Каморин М.,гр.515

1. Задание 1

Опцион look-back call. Обозначим

$$M_t = \min_{s=\overline{0,t}} X_s \tag{1.1}$$

При $t = T$

$$V_T^*(\cdot) = v_t(X_t, M_t), \tag{1.2}$$

при $t < T$

$$V_{t-1}^* = \max_{Q:\, \sigma(Q)\subseteq[a,b],\, \int uQ(du)=1} V_t^*(\cdot, X_{t-1}u)Q_{\underline{X}_{t-1}}(du). \tag{1.3}$$

В силу выпуклости V_t^* распределение $Q_{\underline{X}_{t-1}}$ сосредоточено на концах отрезка:

$$Q_{\underline{X}_{t-1}} = \pi_t\delta_a + (1-\pi_t)\delta_b. \tag{1.4}$$

Тогда $\pi = \frac{b-1}{b-a}$ и функция цены имеет вид:

$$V_T^*(a,b) = v_T(X_T, M_T) = X_T - M_T, \tag{1.5}$$

$$V_{t-1}^*(a,b) = \pi v_t(aX_{t-1}, M_{t-1}\wedge aX_{t-1}) + (1-\pi)v_t(bX_{t-1}, M_{t-1}\wedge bX_{t-1}), t=\overline{1,T}. \tag{1.6}$$

Оптимальная хэджирующая стратегия равна

$$H_t^* = \frac{-v_t(aX_{t-1}, M_{t-1}\wedge aX_{t-1}) + v_t(bX_{t-1}, M_{t-1}\wedge bX_{t-1})}{(b-a)X_{t-1}} \tag{1.7}$$

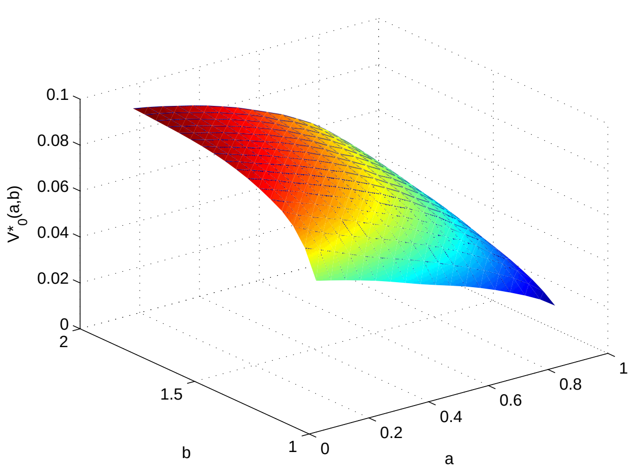

Рис. 1. $V_0^*(a,b)$ при значениях $T = 10$, $a \in [0.1, 0.9]$, $b \in [1.1, 1.9]$, $X_0 = 0.1$.

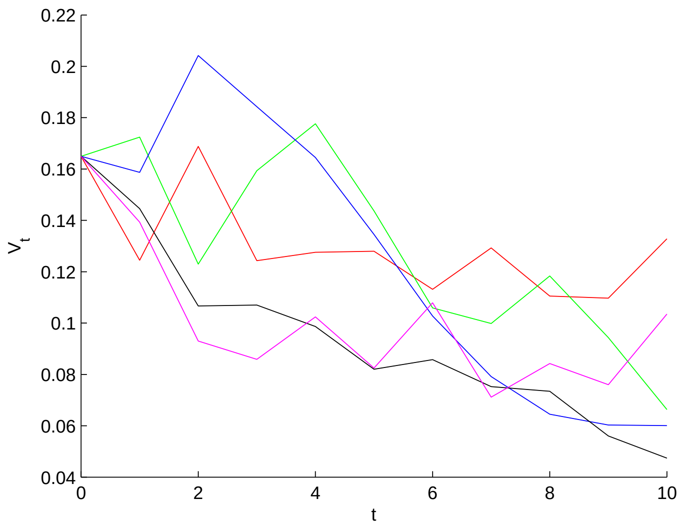

Рис. 2. Моделирование поведения V_t при значениях $T = 10$, $a = 0.6$, $b = 1.25$, $X_0 = 0.3$.

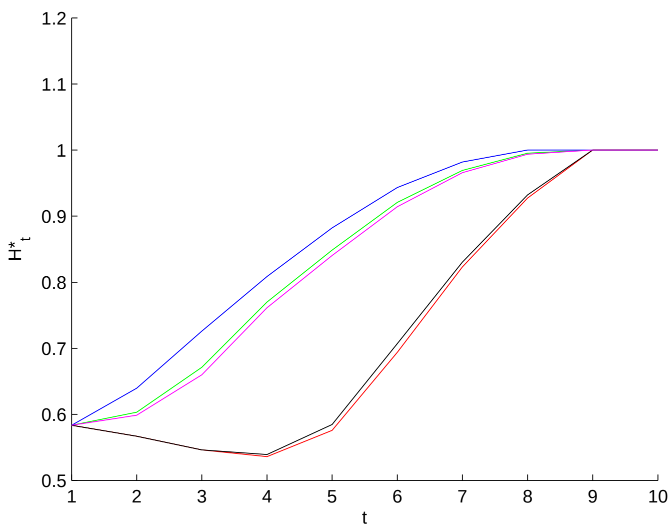

Рис. 3. Моделирование поведения H_t^* при значениях $T = 10$, $a = 0.6$, $b = 1.25$, $X_0 = 0.3$.

V_T	0.8792	2.1766	2.4940	0.9118	2.1123
$(X_t - M_t)^+$	0.8590	2.1718	2.4940	0.8988	2.1065

2. Задание 2

Опцион американский put. Оптимальный момент остановки определяется как

$$\tau^* = inf\left\{t : V_t^* = (K - X_t)^+\right\} \tag{2.1}$$

При $t = T$

$$V_T^*(\cdot) = v_t(X_t, M_t), \tag{2.2}$$

при $t < T$

$$V_{t-1}^* = (K - X_{t-1})^+ \vee \max_{Q\colon \sigma(Q)\subseteq[a,b],\, \int uQ(du)=1} V_t^*(\cdot, X_{t-1}u) Q_{\underline{X}_{t-1}}(du), \tag{2.3}$$

так как если $\tau = t-1$, то $V_{t-1}^* = (K_{t-1} - X_{t-1})^+$, иначе

$$V_{t-1}^* = \max_{Q\colon \sigma(Q)\subseteq[a,b],\, \int uQ(du)=1} V_t^*(\cdot, X_{t-1}u) Q_{\underline{X}_{t-1}}(du). \tag{2.4}$$

Аналогично первому заданию, мера сосредоточена в двух точках, и получим, что функция цены имеет вид:

$$V_T^*(a,b) = v_T(X_T, M_T) = (K - X_T)^+, \tag{2.5}$$

$$V_{t-1}^*(a,b) = (K - X_{t-1})^+ \vee \pi v_t(aX_{t-1}) + (1-\pi) v_t(bX_{t-1}), t = \overline{1,T}. \tag{2.6}$$

Оптимальная хэджирующая стратегия равна

$$H_t^* = \pi \frac{v_t(aX_{t-1}) - v_t(X_{t-1})}{(a-1)X_{t-1}} + (1-\pi)\frac{v_t(bX_{t-1}) - v_t(X_{t-1})}{(b-1)X_{t-1}} \tag{2.7}$$

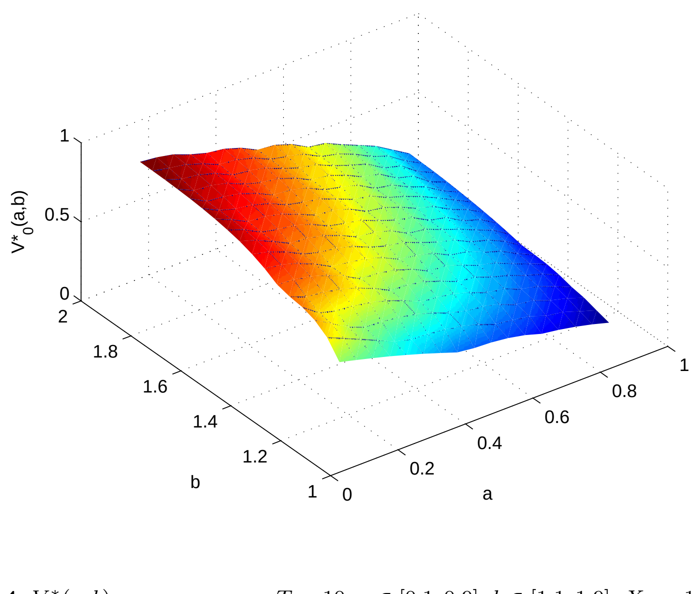

Рис. 4. $V_0^*(a,b)$ при значениях $T = 10$, $a \in [0.1, 0.9]$, $b \in [1.1, 1.9]$, $X_0 = 1$, $K = 1$.

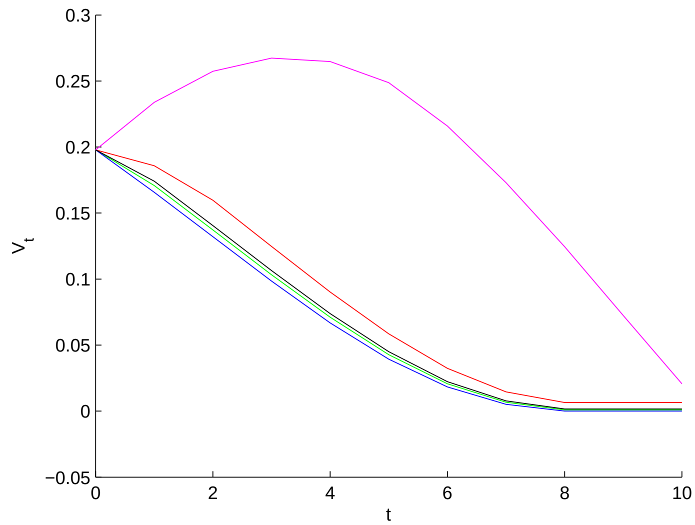

Рис. 5. Моделирование поведения V_t при значениях $T = 10$, $a = 0.6$, $b = 1.25$, $X_0 = 0.3$, $K = 0.4$.

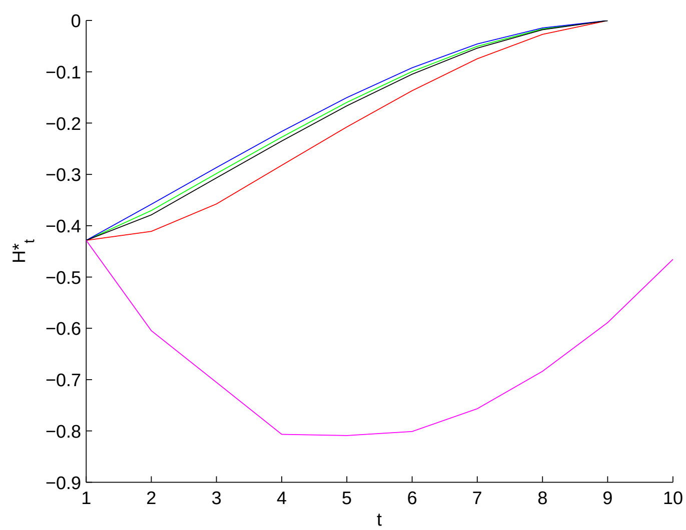

Рис. 6. Моделирование поведения H_t^* при значениях $T = 10$, $a = 0.6$, $b = 1.25$, $X_0 = 0.3$, $K = 0.4$.

V_T	0.0064	0.0010	0.0000	0.0016	0.0207
$(K - X_t)^+$	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0123

3. Задание 3

Опцион азиатский call. Обозначим

$$M_t = \frac{1}{t} \sum_{s=0}^{t} X_s \tag{3.1}$$

Вывод формул для функции цены и хэджирующей стратегии аналогичен выводу формул из задания 1, получим, что функция цены имеет вид:

$$V_T^*(a,b) = v_T(X_T, M_T) = (X_T - M_T)^+, \tag{3.2}$$

$$V_{t-1}^*(a,b) = \pi v_t\left(aX_{t-1}, \frac{t-1}{t}M_{t-1} + \frac{a}{t}X_{t-1}\right) + (1-\pi)v_t\left(bX_{t-1}, \frac{t-1}{t}M_{t-1} + \frac{b}{t}X_{t-1}\right), t = \overline{1,T}. \tag{3.3}$$

Оптимальная хэджирующая стратегия равна

$$H_t^* = \frac{-v_t\left(aX_{t-1}, \frac{t-1}{t}M_{t-1} + \frac{a}{t}X_{t-1}\right) + v_t\left(bX_{t-1}, \frac{t-1}{t}M_{t-1} + \frac{b}{t}X_{t-1}\right)}{(b-a)X_{t-1}} \tag{3.4}$$

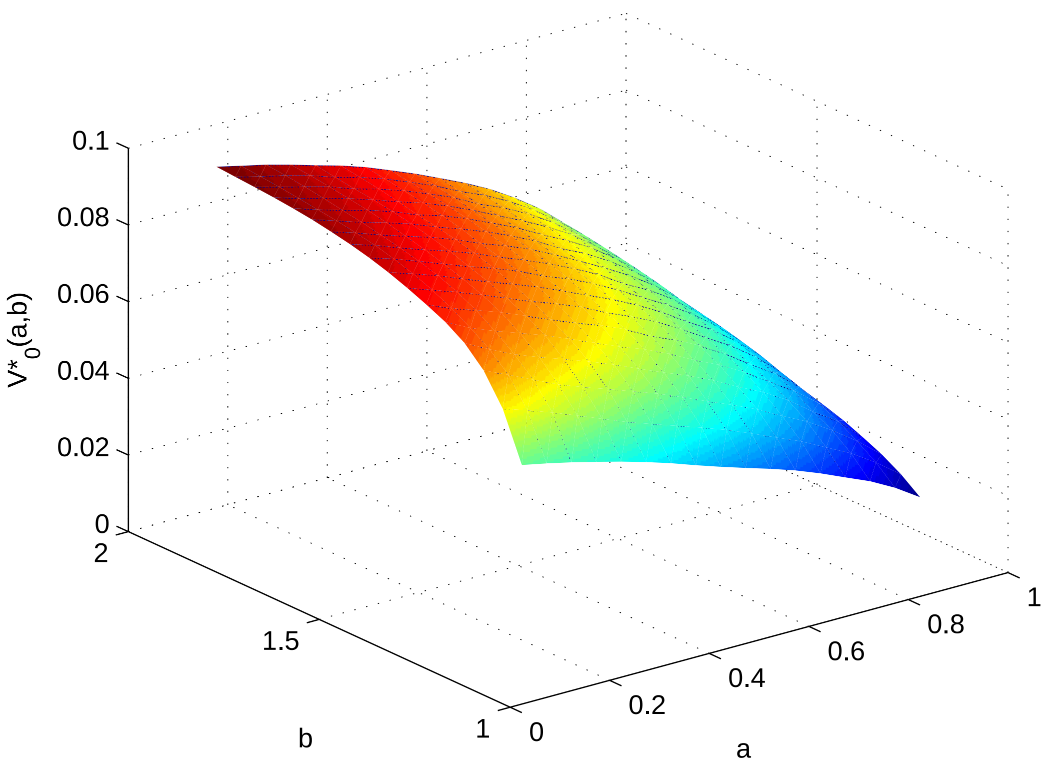

Рис. 7. $V_0^*(a,b)$ при значениях $T = 10$, $a \in [0.1, 0.9]$, $b \in [1.1, 1.9]$, $X_0 = 0.1$.

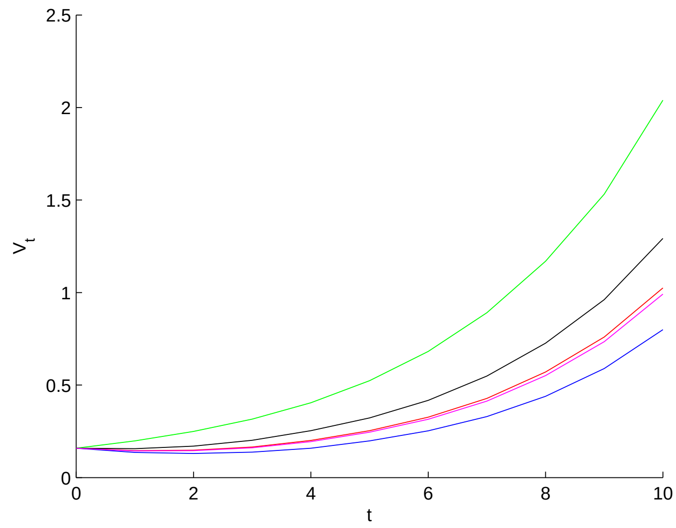

Рис. 8. Моделирование поведения V_t при значениях $T = 10$, $a = 0.6$, $b = 1.25$, $X_0 = 0.3$.

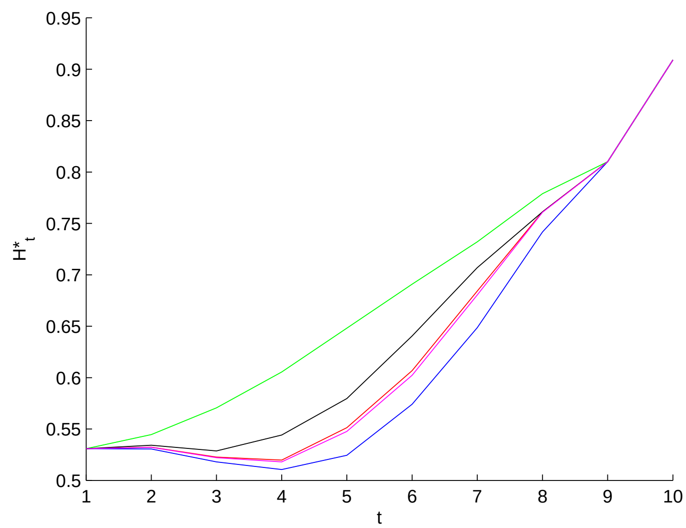

Рис. 9. Моделирование поведения H_t^* при значениях $T = 10$, $a = 0.6$, $b = 1.25$, $X_0 = 0.3$.

V_T	1.0246	2.0396	0.7990	1.2923	0.9916
$(X_t - M_t)^+$	1.0173	2.0294	0.7889	1.2853	0.9809