Московский Государственный Университет им.М.В.Ломоносова
Факультет вычислительной математики и кибернетики

Конспект лекций по курсу «Теория устойчивости и стабилизации»

Преподаватель:
Точилин П. А.

Составители:
Байрамов Н. Р.
Нагапетян Т. А.

Москва, 2009 г.

Содержание

1. Лекция 1.

Рассматривается система

$$\dot{x} = f(t, x, u),\ t \geqslant t_0,\ x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^m \tag{1.1}$$

где $u^0(t)$, $x^0(t)$, $t \geqslant t_0$ — желательный режим работы,

$u = u^0(t) + v$, f — липшицева по x, u, непрерывна по совокупности переменных,

$u^0(t)$ — измерима и ограничена, $v = v(t, x)$ — измерима по t, кусочно-непрерывна по x.

Определение 1. *Система* (1.1) *называется стабилизируемой в классе позиционных управлений, если $\exists v(t, x)$, т.ч. $x^0(t)$ является асимптотически устойчивым решением для системы ОДУ*

$$\dot{x} = f(x, t, u^0(t) + v).$$

Как следствие, $v(t, x^0(t)) = 0$.

Итак, $x^0(t)$ — невозмущенное движение системы (1.1), возмущенное — $\hat{x}(t)$. Введем $\bar{x}(t) = \hat{x}(t) - x^0(t)$. Очевидно,

$$\dot{\bar{x}}(t) = f(t, \hat{x}, u^0(t) + v(t, \hat{x})) - f(t, x^0, u^0(t)) =$$

$$= f(t, x^0(t) + \bar{x}(t), u^0(t) + v(t, x^0(t) + \bar{x}(t))) - f(t, x^0, u^0(t)) = g(t, \bar{x}, v(t, \bar{x})).$$

Поэтому можно перейти от $\{u^0(t), x^0(t)\}$ к новому положению равновесия $\{v^0(t) \equiv 0, \bar{x}(t) \equiv 0\}$.

Тогда перепишем задачу в новом виде

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x, u) \\ f(t, 0, 0) \equiv 0,\ t \geqslant t_0. \end{cases} \tag{1.2}$$

Устойчивость системы (1.2) эквивалентна устойчивости системы (1.1), поэтому в дальнейшем будем предполагать, что невозмущенное решение системы — нулевое.

Определение 2. *Система (1.2) называется* ***стабилизируемой по состоянию****, если $\exists u = u(t, x)$, такое что*

1. *$u(t, 0) = 0$*
2. *$\dot{x} = f(t, x, u(t, x))$ — асимптотически устойчива (или 0-состояние равновесия системы — асимптотически устойчиво).*

Теперь добавим к системе (1.2) наблюдения:

$$y(t) = h(t, x(t), u(t)) \tag{1.3}$$

Ограничения на функцию h те же, что и на функцию f.

Определение 3. *Система (1.2) называется* ***стабилизируемой по выходу****, если $\exists u = u(t, y)$, т.ч. при его подстановке в систему получается ОДУ с асимптотически устойчивым положением равновесия.*

Возникает небольшой вопрос в зависимостях. Из вышесказанного получается, что y зависит от u, и обратно, u зависит от y. Дабы разрешить данное противоречие, в дальнейшем будем рассматривать системы вида

$$\dot{x} = f(t, x, u(t, h(t, x))).$$

Пример 1.

Пусть дана система

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= u \end{cases}$$

Очевидно, нулевое положение системы неустойчиво.

1. Попробуем стабилизировать систему при управлениях вида $u = k_1x_1 + k_2x_2$

   Запишем замкнутую систему в матричном виде:

   $$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ k_1 & k_2 \end{pmatrix} x$$

   Характеристический многочлен данной матрицы:

   $$f(\lambda) = \lambda^2 - k_2\lambda - k_1$$

   Если мы хотим стабилизировать систему в данном классе управлений, нам нужно подобрать коэффициенты k_1 и k_2, чтобы корни имели отрицательные действительные части. Но это легко можно сделать, т.к. $k_1 = -\lambda_1\lambda_2$ и $k_2 = \lambda_1 + \lambda_2$.

2. Теперь введем наблюдение $y = x_1$. Тогда управление, в силу того что x_2 теперь неизвестный параметр, примет вид $u = k_1x_1$.

   Аналогично матричное уравнение

   $$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ k_1 & 0 \end{pmatrix} x$$

   и характеристическое уравнение $f(\lambda) = \lambda^2 - k_1$

   - $k_1 > 0 \quad \Rightarrow$ корни положительные, система неустойчива;
   - $k_1 < 0 \quad \Rightarrow$ корни чисто мнимые, система устойчива, но не асимптотически;
   - $k_1 = 0 \quad \Rightarrow$ нулевой корень, система неустойчива.

1.1 Динамическая обратная связь по выходу.

Используя введенные ранее обозначения для обратной связи, дополним дифференциальное уравнение для x, его оценкой:

$$\dot{\hat{x}} = g(t, \hat{x}, u, y) \tag{1.4}$$

Наша система заменится на

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x, u) \\ y = h(t, x(t), u(t, \hat{x}))) \\ \dot{\hat{x}} = g(t, \hat{x}, u(t, \hat{x}), h(t, x, u(t, \hat{x}))) \end{cases} \tag{1.5}$$

Определение 4. *Будем говорить, что (1.4) и $u(t, \hat{x})$ — **динамическая обратная связь по выходу**, если соответствующая система (1.5) — асимптотически устойчива.*

Пример 2.

Будем использовать информацию об измерениях и определять ее значимость через коэффициенты l_1 и l_2:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= u \\ y &= x_1 \\ \dot{\hat{x}}_1 &= \hat{x}_2 + l_1(\hat{x}_1 - y) \\ \dot{\hat{x}}_2 &= u + l_2(\hat{x}_1 - y) \end{cases}$$

Будем искать управление в виде $u = k_1\hat{x}_1 + k_2\hat{x}_2$ Начальное положение системы считаем произвольным.

Как и в прошлый раз, запишем замкнутую систему:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= k_1\hat{x}_1 + k_2\hat{x}_2 \\ \dot{\hat{x}}_1 &= \hat{x}_2 + l_1(\hat{x}_1 - x_1) \\ \dot{\hat{x}}_2 &= k_1\hat{x}_1 + k_2\hat{x}_2 + l_2(\hat{x}_1 - x_1) \end{cases}$$

Обозначим через $e_1 = x_1 - \hat{x}_1$ и $e_2 = x_2 - \hat{x}_2$

Тогда относительно векторов e и $\hat{x}$ мы получим систему четвертого порядка с матрицей:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -l_1 & 1 \\ 0 & 0 & -l_2 & 0 \\ 0 & 1 & l_1 & 0 \\ k_1 & k_2 & l_2 & 0 \end{pmatrix}$$

Упражнение 1. *Можно ли подобрать коэффициенты l_1, l_2, k_1, k_2, чтобы матрица была устойчивой?*

2. Лекция 2.

$$\dot{x} = Ax + Bu \tag{2.1}$$

$$y = Cx + Du \tag{2.2}$$

Применим к системе (2.1),(2.2) преобразование Лапласа-Фурье :

$$F(s) = \mathcal{L}(f(t)) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt,$$

где $s \in \mathbb{C}$.

В силу линейности и того, что $\mathcal{L}(\dot{x}(t)) = sX(s) - x(0)$, где $\mathcal{L}(x(t)) = X(s)$, получаем:

$$\begin{cases} sX(s) - x(0) &= AX(s) + BU(s) \\ Y(s) &= CX(s) + DU(s) \end{cases}$$

Отсюда $(Is - A)X(s) = BU(s) + x(0)$. Получаем:

$$\begin{cases} X(s) &= (Is-A)^{-1}BU(s) + (Is-A)^{-1}x(0) \\ Y(s) &= (C(Is-A)^{-1}B + D)U(s) + C(Is-A)^{-1}x(0) \end{cases}$$

Чтобы матрица $(Is - A)$ была обратима, s не принадлежит спектру матрицы A.

$G(s) = C(Is - A)^{-1}B + D$ — **передаточные матрицы от входа к выходу** (по ним можно определить устойчивость системы).

Определение 5. *Говорят, что пара (A, B) —* ***(полностью) управляема*** *, если $\forall x_1 \in \mathbb{R}^n$, $\forall t_1 > 0$, $\exists u(\cdot) \in L_\infty(0, t_1)$, т.ч. $x(0) = 0$ и $x(t_1)\Big|_{u(\cdot)} = x_1$.*

Запишем решение системы для $t_1 > 0$:

$$x(t_1) = \int_0^{t_1} e^{A(t_1-\tau)}Bu(\tau)d\tau$$

$$L_{t_1} = \left\{ \int_0^{t_1} e^{A(t_1-\tau)}Bu(\tau)d\tau, u(\cdot) \in L_\infty(0,t_1) \right\} \subseteq \mathbb{R}^n$$

Поскольку $L_{t_1} \neq \mathbb{R} \Leftrightarrow \exists l \neq 0$, т.ч. $\forall u(\cdot)$:

$$l^T \int_0^{t_1} e^{A(t_1-\tau)}Bu(\tau)d\tau = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$l^T e^{A(t_1-\tau)}B = 0$$

$$l^T e^{A\psi}B = 0$$

$$l^T(I + \psi A + ...)B = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} l^T B = 0 \\ l^T AB = 0 \\ l^T AB = 0 \\ ... \\ l^T A^k B = 0 \\ ... \end{cases}$$

По теореме Гамильтона-Келли:

$$l^T[B, AB, ..., A^{n-1}B] = 0$$

Определение 6. $\mathcal{C} = [B, AB, ..., A^{n-1}B]$ - ***матрица управляемости*** *системы (2.1).*

Утверждение 1. (A, B) *— управляема* $\Leftrightarrow$ rg $\mathcal{C} = n$.

Итак, мы получили, что $l \perp L_{t_1} \Leftrightarrow l^T\,\mathcal{C} = 0$.

Это означает, что L_{t_1} не зависит от t_1: $L_{t_1} = L$. А также что L является линейной оболочкой столбцов $\mathcal{C}$, т.е. L есть образ линейного оператора $\mathcal{C}$.

Упражнение 2. *Доказать, что если (A, B) управляема в классе измеримых управлений $\Rightarrow$ она управляема в классе непрерывных управлений и даже сколь угодно гладких управлений (например, в классе полиномов).*

Теперь рассмотрим случай, когда (A, B) не управляема.

Утверждение 2. *Подпространство управляемости L инвариантно относительно A.*

Доказательство. По теореме Гамильтона-Келли столбцы $A\mathcal{C}$ линейно выражаются через столбцы матрицы $\mathcal{C}$. Поэтому

$$x \in L \Rightarrow \forall \tau,\, e^{A\tau}x \in L.$$

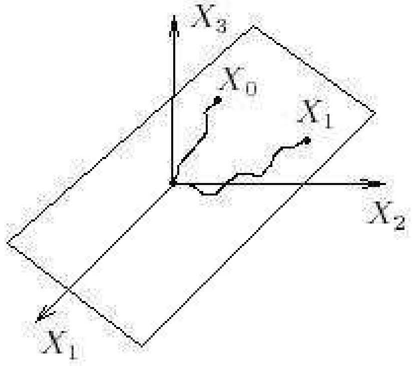
$\square$

Теорема 1 (О свойствах подпространства управляемости)**.** *Пусть* $\mathrm{rg}\ \mathcal{C} = k < n$. *Тогда:*

- $\forall x_0, x_1 \in L \quad \exists u(\cdot) \in L_\infty : x_0 \longrightarrow x_1$.
- *При этом вся траектория* $x(t) \in L$, $\forall t \geqslant 0$.
- *И не найдется* $x_0 \notin L$, *чтобы существовало управление, переводящее его в некоторую* $x_1 \in L$.

То есть L — инвариантное подпространство размерности k.

Доказательство.



1. Мы показали уже, что из 0 можно попасть в любую точку L.

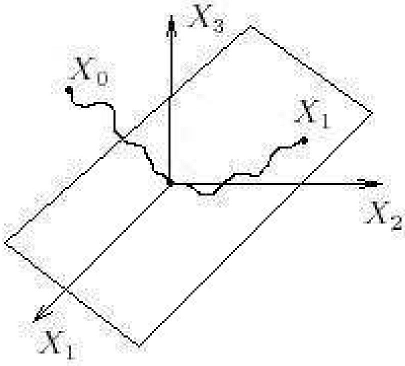
Если обратить время, то легко показать, что обратное тоже верно: из любой точки L можно попасть в 0 за заданное наперед время.

Но тогда $\forall x_0, x_1 \in L$ сначала попадем из x_0 в 0, а потом из 0 — в x_1.

2. Почему траектория останется в L:

$$l \perp L \Rightarrow l^T e^{A(t-\tau)} Bu(\tau) \equiv 0\, \forall t,\, \tau \Rightarrow l^T \int_0^t e^{A(t-\tau)} Bu(\tau) d\tau \equiv 0\, \forall t \Rightarrow$$
$$l \perp x(t),\, \forall t \Rightarrow x(t) \in L.$$

3. От противного:



Пусть нашлось $x_0 \notin L$ и управление, переводящее x_0 в некоторую $x_1 \in L$ — тогда существует u, переводящее x_0 в начало координат: $x(0) = x_0$, $x(t_1) = 0$.

Возьмем $z(\tau) = x(t_1 - \tau)$, $v(\tau) = u(t_1 - \tau)$. Тогда, учитывая, что $\dot{x} = Ax + Bu$, получим $\dot{z} = -Az - Bv$, $z(0) = 0$, $z(t_1) = x_0$.

Но матрица управляемости для этой системы отличается лишь знаками некоторых столбцов, следовательно, линейная оболочка столбцов будет той же, а значит траектория $z(t)$, начавшись в подпространстве L, должна в нем же и остаться.

Противоречие с $x_0 \notin L$, что завершает доказательство теоремы.

$\square$

Итак, пусть rg $\mathcal{C} = k < n$. Выберем в пространстве $\mathbb{R}^n$ новый базис:

- первые k векторов из L,
- оставшиеся $n - k$ — из подпространства, ортогонального к L.

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix}, \ L = \left\{ \bar{x} = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} : x^2 = 0 \right\}$$

где x^1 отвечает первым k координатам, x^2 — оставшимся.

Обозначим T — матрицу перехода от старого базиса к новому: $\bar{x} = Tx$.

Запишем систему (2.1) в новых координатах:

$$\dot{\bar{x}} = T\dot{x} = TAT^{-1}\bar{x} + TBu = A_1\bar{x} + B_1 u. \tag{2.3}$$

Теорема 2. *Пусть* rg $\mathcal{C} = k < n$.

Тогда существует невырожденное преобразование координат, т.ч. в новых координатах система имеет вид

$$\dot{\bar{x}} = \begin{pmatrix} \dot{x}^1 \\ \dot{x}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11}x^1 + A_{12}x^2 + B_{11}u \\ A_{22}x^2 \end{pmatrix} \tag{2.4}$$

и пара (A_{11}, B_{11}) — (полностью) управляема в $\mathbb{R}^k$.

Доказательство.

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} B_{11} \\ B_{22} \end{pmatrix}$$

1. Покажем сначала, что $B_{22} = 0$. От противного: $B_{22} \neq 0 \Rightarrow \exists u : \ B_{22}u \neq 0$.

   Тогда выпустим траекторию из $0 \in L$:

   $$\dot{x}^2|_{t=0} = B_{22}u \neq 0$$

   Тогда траектория выйдет за пределы пространства (т.к. x^2 станет неравным нулю). Противоречие с предыдущей теоремой.

2. Аналогично покажем, что $A_{21} = 0$. От противного: пусть $\exists x^1 : A_{21}x^1 \neq 0$. Выберем $u = 0$ и получим

$$\dot{x}^2|_{t=0} = A_{21}x^1 \neq 0.$$

3. Докажем управляемость (A_{11}, B_{11}). Достаточно показать, что для системы

$$\dot{x}^1 = A_{11}x^1 + B_{11}u$$

из 0 можно за любое время попасть в любую точку x^1. Но это следует из предыдущей теоремы.

$\square$

Теорема 3. *Следующие утверждения эквивалентны:*

1. (A, B) — управляема;

2. Матрица $[A - \lambda I,\ B]$ имеет полный ранг $\forall \lambda \in \mathbb{C}$;

3. $x'A = \lambda x'$, $x \neq 0 \Rightarrow x'B \neq 0$.

Доказательство.

$\boxed{1 \Rightarrow 2}$ От противного: пусть $\mathrm{rg}[A - \lambda I,\ B] < n$. Тогда

$$\exists l \neq 0, l \in \mathbb{C}^n : l'[A - \lambda I,\ B] = 0 \Rightarrow l'A = \lambda l',\ l'B = 0.$$

Тогда

$$l'AB = \lambda l'B = 0 \quad \ldots \quad l'A^{n-1}B = \lambda^{n-1}l'B = 0.$$

То есть $l'\mathcal{C} = 0$. Значит, равны нулю вещественная и мнимая части. Т.к. матрица $\mathcal{C}$ — вещественная, а у l хотя бы одна из частей ненулевая, то $\mathrm{rg}\,\mathcal{C} < n$. Противоречие с управляемостью.

$\boxed{2 \Rightarrow 3}$ Очевидно.

$\boxed{3 \Rightarrow 1}$ От противного: пусть $\mathrm{rg}\ \mathcal{C} < n$. Тогда невырожденным преобразованием координат приведем систему (2.1) к виду (2.4):

$$A_1 = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix} \quad B_1 = \begin{pmatrix} B_{11} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Пусть $\lambda \in \sigma(A_{22})$, т.е. $\exists x^2 \neq 0$, $x^{2\prime}A_{22} = \lambda x^{2\prime}$. Тогда для $\bar{x} = \binom{0}{x^2}$ имеем

$$\bar{x}'A_1 = [0 \ \ \lambda x^{2\prime}] \quad \bar{x}'B_1 = 0.$$

А поскольку $A_1 = TAT^{-1}$, $B_1 = TB$, то для $\tilde{x}' = \bar{x}'T \neq 0$

$$\bar{x}'TAT^{-1} = \bar{x}'A_1 = \lambda\bar{x}' \quad \Rightarrow \quad \tilde{x}'A = \lambda\tilde{x}', \quad \tilde{x}'B = \bar{x}'TB = \bar{x}'B_1 = 0.$$

Пришли к противоречию. Теорема доказана.

$\square$

Определение 7. *Мода системы (или мода пары (A,B)) — это собственные значения матрицы A_{11} (управляемая) либо матрицы A_{22} (неуправляемая мода).*

Из определения следует, что мода управляема, если для любого левого собственного вектора x, отвечающего моде λ, выполнено $x'B \neq 0$.

Следствие (из теоремы(3))**.** *Пара (A,B) (система (2.1)) — управляема $\Leftrightarrow$ все ее моды управляемы.*

Определение 8. *Будем говорить, что $(A,B) \sim (A_1,B_1)$, или, соответственно, система (2.1)* ***эквивалентна*** *системе (2.3), если существует невырожденное преобразование координат T: $A_1 = TAT^{-1}$, $B_1 = TB$.*

Отношение эквивалентности — транзитивно, и пространство пар матриц разбивается на классы эквивалентности.

Упражнение 3. *Если (A,B) — управляема, то любая эквивалентная ей пара тоже управляема.*

Рассмотрим управляемый объект порядка n:

$$x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \dots + a_n x = u.$$

Или в нормальной форме: $x_1 = x,\ x_2 = \dot{x},\ \dots\ , x_n = x^{(n-1)}$:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_3 \\ \quad\dots \\ \dot{x}_{n-1} = x_n \\ \dot{x}_n = -a_1 x_n - \dots - a_n x_1 + u \end{cases} \tag{2.5}$$

Матрицы этой системы:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \dots & -a_1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

При этом $\varphi(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \dots + a_n$ будет характеристическим многочленом матрицы A и пара (A,B) — управляема, т.к. $\mathrm{rg}\ \mathcal{C} = n$ (она нижнетреугольная):

$$\mathcal{C} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 1 & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

Теорема 4. *Всякая вполне управляемая система со скалярным управлением эквивалентна системе вида (2.5), где $a_1,\ \dots\ ,\ a_n$ — коэффициенты характеристического многочлена матрицы A.*

Доказательство. Итак, B — вектор-столбец. Покажем существование невырожденного преобразования $T: \quad A_1 = TAT^{-1}, \quad B_1 = TB$ и

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \dots & -a_1 \end{pmatrix} \quad B_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \tag{2.6}$$

Рассмотрим $T^{-1} = [A^{n-1}B \quad A^{n-2}B \quad \dots \quad AB \quad B]$ — невырожденная , т.к. система управляема. Тогда

$$TT^{-1} = I \quad \Rightarrow \quad TB = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = B_1, \quad TAB = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \dots \quad TA^{n-1}B = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

А т.к. по теореме Гамильтона-Келли $A^n = -a_1A^{n-1} - \dots - a_nI$, то

$$TA^nB = \begin{pmatrix} -a_1 \\ \vdots \\ -a_n \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad A_1 = TAT^{-1} = T[A^nB \quad \dots \quad AB] = \begin{pmatrix} -a_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -a_2 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ -a_n & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Но поскольку система (2.5) управляема, то она приводится к такому же виду — а значит, в силу транзитивности преобразования эквивалентности, исходная система эквивалентна системе (2.5).

Если систему (2.1) замкнуть относительно линейной обратной связи по состоянию: $u = Kx$, то получим следующую замкнутую систему

$$\dot{x} = (A + BK)x \tag{2.7}$$

Теорема 5 (О размещении собственных чисел замкнутой системы)**.** *Если (A, B) управляема, то выбором матрицы K можно замкнутой системе назначить в качестве собственных значений — любые комплексно-сопряженные пары чисел.*

Доказательство. Мы докажем лишь для частного случая: когда управление — скаляр. Применим к замкнутой системе невырожденное преобразование координат T, приводящее систему к виду (2.6):

$$T(A + BK)T^{-1} = TAT^{-1} + TBKT^{-1}.$$

Обозначая $K_1 = KT^{-1}$, получим $\dot{\bar{x}} = (A_1 + B_1K_1)\bar{x}$, причем при таком преобразовании сохраняются собственные значения. Матрицей новой системы будет

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ -a_n & -a_{n-1} & \dots & -a_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} (k_1 \dots k_n) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ k_1 - a_n & k_2 - a_{n-1} & \dots & k_n - a_1 \end{pmatrix}$$

Таким образом, управляя коэффициентами матрицы-строки K_1, мы управляем коэффициентами характеристического многочлена матрицы системы — поэтому можно получить любые комплексно-сопряженные пары собственных чисел (сопряженные пары гарантируют нам, что многочлен будет иметь вещественные коэффициенты). А из матрицы K_1 легко получить матрицу $K = K_1T$. Теорема доказана. $\square$

Определение 9. *Будем говорить, что пара (A, B) — **стабилизируема**, если существует матрица K, такая что все собственные числа матрицы $(A + BK)$ имеют отрицательные действительные части.*

Следствие. *Если (A, B) — управляема, то она стабилизируема, и система, замкнутая относительно линейной обратной связи, асимптотически устойчива.*

Упражнение 4. *Показать, что свойство стабилизируемости инвариантно относительно невырожденного преобразования координат.*

2.1 Когда (A, B) не управляема.

Пусть rg $\mathcal{C} = k < n$. В новом базисе система имеет вид

$$\begin{pmatrix} \dot{x}^1 \\ \dot{x}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11}x^1 + A_{12}x^2 + B_{11}u \\ A_{22}x^2 \end{pmatrix}$$

и $u = K_1x^1 + K_2x^2$ — линейная обратная связь. Тогда замкнутая система имеет блочно-треугольную матрицу:

$$\begin{pmatrix} A_{11} + B_{11}K_1 & A_{12} + B_{11}K_2 \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix}$$

Кроме того, выбором K_1 можно добиться устойчивости $(A_{11} + B_{11}K_1)$, а значит
система стабилизируема $\quad\Leftrightarrow\quad$ A_{22} — **устойчивая** матрица.

Утверждение 3. *(A, B) стабилизируема $\Leftrightarrow$ система (2.1) стабилизируема (в смысле исходного определения).*

Доказательство. Необходимость очевидна: $u(0) = K \cdot 0 = 0$. Покажем достаточность.

Пусть $u(x)$ — некоторый закон, замкнутая относительно него система асимптотически устойчива. Снова перейдем к каноническому базису и замкнем систему:

$$\begin{cases} \dot{x}^1(t) = A_{11}x^1 + A_{12}x^2 + B_{11}u(T^{-1}\bar{x}) \\ \dot{x}^2(t) = A_{22}x^2 \end{cases}$$

Поскольку эта система должна быть асимптотически устойчивой, то A_{22} — устойчива $\quad\Rightarrow\quad$ система стабилизируема.

Теорема 6. *Следующие условия эквивалентны:*

1. *пара (A, B) — стабилизируема;*
2. *$\forall \lambda \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(\lambda) \geqslant 0$ выполнено $\mathrm{rg}[A - \lambda I, B] = n$;*
3. *$\forall \lambda \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(\lambda) \geqslant 0$ и $\forall x \neq 0$ такого, что $x'A = \lambda x'$ выполнено $x'B \neq 0$.*

Доказательство.

$\boxed{2 \Leftrightarrow 3}$ Очевидно(по определению).

Свойство стабилизируемости и свойство 3) инвариантно относительно линейного преобразования координат (достаточно рассмотреть $\dot{\bar{x}} = Tx$, для которого выполнены те же свойства). Следовательно, считаем что:

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} B_{11} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Причем пара (A, B) - управляема.

$\boxed{1 \Rightarrow 3}$ $\mathrm{Re}(\lambda) \geqslant 0, A_{22}$ — устойчивая $\Rightarrow \lambda$ — собственное значение матрицы A_{11}.
Пусть $x = [x^1, x^2]' \neq 0$ и $x'A = \lambda A$, покажем, что $x^1 \neq 0$.
От противного
$x^1 = 0 \Rightarrow x^2 \neq 0 \Rightarrow x = [0, x^2]'$

$$x'A = [0', x^{'2}] \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix} = \lambda [0', x^{'2}]$$

$$x^{'2} A_{22} = \lambda x^{'2}.$$

$x^2 \neq 0 \Rightarrow \lambda$ — собственное значение A_{22}. Пришли к противоречию, т.к. A_{22} — устойчивая $\Rightarrow x^1 \neq 0$.

$$x'A = [x^{'1}, x^{'2}] \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix} = \lambda [x^{'1}, x^{'2}]$$

$\Rightarrow x^{'1} = \lambda x^{'1}$.
Т.к. (A_{11}, B_{11}) управляема, то (как было ранее доказано) $x^{'1} B_{11} \neq 0 \Rightarrow x'B \neq 0$.

$\boxed{3 \Rightarrow 1}$ *От противного*
Пара (A, B)– нестабилизируема $\Leftrightarrow \exists \lambda$ — собственное значение матрицы A_{22} такое, что $\mathrm{Re}(\lambda) \geqslant 0$

$$\Rightarrow \exists x^{'2} \neq 0 : x^{'2} A_{22} = \lambda x^{'2}.$$

Возьмем $x = [0, x^2]' \neq 0$. Тогда

$$x'A = \lambda x',$$

$$x'B = [0, x^{'2}] \begin{pmatrix} B_{11} \\ 0 \end{pmatrix} = 0,$$

$\Rightarrow$ условие 3) не выполняется. Противоречие.

$\square$

Упражнение 5. *Пара* (A, B) *- стабилизируема* $\Leftrightarrow$ *ее любая неустойчивая мода управляема.*

3. Лекция 3.

$$\dot{x} = Ax + Bu,$$
$$y = Cx + Du.$$

Определение 10. *Пара (C, A) называется* ***наблюдаемой****, если для любого начального состояния $x(0)$ и любого момента времени $t_1 > 0$, $x(0)$ можно однозначно восстановить, зная измерение $y(t)$ и управление $u(t)$ на отрезке времени $t \in [0, t_1]$.*

Запишем формулу Коши:

$$x(t) = e^{At} + \psi(t),$$

где $\psi(t)$ - известная функция, т.к. знаем $u(t)$.

$$y(t) = Ce^{At}x(0) + C\psi(t) + Du(t),$$

Обозначим $\widetilde{y}(t) = y(t) - C\psi(t) - Du(t)$ - известная функция.
$\Rightarrow$ Система наблюдаема $\Leftrightarrow$ зная $\widetilde{y}(t)$ на $[0, t_1]$, можем восстановить $x(0)$.
$\Leftrightarrow$ соответсвующее однородное уравнение имеет только тривиальное решение.

$$Ce^{At}x(0) = 0 \Leftrightarrow x(0) \equiv 0.$$

$$C(I + At + \frac{t^2}{2!}A^2 + \ldots)x(0) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} Cx(0) & = 0, \\ CAx(0) & = 0, \\ & \vdots \\ CA^{n-1}x(0) & = 0. \end{cases}$$

Обозначим

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}.$$

Определение 11. *Матрица $\mathcal{O}$ называется <u>матрицей наблюдаемости</u> системы.*

Упражнение 6. *Пара (C, A) - наблюдаема $\Leftrightarrow$ из $\mathcal{O}x = 0 \Rightarrow x \equiv 0 \Leftrightarrow \operatorname{rg}\mathcal{O} = n$.*

$$\mathcal{O}x = 0 \Leftrightarrow x'\mathcal{O}' = 0$$
$$x'\mathcal{O}' = x'[C', A'C', \ldots, (A')^{n-1}C'] = 0 \Rightarrow x' \equiv 0.$$

А это условие управляемости пары (A', C').

Упражнение 7. *Пара (C, A) - наблюдаема $\Leftrightarrow$ пара $(A', C')-$ управляема (т.е. система $\dot{z} = A'z + C'v$ - управляема).*

Поэтому многие свойства управляемости переносятся на свойства наблюдаемости.

Теорема 7. *Следующие утверждения эквивалентны:*

1. *пара* $(C, A)-$ *наблюдаема;*

2. $\operatorname{rg}\mathcal{O} = n$*;*

3. $\forall\lambda \in \mathbb{C}$ *выполнено* $\operatorname{rg}\begin{bmatrix} A-\lambda I \\ C \end{bmatrix} = n$*;*

4. $\forall\lambda \in \mathbb{C}$ *из условия* $Ax = \lambda x, x \neq 0$ *следует* $Cx \neq 0$*;*

5. *Существует такая матрица* L*, что матрица* $A+LC$ *имеет любое наперед заданное расположение собственных чисел (при условии, что комплексные числа заданы парами);*

6. *пара* $(A', C')-$ *управляема.*

Доказательство. $1) \Leftrightarrow 1), 6) \Leftrightarrow 1)$ уже доказали.
$6) \Leftrightarrow 3), 4), 5)$ - из свойства управляемости сопряженных матриц. Если (A', C') неуправляема, то можно выделить неуправляемую часть и из этого следует, что у матрицы A_{22} нельзя изменить собственные числа.

Пусть система не наблюдаема. Тогда $\operatorname{rg}\mathcal{O} = k < n$.

Определение 12. *Множество* $\{x\colon \mathcal{O}x = 0\} = \operatorname{Ker}\mathcal{O} \neq \varnothing$ *есть подпространство* ***ненаблюдаемых координат*** *системы.*

Если $x(0) \in \operatorname{Ker}\mathcal{O}$, то $x(0)$ не может быть восстановлена, так как $x(0) \in \operatorname{Ker}\mathcal{O} \Rightarrow x(t) \in \operatorname{Ker}\mathcal{O}$, т.к. в противном случае было бы однозначное соответствие между $x(t)$ и $x(0) \Rightarrow x(0) \notin \operatorname{Ker}\mathcal{O}$.

Подпространство $\operatorname{Ker}(\mathcal{O})$ — инвариантное подпространство. Т.е. если состояние лехит в $\operatorname{Ker}(\mathcal{O})$, то вся траектория лежит в $\operatorname{Ker}(\mathcal{O})$, если состояние не из $\operatorname{Ker}(\mathcal{O})$, то вся траектория не лежит $\operatorname{Ker}(\mathcal{O})$.

Определение 13. *Пара* (C, A) — ***детектируема****, если существует матрица* L*, такая что вещественная часть любого собственного значения матрицы* $(LC + A)$ *меньше нуля.*

Очевидно, что детектируемость (C, A) равносильна стабилизируемости (A', C').

Теорема 8. *Следующие утверждения эквивалентны:*

1. *пара* (C, A) — *детектируема;*

2. *пара* (A', C') — *стабилизируема;*

3. $\forall\lambda \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re}(\lambda) \geqslant 0 \Rightarrow \operatorname{rg}\begin{bmatrix} A-\lambda I \\ C \end{bmatrix} = n$;

4. $\forall\lambda \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re}(\lambda) \geqslant 0$, *из условия* $\begin{cases} Ax = \lambda x \\ x \neq 0 \end{cases}$ *следует* $Cx \neq 0$.

Теперь нетрудно показать, что систему (2.1), (2.2) невырожденным линейным преобразованием координат T можно привести к виду:

$$A_1 = TAT^{-1}, \quad B_1 = TB,$$
$$C_1 = CT^{-1}, \quad D_1 = D,$$
$$\dot{x}^1 = A_{11}x^1 + B_{11}u,$$
$$\dot{x}^2 = A_{21}x^1 + A_{22}x^2 + B_{22}u,$$
$$y = C_{11}x^1 + Du,$$

причем пара (C_{11}, A_{11}) - наблюдаемая, x^2 - наблюдаемые координаты вектора x. (т.к. x^1 не зависит от x^2, а выход зависит только от x^1)

При выборе базиса для приведения системы (2.1), (2.2) к данному виду выбираем базис так же, как и в случае управляемых систем.

Система детектируема $\Rightarrow$ все собственные значения матрицы A_{22} имеют отрицательные действительные части, т.к.

$$\begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} + L[C_1, 0] = \begin{pmatrix} \cdots & 0 \\ \cdots & A_{22} \end{pmatrix}.$$

Из полученного соотношения следует, что выбор матрицы L не влияет на собственные значения числа A_{22}. Таким образом, необходимо требовать, чтобы A_{22} была устойчива.

Можно ли одновременно выделять и управляемую и наблюдаемую части?

Теорема 9 (Структурная теорема Калмана или каноническая форма Калмана)**.** *Существует невырожденное преобразование координат, которое переводит систему (2.1), (2.2) к виду:*

$$\begin{pmatrix} \dot{x}^1 \\ \dot{x}^2 \\ \dot{x}^3 \\ \dot{x}^4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & 0 & A_{13} & 0 \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} \\ 0 & 0 & A_{33} & 0 \\ 0 & 0 & A_{34} & A_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \\ x^4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_{11} \\ B_{12} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$y = C_{11}x^1 + C_{33}x^3 + Du.$$

$(A_{11}, B_{11}), (A_{22}, B_{12})$ — *управляемы пары;*
$(C_{11}, A_{11}), (C_{33}, A_{33})$ — *наблюдаемые пары;*
x^1, x^2 — *управляемые координаты;*
x^3, x^4 — *неуправляемые координаты;*
x^1, x^3 — *наблюдаемые координаты;*
x^2, x^4 — *ненаблюдаемые координаты.*

Доказательство. Есть подпространство управляемости $\bar{L} = \operatorname{Im} \mathcal{C}$ и подпространство ненаблюдаемости $\operatorname{Ker} \mathcal{O}$.

1. выбираем базис в $\operatorname{Im} \mathcal{C} \bigcap \operatorname{Ker} \mathcal{O}$ (x^2 – управляемая, но ненаблюдаемая координата);

2. дополняем базис до $\operatorname{Im} \mathcal{C}$ (x^1 — управляемая и наблюдаемая координата);

3. дополняем базис до $\operatorname{Im} \mathcal{C} \bigcup \operatorname{Ker} \mathcal{O}$ (x^4 — неуправляемая и ненаблюдаемая координата);

4. дополняем базис до всего пространства (x^3 — неуправляемая, но наблюдаемая координата).

$\square$

4. Лекция 4.

Рассматриваем систему:

$$\begin{aligned} \dot q &= Mq + Nu + Hy, \\ \hat x &= Qq + Ru + Sy. \end{aligned} \tag{4.1}$$

Определение 14. *Система (4.1) называется асимптотическим наблюдателем для системы (2.1), (2.2), если для любых начальных векторов $x(0), q(0)$ и для любого $u(t)$ справедливо:*

$$\hat x(t) - x(t) \to 0 \text{ при } t \to \infty.$$

По $u(t)$ из (2.1) находим $x(t)$; далее из (2.2) находим $y(t)$; по $y(t)$ и $u(t)$ из (4.1) находим $q(t)$, а затем $\hat x(t)$

Теорема 10. *Для существования асимптотического наблюдателя необходимо и достаточно, чтобы пара (C, A) была детектируемой.*

Доказательство.

$\boxed{\Leftarrow}$ (C, A) — детектируема, строим асимптотический наблюдатель.

$$\begin{aligned} \dot q &= Aq + Bu + L(Cq + Du - y), \\ \hat x &= q. \end{aligned} \tag{4.2}$$

Можно подобрать L так, что данный наблюдатель будет асимптотическим наблюдателем для нашей системы.

Выберем L так, что матрица $(A + LC)$ — устойчива (это можно сделать, т.к. пара (C, A) — детектируема). Следовательно, (4.2) асимптотический наблюдатель для нашей системы.

Определение 15. *Система* (4.2) *называется асимптотическим* ***наблюдателем Люинбергера полного порядка****.*

Действительно, имеем

$$\dot{\hat x} = A\hat x + Bu + L(C\hat x + Du - Cx - Du),$$

$$\dot{\hat x} = (A + LC)\hat x + Bu - LCx,$$

$$\dot x = Ax + Bu.$$

Введем $e(t) = \hat x(t) - x(t)$, тогда:

$$\dot e = Ae + LCe = (A + LC)e.$$

$(A + LC)$ — устойчива $\Rightarrow e(t) \to 0, t \to \infty$.

$\boxed{\Rightarrow}$ *От противного.*

(C, A) — не является детектируемой. Тогда выберем начальный вектор

$$x(0) \in ker\mathcal{O}, u(t) \equiv 0, q(0) = 0 \Rightarrow Cx(0) = 0 \Rightarrow Cx(t) = 0.$$

Тогда $y(t) = Cx(t) + Du(t) \equiv 0$,

$\dot{q} = Mq, q(0) = 0 \Rightarrow q(t) \equiv 0 \Rightarrow \hat{x} \equiv 0.$

Система (4.1) является асимптотическим наблюдателем $\Leftrightarrow x(t) \to 0, t \to \infty$, но это не так, т.к. система недетектируема $\Rightarrow$ у матрицы A_{22} есть собственные числа с положительной действительной частью $\Rightarrow x(0)$ можно выбрать так, что $x(t) \nrightarrow 0$ ($x(0)$ соответствует неустойчивой моде).

□

Определение 16. *Пусть задана оценка:*

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + L(C\hat{x} + Du - y) \tag{4.3}$$

Линейной обратной связью по выходу *назовем $u = K\hat{x}$.*

Теорема 11. *Если пара (A, B) стабилизируема, а пара (C, A) детектируема, то существуют матрицы L и K такие, что система (2.1), (2.2), (4.3) с обратной связью по выходу $u = K\hat{x}$ будет асимптотически устойчивой.*

Доказательство. Перейдем от пары $(x, \hat{x})$ к $(e, \hat{x})$. Подставим в (4.3) уравнение измерения (2.2):

$$\dot{\hat{x}} = (A + LC)\hat{x} + Bu - LCx \tag{4.4}$$

Тогда получим следующее дифференциальное уравнение для ошибки $e = \hat{x} - x$:

$$\dot{e} = (A - LC)e.$$

Теперь подставим в (4.4) обратную связь:

$$\dot{\hat{x}} = (A + BK)\hat{x} + LC(\hat{x} - x) = (A + BK)\hat{x} + LCe.$$

Запишем новую систему:

$$\begin{pmatrix} \dot{e} \\ \dot{\hat{x}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A + LC & 0 \\ LC & A + BK \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e \\ \hat{x} \end{pmatrix}.$$

Понятно, что новая система будет асимптотически устойчивая тогда и только тогда, когда система (2.1), (2.2) асимптотически устойчива. Мы уже доказали, что с выбором K и L можем получить любые собственные значения матриц на диагонали, поэтому можно выбрать эти матрицы так, чтобы система была асимптотически устойчивой. □

Замечание. *Таким образом*

$$||x(t)|| \leq \beta e^{-\alpha t}||x(0)||, \quad \alpha > 0,\ \beta > 0,$$

и смещая собственные числа матрицы влево от мнимой оси, можем добиться любой степени устойчивости.

Рассмотрим пример, который показывает, какие проблемы могут возникнуть при такой стабилизации.

Пример 3.

$$\begin{cases} \dot{x_1} = x_2 \\ \dot{x_2} = u \end{cases}$$

Выберем управление $u = k_1x_1 + k_2x_2$, получим следующее выражение для матрицы $[A + BK]$:

$$[A + BK] = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ k_1 & k_2 \end{pmatrix}$$

Выберем коэффициенты k_1 и k_2 так, чтобы получить собственные значения $\lambda_1 = -a$, $\lambda_2 = -2a$ матрицы $[A+BK]$. Получаем, что $k_1 = -2a^2$ и $k_2 = -3a$ и соответственные собственные векторы $q_1 = (1,\ -a)^T$ и $q_2 = (1,\ -2a)^T$. Аналитическое решение имеет вид:

$$x(t) = c_1q_1e^{-at} + c_2q_2e^{-2at}$$

Пусть выполняются начальные условия $x_1(0) = 1$ и $x_2(0) = 0$. Тогда легко получить значения коэффициентов: $c_1 = -1$ и $c_2 = 2$. Рассмотрим, что происходит с второй координатой решения:

$$x_2(t) = 2a(e^{-2at} - e^{-at})$$

Понятно, что если выберем параметр a очень большой (например $a = 10^3$), то при малых значениях t ($t \sim a^{-1}$) значение $x_2 \sim 10^3$, $u \sim 10^6$. Т.е. при небольших t траектория ведет себя неправильно, и, вообще говоря, нужен компромисс между скоростью стремления траектории к нулю и величиной управления.

5. Лекция 5.

$$\dot{x} = Ax + Bu \tag{5.1}$$

Введем функционал:

$$J(u) = \int_0^\infty (x^TQx + u^TRu)dt, \tag{5.2}$$

где Q и R – симметричные положительно определенные матрицы. Понятно, что функционал (5.2) будет неотрицательный.

Интеграл в правой части может расходится, но существуют обратные связи, для которых интеграл сходится. Будем рассматривать $u(x)$ в классе гладких управлений.

Поставим задачу: Среди всех допустимых управлений выбрать то, которое обеспечивает минимум функционала (5.2).

Рассмотрим уравнение относительно матрицы P:

$$A^TP + PA - PBR^{-1}B^TP + Q = 0, \tag{5.3}$$

где P – симметричная матрица. Пусть существует $P > 0$ и P – решение (5.3).

Рассмотрим квадратичную форму $V(x) = x^TPx$ и подсчитаем ее производную в силу системы (5.1):

$$\frac{d}{dt}V(x) = \langle 2Px,\ Ax + Bu\rangle = 2x^TPAx + 2x^TPBu = x^T(A^TP + PA)x + 2x^TPBu.$$

Определим матрицу $K = R^{-1}B^TP$ и рассмотрим следующую квадратичную форму:

$$(u+Kx)^TR(u+Kx) = u^TRu + x^TK^TRu + u^TRKx + x^TK^TRKx =$$

$$= u^TRu + x^TPBu + u^TB^TPx + x^TPBR^{-1}B^TPx = \Big\{PBR^{-1}B^TP = A^TP + PA + Q,\ (5.3)\Big\} =$$

$$= u^TRu + 2x^TPBu + x^T(A^TP+PA)x + x^TQx = \frac{dV(x)}{dt} + f_0(x,u),$$

где $f_0(x,u) = x^TQx + u^TRu$.

Перепишем финальный результат еще раз:

$$\frac{dV(x)}{dt} + f_0(x,u) = (u+Kx)^TR(u+Kx) \geq 0 \tag{5.4}$$

Если возьмем управление $u_0(x) = -Kx$, то получим:

$$\left.\frac{dV(x)}{dt}\right|_{u=u_0(x)} + f_0(x, u_0(x)) = 0 \tag{5.5}$$

Пусть $u(x)$ — произвольная стабилизирующая обратная связь, для которой функционал $J(u) < \infty$. Подставим $u(x)$ в (5.4) и проинтегрируем от 0 до T:

$$\int\limits_0^T \frac{dV}{dt}dt + \int\limits_0^T f_0(x,u)dt \geqslant 0$$

Перейдя к пределу при $T \to \infty$, с учетом того, что $V(x(T)) \underset{T\to\infty}{\longrightarrow} 0$, получим:

$$J(u) \geqslant V(x(0)).$$

Когда в качестве управления выберем $u_0(x) = -Kx$, будет верно равенство (5.5) и получим, что $J(u_0(x)) = V(x(0))$. Отсюда следует, что $u_0(x)$ — оптимальное управление.

Осталось показать, что u_0 — стабилизирующее и $J(u_0) < +\infty$. Сделаем дополнительные рассуждения. Для этого перепишем (5.5) в другом виде:

$$\left.\frac{dV(x)}{dt}\right|_{u=u_0(x)} = -f_0(x,u_0(x)) = -x^TQx - x^TPBR^{-1}B^TPx$$

Это определенно отрицательная квадратичная форма, т.е. $V(x)$ – функция Ляпунова. Функция $V(x)$ удовлетворяет условиям, характерным для квадратичных форм, поэтому имеется экспоненциальная устойчивость:

$$\frac{dV}{dt} \leqslant -\alpha V,\ \alpha > 0 \implies V(x(t)) \leqslant e^{-\alpha t}V(x(0)),$$

т.е. $J(u_0) < +\infty$, и верно равенство $J(u_0(x)) = V(x(0))$.

Таким образом, доказана следующая теорема:

Теорема 12. *Пусть Q, R — симметричные положительно определенные матрицы и пусть* (5.3) *имеет решение $P > 0$. Тогда управление $u_0 = -Kx$, где $K = R^{-1}B^TP$, стабилизирует систему* (5.1) *и минимизирует функционал* (5.2) *и $J(u_0(x)) = (x(0))^TPx(0)$.*

Замечание. *Линейная обратная связь оказалась оптимальной для всех стабилизирующих связей.*

Замечание. *$V(x)$ является функцией Ляпунова и функцией цены в данной задаче и удовлетворяет уравнению Гамильтона-Якоби-Беллмана:*

$$\min_u \left(\frac{dV}{dt} + f_0(x,u) \right) = 0$$

$$\min_u \Big(\langle \nabla V(x),\ Ax + Bu \rangle + f_0(x,u) \Big) = 0$$

Приведем обобщение данной теоремы, добавив уравнение наблюдения $y = Cx$.

Теорема 13. *Пусть (A,B) — стабилизируемая пара, (C,A) — детектируемая пара. Тогда $\exists!\, P \geqslant 0$ — решение уравнения Риккати*

$$A^T P + PA - PBR^{-1}B^T P + C^T QC = 0,$$

и $u = -R^{-1}B^T Px$ — стабилизирующее оптимальное управление для задачи с функционалом

$$J(u) = \int_0^\infty (y^T Q y + u^T R u) dt.$$

Теперь рассмотрим проблему существования и единственности для уравнения Риккати (5.3).

Теорема 14. *Пусть Q, R — симметричные положительно определенные матрицы и $(A,\ B)$ управляемая пара. Тогда существует и единственно положительно определенное решение уравнения Риккати* (5.3).

Доказательство.

Единственность. Пусть существуют решения P_1 и P_2. Тогда получаем два оптимальных управления и две функции цены. Но

$$V_1|_{u_1(\cdot)} = V_2|_{u_2(\cdot)} = 0.$$

Отсюда получаем, что $P_1 = P_2$.

Существование. Без доказательства.

□

Пример 4.

$$\begin{cases} \dot{x_1} = x_2 \\ \dot{x_2} = u \end{cases}, \quad J(u) = \int\limits_0^\infty (x_1^2 + \rho u^2) dt,\ \rho > 0.$$

У нас система со следующими матрицами:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ R = \rho$$

Выполнены условия теоремы 13, поскольку $\mathrm{rg}[BAB] = 2$, и легко подобрать $L:\ A + LC$ — устойчивая матрица. Поэтому можно построить стабилизирующее оптимальное управление для данной задачи в виде линейной обратной связи.

Решение уравнения Риккати $A^TP + PA - PBR^{-1}B^TP + Q = 0$ находится из несложной системы алгебраических уравнений:

$$P = \begin{pmatrix} \sqrt{2}\rho^{\frac{1}{4}} & \sqrt{\rho} \\ \sqrt{\rho} & \sqrt{2}\rho^{\frac{3}{4}} \end{pmatrix}$$

Сразу видно, что $|P| = \rho > 0$. Возьмем управление $u = -Kx$, где $K = R^{-1}B^TP = (\rho^{-\frac{1}{2}}, \sqrt{2}\rho^{-\frac{1}{4}})$. Тогда получим:

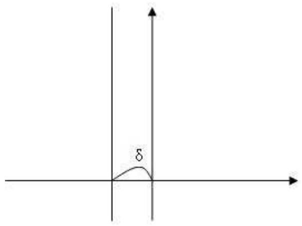
$$[A + BK] = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\rho^{-\frac{1}{2}} & -\sqrt{2}\rho^{-\frac{1}{4}} \end{pmatrix}$$

и соответственные собственные значения $\lambda_{1,2} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\rho^{-\frac{1}{4}}(-1 \pm i)$ имеют отрицательные действительные части. Как видно, построенное согласно теореме 13 управление действительно является стабилизирующим.

Замечание. *Если у нас есть следующие ограничения: $|x_i(t)| \le \overline{x_i}$ и $|u(t)| \le \overline{u}$, то можем рассматривать функционал:*

$$J(u) = \sum \left(\frac{x_i}{\overline{x_i}}\right)^2 + \left(\frac{u}{\overline{u}}\right)^2 \to min$$

Замечание. *Можно не просто минимизировать функционал, но и с заданной степенью устойчивости δ:*



Тогда будем уже рассматривать пару $(A + \delta I, B)$ и соответствующую матрицу $A + BK_\delta$.

5.1 Метод разложения характеристического многочлена.

Это еще один метод построения обратной связи, но здесь не нужно решать уравнение Риккати.

Запишем уравнение Гамильтона-Якоби-Беллмана

$$\min_u \left\{ \frac{dV}{dt} + f_0(x, u) \right\} = 0,$$

Уравнение $\min\limits_u\{\langle \nabla V(x(t)), Ax(t) + Bu \rangle + f_0(x(t), u)\} = 0$ выполняется вдоль оптимальной траектории. Положим $\psi(t) = -\nabla V(x(t))$. Тогда можно записать эквивалентное уравнение

$$\max_u \{-f_0(x(t), u) + \psi'(t)(Ax(t) + Bu)\} = 0.$$

$u^0(x(t))$ доставляет этот максимум. Обозначим $H(x(t), \psi(t), u) = -f_0(x(t), u) + \psi'(t)(Ax(t) + Bu)$. Тогда согласно принципу максимума:

$$\max_u H = 0,$$

причем $\dot\psi = -\frac{\partial H}{\partial x}$. Тогда наряду с исходной системой будем рассматривать сопряженную:

$$\begin{cases} \dot x &= Ax + Bu \\ \dot\psi &= -\frac{\partial H}{\partial x} \end{cases}$$

Для рассматриваемой линейно-квадратичной задачи $\frac{\partial H}{\partial u} = 0 \Rightarrow -2Ru + B'\psi = 0 \Rightarrow u = \frac{1}{2}R^{-1}B'\psi$. Подставляем u в систему:

$$\begin{cases} \dot x &= Ax + \frac{1}{2}BR^{-1}B'\psi, \\ \dot\psi &= 2Qx - A'\psi \end{cases}$$

Получаем систему дифференциальных уравнений с соответствующей матрицей:

$$\begin{pmatrix} A & S \\ 2Q & -A' \end{pmatrix},$$

где $S = \frac{1}{2}BR^{-1}B'$. Характеристический многочлен данной матрицы имеет вид:

$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} A - \lambda I & S \\ 2Q & -A' - \lambda I \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A' - \lambda I & 2Q \\ S & -A - \lambda I \end{vmatrix}.$$

Так как Q, S — симметричные матрицы, имеем

$$D(\lambda) = (-1)^n \begin{vmatrix} S & -A - \lambda I \\ A' - \lambda I & 2Q \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -A - \lambda I & S \\ 2Q & A' - \lambda I \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^{2n} \begin{vmatrix} A + \lambda I & S \\ 2Q & -A' + \lambda I \end{vmatrix} = D(-\lambda)$$

Получили $D(\lambda) = D(-\lambda)$, следовательно, если λ — корень, то $-\lambda$ — тоже корень. Так как замкнутая система устойчива, то n корней лежат в левой полуплоскости, а остальные — в правой. Объединим корни, лежащие слева, и обозначим соответствующий им многочлен $\phi_1(\lambda)$, а для тех, что справа — $\phi_2(\lambda)$. Тогда $D(\lambda) = \phi_1(\lambda)\phi_2(\lambda)$. Следовательно, будем знать все λ для системы, замкнутой оптимальной обратной связью $u = -Kx$. Тогда для заданных λ:

$$\det(A + BK - \lambda I) = 0 \Rightarrow \det(A + BK - \lambda I) = (-1)^n \phi_1(\lambda).$$

Получаем систему уравнений относительно коэффициентов матрицы K, решаем ее, приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях λ.

Для любого невырожденного линейного преобразования T верно

$$\det(A + BK - \lambda I) = \det T(-1)^n \phi_1(\lambda) T^{-1}.$$

Так как управление скалярно, можно подобрать такое T, что

$$T(A + BK)T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 \\ -a_n + \tilde k_1 & \dots & -a_1 + \tilde k_n \end{pmatrix}$$

где $\tilde K = KT^{-1}$. Тогда $-a_n + \tilde k_1, \dots, -a_1 + \tilde k_n$ — коэффициенты характеристического многочлена матрицы $T(A+BK)T^{-1}$ и совпадают с коэффициентами $\phi_1(\lambda) \Rightarrow -a_i + \tilde k_{n+1-i} = \beta_i \Rightarrow$ система $\alpha_i(K) = \beta_i$ линейна относительно K. Таким образом, можно найти оптимальную матрицу K, не решая уравнение Риккати (5.3).

Пример 5.

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -x_1 + u \end{cases}$$

Рассмотрим функционал $J(u) = \frac{1}{2}\int\limits_0^\infty (x_2^2 + u^2)dt$. *Соответствующий гамильтониан имеет вид:*

$$H = \frac{1}{2}(x_2^2 + u^2) + \psi_1 x_2 + \psi_2(-x_1 + u)$$

$$\frac{\partial H}{\partial u} = -u + \psi_2 = 0 \Rightarrow u = \psi_2.$$

Сопряженная система:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -x_1 + \psi_2 \\ \dot{\psi}_1 &= -\frac{\partial H}{\partial x_1} = \psi_2 \\ \dot{\psi}_2 &= -\frac{\partial H}{\partial x_2} = x_2 - \psi_1 \end{cases}$$

Матрица полученной системы:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\lambda & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -\lambda \end{pmatrix}$$

Характеристический многочлен: $\lambda^4 + \lambda^2 + 1 \Rightarrow \lambda_{1,2}^2 = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$. *Квадраты корней лежат на единичной окружности, поэтому по формуле Муавра получим* $\lambda_{1,2,3,4} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i; \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$.

$$\phi_1(\lambda) = (\lambda + \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i)(\lambda + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i) = \lambda^2 + \lambda + 1$$

Берем $u = k_1x_1 + k_2x_2$, *тогда матрица замкнутой системы будет иметь вид:*

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 + k_1 & k_2 \end{pmatrix}.$$

Получаем характеристический многочлен $\lambda^2 - k_2\lambda + 1 - k_1$.

$$\lambda^2 - k_2\lambda + 1 - k_1 = \lambda^2 + \lambda + 1 \Rightarrow k_1 = 0, k_2 = -1$$

Получаем, что оптимальная обратная связь имеет вид: $u = -x_2$.

5.2 Аппроксимация задачами на конечных промежутках.

Будем минимизировать следующий функционал:

$$J_T(u) = \int\limits_0^T f_0(x, u)dt. \tag{5.6}$$

Решение данной задачи существует и единственно, так как функционал строго выпуклый, слабо полунепрерывный снизу.

Функцию Ляпунова в этом случае будем искать в виде следующей квадратичной формы:

$$V_T(t,x) = x'P(t)x,$$

где $P(t)$ зависит от времени и от T.

$$\frac{dV}{dt} = x'\dot{P}x + \langle 2Px, Ax + Bu\rangle$$

Запишем уравнение Гамильтона-Якоби-Беллмана для данной задачи:

$$\min_u\{x'\dot{P}x + \langle 2Px, Ax + Bu\rangle + f_0(x,u)\} = 0$$

Тогда

$$x'(\dot{P} + A'P + P'A - PBR^{-1}B'P + Q)x = 0,$$

кроме того, $V_T(0) = x'P(0)x$. Получаем дифференциальное уравнение Риккати:

$$\begin{cases} \dot{P} + A'P & + & P'A - PBR^{-1}B'P + Q = 0 \\ \dot{P}(T) & = & 0 \end{cases} \tag{5.7}$$

Сделаем в (5.7) замену $\tau = T - t$ и обозначим $P(T-t) = S(t) \Rightarrow P(0) = S(T), P(T) = S(0)$, кроме того, $V_T(0,x) = x'S(T)x$. Тогда получим следующую систему:

$$\begin{cases} \dot{S} = A'S & + & SA - SBR^{-1}B'S + Q \\ \dot{S}(0) & = & 0 \end{cases} \tag{5.8}$$

Теорема 15. *Пусть алгебраическое уравнение Риккати (5.3) имеет положительно определенное решение P. Тогда $\exists \lim\limits_{T\to\infty} S(T) = P$.*

Доказательство. Так как $\exists P > 0$ — решение алгебраического уравнения Риккати (5.3), то $\exists$ оптимальная стабилизирующая обратная связь u^0.
Рассмотрим последовательность T_k: $T_k < T_{k+1}, T_k \to \infty$.
Пусть u^k - оптимальное управление для задачи (5.1)(5.6) $\Rightarrow J_{T_k}(u^k) \leqslant J_{T_k}(u^{k+1}) \Rightarrow$

$$\Rightarrow J_{T_k}(u^k) \leqslant \int\limits_0^{T_k} f_0(x,u^{k+1})dt \leqslant \int\limits_0^{T_{k+1}} f_0(x,u^{k+1}) = J_{T_{k+1}}(u^{k+1}),$$

кроме того, $\forall T_k$ выполнено $J_{T_k}(u^k) \leqslant J_{T_k}(u^0) \leqslant J(u^0) \Rightarrow$ для любого фиксированного начального вектора x

$$V_{T_k}(0,x) \leqslant V_{T_{k+1}}(0,x) \leqslant V(x).$$

$V_{T_k}(0,x) = x'S(T_k)x \leqslant x'Px$ для любого монотонно возрастающего $x \Rightarrow x'S(T_k)x$ ограничена сверху. Таким образом, существует $\lim\limits_{T_k\to\infty} x'S(T_k)x = x'Sx$, $\forall x$, то есть $S(T_k) \to S^*$, кроме того, $x'S^*x \leqslant x'Px$.
Покажем, что $S^* = P$. Действительно, если подставить $S(T)$ в дифференциальное уравнение Риккати (5.7) и $T_k \to \infty$, то $\dot{S} = 0 \Rightarrow S^*$ — решение (5.7), но решение уравнения Риккати единственно $\Rightarrow S^* = P \Rightarrow S(T) \to P$ при $T \to +\infty$. $\square$

Следствие. $V_T(0,x) \to V(x)$ *при* $T \to \infty$.

Таким образом, получили еще один способ построения оптимальной обратной связи.

А если добавить к уравнению (5.1) уравнение наблюдений

$$y = Cx,$$

то в уравнении Риккати матрица Q заменится на $C'QC$. Если Q, R — положительно определены, (A, B) — стабилизируема, (C, A) — детектируема, то матричное уравнение Риккати имеет единственное положительно определённое решение, а соответствующая обратная связь является оптимальным законом стабилизации.

6. Лекция 6.

Рассмотрим следующую систему:

$$\dot{x} = f(x, u) \tag{6.1}$$

Пусть $f(\cdot, \cdot)$ — непрерывно дифференцируемая по x, u функция, $f(0, 0) = 0$. Тогда в малой окрестности нуля справедливо разложение

$$f(x, u) = \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)x + \frac{\partial f}{\partial u}(0, 0)u + r(x, u),$$

$$A = \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0), \quad B = \frac{\partial f}{\partial u}(0, 0).$$

Пусть $\|r(x, u)\| \leqslant k(\|x\| + \|u\|)^{1+\alpha}$, где $\alpha > 0$. Очевидно, что при $x \to 0$ и при $u \to 0$

$$\frac{r(x, u)}{\|x\| \cdot \|u\|} \longrightarrow 0.$$

Пусть пара (A, B) стабилизируема. Тогда $\exists K : A_1 = A + BK$ — устойчива, и $u = Kx$ стабилизирует линейную часть:

$$\dot{x} = A_1 x + r(x, Kx) \tag{6.2}$$

По теореме об устойчивости по первому приближению решение системы (6.2) асимптотически устойчиво. Т.к. A_1 устойчива, то $\forall Q > 0$ существует положительно определённое симметрическое решение уравнения Ляпунова

$$A_1' P + P A_1 = -Q$$

Рассмотрим $V(x) = x'Px$

$$\frac{dV}{dt} = \langle 2Px, A_1 x + r(x, Kx) \rangle = -x'Qx + 2x'P'r(x, Kx) \leqslant$$

$$\leqslant \{Q > 0 \Rightarrow x'Qx \geq C_1\|x\|^2\} \leq -C_1\|x\|^2 + 2k\|x\|\|P\|(\|x\| + \|Kx\|)^{\alpha+1} \leqslant$$

$$\leqslant (-C_1 + C_2\|x\|^\alpha)\|x\|^2.$$

При $\|x\| < \sqrt[\alpha]{\frac{C_1}{C_2}}$ последнее выражение строго меньше нуля. Т.е. этот шар — область притяжения нулевого решения. Недостаток — только локальная устойчивость, при больших отклонениях такой регулятор не обеспечивает асимптотической устойчивости. Поэтому хотим получить условия, обеспечивающие глобальную устойчивость замкнутой системы.

Теорема 16 (достаточное условие глобальной стабилизируемости)**.**

$$\dot{x} = f(x,u),\; u \in U,\; f(0,0) = 0,\; 0 \in U$$

Пусть существует такая непрерывно дифференцируемая функция $V(x)$ *и непрерывно дифференцируемое* $u(x)$:

1. $V(x) > 0$ *при* $x \neq 0$, $V(0) = 0$
2. $V(x) \to \infty$ *при* $\|x\| \to \infty$
3. $\forall x,\; u(x) \in U,\; u(0) = 0$
4. $\forall x \neq 0,\; \langle \nabla V(x), f(x,u(x)) \rangle < 0$

Тогда решение $\dot{x} = f(x,u(x))$ *асимптотически устойчиво в целом, т.е.*

$$\forall x(0) \Rightarrow x(t) \to 0$$

Доказательство.
(ссылка на теорему об асимптотической устойчивости в целом, те же требования, но без u) та же теорема, но переформулированная.

Функция V, для который выполнены первые три условия, и $\inf\limits_{u \in U} \langle \nabla V(x), f(x,u(x)) \rangle < 0$ называется CLF (Control Lyapunov Function).

Далее рассмотрим гладкое управление $u(x) \in U :\; u(0) = 0$. Замкнутая система

$$\dot{x} = f(x,u(x)) = F(x) \tag{6.3}$$

И пусть

1. $f(x,u)$ — гладкая по x и по u
2. $u(x) \in U$ — гладкая и $u(0) = 0$

$$J(x) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,u(x)) + \frac{\partial f}{\partial u}(x,u(x))\frac{\partial u}{\partial x}$$

$J(x)$ — Якобиан замкнутой системы.

Теорема 17. *Пусть* $\exists \varepsilon > 0 : \forall \lambda(x)$ *- с.значения матрицы* $J(x) + J'(x)$*, имеет место*

$$\lambda(x) \leqslant -\varepsilon.$$

Тогда $x = 0$ *— единственное состояние равновесия системы* (6.3), *которое глобально асимптотически устойчиво.*

Доказательство.

1. Пусть $\bar{x}$ — состояние равновесия системы, т.е. $F(\bar{x}) = 0$. Покажем, что $J(x)$ не обращается в ноль в некоторой окрестности $\bar{x}$. В противном случае $\exists w \neq 0 :$ $Jw = 0$. Тогда $w'(J+J')w = 0$, но левая часть по условию теоремы не больше $\lambda(x)\|w\|^2 < -\varepsilon\|w\|^2 < 0$, т.е. пришли к противоречию. Таким образом, $\bar{x}$ — изолированный корень, т.е. любая особая точка замкнутой системы изолирована.

2. Пусть $x(t)$ — некоторое решение исходной системы.

   Рассмотрим $y(t) = \dot{x}(t)$, тогда

$$\dot{y} = J(x)y$$

$$\frac{d}{dy}\|y\|^2 = \frac{d}{dy}(y'y) = \dot{y}'y + y'\dot{y} = y'J'(x)y + y'J(x)y = y'(J'(x) + J(x))y < -\varepsilon\|y\|^2$$

$$\Downarrow$$

$$\|y(t)\|^2 \leqslant \|y(0)\|^2 e^{-\varepsilon t}$$

$$\|y(t)\| \leqslant \|y(0)\| e^{-\frac{\varepsilon}{2}t}$$

$$x(t) = x(0) + \int\limits_0^t y(\xi)d\xi \Rightarrow \|x(t)\| \leqslant \|x(0)\| + \frac{2\|y(0)\|}{\varepsilon}$$

   Таким образом, решение ограничено для любой начальной точки.

3. Покажем, что решение сходится к состоянию равновесия. $\forall t_k \to \infty \Rightarrow x(t_k)$ ограничена, тогда выделим сходящуюся подпоследовательность. Не ограничивая общности:

$$x(t_k) \to \bar{x}$$

$$0 \leftarrow y(t_k) = \dot{x}(t_k) = F(x(t_k)) \to F(\bar{x})$$

$$\Downarrow$$

$$F(\bar{x}) = 0$$

4. Теперь покажем, что $x(t) \to \bar{x}$. Выберем кольцо вокруг $\bar{x}$, где нет других особых точек:

$$\delta < \|x - \bar{x}\| < 2\delta.$$

   Обозначим $\min\limits_{\delta < \|x-\bar{x}\| < 2\delta} \|F(x)\| = \gamma_\delta > 0$. В силу стремления y к нулю, найдётся такой момент T такой, что

$$\forall t > T \Rightarrow \|y(t)\| \leq \frac{\gamma_\delta}{2}$$

$$\exists k : t_k > T,\ \ \|x(t_k) - \bar{x}\| < \delta$$

   Тогда вся траектория с момента времени t_k не может пересечь кольцо, т.к. иначе в нём

$$\|F(x(t))\| \geqslant \gamma_\delta > \frac{\gamma_\delta}{2} > \|y(t)\| = \|\dot{x}(t)\| = \|F(x(t))\|.$$

   Таким образом, для любого малого δ найдётся такой момент времени t_k, начиная с которого траектория не выходит за δ-окрестность $\bar{x}$, т.е.

$$x(t) \to \bar{x}$$

5. Покажем, что нет других особых точек, кроме нуля. Действительно, для всех особых точек строим области притяжения, которые открыты в силу непрерывной зависимости траектории от начальных данных. Пусть A_1 — область притяжения нуля, A_2 — объединение остальных областей притяжения. Тогда
$$\mathbb{R}^n = A_1 + A_2.$$
Т.е. $\mathbb{R}^n$ представимо в виде прямой суммы двух открытых множеств, что противоречит связности R^n.

6. Для глобальной асимптотической устойчивости нуля можно вместо п.4 рассмотреть $V(x) = F'(x)F(x)$, тогда
$$\frac{dV}{dt} = F'J'F + F'JF = F'(J' + J)F \leqslant -\varepsilon\|F\|^2.$$

□

7. Лекция 7.

7.1 Нестационарные системы.

$$\dot{x} = f(t, x, u) \tag{7.1}$$

Теперь $u = u(t, x)$ и, как обычно, $f(t, 0, 0) = 0,\ u(t, 0) = 0$. Тогда $u = u[t] = u(t, x(t))$, замыкание определяем очевидным образом и
$$J(u) = \int\limits_{t_0}^{\infty} f_0(t, x(t), u[t])dt$$

Определение 17. ***Оптимальным стабилизирующим*** *будем называть такое управление u_0, для которого замкнутая система асимптотически устойчива, и для любого стабилизирующего и выполнено $J(u_0) \leqslant J(u)$.*

Обозначим $\frac{dV}{dt} + f_0(t, x, u) = B[V, t, x, u]$. Тогда уравнение Г-Я-Б: $\min\limits_u B[V, t, x, u] = 0$.

Теорема 18 (Красовский Н.Н.)**.** *Пусть $\exists V(t, x) > 0$ при $x \neq 0$, $V(t, 0) = 0$, определенная в шаре $||x|| \leqslant H$, допускающая бесконечно малый высший предел и $\exists u^0(t, x)$ такие, что*

1. *$f_0(t, x, u^0(t, x)) > 0$ при $x : \|x\| \leqslant H, x \neq 0$*
2. *$B[V, t, x, u^0(t, x)] = 0$ при $t \geqslant t_0, \|x\| \leqslant H$*
3. *$B[V, t, x, u] \geqslant 0$ при $t \geqslant t_0, \|x\| \leqslant H, \forall u$*

Тогда u^0 — оптимальное стабилизирующее управление.

Доказательство. Так как $V(t,x)$ допускает бесконечно малый высший предел, то $0 < V(t,x) \leqslant w(\|x\|), w(0)=0$. Из первого и второго условия следует, что $\frac{dV}{dt} = -f_0(t,x,u^0(t,x)) < 0$. Получаем, что $\exists$ положительно определенная $V(t,x)$, допускающая бесконечно малый высший предел, полная производная которой отрицательно определена $\Rightarrow$ нулевое состояние системы ассимптотически устойчиво. Поэтому $\exists\eta, \exists h < H$:

$$\sup_x\{V(t,x) : \|x\| \leqslant \eta\} < \inf_x\{V(t,x) : \|x\| = h\}$$

Следовательно, решение, начинающееся в $||x|| \leqslant \eta$, будет оставаться в шаре радиуса h и $u \to 0$ при $t \to \infty$.

Далее покажем оптимальность.

$$V(T, x(T)) - V(t_0, x^0) = -\int\limits_{t_0}^{T} f_0(t,x,u^0(t,x))dt$$

Т.к. u_0 — стабилизирующее управление, то $x(T) \to 0$ при $T \to \infty$. Из условия $V(t,0)=0$ получаем, что

$$-V(t_0,x^0) = -J(u^0)$$

Из условия 3 теоремы получаем, что

$$-V(t_0,x^0) \geqslant -J(u),$$

то есть u^0 — оптимально.

7.2 Обратная задача стабилизации.

В этом пункте будем решать обратную задачу стабилизации — нахождение оптимального стабилизирующего управления и J по $V(t,x)$.

Рассмотрим систему с линейным управлением:

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u \tag{7.2}$$

$$f(0) = 0$$

$$J = \int\limits_0^{\infty} (l(x) + u'R(x)u)dt,$$

$l(x) > 0, R(x) > 0$, $V(x)$ — гладкая. Будем искать условия на $V(x)$, при которых можно будет построить оптимальное глобально стабилизирующее управление. Запишем уравнение Гамильтона-Якоби-Беллмана:

$$\min_u\{V'_x f(x) + V'_x g(x)u + l(x) + u'R(x)u\} = 0$$

Дифференцируя по u, получим:

$$g'(x)V'_x + 2R(x)u = 0$$

Откуда найдем управление, минимизирующее $V(x)$:

$$u^0(x) = -\frac{1}{2}R^{-1}(x)g'(x)V'_x$$

Отметим, что $u^0(x)$ не зависит от $l(x)$. Вводя ограничения на $l(x)$, будем достигать нужного результата. Предположим, что выполнено соотношение:

$$l(x) = -V_x' f(x) + \frac{1}{4} V_x' g(x) R^{-1} g' V_x' > 0$$

Тогда

$$\frac{dV}{dt}|_{\frac{u^0(x)}{2}} = V_x' f(x) - \frac{1}{4} V_x' g(x) R^{-1} g' V_x' = -l(x) < 0$$

Последнее неравенство следует из нашего ограничения на $l(x)$. Предположим также, что $V(x) \to \infty$ при $\|x\| \to \infty$. Тогда $\frac{u_0(x)}{2}$ стабилизирует исходную систему. Отметим, что $\forall \alpha \geqslant \frac{1}{2}$ управление αu^0 также стабилизирует систему (поскольку неравенство на производную $V(x)$ будет выполняться). То есть u_0 — стабилизатор. Т.к. на u_0 достигается минимум в уравнении Гамильтона-Якоби-Беллмана, то u_0 — оптимальное.

Таким образом, были получены два предположения, на основе которых можно сформулировать теорему о решении обратной задачи. Но сначала дадим определение.

Определение 18. *Пусть $u(x)$ — стабилизирующее управление. Назовем (m_1, m_2) интервалом устойчивости $u(x)$, если $u_\alpha(x) = (1+\alpha)u(x)\ \forall \alpha \in (m_1, m_2)$ - стабилизирующие управления.*

Теорема 19. *Пусть $\exists V(x)$ — функция цены, $V(x) > 0$ при $x \neq 0$, $V(x) \to \infty$ при $\|x\| \to \infty$. Пусть $\exists l(x)$, определяемая как*

$$l(x) = -V_x' f(x) + \frac{1}{4} V_x' g(x) R^{-1} g' V_x' > 0$$

Тогда $u^0(x) = -\frac{1}{2} R^{-1}(x) g'(x) V_x'$ является управлением, глобально стабилизирующим исходную систему. Оно имеет интервал устойчивости $(-\frac{1}{2}, \infty)$ и доставляет минимум функционалу $J = \int\limits_0^\infty (l(x) + u'(x) R^{-1}(x) u(x)) dt$

Доказательство. Отметим, что проверять условие на $l(x)$ не очень удобно. Поэтому попытаемся вывести условие на $V(t,x)$, которое бы гарантировало выполнения неравенства на $l(x)$. Сделаем это в ходе решения второй задачи. Будем искать условия на $V(t,x)$, при которых можно будет построить функционал J и оптимальное стабилизирующее управление.
Положим

$$b'(x) = V_x' g(x)$$

$$a(x) = V_x' f(x)$$

Выпишем первое из условий на $V(t,x)$.
Условие А. *Если $b(x) = 0$ и $x \neq 0$, то $a(x) < 0$*

Замечание. *Если условие 1 не выполнено, то нельзя гарантировать существование стабилизирующего управления. При его выполнении при построенном ниже $p(x)$ будет выполняться условие на $l(x)$ предыдущей теоремы.*

Построим стабилизирующее управление. Рассмотрим:

$$p(x) = \begin{cases} c_0 + \frac{a(x)+\sqrt{a^2(x)+(b'(x)b(x))^2}}{b'(x)b(x)}, b(x) \neq 0 \\ c_0, b(x) = 0 \end{cases}$$

Рассмотрим $u^0(x) = -p(x)b(x)$.

$$\frac{dV}{dt}|_{\frac{u^0}{2}} = a(x) + b'(x)(-\frac{1}{2}p(x)b(x)) = a(x) - \frac{1}{2}p(x)b'(x)b(x) =$$

$$= a(x) + \begin{cases} -\frac{1}{2}c_0 b'b - \frac{1}{2}(a + \sqrt{a^2 + (b'b)^2}), b \neq 0 \\ -\frac{1}{2}c_0 b'b, b = 0 \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{2}(a - \sqrt{a^2 + (b'b)^2}) - \frac{1}{2}c_0 b'b, b \neq 0 \\ a(x), b = 0. \end{cases}$$

Теперь найдем $R(x)$, то есть по сути построим функционал J. Для этого сравним полученное нами управление с выражением для управлениея из предыдущей теоремы.

$$Ip(x) = \frac{1}{2}R^{-1} \to R = \frac{1}{2}p^{-1}I$$

Отметим, что константа c_0 необходима для $\exists p^{-1}$. Ее всегда можно подобрать так, чтобы $p(x) \neq 0$. По предыдущей теореме получаем, что $u^0(x) = -p(x)b(x)$ — стабилизирующее управление для J при так введенном $R(x)$.

Однако для того чтобы $u^0(x)$ было непрерывным в 0, необходимо, чтобы $p(x)$ было непрерывным в 0. Получаем

Условие B. $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \quad \forall x : 0 < ||x|| < \delta \quad \exists u : \|u\| < \varepsilon$ *и*

$$a(x) + b(x)u(x) < 0$$

Условие **B** называют еще свойством малых управлений (small control property).

Пример 6.

$$\dot{x} = x^3 + x^2 u$$

$$V(x) = \frac{1}{2}x^2$$

Будем действовать по изложенным выше схемам:
$V_x = x \Rightarrow a(x) = x^4, b(x) = x^3$
Легко видеть, что условия ***A*** *и* ***B*** *выполнены.*

$$p(x) = c_0 + \frac{x^4 + \sqrt{x^8 + x^{12}}}{x^6}.$$

$u(x) = -p(x)b(x) = -p(x)x^3, u(0) = 0,\ R(x) = \frac{1}{2}p^{-1}$

Упражнение 8. *Выписать $l(x)$.*

Выпишем уравнение Гамильтона-Якоби-Беллмана при $R = 1$:

$$\min_u \{V_x x^3 + V_x x^2 u + l(x) + \frac{1}{2}u^2\} = 0$$

$$u = -V_x x^2$$

$$V_x x^3 - \frac{1}{2} V_x^2 x^4 + l(x) = 0$$

$$V_x = \frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x^2} + 2\frac{l(x)}{x^4}}$$

Выбран корень квадратного уравнения со знаком +, т.к. для корня со знаком − $V_x \to \infty$ *при* $x \to 0$

Упражнение 9. *Посмотреть ассимптотику* V_x *при* $x \to 0$.

Продолжим доказательство

Условие **A** можно записать как:

$$\inf\left(V_x' f(x) + V_x' g(x) u\right) < 0,\ x \neq 0 \tag{7.3}$$

А условие **B** как: $\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0 : \forall x : 0 < \|x\| < \delta\, \exists u : \|u\| < \varepsilon$ и

$$V_x' f(x) + V_x' g(x) u < 0,\ x \neq 0$$

Усилим условие **A** — получим условие **A'**:

$$\exists \text{ положительно определенная функция } \alpha(x) : a(x) \leqslant -\alpha(x),\ \forall x : b(x) = 0,\ x \neq 0 \tag{7.4}$$

Если выполнено условие **B** и **A'**, то можно рассмотреть еще один вид регуляторов:

$$u(x) = -p(x)b(x), \quad \text{где } p(x) = \begin{cases} c_0 + 2\frac{a(x)+\alpha(x)}{b'(x)b(x)}, & a(x) + \alpha(x) > 0 \ \ (b(x) \neq 0) \\ c_0 \end{cases}$$

Вычислим производную функции Ляпунова в силу системы при $\frac{u(x)}{2}$.

$$\frac{dV}{dt}\Big|_{\frac{u(x)}{2}} = a(x) - \tfrac{1}{2}p(x)b'(x)b(x) = a(x) - \begin{cases} \frac{c_0}{2}b'(x)b(x) + a(x) + \alpha(x) \\ \frac{c_0}{2}b'(x)b(x) \end{cases} =$$
$$= \begin{cases} -\frac{c_0}{2}b'(x)b(x) - \alpha(x) \\ -\frac{c_0}{2}b'(x)b(x) + a(x) \end{cases} \leq -\frac{c_0}{2}b'(x)b(x) - \alpha(x)$$

Таким образом производная функции Ляпунова в силу системы оказывается определенно отрицательной. А значит, управление $u(x)$ стабилизирует систему и имеет интервал устойчивости $(-1/2, \infty)$.

Упражнение 10. *Показать, что* $u(x)$ *— гладкая при* $x \neq 0$ *и непрерывна в нуле.*

□