п.н.}}{\leqslant} \mathbf{1}_B(\omega)$. Пусть $\mathbb{P}(A) > 0$. Легко видеть, что

$$\mathbf{1}_A(\omega) \leqslant \mathbf{1}_B(\omega) \quad \Longrightarrow \quad (\mathbf{1}_A(\omega) = 1 \Rightarrow \mathbf{1}_B(\omega) = 1) \quad \Longrightarrow \quad (\omega \in A \Rightarrow \omega \in B).$$

По определению, $\mathbb{P}(\omega \colon \omega \in A \Rightarrow \omega \in B) = \mathbb{P}(B \mid A)$. Так как $\mathbb{P}(A) > 0$, то $\mathbb{P}(B \mid A)$ определено и равно

$$\mathbb{P}(B \mid A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)} = \{(A \cap B) + (A \setminus B) = A\} = \frac{\mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A \setminus B)}{\mathbb{P}(A)} = \{\mathbb{P}(A \setminus B) = 0\} = 1.$$

Таким образом, получаем, что

$$\mathbb{P}\left(\omega\colon \mathbf{1}_A(\omega) \leqslant \mathbf{1}_B(\omega)\right) = \mathbb{P}\left(\omega\colon \omega \in A \Rightarrow \omega \in B\right) = \mathbb{P}(B \mid A) = 1,$$

т.е. $\mathbf{1}_A(\omega) \overset{\text{п.н.}}{\leqslant} \mathbf{1}_B(\omega)$.

$\square$

Лемма 3.1. *Пусть случайная величина $Z \geqslant 0$. Тогда для любой σ-алгебры $\mathcal{A}$ имеем:*

$$A = \{\omega\colon\ \mathbb{E}^{\mathcal{A}} Z = 0\} \overset{\text{п.н.}}{\subseteq} B = \{\omega\colon Z = 0\}.$$

Доказательство. Заметим, что множество A определено с точностью до почти всюду. Однако это не противоречит утверждению леммы.

Проведем доказательство от противного. Пусть $\mathbb{P}(B \mid A) < 1$, т.е. $\mathbb{P}(B^C \mid A) > 0$, где $B^C = \{\omega\colon Z > 0\}$ (т.к. $Z \geqslant 0$).

Обозначим через $\sigma(A)$ σ-алгебру, порожденную событием A: $\sigma(A) = \{\varnothing, \Omega, A, A^C\}$. Легко видеть, что $\sigma(A) \subseteq \mathcal{A}$ (т.к. $A \in \mathcal{A}$).

Обозначим $\xi = \mathbb{E}^{\sigma(A)}\, \mathbb{E}^{\mathcal{A}} Z$. С одной стороны, исходя из определения события A, имеем: $\mathbb{P}(\xi = 0 \mid A) = 1$. С другой стороны, учитывая, что $\sigma(A) \subseteq \mathcal{A}$, получим:

$$\xi = \mathbb{E}^{\sigma(A)} Z = \mathbb{E}^{\sigma(A)} \left(Z \cdot \mathbf{1}_B + Z \cdot \mathbf{1}_{B^C}\right) = \{Z \cdot \mathbf{1}_B = 0\} = \mathbb{E}^{\sigma(A)} \left(Z \cdot \mathbf{1}_{B^C}\right).$$

По предположению, $\mathbb{P}(B^C \mid A) > 0$. Следовательно, $\mathbb{P}\left(\mathbb{E}^{\sigma(A)} \left(Z \cdot \mathbf{1}_{B^C}\right) > 0 \mid A\right) = 1$, т.е. $\mathbb{P}\left(\xi > 0 \mid A\right) = 1$. Пришли к противоречию с тем, что $\mathbb{P}(\xi = 0 \mid A) = 1$. $\square$

Вернёмся к доказательству теоремы. Напомним, что нам осталось показать, что при $H_t = 0$ выполнено $\triangle Y_t = 0$ для $t = 1, 2, \ldots$, где $H_t = \mathbb{E}^{\mathcal{F}_{t-1}} |\triangle Y_t|$. Используем только что доказанную лемму 3.1. В качестве неотрицательной случайной величины возьмём $Z = |\triangle Y_t|$, а в качестве σ-алгебры $\mathcal{A} = \mathcal{F}_{t-1}$. Тогда

$$\{\omega\colon\ \mathbb{E}^{\mathcal{F}_{t-1}} |\triangle Y_t| = 0\} \overset{\text{п.н.}}{\subseteq} \{\omega\colon\ |\triangle Y_t| = 0\},$$

что равносильно тому, что $\{H_t = 0\} \overset{\text{п.н.}}{\subseteq} \{\triangle Y_t = 0\}$. $\square$

Замечание 3.6. Из доказательства теоремы 3.2 видно, как из обобщённого мартингала можно получить настоящий мартингал при помощи интегрального преобразования (3.5).

Игровой смысл мартингала.

Рассмотрим адаптированный процесс X и предсказуемый процесс H. Пусть процесс Y является результатом интегрального преобразования (в дифференциальной форме) процесса X при помощи процесса H:

$$Y_t = Y_0 + \sum_{s=1}^{t} H_s \triangle X_s. \tag{3.6}$$

Случайную величину $\triangle X_t$ можно интерпретировать как выигрыш игрока на t-ом шаге игры при единичной ставке (если $\triangle X_t < 0$, то это проигрыш), а Y_t — капитал игрока к моменту времени t (Y_0 — начальный капитал игрока). При этом H_t имеет смысл ставки игрока на шаге t (ставка может быть как положительной, так и отрицательной, т.к. можно ставить как "за", так и "против"). Заметим, H_t предсказуемо, т.к. ставка игрока на шаге t объявляется заранее и зависит только от первых $t-1$ шагов игры. Таким образом, процесс капитала игрока вычисляется как $Y = H \circ X$, где процесс H имеет смысл стратегии игрока.

Замечание 3.7. Для простоты будем считать, что все процессы вещественнозначные. Для векторнозначных процессов все рассуждения проводятся аналогично.

Обозначим через D класс допустимых стратегий:

$$H \in D \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{array}{l} 1) H \text{ — предсказуемый процесс;} \\ 2) H_t \in \mathcal{L}_\infty,\ t = 0, 1, \ldots . \end{array}$$

Также введём следующие ограничения: $\qquad 3) X_t \in \mathcal{L}_1,\ t = 0, 1, \ldots;$ $\quad 4) Y_0 \in \mathcal{L}_1.$

Замечание 3.8. Чаще всего на практике бывает случай, когда $\mathcal{F}_0 = \{\varnothing, \Omega\}$, т.е. в начале игры никакой информации нет. Так как процесс капитала игрока Y является адаптированным, то $Y_0 = \mathrm{const}$. В этом случае четвёртое ограничение выполняется автоматически.

Требование $Y_0 \in \mathcal{L}_1$ также выполняется и в случае, если брать интегральную форму интегрального преобразования, т.е. $Y_0 = H_0 X_0$.

Замечание 3.9. Требование существенной ограниченности стратегии ($H_t \in \mathcal{L}_\infty$), а также требование $X_t \in \mathcal{L}_1$ являются чисто техническими, однако достаточно разумными с точки зрения практики.

Определение 3.3. Игра, определяемая свойствами процесса X, **не допускает выигрыш в среднем**, если

$$\mathbb{E}\, Y_t = \mathbb{E}\, Y_0,\ t = 1, 2, \ldots \quad \forall H \in D. \tag{3.7}$$

Следующая теорема говорим о том, что для проверки того, что в игре за конечное время в среднем выиграть нельзя, необходимо и достаточно проверить мартингальное свойство процесса X.

Теорема 3.3 (об игровом смысле мартингала)**.** *Пусть $Y = H \circ X$. Тогда игра, определяемая свойствами процесса X, не допускает выигрыш в среднем тогда и только тогда, когда процесс X является настоящим мартингалом.*

Доказательство. Если процесс X является настоящим мартингалом, а процесс H предсказуем и существенно ограничен, то, в силу теоремы 3.1, процесс $Y = H \circ X$ также является настоящим мартингалом (т.к. $Y_0 \in \mathcal{L}_1$). Следовательно,

$$\mathbb{E}^{\mathcal{F}_{t-1}}\, Y_t = Y_{t-1},\ t = 1, 2, \ldots \quad \Longrightarrow \quad \mathbb{E}\, Y_t = \mathbb{E}\, Y_0,\ t = 1, 2, \ldots .$$

Покажем в обратную сторону. Пусть выполнены все четыре предположения и $\mathbb{E}\, Y_t = \mathbb{E}\, Y_0$, $t = 1, 2, \ldots$. Покажем, что процесс X является настоящим мартингалом. Пользуясь определением интегрального преобразования, получим:

$$\mathbb{E}\, Y_0 = \mathbb{E}\, Y_t = \mathbb{E}\left(Y_0 + \sum_{s=1}^{t} H_s \vartriangle X_s \right) = \mathbb{E}\, Y_0 + \sum_{s=1}^{t} \mathbb{E}\left(H_s \vartriangle X_s \right).$$

Следовательно,

$$\sum_{s=1}^{t} \mathbb{E}\left(H_s \vartriangle X_s \right) = 0,\ t = 1, 2, \ldots \quad \forall H \in D.$$

Откуда легко видеть, что $\mathbb{E}\left(H_t \vartriangle X_t \right) = 0$, $t = 1, 2, \ldots$. Действительно, зафиксировав произвольное t, достаточно положить $H_s = 0$ для всех $s \neq t$ и $H_t \neq 0$. Далее, пользуясь предсказуемостью процесса H, получим:

$$\mathbb{E}\left(H_t \vartriangle X_t \right) = \mathbb{E}\, \mathbb{E}^{\mathcal{F}_{t-1}} \left(H_t \vartriangle X_t \right) = \mathbb{E}\left(H_t\, \mathbb{E}^{\mathcal{F}_{t-1}} \vartriangle X_t \right) = 0,\ t = 1, 2, \ldots \quad \forall H_t \in \mathcal{L}_\infty.$$

Для окончания доказательства нам потребуется следующее утверждение.

Утверждение 3.2. *Пусть для некоторой случайной величины $Y \in \mathcal{L}_1$ выполнено*

$$\mathbb{E}\,(G \cdot Y) = 0, \forall G \in \mathcal{L}_\infty.$$

Тогда $Y \overset{\text{п.н.}}{=} 0$.

Доказательство. Положим $G = \mathbf{1}_{\{Y>0\}} - \mathbf{1}_{\{Y<0\}}$. Тогда $G \cdot Y \geqslant 0$, причем $G \cdot Y = 0$ тогда и только тогда, когда $Y = 0$. По лемме 3.1 $G \cdot Y \overset{\text{п.н.}}{=} 0$. Значит, $Y \overset{\text{п.н.}}{=} 0$. □

Как уже было показано выше,

$$\mathbb{E}\left(H_t\,\mathbb{E}^{\mathcal{F}_{t-1}} \vartriangle X_t\right) = 0,\ t = 1, 2, \ldots \quad \forall H_t \in \mathcal{L}_\infty.$$

Используя только что доказанное утверждение, получим:

$$\mathbb{E}^{\mathcal{F}_{t-1}} \vartriangle X_t = 0,\ t = 1, 2, \ldots.$$

Таким образом, процесс $\vartriangle X$ является обобщенной мартингал-разностью, а значит, процесс X обладает мартингальным свойством. По предположению, $X_t \in \mathcal{L}_1$. Следовательно, X — настоящий мартингал. □

Замечание 3.10. Во второй части курса будет показано, что через игровой смысл мартингала раскрывается концепция информационной эффективности рынка.

4 Разложение Дуба (аддитивное). Мультипликативный аналог разложения Дуба. Оболочка Снелла

Обобщённое аддитивное разложение Дуба[21].

Пусть дано расширенное вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$. Все рассматриваемые процессы адаптированы относительно фильтрации $\mathbb{F}$.

Теорема 4.1 (Обобщённое аддитивное разложение Дуба)**.** *Процесс $X = \{X_t, t \geqslant 0\}$ является прогнозируемым (т.е. $\mathbb{E}^{\mathcal{F}_{t-1}} X_t$ конечно) тогда и только тогда, когда существуют такие процессы $M = \{M_t, t \geqslant 0\}$ и $A = \{A_t, t \geqslant 0\}$, что*

$$X_t = M_t + A_t, \quad t = 0, 1, 2, \ldots, \tag{4.1}$$

причём процесс M является обобщённым мартингалом, а процесс A предсказуемый. Более того, разложение (4.1) единственно с точностью до выбора $M_0 \in m\,(\mathcal{F}_0)$ ($A_0 \in m\,(\mathcal{F}_0)$).

Доказательство. Покажем, что процесс X прогнозируем тогда и только тогда, когда он представим в виде суммы двух процессов, один из которых обладает мартингальным свойством, а другой является предсказуемым.

1. Пусть справедливо разложение (4.1). Тогда, переходя к разностям, имеем:

   $$\vartriangle X_t = \vartriangle M_t + \vartriangle A_t, \quad t = 1, 2, \ldots.$$

   Откуда получаем:

   $$\mathbb{E}^{\mathcal{F}_{t-1}} \vartriangle X_t = \mathbb{E}^{\mathcal{F}_{t-1}} \vartriangle M_t + \mathbb{E}^{\mathcal{F}_{t-1}} \vartriangle A_t, \quad t = 1, 2, \ldots.$$

[21] Joseph Leo Doob (1910 — 2004) — американский математик, творец теории мартингалов.

Пользуясь мартингальным свойством процесса M, получим, что $\mathbb{E}^{\mathcal{F}_{t-1}} \vartriangle M_t = 0$. Так как процесс A является предсказуемым, имеем $\mathbb{E}^{\mathcal{F}_{t-1}} \vartriangle A_t = \vartriangle A_t$. Получаем, что если существует разложение (4.1) процесса X, то

$$\mathbb{E}^{\mathcal{F}_{t-1}} \vartriangle X_t = \vartriangle A_t, \quad t = 1, 2, \ldots. \tag{4.2}$$

Откуда следует, что

$$\mathbb{E}^{\mathcal{F}_{t-1}} X_t = X_{t-1} + \vartriangle A_t, \quad t = 1, 2, \ldots.$$

Следовательно, процесс X прогнозируем.

2. Рассмотрим прогнозируемый процесс X и построим для него процессы A и M, входящие в обобщённое разложение Дуба (4.1). Зафиксируем произвольную $\mathcal{F}_0$-измеримую случайную величину A_0. В предыдущем пункте доказательстве было показано, что если существует разложение (4.1) процесса X, то справедливо (4.2). Поэтому логично определить процесс A следующим образом:

$$A_t = A_0 + \sum_{s=1}^{t} \vartriangle A_s, \quad \vartriangle A_s \overset{\mathsf{def}}{=} \mathbb{E}^{\mathcal{F}_{s-1}} \vartriangle X_s.$$

Это определение корректно, т.к. $\mathbb{E}^{\mathcal{F}_{t-1}} \vartriangle X_t = \mathbb{E}^{\mathcal{F}_{t-1}} X_t - X_{t-1}$ определено и конечно в силу прогнозируемости X. Процесс M определим так:

$$M_t \overset{\mathsf{def}}{=} X_t - A_t.$$

Покажем, что построенные процессы A и M удовлетворяют требованиям теоремы. Во-первых, очевидно, что $X_t = M_t + A_t$. Во-вторых, процесс A предсказуемый:

$$\vartriangle A_t = \mathbb{E}^{\mathcal{F}_{t-1}} \vartriangle X_t \quad \Longrightarrow \quad A_t = A_{t-1} + \mathbb{E}^{\mathcal{F}_{t-1}} \vartriangle X_t \quad \Longrightarrow \quad A_t \in m\,(\mathcal{F}_{t-1}).$$

И наконец, процесс M обладает мартингальным свойством:

$$\mathbb{E}^{\mathcal{F}_{t-1}} \vartriangle M_t = \mathbb{E}^{\mathcal{F}_{t-1}}(\vartriangle X_t - \vartriangle A_t) = \{A \text{ — предсказуемый}\} = \mathbb{E}^{\mathcal{F}_{t-1}} \vartriangle X_t - \vartriangle A_t =$$
$$= \{\vartriangle A_t \overset{\mathsf{def}}{=} \mathbb{E}^{\mathcal{F}_{t-1}} \vartriangle X_t\} = \vartriangle A_t - \vartriangle A_t = 0 \quad \Longrightarrow \quad \mathbb{E}^{\mathcal{F}_{t-1}} M_t = M_{t-1}.$$

3. Покажем единственность разложения с точностью до A_0 (или M_0)[22]. Вообще говоря, она следует из построения процессов A и M (см. второй пункт доказательства). Однако можно показать единственность разложения и по-другому. Допустим, что существует два различных разложения:

$$X_t = M_t + A_t, \quad X_t = M'_t + A'_t, \quad t = 0, 1, 2, \ldots,$$

таких, что $M_0 = M'_0$. Взяв разность этих двух равенств, придем к следующему соотношению:

$$M_t - M'_t = A'_t - A_t, \quad t = 0, 1, 2, \ldots.$$

Применяя к обоим частям последнего равенства оператор $\mathbb{E}^{\mathcal{F}_{t-1}}$ и пользуясь предсказуемостью процесса A и мартингальным свойством процесса M, получим:

$$M_{t-1} - M'_{t-1} = A'_t - A_t, \quad t = 1, 2, \ldots.$$

От последних двух равенств можем перейти к рекуррентному соотношению:

$$M_t - M'_t = M_{t-1} - M'_{t-1}, \quad t = 1, 2, \ldots,$$

из которого, с учётом равенства M_0 и M'_0, вытекает, что $M_t = M'_t$ для всех $t \geqslant 0$. А значит, и $A_t = A'_t$ для всех $t \geqslant 0$, т.к. $A_t = X_t - M_t$, $A'_t = X_t - M'_t$.

[22] Если фиксируется A_0, то $M_0 = X_0 - A_0$. И наоборот.

$\square$

Замечание 4.1. В процессе доказательства теоремы 4.1 было показано, что $\triangle A_t = \mathbb{E}^{\mathcal{F}_{t-1}} \triangle X_t$. Следовательно,

$$\triangle A_t = \mathbb{E}^{\mathcal{F}_{t-1}} X_t - X_{t-1}, \quad t = 1, 2, \dots . \tag{4.3}$$

Учитывая, что $\triangle M_t = \triangle X_t - \triangle A_t = (X_t - X_{t-1}) - \big(\mathbb{E}^{\mathcal{F}_{t-1}} X_t - X_{t-1}\big)$, получаем:

$$\triangle M_t = X_t - \mathbb{E}^{\mathcal{F}_{t-1}} X_t, \quad t = 1, 2, \dots . \tag{4.4}$$

Таким образом, в обобщённом разложении Дуба (4.1)

$$A_t = A_0 + \sum_{s=1}^{t} \big(\mathbb{E}^{\mathcal{F}_{s-1}} X_s - X_{s-1}\big), \quad t = 0, 1, 2, \dots ; \tag{4.5}$$

$$M_t = M_0 + \sum_{s=1}^{t} \big(X_s - \mathbb{E}^{\mathcal{F}_{s-1}} X_s\big), \quad t = 0, 1, 2, \dots ; \tag{4.6}$$

$$X_0 = A_0 + M_0. \tag{4.7}$$

Замечание 4.2. Если прогнозируемый процесс X таков, что $X_t \in \mathcal{L}_1$, $t \geqslant 0$, то в обобщённом аддитивном разложении Дуба (4.1) процесс $\triangle M$ является настоящей мартингал-разностью (в силу (4.4) и того, что $\mathbb{E}^{\mathcal{F}_{t-1}} \colon \mathcal{L}_1 \to \mathcal{L}_1$). Если ещё и $M_0 \in \mathcal{L}_1$ (либо $A_0 \in \mathcal{L}_1$), то процесс M является настоящим мартингалом и $A_t \in \mathcal{L}_1$ для всех $t \geqslant 0$.

Следствие 4.1. *Для того чтобы прогнозируемый процесс X являлся обобщённым субмартингалом, необходимо и достаточно, чтобы процесс A в обобщённом аддитивном разложении Дуба (4.1) был неубывающим, т.е. $\triangle A_t \geqslant 0$ для всех $t \geqslant 1$.*

Доказательство. В силу прогнозируемости процесса X, для него справедливо аддитивное разложение Дуба (4.1).

1. Пусть процесс X обладает субмартингальным свойством, т.е. $\mathbb{E}^{\mathcal{F}_t} X_{t+1} \geqslant X_t$ для всех $t \geqslant 0$. Пользуясь разложением (4.1), получим:

$$\mathbb{E}^{\mathcal{F}_t} (M_{t+1} + A_{t+1}) \geqslant M_t + A_t, \quad t = 0, 1, 2, \dots .$$

   Так как M — обобщённый мартингал, а A — предсказуемый процесс, можем записать:

$$M_t + A_{t+1} \geqslant M_t + A_t, \quad t = 0, 1, 2, \dots ,$$

   откуда следует, что процесс A неубывающий.

2. В другую сторону, если $\triangle A_t \geqslant 0$ для всех $t \geqslant 1$, то справедлива следующая цепочка соотношений:

$$\mathbb{E}^{\mathcal{F}_t} X_{t+1} = \mathbb{E}^{\mathcal{F}_t}(M_{t+1} + A_{t+1}) = M_t + A_{t+1} \geqslant M_t + A_t = X_t,$$

   то есть X — обобщённый субмартингал.

$\square$

Замечание 4.3. Разложение (4.1) для обобщённых субмартингалов называется разложением Дуба (аддитивным).

Мультипликативный аналог разложения Дуба.

Помимо аддитивного разложения Дуба, существует ещё и его мультипликативный аналог:

$$X_t = M_t \cdot B_t, \quad t = 0, 1, 2, \ldots, \tag{4.8}$$

где X — прогнозируемый процесс, M — обобщённый мартингал, B — предсказуемый процесс.

Определим условия существования такого разложения. Будем действовать аналогично аддитивному случаю.

Из (4.8) следует, что

$$\frac{X_t}{X_{t-1}} = \frac{M_t}{M_{t-1}} \cdot \frac{B_t}{B_{t-1}} \quad \Longrightarrow$$

$$\mathbb{E}^{\mathcal{F}_{t-1}} \frac{X_t}{X_{t-1}} = \mathbb{E}^{\mathcal{F}_{t-1}} \left(\frac{M_t}{M_{t-1}} \cdot \frac{B_t}{B_{t-1}} \right) = \{B \text{ — предсказуемый}\} = \frac{B_t}{B_{t-1}} \cdot \mathbb{E}^{\mathcal{F}_{t-1}} \left(\frac{M_t}{M_{t-1}} \right) =$$

$$= \frac{B_t}{B_{t-1}} \cdot \frac{\mathbb{E}^{\mathcal{F}_{t-1}} M_t}{M_{t-1}} = \{M \text{ — обобщённый мартингал}\} = \frac{B_t}{B_{t-1}}.$$

Заметим, что неявно предполагалось, что $X_{t-1} \neq 0$, $M_{t-1} \neq 0$, $B_{t-1} \neq 0$.

Введём обозначение: ∇Y — процесс, для которого

$$\nabla Y_t = \frac{Y_t}{Y_{t-1}},$$

где Y — адаптированный процесс, причём $Y_t \neq 0$ для всех $t \geqslant 0$. Заметим, что процесс ∇Y также является адаптированным.

Применяя только что введённое обозначение, получим:

$$\nabla B_t = \frac{\mathbb{E}^{\mathcal{F}_{t-1}} X_t}{X_{t-1}}, \quad \nabla M_t = \frac{\nabla X}{\nabla B} = \frac{X_t}{\mathbb{E}^{\mathcal{F}_{t-1}} X_t}, \quad t = 1, 2, \ldots.$$

Заметим, что процесс B, определенный таким образом, является предсказуемым, а процесс M обладает мартингальным свойством.

Таким образом, для существования однозначного (с точностью до выбора M_0 или B_0) мультипликативного аналога разложения Дуба (4.8) необходимо и достаточно, чтобы $X_t \neq 0$ и $\mathbb{E}^{\mathcal{F}_t} X_{t+1} \neq 0$ для всех $t = 0, 1, 2, \ldots$.

Утверждение 4.1. *Пусть процесс X — неотрицательный супермартингал. Тогда если в некоторый случайный момент времени этот процесс обращается в ноль, то впоследствии он нулём и останется.*

Доказательство. По условию, нам дано:

$$0 \leqslant \mathbb{E}^{\mathcal{F}_{t-1}} X_t \leqslant X_{t-1}, \quad \forall t = 1, 2, \ldots.$$

Пусть существует такой момент времени τ, что $X_\tau = 0$. Покажем, что $X_t = 0$ для всех $t \geqslant \tau$. Зафиксируем произвольное $t \geqslant \tau$. Пусть $X_s = 0$ для всех s таких, что $\tau \leqslant s \leqslant t$. Для доказательства утверждения достаточно показать, $X_{t+1} = 0$.

$$0 \leqslant \mathbb{E}^{\mathcal{F}_t} X_{t+1} \leqslant X_t = 0 \quad \Longrightarrow \quad \mathbb{E}^{\mathcal{F}_t} X_{t+1} = 0;$$

$$\begin{cases} \mathbb{E}^{\mathcal{F}_t} X_{t+1} = 0 \\ X_{t+1} \geqslant 0 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad X_{t+1} = 0.$$

□

Заметим, что неотрицательный супермартингал является прогнозируемым процессом.

С учётом всего вышесказанного, можно сформулировать следующую теорему.

Теорема 4.2 (Мультипликативный аналог разложения Дуба)**.** *Пусть процесс $X = \{X_t, t \geqslant 0\}$ является неотрицательным супермартингалом. Тогда существуют такие процессы $M = \{M_t, t \geqslant 0\}$ и $A = \{A_t, t \geqslant 0\}$, что выполняется (4.8), причём процесс M является обобщенным мартингалом, а процесс B предсказуемый. Более того, разложение (4.8) единственно с точностью до выбора $M_0 \in m(\mathcal{F}_0)$ ($B_0 \in m(\mathcal{F}_0)$) до тех пор, пока процесс X не обращается в ноль, причём*

$$\nabla B_t = \frac{\mathbb{E}^{\mathcal{F}_{t-1}} X_t}{X_{t-1}}, \quad \nabla M_t = \frac{X_t}{\mathbb{E}^{\mathcal{F}_{t-1}} X_t}, \quad t = 1, 2, \ldots, \tau - 1, \tag{4.9}$$

где $\tau = \inf\{t \colon X_t = 0\}$.

Замечание 4.4. После обращения процесса X в ноль в момент времени τ можно, например, принять $B_t = 0$ и $M_t = M_{\tau-1}$ при $t \geqslant \tau$.

Оболочка Снелла[23].

Пусть задано расширенное вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$.

Будем говорить, что процесс $X^1 = \{X_t^1, t \in T\}$ мажорирует процесс $X^2 = \{X_t^2, t \in T\}$, если $X_t^1 \overset{\text{п.н.}}{\geqslant} X_t^2$ для всех $t \in T$. Обозначение: $X^1 \geqslant X^2$.

Определим оболочку Снелла для случая дискретного времени с конечным горизонтом, т.е.

$$T = \{0, 1, 2, \ldots, N\}.$$

Определение 4.1. Оболочкой Снелла X^* адаптированного процесса $X = \{X_t \in \mathcal{L}_1, t = 0, 1, 2, \ldots, N\}$, называется наименьший настоящий супермартингал, мажорирующий процесс X, т.е.

1) X^* — супермартингал;

2) $X^* \geqslant X$;

3) $\forall Y \colon Y \geqslant X$, Y — супермартингал $\Longrightarrow Y \geqslant X^*$.

Важно отметить, что существование такого процесса X^* не вытекает из определения. Поэтому вопрос существования оболочки Снелла нужно рассмотреть отдельно.

Замечание 4.5. Легко понять, что если для процесса существует оболочка Снелла, то она определена единственным образом.

Теорема 4.3. *Для процесса $X = \{X_t, t \in T\}$ такого, что $T = \{0, 1, 2, \ldots, N\}$ и $X_t \in \mathcal{L}_1$ для всех $t \in T$, существует оболочка Снелла X^*, причём справедливы следующие рекуррентные соотношения:*

$$\left\{ \begin{array}{rcl} X_N^* & = & X_N, \\ X_{t-1}^* & = & \max\left\{X_{t-1},\ \mathbb{E}^{\mathcal{F}_{t-1}} X_t^*\right\}, \quad t = 1, 2, \ldots, N. \end{array} \right. \tag{4.10}$$

[23]Оболочка Снелла — это точный перевод английского термина “Snell envelope”. Хотя никакого геометрического смысла слово “оболочка” не несёт. Переводы исходного термина “Snell envelope” в литературе встречаются разные, однако именно этот ближе всего к оригиналу. Кстати, в словосочетаниях “аффинная оболочка”, “линейная оболочка”, “выпуклая оболочка” слово “оболочка” переводится на английский именно как “envelope”.

Доказательство. Рассмотрим процесс $Z = \{Z_t,\ t \in T\}$, $T = \{0, 1, 2, \ldots, N\}$, заданный рекуррентными соотношениями:

$$\begin{cases} Z_N &= X_N, \\ Z_{t-1} &= \max\left\{X_{t-1},\ \mathbb{E}^{\mathcal{F}_{t-1}} Z_t\right\}, \quad t = 1, 2, \ldots, N. \end{cases}$$

Покажем, что $Z = X^*$ — оболочка Снелла для процесса X.

1. Проверим, что $Z_t \in \mathcal{L}_1$. Действительно, учитывая, что $X_t \in \mathcal{L}_1$, $t \in T$, получим по индукции:

   - $Z_N = X_N \in \mathcal{L}_1$;
   - пусть $Z_t \in \mathcal{L}_1$; тогда $\mathbb{E}^{\mathcal{F}_{t-1}} Z_t \in \mathcal{L}_1$ (т.к. ОУМО действует из $\mathcal{L}_1$ в $\mathcal{L}_1$) $\Longrightarrow Z_{t-1} = \max\left\{X_{t-1},\ \mathbb{E}^{\mathcal{F}_{t-1}} Z_t\right\} \in \mathcal{L}_1$ (т.к. $X_{t-1} \in \mathcal{L}_1$, а максимум элементов пространства $\mathcal{L}_1$ также лежит в пространстве $\mathcal{L}_1$).

2. Z мажорирует X по построению.

3. Для процесса Z выполнено супермартингальное свойство:

   $$Z_{t-1} = \max\left\{X_{t-1},\ \mathbb{E}^{\mathcal{F}_{t-1}} Z_t\right\}, \quad t = 1, 2, \ldots, N, \quad \Longrightarrow \quad \mathbb{E}^{\mathcal{F}_{t-1}} Z_t \leqslant Z_{t-1}, \quad t = 1, 2, \ldots, N.$$

4. Пусть процесс Y является настоящим супермартингалом, мажорирующим процесс X. Тогда по индукции:

   - $Y_N \geqslant Z_N = X_N$;
   - пусть $Y_t \geqslant Z_t$; так как Y — супермартингал, то $\mathbb{E}^{\mathcal{F}_{t-1}} Y_t \leqslant Y_{t-1}$, а в силу монотонности ОУМО $\mathbb{E}^{\mathcal{F}_{t-1}} Y_t \geqslant \mathbb{E}^{\mathcal{F}_{t-1}} Z_t$; следовательно,

   $$Z_{t-1} = \max\left\{X_{t-1},\ \mathbb{E}^{\mathcal{F}_{t-1}} Z_t\right\} \leqslant \max\left\{X_{t-1},\ \mathbb{E}^{\mathcal{F}_{t-1}} Y_t\right\} \leqslant \\ \leqslant \max\left\{X_{t-1},\ Y_{t-1}\right\} = \{Y \geqslant X\} = Y_{t-1}.$$

   Таким образом, $Y \geqslant Z$.

□

5 Марковские моменты и их свойства. Остановленный процесс. Сохранение мартингального свойства в момент остановки

Марковские моменты и их свойства.

Рассмотрим понятие случайного момента времени. Для формализации недоступности информации из будущего на рассматриваемые случайные моменты времени накладываются определенные ограничения.

Определение 5.1. Случайная величина τ, принимающая значения на множестве $\{0, 1, \ldots\} \cup \{+\infty\}$, называется **марковским моментом**, если в каждый момент времени на основе имеющейся информации можно точно сказать, наступил ли момент τ или нет, т.е.

$$\{\tau \leqslant t\} \in \mathcal{F}_t, \quad \forall t = 0, 1, \ldots. \tag{5.1}$$

В дальнейшем под случайным моментом времени будем подразумевать именно марковский момент.

Замечание 5.1. Определение марковского момента для непрерывного времени даётся аналогично. Для дискретного времени (5.1) равносильно

$$\{\tau = t\} \in \mathcal{F}_t, \quad \forall t = 0, 1, \ldots. \tag{5.2}$$

Доказательство. Применим индукцию по T, т.е. покажем, что для всех $T = 0, 1, 2, \ldots$

$$\{\tau \leqslant t\} \in \mathcal{F}_t, \quad \forall t = 0, 1, \ldots, T. \tag{5.3}$$

равносильно

$$\{\tau = t\} \in \mathcal{F}_t, \quad \forall t = 0, 1, \ldots, T. \tag{5.4}$$

$T = 0$**:** $\{\tau \leqslant T\} \equiv \{\tau = T\} \equiv \{\tau = 0\}$.

$T - 1 \to T$**:**

1. Предположим, что для $T-1$ из (5.3) следует (5.4). Тогда это верно и для T на основании того, что

   $$\{\tau \leqslant t\} \in \mathcal{F}_t, \quad \forall t = 0, 1, \ldots, T \quad \Longrightarrow \quad \{\tau = T\} = \{\tau \leqslant T\} \setminus \{\tau \leqslant T - 1\} \in \mathcal{F}_T,$$

   т.к. $\{\tau \leqslant T\} \in \mathcal{F}_T$, $\{\tau \leqslant T-1\} \in \mathcal{F}_{T-1} \subseteq \mathcal{F}_T$ и $\mathcal{F}_T$ — σ-алгебра.

2. Предположим, что для $T-1$ из (5.4) следует (5.3). Тогда это верно и для T на основании того, что

   $$\{\tau = t\} \in \mathcal{F}_t, \quad \forall t = 0, 1, \ldots, T \quad \Longrightarrow \quad \{\tau \leqslant T\} = \bigcup_{t=0}^{T} \{\tau = t\} \in \mathcal{F}_T,$$

   т.к. $\{\tau = t\} \in \mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{F}_T$ для $t \leqslant T$ и $\mathcal{F}_T$ — σ-алгебра.

□

Утверждение 5.1. *Случайная величина τ является марковским моментом тогда и только тогда, когда случайный процесс $\xi = \{\xi_t,\ t = 0, 1, \ldots\}$, где $\xi_t = \mathbf{1}_{\{\tau \leqslant t\}}$, является адаптированным к потоку σ-алгебр $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_t,\ t = 0, 1, \ldots\}$.*

Доказательство. Процесс адаптирован, если в текущий момент времени значение процесса нам доступно. Таким образом, если процесс ξ адаптирован, то в каждый момент времени t нам доступна информация о том, произошло ли событие $\{\tau \leqslant t\}$ или нет (т.е. $\omega \in \{\tau \leqslant t\}$ или $\omega \notin \{\tau \leqslant t\}$). Получаем, что адаптированность процесса ξ, принимающего нулевое значение до случайного момента времени τ и равного единице после этого момента времени, эквивалентна тому, что $\{\tau \leqslant t\} \in \mathcal{F}_t$ для $\forall t$. □

Определение 5.2. Момент остановки — это марковский момент, конечный с вероятностью 1, т.е.

$$\tau \text{ — момент остановки} \quad \Longleftrightarrow \quad \{\tau \leqslant t\} \in \mathcal{F}_t, \quad \forall t = 0, 1, \ldots; \quad \mathbb{P}(\tau < +\infty) = 1. \tag{5.5}$$

Пример 5.1. Рассмотрим адаптированный процесс X. Пусть τ_A — момент первого достижения траекторией некоторого произвольного множества A:

$$\tau_A \overset{\mathsf{def}}{=} \inf\{t \colon X_t \in A\}. \tag{5.6}$$

При этом мы используем соглашение $\inf \varnothing \overset{\mathsf{def}}{=} +\infty$ (так как логично положить $\tau_A = +\infty$ в случае непопадания во множество A).

Тогда τ_A будет марковским моментом.

Доказательство. Зафиксируем некоторый момент времени T и покажем, что $\{\tau_A = T\} \in \mathcal{F}_T$. Учитывая определение (5.6), получим:

$$\{\omega\colon \tau_A = T\} = \{\omega\colon \inf\{t\colon X_t \in A\} = T\} =$$
$$= \{\omega\colon X_0(\omega) \notin A, X_1(\omega) \notin A, \ldots, X_{T-1}(\omega) \notin A, X_T(\omega) \in A\} =$$
$$= \bigcap_{t=0}^{T-1} X_t^{-1}\left(A^C\right) \cap X_T^{-1}(A) \in \{X_t \in m\left(\mathcal{F}_t\right), \mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{F}_{t+1}, \mathcal{F}_T - \sigma\text{-алгебра}\} \in \mathcal{F}_T.$$

Таким образом, τ_A — марковский момент (см. замечание 5.4). □

Определение 5.3. σ-алгеброй событий $\mathcal{F}_\tau$, определенной относительно случайного момента времени τ, называется подмножество класса событий $\mathcal{F}$, формализующее всю информацию, доступную нам вплоть до момента остановки τ, т.е.

$$\mathcal{F}_\tau \stackrel{\mathsf{def}}{=} \{A \in \mathcal{F}\colon A \cap \{\tau \leqslant t\} \in \mathcal{F}_t,\ t = 0, 1, 2, \ldots\}. \tag{5.7}$$

Таким образом, $\mathcal{F}_\tau$ характеризует ту информацию, которую мы получили бы, ведя наблюдение вплоть до момента времени τ. Заметим, что формула (5.7) показывает, что если рассматривать только те исходы, для которых уже наступил момент времени τ, то по текущей информации мы можем сказать, произошло ли событие A или нет. Корректность определения 5.3 вытекает из следующего утверждения.

Утверждение 5.2. *Класс событий $\mathcal{F}_\tau$ является σ-алгеброй.*

Доказательство. По определению, σ-алгебра — это непустой класс подмножеств Ω, замкнутый относительно операций дополнения и счётного объединения.

1. Пусть $A \in \mathcal{F}_\tau$. Покажем, что $A^C \in \mathcal{F}_\tau$. Зафиксируем некоторое $t \geqslant 0$. Достаточно показать, что $A^C \cap \{\tau \leqslant t\} \in \mathcal{F}_t$. Легко проверить, что

   $$A^C \cap \{\tau \leqslant t\} = \{\tau \leqslant t\} \setminus (A \cap \{\tau \leqslant t\}).$$

   Тогда

   $$\left.\begin{array}{rl} \{\tau \leqslant t\} \in \mathcal{F}_t & (\text{т.к. } \tau \text{ — момент остановки}) \\ A \cap \{\tau \leqslant t\} \in \mathcal{F}_t & (\text{т.к. } A \in \mathcal{F}_\tau) \\ \mathcal{F}_t & \text{— } \sigma\text{-алгебра} \end{array}\right\} \quad \Longrightarrow \quad \{\tau \leqslant t\} \setminus (A \cap \{\tau \leqslant t\}) \in \mathcal{F}_t.$$

2. Пусть события $A_1, A_2, \ldots$ принадлежат $\mathcal{F}_\tau$. Покажем, что событие $B = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k$ также принадлежит $\mathcal{F}_\tau$. Зафиксируем некоторое $t \geqslant 0$. В силу определения, достаточно показать, что $B \cap \{\tau \leqslant t\} \in \mathcal{F}_t$. Легко проверить, что

   $$B \cap \{\tau \leqslant t\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} (A_k \cap \{\tau \leqslant t\}).$$

   Тогда

   $$\left.\begin{array}{rl} A_k \cap \{\tau \leqslant t\} \in \mathcal{F}_t & (\text{т.к. } A_k \in \mathcal{F}_\tau) \\ \mathcal{F}_t & \text{— } \sigma\text{-алгебра} \end{array}\right\} \quad \Longrightarrow \quad \bigcup_{k=1}^{\infty} (A_k \cap \{\tau \leqslant t\}) \in \mathcal{F}_t.$$

□

Утверждение 5.3. *Пусть моменты остановки τ_1 и τ_2 таковы, что $\tau_1 \leqslant \tau_2$. Тогда $\mathcal{F}_{\tau_1} \subseteq \mathcal{F}_{\tau_2}$.*

Доказательство. По определению,

$$\mathcal{F}_{\tau_1} = \{A \in \mathcal{F} \colon A \cap \{\tau_1 \leqslant t\} \in \mathcal{F}_t,\ t = 0, 1, 2, \ldots\}\,;$$
$$\mathcal{F}_{\tau_2} = \{A \in \mathcal{F} \colon A \cap \{\tau_2 \leqslant t\} \in \mathcal{F}_t,\ t = 0, 1, 2, \ldots\}\,.$$

Возьмём произвольное событие $A \in \mathcal{F}_{\tau_1}$. Тогда $A \in \mathcal{F}$ и $A \cap \{\tau_1 \leqslant t\} \in \mathcal{F}_t$ для любого t. В силу $\tau_1 \leqslant \tau_2$ имеем, что $\{\tau_2 \leqslant t\} \subseteq \{\tau_1 \leqslant t\}$ для любого t. Следовательно, для любого t справедливо:

$$A \cap \{\tau_2 \leqslant t\} = (A \cap \{\tau_1 \leqslant t\}) \cap \{\tau_2 \leqslant t\};$$

$$\left.\begin{array}{rl} A \cap \{\tau_1 \leqslant t\} \in \mathcal{F}_t & (\text{т.к. } A \in \mathcal{F}_{\tau_1}) \\ \{\tau_2 \leqslant t\} \in \mathcal{F}_t & (\text{т.к. } \tau_2 \text{ — момент остановки}) \\ \mathcal{F}_t & \text{— } \sigma\text{-алгебра} \end{array}\right\} \implies (A \cap \{\tau_1 \leqslant t\}) \cap \{\tau_2 \leqslant t\} \in \mathcal{F}_t.$$

Поэтому $A \cap \{\tau_2 \leqslant t\} \in \mathcal{F}_t$, то есть $A \in \mathcal{F}_{\tau_2}$. Таким образом, в силу произвольности события A, получаем $\mathcal{F}_{\tau_1} \subseteq \mathcal{F}_{\tau_2}$. □

Утверждение 5.4. *Пусть τ_1 и τ_2 — моменты остановки (марковские моменты), а момент τ определяется как*

1) $\tau = \max\{\tau_1, \tau_2\}$,

2) $\tau = \min\{\tau_1, \tau_2\}$,

3) $\tau = \tau_1 + \tau_2$.

Тогда τ также будет моментом остановки (марковским моментом).

Доказательство. Вначале покажем, что если τ_1 и τ_2 являются марковскими моментами, то и τ будет марковским моментом. Для этого достаточно доказать, что для любого целого $t \geqslant 0$ $\{\tau \leqslant t\} \in \mathcal{F}$. Фиксируя произвольное $t \geqslant 0$, имеем:

1) $\{\tau \leqslant t\} = \{\max\{\tau_1, \tau_2\} \leqslant t\} = \{\tau_1 \leqslant t\} \cap \{\tau_2 \leqslant t\}$;

2) $\{\tau \leqslant t\} = \{\min\{\tau_1, \tau_2\} \leqslant t\} = \{\tau_1 \leqslant t\} \cup \{\tau_2 \leqslant t\}$;

3) $\{\tau \leqslant t\} = \{\tau_1 + \tau_2 \leqslant t\} = \bigcup\limits_{k=0}^{t} (\{\tau_1 \leqslant t - k\} \cap \{\tau_2 = k\})$;

$$\left.\begin{array}{rl} \{\tau_1 \leqslant t\} \in \mathcal{F}_t & (\text{т.к. } \tau_1 \text{ — марковский момент}) \\ \{\tau_2 \leqslant t\} \in \mathcal{F}_t & (\text{т.к. } \tau_2 \text{ — марковский момент}) \\ \mathcal{F}_t & \text{— } \sigma\text{-алгебра} \end{array}\right\} \implies \begin{array}{l} \{\tau_1 \leqslant t\} \cap \{\tau_2 \leqslant t\} \in \mathcal{F}_t, \\ \{\tau_1 \leqslant t\} \cup \{\tau_2 \leqslant t\} \in \mathcal{F}_t. \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{rl} \{\tau_1 \leqslant t - k\} \in \mathcal{F}_{t-k} \subseteq \mathcal{F}_t,\ \forall k = 0, 1, \ldots, t & (\text{т.к. } \tau_1 \text{ — марковский момент}) \\ \{\tau_2 = k\} \in \mathcal{F}_k \subseteq \mathcal{F}_t,\ \forall k = 0, 1, \ldots, t & (\text{т.к. } \tau_2 \text{ — марковский момент}) \\ \mathcal{F}_t & \text{— } \sigma\text{-алгебра} \end{array}\right\} \implies$$

$$\implies \bigcup_{k=0}^{t} (\{\tau_1 \leqslant t - k\} \cap \{\tau_2 = k\}) \in \mathcal{F}_t.$$

Осталось показать, что если $\tau_1 \overset{\text{п.н.}}{<} +\infty$ и $\tau_2 \overset{\text{п.н.}}{<} +\infty$, то и $\tau \overset{\text{п.н.}}{<} +\infty$. Действительно, легко видеть, что

1) $\max\{\tau_1, \tau_2\} \overset{\text{п.н.}}{<} +\infty$;

2) $\min\{\tau_1, \tau_2\} \overset{\text{п.н.}}{<} +\infty$;

3) $\tau_1 + \tau_2 \overset{\text{п.н.}}{<} +\infty$.

Таким образом, если τ_1 и τ_2 — моменты остановки, то и τ также будет моментом остановки.

$\square$

Теорема 5.1 (Критерий измеримости случайной величины относительно σ-алгебры $\mathcal{F}_\tau$). *Пусть τ — момент остановки. Тогда случайная величина ξ является измеримой относительно σ-алгебры $\mathcal{F}_\tau$ тогда и только тогда, когда случайный процесс ζ такой, что $\zeta_t = \xi \cdot \mathbf{1}_{\{\tau \leqslant t\}}$ для всех t, будет адаптированным:*

$$\xi \in m\,(\mathcal{F}_\tau) \quad \Longleftrightarrow \quad \zeta = \{\zeta_t = \xi \cdot \mathbf{1}_{\{\tau \leqslant t\}},\ t = 0, 1, \ldots\} \text{ — адаптированный процесс.}$$

Доказательство. По определению,

$$\begin{array}{rcl} \xi \in m\,(\mathcal{F}_\tau) & \Longleftrightarrow & \forall B \in \mathcal{B} \quad \xi^{-1}(B) \in \mathcal{F}_\tau; \\ \zeta \text{ — адаптированный процесс} & \Longleftrightarrow & \zeta_t \in m\,(\mathcal{F}_t),\ t = 0, 1, \ldots; \\ \mathcal{F}_\tau & = & \{A \in \mathcal{F} \colon A \cap \{\tau \leqslant t\} \in \mathcal{F}_t,\ t = 0, 1, \ldots\}. \end{array}$$

Откуда

$$\begin{array}{rcl} \xi \in m\,(\mathcal{F}_\tau) & \Longleftrightarrow & \forall B \in \mathcal{B} \quad \xi^{-1}(B) \cap \{\tau \leqslant t\} \in \mathcal{F}_t,\ t = 0, 1, \ldots; \\ \zeta \text{ — адаптированный процесс} & \Longleftrightarrow & \forall B \in \mathcal{B} \quad \zeta_t^{-1}(B) \in \mathcal{F}_t,\ t = 0, 1, \ldots. \end{array}$$

По условию теоремы, для любого $t \geqslant 0$

$$\zeta_t(\omega) = \begin{cases} \xi(\omega), & \text{если } \tau \leqslant t; \\ 0, & \text{если } \tau > t. \end{cases}$$

Тогда для любого $B \in \mathcal{B}$ получаем:

$$\omega \in \zeta_t^{-1}(B); \quad \Longleftrightarrow \quad \zeta_t(\omega) \in B; \quad \Longleftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} \xi(\omega) \in B, \\ \tau \leqslant t, \end{array} \right. \bigcup \left\{ \begin{array}{l} 0 \in B, \\ \tau > t; \end{array} \right. \quad \Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow \quad \left[\omega \in \left(\xi^{-1}(B) \cap \{\tau \leqslant t\}\right)\right] \bigcup \left[(0 \in B) \cap \left(\omega \in \{\tau \leqslant t\}^C\right)\right].$$

Таким образом,

$$\zeta_t^{-1}(B) = \begin{cases} (\xi^{-1}(B) \cap \{\tau \leqslant t\}) \cup \{\tau \leqslant t\}^C, & \text{если } 0 \in B; \\ \xi^{-1}(B) \cap \{\tau \leqslant t\}, & \text{если } 0 \notin B. \end{cases}$$

Заметим также, что $\xi^{-1}(B) \cap \{\tau \leqslant t\} \in \mathcal{F}_t$ тогда и только тогда, когда $(\xi^{-1}(B) \cap \{\tau \leqslant t\}) \cup \{\tau \leqslant t\}^C \in \mathcal{F}_t$, т.к. $\{\tau \leqslant t\} \in \mathcal{F}_t$ (в силу определения момента остановки τ) и $\mathcal{F}_t$ — σ-алгебра.

Доказательство завершает следующая цепочка эквивалентных утверждений:

$$\zeta \text{ — адаптированный процесс;} \quad \Longleftrightarrow \quad \forall B \in \mathcal{B} \quad \zeta_t^{-1}(B) \in \mathcal{F}_t,\ t = 0, 1, \ldots; \quad \Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow \quad \forall B \in \mathcal{B} \quad \forall t \geqslant 0 \quad \left(\xi^{-1}(B) \cap \{\tau \leqslant t\}\right) \cup \{\tau \leqslant t\}^C \in \mathcal{F}_t,\ \text{если } 0 \in B,$$
$$\text{и } \xi^{-1}(B) \cap \{\tau \leqslant t\} \in \mathcal{F}_t,\ \text{если } 0 \notin B; \quad \Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow \quad \forall B \in \mathcal{B} \quad \forall t \geqslant 0 \quad \xi^{-1}(B) \cap \{\tau \leqslant t\} \in \mathcal{F}_t; \quad \Longleftrightarrow \quad \xi \in m\,(\mathcal{F}_\tau).$$

$\square$

Утверждение 5.5. *Пусть случайный процесс X является адаптированным, τ — момент остановки. Тогда $X_\tau \in m\,(\mathcal{F}_\tau)$.*

Доказательство. Рассмотрим случайную величину ξ такую, что

$$\xi(\omega) = X_{\tau(\omega)}(\omega) \quad \Longrightarrow \quad \xi(\omega) = X_t(\omega), \text{ если } \omega \in \{\tau = t\}$$

Для доказательства утверждения достаточно показать, что $\xi \in m\,(\mathcal{F}_\tau)$, т.е.

$$\forall B \in \mathcal{B} \quad \forall t \geqslant 0 \quad \xi^{-1}(B) \cap \{\tau \leqslant t\} \in \mathcal{F}_t.$$

Для произвольного $B \in \mathcal{B}$ имеем:

$$\xi^{-1}(B) = \bigcup_{t=0}^{\infty} \left(X_t^{-1}(B) \cap \{\tau = t\} \right).$$

Тогда для любого $t \geqslant 0$ справедливо:

$$\xi^{-1}(B) \cap \{\tau \leqslant t\} = \left(\bigcup_{k=0}^{\infty} \left(X_k^{-1}(B) \cap \{\tau = k\} \right) \right) \cap \{\tau \leqslant t\} =$$

$$= \bigcup_{k=0}^{\infty} \left(X_k^{-1}(B) \cap \{\tau = k\} \cap \{\tau \leqslant t\} \right) = \bigcup_{k=0}^{t} \left(X_k^{-1}(B) \cap \{\tau = k\} \right).$$

$$\left.\begin{array}{ll} X_k^{-1}(B) \in \mathcal{F}_k \subseteq \mathcal{F}_t,\ \forall k = 0, 1, \ldots, t & (\text{т.к. } X \text{ — адаптированный процесс}) \\ \{\tau = k\} \in \mathcal{F}_k \subseteq \mathcal{F}_t,\ \forall k = 0, 1, \ldots, t & (\text{т.к. } \tau \text{ — момент остановки}) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \mathcal{F}_t & \text{— } \sigma\text{-алгебра} \end{array}\right\} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad \bigcup_{k=0}^{t} \left(X_k^{-1}(B) \cap \{\tau = k\} \right) \in \mathcal{F}_t.$$

□

Остановленный процесс.

Пусть X — адаптированный процесс, τ — марковский момент.

Определение 5.4. Остановленным в момент времени τ процессом называется процесс $X^{(\tau)}$ такой, что

$$X_t^{(\tau)} = X_{\min\{\tau,\, t\}} = \begin{cases} X_t, & t \leqslant \tau; \\ X_\tau, & t > \tau. \end{cases} \tag{5.8}$$

Другими словами, остановленный процесс — это процесс, как бы "замороженный" в случайный момент времени τ.

Справедливы следующие представления для остановленного процесса:

$$X_t^{(\tau)} = \mathbf{1}_{\{\tau < t\}} \cdot X_\tau + \mathbf{1}_{\{\tau \geqslant t\}} \cdot X_t, \quad t = 0, 1, 2, \ldots; \tag{5.9}$$

$$X_t^{(\tau)} = X_0 + \sum_{s=1}^{t} \mathbf{1}_{\{s \leqslant \tau\}} \cdot \triangle X_s, \quad t = 0, 1, 2, \ldots. \tag{5.10}$$

Введем процесс H такой, что

$$H_t \overset{\mathsf{def}}{=} \mathbf{1}_{\{t \leqslant \tau\}}, \quad t = 0, 1, \ldots. \tag{5.11}$$

Заметим, что процесс H предсказуемый, т.к.

$$\{t \leqslant \tau\} = \{\tau < t\}^C = \{\tau \leqslant t-1\}^C \in \mathcal{F}_{t-1} \quad \text{(по определению марковского момента)} \quad \Longrightarrow \quad \Longrightarrow \quad H_t \in m(\mathcal{F}_{t-1}).$$

Подставляя (5.11) в (5.10), получим следующее представление для остановленного процесса:

$$X_t^{(\tau)} = H_0 X_0 + \sum_{s=1}^{t} H_s \triangle X_s, \quad t = 0, 1, 2, \ldots. \tag{5.12}$$

Таким образом, можно сформулировать следующее утверждение:

Утверждение 5.6. *Пусть X — адаптированный процесс, τ — марковский момент. Тогда остановленный в момент времени τ процесс $X^{(\tau)}$ является интегральным преобразованием (в интегральной форме) процесса X при помощи предсказуемого процесса $H = \{H_t = \mathbf{1}_{\{t \leqslant \tau\}},\ t = 0, 1, \ldots\}$:*

$$X^{(\tau)} = H \circ X. \tag{5.13}$$

Из этого утверждения сразу же следует следующая теорема:

Теорема 5.2. *Пусть X обладает мартингальным (субмартингальным, супермартингальным) свойством, τ — марковский момент. Тогда остановленный процесс $X^{(\tau)}$ также обладает мартингальным (субмартингальным, супермартингальным) свойством. Другими словами, остановка процесса сохраняет мартингальное (субмартингальное, супермартингальное) свойство.*

Если дополнительно потребовать, чтобы $X_t \in \mathcal{L}_1$ для всех $t \geqslant 0$, то и $X_t^{(\tau)} \in \mathcal{L}_1$ для всех $t \geqslant 0$. Другими словами, остановка процесса сохраняет свойство быть ***настоящим*** *мартингалом (субмартингалом, супермартингалом).*

Доказательство. Утверждение теоремы следует из теоремы 3.1, замечания 3.4, а также таких очевидных фактов, как $H_t \in \mathcal{L}_\infty$ и $H_t \geqslant 0$ для всех t. □

Следствие 5.1. *Пусть X — адаптированный процесс, τ — марковский момент, причём $\tau \leqslant N$ (т.е. рассматриваем ограниченный момент остановки[24]). Тогда*

1) $\mathbb{E}\, X_\tau = \mathbb{E}\, X_0$, если X — мартингал;

2) $\mathbb{E}\, X_\tau \leqslant \mathbb{E}\, X_0$, если X — супермартингал;

3) $\mathbb{E}\, X_\tau \geqslant \mathbb{E}\, X_0$, если X — субмартингал.

Доказательство. Рассмотрим остановленный в момент времени τ процесс $X^{(\tau)}$. Для начала отметим, что

$$X_N^{(\tau)} = X_{\min\{\tau,\, N\}} = \{\tau \leqslant N\} = X_\tau;$$
$$X_0^{(\tau)} = X_{\min\{\tau,\, 0\}} = \{\tau \geqslant 0\} = X_0.$$

1) Если X — мартингал, то по теореме 5.2 остановленный процесс $X^{(\tau)}$ также является мартингалом:

$$\mathbb{E}^{\mathcal{F}_t} X_{t+1}^{(\tau)} = X_t^{(\tau)}\ t = 0, 1, \ldots; \quad \Longrightarrow \quad \mathbb{E}\, X_t^{(\tau)} = \mathbb{E}\, X_0^{(\tau)}\ t = 0, 1, \ldots.$$

В частности, при $t = N$ получаем $\mathbb{E}\, X_N^{(\tau)} = \mathbb{E}\, X_0^{(\tau)}$. Учитывая это, а также равенства $X_N^{(\tau)} = X_\tau$ и $X_0^{(\tau)} = X_0$, имеем $\mathbb{E}\, X_\tau = \mathbb{E}\, X_0$.

[24]Момент остановки будет заведомо ограничен, если рассматривать случай конечного горизонта: $T = \{0, 1, 2, \ldots, N\}$.

2) Если X — супермартингал, то по теореме 5.2 остановленный процесс $X^{(\tau)}$ также является супермартингалом:

$$\mathbb{E}^{\mathcal{F}_t} X_{t+1}^{(\tau)} \leqslant X_t^{(\tau)}\ t=0,1,\ldots; \quad \Longrightarrow \quad \mathbb{E}\, X_t^{(\tau)} \leqslant \mathbb{E}\, X_0^{(\tau)}\ t=0,1,\ldots.$$

В частности, при $t=N$ получаем $\mathbb{E}\, X_N^{(\tau)} \leqslant \mathbb{E}\, X_0^{(\tau)}$. Учитывая это, а также равенства $X_N^{(\tau)} = X_\tau$ и $X_0^{(\tau)} = X_0$, имеем $\mathbb{E}\, X_\tau \leqslant \mathbb{E}\, X_0$.

3) Если X — субмартингал, то по теореме 5.2 остановленный процесс $X^{(\tau)}$ также является субмартингалом:

$$\mathbb{E}^{\mathcal{F}_t} X_{t+1}^{(\tau)} \geqslant X_t^{(\tau)}\ t=0,1,\ldots; \quad \Longrightarrow \quad \mathbb{E}\, X_t^{(\tau)} \geqslant \mathbb{E}\, X_0^{(\tau)}\ t=0,1,\ldots.$$

В частности, при $t=N$ получаем $\mathbb{E}\, X_N^{(\tau)} \geqslant \mathbb{E}\, X_0^{(\tau)}$. Учитывая это, а также равенства $X_N^{(\tau)} = X_\tau$ и $X_0^{(\tau)} = X_0$, имеем $\mathbb{E}\, X_\tau \geqslant \mathbb{E}\, X_0$.

□

Научимся теперь считать условное математическое ожидание относительно σ-алгебры $\mathcal{F}_\tau$, определенной относительно момента остановки τ.

Лемма 5.1. *Пусть Y — произвольная случайная величина, τ — момент остановки. Тогда*

$$\mathbb{E}^{\mathcal{F}_\tau} Y = \sum_{s=0}^{\infty} \mathbf{1}_{\{\tau=s\}}\, \mathbb{E}^{\mathcal{F}_s} Y = \xi_\tau, \tag{5.14}$$

где процесс ξ определяется как

$$\xi_t \overset{\mathsf{def}}{=} \mathbb{E}^{\mathcal{F}_t} Y, \quad t=0,1,2,\ldots. \tag{5.15}$$

Доказательство. 1. Сначала докажем формулу (5.14) для неотрицательных случайных величин $Y \geqslant 0$.

По определению ОУМО:

1) $\mathbb{E}^{\mathcal{F}_\tau} Y \in m(\mathcal{F}_\tau)$, $\forall Y \in m_+(\mathcal{F})$;
2) $\mathbb{E}(\mathbf{1}_A Y) = \mathbb{E}\big(\mathbf{1}_A\, \mathbb{E}^{\mathcal{F}_\tau} Y\big)$, $\forall A \in \mathcal{F}_\tau$.

Заметим, что

$$\xi_{\tau(\omega)}(\omega) = \sum_{s=0}^{\infty} \mathbf{1}_{\{\tau=s\}}(\omega)\xi_s(\omega); \quad \Longrightarrow \quad \sum_{s=0}^{\infty} \mathbf{1}_{\{\tau=s\}}\, \mathbb{E}^{\mathcal{F}_s} Y \equiv \xi_\tau.$$

Положим

$$Z \overset{\mathsf{def}}{=} \xi_\tau$$

и покажем, что $Z = \mathbb{E}^{\mathcal{F}_\tau} Y$ (с точностью до эквивалентности).

(a) Условие измеримости 1) в определении ОУМО выполнено в силу утверждения 5.5 (адаптированность процесса ξ не вызывает сомнений):

$$Z = \xi_\tau \in m(\mathcal{F}_\tau).$$

(b) Для полного доказательства леммы осталось показать, что выполнено второе условие из определения ОУМО, т.е.

$$\mathbb{E}\left(\mathbf{1}_A Y\right) = \mathbb{E}\left(\mathbf{1}_A Z\right), \quad \forall A \in \mathcal{F}_\tau,$$

что эквивалентно

$$\mathbb{E}\left(\mathbf{1}_A Y\right) = \mathbb{E}\left(\mathbf{1}_A \sum_{s=0}^{\infty} \mathbf{1}_{\{\tau=s\}}\, \mathbb{E}^{\mathcal{F}_s} Y\right), \quad \forall A \in \mathcal{F}_\tau.$$

Зафиксируем произвольное $A \in \mathcal{F}_\tau$. По определению $\mathcal{F}_\tau$, для события A выполнено условие

$$A \cap \{\tau \leqslant t\} \in \mathcal{F}_t,\ t = 0, 1, 2, \ldots.$$

Покажем, что из этого следует

$$A \cap \{\tau = t\} \in \mathcal{F}_t,\ t = 0, 1, 2, \ldots.$$

Действительно, при $t = 0$ это очевидно, а при любом $t > 0$

$$A \cap \{\tau = t\} = A \cap \left(\{\tau \leqslant t\} \setminus \{\tau \leqslant t-1\}\right) = \left(A \cap \{\tau \leqslant t\}\right) \setminus \left(A \cap \{\tau \leqslant t-1\}\right);$$

$$\left.\begin{array}{l} A \cap \{\tau \leqslant t\} \in \mathcal{F}_t \\ A \cap \{\tau \leqslant t-1\} \in \mathcal{F}_{t-1} \subseteq \mathcal{F}_t \\ \mathcal{F}_t \text{ — } \sigma\text{-алгебра} \end{array}\right\} \quad \Longrightarrow \quad \left(A \cap \{\tau \leqslant t\}\right) \setminus \left(A \cap \{\tau \leqslant t-1\}\right) \in \mathcal{F}_t.$$

Следовательно, $\mathbf{1}_{\{\tau=t\}\cap A} \in m\left(\mathcal{F}_t\right)$ для любых $t \geqslant 0$. Используя это, получим:

$$\mathbb{E}\left(\mathbf{1}_A \sum_{s=0}^{\infty} \mathbf{1}_{\{\tau=s\}}\, \mathbb{E}^{\mathcal{F}_s} Y\right) = \mathbb{E}\left(\sum_{s=0}^{\infty} \mathbf{1}_{\{\tau=s\}\cap A}\, \mathbb{E}^{\mathcal{F}_s} Y\right) = \sum_{s=0}^{\infty} \mathbb{E}\left(\mathbf{1}_{\{\tau=s\}\cap A}\, \mathbb{E}^{\mathcal{F}_s} Y\right) =$$

$$= \sum_{s=0}^{\infty} \mathbb{E}\, \mathbb{E}^{\mathcal{F}_s}\left(Y \mathbf{1}_{\{\tau=s\}\cap A}\right) = \sum_{s=0}^{\infty} \mathbb{E}\left(Y \mathbf{1}_{\{\tau=s\}\cap A}\right) = \mathbb{E}\left(\sum_{s=0}^{\infty} Y \mathbf{1}_{\{\tau=s\}\cap A}\right) =$$

$$= \mathbb{E}\left(\mathbf{1}_A Y \sum_{s=0}^{\infty} \mathbf{1}_{\{\tau=s\}}\right) = \{\sum_{s=0}^{\infty} \mathbf{1}_{\{\tau=s\}} \overset{\text{п.н.}}{=} 1,\ \text{т.к. } \tau \overset{\text{п.н.}}{<} \infty\} = \mathbb{E}\left(\mathbf{1}_A Y\right).$$

Заметим, что здесь мы существенно воспользовались тем, что τ не просто марковский момент, но и момент остановки.

2. Пусть теперь Y — знакопеременная случайная величина. Воспользовавшись предыдущим пунктом доказательства, а также представлением (см. замечание 1.7)

$$Y = Y_+ - Y_-, \quad Y_+ \geqslant 0,\ Y_- \geqslant 0, \quad |Y| = Y_+ + Y_-,$$

получим нужную формулу (5.14).

$\square$

Сохранение мартингального свойства в момент остановки.

Теорема 5.3. *Пусть X — адаптированный процесс, τ и σ — ограниченные моменты остановки (т.е. $\tau \leqslant N$ и $\sigma \leqslant N$). Тогда*

1) $\mathbb{E}^{\mathcal{F}_\sigma} X_\tau = X_{\min\{\tau,\, \sigma\}}$, если X обладает мартингальным свойством;

2) $\mathbb{E}^{\mathcal{F}_\sigma} X_\tau \leqslant X_{\min\{\tau,\,\sigma\}}$*, если* X *обладает супермартингальным свойством;*

3) $\mathbb{E}^{\mathcal{F}_\sigma} X_\tau \geqslant X_{\min\{\tau,\,\sigma\}}$*, если* X *обладает субмартингальным свойством.*

Доказательство. Введем случайные величины ξ и η такие, что

$$\xi = \mathbb{E}^{\mathcal{F}_\sigma} X_\tau; \quad \eta = X_{\min\{\tau,\,\sigma\}}.$$

По лемме 5.1 получим:

$$\mathbb{E}^{\mathcal{F}_\sigma} X_\tau = \sum_{s=0}^{\infty} \mathbf{1}_{\{\sigma=s\}}\, \mathbb{E}^{\mathcal{F}_s} X_\tau.$$

В силу $\sigma \leqslant N$, все пространство элементарных событий можно представить в виде конечного объединения непересекающихся подмножеств:

$$\Omega = \bigcup_{t=0}^{N} \{\omega \colon \sigma = t\}.$$

Поэтому достаточно доказать соответствующие соотношения на множестве $\{\omega \colon \sigma = t\}$ для произвольного $t \in [0, N]$. Таким образом, фиксируя некоторое $t \in [0, N]$, покажем:

1) $\mathbb{P}\left(\xi(\omega) = \eta(\omega) \mid \sigma = t\right) = 1$, если X обладает мартингальным свойством;

2) $\mathbb{P}\left(\xi(\omega) \leqslant \eta(\omega) \mid \sigma = t\right) = 1$, если X обладает супермартингальным свойством;

3) $\mathbb{P}\left(\xi(\omega) \geqslant \eta(\omega) \mid \sigma = t\right) = 1$, если X обладает субмартингальным свойством.

При $\omega \in \{\omega \colon \sigma = t\}$ получим:

$$\xi = \mathbb{E}^{\mathcal{F}_t} X_\tau, \quad \eta = X_{\min\{\tau,\,t\}}.$$

В силу ограниченности момента остановки τ имеем:

$$X_\tau = \{\tau \leqslant N\} = X_{\min\{\tau,\,N\}}.$$

По определению остановленного процесса:

$$\mathbb{E}^{\mathcal{F}_t} X_{\min\{\tau,\,N\}} = \mathbb{E}^{\mathcal{F}_t} X_N^{(\tau)}, \quad X_{\min\{\tau,\,t\}} = X_t^{(\tau)}.$$

Таким образом, нам нужно доказать, что для любого $t \leqslant N$

1) $\mathbb{E}^{\mathcal{F}_t} X_N^{(\tau)} = X_t^{(\tau)}$, если X обладает мартингальным свойством;

2) $\mathbb{E}^{\mathcal{F}_t} X_N^{(\tau)} \leqslant X_t^{(\tau)}$, если X обладает супермартингальным свойством;

3) $\mathbb{E}^{\mathcal{F}_t} X_N^{(\tau)} \geqslant X_t^{(\tau)}$, если X обладает субмартингальным свойством.

Но это верно в силу теоремы 5.2 о том, что остановка процесса сохраняет мартингальное (субмартингальное, супермартингальное) свойство. □

Следствие 5.2 (Сохранение мартингального свойства в момент остановки)**.** *Пусть* X *— адаптированный процесс,* τ *и* σ *— моменты остановки такие, что* $\sigma \leqslant \tau \leqslant N$*. Тогда*

1) $\mathbb{E}^{\mathcal{F}_\sigma} X_\tau = X_\sigma$*, если* X *обладает мартингальным свойством;*

2) $\mathbb{E}^{\mathcal{F}_\sigma} X_\tau \leqslant X_\sigma$*, если* X *обладает супермартингальным свойством;*

3) $\mathbb{E}^{\mathcal{F}_\sigma} X_\tau \geqslant X_\sigma$*, если* X *обладает субмартингальным свойством.*

Замечание 5.2. Частным случаем ограниченного момента остановки является $\tau(\omega) \equiv t$ при любом фиксированном $t \geqslant 0$.

Замечание 5.3. Ограниченность моментов остановки τ и σ, рассматриваемых в теореме, по сути означает, что рассматривается задача с конечным горизонтом: $T = \{0, 1, 2, \dots, N\}$. Для задач с бесконечным горизонтом (т.е. при неограниченных моментах остановки) утверждение теоремы, вообще говоря, не является верным. Однако на практике обычно рассматривают задачи с конечным горизонтом.

Замечание 5.4. Пусть X — адаптированный процесс, τ и σ — моменты остановки такие, что $\tau \leqslant \sigma$. Тогда $\mathbb{E}^{\mathcal{F}_\sigma} X_\tau = X_\tau$ (вне зависимости от того, обладает ли процесс X мартингальным свойством).

Доказательство. Действительно, по утверждению 5.5, $X_\tau \in m\,(\mathcal{F}_\tau)$. В силу утверждения 5.3, $\mathcal{F}_\tau \subseteq \mathcal{F}_\sigma$ (т.к. $\tau \leqslant \sigma$). Следовательно, $X_\tau \in m\,(\mathcal{F}_\sigma)$, откуда из свойств ОУМО $\mathbb{E}^{\mathcal{F}_\sigma} X_\tau = X_\tau$. □

6 Предельное поведение мартингалов. Теорема Дуба (о сходимости). Сохранение мартингального свойства на бесконечности. Достаточные условия сохранения мартингального свойства в случайный момент времени

Рассмотрим адаптированный процесс X. Неформальное определение понятия числа пересечений (снизу вверх) этим процессом интервала $[a, b]$ до момента времени s ($\nu_s^X[a, b]$) дано на рисунке 1. Грубо говоря, $\nu_s^X[a, b]$ равно числу пересечений снизу вверх последовательностью $X_1, \dots, X_s$ полосы, ограниченной отрезком $[a, b]$.

Введём следующие обозначения: для любого вещественного числа a

$$\begin{array}{rcl} a^+ &=& \max\{a,\ 0\}; \\ a^- &=& \max\{-a,\ 0\}; \end{array} \qquad \Longrightarrow \qquad \left\{ \begin{array}{rcl} a &=& a^+ - a^-; \\ |a| &=& a^+ + a^-. \end{array} \right.$$

Напишем неравенство Дуба для оценки среднего числа пересечений снизу вверх.

Лемма 6.1 (Неравенство Дуба)**.** *Пусть процесс* X *является субмартингалом. Тогда для любого отрезка* $[a, b]$ *и любого момента времени* $s > 0$ *справедливо:*

$$\mathbb{E}\,\nu_s^X[a, b] \leqslant \frac{\mathbb{E}\,(X_s - a)^+}{b - a}. \tag{6.1}$$

Замечание 6.1. Формальное определение $\nu_s^X[a, b]$, а также доказательство неравенства Дуба (6.1) приведено в [**?**, гл. VII, § 3, теорема 3].

Прежде чем сформулировать теорему Дуба, поговорим немного о настоящих субмартингалах. Напомним, что субмартингал — это процесс, условно возрастающий в среднем:

$$\mathbb{E}^{\mathcal{F}_t} X_{t+1} \geqslant X_t, \quad \forall t \geqslant 0.$$

Следовательно,

$$\mathbb{E}\,X_{t+1} \geqslant \mathbb{E}\,X_t, \quad \forall t \geqslant 0,$$

т.е. математическое ожидание процесса $\mathbb{E}\,X_t$ как функция от времени не убывает (заметим, что $\mathbb{E}\,X_t < \infty$, т.к. $X_t \in \mathcal{L}_1$).

Сформулируем и докажем теорему Дуба о сходимости субмартингалов при некоторых ограничениях на рост процесса.

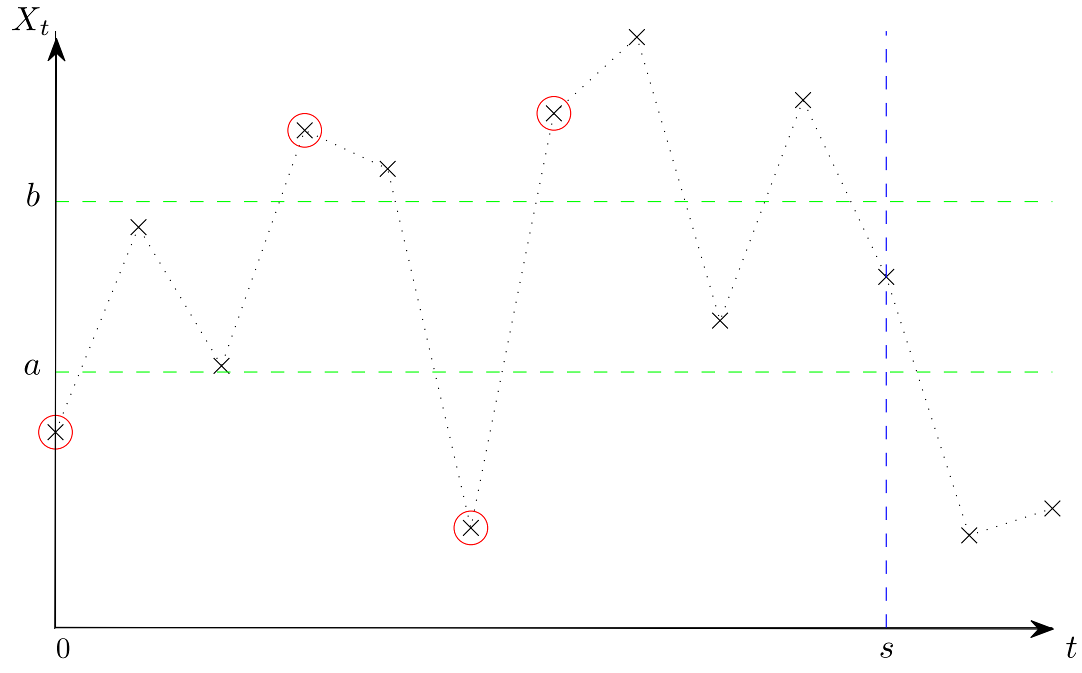

Рис. 1: *В данном случае* $\nu_s^X[a, b] = 2$.

Теорема 6.1 (Дуба о сходимости). *Пусть процесс X является настоящим субмартингалом, причём существует такая константа C, что*

$$\mathbb{E}\,|X_t| \leqslant C, \quad \forall t \geqslant 0. \tag{6.2}$$

Тогда с вероятностью единица существует предел $\lim\limits_{t\to\infty} X_t$, который мы обозначим X_∞^*, причём $\mathbb{E}\,|X_\infty^*| < \infty$. Другими словами, справедливы следующие два утверждения:

1) $X_t \xrightarrow[t\to\infty]{\text{п.н.}} X_\infty^*$;

2) $X_\infty^* \in \mathcal{L}_1$.

Доказательство. 1) Предположим, что с положительной вероятностью нет сходимости процесса, т.е.

$$\mathbb{P}\left(\omega\colon X_t(\omega) \underset{t\to\infty}{\not\longrightarrow} X_\infty^*(\omega)\right) < 1; \quad \Longleftrightarrow \quad \mathbb{P}\left(\omega\colon \liminf_{t\to\infty} X_t(\omega) < \limsup_{t\to\infty} X_t(\omega)\right) > 0.$$

Известно, что

$$\left\{\omega\colon \liminf_{t\to\infty} X_t(\omega) < \limsup_{t\to\infty} X_t(\omega)\right\} = \bigcup_{\substack{a,\, b \in \mathbb{Q} \\ a < b}} \left\{\omega\colon \liminf_{t\to\infty} X_t(\omega) < a < b < \limsup_{t\to\infty} X_t(\omega)\right\},$$

где $\mathbb{Q}$ — множество рациональных чисел. Пользуясь этим фактом, а также следующим свойством вероятностной меры:

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_i A_i\right) \leqslant \sum_i \mathbb{P}\left(A_i\right), \quad \forall A_i \subseteq \Omega,$$

получим, что найдутся такие рациональные числа a и b, что

$$\mathbb{P}\left(\omega\colon \liminf_{t\to\infty} X_t(\omega) < a < b < \limsup_{t\to\infty} X_t(\omega)\right) > 0.$$

Последнее неравенство означает, что вероятность того, что процесс будет бесконечное число раз пересекать отрезок $[a,b]$, больше нуля:

$$\mathbb{P}\left(\nu_\infty^X[a,b] = \infty\right) > 0, \quad \left(\nu_\infty^X[a,b] = \lim_{s\to\infty} \nu_s^X[a,b]\right).$$

Воспользуемся теперь неравенством Дуба (6.1):

$$\mathbb{E}\,\nu_s^X[a,b] \leqslant \frac{\mathbb{E}\,(X_s - a)^+}{b-a}, \quad \forall s > 0.$$

Так как $(X_s - a)^+ \leqslant |X_s| + |a|$, то

$$\mathbb{E}\,\nu_s^X[a,b] \leqslant \frac{\mathbb{E}\,|X_s| + |a|}{b-a} \leqslant \{\text{условие (6.2)}\} \leqslant \frac{C + |a|}{b-a} \equiv C', \quad \forall s > 0.$$

Пользуясь свойством непрерывности математического ожидания (леммой Беппо Леви), получим:

$$0 \leqslant \nu_s^X[a,b] \underset{s\to\infty}{\nearrow} \nu_\infty^X[a,b] \quad \Longrightarrow \quad \mathbb{E}\,\nu_s^X[a,b] \underset{s\to\infty}{\nearrow} \mathbb{E}\,\nu_\infty^X[a,b].$$

Следовательно,

$$\mathbb{E}\,\nu_\infty^X[a,b] \leqslant C' < \infty,$$

что следует из ограниченности $\mathbb{E}\,\nu_s^X[a,b]$ константой C' для любого $s > 0$. Но это противоречит тому, что $\mathbb{P}\left(\nu_\infty^X[a,b] = \infty\right) > 0$. Это противоречие доказывает первое утверждение теоремы о сходимости процесса.

2) Для доказательства второго утверждения теоремы воспользуемся следующей леммой (речь идёт о сходимости почти наверное):

Лемма 6.2 (Фату). *Пусть* $\eta, \xi_1, \xi_2, \ldots$ *— случайные величины, причём* $\xi_n \geqslant \eta$ *для всех* $n \geqslant 1$ *и* $\mathbb{E}\,\eta > -\infty$. *Тогда*

$$\mathbb{E} \liminf_{n\to\infty} \xi_n \leqslant \liminf_{n\to\infty} \mathbb{E}\,\xi_n.$$

Доказательство это леммы можно найти в [**?**, гл. II, § 6, теорема 2].

Положим $\xi_n \stackrel{\text{def}}{=} |X_n| \geqslant 0 = \eta$. Тогда, пользуясь леммой и выше доказанным фактом сходимости $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{п.н.}} X_\infty^*$, имеем:

$$\liminf_{n\to\infty} \xi_n = \lim_{n\to\infty} \xi_n = |X_\infty^*|\,;$$
$$\mathbb{E}\,|X_\infty^*| \leqslant \liminf_{n\to\infty} \mathbb{E}\,|X_n| \leqslant \{\text{условие (6.2)}\} \leqslant C < \infty.$$

Следовательно, $X_\infty^* \in \mathcal{L}_1$.

□

Таким образом, теорема Дуба говорит о том, что субмартингал не может слишком много “болтаться” (при некоторых ограничениях на рост процесса).

Замечание 6.2. Условие (6.2) в теореме Дуба может быть переписано по-другому:

$$\sup_t \mathbb{E}\,|X_t| < \infty; \quad \Longleftrightarrow \quad \exists C\colon\ \mathbb{E}\,|X_t| \leqslant C,\ \forall t \geqslant 0; \quad \Longleftrightarrow \quad \exists C'\colon\ \mathbb{E}\,X_t^+ \leqslant C',\ \forall t \geqslant 0.$$

Доказательство. Легко видеть, что условия (6.2) и $\sup\limits_t \mathbb{E}\,|X_t| < \infty$ эквивалентны.

В силу того, что $X_t^+ \leqslant |X_t| = X_t^+ + X_t^-$, получаем:

$$\mathbb{E}\,X_t^+ \leqslant \mathbb{E}\,|X_t|,\ \forall t \geqslant 0; \quad \Longrightarrow$$
$$\text{если } \exists C\colon\ \mathbb{E}\,|X_t| \leqslant C,\ \forall t \geqslant 0,\ \text{ то }\ \mathbb{E}\,X_t^+ \leqslant C,\ \forall t \geqslant 0.$$

Осталось показать, что

$$\exists C\colon\ \mathbb{E}\,X_t^+ \leqslant C,\ \forall t \geqslant 0; \quad \Longrightarrow \quad \exists C'\colon\ \mathbb{E}\,|X_t| \leqslant C',\ \forall t \geqslant 0.$$

Заметим, что для любого вещественного a верно: $|a| = 2a^+ - a$. Следовательно,

$$\mathbb{E}\,|X_t| = 2\,\mathbb{E}\,X_t^+ - \mathbb{E}\,X_t \leqslant \{\mathbb{E}\,X_t \geqslant \mathbb{E}\,X_0, \text{т.к. } X \text{ — субмартингал}\} \leqslant 2\,\mathbb{E}\,X_t^+ - \mathbb{E}\,X_0.$$

Таким образом, если существует такая константа C, что для всех t верно $\mathbb{E}\,X_t^+ \leqslant C$, то верно и

$$\mathbb{E}\,|X_t| \leqslant 2C - \mathbb{E}\,X_0 = C',\ \forall t \geqslant 0.$$

$\square$

Замечание 6.3. В теореме 6.1 сходимости процесса в пространстве $\mathcal{L}_1$, вообще говоря, нет.

Сохранение мартингального свойства на бесконечности.

Пусть дано фильтрованное вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$, где

$$\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_t,\ t \in T\}, \quad T = \{0, 1, 2, \ldots\} \text{ (задача с бесконечным горизонтом).}$$

Рассмотрим процесс X, адаптированный по отношению к фильтрации $\mathbb{F}$. Пусть этот процесс является настоящим мартингалом. Изучим вопрос о том, при каких условиях этот мартингал можно продолжить (расширить) по времени на бесконечность (т.е. добавить бесконечно удалённую по времени точку) с сохранением мартингального свойства.

Определение 6.1. Настоящий мартингал X **допускает продолжение на бесконечность с сохранением мартингального свойства**, если

1) происходит расширение фильтрации путем добавления $\mathcal{F}_\infty$:

$$\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_t,\ t \in T\},\ T = \{0, 1, 2, \ldots\} \quad \longmapsto \quad \mathbb{F}' = \{\mathcal{F}_t,\ t \in T'\},\ T' = T \cup \{+\infty\};$$
$$\text{для сохранения свойств фильтрации:} \quad \forall t \in T \quad \mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{F}_\infty \subseteq \mathcal{F};$$

2) к процессу добавляется бесконечно удаленная по времени точка $X_\infty \in m\,(\mathcal{F}_\infty)$ (для сохранения адаптированности процесса в расширенной фильтрации);

3) при этом сохраняется мартингальное свойство процесса:

$$\mathbb{E}^{\mathcal{F}_t}\,X_\infty = X_t, \quad \forall t \in T.$$

Замечание 6.4. Условие на расширенную фильтрацию в определении 6.1 можно переписать по-другому. Обозначим через $\mathcal{F}^*_\infty$ σ-алгебру, порожденную счётным объединением всех $\mathcal{F}_t$, $t \in T$, т.е. минимальную σ-алгебру[25], содержащую все $\mathcal{F}_t$, $t \in T$:

$$\mathcal{F}^*_\infty \overset{\mathsf{def}}{=} \sigma\left\{\bigcup_{t\in T}\mathcal{F}_t\right\}.$$

Тогда автоматически получается, что $\mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{F}^*_\infty$ для всех $t \in T$. Поэтому

$$\forall t \in T \quad \mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{F}_\infty \subseteq \mathcal{F}; \quad \Longleftrightarrow \quad \mathcal{F}^*_\infty \subseteq \mathcal{F}_\infty \subseteq \mathcal{F}.$$

В частности, можно взять $\mathcal{F}_\infty = \mathcal{F}^*_\infty$.

Прежде чем сформулировать теорему о сохранении мартингального свойства на бесконечности, остановимся поподробнее на понятии равномерной интегрируемости.

Определение 6.2. Говорят, что семейство случайных величин $\{X_\alpha, \alpha \in I\}$ **равномерно интегрируемо**, если

$$\sup_{\alpha\in I}\mathbb{E}\left(|X_\alpha|\cdot\mathbf{1}_{\{|X_\alpha|>b\}}\right)\underset{b\to\infty}{\longrightarrow}0. \tag{6.3}$$

Замечание 6.5. Условие (6.3) можно переписать в эквивалентном виде:

$$\sup_{\alpha\in I}\int\limits_{\{|X_\alpha|>b\}}|X_\alpha|\,d\,\mathbb{P}\underset{b\to\infty}{\longrightarrow}0. \tag{6.4}$$

Приведём один из наиболее удобных, с точки зрения применения на практике, критериев равномерной интегрируемости.

Теорема 6.2 (Валле Пуссен, Vallée Poussin). *Пусть $\{X_\alpha, \alpha \in I\}$ — семейство случайных величин.*

1. *Если существует функция φ, удовлетворяющая условиям*

$$\begin{aligned}&\varphi\colon\ [0;+\infty)\to[0;+\infty),\\ &\frac{\varphi(x)}{x}\underset{x\to\infty}{\longrightarrow}\infty,\\ &\sup_\alpha\mathbb{E}\,\varphi(|X_\alpha|)<\infty,\end{aligned} \tag{6.5}$$

   то семейство $\{X_\alpha\}$ равномерно интегрируемо.

2. *Если семейство $\{X_\alpha\}$ равномерно интегрируемо, то существует функция φ, удовлетворяющая условиям (6.5), и, более того, функцию φ можно выбрать монотонно возрастающей и выпуклой.*

Доказательство п. 1 см. [**?**, гл. II, § 6, лемма 3].

Утверждение 6.1. *Если семейство случайных величин $\{X_\alpha, \alpha \in I\}$ равномерно интегрируемо, то их норма в пространстве $\mathcal{L}_1$ равномерно ограничена:*

$$\sup_{\alpha\in I}\mathbb{E}\,|X_\alpha|<\infty.$$

[25]Заметим, что $\bigcup\limits_{t\in T}\mathcal{F}_t$ гарантированно будет алгеброй, но не обязательно σ-алгеброй.

Доказательство. Для любого $b > 0$ справедливо:

$$\sup_{\alpha\in I}\mathbb{E}\,|X_\alpha| = \sup_{\alpha\in I}\left[\mathbb{E}\left(|X_\alpha|\cdot\mathbf{1}_{\{|X_\alpha|>b\}}\right) + \mathbb{E}\left(|X_\alpha|\cdot\mathbf{1}_{\{|X_\alpha|\leqslant b\}}\right)\right] \leqslant$$
$$\leqslant \sup_{\alpha\in I}\mathbb{E}\left(|X_\alpha|\cdot\mathbf{1}_{\{|X_\alpha|>b\}}\right) + \sup_{\alpha\in I}\mathbb{E}\left(|X_\alpha|\cdot\mathbf{1}_{\{|X_\alpha|\leqslant b\}}\right).$$

Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. По определению равномерной интегрируемости,

$$\sup_{\alpha\in I}\mathbb{E}\left(|X_\alpha|\cdot\mathbf{1}_{\{|X_\alpha|>b\}}\right) \xrightarrow[b\to\infty]{} 0.$$

Следовательно, найдётся такое достаточно большое b, что

$$\sup_{\alpha\in I}\mathbb{E}\left(|X_\alpha|\cdot\mathbf{1}_{\{|X_\alpha|>b\}}\right) \leqslant \varepsilon.$$

Учитывая всё это, получаем:

$$\left.\begin{array}{l}\sup\limits_{\alpha\in I}\mathbb{E}\,|X_\alpha| \leqslant \sup\limits_{\alpha\in I}\mathbb{E}\left(|X_\alpha|\cdot\mathbf{1}_{\{|X_\alpha|>b\}}\right) + \sup\limits_{\alpha\in I}\mathbb{E}\left(|X_\alpha|\cdot\mathbf{1}_{\{|X_\alpha|\leqslant b\}}\right);\\ \sup\limits_{\alpha\in I}\mathbb{E}\left(|X_\alpha|\cdot\mathbf{1}_{\{|X_\alpha|>b\}}\right) \leqslant \varepsilon;\\ |X_\alpha|\cdot\mathbf{1}_{\{|X_\alpha|\leqslant b\}} \leqslant b;\end{array}\right\} \implies$$
$$\implies \quad \sup_{\alpha\in I}\mathbb{E}\,|X_\alpha| \leqslant \varepsilon + b < \infty.$$

□

Важность понятия равномерной интегрируемости раскрывается в следующем утверждении.

Утверждение 6.2. *Сходящаяся почти наверное последовательность является сходящейся в среднем тогда и только тогда, когда она является равномерно интегрируемой, т.е. условие равномерной интегрируемости является необходимым и достаточным условием сходимости в среднем последовательности, которая сходится почти наверное:*

$$\xi_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{п.н.}} \xi \quad \implies$$
$$\xi_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}_1} \xi \quad \iff \quad \{\xi_n,\ n \geqslant 1\} \text{ — \textit{равномерно интегрируемо}}$$

Доказательство см. [**?**, гл. II, § 6, теорема 5].

Теорема 6.3 (Сохранение мартингального свойства на бесконечности)**.** *Пусть процесс X является настоящим мартингалом. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

1) *существует такая случайная величина $\zeta \in \mathcal{L}_1$, что процесс X представим в виде:*

$$X_t = \mathbb{E}^{\mathcal{F}_t}\zeta, \quad t = 0, 1, 2, \ldots;$$

2) *процесс X является равномерно интегрируемым;*

3) *процесс X сходится в среднем и почти наверное:*

$$X_t \xrightarrow[t\to\infty]{\mathcal{L}_1,\text{п.н.}} X_\infty^* \in \mathcal{L}_1;$$

4) *процесс X допускает продолжение на бесконечность с сохранением мартингального свойства, причём так, что $X_\infty \in \mathcal{L}_1$.*

Доказательство. Доказательство будем проводить по следующей схеме:

$$4) \implies 1) \implies 2) \implies 3) \implies 4).$$

$\boxed{4) \implies 1)}$ **:** Пусть процесс X допускает продолжение на бесконечность с сохранением мартингального свойства. Положим $\zeta \stackrel{\mathsf{def}}{=} X_\infty \in \mathcal{L}_1$. Из определения 6.1 получаем:

$$\mathbb{E}^{\mathcal{F}_t} \zeta = \mathbb{E}^{\mathcal{F}_t} X_\infty = X_t, \quad t = 0, 1, 2, \ldots.$$

$\boxed{1) \implies 2)}$ **:** Пусть

$$\exists \zeta \in \mathcal{L}_1 \colon X_t = \mathbb{E}^{\mathcal{F}_t} \zeta, \quad t = 0, 1, 2, \ldots.$$

Для доказательства равномерной интегрируемости процесса X воспользуемся критерием Валле Пуссена (в обе стороны). Во-первых, отметим, что если случайная величина ξ принадлежит $\mathcal{L}_1$, то семейство случайных величин, состоящее из одной этой случайной величины, является равномерно интегрируемым:

$$\xi \in \mathcal{L}_1 \quad \implies \quad \{\xi\} \text{ — равномерно интегрируемо.} \tag{6.6}$$

Так как $\zeta \in \mathcal{L}_1$, то $\{\zeta\}$ — равномерно интегрируемо. По критерию Валле Пуссена, существует монотонно возрастающая, выпуклая функция $\varphi\colon [0;+\infty) \to [0;+\infty)$, удовлетворяющая следующим условиям:

$$\frac{\varphi(t)}{t} \xrightarrow[t\to\infty]{} \infty, \quad \mathbb{E}\,\varphi(|\zeta|) < \infty.$$

Используя критерий Валле Пуссена в обратную сторону, получаем, что для доказательства равномерной интегрируемости процесса X достаточно показать, что

$$\sup_t \mathbb{E}\,\varphi(|X_t|) < \infty.$$

Для любого $t \in T$ получаем:

$$\mathbb{E}\,\varphi(|X_t|) = \{X_t = \mathbb{E}^{\mathcal{F}_t} \zeta\} = \mathbb{E}\,\varphi\left(\left|\mathbb{E}^{\mathcal{F}_t} \zeta\right|\right) \leqslant$$
$$\leqslant \{\text{по неравенству Йенсена } \left|\mathbb{E}^{\mathcal{F}_t} \zeta\right| \leqslant \mathbb{E}^{\mathcal{F}_t} |\zeta|;\ \varphi\text{— монотонно возрастает}\} \leqslant$$
$$\leqslant \mathbb{E}\,\varphi\left(\mathbb{E}^{\mathcal{F}_t} |\zeta|\right) \leqslant \{\text{исп. неравенство Йенсена и выпуклость функции } \varphi\} \leqslant$$
$$\leqslant \mathbb{E}\,\mathbb{E}^{\mathcal{F}_t} \varphi\left(|\zeta|\right) = \mathbb{E}\,\varphi\left(|\zeta|\right) < \infty.$$

Следовательно,

$$\sup_t \mathbb{E}\,\varphi(|X_t|) \leqslant \mathbb{E}\,\varphi\left(|\zeta|\right) < \infty,$$

что и доказывает равномерную интегрируемость процесса X.

$\boxed{2) \implies 3)}$ **:** Пусть процесс X является равномерно интегрируемым. Тогда, согласно утверждению 6.1, он равномерно ограничен по норме в пространстве $\mathcal{L}_1$:

$$\sup_{t\in T} \mathbb{E}\,|X_t| < \infty.$$

Поскольку процесс X является настоящим мартингалом (а значит, и субмартингалом), то выполняются все условия теоремы Дуба 6.1. Следовательно,

$$X_t \xrightarrow[t\to\infty]{\text{п.н.}} X^*_\infty \in \mathcal{L}_1.$$

Из утверждения 6.2 получаем, что

$$X_t \xrightarrow[t\to\infty]{\mathcal{L}_1} X^*_\infty.$$

$\boxed{3) \implies 4)}$ **:** Пусть процесс X сходится в среднем:

$$X_t \xrightarrow[t\to\infty]{\mathcal{L}_1} X_\infty^* \in \mathcal{L}_1.$$

Покажем, что он допускает продолжение на бесконечность с сохранением мартингального свойства, причём так, что $X_\infty \in \mathcal{L}_1$. В силу свойства непрерывности ОУМО $\mathbb{E}^{\mathcal{F}_s} : \mathcal{L}_1 \to \mathcal{L}_1$ (см. теорему 1.1) и сходимости процесса в пространстве $\mathcal{L}_1$, для любого фиксированного $s \geqslant 0$ имеем:

$$\mathbb{E}^{\mathcal{F}_s} X_t \xrightarrow[t\to\infty]{\mathcal{L}_1} \mathbb{E}^{\mathcal{F}_s} X_\infty^*.$$

Так как процесс X обладает мартингальным свойством, то

$$\mathbb{E}^{\mathcal{F}_s} X_t = X_s, \quad \forall t > s.$$

Таким образом, получаем:

$$X_s = \mathbb{E}^{\mathcal{F}_s} X_\infty^*, \quad \forall s \geqslant 0.$$

Следовательно, процесс X допускает продолжение на бесконечность, причём если расширить фильтрацию с помощью $\mathcal{F}_\infty^* \overset{\text{def}}{=} \sigma\left\{\bigcup\limits_{t\in T} \mathcal{F}_t\right\}$, то в качестве X_∞ можно выбрать $X_\infty^* \in \mathcal{L}_1$. Действительно,

1) $X_\infty^* \in m\,(\mathcal{F}_\infty^*)$, т.к.

$$\left.\begin{array}{c} X_s = \mathbb{E}^{\mathcal{F}_s} X_\infty^* \xrightarrow[s\to\infty]{\mathcal{L}_1} X_\infty^*; \\ \Downarrow \\ \text{действуем ОУМО } \mathbb{E}^{\mathcal{F}_\infty^*}\text{; пользуемся его непрерывностью;} \\ \Downarrow \\ \mathbb{E}^{\mathcal{F}_\infty^*} \mathbb{E}^{\mathcal{F}_s} X_\infty^* = \mathbb{E}^{\mathcal{F}_s} X_\infty^* \xrightarrow[s\to\infty]{\mathcal{L}_1} \mathbb{E}^{\mathcal{F}_\infty^*} X_\infty^*; \end{array}\right\} \implies$$

$$\implies \quad \begin{array}{l} X_s \xrightarrow[s\to\infty]{\mathcal{L}_1} X_\infty^*; \\ X_s \xrightarrow[s\to\infty]{\mathcal{L}_1} \mathbb{E}^{\mathcal{F}_\infty^*} X_\infty^*; \end{array} \quad \implies \quad X_\infty^* = \mathbb{E}^{\mathcal{F}_\infty^*} X_\infty^* \text{ в пространстве } \mathcal{L}_1\text{, т.е.}$$

$$\mathbb{E}\left|X_\infty^* - \mathbb{E}^{\mathcal{F}_\infty^*} X_\infty^*\right| = 0, \text{ т.е. } X_\infty^* \overset{\text{п.н.}}{=} \mathbb{E}^{\mathcal{F}_\infty^*} X_\infty^*;$$

2) мартингальное свойство сохраняется на бесконечности: $\mathbb{E}^{\mathcal{F}_t} X_\infty^* = X_t, \quad \forall t \in T$.

Заметим, что продолжить процесс X на бесконечность с сохранением мартингального свойства можно и по-другому:

1) фиксируем произвольную σ-алгебру $\mathcal{F}_\infty$ такую, что

$$\mathcal{F}_\infty^* \subseteq \mathcal{F}_\infty \subseteq \mathcal{F};$$

2) выбор X_∞ должен подчиняться следующим ограничениям:

$$X_\infty \in m\,(\mathcal{F}_\infty), \quad X_\infty \in \mathcal{L}_1, \quad \mathbb{E}^{\mathcal{F}_\infty^*} X_\infty = X_\infty^*.$$

Покажем, что указанные ограничения являются необходимыми и достаточными условиями корректного продолжения процесса X на бесконечность, т.е.

$$\mathbb{E}^{\mathcal{F}_\infty^*} X_\infty = X_\infty^*; \quad \iff \quad \mathbb{E}^{\mathcal{F}_t} X_\infty = X_t,\ \forall t \in T.$$

$\Longrightarrow$ **:** $\mathbb{E}^{\mathcal{F}_t} X_\infty = \mathbb{E}^{\mathcal{F}_t} \mathbb{E}^{\mathcal{F}^*_\infty} X_\infty = \mathbb{E}^{\mathcal{F}_t} X^*_\infty = X_t$.

$\Longleftarrow$ **:** Используя определение ОУМО, получаем, что достаточно доказать следующее:

$$\mathbb{E}\left(\mathbf{1}_A X_\infty\right) = \mathbb{E}\left(\mathbf{1}_A X^*_\infty\right), \quad \forall A \in \mathcal{F}^*_\infty.$$

По условию, $\mathbb{E}^{\mathcal{F}_t} X_\infty = X_t \xrightarrow[t\to\infty]{\mathcal{L}_1} X^*_\infty$. Легко показать, что тогда

$$\mathbf{1}_A \cdot \mathbb{E}^{\mathcal{F}_t} X_\infty \xrightarrow[t\to\infty]{\mathcal{L}_1} \mathbf{1}_A \cdot X^*_\infty, \text{ т.е.}$$

$$\mathbb{E}\left(\mathbf{1}_A \cdot \mathbb{E}^{\mathcal{F}_t} X_\infty - \mathbf{1}_A \cdot X^*_\infty\right) \xrightarrow[t\to\infty]{} 0; \quad \Longrightarrow \quad \mathbb{E}\left(\mathbf{1}_A X_\infty\right) = \mathbb{E}\left(\mathbf{1}_A X^*_\infty\right).$$

Заметим, что если взять в качестве $\mathcal{F}_\infty$ минимально возможное расширение фильтрации $\mathcal{F}^*_\infty$, то продолжение процесса X_∞ определено единственным образом: $X_\infty = X^*_\infty$.

$\square$

Замечание 6.6. В примере 2.3 было показано, что процесс X, представимый в виде $X_t = \mathbb{E}^{\mathcal{F}_t} \zeta$, является настоящим мартингалом.

Замечание 6.7. Пусть настоящий субмартингал X является равномерно интегрируемым. Тогда верна следующая цепочка рассуждений:

- процесс X ограничен по норме в $\mathcal{L}_1$:

$$\sup_{t\in T} \mathbb{E}\left|X_t\right| < \infty$$

(по утверждению 6.1); $\Longrightarrow$

- процесс X сходится почти наверное:

$$X_t \xrightarrow[t\to\infty]{\text{п.н.}} X^*_\infty$$

(по теореме Дуба 6.1); $\Longrightarrow$

- процесс X сходится в $\mathcal{L}_1$:

$$X_t \xrightarrow[t\to\infty]{\mathcal{L}_1} X^*_\infty$$

(по утверждению 6.2).

Таким образом, равномерно интегрируемый настоящий субмартингал сходится как почти наверное, так и в пространстве $\mathcal{L}_1$ (в среднем).

Достаточные условия сохранения мартингального свойства в случайный момент времени.

В теореме 5.3 был исследован случай сохранения мартингального свойства в момент остановки в случае конечного горизонта:

$$X \text{ — мартингал} \quad \Longrightarrow \quad \mathbb{E}^{\mathcal{F}_\sigma} X_\tau = X_{\min\{\tau,\,\sigma\}}, \quad \tau, \sigma \leqslant N.$$

Однако для случая бесконечного горизонта — когда моменты остановки τ и σ не ограничены с точностью до почти наверное некоторым конечным числом N — это утверждение перестаёт быть верным (см. замечание 5.3).

Рассмотрим случай бесконечного горизонта:

$$T = \{0, 1, 2, \ldots\}.$$

Пусть τ и σ — моменты остановки, а процесс X является настоящим мартингалом. Найдём достаточные условия сохранения мартингального свойства в случайный момент времени:

$$\mathbb{E}^{\mathcal{F}_\sigma} X_\tau = X_{\min\{\tau,\, \sigma\}}. \tag{6.7}$$

По лемме 5.1 получим:

$$\mathbb{E}^{\mathcal{F}_\sigma} X_\tau = \sum_{t=0}^{\infty} \mathbf{1}_{\{\sigma = t\}} \, \mathbb{E}^{\mathcal{F}_t} X_\tau.$$

Таким образом, (6.7) эквивалентно:

$$\mathbb{E}^{\mathcal{F}_t} X_\tau = X_{\min\{\tau,\, t\}}, \quad t = 0, 1, 2, \ldots. \tag{6.8}$$

По определению остановленного процесса:

$$X_{\min\{\tau,\, t\}} = X_t^{(\tau)}, \quad t = 0, 1, 2, \ldots.$$

По теореме 5.2, остановленный процесс также будет настоящим мартингалом:

$$X \text{ — мартингал} \quad \Longrightarrow \quad X^{(\tau)} \text{ — мартингал}.$$

Так как τ — момент остановки, то он конечен с вероятностью 1. Следовательно,

$$X_{\min\{\tau,\, t\}} \xrightarrow[t\to\infty]{\text{п.н.}} X_\tau.$$

Обозначим:

$$Y_t \overset{\mathsf{def}}{=} X_t^{(\tau)}, \ t = 0, 1, 2, \ldots, \quad \text{т.е.} \quad Y \overset{\mathsf{def}}{=} X^{(\tau)}.$$

Тогда

$$Y_t \xrightarrow[t\to\infty]{\text{п.н.}} Y_\infty^*,$$

где $Y_\infty^* = X_\tau$. Заметим, что, по определению Y и Y_∞^*, верно:

$$\mathbb{E}^{\mathcal{F}_t} X_\tau = X_{\min\{\tau,\, t\}} \quad \Longleftrightarrow \quad \mathbb{E}^{\mathcal{F}_t} Y_\infty^* = Y_t, \quad t = 0, 1, 2, \ldots.$$

Предположим, что

$$\boxed{X_\tau \in \mathcal{L}_1}\,.$$

Таким образом, получаем:

$$\left.\begin{array}{l} Y \ \text{ — мартингал;} \\ (6.8) \quad \Longleftrightarrow \quad \mathbb{E}^{\mathcal{F}_t} Y_\infty^* = Y_t, \quad t = 0, 1, 2, \ldots; \\ Y_\infty^* \in \mathcal{L}_1 \text{ (по предположению);} \\ Y_t \xrightarrow[t\to\infty]{\text{п.н.}} Y_\infty^* \text{ (верно всегда);} \end{array}\right\} \quad \overset{\text{по теореме 6.3}}{\Longrightarrow}$$

$$\left\{(6.8) \quad \Longleftrightarrow \quad Y_t \xrightarrow[t\to\infty]{\mathcal{L}_1} Y_\infty^* \quad \Longleftrightarrow \quad Y \text{ — равномерно интегрируемый}\right\}.$$

Следовательно, осталось найти достаточные условия равномерной интегрируемости остановленного процесса $X^{(\tau)} = Y$. Напомним одно из возможных представлений остановленного процесса (см. (5.9)):

$$X_t^{(\tau)} = \mathbf{1}_{\{\tau \leqslant t\}} \cdot X_\tau + \mathbf{1}_{\{\tau > t\}} \cdot X_t, \quad t = 0, 1, 2, \ldots.$$

Для дальнейших рассуждений нам потребуются два утверждения.

Утверждение 6.3. *Пусть дан адаптированный процесс $X = \{X_t,\ t = 0, 1, 2, \ldots\}$ и момент остановки τ. Если $X_\tau \in \mathcal{L}_1$, то процесс Z такой, что $Z_t = \mathbf{1}_{\{\tau \leqslant t\}} \cdot X_\tau$, является равномерно интегрируемым.*

Доказательство. Это следует из (6.6) и $|Z_t| \leqslant |X_\tau|$:

$$\left.\begin{array}{l}
Z \text{ — равномерно интегрируемый} \quad \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \quad \sup\limits_{t\geqslant 0} \int\limits_{\{|Z_t|>b\}} |Z_t|\ d\,\mathbb{P} \xrightarrow[b\to\infty]{} 0;\\
\int\limits_{\{|Z_t|>b\}} |Z_t|\ d\,\mathbb{P} \leqslant \Big\{|Z_t| = \mathbf{1}_{\{\tau\leqslant t\}} \cdot |X_\tau| \leqslant |X_\tau|\Big\} \leqslant \int\limits_{\{|X_\tau|>b\}} |X_\tau|\ d\,\mathbb{P};\\
X_\tau \in \mathcal{L}_1 \quad \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \quad \int\limits_{\{|X_\tau|>b\}} |X_\tau|\ d\,\mathbb{P} \xrightarrow[b\to\infty]{} 0;
\end{array}\right\} \Longrightarrow$$

$$\Big\{X_\tau \in \mathcal{L}_1 \quad \Longrightarrow \quad \{\mathbf{1}_{\{\tau\leqslant t\}} \cdot X_\tau,\ t \geqslant 0\} \text{ — равномерно интегрируемый процесс}\Big\}.$$

□

Утверждение 6.4. *Пусть дан адаптированный процесс $X = \{X_t,\ t = 0, 1, 2, \ldots\}$ и момент остановки τ, причём $X_\tau \in \mathcal{L}_1$. Тогда остановленный процесс $X^{(\tau)}$ является равномерно интегрируемым тогда и только тогда, когда равномерно интегрируем процесс $\{\mathbf{1}_{\{\tau>t\}} \cdot X_t,\ t \geqslant 0\}$:*

$X^{(\tau)}$ — равномерно интегрируемый $\quad \Longleftrightarrow \quad \{\mathbf{1}_{\{\tau>t\}} \cdot X_t,\ t \geqslant 0\}$ — равномерно интегрируемый.

Доказательство. По определению равномерной интегрируемости семейства случайных величин:

$$X^{(\tau)} \text{ — равномерно интегрируемый} \quad \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \quad \sup_{t\geqslant 0} \left[\ \int\limits_{\left\{\omega\colon \left|X_t^{(\tau)}(\omega)\right|>b\right\}} \left|X_t^{(\tau)}(\omega)\right|\ \mathbb{P}(d\omega)\right] \xrightarrow[b\to\infty]{} 0.$$

Учитывая, что $\left|X_t^{(\tau)}\right| = \mathbf{1}_{\{\tau\leqslant t\}} \cdot |X_\tau| + \mathbf{1}_{\{\tau>t\}} \cdot |X_t|$, получим:

$$\int\limits_{\left\{\omega\colon \left|X_t^{(\tau)}(\omega)\right|>b\right\}} \left|X_t^{(\tau)}(\omega)\right|\ \mathbb{P}(d\omega) =$$
$$= \int\limits_{\left\{\omega\colon \mathbf{1}_{\{\tau\leqslant t\}}|X_\tau| + \mathbf{1}_{\{\tau>t\}}|X_t|>b\right\}} \Big(\mathbf{1}_{\{\tau\leqslant t\}}\,|X_\tau| + \mathbf{1}_{\{\tau>t\}}\,|X_t|\Big)\ \mathbb{P}(d\omega).$$

Заметим, что при $b > 0$

$$\Big\{\omega\colon \mathbf{1}_{\{\tau\leqslant t\}}\,|X_\tau| + \mathbf{1}_{\{\tau>t\}}\,|X_t| > b\Big\} =$$
$$= \Big\{\omega\colon \mathbf{1}_{\{\tau\leqslant t\}}\,|X_\tau| > b,\ \mathbf{1}_{\{\tau>t\}}\,|X_t| = 0\Big\} \ \cup\ \Big\{\omega\colon \mathbf{1}_{\{\tau>t\}}\,|X_t| > b,\ \mathbf{1}_{\{\tau\leqslant t\}}\,|X_\tau| = 0\Big\}.$$

Таким образом, при $b > 0$ имеем:

$$\int\limits_{\left\{\omega\colon \left|X_t^{(\tau)}(\omega)\right|>b\right\}} \left|X_t^{(\tau)}(\omega)\right|\ \mathbb{P}(d\omega) =$$
$$= \int\limits_{\left\{\omega\colon \mathbf{1}_{\{\tau\leqslant t\}}|X_\tau|>b\right\}} \mathbf{1}_{\{\tau\leqslant t\}}\,|X_\tau|\ \mathbb{P}(d\omega) + \int\limits_{\left\{\omega\colon \mathbf{1}_{\{\tau>t\}}|X_t|>b\right\}} \mathbf{1}_{\{\tau>t\}}\,|X_t|\ \mathbb{P}(d\omega).$$

Откуда

$$\sup_{t\geqslant 0}\left[\int\limits_{\left\{\omega\colon \left|X_t^{(\tau)}(\omega)\right|>b\right\}} \left|X_t^{(\tau)}(\omega)\right| \, \mathbb{P}(d\omega)\right] \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{t\geqslant 0}\left[\int\limits_{\left\{\omega\colon \mathbf{1}_{\{\tau\leqslant t\}}|X_\tau|>b\right\}} \mathbf{1}_{\{\tau\leqslant t\}}\,|X_\tau| \, \mathbb{P}(d\omega)\right] + \sup_{t\geqslant 0}\left[\int\limits_{\left\{\omega\colon \mathbf{1}_{\{\tau> t\}}|X_t|>b\right\}} \mathbf{1}_{\{\tau> t\}}\,|X_t| \, \mathbb{P}(d\omega)\right];$$

$$\sup_{t\geqslant 0}\left[\int\limits_{\left\{\omega\colon \mathbf{1}_{\{\tau> t\}}|X_t|>b\right\}} \mathbf{1}_{\{\tau> t\}}\,|X_t| \, \mathbb{P}(d\omega)\right] \leqslant \sup_{t\geqslant 0}\left[\int\limits_{\left\{\omega\colon \left|X_t^{(\tau)}(\omega)\right|>b\right\}} \left|X_t^{(\tau)}(\omega)\right| \, \mathbb{P}(d\omega)\right].$$

По утверждению 6.3, процесс $\{\mathbf{1}_{\{\tau\leqslant t\}}\cdot X_\tau,\ t\geqslant 0\}$ является равномерно интегрируемым:

$$\sup_{t\geqslant 0}\left[\int\limits_{\left\{\omega\colon \mathbf{1}_{\{\tau\leqslant t\}}|X_\tau|>b\right\}} \mathbf{1}_{\{\tau\leqslant t\}}\,|X_\tau| \, \mathbb{P}(d\omega)\right] \xrightarrow[b\to\infty]{} 0.$$

Следовательно,

$$\sup_{t\geqslant 0}\left[\int\limits_{\left\{\omega\colon \left|X_t^{(\tau)}(\omega)\right|>b\right\}} \left|X_t^{(\tau)}(\omega)\right| \, \mathbb{P}(d\omega)\right] \xrightarrow[b\to\infty]{} 0 \quad\Longleftrightarrow\quad \sup_{t\geqslant 0}\left[\int\limits_{\left\{\omega\colon \mathbf{1}_{\{\tau> t\}}|X_t|>b\right\}} \mathbf{1}_{\{\tau> t\}}\,|X_t| \, \mathbb{P}(d\omega)\right] \xrightarrow[b\to\infty]{} 0.$$

□

Таким образом, остановленный процесс $X^{(\tau)}$ равномерно интегрируем тогда и только тогда, когда процесс $\{\mathbf{1}_{\{\tau>t\}}\cdot X_t,\ t\geqslant 0\}$ является равномерно интегрируемым. Заметим, что

$$\mathbf{1}_{\{\tau>t\}}\cdot X_t \xrightarrow[t\to\infty]{\text{п.н.}} 0.$$

Следовательно, для равномерной интегрируемости остановленного процесса необходима и достаточна сходимость процесса $\{\mathbf{1}_{\{\tau>t\}}\cdot X_t,\ t\geqslant 0\}$ в $\mathcal{L}_1$:

$$\boxed{\mathbb{E}\left(\mathbf{1}_{\{\tau>t\}}\cdot X_t\right) \xrightarrow[t\to\infty]{} 0},$$

т.к., по утверждению 6.2, сходящаяся почти наверное последовательность является равномерно интегрируемой тогда и только тогда, когда она сходится в среднем.

Таким образом, мы доказали следующую теорему:

Теорема 6.4 (Достаточные условия сохранения мартингального свойства в случайный момент времени)**.** *Пусть процесс $X=\{X_t,\ t=0,1,2,\ldots\}$ является настоящим мартингалом. Пусть τ и σ — моменты остановки, причём*

$$X_\tau\in\mathcal{L}_1.$$

Тогда мартингальное свойство процесса X сохраняется в случайный момент времени тогда и только тогда, когда процесс $\{\mathbf{1}_{\{\tau>t\}}\cdot X_t,\ t\geqslant 0\}$ сходится в $\mathcal{L}_1$:

$$\mathbb{E}^{\mathcal{F}_\sigma} X_\tau = X_{\min\{\tau,\,\sigma\}} \quad\Longleftrightarrow\quad \mathbb{E}\left(\mathbf{1}_{\{\tau>t\}}\cdot X_t\right)\xrightarrow[t\to\infty]{} 0.$$

Проводя аналогичные рассуждения, можно получить достаточные условия сохранения субмартингального свойства в случайный момент времени (τ и σ — моменты остановки, процесс X — субмартингал):

$$\mathbb{E}^{\mathcal{F}_\sigma} X_\tau \geqslant X_{\min\{\tau,\,\sigma\}}. \tag{6.9}$$

Обозначим

$$Y \overset{\mathsf{def}}{=} X^{(\tau)} \text{ — субмартингал}, \quad Y^*_\infty = X_\tau.$$

Тогда

$$(6.9) \quad \Longleftrightarrow \quad \mathbb{E}^{\mathcal{F}_t} Y^*_\infty \geqslant Y_t, \quad t = 0, 1, 2, \ldots.$$

Пусть $Y^*_\infty \in \mathcal{L}_1$ и Y — равномерно интегрируемый. В силу замечания 6.7, равномерно интегрируемый субмартингал сходится в пространстве $\mathcal{L}_1$. Покажем, что

$$Y_t \xrightarrow[t\to\infty]{\mathcal{L}_1} Y^*_\infty \in \mathcal{L}_1 \quad \Longrightarrow \quad \mathbb{E}^{\mathcal{F}_t} Y^*_\infty \geqslant Y_t, \quad t = 0, 1, 2, \ldots.$$

Действительно, в силу свойства непрерывности ОУМО $\mathbb{E}^{\mathcal{F}_s} \colon \mathcal{L}_1 \to \mathcal{L}_1$ (см. теорему 1.1) и сходимости процесса в пространстве $\mathcal{L}_1$, для любого фиксированного $s \geqslant 0$ имеем:

$$\mathbb{E}^{\mathcal{F}_s} Y_t \xrightarrow[t\to\infty]{\mathcal{L}_1} \mathbb{E}^{\mathcal{F}_s} Y^*_\infty.$$

Так как процесс Y обладает субмартингальным свойством, то

$$\mathbb{E}^{\mathcal{F}_s} Y_t \geqslant Y_s, \quad \forall t > s.$$

Таким образом, получаем:

$$Y_s \leqslant \mathbb{E}^{\mathcal{F}_s} Y^*_\infty, \quad \forall s \geqslant 0,$$

что и требовалось доказать.

Как было показано выше, равномерная интегрируемость процесса Y эквивалентна сходимости процесса $\{\mathbf{1}_{\{\tau>t\}} \cdot X_t,\ t \geqslant 0\}$ в $\mathcal{L}_1$. Таким образом, верна следующая теорема для субмартингалов:

Теорема 6.5 (Достаточные условия сохранения субмартингального свойства в случайный момент времени)**.** *Пусть процесс* $X = \{X_t,\ t = 0, 1, 2, \ldots\}$ *является настоящим субмартингалом. Пусть* τ *и* σ *— моменты остановки, причём*

1) $X_\tau \in \mathcal{L}_1$*;*

2) $\mathbb{E}\left(\mathbf{1}_{\{\tau>t\}} \cdot X_t\right) \xrightarrow[t\to\infty]{} 0.$

Тогда субмартингальное свойство процесса X *сохраняется в случайный момент времени:*

$$\mathbb{E}^{\mathcal{F}_\sigma} X_\tau \geqslant X_{\min\{\tau,\,\sigma\}}.$$

Замечание 6.8. В случае конечного горизонта, т.е. когда существует такая константа N, что $\tau \overset{\text{п.н.}}{\leqslant} N$ и $\sigma \overset{\text{п.н.}}{\leqslant} N$, условия

1) $X_\tau \in \mathcal{L}_1$;

2) $\mathbb{E}\left(\mathbf{1}_{\{\tau>t\}} \cdot X_t\right) \xrightarrow[t\to\infty]{} 0.$

выполняются автоматически.

Пример 6.1 (Игра на мартингал)**.** Рассмотрим пример мартингала, для которого не сохраняется мартингальное свойство в случайный момент времени. Одновременно будет построен пример мартингала, ограниченного по норме в $\mathcal{L}_1$, сходящегося почти наверное, но не сходящегося в пространстве $\mathcal{L}_1$, а значит, не являющегося равномерно интегрируемым.

Рассмотрим последовательность случайных величин $\{\xi_t\}_{t=1}^{\infty}$, принимающих с вероятностью 1 значения из множества $\{1, -1\}$:

$$\xi_t \overset{\text{п.н.}}{\in} \{1, -1\}, \quad \forall t \geqslant 1.$$

Возьмем в качестве фильтрации $\mathbb{F}$ поток σ-алгебр $\{\mathcal{F}_t, t \geqslant 0\}$, порожденный процессом ξ (т.е. $\mathbb{F}$ — каноническая фильтрация, см. пример 2.1):

$$\mathcal{F}_t = \sigma\{\xi_1, \dots, \xi_t\}, \quad t \geqslant 1;$$
$$\mathcal{F}_0 = \{\varnothing, \Omega\}.$$

Рассмотрим процесс $X = \{X_t,\ t \geqslant 0\}$ такой, что

$$\vartriangle X_t = \xi_t, \quad t \geqslant 1,$$

а также процесс $V = \{V_t,\ t \geqslant 0\}$, определяемый следующим образом:

$$V_t = V_0 + \sum_{s=1}^{t} H_s \vartriangle X_s, \quad t = 0, 1, 2, \dots.$$

Интерпретация такова: $\xi_t = \vartriangle X_t$ — это выигрыш игрока на t-ом шаге игры при единичной ставке (т.е. на каждом шаге либо выигрываем, либо проигрываем), V_t — капитал игрока к моменту времени t (V_0 — начальный капитал игрока). При этом H_t имеет смысл ставки игрока на шаге t (ставка может быть как положительной, так и отрицательной, т.к. можно ставить как “за”, так и “против”). Заметим, что процесс H предсказуем, т.к. ставка игрока на шаге t объявляется заранее и зависит только от первых $t-1$ шагов игры. Таким образом, процесс капитала игрока вычисляется как $V = H \circ X$, где процесс H имеет смысл стратегии игрока.

Если рассматривать единичные ставки ($H_s = 1$), то $V_t = X_t$ (если $X_0 = V_0$).

Рассмотрим игру на удвоение[26], т.е. на каждом шаге удваиваем ставку:

$$H_s = 2^{s-1}, \quad s = 1, 2, \dots.$$

Пусть τ — момент первого выигрыша:

$$\tau = \inf\{t \colon \xi_t = 1\}.$$

Заметим, что τ — это марковский момент. Однако, вообще говоря, он не обязан быть моментом остановки, т.к. выигрыш может вообще не произойти. Сделаем *предположение* о том, что τ — момент остановки:

$$\tau \overset{\text{п.н.}}{<} +\infty.$$

Рассмотрим следующую стратегию:

$$H'_t = H_t \cdot \mathbf{1}_{\{\tau \geqslant t\}},$$

[26] Можно рассматривать игру не на удвоение, а на утроение ставок и т.д. Здесь рассматривается классический вариант игры.

т.е. в момент τ перестаём играть и забираем выигрыш. Заметим, что $H'_t \in m(\mathcal{F}_{t-1})$ (т.к. $\{\tau \geqslant t\} \in \mathcal{F}_{t-1}$ из определения марковского момента), т.е. H' — предсказуемый процесс. Капитал игрока, следующего стратегии H', определяется как

$$V'_t = V_0 + \sum_{s=1}^{t} H_s \vartriangle X_s \mathbf{1}_{\{\tau \geqslant s\}} = V_{\min\{\tau,\, t\}} = V_t^{(\tau)}, \quad t = 0, 1, 2, \ldots,$$

т.е. V' — это остановленный в момент τ процесс V. Конечный выигрыш в этом случае всегда будет равен единице:

$$V_\tau - V_0 = \sum_{s=1}^{\tau} H_s \vartriangle X_s = \{H_s = 2^{s-1};\ \vartriangle X_t = \xi_t = -1,\, t < \tau;\ \vartriangle X_\tau = \xi_\tau = 1\} =$$
$$= -1 - 2 - 2^2 - 2^3 - \ldots - 2^{\tau-2} + 2^{\tau-1} = -(2^{\tau-1} - 1) + 2^{\tau-1} = 1;$$
$$V'_t = V_{\min\{\tau,\, t\}} = \begin{cases} V_0 - 2^{t-1} + 1, & \text{если } \tau > t, \\ V_0 + 1, & \text{если } \tau \leqslant t; \end{cases}$$
$$V_{\min\{\tau,\, t\}} \xrightarrow[t\to\infty]{\text{п.н.}} V_\tau \equiv V_0 + 1.$$

Вывод: если τ — момент остановки, то с вероятностью единица существует выигрышная стратегия.

Конкретизируем теперь процесс ξ. Пусть он реализует схему Бернулли. Дадим два эквивалентных определения схемы Бернулли.

Определение 6.3. Эксперимент (или явление) — это проведение серии однородных (т.е. одного типа) испытаний (временной фактор мы не затрагиваем, так как испытания могут проводиться одновременно).

Предположения:

1. Отсутствие взаимного влияния в испытаниях (одно на другое не оказывает влияния).
2. Воспроизводимость. Однородные испытания проводятся в сходных, аналогичных условиях (не одинаковых, иначе результат был бы один и тот же).
3. Существует признак, который реализуется (успех) или не реализуется (неуспех) в испытании. Признак может быть отнесен к любому из испытаний (в силу их однородности).

Описанная модель называется **схемой Бернулли**.

Примером подобного эксперимента может служить процесс бросания симметричной монеты много раз. Признаком в этом случае может служить выпадение орла.

Определение 6.4. Схемой Бернулли называется модель, состоящая из последовательности n случайных величин $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$, принимающих значения -1 и 1 и таких, что:

1. Случайные величины ξ_i независимы.
2. Случайные величины ξ_i одинаково распределены.

Заметим, что
$$\xi_i = \begin{cases} 1, & \text{если успех в } i \text{ испытании}, \\ -1, & \text{если неуспех в } i \text{ испытании}. \end{cases}$$
Тогда независимость случайных величин означает отсутствие взаимного влияния в испытаниях, а одинаковая распределённость — воспроизводимость однородных испытаний.

Итак, процесс ξ реализует схему Бернулли. Найдём распределение τ в этом случае.

$$\mathbb{P}(\tau = k) = \mathbb{P}(\inf\{t\colon \xi_t = 1\} = k) = \mathbb{P}(\xi_1 = -1, \ldots, \xi_{k-1} = -1, \xi_k = 1).$$

По определению схемы Бернулли, случайные величины ξ_t одинаково распределены. Обозначим

$$p \overset{\mathsf{def}}{=} \mathbb{P}(\xi_t = 1) \text{ — вероятность выигрыша.}$$

Тогда

$$\mathbb{P}(\tau = k) = (1-p)^{k-1}p, \quad k = 1, 2, \ldots$$

Откуда следует, что случайная величина $\tau - 1$ имеет геометрическое распределение, причём

$$\mathbb{P}(\tau < \infty) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(\tau = k) = 1,$$

т.е. τ — момент остановки.

Как было сказано выше, при использовании стратегии $H_t = 2^{t-1}$, $t \geqslant 1$, капитал игрока в момент времени t определяется по следующей формуле:

$$V_t = V_0 + \sum_{s=1}^{t} 2^{s-1}\xi_s \in \mathcal{L}_1,$$

а при использовании стратегии $H'_t = 2^{t-1} \cdot \mathbf{1}_{\{\tau \geqslant t\}}$, $t \geqslant 1$:

$$V'_t = V_{\min\{\tau,\, t\}} = \begin{cases} V_0 - 2^{t-1} + 1, & \text{если } \tau > t, \\ V_0 + 1, & \text{если } \tau \leqslant t; \end{cases} = \big(V_0 - 2^{t-1} + 1\big) \cdot \mathbf{1}_{\{\tau > t\}} + (V_0 + 1) \cdot \mathbf{1}_{\{\tau \leqslant t\}} \in \mathcal{L}_1;$$

$$V'_t \xrightarrow[t \to \infty]{\text{п.н.}} V_\tau \equiv V_0 + 1 \in \mathcal{L}_1.$$

Покажем, что процесс V обладает мартингальным свойством при $p = 0.5$ (т.е. в случае бросания симметричной монеты и выигрыша при выпадении орла / решки):

$$\mathbb{E}^{\mathcal{F}_t} V_{t+1} = \mathbb{E}^{\mathcal{F}_t}\left(V_0 + \sum_{s=1}^{t+1} 2^{s-1}\xi_s\right) = V_0 + \sum_{s=1}^{t} 2^{s-1}\xi_s + 2^t\,\mathbb{E}^{\mathcal{F}_t}\xi_{t+1} =$$

$$= V_0 + \sum_{s=1}^{t} 2^{s-1}\xi_s + 2^t\,\mathbb{E}\,\xi_{t+1} = V_t + 2^t(2p-1) = \{p = \frac{1}{2}\} = V_t.$$

Таким образом, при вероятности выигрыша на каждом шаге равной 0.5 процесс V является настоящим мартингалом, причём момент остановки τ таков, что $V_\tau \in \mathcal{L}_1$. Тогда, по теореме 6.4, мартингальное свойство процесса V сохраняется в случайный момент времени тогда и только тогда, когда процесс $\{\mathbf{1}_{\{\tau > t\}} \cdot V_t,\ t \geqslant 0\}$ сходится в $\mathcal{L}_1$:

$$\mathbb{E}^{\mathcal{F}_t} V_\tau = V_{\min\{\tau,\, t\}} \quad\Longleftrightarrow\quad \mathbb{E}\left(\mathbf{1}_{\{\tau > t\}} \cdot V_t\right) \xrightarrow[t\to\infty]{} 0.$$

Как было показано при доказательстве теоремы 6.4, процесс $\{\mathbf{1}_{\{\tau > t\}} \cdot V_t,\ t \geqslant 0\}$ сходится в $\mathcal{L}_1$ тогда и только тогда, когда остановленный процесс $V^{(\tau)} = V'$ является равномерно интегрируемым. Таким образом,

$$\mathbb{E}^{\mathcal{F}_t} V_\tau = V_{\min\{\tau,\, t\}} \quad\Longleftrightarrow\quad V' \text{ — равномерно интегрируемый процесс.}$$

Так как процесс V' сходится почти наверное к случайной величине V_τ, то, по утверждению 6.2, равномерная интегрируемость процесса V' эквивалентна сходимости этого процесса в пространстве $\mathcal{L}_1$. Следовательно, мартингальное свойство процесса V сохраняется в случайный момент времени тогда и только тогда, когда процесс V' сходится в среднем:

$$\mathbb{E}^{\mathcal{F}_t} V_\tau = V_{\min\{\tau,\, t\}} \quad \Longleftrightarrow \quad \mathbb{E}\,|V'_t - V_\tau| \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Покажем, что нет сходимости процесса V' в $\mathcal{L}_1$:

$$\mathbb{E}\,|V'_t - V_\tau| = \mathbb{E}\left|\left(V_0 - 2^{t-1} + 1\right)\cdot \mathbf{1}_{\{\tau>t\}} + (V_0+1)\cdot \mathbf{1}_{\{\tau\leqslant t\}} - (V_0+1)\right| =$$
$$= 2^{t-1}\,\mathbb{E}\,\mathbf{1}_{\{\tau>t\}} = 2^{t-1}(1-p)^t = \{p = \frac{1}{2}\} = \frac{1}{2} \underset{t\to\infty}{\not\to} 0.$$

Таким образом, мартингальное свойство процесса V не сохраняется в случайный момент времени τ.

7 Оптимальный момент остановки. Уравнение Беллмана. Критерий оптимальности

Иногда, работая с некоторым процессом (например, стоимостью портфеля), мы хотим максимизировать среднее значение процесса за некоторый промежуток времени. Сделать это можно, например, путем выбора момента остановки (момента ликвидации портфеля). Формализуем выбор такого момента остановки.

Будем рассматривать задачу с конечным горизонтом:

$$T = \{0, 1, 2, \ldots, N\}.$$

Пусть дано фильтрованное вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$. На нём задан адаптированный процесс $\xi = \{\xi_t,\ t \in T\}$, причём $\xi_t \in \mathcal{L}_1$ для всех $t \in T$[27].

Обозначим через $\mathcal{T}[M,N]$ класс моментов остановки τ, принимающих с вероятностью 1 значение из отрезка $[M,N]$:

$$\mathcal{T}[M,N] \overset{\mathsf{def}}{=} \left\{\tau \text{ — момент остановки } : \tau \overset{\text{п.н.}}{\in} [M,N]\right\}.$$

Определение 7.1. Будем говорить, что момент остановки τ^*, принадлежащий классу $\mathcal{T}[M,N]$, является **оптимальным моментом остановки (ОМО)** для процесса ξ в классе $\mathcal{T}[M,N]$, если

$$\mathbb{E}^{\mathcal{F}_M}\,\xi_{\tau^*} \geqslant \mathbb{E}^{\mathcal{F}_M}\,\xi_\tau, \quad \forall \tau \in \mathcal{T}[M,N]. \tag{7.1}$$

Обозначим через $\mathcal{T}^*_\xi[M,N]$ множество всех оптимальных моментов остановки для процесса ξ в классе $\mathcal{T}[M,N]$.

Смысл введённого понятия следующий: располагая только информации, доступной к моменту времени M, нам нужно принять решение о времени остановки, при этом мы хотим максимизировать условное среднее значение процесса в момент остановки (ξ характеризует что-то "хорошее", например, стоимость портфеля, тогда оптимальный момент остановки — это момент ликвидации портфеля).

Заметим, что из определения не вытекает существования оптимального момента остановки. Действительно, ведь в (7.1) сравниваются случайные величины (т.е. классы эквивалентных случайных величин, т.к. значение ОУМО определено с точностью до почти

[27] Требование $\xi_t \in \mathcal{L}_1$ для всех $t \in T$ несколько избыточно; оно нужно только для того, чтобы существовали все рассматриваемые условные математические ожидания процесса ξ.

наверное), которые, вообще говоря, могут быть и несравнимы. Таким образом, встаёт вопрос о существовании оптимального момента остановки:

$$\exists ?\ \tau^* \in \mathcal{T}[M,N]: \qquad \mathbb{P}\big(\omega\colon\ \mathbb{E}^{\mathcal{F}_M}\,\xi_{\tau^*}(\omega) \geqslant \mathbb{E}^{\mathcal{F}_M}\,\xi_{\tau}(\omega)\big) = 1, \quad \forall \tau \in \mathcal{T}[M,N].$$

Прежде чем дать ответ на этот вопрос, введём функцию Беллмана.

Пусть τ^* — оптимальный момент остановки для процесса ξ в классе $\mathcal{T}[M,N]$ (предполагаем, что он существует). Тогда **функцию Беллмана (функцию цены)** определим следующим образом:

$$V_M \overset{\mathsf{def}}{=} \mathbb{E}^{\mathcal{F}_M}\,\xi_{\tau^*}.$$

Заметим, что функция цены определена единственным образом, несмотря на то, что оптимальный момент остановки может быть неединственен: пусть τ^* и τ^{**} — оптимальные моменты остановки для процесса ξ в классе $\mathcal{T}[M,N]$, тогда, по определению,

$$\left.\begin{array}{ll} \mathbb{E}^{\mathcal{F}_M}\,\xi_{\tau^*} \geqslant \mathbb{E}^{\mathcal{F}_M}\,\xi_{\tau^{**}} & (\text{т.к. } \tau^* \text{ — ОМО}) \\ \mathbb{E}^{\mathcal{F}_M}\,\xi_{\tau^{**}} \geqslant \mathbb{E}^{\mathcal{F}_M}\,\xi_{\tau^*} & (\text{т.к. } \tau^{**} \text{ — ОМО}) \end{array}\right\} \quad \Longrightarrow \quad V_M = \mathbb{E}^{\mathcal{F}_M}\,\xi_{\tau^*} = \mathbb{E}^{\mathcal{F}_M}\,\xi_{\tau^{**}},$$

т.е. функция Беллмана зависит от момента времени M, но не зависит от выбора оптимального момента остановки $\tau^* \in \mathcal{T}^*_\xi[M,N]$. Заметим, что момент времени N фиксирован (напомним, что рассматривается задача с конечным горизонтом: $T = \{0,1,2,\ldots,N\}$), поэтому зависимость функции цены от N мы не учитываем.

Обозначим через $\tau^{(S)}$ некоторый оптимальный момент остановки для процесса ξ в классе $\mathcal{T}[S,N]$ (т.е. $\tau^{(S)} \overset{\mathsf{def}}{\in} \mathcal{T}^*_\xi[S,N]$). Выведем рекуррентную формулу для функции Беллмана $V_S = \mathbb{E}^{\mathcal{F}_S}\,\xi_{\tau^{(S)}}$ (при предположении, что класс $\mathcal{T}^*_\xi[S,N]$ не пуст для любого S).

1. При $S = N$ получаем $V_N = \xi_N$, т.к. всегда существует, и притом единственный, оптимальный момент остановки $\tau^{(N)} \in \mathcal{T}^*_\xi[N,N]$:

$$\tau^{(N)} = N \quad \Longrightarrow \quad V_N = \mathbb{E}^{\mathcal{F}_N}\,\xi_N = \xi_N.$$

2. Выразим V_{S-1} через V_S, пользуясь соображениями оптимальности[28]. Разделяя всё пространство элементарных событий на два непересекающихся множества:

$$\Omega \overset{\text{п.н.}}{=} \{\tau^{(S-1)} = S-1\} \cup \{\tau^{(S-1)} \in [S,N]\},$$

имеем:

$$\begin{aligned} V_{S-1} = \mathbb{E}^{\mathcal{F}_{S-1}}\,\xi_{\tau^{(S-1)}} &= \mathbf{1}_{\{\tau^{(S-1)}=S-1\}} \cdot \mathbb{E}^{\mathcal{F}_{S-1}}\,\xi_{S-1} + \mathbf{1}_{\{\tau^{(S-1)}\in[S,N]\}} \cdot \mathbb{E}^{\mathcal{F}_{S-1}}\,\xi_{\tau^{(S-1)}} = \\ &= \Big\{\{\tau^{(S-1)} \in [S,N]\} \in \mathcal{F}_{S-1},\ \text{т.к. } \tau^{(S-1)} \text{ — момент остановки}\Big\} = \\ &= \mathbf{1}_{\{\tau^{(S-1)}=S-1\}} \cdot \xi_{S-1} + \mathbb{E}^{\mathcal{F}_{S-1}}\left(\mathbf{1}_{\{\tau^{(S-1)}\in[S,N]\}} \cdot \xi_{\tau^{(S-1)}}\right). \end{aligned}$$

Теперь постараемся выделить в правой части равенства выражение для функции цены V_S. Для этого воспользуемся соображениями оптимальности.

Утверждение 7.1 (Принцип оптимальности)**.** *Если момент остановки $\tau^{(S-1)}$, по определению являющийся оптимальным в классе $\mathcal{T}[S-1,N]$, принадлежит $\mathcal{T}[S,N]$, то он является оптимальным и в классе $\mathcal{T}[S,N]$ (при условии существования ОМО):*

$$\tau^{(S-1)} \in \mathcal{T}[S,N] \quad \Longrightarrow \quad \tau^{(S-1)} \in \mathcal{T}^*_\xi[S,N].$$

[28] Заметим, что существование оптимального момента остановки пока не доказано. Приведённые рассуждения корректны только в случае существования оптимального момента остановки.

Доказательство. Так как $\tau^{(S-1)} \in \mathcal{T}[S, N]$ (по условию), то по определению ОМО $\tau^{(S)}$:

$$\mathbb{E}^{\mathcal{F}_S} \xi_{\tau^{(S)}} \geqslant \mathbb{E}^{\mathcal{F}_S} \xi_{\tau^{(S-1)}}.$$

Тогда

$$\mathbb{E}^{\mathcal{F}_{S-1}} \xi_{\tau^{(S)}} = \mathbb{E}^{\mathcal{F}_{S-1}} \mathbb{E}^{\mathcal{F}_S} \xi_{\tau^{(S)}} \geqslant \mathbb{E}^{\mathcal{F}_{S-1}} \mathbb{E}^{\mathcal{F}_S} \xi_{\tau^{(S-1)}} = \mathbb{E}^{\mathcal{F}_{S-1}} \xi_{\tau^{(S-1)}}.$$

По определению ОМО $\tau^{(S-1)}$:

$$\mathbb{E}^{\mathcal{F}_{S-1}} \xi_{\tau^{(S-1)}} \geqslant \mathbb{E}^{\mathcal{F}_{S-1}} \xi_{\tau}, \quad \forall \tau \in \mathcal{T}[S-1, N].$$

Так как $\mathcal{T}[S, N] \subset \mathcal{T}[S-1, N]$, то

$$\mathbb{E}^{\mathcal{F}_{S-1}} \xi_{\tau^{(S-1)}} \geqslant \mathbb{E}^{\mathcal{F}_{S-1}} \xi_{\tau^{(S)}}.$$

С другой стороны, выше было показано, что

$$\mathbb{E}^{\mathcal{F}_{S-1}} \xi_{\tau^{(S)}} \geqslant \mathbb{E}^{\mathcal{F}_{S-1}} \xi_{\tau^{(S-1)}}.$$

Следовательно,

$$\mathbb{E}^{\mathcal{F}_{S-1}} \xi_{\tau^{(S)}} = \mathbb{E}^{\mathcal{F}_{S-1}} \xi_{\tau^{(S-1)}}.$$

В результате имеем:

$$\left.\begin{array}{l} \mathbb{E}^{\mathcal{F}_{S-1}} \left(\mathbb{E}^{\mathcal{F}_S} \xi_{\tau^{(S)}} - \mathbb{E}^{\mathcal{F}_S} \xi_{\tau^{(S-1)}}\right) = 0 \\ \mathbb{E}^{\mathcal{F}_S} \xi_{\tau^{(S)}} - \mathbb{E}^{\mathcal{F}_S} \xi_{\tau^{(S-1)}} \geqslant 0 \end{array}\right\} \quad \overset{\text{лемма 3.1}}{\Longrightarrow} \quad \mathbb{E}^{\mathcal{F}_S} \xi_{\tau^{(S)}} = \mathbb{E}^{\mathcal{F}_S} \xi_{\tau^{(S-1)}},$$

что и доказывает оптимальность момента остановки $\tau^{(S-1)}$ в классе $\mathcal{T}[S, N]$. □

Таким образом, из принципа оптимальности получаем:

$$\tau^{(S-1)} \in \mathcal{T}[S, N] \quad \Longrightarrow \quad V_S = \mathbb{E}^{\mathcal{F}_S} \xi_{\tau^{(S-1)}}.$$

Пользуясь этим, получим выражение для функции V_{S-1} через V_S:

$$\begin{aligned} V_{S-1} &= \mathbf{1}_{\{\tau^{(S-1)}=S-1\}} \cdot \xi_{S-1} + \mathbb{E}^{\mathcal{F}_{S-1}} \left(\mathbf{1}_{\{\tau^{(S-1)} \in [S,N]\}} \cdot \xi_{\tau^{(S-1)}}\right) = \\ &= \mathbf{1}_{\{\tau^{(S-1)}=S-1\}} \cdot \xi_{S-1} + \mathbb{E}^{\mathcal{F}_{S-1}} \mathbb{E}^{\mathcal{F}_S} \left(\mathbf{1}_{\{\tau^{(S-1)} \in [S,N]\}} \cdot \xi_{\tau^{(S-1)}}\right) = \\ &= \mathbf{1}_{\{\tau^{(S-1)}=S-1\}} \cdot \xi_{S-1} + \mathbb{E}^{\mathcal{F}_{S-1}} \left(\mathbf{1}_{\{\tau^{(S-1)} \in [S,N]\}} \cdot \mathbb{E}^{\mathcal{F}_S} \xi_{\tau^{(S-1)}}\right) = \\ &= \mathbf{1}_{\{\tau^{(S-1)}=S-1\}} \cdot \xi_{S-1} + \mathbb{E}^{\mathcal{F}_{S-1}} \left(\mathbf{1}_{\{\tau^{(S-1)} \in [S,N]\}} \cdot V_S\right) = \\ &= \mathbf{1}_{\{\tau^{(S-1)}=S-1\}} \cdot \xi_{S-1} + \mathbf{1}_{\{\tau^{(S-1)} \in [S,N]\}} \cdot \mathbb{E}^{\mathcal{F}_{S-1}} V_S. \end{aligned}$$

По определению оптимального момента остановки:

$$V_{S-1} = \mathbb{E}^{\mathcal{F}_{S-1}} \xi_{\tau^{(S-1)}} = \max_{\tau \in \mathcal{T}[S-1,N]} \mathbb{E}^{\mathcal{F}_{S-1}} \xi_{\tau}$$

Следовательно,

$$\mathbf{1}_{\{\tau^{(S-1)}=S-1\}} \cdot \xi_{S-1} + \mathbf{1}_{\{\tau^{(S-1)} \in [S,N]\}} \cdot \mathbb{E}^{\mathcal{F}_{S-1}} V_S \longrightarrow \max_{\tau^{(S-1)}};$$

$$\Downarrow$$

$$V_{S-1} = \max\left\{\xi_{S-1},\ \mathbb{E}^{\mathcal{F}_{S-1}} V_S\right\},$$

причём

если $\xi_{S-1}(\omega) > \mathbb{E}^{\mathcal{F}_{S-1}} V_S(\omega)$, то $\tau^{(S-1)}(\omega) = S-1$;
если $\xi_{S-1}(\omega) = \mathbb{E}^{\mathcal{F}_{S-1}} V_S(\omega)$, то $\tau^{(S-1)}(\omega) = \tau^{(S)}(\omega)$, либо $\tau^{(S-1)}(\omega) = S-1$;
если $\xi_{S-1}(\omega) < \mathbb{E}^{\mathcal{F}_{S-1}} V_S(\omega)$, то $\tau^{(S-1)}(\omega) = \tau^{(S)}(\omega)$.

Итак, получаем *уравнение Беллмана для функции цены*:

$$\begin{cases} V_N = \xi_N, \\ V_{S-1} = \max\left\{\xi_{S-1},\ \mathbb{E}^{\mathcal{F}_{S-1}} V_S\right\}, \quad S = 1, 2, \ldots, N. \end{cases} \tag{7.2}$$

Откуда получаем, что, согласно теореме 4.3, функция цены V_S есть оболочка Снелла[29] процесса ξ.

Замечание 7.1. Определение оптимального момента остановки дано немного нетрадиционно, но так, чтобы легко было писать уравнение Беллмана.

Замечание 7.2. Принцип оптимальности, также называемый принципом Беллмана, можно показать немного по-другому. По определению ОМО:

$$\tau^{(S-1)} \in \underset{\tau \in \mathcal{T}[S-1,N]}{\mathrm{Argmax}}\ \mathbb{E}^{\mathcal{F}_{S-1}}\,\xi_\tau \equiv \mathcal{T}^*_\xi[S-1, N].$$

Выше было найдено выражение для V_{S-1} вида:

$$V_{S-1} = \mathbb{E}^{\mathcal{F}_{S-1}}\,\xi_{\tau^{(S-1)}} = \mathbf{1}_{\{\tau^{(S-1)}=S-1\}} \cdot \xi_{S-1} + \mathbb{E}^{\mathcal{F}_{S-1}}\left(\mathbf{1}_{\{\tau^{(S-1)} \in \mathcal{T}[S,N]\}} \cdot \mathbb{E}^{\mathcal{F}_S}\,\xi_{\tau^{(S-1)}}\right).$$

Очевидно, что второе равенство справедливо для любого момента остановки из класса $\mathcal{T}[S-1, N]$:

$$\mathbb{E}^{\mathcal{F}_{S-1}}\,\xi_\tau = \mathbf{1}_{\{\tau=S-1\}} \cdot \xi_{S-1} + \mathbb{E}^{\mathcal{F}_{S-1}}\left(\mathbf{1}_{\{\tau \in \mathcal{T}[S,N]\}} \cdot \mathbb{E}^{\mathcal{F}_S}\,\xi_\tau\right).$$

Следовательно,

$$\tau^{(S-1)} \in \underset{\tau \in \mathcal{T}[S-1,N]}{\mathrm{Argmax}} \left\{\mathbf{1}_{\{\tau=S-1\}} \cdot \xi_{S-1} + \mathbb{E}^{\mathcal{F}_{S-1}}\left(\mathbf{1}_{\{\tau \in \mathcal{T}[S,N]\}} \cdot \mathbb{E}^{\mathcal{F}_S}\,\xi_\tau\right)\right\};$$

$$\Downarrow$$

$$\text{если } \tau^{(S-1)} \in \mathcal{T}[S, N],\ \text{ то } \tau^{(S-1)} \in \underset{\tau \in \mathcal{T}[S,N]}{\mathrm{Argmax}} \left\{\mathbb{E}^{\mathcal{F}_S}\,\xi_\tau\right\} \equiv \mathcal{T}^*_\xi[S, N].$$

Сформулируем теперь теорему о существовании оптимального момента остановки.

Теорема 7.1 (Критерий оптимальности момента остановки)**.** *Пусть дан адаптированный процесс $\xi = \{\xi_t \in \mathcal{L}_1,\ t = 0, 1, 2, \ldots, N\}$.*

1. *Для оптимальности момента остановки $\tau^* \in \mathcal{T}[M, N]$ необходимо и достаточно выполнение следующих условий:*

   (a) *процесс ξ в момент времени τ^* совпадает со своей оболочкой Снелла;*

   (b) *остановленная в момент времени τ^* оболочка Снелла процесса ξ является мартингалом.*

   Таким образом, если $\tau^* \in \mathcal{T}[M, N]$, то

   $$\tau^* \in \mathcal{T}^*_\xi[M, N] \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{array}{l} (a)\ \xi_{\tau^*} = \xi^*_{\tau^*}; \\ (b)\ (\xi^*)^{(\tau^*)} \text{ — мартингал.} \end{array}$$

2. *Оптимальный момент остановки всегда существует, и в качестве $\tau^* \in \mathcal{T}^*_\xi[M, N]$ можно, например, взять первый момент, когда процесс ξ совпадает со своей оболочкой Снелла[30]:*

   $$\sigma_M = \inf\left\{t \in [M, N] \colon \xi_t = \xi^*_t\right\} \in \mathcal{T}^*_\xi[M, N].$$

[29] В силу требования $\xi_t \in \mathcal{L}_1$ для всех $t \in T$, оболочка Снелла для процесса ξ определена.

[30] Очевидно, что такой момент всегда существует, т.к. $\xi^*_N = \xi_N$.

3. *Оболочка Снелла процесса ξ является функцией цены (функцией Беллмана) для задачи нахождения оптимального момента остановки:*

$$\tau^* \in \mathcal{T}^*_\xi[M,N] \quad \Longrightarrow \quad V_M \overset{def}{=} \mathbb{E}^{\mathcal{F}_M}\, \xi_{\tau^*} = \xi^*_M.$$

Доказательство. Напомним, определение оболочки Снелла. Оболочкой Снелла ξ^* адаптированного процесса ξ, называется наименьший настоящий супермартингал, мажорирующий процесс ξ. Следовательно, для любого момента остановки $\tau \in \mathcal{T}[M,N]$ справедливо:

- $\xi \leqslant \xi^* \Longrightarrow$
$$\mathbb{E}^{\mathcal{F}_M}\, \xi_\tau \leqslant \mathbb{E}^{\mathcal{F}_M}\, \xi^*_\tau.$$
- ξ^* — супермартингал $\overset{\text{теорема 5.2}}{\Longrightarrow}$ $(\xi^*)^{(\tau)}$ — супермартингал $\Longrightarrow$
$$\mathbb{E}^{\mathcal{F}_M}\, (\xi^*)^{(\tau)}_N \leqslant (\xi^*)^{(\tau)}_M.$$

Из определения остановленного процесса:

$$(\xi^*)^{(\tau)}_N = \xi^*_{\min\{\tau,\, N\}} = \xi^*_\tau; \quad (\xi^*)^{(\tau)}_M = \xi^*_{\min\{\tau,\, M\}} = \xi^*_M.$$

В результате получаем следующую цепочку соотношений:

$$\mathbb{E}^{\mathcal{F}_M}\, \xi_\tau \leqslant \mathbb{E}^{\mathcal{F}_M}\, \xi^*_\tau = \mathbb{E}^{\mathcal{F}_M}\, (\xi^*)^{(\tau)}_N \leqslant (\xi^*)^{(\tau)}_M = \xi^*_M, \quad \forall \tau \in \mathcal{T}[M,N]. \tag{7.3}$$

$$\Downarrow$$

$$\mathbb{E}^{\mathcal{F}_M}\, \xi_\tau \leqslant \xi^*_M, \quad \forall \tau \in \mathcal{T}[M,N]. \tag{7.4}$$

Следовательно, если для некоторого $\tau^* \in \mathcal{T}[M,N]$ в (7.4) достигается равенство, то момент остановки τ^* является оптимальным, и наоборот:

$$\tau^* \in \mathcal{T}[M,N] \quad \Longrightarrow \quad \mathbb{E}^{\mathcal{F}_M}\, \xi_{\tau^*} = \xi^*_M \quad \Longleftrightarrow \quad \tau^* \in \mathcal{T}^*_\xi[M,N]. \tag{7.5}$$

$\boxed{(a),(b) \implies \tau^* \in \mathcal{T}^*_\xi[M,N]}$ **:** Пусть для момента остановки $\tau^* \in \mathcal{T}[M,N]$ выполнены следующие условия:

(a) $\xi_{\tau^*} = \xi^*_{\tau^*}$;

(b) $(\xi^*)^{(\tau^*)}$ — мартингал.

Покажем, что $\tau^* \in \mathcal{T}^*_\xi[M,N]$. Действительно, в цепочке соотношений (7.3) все неравенства превращаются в равенства:

$$\mathbb{E}^{\mathcal{F}_M}\, \xi_{\tau^*} \overset{(a)}{=} \mathbb{E}^{\mathcal{F}_M}\, \xi^*_{\tau^*} = \mathbb{E}^{\mathcal{F}_M}\, (\xi^*)^{(\tau^*)}_N \overset{(b)}{=} (\xi^*)^{(\tau^*)}_M = \xi^*_M.$$

Откуда получаем, что

$$\mathbb{E}^{\mathcal{F}_M}\, \xi_{\tau^*} = \xi^*_M \quad \overset{(7.5)}{\Longrightarrow} \quad \tau^* \in \mathcal{T}^*_\xi[M,N].$$

Достаточность в первом пункте теоремы доказана.

$\boxed{\sigma_M \in \mathcal{T}^*_\xi[M, N]}$ **:** Докажем второй пункт теоремы. Для этого достаточно показать, что для момента остановки $\sigma_M = \inf\{t \in [M, N] \colon \xi_t = \xi^*_t\}$ выполнены условия (a) и (b) из первого пункта теоремы. Условие (a) выполнено по построению:

$$\xi_{\sigma_M} = \xi^*_{\sigma_M}$$

Осталось показать мартингальное свойство остановленной оболочки Снелла. Для любого $t \in [0, N]$ имеем:

$$\begin{gathered}
\mathbb{E}^{\mathcal{F}_{t-1}} (\xi^*)^{(\sigma_M)}_t = \mathbb{E}^{\mathcal{F}_{t-1}} \xi^*_{\min\{\sigma_M,\, t\}} = \\
= \mathbb{E}^{\mathcal{F}_{t-1}} \left(\xi^*_{\min\{\sigma_M,\, t\}} \cdot \mathbf{1}_{\{\sigma_M < t\}}\right) + \mathbb{E}^{\mathcal{F}_{t-1}} \left(\xi^*_{\min\{\sigma_M,\, t\}} \cdot \mathbf{1}_{\{\sigma_M \geqslant t\}}\right) = \\
= \mathbb{E}^{\mathcal{F}_{t-1}} \left(\xi^*_{\sigma_M} \cdot \mathbf{1}_{\{\sigma_M < t\}}\right) + \mathbb{E}^{\mathcal{F}_{t-1}} \left(\xi^*_t \cdot \mathbf{1}_{\{\sigma_M \geqslant t\}}\right) = \\
= \{\sigma_M \text{ — марковский момент } \implies \{\sigma_M \geqslant t\} \in \mathcal{F}_{t-1}\} = \\
= \mathbb{E}^{\mathcal{F}_{t-1}} \left(\xi^*_{\sigma_M} \cdot \mathbf{1}_{\{\sigma_M < t\}}\right) + \mathbf{1}_{\{\sigma_M \geqslant t\}} \cdot \mathbb{E}^{\mathcal{F}_{t-1}} \xi^*_t.
\end{gathered}$$

Из теоремы 4.3 получаем:

$$\begin{cases} \xi^*_N &= \xi_N, \\ \xi^*_{t-1} &= \max\left\{\xi_{t-1},\ \mathbb{E}^{\mathcal{F}_{t-1}} \xi^*_t\right\}, \quad t = 1, 2, \ldots, N. \end{cases}$$

С другой стороны, по построению:

$$\xi_M \neq \xi^*_M,\ \xi_{M+1} \neq \xi^*_{M+1},\ \ldots,\ \xi_{\sigma_M - 1} \neq \xi^*_{\sigma_M - 1},\ \xi_{\sigma_M} = \xi^*_{\sigma_M}.$$

Следовательно, при $\sigma_M \geqslant t$ получим:

$$\mathbb{E}^{\mathcal{F}_{t-1}} \xi^*_t = \xi^*_{t-1}.$$

Заметим также, что

$$\xi^*_{\sigma_M} \cdot \mathbf{1}_{\{\sigma_M < t\}} = \sum_{u=M}^{t-1} \xi^*_u \cdot \mathbf{1}_{\{\sigma_M = u\}} \in m\,(\mathcal{F}_{t-1}).$$

Таким образом, для любого $t \in [0, N]$ имеем:

$$\begin{gathered}
\mathbb{E}^{\mathcal{F}_{t-1}} (\xi^*)^{(\sigma_M)}_t = \mathbb{E}^{\mathcal{F}_{t-1}} \left(\xi^*_{\sigma_M} \cdot \mathbf{1}_{\{\sigma_M < t\}}\right) + \mathbf{1}_{\{\sigma_M \geqslant t\}} \cdot \mathbb{E}^{\mathcal{F}_{t-1}} \xi^*_t = \\
= \xi^*_{\sigma_M} \cdot \mathbf{1}_{\{\sigma_M < t\}} + \xi^*_{t-1} \cdot \mathbf{1}_{\{\sigma_M \geqslant t\}} = \xi^*_{\min\{\sigma_M,\, t-1\}} = (\xi^*)^{(\sigma_M)}_{t-1},
\end{gathered}$$

что и доказывает выполнение условия (b) для момента остановки σ_M.

Из второго пункта теоремы (о существовании ОМО) следует, что функция цены $V_M \overset{\text{def}}{=} \mathbb{E}^{\mathcal{F}_M} \xi_{\tau^*}$ определена корректно. Тогда третий пункт теоремы следует из (7.5).

$\boxed{\tau^* \in \mathcal{T}^*_\xi[M, N] \implies (a), (b)}$ **:** Покажем необходимость в первом пункте теоремы. Пусть $\tau^* \in \mathcal{T}^*_\xi[M, N]$ (множество $\mathcal{T}^*_\xi[M, N]$ не пусто в силу уже доказанного второго пункта теоремы). Тогда, согласно (7.5), выполнено равенство:

$$\mathbb{E}^{\mathcal{F}_M} \xi_{\tau^*} = \xi^*_M,$$

т.е. в цепочке соотношений (7.3) все неравенства превращаются в равенства:

$$\mathbb{E}^{\mathcal{F}_M} \xi_{\tau^*} = \mathbb{E}^{\mathcal{F}_M} \xi^*_{\tau^*} = \mathbb{E}^{\mathcal{F}_M} (\xi^*)^{(\tau^*)}_N = (\xi^*)^{(\tau^*)}_M = \xi^*_M.$$

- Из равенства $\mathbb{E}^{\mathcal{F}_M}\,\xi_{\tau^*} = \mathbb{E}^{\mathcal{F}_M}\,\xi^*_{\tau^*}$ следует выполнение условия (a):

$$\left.\begin{array}{l} \mathbb{E}^{\mathcal{F}_M}\left(\xi_{\tau^*} - \xi^*_{\tau^*}\right) = 0 \\ \xi_{\tau^*} \leqslant \xi^*_{\tau^*} \text{ (из определения оболочки Снелла)} \end{array}\right\} \overset{\text{лемма 3.1}}{\Longrightarrow} \quad \xi_{\tau^*} = \xi^*_{\tau^*}.$$

- Из равенства $\mathbb{E}^{\mathcal{F}_M}\,(\xi^*)^{(\tau^*)}_N = (\xi^*)^{(\tau^*)}_M$ следует выполнение условия (b):

$$\left.\begin{array}{l} \mathbb{E}^{\mathcal{F}_M}\,(\xi^*)^{(\tau^*)}_N = (\xi^*)^{(\tau^*)}_M \\ (\xi^*)^{(\tau^*)} \text{ — супермартингал} \end{array}\right\} \overset{\text{утверждение 7.2}}{\Longrightarrow} \quad (\xi^*)^{(\tau^*)} \text{ — мартингал.}$$

□

Утверждение 7.2. *Пусть для некоторого адаптированного процесса ξ выполняется супермартингальное свойство на некотором отрезке времени $[t_0, t_1]$. Тогда если $\mathbb{E}^{\mathcal{F}_{t_0}}\,\xi_{t_1} = \xi_{t_0}$, то процесс ξ обладает мартингальным свойством на $[t_0, t_1]$.*

$$\left.\begin{array}{l} \xi \text{ — обобщённый супермартингал на } [t_0, t_1] \\ \mathbb{E}^{\mathcal{F}_{t_0}}\,\xi_{t_1} = \xi_{t_0} \end{array}\right\} \Longrightarrow \quad \xi \text{ — обобщённый мартингал на } [t_0, t_1].$$

Доказательство. Будем доказывать от противного. Пусть существует такой момент времени $\tau \in [t_0, t_1 - 1]$, что

$$\mathbb{E}^{\mathcal{F}_\tau}\,\xi_{\tau+1} \neq \xi_\tau.$$

По определению супермартингального свойства:

$$\mathbb{E}^{\mathcal{F}_t}\,\xi_s \leqslant \xi_t, \quad \forall s, t \in [t_0, t_1]\colon s \geqslant t.$$

Следовательно,

$$\left.\begin{array}{l} \mathbb{E}^{\mathcal{F}_\tau}\,\xi_{\tau+1} < \xi_\tau; \\ \mathbb{E}^{\mathcal{F}_{\tau+1}}\,\xi_{t_1} \leqslant \xi_{\tau+1}; \\ \mathbb{E}^{\mathcal{F}_{t_0}}\,\xi_\tau \leqslant \xi_{t_0}; \end{array}\right\} \Longrightarrow$$

$$\mathbb{E}^{\mathcal{F}_{t_0}}\,\xi_{t_1} = \mathbb{E}^{\mathcal{F}_{t_0}}\left(\mathbb{E}^{\mathcal{F}_{\tau+1}}\,\xi_{t_1}\right) \leqslant \mathbb{E}^{\mathcal{F}_{t_0}}\,\xi_{\tau+1} = \mathbb{E}^{\mathcal{F}_{t_0}}\left(\mathbb{E}^{\mathcal{F}_\tau}\,\xi_{\tau+1}\right) < \mathbb{E}^{\mathcal{F}_{t_0}}\,\xi_\tau \leqslant \xi_{t_0};$$

$$\Downarrow$$

$$\mathbb{E}^{\mathcal{F}_{t_0}}\,\xi_{t_1} < \xi_{t_0}.$$

Пришли к противоречию с $\mathbb{E}^{\mathcal{F}_{t_0}}\,\xi_{t_1} = \xi_{t_0}$. □

Замечание 7.3. Задача о нахождении оптимального момента остановки может быть поставлена и для процессов с бесконечным горизонтом. Однако там нужно накладывать дополнительные требования для сохранения мартингального свойства в случайный момент времени (см. теорему 6.4).

Замечание 7.4. Поиск оптимального момента остановки имеет прямое отношение к задачи ценообразования опционов американского типа (см. вторую часть курса).

Теорема 7.1 говорит о существовании оптимального момента остановки, но не о его единственности. Очевидно, что момент $\sigma_S = \inf\{t \in [S, N]\colon \xi_t = \xi^*_t\}$ является наименьшим (самым ранним) моментом остановки в классе $\mathcal{T}^*_\xi[S, N]$. Покажем (конструктивно), что существует также и наибольший (самый поздний) момент остановки в классе $\mathcal{T}^*_\xi[S, N]$. Таким образом, можно проверять единственность ОМО путём сравнения наименьшего и наибольшего ОМО.

Пусть задан отрезок времени $t \in [S, N]$. Рассмотрим оболочку Снелла ξ^* адаптированного процесса ξ. По определению, она является настоящим супермартингалом. Значит, для неё справедливо аддитивное разложение Дуба (см. теорему 4.1): существуют такие процессы $M = \{M_t, t \in [S, N]\}$ и $A = \{A_t, t \in [S, N]\}$, что

$$\xi_t^* = M_t + A_t, \quad t \in [S, N],$$

причём процесс M является обобщённым мартингалом, а процесс A предсказуемый (разложение единственно с точностью до выбора $M_S \in m(\mathcal{F}_S)$, либо $A_S \in m(\mathcal{F}_S)$). В силу замечания 4.2, процесс M является настоящим мартингалом и $A_t \in \mathcal{L}_1$ для всех $t \in [S, N]$ (при условии выбора $M_S \in \mathcal{L}_1$). Заметим, что процесс $-\xi^*$ является субмартингалом. Следовательно, в силу следствия 4.1, процесс $-A$ является неубывающим, т.е. $-\vartriangle A_t \geqslant 0$ для всех $t \in [S+1, N]$. В результате имеем следующее аддитивное разложение Дуба для процесса ξ^*:

$$\begin{aligned} \exists M, A\colon \quad & \xi_t^* = M_t + A_t, \quad t \in [S, N], \\ & M \text{ — настоящий мартингал}, \\ & A \text{ — невозрастающий предсказуемый процесс}; \end{aligned}$$

либо, обозначая $B = -A$, получаем:

$$\begin{aligned} \exists M, B\colon \quad & \xi_t^* = M_t - B_t, \quad t \in [S, N], \\ & M \text{ — настоящий мартингал}, \\ & B \text{ — неубывающий предсказуемый процесс}. \end{aligned}$$

Разложение единственно с точностью до выбора M_S (B_S).

Выберем такие процессы M и B, что

$$B_S = 0.$$

Рассмотрим задачу оптимальной остановки процесса ξ на отрезке $[S, N]$. Выберем такой момент ρ_S, что

$$\rho_S = \inf\{t \in [S, N-1]\colon B_{t+1} > 0\},$$

причём $\inf \varnothing \overset{\mathsf{def}}{=} N$ — максимально возможный момент времени. В силу предсказуемости процесса B, событие $\{B_{t+1} > 0\}$ принадлежит σ-алгебре $\mathcal{F}_t$ (для всех $t \in [S, N-1]$). Следовательно, $\{\rho_S \leqslant t\} \in \mathcal{F}_t$ для всех $t \in [S, N]$ и $\rho_S \leqslant N$, т.е. ρ_S — момент остановки.

Лемма 7.1. *Момент остановки ρ_S является оптимальным для процесса ξ в классе $\mathcal{T}[S, N]$, причём он является* **самым поздним** *среди всех возможных ОМО для процесса ξ в классе $\mathcal{T}[S, N]$:*

$$\rho_S \overset{\mathsf{def}}{=} \inf\{t \in [S, N-1]\colon B_{t+1} > 0\} \quad (\inf \varnothing \overset{\mathsf{def}}{=} N) \quad \Longrightarrow \quad \begin{array}{ll} 1) & \rho_S \in \mathcal{T}_\xi^*[S, N]; \\ 2) & \rho_S \geqslant \tau^*, \ \forall \tau^* \in \mathcal{T}_\xi^*[S, N]. \end{array}$$

Доказательство. 1. Покажем, что момент остановки ρ_S принадлежит классу $\mathcal{T}_\xi^*[S, N]$, т.е. является ОМО. Согласно теореме 7.1, для этого достаточно доказать, что процесс ξ в момент времени ρ_S совпадает со своей оболочкой Снелла и остановленная в момент времени ρ_S оболочка Снелла процесса ξ является мартингалом.

$\boxed{\text{(a) } \xi_{\rho_S} = \xi^*_{\rho_S}}$ **:** Рассмотрим два случая:

- $\rho_S = N$;
- $\rho_S = u < N$.

В первом случае из явных формул для оболочки Снелла (см. теорему 4.3) получаем:

$$\xi^*_N = \xi_N,$$

что и требовалось доказать.

Второй случай немного посложнее. Опять же, из явных формул для оболочки Снелла получаем:

$$\xi^*_u = \max\left\{\xi_u,\ \mathbb{E}^{\mathcal{F}_u}\,\xi^*_{u+1}\right\}.$$

Рассмотрим событие $A_u = \{\rho_S = u\}$. Так как ρ_S — момент остановки, то событие A_u принадлежит σ-алгебре $\mathcal{F}_u$. Покажем, что $\xi^*_u = \xi_u$ на A_u. Очевидно, что для этого достаточно доказать, что $\mathbb{E}^{\mathcal{F}_u}\,\xi^*_{u+1} < \xi^*_u$ на A_u:

$$\mathbf{1}_{A_u}\cdot\mathbb{E}^{\mathcal{F}_u}\,\xi^*_{u+1} = \mathbf{1}_{A_u}\cdot\left(\mathbb{E}^{\mathcal{F}_u}\,M_{u+1} - \mathbb{E}^{\mathcal{F}_u}\,B_{u+1}\right) = \{M \text{ — мартингал, } B \text{ — предсказуемый процесс}\} = \mathbf{1}_{A_u}\cdot(M_u - B_{u+1}) < \{\rho_S = u \ \Rightarrow\ B_{u+1} > 0\} < \mathbf{1}_{A_u}\cdot M_u =$$
$$= \{\rho_S = u \ \Rightarrow\ B_S = 0, B_{S+1} = 0, \ldots, B_u = 0 \ \Rightarrow\ \xi^*_u = M_u - B_u = M_u\} = \mathbf{1}_{A_u}\cdot\xi^*_u;$$

$$\Downarrow$$
$$\mathbb{E}^{\mathcal{F}_u}\,\xi^*_{u+1} < \xi^*_u \text{ на } A_u;$$
$$\Downarrow$$
$$\left\{\xi^*_u = \max\left\{\xi_u,\ \mathbb{E}^{\mathcal{F}_u}\,\xi^*_{u+1}\right\}\right\}$$
$$\Downarrow$$
$$\xi^*_u = \xi_u \text{ на } A_u.$$

$\boxed{\textbf{(b)}\ (\xi^*)^{(\rho_S)} \ \textbf{— мартингал}}$ **:** По определению момента остановки ρ_S:

$$B_S = B_{S+1} = \ldots = B_{\rho_S} = 0; \quad B_{\rho_S+1} > 0 \text{ (если } \rho_S < N).$$

Тогда для любого $t \in [S, N]$ получаем:

$$(\xi^*)^{(\rho_S)}_t = \xi^*_{\min\{\rho_S,\,t\}} = M_{\min\{\rho_S,\,t\}} - B_{\min\{\rho_S,\,t\}} = M_{\min\{\rho_S,\,t\}} = (M)^{(\rho_S)}_t,$$

т.е. остановленная оболочка Снелла совпадает в остановленным процессом M. Так как процесс M является настоящим мартингалом, то, в силу теоремы 5.2, остановленный процесс $(M)^{(\rho_S)}$ также является настоящим мартингалом. Следовательно, процесс $(\xi^*)^{(\rho_S)}$ — настоящий мартингал.

2. Покажем, что ρ_S — максимальный ОМО. Рассмотрим произвольный ОМО $\tau^* \in \mathcal{T}^*_\xi[S,N]$. Докажем, что $\rho_S \overset{\text{п.н.}}{\geqslant} \tau^*$. Используя следствие 5.2 о сохранении мартингального свойства в случайный момент времени, имеем:

$$\mathbb{E}^{\mathcal{F}_S}\,(\xi^*)^{(\tau^*)}_{\tau^*} = \mathbb{E}^{\mathcal{F}_S}\,\xi^*_{\tau^*} = \mathbb{E}^{\mathcal{F}_S}\,M_{\tau^*} - \mathbb{E}^{\mathcal{F}_S}\,B_{\tau^*} = \{M \text{ — мартингал}\} = M_S - \mathbb{E}^{\mathcal{F}_S}\,B_{\tau^*};$$
$$(\xi^*)^{(\tau^*)}_S = \xi^*_S = M_S \text{ (т.к. } B_S = 0);$$
$$\mathbb{E}^{\mathcal{F}_S}\,(\xi^*)^{(\tau^*)}_{\tau^*} = (\xi^*)^{(\tau^*)}_S \ \text{ (т.к. } \tau^* \in \mathcal{T}^*_\xi[S,N]\text{, откуда, по теореме 7.1, } (\xi^*)^{(\tau^*)} \text{ — мартингал);}$$
$$\Downarrow$$
$$\mathbb{E}^{\mathcal{F}_S}\,B_{\tau^*} = 0.$$

По определению момента остановки ρ_S:

$$B_S = B_{S+1} = \ldots = B_{\rho_S} = 0; \quad B_{\rho_S+1} > 0 \text{ (если } \rho_S < N);$$
$$\Downarrow$$
$$B_{\tau^*} \geqslant 0.$$

Следовательно, по лемме 3.1:

$$\left.\begin{array}{l}\mathbb{E}^{\mathcal{F}_S} B_{\tau^*} = 0 \\ B_{\tau^*} \geqslant 0\end{array}\right\} \quad \Longrightarrow \quad B_{\tau^*} \overset{\text{п.н.}}{=} 0.$$

Откуда, из определения ρ_S, получаем требуемое утверждение:

$$\left.\begin{array}{l}\rho_S = \inf\{t \in [S, N-1] \colon B_{t+1} > 0\} \\ B_{\tau^*} \overset{\text{п.н.}}{=} 0\end{array}\right\} \quad \Longrightarrow \quad \tau^* \overset{\text{п.н.}}{\leqslant} \rho_S.$$

□

Замечание 7.5. Согласно замечанию 4.1, приращение процесса B в разложении ξ^* выражается следующим образом:

$$\triangle B_t = \xi^*_{t-1} - \mathbb{E}^{\mathcal{F}_{t-1}} \xi^*_t, \quad \forall t \in [S+1, N].$$

По определению ρ_S, получаем:

$$\triangle B_{S+1} = 0, \ldots, \triangle B_{\rho_S} = 0, \triangle B_{\rho_S+1} = B_{\rho_S+1} > 0.$$

Таким образом, можно написать ещё одно выражение для момента остановки:

$$\rho_S = \inf\left\{t \in [S, N-1] \colon \xi^*_t > \mathbb{E}^{\mathcal{F}_t} \xi^*_{t+1}\right\}.$$

Откуда, учитывая $\xi^*_t = \max\left\{\xi_t,\ \mathbb{E}^{\mathcal{F}_t} \xi^*_{t+1}\right\}$, сразу получаем, что $\xi^*_{\rho_S} = \xi_{\rho_S}$. Заметим также, что $\rho_S + 1$ — первый момент времени, когда происходит потеря мартингального свойства процесса ξ^* и он начинает условно убывать.

Следствие 7.1 (Критерий единственности ОМО)**.** *Оптимальный момент остановки для адаптированного процесса ξ в классе $\mathcal{T}[M,N]$ является единственным тогда и только тогда, когда в первый же момент, когда процесс совпадает со своей оболочкой Снелла, начинает убывать невозрастающая предсказуемая составляющая аддитивного разложения Дуба оболочки Снелла исходного процесса:*

$$!\tau^* \in \mathcal{T}^*_\xi[M,N] \quad \Longleftrightarrow \quad \boxed{\sigma_M = \rho_M}\ (= \tau^*),$$

где

$$\sigma_M = \inf\{t \in [M,N] \colon \xi_t = \xi^*_t\},$$
$$\rho_M = \inf\left\{t \in [M, N-1] \colon \xi^*_t > \mathbb{E}^{\mathcal{F}_t} \xi^*_{t+1}\right\} = \inf\{t \in [M, N-1] \colon B_{t+1} > 0\}.$$

Часть II
Модели финансовых рынков с дискретным временем

8 Введение в финансовые рынки и риск-менеджмент

В этой части курса нас будут интересовать финансовые рынки и финансовые институты. Хотя в данном курсе финансовой математики акцент сделан именно на математику, было бы достаточно странно полностью обойти стороной и не пояснить финансовую сторону вопроса (это всё равно, что читать курс математической физики аудитории, не знакомой с физикой). Поэтому если первая часть была полностью математической, то во второй будет рассказано, как этот математический аппарат может быть применён в финансовой сфере.

Вторая часть курса построена следующим образом. Сначала мы поговорим о финансовых рынках и финансовых институтах, откуда они берутся и зачем они нужны; потом перейдём к основам управления рисками (что это такое и для чего это нужно); затем мы немного затронем основы принятия решений; наконец, основная часть, самая интересная с точки зрения математики, будет посвящена производным финансовым инструментам[31] (задачи ценообразования, хеджирования и т.д.).

Сначала объясним, зачем вообще нужны финансовые рынки. И когда они нужны. Роль финансовых рынков в стране зависит от установившейся в ней политической системы. Например, при социализме в СССР финансовые рынки абсолютно не нужны (действительно, никаких акций или облигаций там не было). В определённой степени, финансовые рынки — это порождение системы отношений к собственности.

Тем не менее, даже в СССР финансовое посредничество было. Оно осуществлялось при помощи банков и страховых компаний (“Госстрах СССР”, “Ингосстрах”). Были банки, которые занимались внешней торговлей, и были банки, которые работали с частными клиентами внутри страны. Процентная ставка[32] была стабильно 3%. При социалистическом строе единственным собственником является государство, которое уже взаимодействовало тем или иным образом с отдельными частными лицами. По сути, в СССР на рынке были только монополисты, поэтому рынка как такового не было.

Что касается экономики при капиталистических отношениях, то, здесь в основном действует принцип “невидимой руки” Адама Смита. По словам Карла Маркса, капиталист видит стадию производства как неизбежное зло на пути получения прибыли. Таким образом, капиталист производит ровно до тех пор, пока ему это выгодно. Следовательно, если производство нерентабельно, т.е. не приносит прибыли, не оправдывает расходов, то капиталист не будет производить (даже в том случае, если продолжение производства выгодно обществу в целом). Поэтому “невидимая рука” не всегда является залогом нормальной экономической ситуации в стране. В некоторых капиталистических странах она нормализует экономическую ситуацию, а в иных приходится существенно корректировать её действие при помощи вмешательства государства. Почему же так происходит?

[31] Сейчас в России механизм производных финансовых инструментов находится в зачаточном состоянии и почти не развит. Однако лет через пять специалисты в этой области будут очень востребованы в нашей стране.

[32] Процентная ставка (interest rate) — это сумма, указанная в процентном выражении к сумме кредита, которую платит получатель кредита за пользование им в расчёте на определённый период (месяц, квартал, год); другими словами, это цена денежной ссуды, определяемая отношением суммы денег, выплачиваемых в единицу времени в качестве оплаты за ссуду, к величине ссуды.

Дело в том, что для капитализма характерно наличие циклов. Рост рыночной экономики, в среднем продолжающийся 10 лет, сменяется резким спадом, который, в свою очередь, где-то через год (в среднем) опять переходит в рост. Функционирование экономики по законам рыночных отношений эффективно только в случае нормальной работы рынка, где есть стимул для дальнейшего роста экономики. При кризисе же экономика регулируется не рыночными, а административными методами (как, например, во время Великой депрессии в США в 1929-1933 годах)[33].

Таким образом, рыночная экономика — это не всегда хорошо. В период экономического роста рыночные отношения, конечно же, лучше, чем социалистические. Но только с экономической точки зрения. С социальной точки зрения рыночные отношения всегда хуже, чем социалистические, т.к. при последних народ в целом хоть и живёт хуже, однако всё же не так бедно, как некоторые слои общества в странах, где господствуют именно рыночные отношения. Кстати говоря, основная идея К. Маркса была сделать труд свободным, по потребности рабочего, а не по экономическому принуждению. И он приходит к выводу, что при капитализме, где каждый сам за себя, это сделать невозможно, т.к. работать многим приходится просто для того, чтобы выжить. Однако, как показала история, эта идея была утопической в том смысле, что этот великий философ слишком хорошо думал о людях.

Итак, финансовые рынки — это порождение капиталистической системы. Они нужны там, где много собственников, которые взаимодействуют между собой. Для этого им требуются специализированные посредники (банки, страховые компании, инвестиционные компании, биржи), которые, в свою очередь, и создают финансовые рынки.

Определение 8.1. Финансовый рынок (financial market), или **рынок ценных бумаг** (security market) — это механизм содействия обмену финансовыми активами[34] путём сведения вместе покупателей и продавцов ценных бумаг.

Определение 8.2. Финансовый институт (financial institution), или **финансовый посредник** (financial intermediary) — это организация, выпускающая финансовые обязательства (т.е. требования к себе) и продающая их в качестве активов за деньги; на полученные таким образом средства приобретаются финансовые активы других компаний. Другими словами, финансовый посредник — это организация, выпускающая финансовые обязательства и использующая поступления от их продажи для приобретения финансовых активов, выпускаемых в обращение физическими лицами, товариществами, корпорациями, государственными учреждениями, а также другими финансовыми посредниками.

Финансовые посредники в рыночной экономике необходимы. Это связано с тем, что различные экономические агенты имеют разные цели, горизонты планирования и доступ к рынку. Рассмотрим следующий классический пример, принадлежащий Хиксу[35], о длин-

[33]Что касается сегодняшнего мирового кризиса, то, по-видимому, у Китая есть некоторое преимущество по сравнению с другими странами, потому что там официально социализм и у них административный ресурс куда больше, чем у капиталистических стран, в том числе у Америки.

[34]Финансовый актив (financial asset), или ценная бумага (security) — это официальное подтверждение права на получение будущих прибылей при соблюдении оговариваемых условий; другими словами, это законодательно признанное свидетельство права на получение ожидаемых в будущем доходов при конкретных условиях. Заметим, что в наше время ценная бумага — это не некая бумага, имеющая официальный характер, а просто электронная запись в депозитарии. Депозитарий (depository) — профессиональный участник рынка ценных бумаг, осуществляющий услуги по хранению сертификатов ценных бумаг и/или учету и переходу прав собственности на ценные бумаги.

[35]Хикс, Джон Ричард (Sir John Richard Hicks, 1904-1989) — английский экономист-кейнсианец; внес большой вклад в теорию общего равновесия, теорию стоимости, теорию процента, теорию торгового цикла; лауреат Нобелевской премии 1972 г.

ных[36] и коротких[37] деньгах. Если говорить о профицитной (нормальной, находящейся на подъёме) рыночной экономики, то обычно профицитным[38] сектором является сектор домохозяйства, где происходит накопление средств (часть дохода откладывается, сберегается, инвестируется), а в качестве дефицитного сектора можно рассматривать промышленный сектор. Домохозяйства обычно заинтересованы в коротких вложениях, поскольку они не склонны давать деньги на длительный период времени, например, на тридцать лет. Что же касается промышленного сектора, то он обычно испытывает дефицит наличных средств и заинтересован в длинных срока вложения, так как там оборотный капитал возвращается далеко не сразу, время его оборота напрямую зависит от цикла производства и может быть равным нескольким годам. Использование в такой ситуации коммерческих банков как посредников связано с проблемами с ликвидностью[39]. Финансовый посредник аккумулирует короткие средства населения в виде депозитов[40] и выдаёт их в виде долгосрочных кредитов промышленным предприятиям (беря на себя определённые риски, связанные с невозвратом кредита). Таким образом, финансовый рынок выступает основным посредником между инвесторами и организациями, выпускающими ценные бумаги.

Виды финансовых посредников:

1. **Коммерческий банк**, о котором речь шла в примере, занимается привлечением средств в виде депозитов и выдачи их в виде долгосрочных или краткосрочных кредитов. Процентные ставки по выданным кредитам выше процентных ставок по вкладам. Разница между этими показателями является банковской прибылью — маржой[41].

2. **Инвестиционная компания** (инвестиционный банк, investment company) — разновидность финансового посредника, который получает деньги от инвестора и использует их для покупки финансовых активов; взамен инвесторы получают доли в инвестиционной компании и, таким образом, косвенно владеют долей финансовых активов, которые принадлежат самой инвестиционной компании. Например, инвестиционная компания может заниматься размещением облигаций какой-нибудь другой компании, которая их выпускает. Также инвестиционная компания может заниматься финансированием предприятий. Заметим, что для того чтобы хорошо разместить облигации, надо быть участником рынка облигаций, поэтому инвестиционная компания активно работает на финансовых рынках, в частности, с акциями, облигациями, а также со всевозможными производными финансовыми инструментами (о них речь пойдёт ниже) и структурированными продуктами[42].

[36]Длинные деньги — долгосрочные инвестиции и кредиты, характерные для стабильной экономики, находящиеся на подъёме.

[37]Короткие деньги — краткосрочные кредиты и инвестиции, характеризующие инфляционную экономику.

[38]Профицит — положительное сальдо бюджета. Профицит бюджета — превышение доходов бюджета над его расходами.

[39]Ликвидность (liquidity, или marketability) — способность держателя акции продать её по цене, близкой к цене предыдущей покупки этой акции при условии, что не появилось новой существенной информации со времени предыдущей покупки; другими словами, возможность продать актив быстро и не делая существенной уступки в цене.

[40]Депозит (лат. depositum — вещь, отданная на хранение) — вклад в банк, денежные средства, временно хранящиеся в банке и принадлежащие другим учреждениям и лицам; ценные бумаги, передаваемые на хранение в кредитные учреждения.

[41]Ма́ржа (англ. margin от фр. marge — поле страницы, край) — термин, использующийся для обозначения разницы между какими-либо показателями (ценами товаров, курсами ценных бумаг, процентными ставками и т.д.).

[42]Примером структурированного продукта является облигации с вложенными обусловленными обязательствами типа опционов.

Заметим, что чаще всего банки не бывают чисто коммерческими или чисто инвестиционными.

3. **Страховая компания** (insurance company) — организация, оказывающая страховые услуги, выступающая в роли страховщика, т.е. принимающая на себя обязанность возместить страхователю ущерб при наступлении страхового случая. Существуют различные виды страхования: жизни (очень популярно в Америке), здоровья, имущества, ответственности и т.д. Услугами страховых компаний активно пользуются как предприниматели, так и частные лица. Страхование — незаменимая вещь в ситуации, когда какое-нибудь маловероятное событие может иметь крайне неприятные последствия (например, пожар на фабрике может перечеркнуть весь бизнес). Можно, конечно, брать на себя некоторые риски, но объективно лучше застраховаться от форс-мажорных обстоятельств, особенно если на карту поставлено очень многое. Самый популярный вид страхования среди частных лиц — это автострахование[43]. Кроме страхования существует ещё понятие и перестрахования[44]. Когда возможные суммы ущерба настолько велики, что одна компания не вынесет такого удара при наступлении страхового случая, страховая компания передает часть рисков перестраховочным компаниям (reinsurance company).

4. **Биржа** (от лат. bursa — кошелёк, англ. exchange) — организованный центр торговли. Различают фондовую биржу, на которой осуществляется купля-продажа ценных бумаг, валютную биржу, товарную биржу и т.д.

Заметим, что в Америке с точки зрения привлечения средств населения конкурируют между собой страховые полюсы, паевые фонды[45] и банковские депозиты. Причём они, как правило, пользуются примерно одинаковой популярностью у населения.

Финансовые инструменты.

Финансовые инструменты — это разнообразные виды рыночного продукта финансовой природы: ценные бумаги, денежные обязательства, валюта, фьючерсы, опционы и др. Рассмотрим основные типы ценных бумаг — акции и облигации.

Акция.

Определение 8.3. Акция (от лат. actio — документ, англ. stock) — ценная бумага, удостоверяющая участие её владельца (держателя акции, акционера) в формировании средств акционерного общества и дающая право на получение соответствующей доли его прибыли (дивиденда).

Акции выпускаются акционерным обществом для продажи с целью привлечения денежных средств.

[43] В России страхование автогражданской ответственности (ОСАГО) является обязательным, а страхование своего автомобиля от рисков хищения и ущерба (КАСКО)— добровольным.

[44] Перестрахование (reinsurance) — операция между двумя страховыми компаниями, при которой одна из них (цедент) передаёт от своего имени за определённую плату часть риска по договору, заключённому со страхователем, другой компании (перестраховщику). Перестраховщик обязуется при возникновении страхового случая оплатить принятую на себя часть риска. В свою очередь перестраховщик может передать часть риска в перестрахование следующему страховому обществу. Таким образом, перестрахование позволяет избежать больших рисков, разделяя их между двумя (или несколькими) страховщиками, что содействует сбалансированности страхового портфеля каждого из них.

[45] Паевой фонд — это совокупность взносов (паев) членов производственного кооператива для совместной предпринимательской деятельности. Паевые фонды привлекательны во время роста экономики.

Определение 8.4. Акционерное общество (joint-stock company) — предприятие или организация, уставный капитал которого разделён на определённое число акций, распределённых между акционерами.

Высшим органом акционерного общества является общее собрание акционеров. Между общими собраниями управление осуществляют директор или совет директоров, избираемые на общем собрании. Средства акционерного общества могут складываться от продажи акций, накопленной прибыли, за счёт банковских кредитов, выпуска облигаций. Для учреждения акционерного общества необходимо заключить нотариально заверенный договор, именуемый уставом. Акционеры не отвечают по обязательствам акционерного общества и несут риск убытков, связанных с деятельностью общества, в пределах стоимости принадлежащих им акций.

Различают закрытое акционерное общество (ЗАО) и открытое акционерное общество (ОАО). Акции ЗАО могут переходить от одного лица в собственность другого только с согласия большинства акционеров (если иное не указано в уставе) и не продаются свободно на рынке. Акции ЗАО распределяются, как правило, среди заранее определённого круга лиц, в первую очередь — учредителей. Число держателей акций одного ЗАО, как правило, ограничено законодательством. Акции ОАО свободно продаются на фондовом рынке, их отчуждение происходит без согласия других акционеров. Таким образом, часть собственности ОАО выплёскивается на рынок. Размещение акций на фондовом рынке — одно из возможных решений проблемы привлечения средств, т.к. ОАО обязано быть публичным, открытым, с прозрачной финансовой отчётностью. Денежная сумма, обозначенная на акции, называется её номинальной стоимостью, а цена, по которой она продаётся на рынке — её курсом. Курс акции может резко отличаться от номинальной её стоимости и зависит от хозяйственного положения предприятия (акционерного общества), умелой рекламы и биржевой игры. По курсу акций можно сказать, как идут дела у компании (например, если стоимость акции существенно уменьшилась, то в компании, скорее всего проблемы), и на основании этой информации сделать выбор о покупке или продажи акций этого предприятия. Заметим однако, что речь идёт поведении курса акций в среднем (т.е. о тренде). Известный американский финансист XIX века Дж. П. Морган[46] на вопрос о том, что будет происходить с рынком, ответил, что он (т.е. рынок) будет колебаться. Действительно, сегодня атмосфера на финансовых рынках очень нервная, и курсы постоянно колеблются.

Акции бывают обыкновенные и привилегированные. Обыкновенная, или простая акция (common stock) — это законодательно признанное свидетельство собственности (или владения) на часть имущества корпорации. Привилегированная акция (preferred stock, preference share) — это гибридная форма ценной бумаги, совмещающая характеристики обыкновенной акции и облигации. Доход по простым акциям колеблется в зависимости от прибыли предприятия, т.е. простая акция дивидендов не гарантирует. Привилегированные акции дают право получения дохода в виде твёрдого, заранее определённого процента, т.е. размер дивидендов по привилегированной акции фиксирован, заранее оговорён и составляет определённый процент от номинальной стоимости. Размер дивидендов для держателей простых акций определяется ежегодно общим собранием акционеров по итогам хозяйственной деятельности предприятия за год. Из той части прибыли общества (предприятия), которая распределяется между акционерами, в первую очередь отчисляется сумма, подлежащая уплате по привилегированным акциям, а затем уже оставшаяся часть распределяется между владельцами простых акций. Однако привилегированные акции не дают их держателям право голоса при решении дел акционерного общества (если иное не предусмотрено уставом). Этим правом пользуются лишь владельцы простых

[46]Морган, Джон Пьерпонт (John Pierpont Morgan, 1837-1913) — американский финансист и организатор промышленности, один из самых известных финансовых фигур двух десятилетий перед Первой мировой войной.

акций. Распределение прибыли между ними производится пропорционально вложенному капиталу, в зависимости от количества купленных акций. Владелец акции может продать её на фондовой бирже по цене, складывающейся на рынке ценных бумаг. Продажа акции является продажей права на получение дохода.

Облигация.

Определение 8.5. Облигация (от лат. obligatio — обязательство, англ. obligation) — ценная бумага, выпускаемая предприятиями или государством как долговое обязательство.

Облигация подтверждает, что её владелец внес денежные средства на приобретение ценной бумаги и тем самым вправе предъявить её затем к оплате как долговое обязательство, которое эмитент (организация, выпустившая облигацию; от лат. emrttens — выпускающий) обязан возместить по указанной на ней номинальной стоимости. Такое возмещение называется погашением. Облигация отличается от акции тем, что её владелец не является членом акционерного общества и не имеет права голоса. Кроме выкупа в течение заранее обусловленного при выпуске облигации срока, эмитент, как правило, обязан выплачивать её обладателю фиксированный процент (купонную[47] ставку, т.е. процентную ставку по купону) от номинальной стоимости облигации. Как и акции, облигации выпускаются с целью привлечения денежных средств, но, в отличие от акций, они представляют собой форму *кредитования* их эмитентов лицами, купившими облигации, т.е. облигации — это ценные бумаги, фиксирующие долговые отношения. Таким образом, держатели облигаций имеют имущественное перед акционерами право на распределяемую прибыль и активы эмитента при его ликвидации. Заметим также, что облигации могут свободно продаваться и покупаться на рынке, т.е. *кредитор эмитента может легко меняться*.

Виды облигаций по типу доходов:

- дисконтная облигация (pure-discount bond, или zero coupon bond) — бескупонная облигация, по которой выплата производится только один раз; доходом по ней является дисконт (discount — скидка) — разница между ценой размещения (выпуска) облигации и номинальной стоимостью (ценой погашения); таким образом, дисконтная облигация продается по цене ниже номинала, причём чем ближе дата погашения облигации, тем выше рыночная цена облигации;

- облигация с фиксированной процентной ставкой (fixed rate bond) — купонная облигация, доход по которой выплачивается по купонам с фиксированной процентной ставкой;

- облигация с плавающей процентной ставкой (floating rate note) — купонная облигация с переменным купоном, размер которого привязывается к некоторым макроэкономическим показателям (к доходности государственных ценных бумаг, к ставкам межбанковских кредитов и т.п.).

Виды облигаций по срочности:

- краткосрочная облигация (note) — дисконтная облигация со сроком погашения до 1 года;

[47] Название "купонная" исторически восходит к традиции выпуска документарных облигаций, обязательство эмитента которых закреплялось в сертификате облигации. Если облигация предусматривала несколько периодов выплаты процентных доходов, купоны, соответствующие каждой выплате, печатались непосредственно на сертификате облигации. По наступлению срока выплаты очередного процентного дохода и предъявлению облигации, обязанное по облигации лицо отрезало от сертификата соответствующий купон (отсюда фраза "стричь купоны"; couper (фр.) — резать, стричь; купон — то, что отрезают) и производило выплату дохода.

- среднесрочная облигация — облигация со сроком погашения от 1 года до 10 лет;
- долгосрочная облигация (bond) — облигация со сроком погашения, превышающим 10 лет; как правило, долгосрочные облигации являются купонными;
- пожизненный аннуитет — аннуитет[48], выплаты по которому прекращаются со смертью владельца.

Управление рисками и производные финансовые инструменты.

Дать строгое определение производных финансовых инструментов (деривативов) очень сложно, т.к. постоянно появляются новые производные финансовые инструменты, которые диктуются постоянно меняющимся и развивающимся финансовым рынком и не укладывающиеся в ранее данные определения этого понятия. Однако у производных финансовых инструментов есть одна общая черта. Абсолютно все производные финансовые инструменты обладают возможностью их использования для целей управления рисками. Собственно, производные финансовые инструменты и создаются именно с этими целями. О том, какие именно риски здесь имеются в виду, будет сказано немного позже.

Другое дело, что эти же самые производные финансовые инструменты могут быть использованы не только в целях управления рисками. Например, популярно использование производных финансовых инструментов с целью управления финансовыми рычагами[49] (создания, увеличения левериджа).

Регулирование финансовых институтов.

Можно сказать, что производные финансовые инструменты подобны бритве: ей можно побриться, а можно зарезать. Также и в экономике: использование производных финансовых инструментов может иметь не только благоприятные последствия, но и, наоборот, создавать повышенные риски. Поэтому за финансовыми институтами следует следить, что в первую очередь нужно не только для "честности" рынка, но и для того, чтобы защитить мелких инвесторов (банковских вкладчиков, людей, покупающих паи у паевых фондов или страховку у страховых компаний), которые, в отличие от профессиональных участников рынка, не всегда осознают уровень риска и не имеют полного доступа к соответствующей информации. Кроме того, финансовые институты, если им позволить делать что угодно, склонны злоупотреблять деньгами населения. Поясним это на примере. Рассмотрим модель, где нет финансовых посредников, а есть только производитель и домашние хозяйства. Представим себе ситуацию, когда производитель приходит к домашним хозяйствам за деньгами для свинофермы. Естественно, он начинает описывать все достоинства такого вложения, расписывая преимущества будущей фермы. Пусть наш производитель настолько хорошо разрекламировал будущую ферму, что народ не выдержал и дал ему денег на строительство. Прошёл год, два года... А фермы как не было, так и нет. Зато наш производитель, собравший с народа побольше денег, уже ездит на крутой машине, имеет особняк, а на вопрос о том, а где же обещанная ферма, отвечает, что, мол, так получилось, что делать, все свинки уже давно вымерли. Знакомая ситуация, правда? Так вот чтобы таким производителям не сходило такое безобразие с рук, и нужны регулирующие органы, надзирающие за финансовыми институтами.

Регулирование обычно осуществляется государственными органами. Перечислим основные направления с сфере регулирования финансовых институтов.

---

[48]Аннуитет (от лат. annuitas — ежегодный платёж, англ. annuity) — равные друг другу денежные платежи, выплачиваемые через определённые промежутки времени в счет погашения полученного кредита и процентов по нему.

[49]Финансовый рычаг (financial leverage) — воздействие на уровень прибыли за счёт собственного и заёмного финансирования; рассчитывается как отношение общей задолженности предприятия к общей сумме собственного капитала.

1. Надзор в банковской сфере (иначе банки будут вести неправильную политику, что может привести к невыполнению их обязательств перед вкладчиками): есть определённые общие требования, нормативы, введённые международным Базельским комитетом по банковскому надзору при Банке международных расчётов (the Basel Committee on Banking Supervision (BCBS) of the Bank for International Settlements (BIS), штаб-квартира в городе Базеле), одна из которых — достаточность капитала банка. Сейчас действует Basel 2 (документ BCBS), регулирующий качество управления рисками в банковском деле.

2. Надзор за инвестиционными компаниями. Основное внимание здесь уделяется высокорискованным операциям, связанным с созданием левериджа, т.е. ведётся строгий контроль за биржевой торговлей производных финансовых инструментов, за требованиями на уровень депозитной маржи[50], за маржинальной торговлей (её ещё называют торговлей "с плечом") с целью ограничить уровень левериджа для снижения рисков клиентов и посредников.

   Маржинальная торговля (margin trading) — это проведение спекулятивных торговых операций с помощью займа, предоставленного посредником (компанией-брокером) под некоторый залог (маржу). В качестве заёма могут выступать такие активы, как валюта, ценные бумаги и товары. От простого кредита маржинальный отличается тем, что получаемый займ обычно в несколько раз превышает размер маржи. Это позволяет торговцу (инвестору) увеличить объёмы операций при тех же капиталах. Однако предполагается, что после проведения всех сделок полученный займ будет возвращён брокеру. Таким образом, маржинальная торговля предполагает парные операции: продажа не принадлежащего инвестору актива и его последующая покупка. В этой игре, основанной на меняющихся ценах на актив (изменении курса валют, ценных бумаг), и заключается спекулятивный характер маржинальной торговли. Этот механизм обеспечивает техническую возможность получать прибыль при падении цен. В частности, маржинальная торговля даёт возможность торговать валютой, не прибегая к реальному обмену валют, т.к. торговые операции совершаются без привлечения реального актива. В этом случае суть маржинальной торговли заключается в валютном арбитраже с целью получения разницы по курсам.

   Ситуация, когда товар, валюта или ценная бумага была продана и требуется покрыть продажу соответствующей покупкой, называется короткой (открытой) позицией (продажей). То есть получается, что короткая продажа — это продажа инвестором не принадлежащего ему актива. Такая "странная" ситуация возможна благодаря договору о маржинальной торговли. Ситуация, когда продажа товаров, валюты или ценных бумаг должна сопровождаться соответствующей покупкой, называется длинной позицией. Открытие коротких позиций ведёт с увеличению левериджа. Поэтому брокер внимательно следит за открытыми позициями и контролирует размер возможного убытка. Если доля собственных средств инвестора в портфеле падает до критического уровня[51] (например, половина маржи), то брокер может обратиться к торговцу с предложением передать в залог дополнительные средства. Это обращение называют депозитным требованием, или маржин-коллом[52]. Если средства не поступят, а убыток продолжит нарастать, брокер от своего имени принудительно

[50]Депозитная маржа — сумма денежных средств, внесённых банками-участниками и обслуживаемыми ими профессиональными участниками для обеспечения исполнения своих обязательств.

[51]Минимальное отношение величины собственных средств инвестора к полной стоимости покупки актива, выраженное в процентах, известно как исходный требуемый уровень маржи (initial margin requirement).

[52]Margin call (дословный перевод с англ. — требование о марже) — требование брокерской фирмы к инвестору по увеличению средств на маржинальном счёте; предъявляется в случае, если сумма на маржинальном счёте инвестора оказалась ниже требуемой маржи. Маржинальный счёт (margin account)

закроет позицию, т.е. купит соответствующий актив, иначе могут пострадать другие его клиенты. Таким образом, короткая позиция — это сильно временная вещь, её надо достаточно быстро закрывать.

В результате закрытия позиции формируется результат в размере разницы между ценой продажи и ценой покупки, а также высвобождается залоговая маржа. При этом инвестор не несёт никаких дополнительных финансовых обязательств перед брокером за полученный кредит, кроме предоставления маржи, т.е. брокер не может предъявить требования о предоставлении дополнительных средств на том основании, что позиция была закрыта с убытком, который превысил размер предоставленного залога. Таким образом, риск дополнительных убытков лежит на брокере. В этом принципиальное отличие маржинальной торговли от торговли с использованием обычного кредита.

Маржинальный принцип широко распространён в биржевой торговле, в частности на валютном и фондовом рынках. На товарных рынках он используется редко.

Аналогично Базельскому комитету, существует международная комиссия, которая формирует некоторые общие принципы в сфере надзора за инвестиционными компаниями. Она называется International Organization of Securities Commissions (IOSCO), её штаб-квартира находится в Испании (Мадриде). Российский аналог этой комиссии — Федеральная служба по финансовым рынкам (ФСФР России) (раньше — Федеральная комиссия по рынку ценных бумаг, ФКЦБ России).

3. Надзор за страховыми компаниями, осуществляемый в нашей стране Федеральной службой страхового надзора (ФССН), контролирующей возможность выплаты страховой компанией по страховке при наступлении страхового случая. На территории Европейского Союза сейчас действует документ Solvency 2, который можно назвать Basel for insurers.

Риски.

Финансовый риск-менеджмент[53] в том виде, в котором он существует сейчас, появился относительно недавно, в 80-90-е годы XX века. До этого компании, уделяющие внимание риск-менеджменту, были скорее исключением, чем правилом. Одной из основных причин для появления риск-менеджмента в его современном виде было изменение менталитета, что прежде всего касается коммерческих и инвестиционных банков. До 80-х годов банки, занимающиеся кредитованием, так или иначе всё равно должны были оценивать риски, связанные с невозвратом кредита, просто раньше эта область не рассматривалась как отдельное направление.

Согласно классической классификации, риски бывают рыночные (market risk) и кредитные (credit risk). Это риски экономического характера (good risk), т.к. они являются благом (с точки зрения экономической теории): принимая на себя повышенные рыночные или кредитные риски, потенциально можно заработать больше, чем не рискуя, т.е. можно рассчитывать на возможное увеличение прибыли. Другими словами, good risks — это риски, позволяющие зарабатывать. Говоря про "хорошие" риски, мы имеем в виду риски, относящиеся к некоторому портфелю. Под **портфелем** будем понимать совокупность позиций (длинных или коротких) по отношению к всевозможным финансовым инструментам (акциям, облигациям, производным финансовым инструментам). После форми-

— это счёт инвестора в брокерской фирме, посредством которого осуществляется приобретение акций в счёт брокерского кредита либо продажа акций, заимствованных у брокера.

[53]Риск-менеджмент (управление рисками, risk management) — процесс выявления и оценки рисков, а также выбор методов и инструментов управления для минимизации риска.

рования портфеля естественно задаться вопросом о том, что будет с этим портфелем в будущем, какие риски он несёт.

Часто можно услышать такую фразу: “давайте минимизировать риски”. Если понимать её буквально, то рисковать вообще не стоит, а вместо этого следует свернуть весь бизнес. Поэтому стоит уточнить, что имеется в виду условная минимизация рисков (при условии максимизации прибыли). Эта задача и стоит перед риск-менеджерами.

Рыночные риски.

Те инструменты, которые присутствуют в портфеле, могут быть прямо или косвенно представлены на рынке. Если это так, то можно прямым или косвенным образом измерять их рыночную стоимость, а значит, и стоимость портфеля как соответствующую сумму. Это, вообще говоря, сильно упрощённый подход, так как при подсчёте стоимости портфеля надо учитывать ликвидность рынка.

В зависимости от ситуации на рынке меняется рыночная стоимость финансовых инструментов и стоимость портфеля[54]. Под ситуацией на рынке подразумевается не только ценовая информация, но и волатильность[55] (непостоянство, изменчивость, степень колебания, англ. volatility) и ликвидность[56] рынка.

Таким образом, можно дать следующее определение рыночных рисков:

Определение 8.6. Рыночный риск — это возможность понесения прямых или косвенных убытков по портфелю вследствие изменения ситуации на рынке в будущем.

При измерении рыночных рисков фиксируется некоторая дата в будущем, относительно которой и ведётся расчёт. Другими словами, риски всегда считаются на определённую дату в будущем. С точки зрения возможностей измерения рыночных рисков, разумно брать небольшой горизонт прогнозирования[57], т.е. не более двух недель (в крайнем случае, месяц). Это связано с динамической и статической неустойчивостью рассматриваемых моделей. Ещё один важный момент: нас интересует стоимость не реального портфеля, а гипотетического, т.е. расчёт производиться исходя из того, что портфель “заморожен” в настоящий момент и его структура не меняется вплоть до выбранной даты в будущем. На самом же деле позиции в портфеле будут постоянно меняться, кто-то будет покупать, кто-то продавать, и поэтому рассматриваемый “замороженный” портфель является лишь гипотетическим (если речь идет о торговом портфеле).

Рыночные риски подразделяются по виду рынков, на которых они возникают:

- валютный риск (currency risk) — опасность валютных (курсовых) потерь, связанных с изменением курса валюты;

- фондовый риск (equity risk) — риск убытков вследствие неблагоприятного изменения рыночных цен на ценные бумаги;

- товарный риск (commodity risk) — вероятность возникновения у банка потерь от изменения цен на товары (драгоценные металлы, энергоносители и т.д.);

- процентный риск (interest rate risk) — риск, связанный с изменением процентных ставок.

[54] Вопрос о том, в чём измеряется стоимость портфеля, не такой простой, как кажется на первый взгляд. Обычно её измеряют в денежных единицах. Но сразу же встаёт вопрос, какие именно денежные единицы брать.

[55] Измерять волатильность можно многими разными способами, в зависимости от модели рынка.

[56] Ликвидность очень сложно поддаётся анализу, т.к. её очень тяжело “вставить” в модель. Поэтому чаще всего на неё просто “закрывают глаза” (что на практике может привести к печальным последствиям).

[57] Разумный прогноз погоды также можно сделать не более, чем на несколько дней. И связано это с теми же причинами, что и в случае прогнозирования рисков.

Говоря о рыночных рисках, часто употребляют слово exposure, что в переводе с английского означает “экспозиция”. В финансовом контексте экспозиция к риску означает *непосредственную* подверженность этому риску[58]. Если есть лишь косвенная подверженность данному риску, то лучше говорить о факторах риска. Например, если портфель состоит из акций, то нет экспозиции к товарным рискам. Другой пример: открытые валютные позиции означают экспозицию к валютным рискам, но, например, изменение стоимости нефти может являться лишь фактором риска.

Кредитные риски.

[58]Наиболее близок по смыслу этот перевод термина exposure к тому, как понимают экспозицию в фотографии: экспозиция — это чувствительность фотоаппарата к свету, т.е. количество освещения, получаемое светочувствительным материалом при фото- и киносъемке.