1. Теоритические выкладки

Рассматривается азиатский опцион (call). Функция выплат имеет вид:

$$\zeta = max(X_T - S_T, 0)$$

$$S_T = \frac{1}{T+1}\sum_{t=0}^{t=T} X_t$$

По смыслу это означает, что при погашении обязательств по опциону производятся выплаты в конечный момент времени, равные средние цене за рассматриваемый период времени.

Для выполнения обязательств по опциону необходимо, чтобы было выполнено:

$$V_T \geq \zeta = \zeta(X_T, S_T)$$

Рассмотрим мультипликативную модель и уравнение на V_t:

$$X_t = X_{t-1}W_t$$

$$V_t = V_{t-1} + H\Delta X$$

Беря $\sup_{Q:\sigma(Q)\subseteq[a,b],\int_a^b uQ(du)=1}$ и $\inf_H$, имеем:

$$V_{t-1}^* = \max_{Q:\sigma(Q)\subseteq[a,b],\int_a^b uQ(du)=1} \int\limits_a^b V_t^*(X_t, S_t)Q_{X_{t-1}}(du) = \max_{Q:\sigma(Q)\subseteq[a,b],\int_a^b uQ(du)=1} \int\limits_a^b V_t^*(X_{t-1}u, \frac{tS_{t-1}+uX_{t-1}}{t+1})Q_{X_{t-1}}(du)$$

Будем решать задачу в обратном времени. В момент времени $t = T$ имеем:

$$V_T^* = v_T(X_T, S_T) = X_T - S_T$$

Чтобы преобразовать выражения для V_{t-1}^* к более удобному виду, необходимо по индукции доказать выпуклость $V_t^*(uX_{t-1}, \frac{tS_{t-1}+uX_{t-1}}{t+1})$ по u.

Для момента времени T имеем: $V_T^*(uX_{T-1}, \frac{tS_{t-1}+uX_{t-1}}{t+1}) = uX_{T-1} - \frac{tS_{t-1}+uX_{t-1}}{t+1}$ - выпуклая. Так как в момент времени t выпуклая, то максимум достигается на $Q_{X_{t-1}^0} = \pi_t\delta_a + (1-\pi_t)\delta_b$. Поэтому формула для V_{t-1}^* имеет вид:

$$V_{t-1}^*(a,b) = \pi v_t(aX_{t-1}, \frac{tS_{t-1}+aX_{t-1}}{t+1}) + (1-\pi)v_t(bX_{t-1}, \frac{tS_{t-1}+bX_{t-1}}{t+1})$$

Поскольку линейная комбинация выпуклых функций - выпуклая, то $V_{t-1}^*(a,b)$ - выпуклая. Таким образом для любого t доказана выпуклость.

Из условия $\int\limits_a^b uQ(du) = 1$ (условие отсутствия арбитража) и вида $Q_{X_{t-1}}$ для выпуклых V_t^* следует, что $\pi = \frac{b-1}{b-a}$.

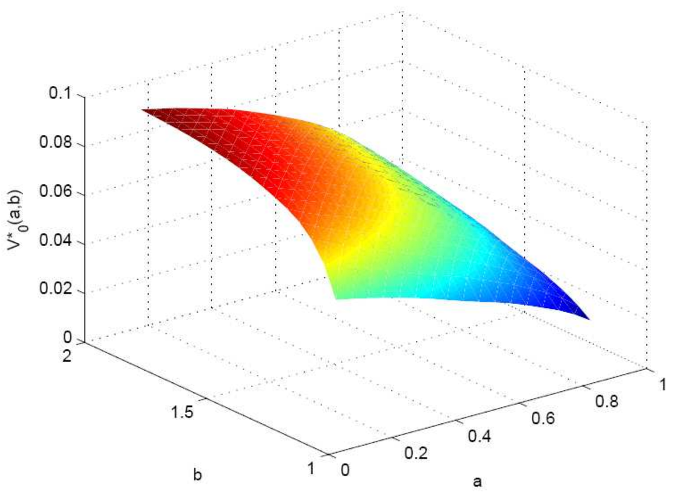
Из уравнения $V_t = V_{t-1} + H\Delta X$ получаем выражение для стратегии хэджирования:

$$H = \frac{V_t - V_{t-1}}{\Delta X}$$

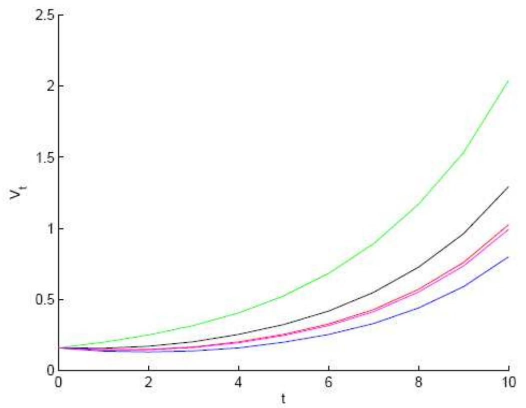
Из вида функции Q имеем, что либо $X_t = bX_{t-1}$, либо $X_t = aX_{t-1}$. Подставляем в предыдущее уравнение и получаем выражение для H_t^*:

$$H_t^* = \frac{V_t^*(bX_{t-1}, \frac{tS_{t-1}+bX_{t-1}}{t+1}) - V_t^*(aX_{t-1}, \frac{tS_{t-1}+aX_{t-1}}{t+1})}{(b-a)X_{t-1}}$$

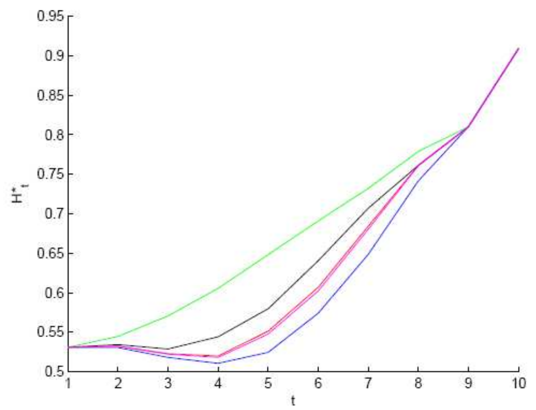
2. Иллюстрации



$V_0^*(a,b)$ при значениях $T=10$, $a\in[0.1,0.9]$, $b\in[1.1,1.9]$, $X_0=0.1$.



Моделирование поведения V_t при значениях $T=10$, $a=0.6$, $b=1.25$, $X_0=0.3$.



Моделирование поведения H_t^* при значениях $T=10$, $a=0.6$, $b=1.25$, $X_0=0.3$.

V_T	1.0246	2.0396	0.7990	1.2923	0.9916
$(X_t-M_t)^+$	1.0173	2.0294	0.7889	1.2853	0.9809