Содержание

Часть I

Введение в теорию случайных процессов с дискретным временем

1 Оператор условного математического ожидания

Здесь и далее будем считать, что задано вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Пусть задана некоторая σ-алгебра $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{F}$. Будем обозначать через $m(\mathcal{A})$ множество всех случайных величин, измеримых относительно $\mathcal{A}$. Например, $m(\mathcal{F})$ – это множество всех случайных величин; $m(\{\varnothing, \Omega\})$ – все константы (неслучайные величины). Введём также обозначение $m_+(\mathcal{A})$ – множество всех *неотрицательных* случайных величин, измеримых относительно $\mathcal{A}$.

Тогда можно ввести оператор **условного математического ожидания** $\mathbb{E}^{\mathcal{A}}$, или в более принятых обозначениях $\mathbb{E}(\,\cdot\,|\mathcal{A})$, действующий на пространстве $m_+(\mathcal{F})$ и отображающий его в пространство $m_+(\mathcal{A})$, удовлетворяющий следующим условиям:

1) Для всех $\xi \in m_+(\mathcal{F})$ выполняется условие измеримости: $\mathbb{E}^{\mathcal{A}} \xi \in m(\mathcal{A})$.

2) Для всех $B \in \mathcal{A}$ справедливо равенство $\mathbb{E}(1_B \xi) = \mathbb{E}(1_B \, \mathbb{E}^{\mathcal{A}} \xi)$.

Каждой величине ξ поставим в соответствие меру μ^ξ, заданную на $\mathcal{F}$ следующим образом:

$$\mu^\xi(B) = \mathbb{E}(1_B \xi).$$

Таким образом, условие 2) можно переписать в следующем виде:

$$\mu\big|_{\mathcal{A}}(B) = \int\limits_B \mathbb{E}^{\mathcal{A}} \xi \, d\mathbb{P}\,\big|_{\mathcal{A}}, \quad \forall B \in \mathcal{A}. \tag{1.1}$$

Фактически, записанное равенство является определением производной Радона-Никодима:

$$\mathbb{E}^{\mathcal{A}} \xi = \frac{d\mu^\xi\big|_{\mathcal{A}}}{d\mathbb{P}\,\big|_{\mathcal{A}}}. \tag{1.2}$$

Поскольку правая часть (1.2), очевидно, удовлетворяет условию 1) определения $\mathbb{E}^{\mathcal{A}}$, равенство (1.2) можно использовать в качестве эквивалентного определения $\mathbb{E}^{\mathcal{A}}$.

Замечание 1.1. *$\mathbb{E}^{\mathcal{A}} \xi$ определено с точностью до почти всюду относительно $\mathbb{P}$.*

Замечание 1.2. *Для того, чтобы определить оператор условного мат.ожидания на знакопеременных случайных величинах, достаточно рассмотреть представление произвольной случайной величины $\xi = \xi_+ - \xi_-$, где*

ξ_+ и ξ_- — неотрицательные случайные величины.
Предположим, что $\mathbb{E}^{\mathcal{A}}\xi_+ \wedge \mathbb{E}^{\mathcal{A}}\xi_- < +\infty$. Тогда считаем, что $\mathbb{E}^{\mathcal{A}}\xi$ определено, и положим:

$$\mathbb{E}^{\mathcal{A}}\xi \overset{def}{=} \mathbb{E}^{\mathcal{A}}\xi_+ - \mathbb{E}^{\mathcal{A}}\xi_-.$$

Таким образом, получаем 4 случая:

1. $\mathbb{E}^{\mathcal{A}}\xi_+ < +\infty, \mathbb{E}^{\mathcal{A}}\xi_- < +\infty \Rightarrow \mathbb{E}^{\mathcal{A}}\xi$ *определено и конечно.*
2. $\mathbb{E}^{\mathcal{A}}\xi_+ = +\infty, \mathbb{E}^{\mathcal{A}}\xi_- < +\infty \Rightarrow \mathbb{E}^{\mathcal{A}}\xi = +\infty$.
3. $\mathbb{E}^{\mathcal{A}}\xi_+ < +\infty, \mathbb{E}^{\mathcal{A}}\xi_- = +\infty \Rightarrow \mathbb{E}^{\mathcal{A}}\xi = -\infty$.
4. $\mathbb{E}^{\mathcal{A}}\xi_+ = +\infty, \mathbb{E}^{\mathcal{A}}\xi_- = +\infty \Rightarrow \mathbb{E}^{\mathcal{A}}\xi$ *не определено.*

Отсюда следует, что $\mathbb{E}^{\mathcal{A}}\xi$ конечно $\Leftrightarrow$ конечны $\mathbb{E}^{\mathcal{A}}\xi_+$ и $\mathbb{E}^{\mathcal{A}}\xi_-$ $\Leftrightarrow$ $\mathbb{E}^{\mathcal{A}}|\xi|$ конечно.

Везде далее мы будем работать с классами эквивалетных случайных величин, поскольку (1.1) никак не изменится, если заменить ξ на экививалентную, а производная Радона-Никодима определена с точностью до множества меры нуль. Таким образом, условное математическое ожидание двух эквивалентных случайных величин совпадает почти наверное. В частности, это позволяет нам рассматривать ξ как элемент из $L_q(\mathbb{P}), q \geqslant 1$.

Рассмотрим некоторые свойства оператора условного математического ожидания:

1. Если ξ_1 и ξ_2 такие, что ОУМО для них определен и конечен, то выполняется свойство линейности ОУМО:

$$\mathbb{E}^{\mathcal{A}}(a_1\xi_1 + a_2\xi_2) = a_1\,\mathbb{E}^{\mathcal{A}}\xi_1 + a_2\,\mathbb{E}^{\mathcal{A}}\xi_2.$$

2. Если $\xi \geq 0$, то и $\mathbb{E}^{\mathcal{A}}\xi \geq 0$.
3. Если $\mathcal{A}_1 \subseteq \mathcal{A}_2 \subseteq \mathcal{F}$, то $\mathbb{E}^{\mathcal{A}_1}\mathbb{E}^{\mathcal{A}_2}\xi = \mathbb{E}^{\mathcal{A}_2}\mathbb{E}^{\mathcal{A}_1}.\xi$, то есть операторы коммутируют:

$$\mathbb{E}^{\mathcal{A}_1}\mathbb{E}^{\mathcal{A}_2}\xi = \mathbb{E}^{\mathcal{A}_2}\mathbb{E}^{\mathcal{A}_1}\xi = \mathbb{E}^{\mathcal{A}_1}\xi$$

Следствие 1.1. *ОУМО - идемпотентный оператор:*

$$(\mathbb{E}^{\mathcal{A}})^2\xi = \mathbb{E}^{\mathcal{A}}\xi$$

ОУМО является проектором, например, на том пространстве, где он конечен. Он проецирует случайную величину ξ, измеримую относительно $\mathcal{F}$, в измеримую относительно $\mathcal{A}$.

4. Если $\eta \in m(\mathcal{A})$, то есть η измерима относительно $\mathcal{A}$, то:

$$\mathbb{E}^{\mathcal{A}}\eta\xi = \eta\,\mathbb{E}^{\mathcal{A}}\xi.$$

Следствие 1.2. *Только константа измерима относительно тривиальной σ-алгебры $\mathcal{C} = \{\emptyset, \Omega\}$:*

$$\mathbb{E}^{\mathcal{C}}\,\xi = \mathbb{E}\,\xi \cdot 1_\Omega$$

Следствие 1.3.

$$\mathbb{E}\,\mathbb{E}^{\mathcal{A}}\,\xi = \mathbb{E}\,\xi$$

5. Для ОУМО выполняется неравенство Йенсена:

$$\mathbb{E}^{\mathcal{A}}\,f(\xi) \geq f\left(\mathbb{E}^{\mathcal{A}}\,\xi\right)$$

где f – это выпуклая функция, $\xi \in D \subseteq \mathbb{R}$ п.н., D – выпуклое и ограниченное множество; считается, что если $\mathbb{E}^{\mathcal{A}}\,f(\xi)$ определено, то и $f\left(\mathbb{E}^{\mathcal{A}}\,\xi\right)$ также определено.

Упражнение 1. *Доказать неравенство Йенсена.*

Доказательство. Так как функция $f(\xi)$ выпуклая, то $\forall x_0 \in \mathbb{R}$ существует λ, такое, что $\forall x \in \mathbb{R}$ выполнено неравенство:

$$f(x) \geq f(x_0) + (x - x_0)\lambda.$$

Пусть $x = \xi, x_0 = \mathbb{E}^{\mathcal{A}}\,\xi$.

$$f(\xi) \geq f(\mathbb{E}^{\mathcal{A}}\,\xi) + (\xi - \mathbb{E}^{\mathcal{A}}\,\xi)\lambda,$$

Теперь действуем ОУМО $\mathbb{E}^{\mathcal{A}}$:

$$\mathbb{E}^{\mathcal{A}}(f(\xi)) \geq \mathbb{E}^{\mathcal{A}}(f(\mathbb{E}^{\mathcal{A}}\,\xi)) + ((\mathbb{E}^{\mathcal{A}}\,\xi - \mathbb{E}^{\mathcal{A}}\,\mathbb{E}^{\mathcal{A}}\,\xi)\lambda),$$

Откуда получаем:

$$\mathbb{E}^{\mathcal{A}}(f(\xi)) \geq f(\mathbb{E}^{\mathcal{A}}\,\xi)\,\mathbb{E}^{\mathcal{A}}\,1_\Omega,$$
$$\mathbb{E}^{\mathcal{A}}(f(\xi)) \geq f(\mathbb{E}^{\mathcal{A}}\,\xi).$$

□

Рассмотрим случайную величину $\xi \in L_q\left(\mathcal{P}\right)$, такую, что :

$$\mathbb{E}\,|\xi|^q < \infty,\ q \in [1, \infty\}$$

Тогда $\mathbb{E}^{\mathcal{A}} : L_q\left(\mathbb{P}\right) \to L_q\left(\mathbb{P}\right)$. Причем:

$$||\xi||_q = \left(\mathbb{E}\,|\xi|^q\right)^{\frac{1}{q}},\ q < \infty \text{ и } ||\xi||_\infty = esssup|\xi|$$

Упражнение 2. *Показать, что ОУМО ограничен, используя неравенство Йенсена.*

Доказательство. Рассмотрим $\xi \in \mathcal{L}_q(\mathbb{P})$, такую, что $\mathbb{E}\,|\xi|^q < \infty, q \geq 1$.
Напомним, что $\|\xi\|_q = (\mathbb{E}(|\xi|^q))^{1/q}\,, q < \infty$,
$\|\xi\|_\infty = esssup|\xi|$.
Покажем ограниченность ОУМО:

$$\|x\| = (\mathbb{E}\,|x|^q)^{1/q}\,,$$
$$\|\,\mathbb{E}^{\mathcal{A}}\,x\|^q = \mathbb{E}\,|\,\mathbb{E}^{\mathcal{A}}\,x|^q \leq \left\{(\mathbb{E}^{\mathcal{A}}\,x)^q \leq \mathbb{E}^{\mathcal{A}}(|x|)^q\right\} \leq$$
$$\leq \mathbb{E}\,\mathbb{E}^{\mathcal{A}}\,|x|^q = \mathbb{E}\,|x|^q.$$

Получаем, что:
$$\frac{\|\,\mathbb{E}^{\mathcal{A}}\,x\|}{\|x\|} \leq 1,$$
Откуда:
$$\|\,\mathbb{E}^{\mathcal{A}}\,\| \leq 1.$$
Если взять $x = 1_\Omega$, то видно, что $\|\,\mathbb{E}^{\mathcal{A}}\,\| = 1$. Откуда получаем, что ОУМО - ограниченный, а следовательно, непрерывный, и для него выполнены все аксиомы счетной аддитивности. □

Упражнение 3. *В случае $q = 2$ ОУМО – ортогональный проектор*
$$\langle \mathbb{E}^{\mathcal{A}}\,\xi, \xi - \mathbb{E}^{\mathcal{A}}\,\xi\rangle = 0$$

Доказательство.
$$\langle \mathbb{E}^{\mathcal{A}}\,\xi, \xi - \mathbb{E}^{\mathcal{A}}\,\xi\rangle = \mathbb{E}\left[(\mathbb{E}^{\mathcal{A}}\,\xi)(\xi - \mathbb{E}^{\mathcal{A}}\,\xi)\right] = \mathbb{E}(\xi\,\mathbb{E}^{\mathcal{A}}\,\xi) - \mathbb{E}\,\mathbb{E}^{\mathcal{A}}\,\xi\,\mathbb{E}^{\mathcal{A}}\,\xi =$$
$$= \mathbb{E}\,\mathbb{E}^{\mathcal{A}}(\xi\,\mathbb{E}^{\mathcal{A}}\,\xi) - \mathbb{E}(\mathbb{E}^{\mathcal{A}}\,\xi\,\mathbb{E}^{\mathcal{A}}\,\xi) = \mathbb{E}(\mathbb{E}^{\mathcal{A}}\,\xi\,\mathbb{E}^{\mathcal{A}}\,\xi) - \mathbb{E}(\mathbb{E}^{\mathcal{A}}\,\xi\,\mathbb{E}^{\mathcal{A}}\,\xi) = 0.$$
□

Упражнение 4. *Показать,что проектор является ортогональным тогда и только тогда, когда он является самосопряженным оператором.*

Доказательство. (a) Докажем, что из ортогональности проектора следует его самосопряженность. Обозначим $\mathcal{L}_1 = Im(P)$, $\mathcal{L}_2 = Ker(P)$, при этом $\mathcal{L}_1 \perp \mathcal{L}_2$, $x = x_1 + x_2$, y=y$_1 + y_2$, где $x_1, y_1 \in \mathcal{L}_1$, $x_2, y_2 \in \mathcal{L}_2$. Тогда:
$$\langle Px, y\rangle = \langle x_1, y_1 + y_2\rangle = \langle x_1, y_1\rangle + \langle x_1, y_2\rangle =$$
$$= \langle x_1, y_1\rangle = \langle x_1, y_1\rangle + \langle x_2, y_1\rangle = \langle x, y_1\rangle = \langle x, Py\rangle.$$
Откуда получаем, что $P = P^*$.

(b) Теперь докажем, что из самосопряженности проектора следует его ортогональность.

$$\langle Px, y\rangle = \langle x, Py\rangle,$$

$$\langle Px, x - Px\rangle = \langle Px, x\rangle - \langle Px, Px\rangle = \langle Px, x\rangle - \langle x, P^*Px\rangle =$$

$$= \langle Px, x\rangle - \langle x, PPx\rangle = \langle Px, x\rangle - \langle x, Px\rangle = 0.$$

Следовательно, оператор P - ортогональный.

□

6. 1_Ω – собственный вектор ОУМО с единичным собственным значением:

$$\mathbb{E}^{\mathcal{A}}\, 1_\Omega = 1_\Omega$$

7. Если $\xi \in m(\mathcal{A})$, то $\mathbb{E}^{\mathcal{A}}\,\xi = \xi$.

Упражнение 5. *Пусть $A_1, A_2, \ldots; \sum_i A_i = \Omega$ — попарно непересекающиеся подмножества Ω. Пусть $\mathcal{A} = \sigma\{(A_1, A_2, \ldots)\}, \mathbb{P}(A_i) > 0$. Доказать, что*

$$\mathbb{E}^{\mathcal{A}}\,\xi = \sum_i \mathbb{E}\,(\xi|A_i)\, 1_{A_i} = \sum_i \left(\mathbb{E}_{A_i}\,\xi\right) 1_{A_i}$$

$$\mathbb{P}^{\mathcal{A}}(A_i) = \mathbb{E}^{\mathcal{A}}\, 1_{A_i}$$

Доказательство. 1.

$$\mu(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{E}_{A_i} \cdot X \cdot \cdot 1_{A_i} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\mathbb{E}(X \cdot 1_{A_i})}{\mathbb{P}(A_i)} 1_{A_i}.$$

2.

$$\mathbb{E}(\mu(x) \cdot \mathbb{E}\, 1_{A_j}) = \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\mathbb{E}(x \cdot 1_{A_i})}{\mathbb{P}(A_i)} \cdot 1_{A_i} \cdot 1_{A_j}\right) = \frac{\mathbb{E}(x 1_{A_j})}{\mathbb{P}(A_j)}\, \mathbb{E}(1_{A_j}) = \mathbb{E}(x 1_{A_j})$$

Откуда: $\mathbb{E}^{\mathcal{A}}\, x = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \mathbb{E}_{A_i}(x) \cdot 1_{A_i}$.

□

Теперь рассмотрим задачу наилучшего приближения в среднеквадратическом случайной величины ξ величиной из $m(\mathcal{A})$: $\|\xi - \eta\|_{L_2} \to \min\limits_{\eta \in m(\mathcal{A})}$.

Упражнение 6. *Показать, что решением этой задачи является ОУМО.*

Доказательство. $\mathbb{E}^{\mathcal{A}}\,\xi$ - ортогональный оператор.

$$\|\xi - \eta\|^2_{L_2} = \mathbb{E}(\xi - \eta)^2 = \mathbb{E}\,\mathbb{E}^{\mathcal{A}}(\xi^2 - 2\xi\eta + \eta^2) = \mathbb{E}(\mathbb{E}^{\mathcal{A}}\,\xi^2 - 2\eta\,\mathbb{E}^{\mathcal{A}}\,\xi + \eta^2) =$$

$$= \mathbb{E}(\mathbb{E}^{\mathcal{A}}\,\xi - \eta)^2 \to \min.$$

Откуда $\eta = \mathbb{E}^{\mathcal{A}}\,\xi$.

□

Упражнение 7. *Пусть случайная величина ξ имеет распределение Коши. Вычислить $\mathbb{E}^{\mathcal{A}}\xi$, если:*

1. $\mathcal{A} = \{\varnothing, \Omega\}$
2. $\mathcal{A} = \sigma(\{(-\infty; 0], (0; +\infty)\})$
3. $\mathcal{A} = \sigma(\{(k-1; k],\ k \in \mathbb{Z}\})$
4. $\mathcal{A} = \mathcal{F}$.

Доказательство. 1. Случайная величина, имеющая распределение Коши не измерима относительно тривиальной σ-алгебры.

2.
$$\mathbb{E}^{\mathcal{A}}\xi = 1_{(-\infty,0]}\,\mathbb{E}_{(-\infty,0]}\,\xi + 1_{(0,\infty)}\,\mathbb{E}_{(0,\infty)}\,\xi.$$
$$\mathbb{E}^{\mathcal{A}}\xi = -\infty \cdot 1_{\omega \le 0} + \infty \cdot 1_{\omega > 0}.$$

3.
$$\mathbb{E}^{\mathcal{A}}\xi = \sum 1_{(n,n+1]}\frac{1}{\mathbb{P}(n, n+1]}\int\limits_{n}^{n+1} x\frac{1}{\pi}\frac{1}{1+x^2}dx < \infty.$$

4.
$$\mathbb{E}^{\mathcal{F}} X = X.$$

$\square$

Рассмотрим $\mathcal{A} = \mathcal{F}_\xi = \sigma(\xi)$ – σ-алгебру, порожденную случайной величиной ξ со значением в польском пространстве и с борелевской σ-алгеброй. Пусть $\eta \in m(\mathcal{F}_\xi)$. Обозначим:

$$\phi_\eta(\xi(\omega)) = \mathbb{E}^{\mathcal{F}^\xi}(\eta).$$

Существование ϕ следует из $\mathcal{F}^\xi$ - измеримости $\mathbb{E}^{\mathcal{F}^\xi}(\eta)$.

Упражнение 8. *Пусть существует условное регулярное распределение $\mathbb{P}_{\eta|\xi=x}$; показать, что тогда*

$$\phi(x) = \mathbb{E}\,(\eta|\xi = x) = \int y d\mathbb{P}_{\eta|\xi=x}$$

Следует сказать несколько слов о свойстве сходимости УМО. Как известно, если последовательность случайных величин сходится по вероятности и равномерно интегрируема, то такая последовательность сходится в пространстве L_1. Поэтому в силу непрерывности ОУМО можно сказать, что если последовательность случайных величин сходится в L_1, то и УМО также будет сходиться. Данные рассуждения можно формализовать в утверждении:

Утверждение 1.1. *Если последовательность случайных величин сходится по вероятности и равномерно интегрируема, то последовательность УМО сходится к УМО предела последовательности случайных величин.*

2 Случайные процессы с дискретным временем.Мартингальное свойство для процессов с дискретным временем. Примеры.

Для описания вероятностных процессов обычного вероятностного пространства $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ становится недостаточно, поэтому введем следующее понятие.

Определение 2.1. ***Фильтрацией*** $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_t,\ t \in T\}$ *называется семейство σ-алгебр со следующими свойствами:*

1) $\mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{F}$.

2) Для $t_1 \leqslant t_2$ выполненяется включение $\mathcal{F}_{t_1} \subseteq \mathcal{F}_{t_2}$.

Иногда $\mathbb{F}$ называют потоком σ-алгебр.

Теперь рассмотрим такую модель: $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$. Этот объект называется **фильтрованным вероятностным пространством**. В рамках этой модели $\mathbb{F}$ интерпретируется как поток информации, а $\mathcal{F}_t$ – информация, доступная к моменту времени t.

Тогда условие 1) из определения фильтрации можно понимать как *достаточность* информации в модели, а условие 2) – как её *аккумуляцию* со временем.

Появление фильтрации $\mathbb{F}$ обусловленно желанием рассматривать *динамику* процесса, формализовать прошлое и будущее.

В данном курсе мы ограничимся изучением моделей с дискретным временем. Будут рассмотрены как случай конечного горизонта ($T = \{0, 1, \ldots, N\}$), так и бесконечного ($T = \{0, 1, \ldots\}$).

Обозначим $\xi = \xi_{\boldsymbol{\cdot}} = \{\xi_t,\ t \in T\}$–случайная последовательность.

Определение 2.2. *Под* ***адаптированной*** *(по отношению к фильтрации $\mathbb{F}$) последовательностью*[1] *будем понимать последовательность ξ_t, такую, что $\xi_t \in m(\mathcal{F}_t)$ для всех $t \in T$.*

Термин "адаптированный процесс"означает, что в то, что мы наблюдаем, входит информация о процессе. Везде далее по умолчанию мы будем говорить об адаптированных процессах с дискретным временем.

Часто рассматривают *каноническую* фильтрацию, порождённую случайной последовательностью, т.е. $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_{\leqslant t} = \sigma\{\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_t\}$.

Введем еще несколько определений:

Определение 2.3. *Адаптированная последовательность ξ называется:*

1) ***Предсказуемой****(относительно $\mathbb{F}$), если $\xi_{t+1} \in m(\mathcal{F}_t)$ для всех $t \in T$.*

2) ***Прогнозируемой****, если $\mathbb{E}^{\mathcal{F}_t}\xi_{t+1}$ определено и конечно.*

[1] В терминологии, используемой А. Н. Ширяевым (см [ ]), адаптированный процесс с дискретным временем называется стохастической последовательностью

*3) **Вполне прогнозируемой**, если ξ прогнозируема на любое количество шагов, т.е. $\mathbb{E}^{\mathcal{F}_t}\xi_{t+s}$ определено и конечно $foralls > t$.*

Определение 2.4. *Вполне прогнозируемый процесс обладает **мартингальным свойством** или является **обощенным мартингалом**, если $\mathbb{E}^{\mathcal{F}_t}\xi_{t+1} = \xi_t$.*
*Аналогично определяются **субмартингальное** ($\mathbb{E}^{\mathcal{F}_t}\xi_{t+1} \geqslant \xi_t$) и **супермартингальное** ($\mathbb{E}^{\mathcal{F}_t}\xi_{t+1} \leqslant \xi_t$) свойства.*

Определение 2.5. ***Мартингалом** называется случайная последовательность ξ, если*

1) ξ обладает мартингальным свойством.

2) $\xi \in L_1$, т.е. $\forall t\ \xi_t \in L_1(\mathbb{P})$.

Аналогично определяются суб- и суперматингалы.

Замечание 2.1. *Мартингал яваляется как суб-, так и супермартингалом.*

Замечание 2.2. *Если*

1) ξ – мартингал, то $\mathbb{E}\,\xi_t = \mathrm{const}$,

2) ξ – супермартингал, то $\mathbb{E}\,\xi_t$ – не возрастает,

3) ξ – субмартингал, то $\mathbb{E}\,\xi_t$ – не убывает.

Определение 2.6. *Процесс $\eta = (\eta_1, \eta_2, \ldots)$ называется **обобщённой мартингал-разностью** (субмартингал- и супермартингал-разностью) относительно фильтрации $\mathbb{F}$, если*

1) η – прогнозируем,

2) $\mathbb{E}^{\mathcal{F}_t}\eta_{t+1} = 0$, ($\geqslant$ и $\leqslant$ соответственно).

*Если дополнительно потребовать $\eta \in L_1$, тогда η называется **мартингал разностью**.*

Замечание 2.3. $\mathbb{E}\,\eta_t = 0,\ \forall t = 1, 2, \ldots, n, \ldots$.

Упражнение 9. *1. Пусть процесс ξ_t обладает мартингальным свойством. Показать, что процесс $\triangle_t = \xi_t - \xi_{t-1}$ является обобщённой мартингал-разностью.*

2. Пусть X_t – такой процесс, что $\triangle_t = X_t - X_{t-1}$ – мартингал-разность. Показать, что для того, чтобы X_t был мартингалом, необходимо и достаточно, чтобы $X_0 \in L_1$.

1. По определению, чтобы процесс $\triangle_t$ являлся обобщённой мартингал-разностью, он должен быть прогнозируемым и должно быть выполнено условие $\mathbb{E}^{\mathcal{F}_t} \triangle_{t+1} = 0$. Проверим выполнение данных условий.

$$\mathbb{E}^{\mathcal{F}_t} \triangle_{t+1} = \mathbb{E}^{\mathcal{F}_t} \xi_{t+1} - \mathbb{E}^{\mathcal{F}_t} \xi_t$$

   Так как процесс ξ_t обладает мартингальным свойством, то

$$\mathbb{E}^{\mathcal{F}_t} \triangle_{t+1} = \xi_t - \mathbb{E}^{\mathcal{F}_t} \xi_t = 0.$$

2. Пусть $X_0 \in \mathcal{L}_1$, тогда, так как $\triangle_t$ - мартингал разность, то $\sum\limits_{s=1}^{t} \triangle_s \in \mathcal{L}_1$ и обладает мартингальным свойством , $t = 0, 1, \ldots$. Следовательно,

$$X_t = X_0 + \sum_{s=1}^{t} \triangle_s,\ t = 0, 1, \ldots \in \mathcal{L}_1$$

   и

$$\mathbb{E}^{\mathcal{F}_t} X_{t+1} = \mathbb{E}^{\mathcal{F}_t} X_0 + \sum_{s=1}^{t+1} \mathbb{E}^{\mathcal{F}_t} \triangle_s = X_0 + \sum_{s=1}^{t} \triangle_s.$$

   Пусть процесс X_t – мартингал, тогда $X_t \in \mathcal{L}_1$ и обладает мартингальным свойством, тогда $X_0 \in \mathcal{L}_1$.

Пример 2.1. *Пусть $Y \in L_1(\mathbb{P})$, пусть задана фильтрация $\mathbb{F}$. Определим последовательность ξ следующим образом: $\xi_t = \mathbb{E}^{\mathcal{F}_t} Y$. Тогда ξ_t будет мартингалом* [2].

Пример 2.2. *Пусть S_0, $\{X_i, i = 1, 2, \ldots\}$ – независимые (в совокупности) случайные величины. Определим $S_t = S_0 + \sum\limits_{i=1}^{t} X_i$.*

Тогда если $\mathbb{E}\, X_i = 0$ и $\mathbb{E}\, S_0 < \infty$, то процесс S_t будет мартингалом для канонической фильтрации. В случае $\mathbb{E}\, X_i \geqslant 0$ получим субмартингал, а если $\mathbb{E}\, X_i \leqslant 0$ – супермартингал.

Пример 2.3. *Пусть R_0, $\{Y_i, i = 1, 2, \ldots\}$ – независимые (в совокупности) случайные величины. Определим $R_t = R_0 \prod\limits_{i=1}^{t} Y_i$. Если $\mathbb{E}\, Y_i = 1$, то R – обобщённый мартингал. Если $R_0 \in L_1(\mathbb{P})$, тогда R – мартингал.*

Упражнение 10. *Показать, что если случайная величина η и σ-алгебра $\mathcal{A}$ независимы, то, если $\mathbb{E}\, \eta$ определено, то*

$$\mathbb{E}^{\mathcal{A}}(\eta) = \mathbb{E}\, \eta$$

[2] Далее будет показано, что такое представление допускают только равномерно интегрируемые мартингалы

Пусть ξ - произвольная случайная величина из $m(\mathcal{A})$. Докажем, что если η и ξ независимы, то $\mathbb{E}^{\mathcal{F}_\xi}\eta = \mathbb{E}\,\eta$.
$\forall B \in \mathcal{F}_\xi\ B = \{\omega : \xi(\omega) \in \xi(B)\}$.

$$1_B = \begin{cases} 1, \omega \in B \\ 0, \omega \in B^c \end{cases}$$

$$\mathbb{P}(\eta \in A, 1_B = 1) = \mathbb{P}(\eta \in A, \xi \in \xi(B)) =$$
$$= \mathbb{P}(\eta \in A)\,\mathbb{P}(\xi \in \xi(B)) = \mathbb{P}(\eta \in A)\,\mathbb{P}(1_B = 1).$$

То есть $\{\eta \in A\} \perp \{1_B = 1\}$, где $\eta \perp \xi$.

$$\forall B \in \mathcal{F}_\xi \int\limits_B \mathbb{E}^{\mathcal{F}_\xi}\eta dP = \int\limits_B \eta dP =$$

$$= \mathbb{E}\,1_B\eta = \mathbb{E}\,1_B\,\mathbb{E}\,\eta$$

$$\forall B \in \mathcal{F}_\xi \int\limits_B \mathbb{E}^{\mathcal{F}_\xi}\eta dP = \int\limits_B \mathbb{E}\,\eta dP \Rightarrow \mathbb{E}^{\mathcal{F}_\xi}\eta = \mathbb{E}\,\eta.$$

Рассмотрим каноническую фильтрацию $\mathbb{F}^t = \sigma(S_0, \xi_1, \ldots, \xi_t)$, где ξ_i - независимые случайные величины, $\mathbb{E}\,\xi_i = 0$. Тогда если $S_0 \in L_1$, то $S_t = S_0 + \sum_{s=1}^t \xi_t \in L_1$ - обобщённый мартингал, а $\triangle S_t = \xi_t$ - обобщённая мартингал-разность. Получаем, что $\triangle S_t$ независимы. Таким образом, из независимости и центрированности приращений следует мартингальное свойство всего процесса в L_1.

Рассмотрим теперь квадратично интегрируемый мартингал, то есть $\xi_t \in L_2$. Тогда справедливо следующее утверждение:

Утверждение 2.1. *Если ξ_y - квадратично интегрируемый мартингал, $\xi_t \in L_2$, то*

$$cov(\xi_t, \xi_s - \xi_t) = 0, s > t$$

или, в более общем виде:

$$cov(\xi_t, \xi_{t_2} - \xi_{t_1}) = 0, t \le t_1 \le t_2$$

Следствие 2.1.

$$cov(\xi_{s_2} - \xi_{s_1}, \xi_{t_2} - \xi_{t_1}) = 0, s_1 < s_2 \le t_1 < t_2$$

Упражнение 11. *Доказать утверждение и следствие.*

Так как $\mathbb{E}^{\mathcal{F}_t} X_{t+1} = X_t$, то $\mathbb{E}\,X_{t+1} = \mathbb{E}\,X_t$.

$$\operatorname{cov}(X_t, X_{t+1} - X_t) = \mathbb{E}\left[(X_t - \mathbb{E}\,X_t)(X_{t+1} - X_t - \mathbb{E}(X_{t+1} - X_t))\right] =$$

$$= \mathbb{E}\left[X_t X_{t+1} - X_t^2\right] - \left(\mathbb{E}\,X_t\,\mathbb{E}\,X_{t+1} - (\mathbb{E}\,X_t)^2\right) = 0,$$

так как $\mathbb{E}(X_{t+1} - X_t) = 0$ и

$$\mathbb{E}(X_t X_{t+1}) = \mathbb{E}\,\mathbb{E}^{\mathcal{F}_t}(X_t X_{t+1}) = \mathbb{E}\,X_t\,\mathbb{E}^{\mathcal{F}_t}\,X_{t+1} = \mathbb{E}\,X_t^2.$$

Утверждение (2.1) показывает, что из мартингального свойства следует некоррелированность приращений, однако не следует их независимость.

Упражнение 12. *Привести пример мартингала с зависимыми приращениями.*

Построим мартингал $(X_t)_{t\geqslant 0}$ с зависимыми приращениями. Пусть X_0 – случайная величина со следующим распределением: $X_0 \in \{-1, 0, 1\}$, $\mathbb{P}(X_0 = -1) = \mathbb{P}(X_0 = 1) = \frac{1}{4}$, $\mathbb{P}(X_0 = 0) = \frac{1}{2}$. Пусть $\triangle X_1 = 0$. Обозначим через ξ_t последовательность независимых случайных величин, принимающих с вероятностью $1/2$ значения -1 и 1. Определим приращения процесса X следующим образом:

$$\triangle X_j = \begin{cases} 0, & \text{если } \triangle X_{j-1} \in \{-1, 1\} \\ \xi_j, & \text{если } \triangle X_{j-1} = 0. \end{cases}$$

Таким образом определённый процесс действительно будет являтся мартингалом с зависимыми приращениями (проверьте это сами!)

Упражнение 13. *Доказать, что у мартингала дисперсия не убывает.*

Пусть, не ограничивая общности, $\mathbb{E}\,X_t = 0$. Запишем мартингальное свойство для процесса X_t: $\mathbb{E}^{\mathcal{F}_t}\,X_{t+1} = X_t$. Возведём обе части в квадрат и возьмем математическое ожидание: $\mathbb{E}(\mathbb{E}^{\mathcal{F}_t}\,X_{t+1})^2 = \mathbb{E}(X_t)^2$. Правая часть равенства представляет собой дисперсию X_t, а левая удовлетворяет неравенству:

$$\mathbb{E}(\mathbb{E}^{\mathcal{F}_t}\,X_{t+1})^2 \leqslant \mathbb{E}(\mathbb{E}^{\mathcal{F}_t}\,X_{t+1}^2) = VarX_{t+1}.$$

То есть $VarX_{t+1} \geqslant VarX_t$.

Упражнение 14. *Показать, что мартингальное свойство* $\mathbb{E}^{\mathcal{F}_t}\,\xi_{t+1} = \xi_t \Leftrightarrow \mathbb{E}^{\mathcal{F}_t}\,\xi_s = \xi_t, t < s$.

Докажем в одну сторону по индукции. Пусть $\mathbb{E}^{\mathcal{F}_t}\,\xi_{t+1} = \xi_t$, тогда

$$\mathbb{E}^{\mathcal{F}_t}\,\xi_{t+2} = \mathbb{E}^{\mathcal{F}_t}\,\mathbb{E}^{\mathcal{F}_{t+2}}\,\xi_{t+1} =$$

$$= \mathbb{E}^{\mathcal{F}_{t+2}}\,\mathbb{E}^{\mathcal{F}_t}\,\xi_{t+1} = \mathbb{E}^{\mathcal{F}_{t+2}}\,\xi_t = \xi_t.$$

Пусть утверждение верно для ξ_{t+k}, докажем для ξ_{t+k+1}:

$$\mathbb{E}^{\mathcal{F}_t}\,\xi_{t+k+1} = \mathbb{E}^{\mathcal{F}_t}\,\mathbb{E}^{\mathcal{F}_{t+k+1}}\,\xi_{t+k} =$$

$$= \mathbb{E}^{\mathcal{F}_{t+k+1}}\,\xi_t = \xi_t.$$

В обратную сторону очевидно.

Пример 2.4 (Цепь Маркова). *Пусть* $(\mathcal{X}, \mathcal{A})$ *– измеримое пространство. Будем рассматривать однородную по времени цепь Маркова* X *со значениями в* $\mathcal{X}$*, т.е. вероятность* $\mathbb{P}(X_{t+h} \in A \big| X_t = x)$ *не зависит от* t*, а только от* h*. Таким образом, для определения* X *достаточно задать переходное ядро* $\mathbb{P}(X_s \in A \big| X_0 = x) = P^s(x, A),\ s = 1, 2, \ldots$ *и начальное распределение* X_0*.*

В силу однородности по времени справедливо:
$P^s = \underbrace{P \cdot P \cdot \ldots \cdot P}_{s\ \text{раз}}$*, т.е.* P^s *– композиция (свертка) ядер* P $(P = P^1)$*.*

Рассмотрим произвольное переходное ядро $Q(x, A)$*. Ему можно поставить в соответствие оператор* Q *такой, что* $Qf(x) = \int Q(x, dy) f(y)$*.*

Определение 2.7. *Функция* f *называется* ***гармонической*** *(инвариантной) по отношению к* Q*, если* $Qf = f$*.*

Вернемся к нашему примеру.

Определение 2.8. *Функция* f *– называется* ***гармонической*** *функцией цепи, если* $P^s f = f$*,* $\forall s$*.*
Если $P^s f \geqslant f$*, тогда* f *– называется* ***субгармонической****, а если* $P^s f \leqslant f$*, тогда* f *называется* ***супергармонической****.*

Пусть $f : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$*.*

Утверждение 2.2. *Пусть* X_t *– марковская цепь.* $Y_t = f(X_t)$ *– мартингал тогда и только тогда, когда* f *является гармонической функцией.*
Y_t *– субмартингал (супермартингал) тогда и только тогда, когда* f *является субгармонической (супергармонической) функцией.*

Доказательство. Пусть $Y_t = f(X_t)$ - мартингал. Тогда $\mathbb{E}^{\mathcal{F}_t} Y_{t+1} = Y_t$.

$$Qf(x) = \mathbb{E}(f(X_{t+1}) \,|X_t = x),$$

$$Qf(X_t) = \int Q(X_t, dy) f(y) = \mathbb{E}^{\mathcal{F}_t} Y_{t+1} = \mathbb{E}^{\mathcal{F}_t} f(X_{t+1}) = f(X_t),$$

следовательно f - гармоническая функция.

Пусть теперь f - гармоническая функция, докажем по индукции, что Y_t является мартингалом:

$$\mathbb{E}^{\mathcal{F}_0} Y_1 = \mathbb{E}^{\mathcal{F}_0} f(X_1) = \mathbb{E}^{\mathcal{F}_0} Pf(X_1) = \mathbb{E}^{\mathcal{F}_0} \int \mathcal{P}(X_1 \in dy | X_0 = X_1) f(y) =$$

$$= Qf(X_0) = \mathbb{E}^{\mathcal{F}_0} f(X_0) = Y_0.$$

$$\mathbb{E}^{\mathcal{F}_1} Y_2 = \mathbb{E}^{\mathcal{F}_1} f(X_2) = \mathbb{E}^{\mathcal{F}_1} Pf(X_2) = \mathbb{E}^{\mathcal{F}_1} \int \mathcal{P}(X_2 \in dy | X_1 = X_2) f(y) =$$

$$= Qf(X_1) = \mathbb{E}^{\mathcal{F}_1} f(X_1) = Y_1.$$

Пусть верно для Y_t, докажем для Y_{t+1}:

$$\mathbb{E}^{\mathcal{F}_{t-1}} Y_t = \mathbb{E}^{\mathcal{F}_{t-1}} f(X_t) = \mathbb{E}^{\mathcal{F}_{t-1}} Pf(X_t) =$$

$$= Qf(X_{t-1}) = \mathbb{E}^{\mathcal{F}_{t-1}} \int \mathcal{P}(X_t \in dy | X_{t-1} = X_t) f(y) = \mathbb{E}^{\mathcal{F}_{t-1}} f(X_{t-1}) = Y_{t-1}.$$

$$\mathbb{E}^{\mathcal{F}_t} Y_{t+1} = \mathbb{E}^{\mathcal{F}_t} f(X_{t+1}) = \mathbb{E}^{\mathcal{F}_t} Pf(X_{t+1}) =$$

$$= Qf(X_t) = \mathbb{E}^{\mathcal{F}_t} \int \mathcal{P}(X_{t+1} \in dy | X_t = X_{t+1}) f(y) = \mathbb{E}^{\mathcal{F}_t} f(X_t) = Y_t.$$

□

2.1 Выпуклое преобразование

Утверждение 2.3. *Пусть ξ_t обладает мартингальным свойством. f - выпуклая функция с областью определения D. Пусть $\xi_t \in D$ почти наверное, тогда:*

1. *ξ_t – обобщённый мартингал;*
2. *$\eta_t = f(\xi_t)$ – субмартингал.*

Доказательство.

$$\mathbb{E}^{\mathcal{F}_{t-1}} \eta_t = \mathbb{E}^{\mathcal{F}_{t-1}} f(\xi_t) \geq f\left(\mathbb{E}^{\mathcal{F}_{t-1}} \xi_t\right) = f(\xi_{t-1}) = \eta_{t-1}$$

□

Замечание 2.4. *Утверждение верно и для случая $\xi_t \in \mathbb{R}^n$. Проверяется покомпонентно.*

Утверждение 2.4. *Пусть $\xi_t \in \mathbb{R}^1$, обладает субмартингальным свойством, f – выпуклая и неубывающая функция, определённая на D. Тогда, если $\xi_t \in D$ почти наверное, то $\eta_t = f(\xi_t)$ также обладает субмартингальным свойством.*

Доказательство.

$$\mathbb{E}^{\mathcal{F}_{t-1}} \eta_t = \mathbb{E}^{\mathcal{F}_{t-1}} f(\xi_t) \geq f\left(\mathbb{E}^{\mathcal{F}_{t-1}} \xi_t\right) \geq f(\xi_{t-1}) = \eta_{t-1}$$

□

3 Интегральное преобразование. Сохранение мартингального свойства при интегральном преобразовании. Игровой смысл мартингала.

3.1 Понятие интегрального преобразования. Основные результаты.

Интегральное преобразование[3] можно определить двумя способами: интегральным и дифференциальным.

Пусть Y – адаптированный и H – предсказуемый процессы. Построим **интегральное преобразование** $Y = H \circ X$ следующим образом:

1. Интегральное представление:

$$Y_t = H_0 X_0 + \sum_{s=1}^{t} H_s \triangle X_s{}^4,\ t = 0, 1, \dots \tag{3.1}$$

   В частности, начальное значение $Y_0 = H_0 X_0$ зафиксировано.

2. Дифференциальное представление:

$$\triangle Y_t = Y_t - Y_{t-1} = H_t \triangle X_t,\ t = 1, 2, \dots \tag{3.2}$$

Чтобы перейти от (3.2) к (3.1), необходимо добавить условие на начальное значение $Y_0 = H_0 X_0$.

Теорема 3.1. *1) Если X – обобщённый мартингал и H – предсказуемый процесс, то $Y = H \circ X$[5] будет обобщённым мартингалом.*

2) Если X – мартингал и H – предсказуемый ограниченный процесс $H_t \in L_\infty$, то $Y = H \circ X$ – мартингал.

Доказательство. 1) Рассмотрим

$$\mathbb{E}^{\mathcal{F}_{t-1}} \triangle Y_t = \mathbb{E}^{\mathcal{F}_{t-1}}(H_t \triangle X_t) = H_t\, \mathbb{E}^{\mathcal{F}_{t-1}} \triangle X_t = 0.$$

То есть $\triangle Y_t$ – обобщённая мартингал-разность.

2)

$$Y_t = H_0 X_0 + \sum_{s=1}^{t} H_s \triangle X_s$$

Из того, что $H_s \in L_\infty$ и $\triangle X_s \in \mathcal{L}_1$, следует

$H_s \triangle X_s \in \mathcal{L}_1$ и $H_0 X_0 \in \mathcal{L}_1$. Таким образом, $Y_t \in \mathcal{L}_1$.

□

[3]Интегральное преобразование в терминологии А.Н. Ширяева называется мартингальным.

[4]Здесь и далее $\triangle X_s = X_s - X_{s-1}$: разность назад, чтобы сохранилось свойство адаптированности.

[5]Здесь необходимо дифференциальное представление.

Замечание 3.1. *Требование существенной ограниченности H практически нельзя ослабить, так как сопряжённым к $L_1(\mathbb{P})$ является пространство $L_\infty(\mathbb{P})$.*

Следующий результат верен только для процессов с дискретным временем.

Теорема 3.2. *Процесс Y является обобщённым мартингалом тогда и только тогда, когда $\exists$ мартингал X и предсказуемый процесс H, такие, что $Y = H \circ X$.*

Доказательство. **Достаточность.** Достаточность уже доказана (см. теорему 3.1).

Необходимость.
1) Положим $H_t = \mathbb{E}^{\mathcal{F}_{t-1}} |\triangle Y_t|$. H_t конечна п.н., т.к. Y_t – обобщённый мартингал и $\mathbb{E}^{\mathcal{F}_{t-1}} \triangle Y_t = 0$.
По построению H_t является предсказуемым.
Обозначим $a^\oplus = \begin{cases} a^{-1}, & a \neq 0 \\ 0, & a = 0 \end{cases}$. Ясно, что $a^\oplus a = 1_{\{a \neq 0\}}$.

Положим $\triangle X_t = H_t^\oplus \triangle Y_t,\ t = 1, 2, \ldots$. Величины H_0 и X_0 можно определить, например, так: $H_0 = 1,\ X_0 = Y_0$. Легко видеть, что $\triangle X_t$ – обобщённая мартингал-разность. Покажем, что $\triangle X_t \in \mathcal{L}_1$.

$$\mathbb{E} |\triangle X_t| = \mathbb{E}\left(|H_t^\oplus| \cdot |\triangle Y_t|\right) = \mathbb{E}\,\mathbb{E}^{\mathcal{F}_{t-1}}\left(|H_t^\oplus| \cdot |\triangle Y_t|\right) = \mathbb{E}\left(|H_t^\oplus| \cdot \mathbb{E}^{\mathcal{F}_{t-1}} |\triangle Y_t|\right) =$$
$$= \mathbb{E}\left(|H_t^\oplus| \cdot |H_t|\right) = \mathbb{E}\, 1_{\left\{\mathbb{E}^{\mathcal{F}_{t-1}} |\triangle Y_t| \neq 0\right\}} \leqslant 1.$$

2) Покажем, что $H_t \triangle X_t = \triangle Y_t$ п.н. Это вытекает из того, что на $\{H_t = 0\}$ выполнено $\{\triangle Y_t = 0\}$ и

$$H_t \triangle X_t = H_t H_t^\oplus \triangle Y_t = 1_{\{H_t \neq 0\}} \triangle Y_t.$$

□

Определение 3.1. *Событие A выполнено на B п.н., если $\mathbb{P}(B \setminus A) = 0$.*

Упражнение 15. *Доказать,что $\mathbb{P}(B \backslash A) = 0 \Leftrightarrow$ либо $\mathbb{P}(B) = 0$, либо $\mathbb{P}(B) > 0$ и $\mathbb{P}(A|B) = 1$*

Доказательство. Пусть $\mathbb{P}(B \backslash A) = 0$ и $\mathbb{P}(B) > 0:$

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(AB)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(AB) + \mathbb{P}(B \backslash A)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(AB + B \backslash A)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(B)} = 1$$

Обратно, если $\mathbb{P}(B) = 0$, то очевидно. Пусть $\mathbb{P}(B) > 0$ и $\mathbb{P}(A|B) = 1:$

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(AB)}{\mathbb{P}(B)} = 1 \Rightarrow \mathbb{P}(AB) = \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(AB + B \backslash A) = \mathbb{P}(AB) + \mathbb{P}(B \backslash A)$$

Следовательно, $\mathbb{P}(B \backslash A) = 0$. □

Упражнение 16. *Пусть* $X \geqslant 0$, $B = \{\mathbb{E}^{\mathcal{A}} X = 0\}$. *Тогда* $X = 0$ *п.н. на* B.

Доказательство. От противного: пусть на множестве $\{\mathbb{E}^{\mathcal{A}} X = 0\}$ множество $\{X > 0\}$ имеет положительную вероятность. Тогда найдём среднее значение на множестве B :

$$\mathbb{E}\left(\mathbb{E}^{\mathcal{A}} X|B\right) = 0$$

С другой стороны,

$$\mathbb{E}\left(\mathbb{E}^{\mathcal{A}} X|B\right) = \mathbb{E}\left(X|B\right) = \mathbb{E}\left(X1_{\{X=0\}}|B\right) + \mathbb{E}\left(X1_{\{X>0\}}|B\right) =$$

$$= \mathbb{E}\left(X1_{\{X>0\}}|B\right) > 0 \text{ (т.к. } \mathbb{P}(\{X > 0\}|B) > 0)$$

Пришли к противоречию. □

3.2 Игровой смысл мартингала

Мартингал-разность $\triangle X_t$ можно интерпретировать как выигрыш игрока на t-ом шаге игры при единичной ставке. Пусть Y_t – капитал игрока к моменту времени t. Тогда $Y_t = Y_{t-1} + H_t \triangle X_t$, где H_t имеет смысл ставки игрока на шаге t. H_t предсказуемо, т.е. ставка игрока на шаге t зависит только от первых $t-1$ шагов игры. Пусть Y_0 – начальный капитал игрока. Тогда процесс капитала игрока вычисляется как $Y = H \circ X$.

Если рассматривать только ограниченные стратегии (что имеет ясный практический смысл), то за конечное время в среднем выиграть в такой игре нельзя. Обратно, если на процессе Y_t нельзя выиграть в среднем, то это мартингал.

Формализуем все вышесказанное в следующей теореме:

Теорема 3.3. *Пусть* $Y = H \circ X$. *Тогда* $\mathbb{E}\, Y_N = \mathbb{E}\, Y_0$ *для любой предсказуемой ограниченной стратегии* H *тогда и только тогда, когда* X *– мартингал.*

Доказательство. Достаточность тривиальна. Покажем необходимость. Зафиксируем произвольное $j \in [0, N]$. Положим $H_i = 0$, для $i \neq j$. Отсюда получаем:

$$\mathbb{E}\, Y_N = \mathbb{E}\, Y_0 + \sum_{s=1}^{N} \mathbb{E}\, H_s \triangle X_s = \mathbb{E}\, Y_0 + \mathbb{E}\, H_j \triangle X_j = \mathbb{E}\, Y_0 + \mathbb{E}\,\mathbb{E}^{\mathcal{F}_{j-1}} H_j \triangle X_j = \mathbb{E}\, Y_0$$

$$\Downarrow$$

$$\mathbb{E}\, H_j\, \mathbb{E}^{\mathcal{F}_{j-1}} \triangle X_j = 0,$$

следовательно, $\mathbb{E}^{\mathcal{F}_{j-1}} \triangle X_j = 0$, т.к. H_j – произвольное, значит $\triangle X_j$ – обобщённая мартингал-разность. □

Лемма 3.1. *1) Пусть* X_t *– обобщённый мартингал,* φ *– выпуклая функция, такая, что* $X_t \in \operatorname{dom} \varphi$ *п.н. Тогда* $Y_t = \varphi(X_t)$ *– обобщённый субмартингал.*

2) Пусть X_t – обобщённый субмартингал, φ – выпуклая, монотонно неубывающая функция, $X_t \in \operatorname{dom} \varphi$ п.н. Тогда $Y_n = \varphi(X_t)$ – обобщённый субмартингал.

Доказательство. Доказательство опирается на неравенство Йенсена для условного мат.ожидания.

1) $\mathbb{E}^{\mathcal{F}_{t-1}} Y_t = \mathbb{E}^{\mathcal{F}_{t-1}} \varphi(X_t) \geqslant \varphi(\mathbb{E}^{\mathcal{F}_{t-1}} X_t) = \varphi(X_{t-1}) = Y_{t-1}$.

2) $\mathbb{E}^{\mathcal{F}_{t-1}} Y_t = \mathbb{E}^{\mathcal{F}_{t-1}} \varphi(X_t) \geqslant \varphi(\mathbb{E}^{\mathcal{F}_{t-1}} X_t)$. В силу того, что X – субмартингал и φ монотонна, продолжим цепочку неравенств:

$$\varphi(\mathbb{E}^{\mathcal{F}_{t-1}} X_t) \geqslant \varphi(X_{t-1}) = Y_{t-1}.$$

□

4 Аддитивное и мультипликативное разложение Дуба. Оболочка Снелла.

4.1 Аддитивное разложение Дуба.

Пусть нам дано вероятностное пространство с фильтрацией $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$. $X = \{X_n, n \geqslant 0\}$ — прогнозируемый процесс, адаптированный к фильтрации $\mathbb{F}$. Для процесса X справедливо следующее утверждение:

Теорема 4.1. *Если X — прогнозируемый процесс, то его можно представить в виде:*

$$X_n = M_n + A_n, \tag{4.1}$$

где $M = \{M_n, n \geqslant 0\}$ — обобщённый мартингал, $A = \{A_n, n \geqslant 0\}$ — предсказуемый процесс, причём это разложение единственно с точностью до выбора M_0 и A_0.

Доказательство. Возьмём произвольную $\mathcal{F}_0$-измеримую случайную величину M_0, и определим процесс M следующим образом:

$$M_n = M_0 + \sum_{i=1}^{n} \Big(X_i - \mathbb{E}^{\mathcal{F}_{i-1}} X_i \Big), \quad n \geqslant 1.$$

Это определение корректно, так как $\mathbb{E}^{\mathcal{F}_{n-1}} X_n$ определено и конечно в силу прогнозируемости X. Покажем, что процесс M обладает мартингальным свойством:

$$\mathbb{E}^{\mathcal{F}_n} M_{n+1} = \mathbb{E}^{\mathcal{F}_n} \Big(M_n + X_{n+1} - \mathbb{E}^{\mathcal{F}_n} X_{n+1} \Big) =$$

$$= M_n + \mathbb{E}^{\mathcal{F}_n} X_{n+1} - \mathbb{E}^{\mathcal{F}_n} X_{n+1} = M_n, \quad n \geqslant 0.$$

Таким образом, — обобщённый мартингал. Определим теперь процесс A:

$$A_n = X_n - M_n, \quad n \geqslant 0$$

Убедимся в том, что процесс A является предсказуемым. A_n можно представить в виде:

$$A_n = A_{n-1} + \Delta A_n$$

Так как A_{n-1} является $\mathcal{F}_{n-1}$-измеримой случайной величиной, то для предсказуемости A достаточно доказать, что ΔA_n является $\mathcal{F}_{n-1}$-измеримой.

$$\Delta A_n = A_n - A_{n-1} = \Delta X_n - \Delta M_n = X_n - X_{n-1} - \Big(X_n - \mathbb{E}^{\mathcal{F}_{n-1}} X_n \Big) =$$

$$= \mathbb{E}^{\mathcal{F}_{n-1}} X_n - X_{n-1}$$

Так как $\mathbb{E}^{\mathcal{F}_{n-1}} X_n$ и X_{n-1} — $\mathcal{F}_{n-1}$-измеримые величины, следовательно, ΔA_n является $\mathcal{F}_{n-1}$-измеримой.

Таким образом, мы построили два случайных процесса:

$$M_n = M_0 + \sum_{i=1}^{n} \Big(X_i - \mathbb{E}^{\mathcal{F}_{i-1}} X_i \Big), \quad n \geqslant 1$$

$$A_n = A_0 + \sum_{i=1}^{n} \Big(\mathbb{E}^{\mathcal{F}_{i-1}} X_i - X_{i-1} \Big), \quad n \geqslant 1$$

$$M_0 + A_0 = X_0,$$

таких, что M — обобщённый мартингал, A — предсказуемая последовательность и выполнено равенство (4.1).

Докажем теперь, что такое разложение единственно с точностью до выбора M_0. Допустим, существует два различных разложения:

$$X_n = M_n + A_n, \quad \text{и} \quad X_n = M'_n + A'_n,$$

таких, что $M_0 = M'_0$. Взяв разность этих двух равенств, придём к следующему соотношению:

$$M'_n - M_n = A_n - A'_n, \quad n \geqslant 0 \tag{4.2}$$

Так как A — предсказуемый процесс, A_n измеримы относительно σ-алгебры $\mathcal{F}_{n-1}$, поэтому, применив к обеим частям равенства (4.2) оператор $\mathbb{E}^{\mathcal{F}_{n-1}}$ и воспользовавшись тем, что процессы M и M' обладают мартингальным свойством, получим:

$$M'_{n-1} - M_{n-1} = A_n - A'_n, \quad n \geqslant 1 \tag{4.3}$$

От равенств (4.2) и (4.3) можем перейти к рекуррентному соотношению:

$$M'_n - M_n = M'_{n-1} - M_{n-1}, \quad n \geqslant 1, \tag{4.4}$$

из которого, с учётом равенства M_0 и M'_0, вытекает, что $M_n = M'_n$ для всех $n \geqslant 0$. А из соотношения (4.2) следует, что $A_n = A'_n$ для всех $n \geqslant 0$. □

Следствие 4.1. *Для того чтобы прогнозируемый процесс X являлся обобщённым субмартингалом, необходимо и достаточно, чтобы последовательность A в разложении* (4.1) *была неубывающей.*

Доказательство. Пусть X является обобщённым субмартингалом, тогда имеет место следующее неравенство:

$$\mathbb{E}^{\mathcal{F}_n} X_{n+1} \geqslant X_n, \quad n \geqslant 0.$$

Воспользуемся разложением (4.1):

$$\mathbb{E}^{\mathcal{F}_n}(M_{n+1} + A_{n+1}) \geqslant M_n + A_n, \quad n \geqslant 0.$$

Так как M — обобщённый мартингал, а A — предсказуемая последовательность, можем записать:

$$M_n + A_{n+1} \geqslant M_n + A_n, \quad n \geqslant 0,$$

откуда следует, что последовательность A неубывающая.

В другую сторону, если A — неубывающая последовательность, то справедлива следующая цепочка соотношений:

$$\mathbb{E}^{\mathcal{F}_n} X_{n+1} = \mathbb{E}^{\mathcal{F}_n}(M_{n+1} + A_{n+1}) = M_n + A_{n+1} \geqslant M_n + A_n = X_n,$$

то есть X — обобщённый субмартингал. Следствие доказано. □

Замечание 4.1. *Если X — обычный субмартингал, тогда, выбирая начальный элемент M_0 из множества $L_1(\mathbb{P})$, получим, что все элементы M_n лежат в этом множестве, то есть последовательность M — мартингал.*

Действительно, при доказательстве теоремы Дуба мы получили рекуррентное соотношение для величин M_n:

$$M_{n+1} = M_n + X_{n+1} - \mathbb{E}^{\mathcal{F}_n} X_{n+1}, \quad n \geqslant 0.$$

Воспользовавшись субмартингальным свойством процесса X, можем записать:

$$M_{n+1} \leqslant M_n + X_{n+1} - X_n, \quad n \geqslant 0.$$

Из этого соотношения следует, что, если $\mathbb{E}\,|M_0| < \infty$, то аналогичное неравенство выполнено для всех других элементов последовательности M, так как:

$$\mathbb{E}\,|M_{n+1}| \leqslant \mathbb{E}\,|M_n + X_{n+1} - X_n| \leqslant \mathbb{E}\,|M_n| + \mathbb{E}\,|X_{n+1}| + \mathbb{E}\,|X_n| < \infty$$

Таким образом, M является мартингалом.

Пример: Пусть $X_n = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n$, где (ξ_n) — независимые случайные величины с распределением $P(\xi_n = \pm 1) = \frac{1}{2}$. Рассмотрим разложение Дуба для субмартингала $H_n = |X_n|,\ n \geq 0,\ X_0 = 0$. В этом случае

$$h_n = \Delta H_n = \Delta |X_n| = |X_n| - |X_{n-1}| = |X_{n-1} + \xi_n| - |X_{n-1}|$$

$$\Delta M_n = h_n - \mathbb{E}^{F_{n-1}} h_n = |X_{n-1} + \xi_n| - \mathbb{E}^{F_{n-1}} (|X_{n-1} + \xi_n|) =$$
$$= |X_{n-1} + \xi_n| - \mathbb{E}^{X_{n-1}} (|X_{n-1} + \xi_n|) = (\mathrm{sign} X_{n-1})\xi_n$$

Таким образом, для мартингала M_n в разложении Дуба имеем:

$$M_n = \sum_{k=1}^{n} (\mathrm{sign} X_{k-1}) \Delta X_k$$

Далее

$$\mathbb{E}^{F_{n-1}} h_n = \mathbb{E}^{X_{n-1}} (|X_{n-1} + \xi_n|) - |X_{n-1}|$$

Заметим, что на множестве $\{\omega : X_{n-1} = i\}$ при $i \neq 0$ правая часть равна нулю. При $i = 0$ правая часть равна единице. Следовательно:

$$A_n = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}^{F_{i-1}} h_i = N\left(1 \leq k \leq n : X_{k-1} = 0\right)$$

И получаем, что

$$|X_n| = \sum_{k=1}^{n} (\mathrm{sign} X_{k-1}) \Delta X_k + N\left(0 \leq k \leq n-1 : X_k = 0\right)$$

Это дискретный аналог формулы Танака.

4.2 Мультипликативное разложение Дуба

Рассмотрим прогнозируемый процесс X_t.

Теорема 4.2. *Для прогнозируемого процесса X_t справедливо следующее представление:*

$$X_t = N_t \cdot B_t \tag{4.5}$$

где N_t – мартингал, B_t – предсказуемый процесс.

Далее будем предполагать, что $X_t \geq 0$. Найдем процесссы N_t и B_t и определим условия существования разложения:

$$\mathbb{E}^{\mathcal{F}_{t-1}} \frac{X_t}{X_{t-1}} = \mathbb{E}^{\mathcal{F}_{t-1}} \frac{N_t B_t}{N_{t-1} B_{t-1}} = \{\text{в силу предсказуемости} B_t\} =$$

$$= \frac{B_t}{B_{t-1}} \mathbb{E}^{\mathcal{F}_{t-1}} \frac{N_t}{N_{t-1}} = \{\text{в силу мартингального свойства} N_t, N_{t-1} \neq 0\} = \frac{B_t}{B_{t-1}}$$

Тогда процесс B_t имеет следующий вид при условии, что $X_{t-1} \neq 0$:

$$B_t = \frac{B_{t-1} \mathbb{E}^{\mathcal{F}_{t-1}} X_t}{X_{t-1}} \tag{4.6}$$

Используя (4.5) и (4.6) имеем:

$$\frac{N_t}{N_{t-1}} = \frac{X_t}{B_t} \frac{B_{t-1}}{X_{t-1}} = \frac{X_t}{\mathbb{E}^{\mathcal{F}_{t-1}} X_t}$$

Откуда получаем, что:

$$N_t = \frac{N_{t-1} X_t}{\mathbb{E}^{\mathcal{F}_{t-1}} X_t} \tag{4.7}$$

Далее будем считать, что выполняются все условия для существования мультипликативного разложения Дуба.

Рассмотрим неотрицательный супермартингал X_t.

Упражнение 17. *Показать, что если неотрицательный супермартингал в некоторый момент времени обратится в ноль, то впоследствии он нулем и останется.*

Доказательство. Имеем, что $X_t \geq 0, \mathbb{E}^{\mathcal{F}_{t-1}} \leq X_{t-1}$.

Докажем, что если существует τ такое, что $X_\tau = 0$, то $X_t = 0, \forall t > \tau$ Воспользуемся мультипликативным разложение:

$$X_t = N_t B_t.$$

В момент $t = \tau$:

$$X_\tau = N_\tau B_\tau = 0,$$

Возможны 2 случая:

1. $N_\tau = 0$. Из (4.7) получаем:

$$N_{\tau+1} = 0 \cdot \frac{X_{\tau+1}}{\mathbb{E}^{\mathcal{F}_{\tau+1}} X_{\tau+1}} = 0,$$

$$\Rightarrow X_{\tau+1} = 0, \Rightarrow N_t = 0, t > \tau, \Rightarrow X_t = 0, t > \tau.$$

2. $B_\tau = 0$, из (4.6) получаем, что $B_t = 0, t > \tau, \Rightarrow X_t = 0, t > \tau$.

□

В этом случае, вообще говоря, нет однозначности в разложении Дуба. Однако мы можем получить однозначное разложение до момента $\tau = \inf\limits_t \{X_t = 0\}$ – первого момента времени, когда процесс X_t обращается в ноль. После этого момента мы можем, например принять $B_\tau = 0, N_\tau = N_{\tau+1} = \dots$.

4.3 Оболочка Снэлла.

Пусть задано вероятностное пространство с фильтрацией $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$ и адаптированная последовательность $\xi = \{\xi_n, n \geqslant 0\}$.

Нас интересует процесс, построенный так, что он:

1. Мажорирует процесс ξ_n.
2. Является обощённым супермартингалом.
3. Является минимальным среди процессов, которые обладают свойствами 1. и 2.

Будем обозначать такой процесс ξ_t^*. Таким образом, ξ_t^* формально определяется свойствами:

1. $\xi_t^* \geq \xi_t$ п.н. $\forall t \in T$ (Обозначение: $\xi^* \geq \xi$).
2. ξ_t^* — обобщённый супермартингал.

3. $\forall \eta \geq \xi : \eta$ — обобщённый супермартингал верно $\eta \geq \xi^*$.

Важно заметить, что существование такого процесса не вытекает из этого определения.

Определение 4.1. *Оболочкой Снелла процесса ξ будем называть наименьший обобщённый супермартингал ξ^*, мажорирующий процесс ξ, т.е.*

$$\xi_n^* \geqslant \xi_n, \quad n \geqslant 0$$

Нас будет интересовать лишь случай дискретного времени с ограниченным горизонтом, то есть $n = 0, 1, \dots, N$. При этом мы покажем, что для любого адаптированного вполне прогнозируемого процесса ξ существует оболочка Снэлла ξ^*, и выведем для неё явные формулы.

Теорема 4.3. *В случае дискретного времени с конечным горизонтом для любого адаптированного вполне прогнозируемого процесса ξ существует оболочка Снэлла ξ^*, причём справедливы следующие рекуррентные соотношения:*

$$\begin{cases} \xi_N^* = \xi_N, \\ \xi_{n-1}^* = \max\Big\{\xi_{n-1}, \mathbb{E}^{\mathcal{F}_{n-1}} \xi_n^*\Big\}, \quad n = 1, \dots, N \end{cases} \tag{4.8}$$

Доказательство. Сначала покажем, что определённый таким образом процесс существует. Достаточным условием существования является предсказуемость процесса ξ_n^*.Так как ξ_n – вполне прогнозируемый, то $\mathbb{E}^{\mathcal{F}_{N-1}} \xi_N$ определено и конечно. Более того, $\xi_N \in L_p$. В силу того, что ОУМО – линейный непрерывный оператор из L_p в L_p получаем, что $\mathbb{E}^{\mathcal{F}_{N-1}} \xi_N = \mathbb{E}^{\mathcal{F}_{N-1}} \xi_N^* \in L_p$. Максимум элементов пространства L_p также лежит в пространстве L_p:

$$\mathbb{E}\,|X_1 \bigvee X_2| \leq \mathbb{E}(|X_1| \bigvee |X_2|) \leq \mathbb{E}\,|X_1| + \mathbb{E}\,|X_2| < \infty, \ X_1, X_2 \in L_p$$

Это означает, что $\xi_{N-1}^* \in L_p$. Далее по индукции получаем, что весь процесс $\xi_n^* \in L_p$. В силу линейности и непрерывности ОУМО $\mathbb{E}^{\mathcal{F}_{n-1}}$ в L_p получаем, что процесс ξ_n^* прогнозируемый, то есть оболочка Снэлла существует.

Теперь, покажем, что процесс ξ_n^* — действительно обобщённый супермартингал (причем, если $\xi_n \in L_1$, то ξ_n^* – настоящий супермартингал). По определению $\xi_n^* \geq \xi_n$. Также по определению имеем:

$$\mathbb{E}^{\mathcal{F}_{n-1}} \xi_n^* \leq \xi_{n-1}^*$$

То есть ξ_n^* – мажорирующий обобщённый супермартингал.

Покажем, что ξ_n^* – минимальный мажорирующий обобщённый супермартингал.

Рассмотрим $\eta_n \geq \xi_n$, $\eta_n \neq \xi_n^*$ – обобщённый супермартингал. Доказательство ведём по индукции:

1. В терминальный момент времени

$$\eta_N \geq \xi_N = \xi_N^*$$

2. Пусть для $n = k, \dots, N$ $\xi_n^* \le \eta_n$. Имеем:

$$\xi_{n-1}^* = \max(\xi_{n-1}, \mathbb{E}^{\mathcal{F}_{n-1}}\, \xi_n^*)$$

По предположению $\eta_{n-1} \ge \xi_{n-1}$ и $\mathbb{E}^{\mathcal{F}_{n-1}}\, \xi_n^* \le \mathbb{E}^{\mathcal{F}_{n-1}}\, \eta_n \le \eta_{n-1}$. Это означает, что $\xi_{n-1}^* \le \eta_{n-1}$, то есть ξ_n^* – минимальный мажорирующий супермартингал.

$\square$

Покажем, что если $\forall n \in [1, N], \xi_n \in L_1$, то $\xi_n^* \in L_1$:

$$\mathbb{E}\,|\xi_N^*| = \mathbb{E}\,|\xi_N| < \infty,$$

$$\mathbb{E}\,|\xi_{n-1}| = \mathbb{E}\left|\max(\xi_{n-1}, \mathbb{E}^{\mathcal{F}_{t-1}}\, \xi_n^*)\right| \le$$

$$\le \mathbb{E}\max(|\xi_{n-1}|, |\,\mathbb{E}^{\mathcal{F}_{t-1}}\, \xi_n^*|) \le \mathbb{E}(|\xi_{n-1}| + |\,\mathbb{E}^{\mathcal{F}_{t-1}}\, \xi_n^*|) \le \mathbb{E}\,|\xi_{n-1}| + \mathbb{E}\,\mathbb{E}^{\mathcal{F}_{t-1}}\,|\xi_n^*| < \infty.$$

Замечание 4.2. *Если случайный процесс ξ_t является обобщённым супермартингалом, то он совпадает со своей оболочкой Снэлла.*

5 Марковские моменты и их свойства. Критерий измеримости в терминальный марковский момент. Остановленный процесс.

Определение 5.1. *Случайная величина τ, принимающая значения на множестве $\{0, 1, \ldots, +\infty\}$, называется* ***марковским моментом****, если*

$$\{\tau \le t\} \in \mathcal{F}_t, \ \forall t = 0, 1, \ldots \tag{5.1}$$

Замечание 5.1. *Очевидно, что (5.1) равносильно $\{\tau = t\} \in \mathcal{F}_t, \quad t = 0, 1, \ldots$.*

В момент времени t на основе имеющейся у нас информации мы можем точно сказать, наступил момент τ или нет.

Непосредственно из определения марковского момента вытекает следующее утверждение:

Лемма 5.1. *Случайная величина τ является марковским моментом тогда и только тогда, когда случайный процесс $\eta = \{I_{\{\tau \leqslant t\}}, \ t = 0, 1, \ldots\}$ является адаптированным к потоку σ-алгебр $\{\mathcal{F}_t, \ t = 0, 1, \ldots\}$.*

Определение 5.2. *Марковский момент называется* ***моментом остановки****, если он конечен, т.е $\mathbb{P}(\tau < +\infty) = 1$.*

Рассмотрим адаптированную последовательность X_n и для неё определим момент τ_A первого достижения множества A как $\tau_A = \inf\{n : X_n \in A\}$. При этом мы используем соглашение $\inf \varnothing = \infty$.

Упражнение 18. *Показать, что τ_A- марковский момент.*

$$\eta = 1_{\tau_A \leqslant t} = 1_{\inf\{t | X_t \in A\} \leqslant t} =$$
$$= 1_{X_1, \ldots, X_{t-1} \notin A, X_t \in A} \in m(\mathcal{F}_t^*)$$

Следовательно, процесс адаптированный.

Для произвольного момента остановки τ определим σ-алгебру событий, которые мы можем наблюдать до случайного момента времени τ.

Определение 5.3. $\mathcal{F}_\tau = \{A \in \mathcal{F} : A \cap \{\tau \leqslant n\} \in \mathcal{F}_n\}$.

Корректность определения вытекает из следующего упражнения:

Упражнение 19. *Доказать, что $\mathcal{F}_\tau$ является σ-алгеброй.*

$$\mathcal{F}_\tau = \{A \in \mathcal{F} : \forall t \ A \cap \{\tau \leqslant t\} \in \mathcal{F}_t\}$$

- $$\Omega \cap \{\tau \leqslant t\} = \{\tau \leqslant t\} \in \mathcal{F}_t \Rightarrow \Omega \in \mathcal{F}_\tau$$

- Пусть $A \in \mathcal{F}_\tau \Rightarrow A \cap \{\tau \leqslant t\} \in \mathcal{F}_t$. $A^c = \Omega \backslash A$.
  $\{\Omega \backslash A\} \cap \{\tau \leqslant t\} = \{\Omega \cap \{\tau \leqslant t\}\} \backslash A$, но $\Omega \cap \{\tau \leqslant t\} \in \mathcal{F}_t \Rightarrow A^c \cap \{\tau \leqslant t\} \in \mathcal{F}_t$.

- Пусть $A_1, A_2 \ldots \in \mathcal{F}_\tau$ и не пересекаются. Пусть $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \in B$ и $B \in \mathcal{F}$. Тогда $B \cap \{\tau \leqslant t\} = \bigcup A_i \cap \{\tau \leqslant t\} \in \mathcal{F}_t$. Следовательно, $B \in \mathcal{F}_\tau$.

Упражнение 20. *1. Доказать, что если $\tau_1 \leqslant \tau_2$, то $\mathcal{F}_{\tau_1} \subseteq \mathcal{F}_{\tau_2}$.*

2. Если τ_1 и τ_2 – моменты остановки, то $\tau_1 \wedge \tau_2$ также будет являться моментом остановки.

1.
$$\mathcal{F}_{\tau_1} = \{A \in \mathcal{F} : A \cap \{\tau_1 \leqslant t\} \in \mathcal{F}_t\},$$
$$\mathcal{F}_{\tau_2} = \{A \in \mathcal{F} : A \cap \{\tau_2 \leqslant t\} \in \mathcal{F}_t\}.$$
Возьмем произвольное событие $B \in \mathcal{F}_{\tau_1}$. Тогда $B \in \mathcal{F}$ и $B \cap \{\tau_1 \leqslant t\} \in \mathcal{F}_t$. $\{\tau_1 \leqslant t\} \subseteq \{\tau_2 \leqslant t\}$, следовательно $B \cap \{\tau_1 \leqslant t\} \subseteq B \cap \{\tau_2 \leqslant t\}$. Поэтому $B \cap \{\tau_2 \leqslant t\} \in \mathcal{F}_t$, то есть $B \in \mathcal{F}_{\tau_2}$.

2. Так как τ_1 и τ_2 - марковские моменты, то случайные процессы $\eta_1 = \{I_{\{\tau_1 \leqslant t\}},\ t = 0, 1, \ldots\}$ и $\eta_2 = \{I_{\{\tau_2 \leqslant t\}},\ t = 0, 1, \ldots\}$ являются адаптированными к потоку σ-алгебр $\{\mathcal{F}_t,\ t = 0, 1, \ldots\}$. Следовательно, случайный процесс $\eta_3 = \eta_1 \wedge \eta_2 = \{I_{\{\tau_1 \wedge \tau_2 \leqslant t\}},\ t = 0, 1, \ldots\}$ также является адаптированным к потоку σ-алгебр $\{\mathcal{F}_t,\ t = 0, 1, \ldots\}$. При этом, так как τ_1 и τ_2 - моменты остановки, то $\mathbb{P}\{\tau_1 \wedge \tau_2 < +\infty\} = 1$, то есть $\tau_1 \wedge \tau_2$ также является моментом остановки.

Теорема 5.1 (Критерий измеримости процесса относительно $\mathcal{F}_\tau$)**.** *Величина $\xi \in m(\mathcal{F}_\tau)$ тогда и только тогда, когда $\zeta_t = \xi 1_{\tau \leq t}$ является адаптированным процессом.*

Упражнение 21. *Доказать критерий.*

$$\zeta_t \in A \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \in A : \{\tau > t\} \cup ((\xi \in A) \cap \{\tau \leqslant t\}) \\ 0 \in A^c : (\xi \in A) \cap \{\tau \leqslant t\} \end{cases} \in \mathcal{F}_t.$$

Пусть X - адаптированный процесс, τ - момент остановки. Введем понятие остановленного процесса.

Определение 5.4. ***Остановленным*** *в момент времени τ процессом мы будем называть процесс $X_n^{(\tau)} = X_{\tau \wedge n}$.*

Можно представлять себе остановленный процесс как

$$X_n^{(\tau)} : \{X_1, X_2, X_3, ..., X_{\tau-1}, X_\tau, X_\tau, ...\}.$$

Если τ – момент остановки, тогда справедлива следующая формула:

$$X_t^{(\tau)} = X_0 + \sum_{k=1}^{\tau} \triangle X_k = X_0 + \sum_{k=1}^{t} \triangle X_k 1_{\{\tau \geqslant k\}}.$$

Нетрудно видеть, что её можно несколько обобщить для случая произвольного t:

$$X_n^{(\tau)} = X_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \triangle X_k 1_{\{\tau \wedge n \geqslant k\}}.$$

Если рассмотреть предсказуемый процесс $H_k = 1_{\tau \geqslant k}$, то можно придать этой сумме более простой вид:

$$X_n^{(\tau)} = X_0 + H \circ X.$$

Из такого представления остановленного процесса сразу вытекает теорема:

Теорема 5.2. *Пусть τ – момент остановки, и X — мартингал (субмартингал, супермартингал, обобщённый мартингал), тогда остановленный процесс X_τ также является мартингалом (соответственно субмартингалом, супермартингалом, обобщённым мартингалом).*

Заключение 5.1. *Допустим, дан ограниченный момент остановки $\tau \leqslant N$. Если X - мартингал, то $\mathbb{E}\, X_\tau = \mathbb{E}\, X_0$,*
если X - субмартингал, то $\mathbb{E}\, X_\tau \geqslant \mathbb{E}\, X_0$,
если X - супермартингал, то $\mathbb{E}\, X_\tau \leqslant \mathbb{E}\, X_0$,

Вообще говоря, для неограниченных моментов остановки такое утверждение неверно.

Лемма 5.2. *Пусть $Y \geqslant 0$ — неотрицательная случайная величина, τ – момент остановки. Тогда*

$$\mathbb{E}^{\mathcal{F}_\tau} Y = \sum_n \mathbb{E}^{\mathcal{F}_n} Y 1_{\{\tau = n\}},$$

или, если обозначить $\xi_n = \mathbb{E}^{\mathcal{F}_n} Y$, то $\mathbb{E}^{\mathcal{F}_\tau} Y = \xi_\tau$.

Доказательство. Прежде всего, $\{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t$ тогда и только тогда, когда $\{\tau = t\} \in \mathcal{F}_t$. Пусть $A \in \mathcal{F}_\tau$. Из определения ОУМО имеем:

$$\mathbb{E}(\mathbb{E}^{\mathcal{F}_\tau} Y) 1_A = \mathbb{E}\, Y 1_A$$

Тогда для доказательства леммы нам надо показать, что

$$\mathbb{E}\, Y 1_A = \mathbb{E}\, \xi_\tau 1_A$$

Покажем это:

$$\mathbb{E}\,\xi_\tau 1_A = \mathbb{E}\left(\sum_{t=1}^{\infty} \mathbb{E}^{\mathcal{F}_t} Y \cdot 1_{\tau=t}\right) 1_A = \sum_{t=1}^{\infty} \mathbb{E}\,\mathbb{E}^{\mathcal{F}_t}\left(Y 1_{\tau=t} 1_A\right) = \mathbb{E}\,Y 1_A \sum_{t=1}^{\infty} 1_{\tau=t} = \mathbb{E}\,Y 1_A$$

Лемма доказана. $\square$

Упражнение 22. *Пусть $\tau_1 \leqslant \tau_2 \leqslant N$ – два ограниченных момента остановки. Доказать, что если X – мартингал, то $\mathbb{E}^{\mathcal{F}_{\tau_1}} X_{\tau_2} = X_{\tau_1}$.*

Воспользуемся только что доказанной леммой:

$$\mathbb{E}^{\mathcal{F}_{\tau_1}} X_{\tau_2} = \sum_{t=1}^{N} \mathbb{E}^{\mathcal{F}_t} X_{\tau_2} 1_{\tau_1=t} = \sum_{t=1}^{N} X_t 1_{\tau_1=t} = X_{\tau_1}.$$

6 Предельное поведение мартингалов. Теорема Дуба. Сохранение мартингального свойства на бесконечности. Достаточное уловие сохранения мартингального свойства в случайный момент времени.

Рассмотрим адаптированный процесс X. Определим число пересечений этим процессом интервала $[a, b]$ до момента времени n снизу вверх: $\nu_n^X[a, b]$.

Утверждение 6.1 (Неравенство Дуба)**.** *Для субмартингала X_n справедлива следующая оценка $\nu_n^X[a, b]$:*

$$\mathbb{E}\,\nu_n^X[A, B] \leqslant \frac{\mathbb{E}(X_n - a)_+}{b - a}.$$

Рассмотрим субмартингал $X_n \in \mathcal{L}_1$, такой, что $\mathbb{E}\,X_n^+ \leqslant C < \infty$. Поскольку X_n^+ – неотрицательный субмартингал, $\mathbb{E}\,X_n^+ \uparrow D < \infty$. Также нетрудно заметить, что $\mathbb{E}\,X_n \uparrow d < \infty$.

Теорема 6.1 (о сходимости)**.** *Пусть X_n – субмартингал из $\mathcal{L}_1$ и $\mathbb{E}\,X_n^+ \leqslant C$. Тогда*

1. $X_n \xrightarrow{п.н.} X_\infty$.
2. $E|X_\infty| < \infty$.

Доказательство. Для начала покажем, что условие теоремы может быть изменено, а именно:

$$\mathbb{E}\,X_n^+ \leqslant C \Leftrightarrow \mathbb{E}\,|X_n| \leqslant \tilde{C}$$

Действительно, это видно из следующей цепочки неравенств (последнее следует из того, что X_n – субмартингал):

$$\mathbb{E}\,X_n^+ \leqslant \mathbb{E}\,|X_n| = 2\,\mathbb{E}\,X_n^+ - \mathbb{E}\,X_n \leqslant 2\,\mathbb{E}\,X_n^+ - \mathbb{E}\,X_0$$

Далее, применяя неравенство Дуба, получим:

$$\mathbb{E}\,\nu_n^X[a, b] \leqslant \frac{E(X_n - a)^+}{b - a} \leqslant \frac{C}{b - a}.$$

Из теоремы Леви следует, что $\mathbb{E}\,\nu_n^X[a, b] \uparrow \mathbb{E}\,\nu_\infty^X[a, b]$, и $\mathbb{E}\,\nu_\infty^X[a, b] \leqslant \frac{C}{b-a}$. Отсюда вытекает, что $\nu_\infty^X[a, b]$ конечно с вероятностью 1. Для счётного числа произвольных интервалов с вероятностью 1 число пересечений всех интервалов конечно. Поскольку число всевозможных интервалов с рациональными концами счётно, почти наверное X пересекает каждый из них конечное число раз.

Доказательство теоремы проведем от противного. Допустим, последовательность X_n не сходится, то есть $\limsup X_n(w) > \liminf X_n(w)$ с положительной вероятностью. Найдутся рациональные a и b, для которых

$$\mathbb{P}\{\limsup X_n > b > a > \liminf X_n\} > 0,$$

следовательно, $\mathbb{P}\{\nu_\infty^X[a,b]=\infty\}>0$. То есть будет бесконечно много пересечений отрезка $[a,b]$. Полученное противоречие доказывает первую часть теоремы.

Для доказательства второго пункта воспользуемся следующей леммой:

Лемма 6.1 (Лемма Фату)**.** *Пусть последовательность случайных величин ξ_n ограничена снизу: $\xi_n \geqslant \eta$, $\mathbb{E}\,\eta > -\infty$.*

Тогда

$$\mathbb{E}\liminf_{n\to\infty}\xi_n \leqslant \liminf_{n\to\infty}\mathbb{E}\,\xi_n.$$

Доказано, что $|X_n|\to|X_\infty|$.

$$\mathbb{E}\,|X_\infty| = \mathbb{E}\liminf_{n\to\infty}|X_n| \leqslant \liminf_{n\to\infty}\mathbb{E}\,|X_n| \leqslant 2C - \lim_{n\to\infty}\mathbb{E}\,X_n <$$

$$< 2C - \mathbb{E}\,X_0 < \infty.$$

□

Определение 6.1. *Семейство случайных величин $\{\xi_\alpha, \alpha\in I\}$ называется равномерно интегрируемым, если*

$$\sup_{\alpha\in I}\mathbb{E}\,|\xi_\alpha| 1_{|\xi_\alpha|>a} \to 0;\ \text{при } a\to\infty$$

Удобным критерием равномерной интегрируемости является теорема Валле Пуссена:

Теорема 6.2 (Теорема Валле Пуссена)**.** *1. Если существует такая числовая функция $\varphi:[0,\infty)\to[0,\infty)$, что:*

(a) скорость ее роста выше линейной:

$$\frac{\varphi(x)}{x}\to\infty,\ \text{при } x\to\infty$$

(b) верно

$$\sup_{\alpha\in I}\mathbb{E}\,\varphi(|\xi_\alpha|)<\infty,$$

то семейство случайных величин $\{\xi_\alpha, \alpha\in I\}$ равномерно интегрируемо[6]*.*

2. Если семейство $\{\xi_\alpha, \alpha\in I\}$ равномерно интегрируемо, то существует пробная функция φ, монотонно возрастающая и выпуклая[7]*, удовлетворяющая п.1.*

Теорема 6.3. *Пусть X_t – мартингал. Следующие утверждения эквивалентны:*

[6] В книге Ширяева "Основы стохастической финансовой математики"в доказательстве требуется неубывание пробной функции, что является излишним требованием.

[7] Даже строго монотонная и строго выпуклая.

1. *X_t равномерно интегрируем.*

2. *$X_t \to X_\infty^*$ при $t \to \infty$ в L_1 и почти наверное.*

3. *Процесс X_t представляется в виде:*

$$X_t = \mathbb{E}^{\mathcal{F}_t} \zeta, \text{ где } \zeta \in L_1.$$

4. *Можно добавить $X_\infty \in L_1$ – бесконечно удалённую по времени точку – с сохранением мартингального свойства.*

Добавление бесконечно удалённой точки с сохранением мартингального свойства подразумевает:

1. Расширение фильтрации путем добавления $\mathcal{F}_\infty$. При этом для сохранения свойств фильтрации требуется:

$$\forall t : \mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{F}_\infty \subseteq \mathcal{F}.$$

   Если обозначить $\mathcal{F}_\infty^* = \sigma\{X_t, t = 0, 1, \dots\}$, то условия на фильтрацию можно переписать в виде:

$$\mathcal{F}_\infty^* \subseteq \mathcal{F}_\infty \subseteq \mathcal{F}.$$

2. Для адаптированности процесса следует потребовать $X_\infty \in m(\mathcal{F}_\infty)$.

3. Сохранение мартингального свойства означает, что

$$\mathbb{E}^{\mathcal{F}_t} X_\infty = X_t.$$

Замечание 6.1. *Если выбрать $\mathcal{F}_\infty = \mathcal{F}_\infty^*$, то выбор X_∞^* становится однозначным :*

$$X_\infty^* = X_\infty.$$

В общем случае должно выполняться равенство:

$$\mathbb{E}^{\mathcal{F}_\infty^*} X_\infty = X_\infty^*.$$

Доказательство. (Теоремы 6.3)

$4 \Rightarrow 3$ Очевидно, достаточно положить $\zeta = X_\infty$.

$3 \Rightarrow 4$ Положим $X_\infty = \mathbb{E}^{\mathcal{F}_\infty^*} \zeta$. Тогда мартингальное свойство выполняется: $\mathbb{E}^{\mathcal{F}_t} X_\infty = \mathbb{E}^{\mathcal{F}_t} \mathbb{E}^{\mathcal{F}_\infty^*} \zeta = \mathbb{E}^{\mathcal{F}_t} \zeta = X_t$, так как $\mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{F}_\infty^*$. $\mathbb{E}^{\mathcal{F}_\infty^*} : L_1 \to L_1$, а $\zeta \in L_1$, следовательно $X_\infty \in L_1$.

$1 \Rightarrow 2$ Если X_t равномерно интегрируем, то $\sup\limits_{t \in T} \mathbb{E}\,|X_t| < \infty$ в L_1. Тогда по теореме о сходимости этот мартингал сходится, то есть $X_t \to X_t^*$ при $t \to \infty$ почти наверное. Так как X_t при этом равномерно интегрируем, $X_t \to X_t^*$ при $t \to \infty$ и в L_1 (см. Упр 24).

$3 \Rightarrow 1$ Если семейство состоит из одной случайной величины, то оно равномерно интегрируемо, то есть существует такая монотонно возрастающая выпуклая функция $V : [0, \infty) \to [0, \infty)$, что $\frac{V(t)}{t} \xrightarrow[t\to\infty]{} \infty$ и $\mathbb{E}\, V(|\zeta|) < \infty$. Тогда

$$\mathbb{E}\, V(|\,\mathbb{E}^{\mathcal{F}_t}\zeta|) \leq \mathbb{E}\, V(\mathbb{E}^{\mathcal{F}_t}|\zeta|) \leq \mathbb{E}\,|\,\mathbb{E}^{\mathcal{F}_t} V(\zeta|) = \mathbb{E}\, V(|\zeta|) < \infty.$$

Откуда следует, что $\mathbb{E}\, V(|X_t|) < \infty\ \forall t$.

$2 \Rightarrow 3$ Пусть $X_t \to X^*_\infty$, $X^*_\infty \in \mathcal{F}^*_\infty \subseteq \mathcal{F}_\infty \subseteq \mathcal{F}$. Тогда выберем $\zeta = X^*_\infty$. Проверим выполнение мартингального свойства. Рассмотрим произвольное событие A:

$$A \in \bigcup_{t\in T} \mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{F}^*_\infty.$$

Необходимо доказать

$$\mathbb{E}\, 1_A\zeta = \mathbb{E}\, 1_A X_t.$$

Действительно, т.к. $X_s \to X^*_\infty$ в $\mathcal{L}_1 \Rightarrow 1_A X_s \to 1_A X^*_\infty$ в $\mathcal{L}_1$, т.е.

$$\mathbb{E}\, 1_A X_s \to \mathbb{E}\, 1_A X^*_\infty = \mathbb{E}\, 1_A\zeta.$$

А из мартингального свойства следует

$$\mathbb{E}\, 1_A X_t = \mathbb{E}\, 1_A X_s\ \ \forall s > t,$$

т.е. доказано неебходимое равенство.

Теорема доказана. □

Упражнение 23. *Показать, что из равномерной интегрируемости семейства случайных велечин следует их ограниченность по норме* $\mathcal{L}_1$

Доказательство. По определению:

$$\forall \varepsilon > 0\ \ \exists a > 0 :\ \sup_{\alpha\in I} \mathbb{E}\,|\xi_\alpha| 1_{|\xi_\alpha|\geqslant a} < \varepsilon,$$

$$\mathbb{E}\,|\xi_\alpha| = \mathbb{E}\,|\xi_\alpha| 1_{|\xi_\alpha|<a} + \mathbb{E}\,|\xi_\alpha| 1_{|\xi_\alpha|\geqslant a} \leqslant a + \varepsilon.$$

□

Упражнение 24. *Пусть $\xi_n \to \xi$ по вероятности. Доказать, что ξ_n сходится в $\mathcal{L}_1 \Leftrightarrow$ она равномерно интегрируема.*

Доказательство. **Достаточность.** Пусть ξ_n равномерно интегрируема. Покажем, что $\xi_n - \xi$ равномерно интегрируема. Из упражнения 23 следует равномерная ограниченность $\mathbb{E}\,|\xi_n| < C$, тогда по теореме Фату $\mathbb{E}\,|\xi| < C$ и

$$\sup_n \mathbb{E}\,|\xi_n - \xi| 1_{|\xi_n - \xi|\geqslant a} \leqslant 2C \sup_n \mathbb{P}(|\xi_n - \xi| \geqslant a) \to 0.$$

Далее

$$\mathbb{E}\,|\xi_n - \xi| = \mathbb{E}\,|\xi_n - \xi| 1_{|\xi_n - \xi| \geqslant a} + \mathbb{E}\,|\xi_n - \xi| 1_{|\xi_n - \xi| < a} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \mathbb{E}\,|\xi_n - \xi| 1_{|\xi_n - \xi| < a} 1_{|\xi_n - \xi| < \frac{\varepsilon}{4}} + \mathbb{E}\,|\xi_n - \xi| 1_{|\xi_n - \xi| < a} 1_{|\xi_n - \xi| > \frac{\varepsilon}{4}} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{4} + a\mathbb{P}(|\xi_n - \xi| > \frac{\varepsilon}{4}) \to 0.$$

Необходимость.

$$\forall n \;\; \mathbb{E}\,|\xi_n - \xi| 1_{|\xi_n - \xi| \geqslant a} \leqslant \mathbb{E}\,|\xi_n - \xi_m| 1_{|\xi_n - \xi| \geqslant a} + \mathbb{E}\,|\xi_m - \xi| 1_{|\xi_n - \xi| \geqslant a} \leqslant$$

$$\leqslant \{\xi_n \text{ сходятся в } \mathcal{L}_1\} \leqslant \mathbb{E}\,|\xi_n - \xi_m| 1_{|\xi_n - \xi| \geqslant a} + \frac{\varepsilon}{2} \leqslant$$

$$\leqslant 2C\mathbb{P}(|\xi_n - \xi| \geqslant a) + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon \text{ при } a \to \infty.$$

□

7 Оптимальные моменты остановки

Работая с некоторым процессом (например, стоимостью портфеля), мы хотим максимизировать среднее за некоторый промежуток времени. Сделать это можно, напрмер, путем выбора момента остановки (момента ликивдации портфеля). Формализуем выбор такого момента остановки.

Рассмотрим последовательность ξ, заданную на фильтрованном вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$ и адаптированную к фильтрации $\mathbb{F}$. Пусть ξ задана на интервале $[S, T]$. Рассмотрим $\mathcal{T}_{[S,T]}$ – множество всех моментов остановки, принимающих значения из интервала $[S, T]$.

Определение 7.1. *τ^* – оптимальный момент остановки в классе $\mathcal{T}_{[S,T]}$, если $V_S = \mathbb{E}^{\mathcal{F}_s} \xi_{\tau^*} \geq \mathbb{E}^{\mathcal{F}_s} \xi_\tau$ для любого $\tau \in \mathcal{T}_{[S,T]}$.*

Замечание 7.1. *V_s выполняет роль функции цены. Можно интуитивно вывести уравнение Беллмана.*

$$V_T = \mathbb{E}^{\mathcal{F}_T} \xi_{\tau^*} = \mathbb{E}^{\mathcal{F}_T} \xi_T = \xi_T$$

.

Пусть для $V_K = \mathbb{E}^{\mathcal{F}_s} \xi_{\tau^*} \geq \mathbb{E}^{\mathcal{F}_s} \xi_\tau$ для любого $\tau \in [K, T]$. Найдём, чему будет равна V_{K-1}. Рассмотрим два случая. Если $\tau^* = K - 1$, тогда имеем:

$$V_{K-1} = \mathbb{E}^{\mathcal{F}_{K-1}} \xi_{K-1} = \xi_{K-1}$$

Если $\tau^* \in [K, T]$, тогда:

$$V_{K-1} = \mathbb{E}^{\mathcal{F}_{K-1}} \xi_{\tau^*} = \mathbb{E}^{\mathcal{F}_{K-1}} \mathbb{E}^{\mathcal{F}_K} \xi_{\tau^*} = \mathbb{E}^{\mathcal{F}_{K-1}} V_K$$

Получаем, что функция цены является оболочкой Снелла для ξ_t:

$$\begin{cases} V_T = \xi_T, \\ V_{M-1} = \max\left(\xi_{M-1}, \mathbb{E}^{\mathcal{F}_{M-1}} V_M\right), \quad S \leq M < T \end{cases} \tag{7.1}$$

Условное среднее имеет смысл наилучшей оценки при информации, которой мы обладаем к моменту τ. Из определения не следует существование такого момента остановки.

Теорема 7.1.

1. *Для оптимальности момента остановки $\tau^* \in \mathcal{T}_{[S,T]}$ необходимо и достаточно выполнение следующих условий:*

   (a) В момент τ^* процесс совпадает со своей оболочкой Снелла: $\xi_{\tau*} = \xi^*_{\tau^*}$.

   (b) Процесс $\xi_t^{*(\tau^*)} = \xi^*_{\tau^* \wedge t}$ (остановленная оболочка Снелла) является мартингалом.

2. Оптимальный момент существует, и в качестве τ^* можно взять $\tau = \sigma_s = \inf\left\{t \in [S,T] : \xi_t = \xi_t^*\right\}$.

3. $\mathbb{E}^{\mathcal{F}_S}\, \xi_{\tau^*} = \xi_S^*$ (т.е. оболочка Снелла ξ_t^* является функцией цены).

Доказательство. Справедлива цепочка неравенств $\forall \tau \in \mathcal{T}_{[S,T]}$:

$$\xi_S^* = \xi_{\tau\wedge S}^* \geqslant \{\xi^* \text{– супермартингал}\} \geqslant \mathbb{E}^{\mathcal{F}_S}\, \xi_{\tau\wedge T}^* = \mathbb{E}^{\mathcal{F}_S}\, \xi_\tau^* \geqslant \mathbb{E}^{\mathcal{F}_S}\, \xi_\tau. \qquad (7.2)$$

Достаточность. Пусть τ^* удовлетворяет 1a)1b).

$$\xi_S^* = \xi_{\tau^*\wedge S}^* = \{\xi^{*(\tau^*)} \text{ – мартингал}\} = \mathbb{E}^{\mathcal{F}_S}\, \xi_{\tau^*\wedge T}^* = \mathbb{E}^{\mathcal{F}_S}\, \xi_{\tau^*}^* = \{\xi_{\tau^*}^* = \xi_{\tau^*}\} = \mathbb{E}^{\mathcal{F}_S}\, \xi_{\tau^*}.$$

$$\forall \tau\, \mathbb{E}^{\mathcal{F}_s}\, \xi_\tau \leq \xi_s^*.$$

Значит, если такой τ^* существует, то он оптимальный. Заметим, что попутно мы доказали и пункт 3).

Докажем пункт 2). Покажем, что $\sigma_S = \inf\{t : \xi_t = \xi_t^*\}$ – оптимальный момент остановки. Первое условие выполняется автоматически: $\xi_{\sigma_S} = \xi_{\sigma_S}^*$. Покажем, что процесс $t \mapsto \xi_{\sigma_S\wedge t}^*$ является мартингалом.

$$\mathbb{E}^{\mathcal{F}_{t-1}}\, \xi_{\sigma_S\wedge t}^* = \mathbb{E}^{\mathcal{F}_{t-1}}\, 1_{\{\sigma_S\geqslant t\}}\xi_t^* + \mathbb{E}^{\mathcal{F}_{t-1}}\, 1_{\{\sigma_S<t\}}\xi_{\sigma_S}^* = 1_{\{\sigma_S\geqslant t\}}\, \mathbb{E}^{\mathcal{F}_{t-1}}\, \xi_t^* + \mathbb{E}^{\mathcal{F}_{t-1}}\, 1_{\{\sigma_S<t\}}\xi_{\sigma_S}^*.$$

На множестве $\{\sigma_S \geqslant t\}$ $\mathbb{E}^{\mathcal{F}_{t-1}}\, \xi_t^* = \xi_{t-1}^*$. Это следует из следующего. Процесс ξ^* строится на основе рекуррентного соотношения:

$$\xi_{t-1}^* = \xi_{t-1} \vee \mathbb{E}^{\mathcal{F}_{t-1}}\, \xi_t^*,$$

следовательно, а множестве $\{\sigma_S \geqslant t\}$

$$\xi_0 < \xi_0^*, \xi_{t-1} < \xi_{t-1}^*,$$

значит первое слагаемое равно $1_{\{\sigma_S\geqslant t\}}\xi_t^*$. Разберемся теперь со вторым слагаемым $\mathbb{E}^{\mathcal{F}_{t-1}}\, 1_{\{\sigma_S<t\}}\xi_{\sigma_S}^* \cdot 1_{\{\sigma_S<t\}}\xi_{\sigma_S}^*$ измерима относительно $\mathcal{F}_{t-1}$, т.к. $1_{\{\sigma_S<t\}}\xi_{\sigma_S}^* = \sum\limits_{k=1}^{t-1} 1_{\{\sigma_S=k\}}\xi_k^*$, следовательно, второе слагаемое равно $1_{\{\sigma_S<t\}}\xi_{\sigma_S}^*$. Отсюда получаем, что

$$\mathbb{E}^{\mathcal{F}_{t-1}}\, \xi_{\sigma_S\wedge t}^* = \xi_{\sigma_S\wedge(t-1)}^*.$$

Пункт 2) доказан.

Необходимость. Так как ξ_S^* – функция цены (т.е. $\mathbb{E}^{\mathcal{F}_S}\, \xi_{\tau^*} = \xi_S^*$) и (7.2) выполняется для произвольного момента остановки $\tau \in \mathcal{T}_{[S,T]}$, то для $\tau = \tau^*$ в (7.2) вместо неравенств будут равенства.

Упражнение 25. *Проверить, что из $\xi_{\tau\wedge S}^* = \mathbb{E}^{\mathcal{F}_S}\, \xi_{\tau\wedge T}^*$ вытекает мартингальное свойство в любой момент времени.*

□

Рассмотрим разложенние супермартингала $\xi^*_t = M_t - B_t$ на разность мартингала M_t и предсказуемого возрастающего процесса B_t с $B_s = 0$. Определим следующий момент остановки: $\rho_s = \inf\{t \geq s : B_{t+1} > 0\}$. Здесь мы, как всегда, полагаем $\inf \emptyset = T$.

Можно показать, что момент остановки ρ_s является максимальным среди всех оптимальных моментов остановки. Покажем сначала, что это оптимальный момент остановки, проверив два условия Теоремы (7.1) : остановленная оболочка Снэлла в момент ρ_s – это мартингал и $\xi_{\rho_s} = \xi^*_{\rho_s}$. Имеем:

$$\xi^*_{\rho_s \wedge S} = M_{\rho_s \wedge S} - B_{\rho_s \wedge S} = M_{\rho_s \wedge S} \text{ мартинагал}$$

Рассмотрим события $A_K = \{\rho_s = K\}$. Покажем, что $\xi^*_{\rho_s} = \xi_{\rho_s}$ рекуррентно на событиях A_K.

Пусть $K = T$, тогда $\xi^*_T = \xi_T$.

Пусть теперь $S \leq K < T$. По определению оболочка Снэлла ξ^*_K есть максимум из ξ_K и $\mathbb{E}^{\mathcal{F}_K} \xi^*_{K+1}$. Покажем, что $\mathbb{E}^{\mathcal{F}_K} \xi^*_{K+1} < \xi_K$. Действительно:

$$1_{A_K} \mathbb{E}^{\mathcal{F}_K} \xi^*_{K+1} = 1_{A_K} \mathbb{E}^{\mathcal{F}_K} (M_{K+1} - B_{K+1}) = 1_{A_K} (M_K - B_{K+1}) < \xi^*_K,$$

т.к. $B_{K+1} > 0, B_K = 0$ на событии A_K.

Таким образоам ρ_s – оптимальный момент остановки. Покажем, что он максимальный.

Из упражнения 16 вытекает, что $\mathbb{E}^{\mathcal{F}_s} B_\tau > 0$ на множестве $\tau > \rho_s$. Используя это, получим, что

$$\mathbb{E}^{\mathcal{F}_s} \xi^*_\tau = \mathbb{E}^{\mathcal{F}_s} M_\tau - \mathbb{E}^{\mathcal{F}_s} B_\tau = M_s - \mathbb{E}^{\mathcal{F}_s} B_\tau$$

На множестве $A = \{\tau > \rho_s\}$ получаем, что $\mathbb{E}^{\mathcal{F}_s} \xi^*_\tau 1_A < \xi^*_s 1_A$. Поэтому процесс $t \to \xi^*_{\tau \wedge t}$ не может быть мартингалом, и момент τ не является оптимальным. Мы доказали, что ρ_s – максимальный оптимальный момент остановки.

Часть II

Модели финансовых рынков с дискретным временем

8 Введение в финансовые рынки

Основные понятия

Определение 8.1. ***Финансовый рынок*** *– механизм содействия обмену финансовыми активами путем сведения вместе покупателей и продавцов ценных бумаг.*

Под финансовым рынком будем понимать рынок финансовых инструментов, в том числе и акций. В зависимости от вида инструментов финансовые рынки делятся на:

- **фондовые** (stock market) – рынки, на которых обращаются только акции,
- **срочные** (forward market) – рынки, на которых участники договариваются о поставке валюты, финансовых инструментов или товаров на некоторую дату в будущем,
- **валютные** (foreign exchange market) – рынки на которых осуществляются операции с иностранной валютой,
- **товарный рынок** (commodity market) – рынки, на которых осуществляются операции по купле-продаже массовых однородных товаров с определенными параметрами или по образцам

  и другие.

Финансовый рынок выступает основным посредником между инвесторами и организациями, выпускающими ценные бумаги, в капиталистической экономике. Действительно, в нормальной капиталистической системе профицитными являются домашние хозяйства, заинтересованные в коротких вложениях. Промышленность же обычно испытывает дефицит наличных средств и заинтересована в длинных сроках вложения. Использование в такой ситуации коммерческих банков как посредников связано с проблемами с ликвидностью. Рынок финансовых инструментов решает эту проблему.

Биржа созывается для регламентирования торговли и уменьшения кредитных рисков (данное понятие будет определено позже). Предметом нашего интереса будет выступать рынок ценных бумаг. **Ценная бумага** (security) – законодательно признанное свидетельство права на получение ожидаемых в будущем доходов при конкретных условиях. Рынок ценных бумаг подразделяют на:

- **первичный** (primary security market), то есть рынок ценных бумаг, на котором эмитенты размещают новые акции, и
- **вторичный** (secondary security market), то есть рынок, в том числе внебиржевой (over-the-counter market), на котором идет торговля ценными бумагами, выпущенными ранее.

Рынки ценных бумаг также можно классифицировать по сроку обращения финансовых активов:

- **рынок краткосрочного ссудного капитала** (денежный рынок; money market), обычно включающий финансовые активы со сроком погашения до года, и
- **рынок долгосрочного ссудного капитала** (рынок капитала; capital market), на котором обращаются прочие активы.

На рынке капитала происходит торговля акциями, облигациями и производными финансовыми инструментами. **Акция** – ценная бумага, дающая право на часть капитала (собственности). **Облигация** – средство привлечения заёмных средств. Владелец облигации выступает не в качестве собственника, а в качестве кредитора. Основным предназначением рынка капитала является посредничество при распределении капитала от инвестора к эмитенту на определенных условиях, оговоренных в контракте. При этом возникает риск дефолта. **Дефолт** - это неисполнение обязательств контрагентом, повлекшее за собой потери.

Вообще, работа на любом финансовом рынке связана с понятием финансового риска. Управление финансовыми рисками – это основное предназначение рынка производных финансовых инструментов.

Финансовый риск – это возможность понести прямые или косвенные убытки из-за неопределенности на момент принятия решения. Риски, в зависимости от фактора риска, делят на рыночные, кредитные, операционные, юридические, репутационные и т.д. Основными, с точки зрения экономики являются, рыночные и кредитные риски.

Рыночные риски представляют собой относительные потери портфеля, связанные с поведением рынка в будущем. **Портфель** – совокупность ценных бумаг разного вида, разного срока действия и разной ликвидности, управляемая как единый составной актив. В качестве факторов рыночного риска выступают не только цены инструментов портфеля, но и степень изменчивости рынка: волатильность и ликвидность. **Волатильность (volatility)** – некая числовая характеристика изменчивости рынка (амплитуды колебаний). **Ликвидность (liquidity или marketability)** – способность держателя акции продать её по цене, близкой к цене предыдущей покупки этой акции, при условии, что не появилось новой существенной информации со времени предыдущей покупки. Другими словами, это возможность продать актив быстро и не делая существенной уступки в цене.

Рыночные риски, в свою очередь, делятся на валютные, фондовые, товарные и процентные.

Кредитные риски – это возможность понести потери вследствие неисполнения контрагентом своих обязательств.

Операционные риски – это потери от возможного нарушения норм функционирования систем, персонала и т.д.

Юридические риски – это потери в результате судебного спора по контракту.

Принимая на себя кредитные и рыночные риски, мы можем увеличить возможную доходность нашего портфеля.

Для управления рыночными рисками были созданы производные финансовые инструменты.

Финансовый инструмент – правовые отношения, вытекающие из договора или ценной бумаги, в результате которых одновременно возникают финансовый актив у одной стороны и финансовое обязательство – у другой. **Производный финансовый инструмент (derivative; производный по отношению к основе)** – финансовый инструмент, стоимость которого зависит от цены базового актива: валюты или другого финансового инструмента. Например, опцион, фьючерс. **Базовый актив (underlying asset)** – ценная бумага, товар, срочный контракт или другой актив, на покупку или продажу которого выписан опцион, фьючерс или форвард. **Фьючерс** – срочный контракт на бирже (на внебиржевом рынке такой контракт называется **форвардом**, но, в отличие от фьючерса, по форварду выплаты осуществляются только один раз), обязывающий продавца фьючерса поставить (или приобрести), а покупателя – приобрести (или поставить) определённое количество базового актива через определённое время по определённой цене. Фьючерсы различаются по позиции: короткая (фьючерс на продажу) или длинная (фьючерс на покупку).

Крупному агенту может быть выгодно работать на **внебиржевом рынке**, заключая форвардные контракты.

Опционы

Во-первых, опционы различают по виду сделки: бывают оционы **типа call** (на покупку) и опционы **типа put** (на продажу). Опцион call дает право (но не обязанность) на покупку базового актива. Опцион put дает право на приобретение базового актива.

Опционы разделяют также на **стандартные** (европейского и американского типов) и **экзотические** (все остальные). **Опционы европейского типа** – опционы, выплаты по которым осуществляются в некоторый фиксированный (терминальный) момент времени по фиксированной указанной в контракте цене исполнения (strike price). **Опционы американского типа** – опционы, выплаты по которым могут быть произведены в любой момент времени действия контракта, время выбирает владелец опциона. **Экзоти-**

ческие опционы. Среди экзотических опционов можно повстречать, например, такие: опцион lookback (право на покупку за наилучшую цену за время действия контракта), бермудский опцион (выплаты в несколько фиксированных моментов времени), русский опцион (право получить максимум цены акции за время до того момента, в который владелец решил исполнить опцион), барьерные (выплаты зависят от того, достигла ли цена базового актива некоторого уровня за определенный период времени или нет), азиатские (право на покупку по средней цене), опцион chooser (позволяет в будущем выбрать между правом исполнить либо простой опцион колл, либо опцион пут с одинаковыми ценами и датами исполнения).

Существует два основных вопроса:

1) как определить премию опциона;

2) если мы взяли на себя обусловленное обязательство, то как себя вести на рынке, чтобы не остаться в проигрыше (тот, кто берет обязательство, находится в более рискованной позиции, чем его контрагент, т.к. его потери неограничены, а значит, он должен хэджироваться – ср. "to hedge").

Хеджирование позиций

Под хэджированием понимается защита от рисков путём проведения операций на рынке.

Пример. Фьючерсная цена является некоторым прогнозом рынка вперёд. Если защищаем по базовому активу длинную позицию, то занимаем короткую позицию по фьючерсу.

Хеджер – такой участник рынка, целью которого является защита от некоторых рисков путем проведения операций на рынке.
Спекулянт – тот участник рынка, который готов принять на себя риск, исходя из своих ожиданий движения рынка.

Кроме хеджеров и спекулянтов можно еще встретить так называемых liquidity motivated traders – трейдеров, целью которых является управление ликвидностью (обеспечение привлечения и размещения средств).

Для улучшения структуры активов и обязательств и снижения рисков существует **свопы** (swap). Это контракт на обмен процентными выплатами на определённую, заранее оговоренную сумму.

9 Формализация отношения к риску на основе функции полезности фон Неймана – Моргенштерна

Стандартный подход к сравнению полезностей наборов благ — это использование функции полезности. Полезность – это критерий, по которому мы можем определить наши предпочтения.

Определение 9.1. *Бинарным отношением* $\mathcal{R}$ *на множестве* $\mathcal{X}$ *называется подмножество декартового произведения* $\mathcal{X} \times \mathcal{X}$. $\forall x, y \in \mathcal{X}\ \ x\mathcal{R}y \Leftrightarrow (x, y) \in \mathcal{R}$.

Определение 9.2. *Говорят, что бинарное отношение* $\mathcal{R}$ *задаёт нестрогий порядок на множестве* $\mathcal{X}$, *если это отношение*

- *транзитивное* ($\forall x, y, z \in \mathcal{X} : x\mathcal{R}y,\ y\mathcal{R}z \Rightarrow x\mathcal{R}z$),
- *рефлексивное* ($\forall x \in \mathcal{X} \Rightarrow x\mathcal{R}x$),
- *антисимметричное* ($\forall x, y \in \mathcal{X} : x\mathcal{R}y, y\mathcal{R}x \Rightarrow x = y$).

Замечание 9.1. *Далее такое бинарное отношение будем обозначать* $\preceq$.

Определение 9.3. *Порядок* $\preceq$ *называется непрерывным, если множество* $R_y = \{x | x \preceq y\}$ *замкнуто.*

Определение 9.4. *Порядок называется полным, если любые два набора можно сравнить.*

Теорема 9.1 (Дебре). *Если есть полный непрерывный порядок в* $\mathbb{R}^n$, *то*

$$\exists u(x) = u(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

непрерывная и такая, что

$$x \preceq y \Leftrightarrow u(x) \leqslant u(y).$$

Эта теорема позволяет нам говорить о порядках наших предпочтений, используя функции полезности. Отличительной чертой такого задания функции полезности $u(x)$ является его определённость с точностью до монотонно возрастающего преобразования. Действительно, если $\varphi(x)$ монотонно возрастает, тогда

$$x \preceq y \Leftrightarrow u(x) \leqslant u(y) \Leftrightarrow \varphi(u(x)) \leqslant \varphi(u(y)).$$

Однако эта функция не определена на распределениях, т.к. теорема Дебре неприменима к пространству распределений. Поэтому попробуем подойти к проблеме построения функции полезности с другой стороны.

Рассмотрим пространство $\mathbb{X}$ с σ-алгеброй $\mathcal{A}$ и пространство всех распределений $\mathbb{P}$ на $(\mathbb{X},\ \mathcal{A})$.

Можем ввести порядок:

$$P \preceq P' \ \Leftrightarrow\ U(P) \leqslant U(P'),\ \forall P, P' \in \mathbb{P}.$$

Сделаем следующие предположения

1. Порядок полон. Это предположение является наиболее сомнительным, так как непонятно, на каком основании мы имеем возможность сравнивать любые два распределения.

2. Порядок непрерывен. Рассматриваются строго упорядоченные распределения $P_1 \prec P_2 \prec P_3$ и смесь $Q(\alpha) = \alpha P_1 + (1-\alpha)P_3,\ \alpha \in (0,1)$. Тогда под непрерывностью будем понимать

$$\exists \alpha_1 \in (0,1),\ \alpha_2 \in (0,1):\ Q(\alpha_1) \prec P_2 \prec Q(\alpha_2).$$

3. Независимость порядка:

$$\forall \alpha \in (0,1),\ P_1 \preceq P_2\ \Rightarrow\ \alpha P_1 + (1-\alpha)P \preceq \alpha P_2 + (1-\alpha)P.$$

При выполнении указанных условий существует функция $u(x)$ такая, что

$$U(P) = \int u(x)P(dx). \tag{9.1}$$

Определение 9.5. *Функция $u(x)$ в равенстве (9.1) называется функцией полезности фон Неймана – Моргенштерна.*

Если P - распределение случайной величины X, то $U(P) = \mathbb{E}u(X)$. Поэтому функцию $U(P)$ называют ожидаемой полезностью.

Отличительной особенностью этого задания функции полезности $u(x)$ является его определённость с точностью до аффинного преобразования. Действительно, $\forall \varphi(x) = ax + b,\ a > 0$

$$P_1 \preceq P_2 \Leftrightarrow \int u(x)P_1(dx) \leqslant \int u(x)P_2(dx) \Leftrightarrow a\int u(x)P_1(dx) + b \leqslant a\int u(x)P_2(dx) + b$$

$$\Downarrow$$

$$P_1 \preceq P_2 \Leftrightarrow \int \varphi(u(x))P_1(dx) \leqslant \int \varphi(u(x))P_2(dx).$$

Упражнение 26. *Две функции полезности u, u' порождают один и тот же порядок на пространстве $\mathbb{P}$ тогда и только тогда, когда $u' = \varphi \circ u$, где $\varphi(x) = ax + b,\ a > 0$.*

Доказательство. **Достаточность** очевидна.
Необходимость. Определим a и b из системы

$$\begin{cases} u_1(x_1) = au_2(x_1) + b \\ u_1(x_2) = au_2(x_2) + b. \end{cases}$$

Будем доказывать от противного. Пусть $\exists x_3$:

$$u_1(x_3) \neq au_2(x_3) + b$$

Рассмотрим случай, когда $u_2(x_1) \leqslant u_2(x_2) < u_2(x_3)$ (доказательство остальных случаев - аналогично). Пусть

$$P_1 = \alpha\delta_{x_1} + (1-\alpha)\delta_{x_3}, \quad P_2 = \delta_{x_2}.$$

Тогда коэффициент α определим из уравнения

$$\alpha u_2(x_1) + (1-\alpha)u_2(x_3) = u_2(x_2).$$

Очевидно, $U_2(P_1) = U_2(P_2)$, но

$$U_1(P_1) = \alpha u_1(x_1) + (1-\alpha)u_1(x_3) = \alpha(au_2(x_1)+b) + (1-\alpha)u_1(x_3) \neq$$

$$\neq \alpha(au_2(x_1)+b) + (1-\alpha)(au_2(x_3)+b) = au_2(x_2)+b = u_1(x_2) = U_1(P_2).$$

Таким образом, пришли к противоречию с тем, что U_1 и U_2 порождают один порядок. □

9.1 Функция полезности на прямой

Все экономические теории опираются на этот частный случай.

Будем рассматривать функцию полезности $u(x)$, для $x \in \mathbb{R}$. Причём потребуем выполнения следующих свойств от порядка:

1. Ненасыщаемость: $\forall\, x < x' \ \Rightarrow\ u(x) < u(x')$.
2. Умеренность: функция u непрерывна.

Выполнение указанных свойств позволяет ввести понятие безрискового эквивалента. Каждому распределению в случае строго возрастающей функции полезности (ненасыщаемость) можно сопоставить такую точку x_0, для которой распределение, сосредоточенное в ней, эквивалентно заданному распределению P_x:

$$u(x_0) = \mathbb{E}\, u(X), \quad x_0 = u^{-1}(\mathbb{E}\, u(X)).$$

Определение 9.6. *Безрисковым эквивалентом для функции $u(x)$ называется*

$$RLE(P_x) = u^{-1}(\mathbb{E}u(X)).$$

Замечание 9.2. *Для риск-нейтрального случая $x_0 = \mathbb{E}\, X$. Риск-нейтральное поведение можно охарактеризовать линейной функцией полезности $u(x) = x$, или, что то же самое, $u(x) = a + bx$. В этом случае ожидаемая полезность $\mathbb{E}\, u(X) = \mathbb{E}\, X$ не зависит от $VarX$. Поэтому этот случай и называется риск-нейтральным.*

Если безрисковый эквивалент $x_0 < \mathbb{E}\, X$, то ЛПР (лицо, принимающее решение) с такой $u(x)$ не склонно к риску. Это и есть неравенство Йенсена, справедливое для вогнутых функций:

$$\mathbb{E}\, u(X) \leq u(\mathbb{E}\, X).$$

Также можно потребовать от функции полезности необходимой нам гладкости.

Для характеризации степени отвращения к риску введем коэффициенты Эрроу-Прата:

$$A_a = -\frac{u''(x)}{u'(x)} > 0, \quad A_r = -\frac{u''(x)}{u'(x)}x > 0, \quad T_a = \frac{1}{A_a}, \quad T_r = \frac{1}{A_r}.$$

A_a — коэффициент абсолютного локального неприятия риска (КЛАНР) или Arrow-Pratt measure of absolute risk-aversion (ARA), размерность 1/деньги. A_r — относительный коэффициент Эрроу-Прата (КЛОНР) или Arrow-Pratt measure of relative risk-aversion (RRA), безразмерный. T_a, T_r — коэффициенты толерантности. Все четыре коэффициента инвариантны относительно аффинных преобразований и носят локальный характер.

Для применения функции полезности на практике нужны дополнительные предположения, определяющие выбор нужной функции для конкретной задачи. Универсального способа выбора нет. Так, для задачи хэджирования применяется экспоненциальная функция полезности, так как её $A_a = const$, и операции хэджера никак не связаны с величиной первоначального капитала. Поясним этот результат: будем искать функцию полезности, такую, что

$$u(x+w) = a(w)u(x) + b(w), \text{ где } w \text{ – начальный капитал.}$$

Тогда

$$u'(x+w) = a(w)u'(x), \quad u''(x+w) = a(w)u''(x) \Rightarrow \frac{u''(x+w)}{u'(x+w)} = \frac{u''(x)}{u'(x)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{u''(x)}{u'(x)} = const \Rightarrow \ln u'(x) = C_1 x + C_2 \Rightarrow u(x) = \frac{1}{C_1} e^{C_1 x + C_2} + C_3.$$

Т.к. $A_a > 0 \Rightarrow C_1 < 0$, т.е. общий вид такой функции

$$u(x) = -e^{-\lambda x}.$$

Для задачи инвестирования такая функция полезности уже не подходит, т.к. зависимость стратегии инвестирования от начального капитала - вполне разумное требование.

Пример 9.1. *Еще одно семейство функций:* $u'(x) = x^{-\alpha} > 0$, *только для* $x > 0$. *Тогда* $u''(x) = -\alpha x^{-\alpha-1}$.

- $\alpha = 0$, $u(x) = x$.
- $0 < \alpha < 1$, $u(x) = \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}$.
- $\alpha = 1$, $u(x) = \ln(x)$.
- $\alpha > 1$, $u(x) = \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}$.

9.2 Интерпретация теории ожидаемой полезности

Таким образом, введя функцию полезности на прямой, мы смогли с её помощью охарактеризовать отношение к риску. Существует несколько интерпретаций функции полезности.

- **Описательный подход**. Попытка описать поведение людей, принимающих решение, с помощью теории ожидаемой полезности. Слабое место в этом подходе - эффект контекста, который может повлиять на принятие решений.
- **Объясняющий подход**. На основании информации, которая была получена вследствие какого-то поведения людей, попытка подобрать функцию полезности таким образом, чтобы полученные в силу модели результаты не расходились с реальными данными.
- **Позитивистский подход**. Не является важным, верны ли исходные положения. Важно, чтобы следствия из них хорошо подтверждались практикой.
- **Нормативный подход**. Рациональное поведение предполагает соблюдение некоторых принципов. Такими принципами и будут исходные посылки теории ожидаемой полезности.

Мы будем придерживаться последней.

10 Ценообразование и хеджирование. Эффективность рынка. Арбитраж

10.1 Формализация основных понятий и объектов

Хеджирование можно рассматривать как средство управления риском. Введем понятие стоимости портфеля V_t. Будем находить её как сумму цен активов, из которых портфель состоит:

$$V_t = \sum_{i=0}^{d} H_t^i X_t^i = \langle H_t, X_t \rangle .$$

При этом говорят, что выполнено предположение об аддитивности стоимости портфеля.

Определение 10.1. *Обусловленное обязательство называется* ***обязательством европейского типа****, если выплаты возможны только в конечный момент времени N.*

Введем случайный процесс ζ_t — процесс возможных выплат по обязательству европейского типа, $t \in [0, N]$. Процесс ζ_t должен быть адаптированным к $\mathbb{F}$, так как к моменту t величина выплаты определяется только информацией, уже доступной к этому моменту времени.

От функции выплат разумно потребовать измеримости и однородности. Если имеем обусловленное обязательство $\zeta \geq 0$, то оно обязано быть адаптированным к $\mathcal{F}_N$, а это условие эквивалентно тому, что функция выплат для некоторой f представима в виде

$$\zeta = f(X),\ X = \{X_t, t \in [0, N]\}.$$

Условие адаптированности следует понимать так, что функция выплат зависит исключительно от поведения цен рисковых активов и не зависит ни от каких других факторов.

Поскольку было бы странно, если бы выплаты зависели от единиц измерения, то необходимо потребовать от функции выплат и свойства однородности. Поясним сказанное на примере.

Пример 10.1. *Функция выплат опциона типа call $\zeta = (X_T - K)_+$ не является однородной, однако, если взять $K = \kappa \cdot X_0$, с безразмерным коэффициентом κ, то в такой форме ζ однородна.*

Определение 10.2. *Стратегия является* **реплицирующей***, если $V_N = \zeta$. Если $V_N \geqslant \zeta$, то такую стратегию будем называть* **суперреплицирующей**.

Смысл такого определения в том, что в терминальный момент времени продавец опциона всегда сможет расплатиться со своим обязательством.

При небольших премиях опциона таких стратегий может не существовать, однако для достаточно больших премий суперреплицирующие стратегии существуют.

Определение 10.3. *Те обусловленные обязательства, для которых существуют реплицирующие стратегии, называются* **достижимыми (attainable)**.

Продавец опциона получает в начальный момент времени некоторую премию P, а покупатель – право на осуществление в его адрес некоторого платежа, зависящего от процесса цен. Получая премию P и используя стратегию H, продавец обязательства в момент времени t имеет портфель стоимостью V_t.

Формализуем понятие безрисковости. Будем понимать безрисковость с точки зрения краткосрочных операций (операций, занимающих один шаг времени). Математически это означает, что процесс цен X_t^0 предсказуем и не убывает.

Пример 10.2. *Простейшим примером такого "безрискового" процесса может служить детерминированный процесс* $X_t^0 = (1+r)^t X_0$, $r \geqslant 0$.

Определение 10.4. *Под самофинансируемостью будем понимать условие, что на каждом шаге имеющиеся средства перераспределяются между активами без привлечения средств извне.*

Запишем это определение математически:

$$H_{t+1}X_t = H_tX_t. \tag{10.1}$$

Чтобы такое условие выполнялось, предсказуемая последовательность H_t в момент времени t формируется на основании информации $\mathcal{F}_t$ следующим образом:

$$H_{t+1}^0 = \frac{1}{X_t^0}(H_tX_t - \sum_{i=1}^{d} H_{t+1}^i X_t^i). \tag{10.2}$$

Утверждение 10.1. *Следующие два условия эквивалентны:*

$$\Delta V_t \leqslant H_t \Delta X_t$$

и условие

$$H_{t+1}X_t \leqslant H_tX_t$$

Доказательство. Действительно, если $H_{t+1}X_t \leqslant H_tX_t$, то $\triangle V_t = \sum\limits_{i=0}^{d} H_t^iX_t^i - \sum\limits_{i=0}^{d} H_{t-1}^iX_{t-1}^i = \sum\limits_{i=0}^{d}(H_t^iX_t^i - H_{t-1}^iX_{t-1}^i) \leqslant \sum\limits_{i=0}^{d} H_t^i(X_t^i - X_{t-1}^i) = H_t \triangle X_t$. Обратное очевидно. □

10.2 Дисконтирование цен, актуализация

В ряде случаев оказывается возможным свести задачу к эквивалентной исходной (задаче в дисконтированных ценах), но при этом вывести из рассмотрения безрисковый актив. Такой прием называется дисконтированием цен.

Определение 10.5. *Под дисконтированными ценами будем понимать* $\widetilde{X}_t^i$, *определенные следующим образом:*

$$\widetilde{X}_t^i = \frac{X_t^i}{X_t^0}.$$

Из определения непосредственно следует, что $\widetilde{X}_t^0 \equiv 1$, а дисконтированная стоимость портфеля вычисляется по формуле

$$\widetilde{V}_t = \frac{1}{X_t^0} H_t X_t = H_t \widetilde{X}_t,$$

то есть формула для стоимости портфеля сохраняет свой вид при дисконтировании.

Утверждение 10.2. *После дисконтирования свой вид сохраняют условие отсутствия притока капитала и условие самофинансирования, то есть условия отсутствия притока капитала и самофинансирования в дисконтированных ценах выполнены тогда и только тогда, когда они же выполнены в исходной задаче.*

Доказательство. Доказательство тривиально. Например, для условия самофинансирования

$$H_{t+1} X_t = H_t X_t \Leftrightarrow H_{t+1} \frac{X_t}{X_t^0} = H_t \frac{X_t}{X_t^0}.$$

□

Замечание 10.1. *Дисконтирование сводит задачу инвестирования к анализу портфеля с количеством активов на единицу меньшим (в случае самофинансируемых стратегий).*

$$V_t = V_0 + \sum_{s=1}^{t} H_s \triangle X_s,$$

где H_s *– распределения активов в момент времени* s.

Поскольку дисконтированная цена безрискового актива $X_s^0 \equiv 1$, последнее равенство перепишется в следующем виде:

$$\tilde{V}_t = \tilde{V}_0 + \sum_{s=1}^{t} H_s \triangle \tilde{X}_s = \tilde{V}_0 + \sum_{s=1}^{t} (\sum_{i=1}^{m} H_s^i \triangle \tilde{X}_s^i).$$

Как уже говорилось выше, для того, чтобы определить стратегию, нужно знать лишь количество рисковых активов в каждый момент времени, а безрисковый актив можно расчитать из условия самофинансируемости.

10.3 Задача ценообразования и хеджирования

Подход к решению задачи ценообразования и хеджирования основан на теории ожидаемой полезности фон Неймана с экспоненциальной функцией полезности. При этом ценообразование будет зависеть от несклонности к риску:

$$u(x) = -e^{-\lambda x} = -e^{-x/\theta},$$

где λ - КЛАНР, θ - КЛАТР.
При этом ситуация $\lambda \to 0 \Leftrightarrow \theta \to \infty$ соответствует поведению, близкому к риск-нейтральному, а $\lambda \to \infty \Leftrightarrow \theta \to 0$ характеризует крайне осторожное поведение.
Тогда задачу можно формализовать следующим образом:

$$-\,\mathbb{E}\, e^{-\lambda(V_N-\zeta)} \to \max_H .$$

Данную задачу можно переписать в денежном выражении:

$$\frac{1}{-\lambda}\ln\left(-\,\mathbb{E}\, e^{-\lambda(V_N-\zeta)}\right) \to \min_H .$$

$V_N-\zeta = V_0+\sum\limits_{t=1}^{N} H_t \vartriangle X_t-\zeta$. Функцию $\mathbb{E}\, e^{-\lambda(V_0+\sum\limits_{t=1}^{N} H_t \vartriangle X_t-\zeta)}$ можно переписать следующим образом:

$$\mathbb{E}\,\mathbb{E}^{\mathcal{F}_s}\, e^{-\lambda(V_0+\sum\limits_{t=1}^{N} H_t \vartriangle X_t-\zeta)} = \mathbb{E}\,\mathbb{E}^{\mathcal{F}_s}\, e^{-\lambda(V_0+\sum\limits_{t=1}^{s} H_t \vartriangle X_t+\sum\limits_{t=s+1, s<N}^{N} H_t \vartriangle X_t-\zeta)} =$$

$$= \mathbb{E}\,\mathbb{E}^{\mathcal{F}_s}\, e^{-\lambda(V_0+\sum\limits_{t=1}^{s} H_t \vartriangle X_t)}\, e^{-\lambda(\sum\limits_{t=s+1}^{N} H_t \vartriangle X_t-\zeta)} = \mathbb{E}\, e^{-\lambda(V_0+\sum\limits_{t=1}^{s} H_t \vartriangle X_t)}\, \mathbb{E}^{\mathcal{F}_s}\, e^{-\lambda(\sum\limits_{t=s+1}^{N} H_t \vartriangle X_t-\zeta)} =$$

$$= \mathbb{E}\, e^{-\lambda(V_0+\sum\limits_{t=1}^{s} H_t \vartriangle X_t-W_s)}$$

$W_s = -\frac{1}{\lambda}\ln\left(\mathbb{E}^{\mathcal{F}_s}\, e^{-\lambda(\sum\limits_{t=s+1}^{N} H_t \vartriangle X_t-\zeta)}\right)$ - условный безрисковый эквивалент к моменту времени s. Задача оптимального инвестирования соответствует данной при $\zeta = 0$. Если рынок эффективен, то решение такой задачи $H^{**} = 0$. Причиной этому является то обстоятельство, что оптимальной стратегией при нулевой величине конечных выплат будет вложение всех средств в безрисковый актив, то есть, если рынок эффективен с точки зрения избегающего риска инвестора, то на нем в среднем невозможно заработать.

10.4 Информационная эффективность рынка

Рынок является информационно однородным, если участники рынка имеют доступ к одной и той же информации. Но в реальности информационно однородные рынки найти трудно (например, на валютном рынке используются достаточно дорогие информационные системы, такие как Reuters). Кроме того на рынке могут быть субъекты, владеющие внутренней информацией (insiders). На развитых рынках инсайдерской информацией пользоваться нелегально.

Введем теперь общепринятую классификацию степеней информированности участника рынка.

1. Слабая (weak) – имеется в виду, что участник рынка опирается только на информацию о ценах.

2. Средняя (semistrong) – информация о ценах плюс общественно доступная информация.

3. Сильная (strong) – информация о ценах плюс общественно доступная информация плюс инсайдерская информация.

Рынок является **эффективным** по отношению к определенной информации, если, используя эту информацию, нельзя принять решения о покупке или продаже ценных бумаг, позволяющие получить отличную от нормальной прибыль, или сверхприбыль (abnormal profit).

Таким образом, если рынок имеет **слабую степень эффективности (weak-form efficiency)**, то невозможно получить отличную от нормальной прибыль, принимая решения о покупке или продаже ценных бумаг на основе динамики курсов за прошедший период. На практике основные рынки ценных бумаг являются слабоэффективными. Однако фондовые рынки даже США не попадают столь же точно под определение **средней степени эффективности (semistrong-form efficiency)** рынка. Еще с меньшей степенью вероятности можно сказать, что они имеют **сильную степень эффективности (strong-form efficiency)**.

10.5 Арбитраж

С наглядной точки зрения "отсутствие арбитража"на рынке означает, что он является "честным "рационально устроенным"в том смысле, что на нем нет возможности извлечения прибыли без "риска".

Определение 10.6. *Говорят, что самофинансируемая стратегия H реализует* ***арбитражную возможность*** *(в момент N), если при нулевом начальном капитале,*

$$V_0 = 0,$$

её капитал в момент N почти наверное

$$V_N \geqslant 0$$

и с положительной вероятностью $V_N > 0$, то есть

$$\mathbb{P}\{V_N > 0\} > 0$$

или, что равносильно,

$$\mathbb{E}\, V_N > 0.$$

Существует также такой вид арбитража как "free lunch with vanishing risk".

Определение 10.7. ***Free lunch vanishing risk*** *– это самофинансируемая торговая стратегия, которая может быть аппроксимирована последовательностью самофинансируемых торговых стратегий, сходящейся к арбитражной стратегии. Формально, это самофинансируемая торговая стратегия с нулевым начальным капиталом и $V_N > 0$.*

Определение 10.8. *Мы говорим, что на рынке* ***отсутствуют арбитражные возможности*** *или что рынок является* ***безарбитражным****, если класс арбитражных самофинансируемых стратегий пуст. Иначе говоря, если для некоторой стратегии H начальный капитал $V_0 = 0$, то*

$$\mathbb{P}\{V_N \geqslant 0\} = 1 \Rightarrow \mathbb{P}\{V_N = 0\} = 1.$$

Таким образом, на безарбитражном рынке, если $V_0 = 0$, то, если $\mathbb{P}\{V_N = 0\} < 1$, то наряду с положительным выгрышем, ($\mathbb{P}\{V_N > 0\} > 0$), должны быть неминуемо и проигрыши, ($\mathbb{P}\{V_N < 0\} > 0$).

Помимо данного понятия безарбитражности в финансовой литературе и инженерии обращаются к другим определениям. Примером может служить следующее.

Определение 10.9. *a) Рынок называется* ***безарбитражным в слабом смысле****, если для каждой самофинансируемой стратегии H с $V_0 = 0$ и $V_n \geqslant 0$ почти наверное, $n \leqslant N$, имеем $V_N = 0$ почти наверное.*

b) Рынок называется ***безарбитражным в сильном смысле****, если для каждой самофинансируемой стратегии H с $V_0 = 0$ и $V_n \geqslant 0$ почти наверное имеем $V_n = 0$ почти наверное, $n \leqslant N$.*

Определение 10.10. ***Гарантированным арбитражом*** *(доминантной или тривиальной стратегией) называется самофинансируемая стратегия с $V_N > 0$ п.н.*

Замечание 10.2. *Строгое неравенство в определении гарантированного арбитража является более сильным условием.*

Рассмотрим, как связаны гарантированный арбитраж и различные стратегии H.

Определение 10.11. *Пусть имеются две стратегии: H и $\widehat{H}$. Будем говорить, что стратегия H* **доминирует** *($H \succ \widehat{H}$) стратегию $\widehat{H}$, если при одинаковых начальных условиях получаем в итоге для стратегии H больший капитал, чем для стратегии $\widehat{H}$, то есть $V_N > \widehat{V}_N$ п.н.*

Определение 10.12. *Говорят, что выполнен закон единой цены, если не может существовать двух стратегий H_t' и H_t, таких, что при начальных капиталах $V_0 < V_0'$ конечный капитал в обоих случаях одинаков п.н.:*

$$V_N = V_N'.$$

Упражнение 27. *Показать, что из отсутствия гарантированного арбитажа вытекает закон единой цены. Построить примеры того, что включение строгое.*

Доказательство. От противного, пусть отсутствует гарантированный арбитраж, но существуют стратегии H_t' и H_t, такие, что при начальных капиталах $V_0 < V_0'$ конечный капитал в обоих случаях одинаков п.н.: $V_N = V_N'$. Тогда вложим $V_0' - V_0$ в безрисковый актив, а для оставшейся суммы $V_0 - V_0'$ реализуем стратегию $\tilde{H}_t = H_t - H_t'$. Тогда эта стратегия приведёт к

$$\tilde{V}_N = V_N - V_N' = 0.$$

Однако первоначальное вложение в безрисковый актив обеспечит положительность конечного капитала п.н., т.е. существование гарантированного арбитража. Пришли к противоречию. □

Пример 10.3. *Возьмем $T = [0, 1], \Omega = \{\omega_1, \omega_2\}, p(\omega_{1,2}) = 1/2$. Определим активы следующим образом:*

$$X_0^0 = X_1^0 = 1, X_0^1 = 1, X_1^1(\omega_1) = 11, X_1^1(\omega_2) = 21$$

Стратегия $H = \{{-1 \atop 1}\}$ приведёт к капиталу $V_N = \{{10 \atop 20}\} > 0$ п.н., то есть существует гарантированный арбитраж.

Пусть $V_1 = V_1' = \{{a,\ \omega_1 \atop b,\ \omega_2}$ и $K = \frac{b-a}{10}$. Тогда существует единственная стратегия, приводящая к $V_1 = V_1'$: $H = \left({-b+2a-k \atop k}\right)$. Получаем:

$$\begin{cases} \omega_1 : -b + 2a - k + 11k = a, \\ \omega_2 : -b + 2a - k + 21k = b \end{cases}$$

То есть единая цена обязательства равна $2a - b$.

Предположение об **отсутствии арбитражных возможностей** – центральный принцип в финансовой инженерии.

Это предположение часто эквивалентно равновесию рынка.

При наличии арбитражных возможностей задача хеджирования бессмысленна.

11 Стохастическое доминирование первого и второго порядков.

В задачах финансовой математики часто встает вопрос о сравнении двух случайных величин. Какая величина лучше? Если использовать подход фон Неймана-Моргенштерна, ответ прост: для отдельно взятого человека та случайная величина лучше, ожидаемая полезность для которой больше. Но в большинстве экономических задач мы не знаем функцию полезности. Попробуем сравнить две случайные величины, используя только их характеристики.

Любой случайной величине может быть поставлена во взаимно однозначное соответствие функция распределения этой случайной величины, причём, функция распределения является полной характеристикой случайной величины. Теперь, чтобы сказать, какая из двух случайных величин лучше, сравним их функции распределения.

Рассмотрим компакт $[a, b]$ и две случайные величины, заданные на нём: ξ_1, ξ_2. Пусть $F(x), G(x)$ — соответствующие им функции распределения.

Определение 11.1. *Функция распределения случайной величины ξ_1 F доминирует функцию распределения случайной величины ξ_2 G в смысле стохастического доминирования первого порядка ($F \succcurlyeq_1 G$), если выполнено условие:*

$$F(x) \leq G(x), \forall x \in [a, b]$$

или, что тоже самое:

$$P(\xi_1 \leq x) \leq P(\xi_2 \leq x).$$

Теперь рассмотрим, как связано стохастическое доминирование первого порядка и функции полезности фон Неймана-Моргенштерна. Рассмотрим фукнции полезности по фон Нейману-Моргенштерну:

$$U(F) = \int\limits_a^b u(x) dF(x),$$

$$U(G) = \int\limits_a^b u(x) dG(x),$$

где $u(x) \in U^0$ — классу монотонно возрастающих фукнций.

Стохастическое доминирование первого порядка равносильно тому, что любой агент с монотонно возрастающей функцией полезности предпочтет первую альтернативу второй. Т.е. справедлива теорема.

Теорема 11.1.

$$F \succcurlyeq_1 G \Leftrightarrow U(F) \geq U(G), \forall u \in U^0.$$

Доказательство. 1. $F \succcurlyeq_1 G \Rightarrow U(F) \geq U(G), \forall u \in U^0$.

$$\int\limits_a^b u(x)[dF(x) - dG(x)] = u(x)\ [F(x) - G(x)]|_a^b - \int\limits_a^b u'(x)[F(x) - G(x)]dx \geq$$

$$\geq \{[F(x) - G(x)]|_a^b = 0, [F(x) - G(x)] \leq 0, \forall x\} \geq 0.$$

2. $U(F) \geq U(G), \forall u \in U^0 \Rightarrow F \succcurlyeq_1 G$. Будем доказывать от противного. Предположим, что $\exists x_0 \in [a, b] : F(x_0) > G(x_0)$. Тогда $\exists N_\varepsilon(x_0) : G(x) < F(x), \forall x \in N_\varepsilon(x_0)$.

   Пусть $u(x) = Const, x \in [a, b] \setminus N_\varepsilon(x_0)$ и возрастает, когда $x \in N_\varepsilon(x_0)$, причем $u'(x) > 0, x \in N_\varepsilon(x_0)$. Тогда получаем, что

$$\int_a^b u'(x)[F(x) - G(x)]dx = \int\limits_{N_\varepsilon(x_0)} u'(x)[F(x) - G(x)]dx > 0,$$

$$\int\limits_a^b u(x)[F(x) - G(x)]dx = -\int\limits_{N_\varepsilon(x_0)} u'(x)[F(x) - G(x)]dx < 0.$$

   Получили противоречие.

□

Замечание 11.1. *Таким образом мы можем сравнить не любые две функции распределения.*

Введем функцию-критерий для сравнения F и G.

$$T(x) = \int\limits_a^x (G(t) - F(t))dt, x \in [a, b].$$

Определение 11.2. *Функция распределения случайной величины ξ_1 F доминирует функцию распределения случайной величины ξ_2 G в смысле стохастического доминирования второго порядка ($F \succcurlyeq_2 G$), если выполнено условие:*

$$T(x) \geq 0, \forall x \in [a, b].$$

Замечание 11.2. *Из определения следует, что из $F \succcurlyeq_1 G \Rightarrow F \succcurlyeq_2 G$. Но не наоборот.*

Теперь рассмотрим, как связано стохастическое доминирование первого порядка и функции полезности фон Неймана-Моргенштерна.

Теорема 11.2. *Пусть U^1 — множество всех монотонно возрастающих вогнутых фукнций полезности, т.е. агент не приемлет риск.*

$$F \succcurlyeq_2 G \Leftrightarrow \int\limits_a^b u(x)dF(x) \geq \int\limits_a^b u(x)dG(x), \forall u \in U^1.$$

Доказательство. 1. $F \succcurlyeq_2 G \Rightarrow \int\limits_a^b u(x)dF(x) \geq \int\limits_a^b u(x)dG(x), \forall u \in U^1.$

Интегрируем несколько раз по частям.

$$\int\limits_a^b u(x)[dF(x) - dG(x)] = u(x)\ [F(x) - G(x)]\big|_a^b - \int\limits_a^b u'(x)[F(x) - G(x)]dx =$$

$$= \{\,[F(x) - G(x)]\big|_a^b = 0\} = -\int\limits_a^b u'(x)[F(x) - G(x)]dx =$$

$$= u'(x) \int\limits_a^x [G(t) - F(t)dt]\Bigg|_a^b - \int\limits_a^b u''(x) \left(\int\limits_a^x [G(t) - F(t)]dt\right) dx.$$

$$u'(x)[T(x)]\big|_a^b - \int\limits_a^b u''(x)T(x)dx =$$

$$= \{T(x)|_a^b = 0, u''(x) \leq 0, T(x) \geq 0\} = -\int\limits_a^b u''(x)T(x)dx \geq 0.$$

2. $\int\limits_a^b u(x)dF(x) \geq \int\limits_a^b u(x)dG(x), \forall u \in U^1 \Rightarrow F \succcurlyeq_2 G.$

Будем доказывать от противного. Предположим, что $\exists x_0 \in [a, b]$: $T(x_0) < 0$. Тогда $\exists N_\varepsilon(x_0) : T(x) < 0, x \in N_\varepsilon(x_0)$.

Пусть $u(x)$ линейная на $[a, x_0 - \varepsilon], [x_0 + \varepsilon, b]$, и вогнутая на $N_\varepsilon(x_0)$. Тогда:

$$\int\limits_a^b u(x)[G(x) - F(x)]dx = -u'(x)[T(x)]\big|_a^b + \int\limits_a^b u''(x)T(x)dx =$$

$$= \{u''(x) = 0, x \in [a, b] \setminus N_\varepsilon(x_0), T(x)|_a^b = 0\} = \int\limits_{N_\varepsilon(x_0)} u''(x)T(x)dx > 0.$$

Получили противоречие.

□

Приведем еще один критерий стохастического доминирования второго рода.

Утверждение 1. *Если* $\mathbb{E}\,\xi_1 = \mathbb{E}\,\xi_2$, *то* $F \succcurlyeq_2 G \Leftrightarrow$ *можно на одном вероятностном пространстве задать две случайные величины* ξ_1, ξ_2, *такие, что их функции распределения будут совпадать с заданными и будет выполнено условие:*

$$\xi_1 = \xi_2 + \xi,$$

где $\mathbb{E}(\xi|\xi_2) = 0$.

12 Задача оптимального инвестирования. Независимость по предпочтениям.

12.1 Задача оптимального инвестирования.

Расмотрим рынок с $d+1$ активом, предположим отсутствие арбитражных возможностей. Имеется горизонт инвестирования T (он может быть как конечным, так и бесконечным). Как всегда, математически такая модель формализуется с помощью фильтрованного вероятностного пространства: $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$.

Пусть X_t^i — цены активов, $X_t^i \in m(\mathcal{F}_t)$. H_t^i — инвестиции в i-й актив в момент времени t, $H_t \in m(\mathcal{F}_{t-1})$. Стоимость портфеля в момент времени t: $V_t = \sum\limits_{i=1}^{d+1} X_t^i H_t^i$. Также пусть выполнено условие самофинансируемости.

Считаем, что у нас один безрисковый актив X_t^0 и d рисковых. Задача стоит в максимизации стоимости портфеля в конечный момент времени.

Одношаговая задача

В данной задаче рассматривается горизонт инвестирования 1 шаг. Другими словами, портфель формируется один раз на весь период. Начальная стоимость портфеля — V_0, V_1 — финальная. Нам необходимо максимизировать стоимость портфеля в момент времени 1 при ограничении $V_0 > 0$. Также должно выполняться соотношение: $V_0 = \sum\limits_{i=0}^{d} X_0^i H_1^i$.

Теперь будем решать задачу максимизации:

$$\max_{H_0, H_1} V_1.$$

Чтобы понять, какая стратегия лучше: (H_0^1, H_1^1) или (H_0^2, H_1^2), нужно сравнить $V_1(H_0^1, H_1^1)$ и $V_1(H_0^2, H_1^2)$. Для этого можно использовать стохастическое доминирование первого и второго рода.

Можно использовать аппарат функций полезности, т.к. условие стохастического доминирования первого рода совпадает с условием $\mathbb{E}\, u(\xi_1) \geq \mathbb{E}\, u(\xi_2), \forall u$, где u — строго монотонная функция полезности. А условие стохастического доминирования второго рода совпадает с условием $\mathbb{E}\, u(\xi_1) \geq \mathbb{E}\, u(\xi_2), \forall u$, где u — строго монотонная и выпуклая функция полезности.

Учитывая строгую монотонность функции полезности u, можно рассматривать безрисковый эквивалент в конечный момент времени $u^{-1}(\mathbb{E}u(V_1))$.

Рассмотрим частный случай: $d = 1$, торговых ограничений нет. Введём следующее обозначение: W_r — инвестиции в рисковые активы, W — суммарные инвестиции в начальный момент. Нас интересует вопрос: как различные свойства функции полезности влияют на риски.

Разложим функцию полезности в ряд Тейлора до 2-го члена:

$$u(x) \approx u(x_0) + u'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}u''(x_0)(x - x_0)^2,$$

$u'(x_0) > 0, u''(x_0) < 0$. Так как фукнция определена с точностью до аффиного преобразования, можем положить $u(x_0) = 0, u'(x_0) = 1$. Следовательно

$$\tilde{u}(x) = x - x_0 - \frac{1}{2}\left(-\frac{u''(x_0)}{u'(x_0)}\right)(x - x_0)^2.$$

Получаем, что $A_a(x_0) = -\frac{u''(x_0)}{u'(x_0)}$ - КЛАНР - коэффициент кривизны фукнции полезности. Пусть КЛАНР$(\cdot)$ — монотонная. Тогда

1. КЛАНР возрастающая $\Rightarrow \quad \frac{dW_r}{dW} < 0$. Это можно интерпретировать как крайне осторожное поведение инвестора, т.е. если у нас больше денег, то меньше вкладываем в рисковые активы.
2. КЛАНР константа $\Rightarrow \quad \frac{dW_r}{dW} = 0$, вложения в рисковые активы не зависят от начального капитала.
3. КЛАНР убывающая $\Rightarrow \quad \frac{dW_r}{dW} > 0$, при увеличении начального капитала, увеличиваются вложения в рисковые активы.

Очевидно, что разумен только 3-й случай.

Многошаговая задача

В данной задаче рассматривается горизонт инвестирования N шагов. Потребление за шаг t — C_t, C_t — предсказуемый процесс. Будем рассматривать задачу с конечным горизонтом. Имеется естественное ограничение: $0 \leq C_t \leq V_t$. Стоимость портфеля описывается выражением $V_t = \sum\limits_{i=1}^{d+1} X_t^i H_t^i - C_t$. При формировании портфеля на шаг $t + 1$ выполнятся ограничение $V_t = \sum\limits_{i=1}^{d+1} X_t^i H_{t+1}^i - C_t$. Необходим подход к оценке качества инвестирования. Будем рассматривать многомерную функцию полезности.

Часто предполагается следующий вид функции полезности;

$$U(C_1, C_2, ..., C_T) = \sum_t \beta_t u_0(C_t). \tag{12.1}$$

Определение 12.1. *Под условием ненасыщаемости будем понимать строгое возрастание U по каждому аргументу: $\frac{\partial U}{\partial C_i} > 0$.*

Условие неприятия к риску математически означает, что матрица $\frac{\partial^2 U}{\partial C_i \partial C_j}$ отрицательно определена.

Для простоты в дальнейшем будем полагать, что безрисковый актив беспроцентный, что эквивалентно рассмотрению в дисконтированных ценах.

Определение 12.2. *Принцип предпочтения ликвидности. Пусть $t_2 > t_1$. Тогда для функции полезности должно выполняться:*

$$U(C_1, C_2, ...C_{t_1}, ..., C_{t_2}, ...C_T) > U(C_1, C_2, ...C_{t_1} - \Delta C, ..., C_{t_2} + \Delta C, ...C_T).$$

Эквивалентная форма записи: $\frac{\partial U}{\partial C_{t_1}} > \frac{\partial U}{\partial C_{t_2}}$.

Смысл этого принципа в том, что инвестор предпочтет получить ΔC как можно раньше, чтобы никого не кредитовать беспроцентно.

Проверим выполнение принципа предпочтения ликвидности для функций вида (12.1):

$$\frac{\partial u}{\partial C_k} = \beta_k \frac{\partial u_0(C_k)}{\partial C_k},$$

$$\frac{\partial u}{\partial C_{k+1}} = \beta_{k+1} \frac{\partial u_0(C_{k+1})}{\partial C_{k+1}}.$$

Тогда условие предпочтения ликвидности будет иметь вид:

$$\beta_k u_0'(C_k) > \beta_{k+1} u_0'(C_{k+1}),$$

$$\frac{\beta_k}{\beta_{k+1}} > \frac{u_0'(C_{k+1})}{u_0'(C_k)},$$

$$\frac{\sup u_0'(C)}{\inf u_0'(C)} \leq \inf_k \frac{\beta_k}{\beta_{k+1}}.$$

Откуда получаем, что

$$\inf u_0'(C) > 0.$$

Теперь, если будем использовать в качестве $u_0(C)$ уже известные нам фукнции полезности, например $u_(C) = C^{\beta-1}, \beta < 1$, то получим, что для них не выполняется условие предпочтения ликвидности.

12.2 Независимость по предпочтениям.

Будем считать, что потребление в k-ый момент времени не оказывает влияние на потребления в остальные моменты времени.

Сказанное математически формализуется следующим образом:

$$U(C_1, ..., C_T) = a(C_1, ..., C_{t-1}, C_{t+1}, ..., C_T) u_t(C_t) + b(C_1, ..., C_{t-1}, C_{t+1}, ..., C_T). \tag{12.2}$$

Утверждение 2. *Считаем, что рассматриваем ограниченные C_i, тогда $u(C)$ может принимать максимальное и минимальное значения. Т.к. функция полезности определена с точностью до аффиного преобразования, то $\exists x^0, x^*$, такие, что:*

$$u(x^0) = 0, u(x^0) = \min u,$$
$$u(x^*) = 1, u(x^*) = \max u.$$

Тогда общий вид фукнции полезности при независимых по полезности переменных имеет вид:

$$u(x) = \sum_{i=1}^{n} k_i u_i(x_i) + k \sum_i \sum_j k_i k_j u_i(x_i) u_j(x_j) + \cdots +$$

$$+k^{n-1} \sum_i \cdots \sum_m k_i \dots k_m u_i(x_i) \cdots u_m(x_m),$$

где $u(x_i^i) = 0$*,* $u(x_i^s) = 1$*,* $k_m = u(x_1^i, \dots, x_{m-1}^i, x_m^s, x_{m+1}^i, \cdots, x_n^i)$*,*
$1 + k = \prod\limits_i (1 + kk_i)$*.*

Доказательство. Докажем это утверждение для двумерного случая.

Рассматриваем пространство $\mathcal{X} = \mathcal{X}_\infty \times \mathcal{X}_\in$. пусть на этом пространстве задана функция полезности по фон Нейману-Моргенштерну $u(x_1, x_2)$. Найдем общий вид функции полезности, в условиях независимости по предпочтениям x_1, x_2.

Пусть $u_1(x_1), u_2(x_2)$ — функции полезности только по одному критерию, одномерные функции полезности.

Запишем условие независимости x_1 от x_2:

$$u(x_1, x_2) = a_2(x_2) u_1(x_1) + b_2(x_2), a_2(x_2) > 0.$$

Аналогично, условие независимости x_2 от x_1:

$$u(x_1, x_2) = a_1(x_1) u_2(x_2) + b_1(x_1), a_1(x_1) > 0.$$

Теперь рассмотрим биекцию $\varphi : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$, такую, что $\varphi(x) \neq x$.

Например, если $\mathcal{X}_\infty = \mathcal{X}_\in = \mathbb{R}, \varphi(x_1) = x_1 + \Delta x_1$.

Обозначим:

$$\Delta_1 u_1(x_1) = u_1(\varphi_1(x_1)) - u_1(x_1),$$

$$\Delta_2 u_2(x_2) = u_2(\varphi_2(x_2)) - u_2(x_2).$$

Очевидно, что

$$\Delta_1 \Delta_2 = \Delta_2 \Delta_1.$$

$$\begin{cases} \Delta_1 u = a_2(x_2) \Delta_1 u_1(x_1), \\ \Delta_2 u = a_1(x_1) \Delta_2 u_2(x_2). \end{cases} \quad \begin{cases} \Delta_2 \Delta_1 u = \Delta_2 a_2(x_2) \Delta_1 u_1(x_1), \\ \Delta_1 \Delta_2 u = \Delta_1 a_1(x_1) \Delta_2 u_2(x_2). \end{cases}$$

Откуда получаем:

$$\frac{\Delta_1 a_1(x_1)}{\Delta_1 u_1(x_1)} = \frac{\Delta_2 a_2(x_2)}{\Delta_2 u_2(x_2)} = C.$$

$$\Delta_i a_i(x_i) = C \Delta_i u_i(x_i), i = 1, 2.$$

$$a_i = C u_i + C_i.$$

Получаем общий вид $u(x_1, x_2)$:

$$u(x_1, x_2) = Cu_1(x_1)u_2(x_2) + C_1u_1(x_1) + C_2u_2(x_2) + C_3.$$

Если $C = 0$, то получаем аддитивную сепарабельность, если $C \neq 0$ — мультипликативную.

Запишем общую формулу в другом виде:

$$u(x_1, x_2) = (d_1u_1(x_1) + d_1')(d_2u_2(x_2) + d_2'),$$

из условий $a_1 > 0, a_2 > 0$ получаем условия:

$$(d_1u_1(x_1) + d_1')d_2 > 0,$$

$$(d_2u_2(x_1) + d_2')d_1 > 0.$$

$\square$

Т.к. функция полезности определена с точностью до аффиного преобразования, то можно обозначить $u_1' = d_1u_1(x_1) + d_1'$, $u_2' = d_2u_2(x_2) + d_2'$. Тогда получим представление $u_1(x_1, x_2) = u_1'(x_1)u_2'(x_2)$ — это и есть мультипликативная сепарабельность.

13 Игровая постановка задачи гарантированного ценообразования. Первая фундаментальная теорема финансовой математики

Пусть мы наблюдаем векторы цен: X_t — ценовая информация. Также пусть имеется дополнительная неценовая информация, например, объемы торгов — Y_t, $t = 0, 1, \ldots, N$. N — момент выполнения обязательства по опциону. Наша задача — хеджировать это обязательство ($V_N \geqslant \zeta$). Также потребуем выполнения условия самофинансируемости ($\Delta V_t = H_t \Delta X_t$). Будем рассматривать неупреждающее управление (стратегию):

$$H_s = g_s \begin{pmatrix} X_0 \; X_1 \ldots X_{s-1} \\ Y_0 \; Y_1 \ldots Y_{s-1} \end{pmatrix}$$

Пусть приращения цен лежат в компактных множествах:

$$\Delta X_s \in K_s \begin{pmatrix} X_0 \; X_1 \ldots X_{s-1} \\ Y_0 \; Y_1 \ldots Y_{s-1} \end{pmatrix} \subset \mathbb{R}^m,$$

m – число рисковых активов. Тогда

$$V_t = V_0 + \sum_{s=1}^{t} H_s \Delta X_s.$$

Для безрискового актива $\Delta X_j = 0$. Теперь выпишем систему рекуррентных равенств:

$$V_t = V_{t-1} + H_t \Delta X_t \;\; \forall t = 1, \ldots, N.$$

Рассмотрим задачу гарантированного оценивания: пусть V_t^* — оптимальная (неулучшаемая) стоимость. Необходимо выполнение

$$V_{t-1} \geqslant V_t^* - H_t \Delta X_t \qquad \forall \Delta X_t.$$

Т.к. последнее неравенство должно быть выполнено сразу для всех возможных ΔX_t, очевидно,

$$V_{t-1}^* \geqslant \sup_{\Delta X_t \in K_t} \left(V_t^* - H_t \Delta X_t \right). \tag{13.1}$$

Полагаем, что возможные стратегии H_t лежат в некотором множестве, которое будем называть **множеством торговых ограничений** и обозначать символом $\mathcal{D}$. Т.к. мы хотим построить неулучшаемую оценку, получим

$$V_N^* = \zeta, \;\; V_{t-1}^* = \inf_{H_t \in \mathcal{D}} \sup_{\Delta X_t \in K_t} \left(V_t^* - H_t \Delta X_t \right) \; \forall t = 1, \ldots, N. \tag{13.2}$$

Уравнение (13.2) описывает оптимальное поведение агента при наименее благоприятном поведении рынка.

Будем считать, что $\mathcal{D}=\mathbb{R}^n$, т.е торговые ограничения отсутствуют. Проведем рандомизацию — будем рассматривать смешанные стратегии. Пусть $\mathfrak{M}_t$ — класс всех условных распределений $\triangle X_t$ с носителем в K_t при условии, что известны значения $X_1,\ldots,X_{t-1}$. Можно показать, что следующая задача на каждом шаге $t=1,\ldots,N$ эквивалентна исходной:

$$V^*_{t-1}=\inf_{H_t\in\mathcal{D}}\sup_{Q\in\mathfrak{M}_t}\int(V^*_t-H_ty)Q(dy). \tag{13.3}$$

Справедлива следующая теорема из теории игр:

Теорема 13.1. [8] *Игра Г= $<X,Y,F(x,y)>$ с выпуклой функцией выигрыша, т.е. X и Y – выпуклые компакты евклидовых пространств, $F(x,y)$ непрерывна на $X\times Y$ и для любого $x\in X$ функция $F(x,y)$ выпукла по y, имеет решение в смешанных стратегиях $(\varphi^0,y^0,\bar v)$, где y^0 – минимаксная стратегия второго игрока,*

$$\varphi^0=\sum_{i=1}^{n+1}p_i^0 1_{\bar x_i},\ \ p^0=(p_i^0,\ i=1,\ldots,n+1)\in P,$$

$$(\bar x_i,\ i=1,\ldots,n+1)\in\operatorname{Arg}\max_{x^i\in X}\min_{y\in Y}\max_{i=1,\ldots,n+1}F(x^i,y),$$

n – размерность Y, а p^0 – максиминная стратегия в задаче

$$\max_{p\in P}\min_{y\in Y}F^1(p,y),\ \ F^1(p,y)=\sum_{i=1}^{n+1}p_iF(\bar x_i,y).$$

Применив эту теорему для нашей задачи, где $X=K_t$ и $Y=\mathcal{D}$, получаем существование решения в смешанных стратегиях для первого игрока (рынок) и решение в чистых стратегиях для второго игрока (агент), а также возможность поменять местами inf и sup.

Преобразовывая (13.3), получим:

$$V^*_{t-1}=\inf_{H_t\in\mathcal{D}}\sup_{Q\in\mathfrak{M}_t}\left[\int V^*_tQ(dy)-H\int yQ(dy)\right]=$$

$$=\sup_{Q\in\mathfrak{M}_t}\inf_{H\in\mathbb{R}^n}(a-(b,H))=\begin{cases}-\infty, & \text{при } b\neq 0\ \forall Q\in\mathfrak{M}_t\\ a, & \text{иначе}\end{cases} \tag{13.4}$$

Обоснуем последнее равенство:

$$\inf_{H\in\mathbb{R}^n}(a-(b,H))=a-\sup_{H\in\mathbb{R}^n}(b,H).$$

Пусть

$$\mathfrak{N}=\left\{\int yQ(dy)|Q\in\mathfrak{M}\right\}.$$

[8] Доказательство теоремы можно найти в книге А.А. Васина и В.В. Морозова "Теория игр и модели математической экономики"

Если $\mathfrak{M}_t$ выпукло, тогда $\mathfrak{N}$ тоже выпукло, и если $\mathfrak{N}$ не содержит точку ноль, то в силу теоремы об отделимости

$$\exists H^* : \ \forall b \in \mathfrak{N} \Rightarrow (b, H^*) > (0, H^*) = 0.$$

Выбрав $H = \lambda H^*$ и устремив $\lambda \to +\infty$ получаем

$$\inf_{H\in\mathbb{R}^n} (a - (b, H)) = -\infty.$$

А т.к. это верно $\forall Q \in \mathfrak{M}_t$, то

$$\sup_{Q\in\mathfrak{M}_t} \inf_{H\in\mathbb{R}^n} (a - (b, H)) = -\infty.$$

В остальных случаях

$$\sup_{Q\in\mathfrak{M}_t} \inf_{H\in\mathbb{R}^n} (a - (b, H)) = a,$$

т.к. $\exists Q \in \mathfrak{M}_t : \ b = 0 \Rightarrow \inf\limits_{H\in\mathbb{R}^n} (a - (b, H)) = a > -\infty$.

Замечание 13.1. *В данном случае b — это условное среднее цен. Если $b = \int yQ(dy) = 0$, или, другими словами $\mathbb{E}_Q \triangle X_t = 0$, а Q – это условное распределение $\triangle X_t$, то $\triangle X_t$ – мартингал-разность. Т.к. в этом случае получаем $V_t^* > -\infty$, мартингальное поведение цен — это наихудшее поведение рынка. Если же цены немартингальные, то необходимость в ресурсах вообще отпадает, т.к существует арбитраж.*

Замечание 13.2. *Для случая $0 \leqslant \zeta \leqslant C = const$ по индукции назад легко показать, что V_t^* тоже ограничено константой. Действительно,*

$$V_N^* = \zeta \leqslant C,$$

далее по индукции с учётом (13.4)

$$V_{t-1}^* = \inf_{H_t\in\mathcal{D}} \sup_{Q\in\mathfrak{M}_t} \left[\int V_t^* Q(dy) - H \int yQ(dy)\right] \leqslant \int V_t^* Q(dy) \leqslant C \int Q(dy) \leqslant C.$$

Условие $b = 0$ (или, другими словами, $0 \in ri(convK_t)$) отсекает арбитражные возможности, поэтому

$$V_{t-1}^* = \sup_{\substack{Q\in\mathfrak{M}_t \\ \int yQ(dy)=0}} \int V_t^* dQ = \sup_{\substack{Q\in\mathfrak{M}_t \\ \int yQ(dy)=0}} \mathbb{E}_Q \left(V_t^* | \mathcal{F}_{t-1}\right) \tag{13.5}$$

Замечание 13.3. *Мартингальное поведение цен в случае когда $0 \in \partial(convK_t)$, эквивалентно тому, что мера сосредоточена в точке ноль. Другими словами, получаем ещё один безрисковый актив.*

Таким образом, получили критерий отсутствия арбитражных возможностей, который может быть записан двумя способами:

1. Среди $\mathfrak{M}_t$ существует такая мера, что $\int yQ(dy) = 0$[9],
2. $0 \in ri(convK_t)$.

Первая формулировка представляет собой **первую фундаментальную теорему финансовой математики**. Для $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$ можно записать эту теорему в классической постановке:

Теорема 13.2. *Относительная внутренность афинной оболочки носителя множества условных распределений приращения цен содержит точку 0 почти наверное тогда и только тогда, когда отсутствуют арбитражные возможности.*

[9]иногда говорят: "ограничения $\triangle X_t \in K_t$ совместимы с мартингальной динамикой".

14 Подход к хеджированию в среднем квадратическом

Постановка задачи

Будем считать динамику цен на данном валютном рынке мартингальной. Требуется, чтобы при нашей стратегии хеджирования результат (стоимость портфеля в терминальный момент времени) был как можно ближе к обусловленному обязательству (например в среднем квадратическом).

Будем считать, что имеется один рисковый и один безрисковый актив. А также, что стратегии самофинансируемые, цены дисконтриванные, рынок безарбитражный.

Введем следующие обозначения: $G_n = \sum H_n \triangle X_n$ - процесс выигрышей или убытков, где H_n - предсказуемый процесс (стратегия), а X_n - дисконтированная цена. Тогда для капитала V_n выполняется $V_n = V_0 - G_n$.

Обусловленному обязательству соответствует $\mathcal{F}_T$ - измеримая случайная величина ζ с $\mathbb{E}_P\,\zeta^2 < \infty$. Процесс G_n определяется стратегией H_n, то есть $G_n = G_n(H)$.

Определение 14.1. ***Задача оптимального хеджирования***
Стратегию H^* будем называть оптимальной в среднеквадратическом смысле, если она минимизирует среднеквадратическое отклонение стоимости портфеля в терминальный момент от выплат по обусловленному обязательству, то есть:

$$\mathbb{E}(\zeta - V_T(H^*))^2 \leqslant \mathbb{E}(\zeta - V_T(H))^2,$$

для всех самофинансируемых стратегий H. Заметим, что

$$V_T(H^*) = V_0 + G_T(H^*),$$

поэтому минимизация производится и по V_0.

Замечание 14.1. *Для постановки задачи можно использовать и более сильное условие:*

$$\mathbb{E}^{\mathcal{F}_0}(\zeta - V_T(H^*))^2 \leqslant \mathbb{E}^{\mathcal{F}_0}(\zeta - V_T(H))^2.$$

14.1 Поиск оптимальной стратегии

Введем сначала некоторые обозначения:

$$\beta_n = \frac{\mathbb{E}^{\mathcal{F}_{n-1}}\left[\triangle X_n \prod\limits_{i=n+1}^{T}(1-\beta_i \triangle X_i)\right]}{\mathbb{E}^{\mathcal{F}_{n-1}}\left[\triangle {X_n}^2 \prod\limits_{i=n+1}^{T}(1-\beta_i \triangle X_i)\right]}, \quad n = T, T-1, \dots, 1. \tag{14.1}$$

В вышеприведенной формуле используется соглашение, что $\prod\limits_{i\in\emptyset} a_i = 1$.

$$\rho_n = \frac{\mathbb{E}^{\mathcal{F}_{n-1}}\left[\zeta \vartriangle X_n \prod\limits_{i=n+1}^{T}(1-\beta_i \vartriangle X_i)\right]}{\mathbb{E}^{\mathcal{F}_{n-1}}\left[\vartriangle X_n{}^2 \prod\limits_{i=n+1}^{T}(1-\beta_i \vartriangle X_i)\right]}, \quad n = T, T-1, \ldots, 1. \tag{14.2}$$

Для вычисления стратегии H_n на n-том шаге нам не нужен весь вектор $H = (H_1, H_2, \ldots, H_T)$, а только лишь его часть $H^{(n)} = (H_1, \ldots, H_n)$.

Таким образом V_n зависит лишь от части $H^{(n)}$ стратегии H. Оптимальная стратегия вычисляется по формуле:

$$\begin{cases} H_n = \rho_n - V_{n-1}(H^{(n-1)})\beta_n \\ V_n(H) = V_n(H^{(n)}) \end{cases} \qquad n = 1, 2, \ldots \tag{14.3}$$

Под стратегией H_n здесь понимается количество вложений в момент времени n в рисковый актив.

14.2 Расчет справедливой цены обусловленного обязательства

Мы уже выяснили, как найти хеджирующую стратегию с помощью коэффициентов β_n, и ρ_n. Теперь будем расчитывать справедливую цену обусловленного обязательства, то есть V_0 соответствующий оптимальной стратегии.

Оптимальное V_0 будет расчитываться следующим образом:

$$V_0^{\text{opt}} = \int \zeta d\widehat{\mathbb{P}}, \qquad \text{где} \frac{d\widehat{\mathbb{P}}}{d\,\mathbb{P}} = c\prod_{i=1}^{n}(1-\beta_k \vartriangle X_k).$$

В общем случае, $\widehat{\mathbb{P}}$ может быть знакопеременной мерой (зарядом). Однако если ΔX принимает одно или два значения, то такой случай невозможен. Если $\vartriangle X$ принимает 3 значения, то $\widehat{\mathbb{P}}$ может уже и не быть вероятностной мерой.

Рассмотрим случай одношаговой задачи, то есть когда $T = 1$. Сделаем следующие допущения: $\mathcal{F}_0$ - тривиальная σ-алгебра, $\mathcal{F}_1 = \sigma(\eta)$. Возьмем произвольное $X_0 \geq 0$ измеримое относительно $\mathcal{F}_0$, то есть X_0 является константой. Пусть $X_1 = X_0 + \vartriangle X_1 \geq 0$, где $\vartriangle X_1$ обозначим случайной величиной η. Из неотрицательности X_1 следует, что $\eta \geq -X_0$. Расчитаем справедливую цену для европейского опциона call:

$$\zeta = (X_1 - 4.5)_+ = \max\{0, X_1 - 4.5\}.$$

Так как H_1 предсказуемо, то оно измеримо относительно F_0, и следовательно $H_1 = \text{const}$. Фактически мы будем решать задачу регрессии:

$$\zeta \approx \alpha + \beta \vartriangle X_1.$$

Поэтому оптимальным решением будут

$$\begin{array}{l} H_1 = \mathrm{cov}(\zeta, \triangle X_1)/\mathrm{var}(\triangle X_1) \\ V_0 = \mathbb{E}\,\zeta - H_1\,\mathbb{E}\,\delta X_1 \end{array}$$

Произведем теперь необходимые выкладки:

$$X_1 = X_0 + \triangle X_1 = \left\{ \begin{array}{l} 2,\ p = 0.1 \\ 4,\ p = 0.4 \\ 5,\ p = 0.5 \end{array} \right. \Rightarrow \zeta = \left\{ \begin{array}{c} 0,\ p = 0.1 \\ 0,\ p = 0.4 \\ 0.5,\ p = 0.5 \end{array} \right.$$

$$\mathbb{E}\,\zeta = 0.25.$$

$$cov(\zeta, \triangle X_1) = \mathbb{E}(\zeta - \mathbb{E}\,\zeta)(\triangle X_1 - \mathbb{E}\,\triangle X_1) = \mathbb{E}\,\zeta\,\triangle X_1 - \mathbb{E}\,\zeta\,\mathbb{E}\,\triangle X_1 = 0.175.$$

$$\mathrm{Var}\,\triangle X_1 = \mathbb{E}(\triangle X_1 - \mathbb{E}\,\triangle X_1)^2 = \mathbb{E}\,\triangle X_1^2 - (\mathbb{E}\,\triangle X_1)^2 = 0.81.$$

Окончательно получаем: $H_1 = 0.216, \quad V_0 = -0.031.$

Полученный результат нельзя считать удовлетворительным, так как продавец опциона должен заплатить в начальный момент времени и еще взять на себя выполнение некоторых обязательств. Такой результат получился в связи с тем, что в исходной модели был заложен не совсем разумный критерий оптимальности.

15 Метод динамического программирования. Уравнение Беллмана-Айзекса

Перед прочтением раздела рекомендуется ознакомиться с приложением "Опциональное разложение и его использование в задаче ценообразования и хеджирования обусловленных обязательств" (раздел 18.1).

В главе 13 была рассмотрена задача гарантированного ценообразования для опциона европейского типа (выплата по обязательству возможна только в терминальный момент времени). В этой главе рассмотрим сведение задачи к уравнению Беллмана-Айзекса для опционов американского типа. Пусть заданы фильтрованное вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$ и адаптированный случайный процесс $\xi_t, t = 0, \ldots, N$, определяющий потенциальные выплаты по обязательству в момент времени t. Здесь $N > 0$ — последний возможный момент исполнения обязательства. Для гарантированного хэджирования необходимо выбрать стратегию так, чтобы в любой момент времени $t = 0, \ldots, N$ было выполнено неравенство $V_t \geqslant \xi_t$ п.н., где V_t — стоимость портфеля на момент времени t при использовании данной стратегии перераспределения активов.

Определение 15.1. *Минимальным хэджем называется стратегия без притока капитала, при которой для процесса стоимости портфеля $\widehat{V}_t$ выполнены следующие соотношения:*

1) *для всех $t = 0, \ldots, N$ выполнено $\widehat{V}_t \geqslant \xi_t$ п.н.;*

2) *Для любого хэджа (то есть стратегии без притока капитала, для стоимости портфеля V_t которой выполнено первое условие), $\forall t = 0, \ldots, T$ справедливо $V_t \geqslant \hat{V}_t$ п.н.*

Ниже будет показано, как построить минимальный хэдж, используя результаты задачи гарантированного ценообразования.

Добавим к уравнению (13.1) условие $V_t^* \geqslant \xi_t$, получим

$$V_N^* = \xi_N, \ V_{t-1}^* = \xi_{t-1} \vee \inf_{H_t \in \mathcal{D}} \sup_{\Delta X_t \in K_t} (V_t^* - H_t \Delta X_t), \ \forall t = 1, \ldots, N, \qquad (15.1)$$

или, повторив цепочку рассуждений главы 13,

$$V_{t-1}^* = \xi_{t-1} \vee \sup_{\substack{Q \in \mathfrak{M}_t \\ \int yQ(dy) = 0}} \mathbb{E}_Q^{\mathcal{F}_t} V_t^*.$$

Пусть множество $\mathfrak{K} = \{Q \in \mathfrak{M}_t : \int\limits_{K_t} yQ(dy) = 0\}$ – множество мартингальных мер. Тогда определим процесс ξ^* следующим образом:

$$\xi_N^* = \xi_N, \ \xi_t^* = \xi_t \vee \operatorname*{ess\,sup}_{Q \in \mathfrak{K}} \mathbb{E}_Q^{\mathcal{F}_t} \xi_{t+1}^*, \ t = 0, \ldots, N-1, \qquad (15.2)$$

Выписанное рекуррентное уравнение в обратном времени является некоторым аналогом уравнения Беллмана. Далее покажем, что ξ^* является минимальным хэджем.

Определение 15.2. *Пусть ξ_t — случайный процесс. $\mathfrak{M}$ — множество вероятностных мер. ξ_t называют $\mathfrak{M}$-тотальным мартингалом (субмартингалом, супермартингалом), если ξ_t — мартингал (субмартингал, супермартингал) для $\forall\, Q \in \mathfrak{M}$.*

Определение 15.3. *$\tilde{\xi}$ — наименьший $\mathfrak{M}$-тотальный супермартингал, мажорирующий ξ, если*

1) $\tilde{\xi}$ — $\mathfrak{M}$-тотальный супермартингал, $\xi^* \geqslant \xi$ п.н.;

2) Для любого $\mathfrak{M}$-тотального супермартингала η, для которого выполнено первое условие, справедливо $\eta \geqslant \tilde{\xi}$ п.н.

Непосредственно из определения вытекает, что ξ^* является наименьшим $\mathfrak{K}$-тотальным супермартингалом, мажорирующим ξ. Действительно,

$$\xi_t^* \geqslant \xi_t, \;\; \xi_t^* \geqslant \mathbb{E}_Q^{\mathcal{F}_t} \xi_{t+1}^*, \;\; \forall Q \in \mathfrak{K}.$$

Из определения $\operatorname{ess\,sup}$ следует, что для любого $\eta_t \geqslant \mathbb{E}_Q^{\mathcal{F}_t} \xi_{t+1}^*$ выполняется

$$\eta \geqslant \operatorname*{ess\,sup}_{Q \in \mathfrak{K}} \mathbb{E}_Q^{\mathcal{F}_t} \xi_{t+1}^* \text{ п.н.}$$

Тогда если η мажорирует ξ, то

$$\eta \geqslant \xi_t \vee \operatorname*{ess\,sup}_{Q \in \mathfrak{K}} \mathbb{E}_Q^{\mathcal{F}_t} \xi_{t+1}^* = \xi_t^*.$$

Что и требовалось доказать.

Утверждение 15.1. *$\widehat{V}_t$ — наименьший тотальный супермартингал относительно класса $\mathcal{M}(X)$ всех мартингальных мер, мажорирующий ξ_t.*

Доказательство утверждения в предположении существования минимального хэджа непосредственно вытекает из определений и теоремы **??**. А т.к. ξ^* является минимальным хэджем, получаем $\xi_t^* = \widehat{V}_t$ п.н.

Замечание 15.1. *Если $\mathfrak{K} = \{P\}$, то*

$$\xi_N^* = \xi_N, \; \xi_t^* = \xi_t \vee \mathbb{E}_P^{\mathcal{F}_t} \xi_{t+1}^*, \; t = 0, \ldots, N-1,$$

что совпадает с полученным ранее выражением для оболочки Снэлла.

Замечание 15.2. *Когда речь идет об обязательстве европейского типа, мы можем для величины выплаты $\zeta \geqslant 0$ положить $\xi_t = 0$, если $t < N$, и $\xi_T = \zeta$. В этом случае (15.2) принимает следующий вид:*

$$\xi_T^* = \zeta, \qquad \xi_t^* = \operatorname*{ess\,sup}_{Q \in \mathfrak{K}} \mathbb{E}_Q^{\mathcal{F}_t} \xi_{t+1}^*, \quad t = 0, \ldots, N-1. \tag{15.3}$$

16 Полные рынки. Единственность мартингальной меры

Понятие полноты рынка

Определение 16.1. *Рынок называют полным, если любое обусловленое обязательство достижимо при некотором начальном капитале.*

Существует два критерия полноты рынка: в терминах мартингальных мер и в терминах носителей условных распределений для приращений цен.

В терминах мартингальных мер:

Утверждение 16.1. *Безарбитражный рынок полон тогда и только тогда, когда класс мартингальных мер $\mathcal{M}(\mathbb{P})$ содержит единственную меру.*

В терминах носителей:

Утверждение 16.2. *Для того, чтобы модель была полной, необходимо и достаточно, чтобы носитель условного распределения $\mathbb{P}_{\triangle X_k|\mathcal{F}_{k-1}}$ п.н. содержал не более, чем $d+1$ точку.*

Замечание 16.1. *В дискретном случае полнота не является естественным свойством рынка (скорее исключение, чем правило).*

Пусть $Q_t(x_0, \dots, x_{t-1})$ — мера, на которой достигается $\operatorname{ess\,sup}$. Это условное распределение Δx_t при $X_0, \dots,_{t-1}$.

$$Q_t(x_0, \dots, x_{t-1}) = P_{\Delta x_t | X_0 \geq x_0, \dots, X_{t-1} \geq x_{t-1}}.$$

Далее можем задавать совместное распределение по теореме Ионеско-Тулча.

Рассмотрим теперь частный случай $m = 1$. Т.е. считаем, что у нас есть только один рисковый актив. Пусть $\Delta X \in D$. В данном случае получаем, что при отсутствии арбитражных возможностей, $\delta(Q) \in [a, b], a \leq 0 \leq b$. Тогда мартингальная мера сосредоточена не более, чем в двух точках. Рассмотрим 2 случая в зависимости от вида v.

1. v — выпукла. Докажем, что в этом случае, мера сосредоточена на концах отрезка, в точках a и b. Т.е. a реализуется с вероятностью p, а b с вероятностью $1 - p$. Т.е. мера мартингальная, то $ap + b(1 - p) = 0, \Rightarrow p = b/(b - a)$.

   Будем доказывать от противного. Допустим, мера сосредоточена в одной точке, тогда из условия мартингальности, получаем, что она сосредоточена в нуле. Тогда, в силу выпуклости v, получаем:

   $$\int v(y) Q(dy) = v(0) < \lambda v(a) + (1 - \lambda) v(b),$$

   что противоречит тому, что на мере Q достигается *sup*. Получаем, что мера сосредоточена в двух точках. Допустим, что в точках $a + \varepsilon$ и b.

   $$p = \frac{b}{b - a - \varepsilon}.$$

Тогда

$$\frac{b}{b-a}v(a)-\frac{a}{b-a}v(b)\leq\frac{b}{b-a-\varepsilon}v(a+\varepsilon)-\frac{a+\varepsilon}{b-a-\varepsilon}v(a+\varepsilon),$$

$$b(b-a-\varepsilon)v(a)-a(b-a-\varepsilon)v(b)\leq b(b-a)v(a+\varepsilon)-(a+\varepsilon)(b-a)v(b),$$

$$b^2v(a)-abv(a)-b\varepsilon v(a)-abv(b)+a^2v(b)+abv(b)\leq b^2v(a+\varepsilon)-abv(a+\varepsilon)-$$
$$-abv(b)-b\varepsilon v(b)+a^2v(b)+a\varepsilon v(b),$$
$$(b-a-\varepsilon)v(a)+\varepsilon v(b)\leq(b-a)v(a+\varepsilon),$$

Поделим на $(b-a)$:

$$(1-\frac{b}{b-a})v(a)+\frac{\varepsilon}{b-a}v(b)\leq(b-a)v(a+\varepsilon).$$

Т.к. функция v — выпуклая, то это возможно только при $\varepsilon=0$. Откуда и получаем, что мера сосредоточена на краях отрезка.

2. v — вогнута. В этом случаем получаем, можно аналогично доказать, что мера сосредоточена в одной точке, в нуле.

На практике обычно используют выпуклые функции.
рассматриваемую ситуацию.

17 Простейшая модель хэджирования.

Рассмотрим одношаговую модель хэджирования.

$$\zeta = \max(K - X_1, 0).$$

$$V_1 \geq .$$

$$V_1 = V_0 + H\Delta X.$$

Найдем оптимальную стратегию хэджирования H, которая позволяет выполнить обязательства в момент времени 1.

Будем рассматривать мульпликативную модель изменения цен:

$$X_1 = X_0 W.$$

Т.к. мы рассматриваем дисконтированные цены, то $X_0 = 1$. Пусть $W \in [a, b]$, Q — распределение W. Т.к. арбиртражные возможности отсутствуют, то $a < 1 < b$. Запишем уравнение Беллмана в данном случае:

$$V_0 = \sup_Q \mathbb{E}_Q V_1.$$

Будем рассматривать полные рынки, тогда мартингальная мера единственна.

$$V_0 = \mathbb{E}_Q V_1 = \mathbb{E}_Q(\max(K - X_1, 0)).$$

Найдем мартингальную меру. Т.к. подынтегральная функция выпукла, то мера сосредоточена в точках a, b.

$$p(W = a) = p,$$

$$p(W = b) = 1 - p.$$

Т.к. мера мартингальная, то

$$pa + (1 - p)b = 1,$$

$$p = \frac{b-1}{b-a}, 1 - p = \frac{1-a}{b-a}.$$

Откуда получаем, что

$$V_0 = p\max(K - a, 0) + (1 - p)\max(K - b, 0).$$

Теперь найдем стратегию H.

$$H = \frac{V_1 - V_0}{\Delta X} = \frac{\max(K - X_1, 0) - p\max(K - a, 0) - (1 - p)\max(K - b, 0)}{X_1 - X_0}.$$

Но в этой формуле есть зависимость от X_1. В условиях нашей модели возможны только 2 случая: $X_1 = a$ или $X_1 = b$. Рассмотрим эти два случая.

1. $X_1 = a$.
$$\Delta X = 1 - a.$$
$$H = \frac{\max(K - a_1, 0) - p\max(K - a, 0) - (1-p)\max(K - b, 0)}{1 - a} =$$
$$= \frac{\max(K - a, 0) - \max(K - b, 0)}{b - a}.$$

2. $X_1 = b$.
$$\Delta X = 1 - b.$$
$$H = \frac{\max(K - b_1, 0) - p\max(K - a, 0) - (1-p)\max(K - b, 0)}{1 - b} =$$
$$= \frac{\max(K - a, 0) - \max(K - b, 0)}{b - a}.$$

Откуда и получаем оптимальную стратегию.

18 Ценообразование для производных активов в случае полных рынков. Модель Кокса-Росса-Рубинштейна.

Пусть B_n - цена безрисового актива в момент времени n, и S_n - цена рискового актива. Мы будем моделировать их с помощью следующих рекуррентных уравнений:

$$\begin{cases} B_n = (1+r)B_{n-1} \\ S_n = (1+\rho_n)S_{n-1} \end{cases} \tag{18.1}$$

Здесь r - процентная ставка, а ρ_n принимает только два значения:$\rho_n \in \{a, b\}$. Тогда условие безарбитражности запишется следующим образом:

$$-1 < a < r < b.$$

Перейдем к дисконтированным ценам:

$$\begin{cases} X_n^0 = \widetilde{B}_b = \frac{B_n}{B_n} = 1 \\ X_n^1 = \widetilde{S}_n = \frac{S_n}{B_n} \end{cases}$$

Вспоминая (18.1), последнее равенство распишем следующим образом:

$$X_n^1 = \frac{1+\rho_n}{1+r} X_{n-1}^1.$$

Введем обозначение:

$$\gamma_n = \frac{1+\rho_n}{1+r} \in \{a_n', b_n'\}.$$

Для упрощения предположим, что $\ln a'$ и $\ln b'$ соизмеримы, то есть их отношение — рациональное число. Такое предположение нельзя считать существенным ограничением модели, но при этом вся динамика (относительно логарифмов цен) будет лежать на решетке с постоянным шагом. Никаких других дополнительных предположений относительно X делать не будем.

Для того, чтобы мера $\mathbf{Q}$ была мартингальной, необходимо и достаточно, чтобы

$$\begin{cases} \mathbb{E}_{\mathbf{Q}}^{\mathcal{F}_n} X_{n+1}^0 = X_n^0 \\ \mathbb{E}_{\mathbf{Q}}^{\mathcal{F}_n} \gamma_{n+1} X_n^1 = X_n^1 \end{cases}$$

где X^0 - константа, не зависящая от времени, и первое условие всегда выполнено. В силу адаптированности X_n^1 второе условие эквивалентно

$$X_n^1 \mathbb{E}_{\mathbf{Q}}^{\mathcal{F}_n} \gamma_{n+1} = X_n^1 \Leftrightarrow \mathbb{E}_{\mathbf{Q}}^{\mathcal{F}_n} \gamma_{n+1} = 1.$$

Для недисконтированного случая, вспоминая, что $\gamma_{n+1} = \frac{1+\rho_{n+1}}{1+r}$, получим такое условие мартингальности меры:

$$\mathbb{E}_{\mathbf{Q}}^{\mathcal{F}_n} \rho_{n+1} = r. \tag{18.2}$$

$$\mathbb{P}_{\mathbf{Q}}\{\rho_{n+1} = a | F_n\} a + \mathbb{P}_{\mathbf{Q}}\{\rho_{n+1} = b | F_n\} b = r.$$

Обозначим $\mathbb{P}_{\mathbf{Q}}\{\rho_{n+1} = a|F_n\}$ через π_n и решим уравнение:$a\pi_n + b(1-\pi_n) = r$. Решением будет

$$\begin{cases} \pi_n = \frac{b-r}{b-a} \\ \pi'_n = 1 - \pi_n = \frac{r-a}{b-a} \end{cases}$$

Нетрудно видеть, что это решение будет неотрицательным и может быть интерпретированно как вероятностная мера, если только выполнено условие безарбитражности: $a < r < b$.

Итак, мартингальная мера существует тогда и только тогда, когда выполняется условие безарбитражности. При этом она единственна.

Пусть ζ - функция выплат некоторого обусловленного обязательства, справедливую цену которого мы должны расчитать. Тогда минимальный хедж находится следующим образом:

$$V_t = \operatorname*{ess\,sup}_{\mathbf{Q}\in\mathcal{M}(\mathbb{P})} \mathbb{E}_{\mathbf{Q}}^{\mathcal{F}_t} \zeta.$$

В силу единственности мартингальной меры $V_t = \mathbb{E}_{\mathbf{Q}}^{\mathcal{F}_t} \zeta$. Из такого представления вытекает, что V_t - мартингал, представимый в виде

$$V_t = V_0 + (H \circ X)_t - C_t, \text{ причем } \qquad C_t \equiv 0.$$

Для примера рассмотрим европейский опцион типа call с функцией выплат $\zeta = (X_T - k)_+$, где для выполнения условия однородности $k = \alpha X_0$.

Справедливая цена будет считаться как

$$V_0 = \mathbb{E}_{\mathbf{Q}}^{\mathcal{F}_0} \zeta = \mathbb{E}_{\mathbf{Q}}(S_T - k)_+ = \mathbb{E}_{\mathbf{Q}}(B_T X_T - k)_+ = B_T \,\mathbb{E}_{\mathbf{Q}}(X_T - \tilde{k})_+$$

Здесь введено обозначение $\tilde{k} = \frac{k}{B_T}$. Цена рискового актива в терминальный момент времени в нашей модели находится следующим образом:

$$X_T^1 = X_0^1 \prod_{t=1}^{T} \gamma_t = X_0^1 \left(\frac{1+a}{1+r}\right)^{T-\nu} \left(\frac{1+b}{1+r}\right)^{\nu}$$

Мы получили аналог схемы Бернулли, где a интерпретируется как "успех b - как "неудача ν - число успехов в серии из T величин (ν - имеет биномиальное распределение).

Упражнение 28. *Записать через ν событие, эквивалентное событию $\{X_T > k\}$.*

19 Задача ценообразования для некоторых опционов

Применение модели Кокса-Росса-Рубенштейна к задаче ценообразования Европейского опциона типа call

Рассмотрим задачу ценообразования для Европейского опциона типа call. В терминальный момент времени дисконтированная цена рискового актива определяется следующим образом:

$$X_T = X_0 \left(\frac{1+a}{1+r}\right)^{T-v} \left(\frac{1+b}{1+r}\right)^{v},$$

где число "успехов" v распределенно биномиально:

$$\mathbb{P}(v=k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k} = b(n,p,k).$$

Функция выплат $\zeta = (S_T - K)_+$. Обозначим так же $\tilde{k} = \frac{K}{B_T}$.

$$\mathbb{E}_Q\,\zeta = B_T\,\mathbb{E}_Q(X_T - \tilde{k})_+.$$

Распишем последнее мат. ожидание:

$$\sum_{i=0}^{T} \mathbb{P}\{v=i\} \left(X_0 \left(\frac{1+a}{1+r}\right)^{T-i} \left(\frac{1+b}{1+r}\right)^{i} - \tilde{k}\right)_+.$$

Для достаточно больших i выражение в скобке будет положительным:

$$i \geq \frac{\ln \frac{\tilde{k}}{X_0} \left(\frac{1+r}{1+a}\right)^T}{\ln\left(\frac{1+b}{1+a}\right)} \Longrightarrow X_0 \left(\frac{1+a}{1+r}\right)^{T} \left(\frac{1+b}{1+a}\right)^{i} \geq \tilde{k}.$$

Обозначим

$$N = \left[\frac{\ln \frac{\tilde{k}}{X_0} \left(\frac{1+r}{1+a}\right)^T}{\ln\left(\frac{1+b}{1+a}\right)}\right] + 1,$$

и

$$B(T,N,p) = \sum_{k=N}^{T} b(T,k,p) = \mathbb{P}(v \geq N).$$

В этих обозначениях

$$\mathbb{E}_Q(X_T - \tilde{k})_+ = \sum_{i=N}^{T} b\left(T, i, \frac{r-a}{b-a}\right) X_0 \left(\frac{1+a}{1+r}\right)^{T} \left(\frac{1+b}{1+a}\right)^{i} - \tilde{k}B(T,N,\frac{r-a}{b-a}).$$

$$\sum_{0}^{N} C_T^i \left(\frac{r-a}{b-a}\right)^{T-i} \left(\frac{b-r}{b-a}\right)^{i} \left(\frac{1+a}{1+r}\right)^{T-i} \left(\frac{1+b}{1+r}\right)^{i} = B\left(T, N, \frac{b-r}{b-a}\frac{1+b}{1+r}\right).$$

Объединяя две последние формулы, получим

$$\mathbb{E}_Q\,\zeta = B_T X_0 B(T,N,\bar{\pi}) - KB(T,N,\pi),$$

где

$$\pi = \frac{r-a}{b-a}, \bar{\pi} = \frac{b-r}{b-a} \cdot \frac{1+b}{1+r}.$$

Можно показать, что величина премии вычисляется как

$$\frac{\mathbb{E}_Q \, \zeta}{(1+r)^T} = X_0 B(T, N, \bar{\pi}) - \tilde{k} B(T, N, \pi).$$

Оказывается, что при измельчении шага по времени $\triangle t$ и устремлении его к нулю схема случайного блуждения будет слабо (по распределению) сходится к винеровскому процессу. Для этого необходимо только соответствующим образом центрировать и нормировать эту схему случайного блуждания (чтобы добиться сходимости к винеровскому процессу, а не к его линейному преобразованию).

20 Приложения

20.1 Опциональное разложение и его использование в задаче ценообразования и хеджирования обусловленных обязательств

Введем понятие **существенного супремума**. Пусть имеется континуальное или счетное семейство случайных величин $X_\alpha, \alpha \in I$.

Определение 20.1. *Случайная величина X^* называется существенным супремумом семейства X_α (обозначается $X^* = \operatorname*{ess\,sup}_{\alpha \in I} X_\alpha$), если:*

1. *$\forall\ \alpha \quad X^* \geqslant X_\alpha$ п.н.;*
2. *из того, что $X \geqslant X_\alpha$ п.н. $\forall \alpha$, следует, что $X \geqslant X^*$ п.н.*

Замечание 20.1. $\forall\ \alpha \in I \quad \mathbb{P}(X^* \geqslant X_\alpha) = 1$, *при этом квантор $\forall \alpha$ вносить в скобки нельзя.*

Замечание 20.2. *Если функция f строго монотонно возрастает, тогда из этого определения следует, что*

$$\operatorname*{ess\,sup}_{\alpha \in I} f(X_\alpha) = f(\operatorname*{ess\,sup}_{\alpha \in I} X_\alpha),$$

где равенство рассматривается в предположении существования существенного супремума, т.е. если первый существенный супремум существует, тогда существует и второй, и они равны.

Теорема 20.1. *Существенный супремум для семейства ограниченных случайных величин корректно определен, и существует не более чем счетное подмножество индексов $C \subseteq I$ такое, что*

$$\operatorname*{ess\,sup}_{\alpha \in I} X_\alpha = \bigvee_{\alpha \in C} X_\alpha$$

Рассмотрим фильтрованное вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$ и $\mathcal{M}(\mathbb{P})$ — множество мартингальных мер. Пусть задан векторнозначный процесс X – процесс цен. Рассмотрим модель с конечным горизонтом: $t = 0, 1, ..., T$. Допустим, что множество мартингальных мер $\mathcal{M}(\mathbb{P})$ непусто (это эквивалентно условию отсутствия арбитражных возможностей).

Будем рассматривать адаптированный случайный процесс $V_t, t = 0, 1, ..., T$ и $V_t \geq 0$. Будем интерпритировать V_t как капитал в момент времени t. Рассматриваются стратегии, при которых текущий капитал (стоимость портфеля) не может быть отрицательным.

Как известно, для того, чтобы стратегия H_t была самофинансируемой необходимо, чтобы стоимость портфеля изменялась следующим образом:

$$V_t = V_0 + \sum_{k=1}^{t} H_k \triangle X_k,$$

То есть V_t должно быть интегральным преобразованием X_k.

Теорема 20.2 (Крамков). *При сделанных предположкниях для того, чтобы процесс $V_t \geqslant 0$ отвечал самофинансируемой стратегии, необходимо и достаточно, чтобы он был локальным мартингалом по отношению к любой мартингальной мере $Q \in \mathcal{M}(\mathbb{P})$.*

Теорема 20.3. *Для того, чтобы $V_t \geqslant 0$ было капиталом, отвечающим стратегии без притока капитала, небходимо и достаточно, чтобы процесс V_t был супермартингалом относительно любой мартингальной меры $Q \in \mathcal{M}(\mathbb{P})$.*

Упражнение 29. *Проверить для* **теоремы Крамкова** *необходимость.*

Эти результаты позволяют отделить задачу ценообразования от задачи хеджирования. Например, применим теорему Крамкова к решению задачи ценообразования обязательства европейского типа. Будем рассматривать лишь процессы $V_t \geqslant 0$, такие, что $V_T \geqslant \zeta$ п.н. Здесь $\zeta \geqslant 0$ – обусловленное обязательство, ζ_T — случайная величина, измеримая относительно $\mathcal{F}_T$.

Нас интересует страрегии с минимальным возможным начальным капиталом, позволяющая покрыть наши обязательства в конечный момент времени. Поскольку V_t является супермартингалом относительно любой меры из $\mathcal{M}(\mathbb{P})$, имеем

$$V_t \geqslant \mathbb{E}_Q^{\mathcal{F}_T} V_T \geqslant \mathbb{E}_Q^{\mathcal{F}_T} \zeta.$$

Таким образом, получаем

$$V_t \geqslant \operatorname*{ess\,sup}_{Q \in \mathcal{M}(\mathbb{P})} \mathbb{E}^{\mathcal{F}_T} \zeta = \hat{V}_t.$$

Тогда $\hat{V}_t$ является неотрицательным тотальным супермартингалом (неотрицательность следует из того, что $\zeta \geqslant 0$). $\hat{V}_t$ и есть стоимость портфеля, являющаяся минимальным хеджем.

Пусть ζ – неотрицательная $\mathcal{F}_T$–измеримая случайная величина. Пусть задана мера $\mathbf{Q}$ из класса мартингальных мер: $\mathbf{Q} \in \mathcal{M}(X)$. Тогда ζ называется $\mathbf{Q}$-воспроизводимой, если существует начальный капитал V_0 и стратегия H без притока капитала, такие, что: $\zeta = V_T$, V_t является $\mathbf{Q}$ - мартингалом и имеет место равенство

$$V_t = V_0 + \sum_{s=0}^{t} H_s \triangle X_s = V_0 + (H \circ X)_t.$$

Утверждение 20.1. *Равносильны следующие утверждения:*

- *Найдется мера $\mathcal{Q}^* \in \mathcal{M}$, такая, что $\mathbb{E}_{\mathcal{Q}^*} \zeta = \sup_{\mathbf{Q} \in \mathcal{M}} \mathbb{E}_{\mathbf{Q}} \zeta$.*
- *Обусловленное обязательство ζ является $\mathcal{Q}^*$-воспроизводимым.*

Упражнение 30. *Если V_t - супермартингал и $\mathbb{E}\, V_T = V_0$, то V_t - мартингал.*

20.2 Некоторые вспомогательные результаты

Определение 20.2. *Числовая функция называется полунепрерывной снизу в точке x_0, если $\forall \varepsilon > 0$ найдется окрестность этой точки, в которой $f(x) > f(x_0) - \varepsilon$.*

Пример 20.1. *Например, индикатор произвольного открытого множества будет полунепрерывной снизу функцией.*

Еще один пример:

$$f(x) = \begin{cases} \sin 1/x, & x \neq 0 \\ a, & x = 0 \end{cases}$$

Такая функция будет полунепрерывна снизу, если $a \leqslant -1$.

Эквивалентными определениями полунепрерывности снизу являются

- замкнутость надграфика;
- $\liminf\limits_{x \to x_0} f(x) \geqslant f(x_0)$.

Упражнение 31. *Доказать, что произвольную полунепрерывную снизу функцию можно представить в виде предела монотонно неубывающей последовательности непрерывных функций.*

Если f_α - семейство полунепрерывных снизу функций, то $f(x) = \sup\limits_\alpha f_\alpha(x)$ снова будет полунепрерывна снизу.

Пусть к моменту t известны цены активов $X_0, ..., X_t$ и некоторая дополнительная информация $Y_0, ..., Y_t$. Заметим, что на природу Y_k не накладывается никаких ограничений, достаточно, чтобы это были элементы какого-нибудь достаточно хорошего пространства (например, польского). Смоделируем дальнейший процесс цен, используя уже доступную информацию о ценах. Обозначим

$$\mathbb{P}_{X_{t+1}, Y_{t+1} \left| \begin{array}{l} X_1 = x_1, ..., X_t = x_t \\ Y_1 = y_1, ..., \ Y_t = y_t \end{array} \right.}(B) = Q_t\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}, ..., \begin{pmatrix} x_t \\ y_t \end{pmatrix}, B \right).$$

$Q_t(x, A)$ является переходным ядром.

Определение 20.3. *Пусть даны измеримые пространства $(X, \mathcal{X})$ и $(Y, \mathcal{Y})$.* ***Переходным ядром*** *назвывается отображение $Q : X \times \mathcal{Y} \to \mathbb{R}^1$, такое, что Q измеримо по первому аргументу при фиксированном втором, и является мерой по второму аргументу, при фиксированном первом.*

Определение 20.4. *Переходное ядро Q называется* ***стохастическим****, если $Q(x, \cdot)$ является вероятностной мерой для любого $x \in X$.*

Введем следующие обозначения:

$$Qf(x) = \int Q(x, dy) f(y)$$

$C(X)$ — пространство ограниченных и непрерывных функций на X

$\mathrm{LSC}(X)$ — класс полунепрерывных снизу и ограниченных функций

Определение 20.5. *Говорят, что Q_t обладает **феллеровским** свойством (является феллеровским переходным ядром), если любая непрерывная ограниченная функция $f \to Qf$ переходит снова в непрерывную функцию. Q_t **субфеллеровское**, если $LSC \to LSC$.*

Упражнение 32. *На компактном множестве полунепрерывная снизу и ограниченная функция достигает своего минимума.*

Утверждение 20.2 (Критерий феллеровости переходного ядра)**.** *Ядро обладает феллеровским свойством, тогда и только тогда, когда отображение $x \mapsto Q(x,\cdot)$ непрерывно в слабой топологии на семействе мер.*

Утверждение 20.3 (ритерий слабой сходимости)**.** $\mathbb{P}_n \to \mathbb{P}$ *тогда и только тогда, когда для произвольной $f \in LSC$ выполняется*

$$\liminf_n \int f(x)\,\mathbb{P}_n(dx) \geqslant \int f(x)\,\mathbb{P}(dx).$$

Вернемся к задаче ценообразования.

$$\xi_t^* = \operatorname*{ess\,sup}_{\mathbb{P}\in\mathcal{M}(X)} \mathbb{E}_P^{\mathcal{F}_t}\,\xi_{t+1}^*$$

Последнее равенство в терминах переходных ядер можно переписать в виде:

$$\xi_t^* = \sup_{P\in\mathcal{M}(X)} \int \xi_{t+1}^* Q_t\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} x_t \\ y_t \end{pmatrix}, du\right).$$

Мы будем брать супремум по мерам с феллеровским переходным оператором (отказываемся от условия эквивалентности мер).

Рассмотрим следующую задачу максимизации (ее еще называют проблемой моментов):

$$\int f(x)\mu(dx) \to \max_{\mu\in\mathcal{N}}$$

где $\mathcal{N} = \left\{\mu : \begin{pmatrix} \int g_1 d\mu \\ \cdots \\ \int g_k d\mu \end{pmatrix} \in D\right\}$, где D – выпуклое замкнутое подмножество $\mathbb{R}^k$. Существует очень полезный для решения нашей задачи результат:

Утверждение 20.4. *Решение проблемы моментов достигается на мере, сосредоточенной на не более чем k точках.*

Условия коммутируемости существенного супремума и оператора математического ожидания. Доказательство супермартингальности

Лемма 20.1. *Для произвольного семейства случайных величин* Γ *почти всюду справедливо неравенство:*

$$\mathbb{E}^{\mathcal{A}} \operatorname*{ess\,sup}_{\xi \in \Gamma} \xi \geqslant \operatorname*{ess\,sup}_{\xi \in \Gamma} \mathbb{E}^{\mathcal{A}} \xi \tag{20.1}$$

Ответ на вопрос, когда неравенство (20.1) выполняется в виде равенства, дает следующее утверждение:

Лемма 20.2. *Пусть семейство случайных величин* Γ *обладает тем свойством, что для любых* $\xi_1 \in \Gamma$ *и* $\xi_2 \in \Gamma$ *найдется величина* $\xi_3 \in \Gamma$*, такая, что* $\xi_3 \geqslant \xi_1$ *(п.н),* $\xi_3 \geqslant \xi_2$ *(п.н), тогда неравенство (20.1) обращается в равенство.*

До сих пор мы имели дело с семейством эквивалентных мер. Но это не всегда удобно. Можно выделить одну меру, и каждой другой мере поставить в соответствие некоторую функцию – ее плотность (производную Радона-Никодима). Итак, пусть нам задано произвольное вероятностное пространство с фильтрацией $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$ и $\mathbf{Q}$ – мера абсолютно непрерывная относительно меры $\mathbb{P}$. Через Z обозначим производную Радона-Никодима меры $\mathbf{Q}$ относительно меры $\mathbb{P}$:

$$Z = \frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbb{P}}.$$

Введем в рассмотрение локальные плотности:

$$Z_k = \frac{d\mathbf{Q}\big|_{\mathcal{F}_k}}{d\,\mathbb{P}\big|_{\mathcal{F}_k}},$$

где через $\mathbf{Q}\big|_{\mathcal{F}_k}$, $\mathbb{P}\big|_{\mathcal{F}_k}$ обозначены меры, суженные на σ-алгебру $\mathcal{F}_k$, то есть это меры на измеримом пространстве $(\Omega, \mathcal{F}_k)$. Семейство таких локальных плотностей образует случайный процесс. Справедливо следующее утверждение:

Утверждение 20.5. *Семейство случайных величин* ξ_k *является процессом локальных плотностей в том и только том случае, когда* ξ_k *образуют равномерно интегрируемый мартингал.*

Рассмотрим вспомогательную лемму.

Лемма 20.3. *Если семейство случайных величин* $\{\xi_k\}$ *является неотрицательным супермартингалом, то*

$$\{\xi_k = 0\} \subseteq \{\xi_{k+1} = 0\} \text{ (п.н.).}$$

Другими словами, если $k_0 = \inf\{k \,:\, \xi_k = 0\}$ *– марковский момент первого попадания в нуль, то для любого марковского момента* $k > k_0$ *верно* $\xi_k = 0$. *Считается, что* $\inf \emptyset = +\infty$.

Утверждение 20.6. *Пусть* Z_k *процесс локальных плотностей, тогда существуют неотрицательные случайные величины* z_k*, являющиеся* $\mathcal{F}_k$ *- измеримыми, с* $\mathbb{E}^{\mathcal{F}_{k-1}} z_k = 1$ *и справедливо следующее соотношение:*

$$Z_{k+1} = z_{k+1} Z_k, \tag{20.2}$$

которое носит название мультипликативного представления для семейства локальных плотностей.

Дадим теперь формулу пересчета условного математического ожидания по новой мере $\mathbf{Q}$, являющейся абсолютно непрерывной относительно заданной меры $\mathbb{P}$. Пусть $\mathbf{Q} \ll \mathrm{P}$, $Z = \frac{d\mathrm{Q}}{d\mathrm{P}}$, тогда:

$$\mathbb{E}^{\mathcal{A}}_{\mathbf{Q}} Y = \begin{cases} \frac{\mathbb{E}^{\mathcal{A}}(ZY)}{\mathbb{E}^{\mathcal{A}} Z}, \text{ на множестве } \{\mathbb{E}^{\mathcal{A}} Z > 0\} \\ \eta - \mathcal{A} - \text{измеримая с.в., на множестве } \{\mathbb{E}^{\mathcal{A}} Z = 0\} \end{cases} \tag{20.3}$$

Так как $Z \geqslant 0$, то $\{\mathbb{E}^{\mathcal{A}} Z = 0\} \subseteq \{Z = 0\}$, а множество $\{Z = 0\}$ имеет нулевую меру $\mathbf{Q}$ в силу того, что Z — плотность. Следовательно, $\{\mathbb{E}^{\mathcal{A}} Z = 0\}$ также имеет нулевую меру $\mathbf{Q}$. Поэтому корректна запись:

$$\mathbb{E}^{\mathcal{A}}_{\mathbf{Q}} Y = \frac{\mathbb{E}^{\mathcal{A}}(ZY)}{\mathbb{E}^{\mathcal{A}} Z},$$

так как знаменатель обращается в ноль только на множестве нулевой меры.

Лемма 20.4. *Пусть* η *—* $\mathcal{F}_m$*-измеримая случайная величина,* $m > k$*. Тогда*

$$\mathbb{E}^{\mathcal{F}_k}_{\mathbf{Q}} \eta = \mathbb{E}^{\mathcal{F}_k}(z_{k+1} \cdot \ldots \cdot z_m \eta)$$

Упражнение 33. *Показать, что при замене существенного супремума по множеству мартингальных мер, эквивалентных исходной мере, на супремум по множеству абсолютно непрерывных относительно исходной мартингальных мер, значение супремума не изменится.*