1 Динамика.

Рассматривается мультипликативная постановка:

$$X_{t+1} = X_t \xi_{t+1}, \xi_t \in [a, b], a < 1 < b.$$

$$\xi_t = \rho \xi_{t-1} + \eta_t, \eta_t - \text{н.о.р.с.в}$$

$$E\eta = 1, |\rho| < 1, \eta_t \in [c, d]$$

В начальный момент нам известно X_0. Считаем, что $\xi_0 \in [a, b]$. Решается задача хэджирования для опционов трех видов.

1.1 Задание 1. Опцион Look-Back (call).

Функция выплат имеет вид:

$$\zeta = (X_T - \wedge_{s=0}^{T} X_s)_+$$

На семинарах вывели формулы для функции Беллмана и оптимальной хэджирующей стратегии:

$$\begin{cases} V_T^* = \zeta \\ V_{t-1}^* = \pi V_t^*(aX_{t-1}, M_{t-1} \wedge aX_{t-1}) + (1-\pi) V_t^*(bX_{t-1}, M_{t-1} \wedge bX_{t-1}) \end{cases}$$

$$H_t^* = \frac{V_t^*(bX_{t-1}, M_{t-1} \wedge bX_{t-1}) - V_t^*(aX_{t-1}, M_{t-1} \wedge aX_{t-1})}{X_{t-1}(b-a)}$$

где $\pi = \dfrac{b-1}{b-a}$, а $M_t = \wedge_{s=0}^{t} X_s$.

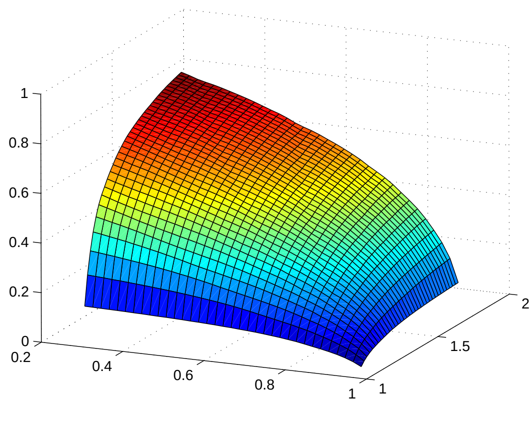

Рис.1. Зависимость $V_0^*(a, b)$.

Цена опциона зависит от базового актива. На Рис.1 приведен график зависимости цены опциона Look-Back call от величины интервала, в котором изменяется ξ_t – приращение цены базового актива.

Как видно, чем больше интервал $[a, b]$, тем большую цену имеет опцион. Чем больше шире $[a, b]$, тем больше неопределенность, а следовательно продавец опциона берет на себя большие риски. А так как за риск надо платить, то цена опциона увеличивается по мере увеличения интервала $[a, b]$.

Чем шире интервал $[a, b]$ тем ближе цена опциона к начальной цене актива. На Рис.2 и Рис.3 изборажены примеры оптимальных хэджирующих стратегий для разных интервалов $[a, b]$

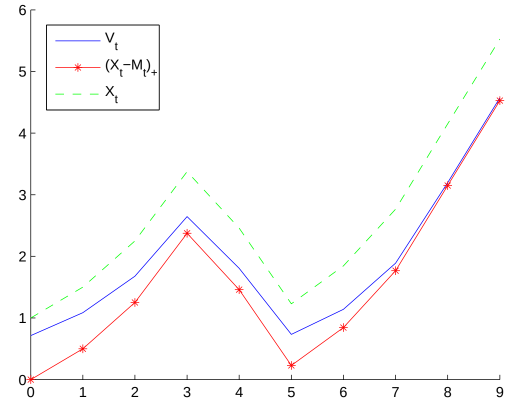

Рис.2. Оптимальная хэджирующая стратегия для X0=1,a = 0.5, b=1.5.

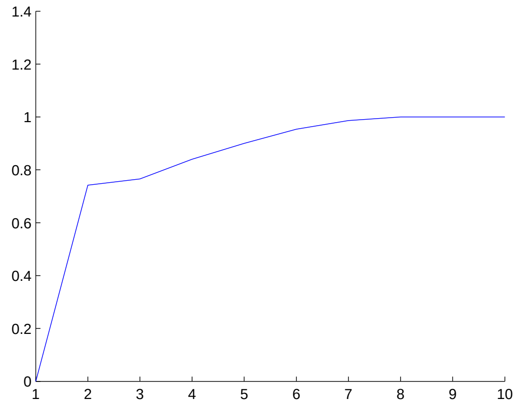

Рис.3. Оптимальная стратегия X0=1,a=0.5,b=1.5.

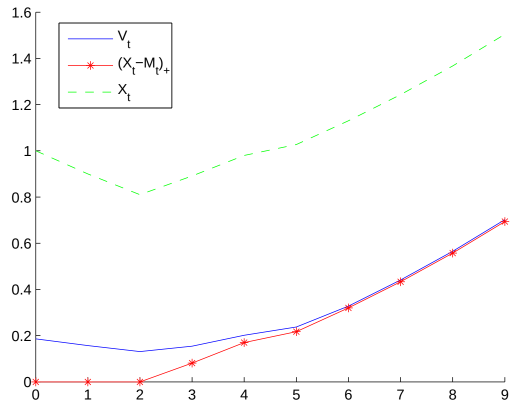

Рис.4. Оптимальная хэджирующая стратегия для X0=1,a = 0.9, b=1.1.

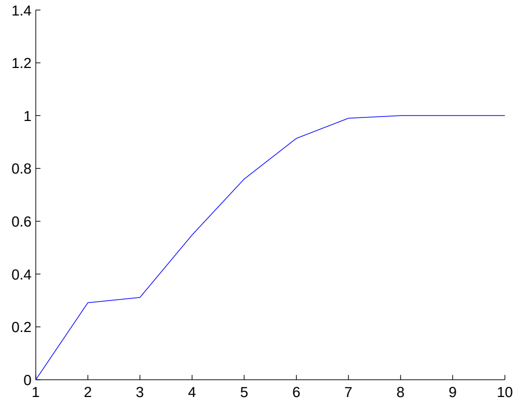

Рис.5. Оптимальная стратегия X0=1,a=0.9,b=1.1.

1.2 Задание 2. Американский опцион put.

Функция выплат имеет вид $\zeta_t = (K - X_t)_+$. Особенностью этого опциона является то, что покупатель опциона может предъявить право на продажу базового актива в любой момент $t \in [1, T]$. Фактически это означает, что продавеци опциона играет не против рынка, но и против контрагента. Решим задачу гарантированного хэджирования для этого опциона.

Если контрагент предъявил обязательство в момент τ, то τ – момент остановки и $\tau \in [1, T]$. Так как в игровой постановке мы рассмтариваем самый худщий случай, то будем считать, что контрагент играет против нас и предъявляет право на продажу в самый худший для нас момент $\tau^* : V_s = E^{F_s}\zeta_{\tau^*} \geq E^{F_s}\zeta_\tau$. Построим функцию Беллмана рекурсивно:

1. $V_T^* = \zeta_T$.

2. Покажем, что

$$V_{t-1}^* = \zeta_{t-1} \vee \max_{\sigma(Q_{\xi_{t-1}})=[a,b], \int zQ_{\xi_{t-1}}(dz)=1} \int V_t^*(X_{t-1} * u)Q_{\xi_{t-1}}(du)$$

Действительно, пусть для $t = K, ..., T$ это выполнено. Рассмотри момент $t = K - 1$. Возможны два случая.

Если $K - 1 = \tau^*$, то

$$V_{K-1} = \zeta_{K-1}$$

Если же $\tau^* > K - 1$, то получаем задачу для европейского опциона с $T = \tau^*$ и

$$V_{K-1} = \max_{\sigma(Q_{\xi_{K-1}})=[a,b], \int zQ_{\xi_{K-1}}(dz)=1} \int V_t^*(X_{K-1} * u)Q_{\xi_{K-1}}(du)$$

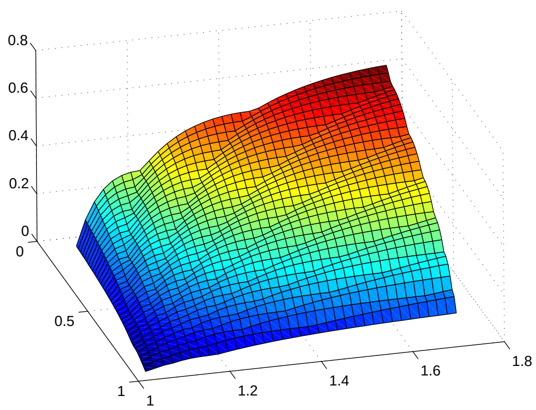

Рис.6. $V_0^*(a, b), K = 1, X0 = 1$.

Так как мы рассматриваем самый худщий для нам случай, то получаем

$$V_{K-1}^{*} = \zeta_{K-1} \vee \max_{\sigma(Q_{\xi_{t-1}})=[a,b], \int zQ_{\xi_{K-1}}(dz)=1} \int V_t^{*}(X_{K-1} * u) Q_{\xi_{K-1}}(du)$$

Далее рассмариваем меру, на которой достигается максимум. В силу выпуклости max выпукла и V_t, а следовательно эта мера сосредоточена на концах отрезка $[a, b]$. И тогда получаем уравнения для функции Беллмана и оптимально хэджирующей стратегии. Следует отметить, что функция Беллмана V_t в этом случае зависит от X_{t-1}:

$$\begin{cases} V_T^{*} = (K - X_T)_{+} \\ V_{t-1}^{*} = (K - X_{t-1})_{+} \vee \pi V_t^{*}(aX_{t-1}) + (1-\pi) V_t^{*}(bX_{t-1}) \end{cases}$$

$$H_t^{*} = \pi \frac{V_t^{*}(aX_{t-1}) - V_{t-1}^{*}(X_{t-1})}{X_{t-1}(a-1)} + (1-\pi) \frac{V_t^{*}(bX_{t-1}) - V_{t-1}^{*}(X_{t-1})}{X_{t-1}(b-1)}$$

Оптимальным моментом остановки будет считаться первый момент, когда $V_t^{*} = \zeta_t$. Для американского опциона put $V * 0(a, b)$ представлена на Рис.6.

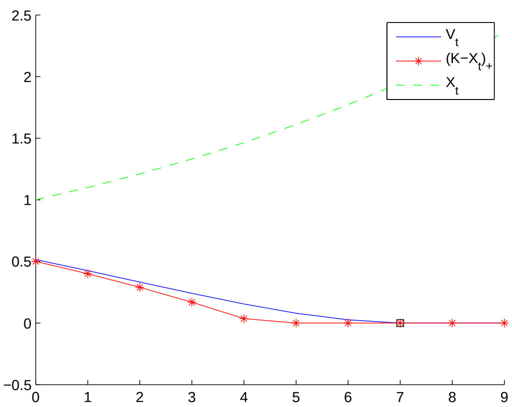

Рис.7. Оптимальная стратегия и оптимальный момент остановки.
a=0.9,b=1.1,K=1.5,X0 = 1..

На Рис.7 и 8 представлена оптимальная стратегия и оптимальный момент остановки (обозначен квадратиком) $\tau^{*} < T$.

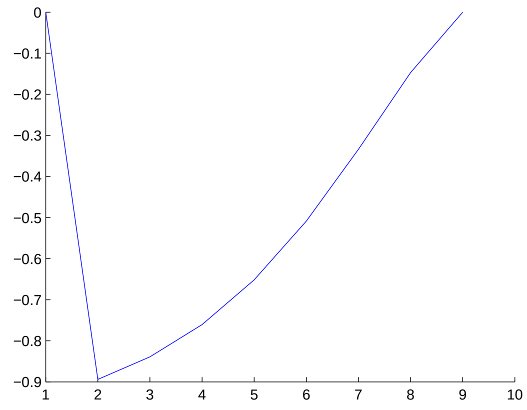

Рис.8. Оптимальная стратегия.

На Рис.9 и 10 оптимальный момент остановки совпадает с моментом T.

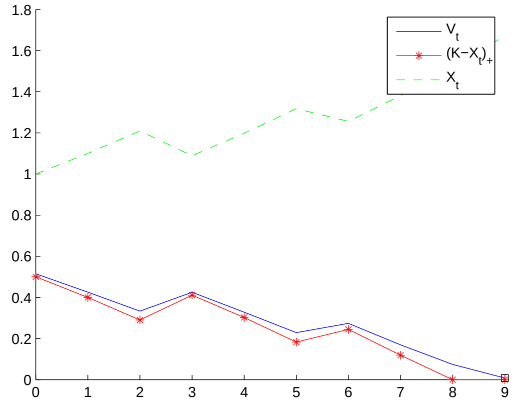

Рис.9. Оптимальная стратегия и оптимальный момент остановки.
a=0.9,b=1.1,K=1.5,X0 = 1..

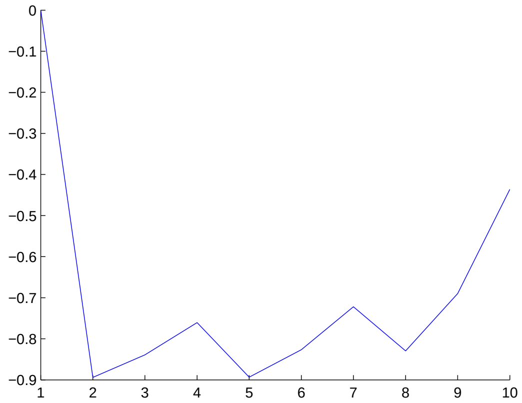

Рис.10. Оптимальная стратегия.

1.3 Задание 3. Азиатский опцион call.

Функция выплат имеет следующий вид:

$$\zeta = (X_T - \frac{1}{T+1}\sum_{s=0}^{T} X_s)_+$$

Поступая аналогично первому случаю только вместо M_t рассматриваем $S_t = \frac{1}{t}\sum_{i=1}^{t} X_i$.

Получаем уравнения Беллмана и оптимальную хэджирующую стратегию:

$$\begin{cases} V_T^* = \zeta \\ V_{t-1}^* = \pi V_t^*(aX_{t-1}, \dfrac{t-1}{t}S_{t-1} + \dfrac{1}{t}aX_{t-1}) + (1-\pi)V_t^*(bX_{t-1}, \dfrac{t-1}{t}S_{t-1} + \dfrac{1}{t}bX_{t-1}) \end{cases}$$

$$H_t^* = \frac{V_t^*(bX_{t-1}, \frac{t-1}{t}S_{t-1} + \frac{1}{t}bX_{t-1}) - V_t^*(aX_{t-1}, \frac{t-1}{t}S_{t-1} + \frac{1}{t}aX_{t-1})}{X_{t-1}(b-a)}$$

На Рис.11 представлена $V_0^*(a,b)$. Следует отметить, что цена азиатского call всегда меньше цены Look-Back call. Так как исходя из спецификации опциона покупатель Look-Back будет покупать базовый актив по заведомо меньшей цене, чем покупатель азиатского call.

Опцион	[0.7,1.3]	[0.8,1.2]	[0.9,1,1]
Look-Back	0.4912	0.3497	0.1862
Азиатский	0.4694	0.3324	0.1759

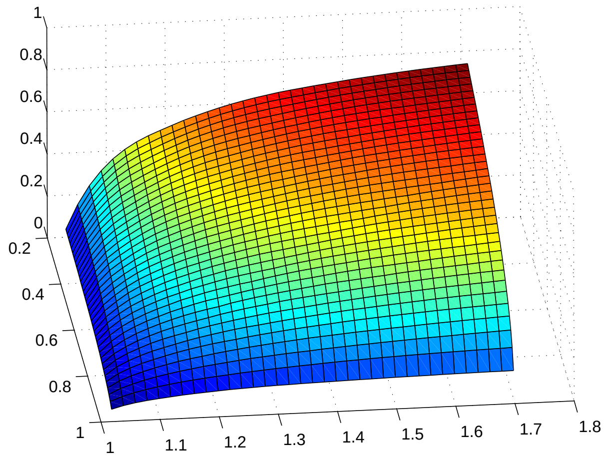

Рис.11. $V_0^*(a,b)$.

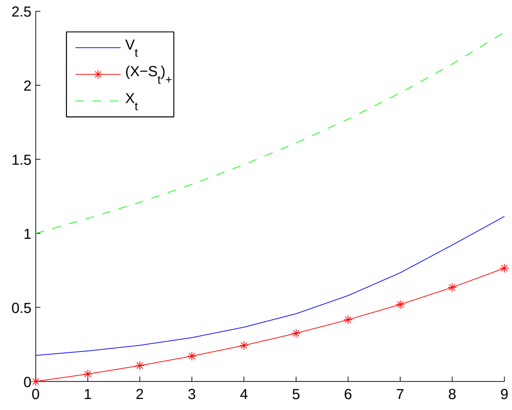

Рис.12. Функция Беллмана и оптимальная стратегия X0=1,a=0.9,b=1.1.

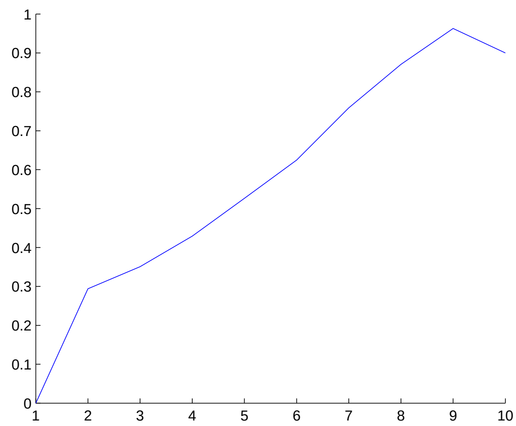

Рис.13. Оптимальная стратегия.