ТРУДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА ИМ. В.А. СТЕКЛОВА, 1999, т. 224, с. 234–248

УДК 517.977

Альтернированный интеграл Понтрягина в теории синтеза управлений[1]

©1999 г. А.Б. Куржанский

Поступило в сентябре 1998 г.

ВВЕДЕНИЕ

Настоящая работа посвящена задаче нелинейного синтеза управлений в системах с исходной линейной структурой, когда недоопределенные параметры стеснены априори известными ограничениями. В ней обсуждается приложение к данному кругу задач теории многозначного анализа [1] и подчеркивается роль *альтернированного интеграла Понтрягина* в интерпретации предлагаемых решений. В рамках формализма Н.Н. Красовского отмечены связи со схемами динамического программирования (ДП) и с представлением решений при помощи уравнений интегральных воронок для дифференциальных включений. Упомянутые связи позволяют перейти к объяснению второй цели данной работы — указанию на то обстоятельство, что альтернированный интеграл допускает описание в терминах эллипсоидальных представлений, записанных в явном виде. Подобный "эллипсоидальный" поворот позволяет представить решение задачи синтеза в системе с геометрическими "жесткими" ограничениями в виде аналитических, а не алгоритмических конструкций, как этого требует "точная" теория. Он также позволяет для рассматриваемого круга задач представить основополагающие соотношения работ [8, 18, 23], а также соотношения работ [12, 13], в виде численно реализуемых эллипсоидальных представлений [14].

1. СИНТЕЗ УПРАВЛЕНИЙ В УСЛОВИЯХ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ. АЛЬТЕРНИРОВАННЫЙ ИНТЕГРАЛ ПОНТРЯГИНА

Одним из главных объектов изучения в теории "позиционного" управления является *задача нелинейного синтеза управлений* при наличии априори неизвестных, но ограниченных помех[2]. Отмеченная задача была весьма подробно изучена как в рамках теории дифференциальных игр, так и в теории так называемого робастного (т.е. "грубого") управления. Приведем типичную задачу указанного круга [8, 9, 11, 14, 16].

Рассмотрим систему

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u + C(t)v(t), \tag{1.1}$$

с непрерывными матричными коэффициентами $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$. Здесь $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^p$ — *управление*, которое может быть выбрано среди *многозначных стратегий* вида $u = \mathcal{U}(t, x) \subseteq \mathcal{P}(t)$,

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 97-01-01003) и гранта "Университеты России".

[2]В англоязычной литературе для данной задачи распространена аббревиатура NOLCOS (Nonlinear Control Synthesis).

$v \in \mathbb{R}^q$ — неизвестное *входное возмущение*, почти всюду стесненное включением $v(t) \in \mathcal{Q}(t)$. Стратегия $\mathcal{U} \in U_{\mathcal{P}}$, где класс $U_{\mathcal{P}}$ состоит из многозначных отображений $\mathcal{U}(t,x)$, обеспечивающих существование и продолжаемость решения дифференциального включения (1.1) при $u = \mathcal{U}(t,x)$ и при любой измеримой по Лебегу функции[3] $v(t)$; $\mathcal{P}(t)$, $\mathcal{Q}(t)$ — непрерывные многозначные функции со значениями в множестве выпуклых компактов $\operatorname{comp}\mathbb{R}^n$; $\mathcal{M} \in \operatorname{comp}\mathbb{R}^n$ — целевое ("терминальное") множество.

Определение 1.1. Задача *целевого синтеза управлений при неопределенности* состоит в нахождении *множества разрешимости* $\mathcal{W}(\tau, t_1, \mathcal{M}) = \mathcal{W}[\tau]$ и такой многозначной *позиционной стратегии управления* $u = \mathcal{U}(t,x)$, чтобы все решения $x(t)$ дифференциального включения

$$\dot{x} \in A(t)x + B(t)\mathcal{U}(t,x) + C(t)v(t), \qquad \tau \le t \le t_1, \tag{1.2}$$

выпущенные из любой позиции $\{\tau, x_\tau\}$, $x_\tau = x(\tau)$, $x_\tau \in \mathcal{W}(\tau, t_1, \mathcal{M})$, $\tau \in [t_0, t_1)$, достигали терминального множества $\mathcal{M}$ в момент t_1: $x(t_1) \in \mathcal{M}$, каким бы ни было неизвестное возмущение $v(t)$.

Определение 1.1 содержательно, если $\mathcal{W}(\tau, t_1, \mathcal{M}) \neq \varnothing$. Многозначную функцию $\mathcal{W}[t] = \mathcal{W}(t, t_1, \mathcal{M})$ принято называть *трубкой разрешимости* или *"мостом Красовского"*. Функция $\mathcal{W}[t]$ является ключевым элементом построения решения задачи. Важным фактом является то, что эту функцию можно искать посредством вычисления некоторого многозначного интеграла — *альтернированного интеграла Понтрягина* (см. [19]).

Напомним его определение. С этой целью преобразуем систему (1.1) к более простому виду

$$\dot{x} = u + v \tag{1.3}$$

с новыми ограничениями

$$u \in \mathcal{P}_0(t), \qquad v \in \mathcal{Q}_0(t), \tag{1.4}$$

где $\mathcal{P}_0(t) = S(t_1,t)B(t)\mathcal{P}(t)$, $\mathcal{Q}_0(t) = S(t_1,t)C(t)\mathcal{Q}(t)$ и $S(t,t_1)$ — фундаментальная матрица однородного уравнения (1.1). Не умаляя общности, будем далее вместо (1.1) рассматривать систему (1.3) с ограничениями (1.4), в которой впредь *нижний индекс нуль опускаем.*

Определим $W[\tau]$ как множество

$$W[\tau] = W(\tau, t_1, \mathcal{M}) = \left\{x\colon\ \max_v \min_u d^2(x(t_1), \mathcal{M}) \le 0 \mid x(\tau) = x\right\},$$

где $d^2(x, \mathcal{M}) = \min_z\{(x - z, x - z) \mid z \in \mathcal{M}\}$ и $x(t_1)$ — конец в момент t_1 траектории $x(t)$ системы (1.3), выпущенной из положения $x(\tau) = x$.

Прямыми вычислениями получаем

$$W(\tau, t_1, \mathcal{M}) = \left(\mathcal{M} + \int_t^{t_1} (-\mathcal{P}(\tau))\,d\tau\right) \dot{-} \int_t^{t_1} \mathcal{Q}(\tau)\,d\tau. \tag{1.5}$$

Здесь символ $\mathcal{P} \dot{-} \mathcal{Q}$ означает геометрическую (Минковского) разность множеств $\mathcal{P}$, $\mathcal{Q}$ (а именно $c \in \mathcal{P} \dot{-} \mathcal{Q}$ в том и только том случае, когда $c + \mathcal{Q} \subseteq \mathcal{P}$).

[3] Таковым, например, является класс многозначных функций $\mathcal{U}(t,x)$ со значениями в $\operatorname{comp}\mathbb{R}^p$, полунепрерывных сверху по x и непрерывных по t.

Построим множество $\mathcal{W}^*(\tau, t_1, \mathcal{M})$, являющееся некоторой суперпозицией множеств $W(\tau, t_1, \mathcal{M})$, определенных выше. Взяв интервал $\tau \leq t \leq t_1$, рассмотрим разбиение $\Sigma_k = \{\sigma_1, \dots, \sigma_k\}$,

$$t = t_1 - \sum_{i=1}^{k} \sigma_i, \dots, t_1 - \sigma_1, t_1, \qquad \sigma_i > 0.$$

На первом шаге, начав с момента t_1, найдем множество $W[t_1 - \sigma_1] = W(t_1 - \sigma_1, t_1, \mathcal{M})$. Вследствие (1.5) будем иметь

$$W(t_1 - \sigma_1, t_1, \mathcal{M}) = \left(\mathcal{M} + \int_{t_1-\sigma_1}^{t_1} (-\mathcal{P}(\tau))\, d\tau\right) \dot{-} \int_{t_1-\sigma_1}^{t_1} \mathcal{Q}(\tau)\, d\tau. \tag{1.6}$$

Продолжая последовательную процедуру, имеем

$$W(t_1-\sigma_1-\sigma_2, t_1-\sigma_1, W[t_1-\sigma_1]) = \left(W[t_1-\sigma_1] + \int_{t_1-\sigma_1-\sigma_2}^{t_1-\sigma_1} (-\mathcal{P}(\tau))\, d\tau\right) \dot{-} \int_{t_1-\sigma_1-\sigma_2}^{t_1-\sigma_1} \mathcal{Q}(\tau) d\tau \tag{1.7}$$

и, наконец, получаем

$$W\Big(t, t+\sigma_k, W\Big(t+\sigma_k, t+\sigma_k+\sigma_{k-1}, \dots, W(t_1-\sigma_1, t_1, \mathcal{M})\Big)\dots\Big) = \mathcal{I}(t, t_1, \mathcal{M}, \Sigma_k). \tag{1.8}$$

В приведенной выше формальной процедуре предполагается, что все возникающие здесь множества $W(\cdot)$ вида (1.8) непусты. Обозначим $\mathcal{S} = \{x\colon (x,x) \leq 1\}$.

Предположение 1.1. *Существует такая непрерывная функция $\beta(t) > 0$, $t \in [t_0, t_1]$, что все множества*

$$W\left(t_1 - \sum_{i=1}^{j} \sigma_i,\ t_1 - \sum_{i=1}^{j-1} \sigma_i,\ W\Big(t_1 - \sum_{i=1}^{j-1} \sigma_1,\ t_1 - \sum_{i=1}^{j-2} \sigma_i, \dots, W(t_1 - \sigma_1, t_1, \mathcal{M})\Big)\dots\right) \dot{-}$$
$$\dot{-}\ \beta\Big(t_1 - \sum_{i=1}^{j} \sigma_i\Big)\mathcal{S} \neq \varnothing$$

при $j = 1, \dots, k$, каким бы ни было разбиение Σ_k.

Предположение 1.1 обеспечивает условие $W(\tau, t_1, \mathcal{M}) = \mathcal{I}(t, t_1, \mathcal{M}, \Sigma_k) \neq \varnothing$ для любого разбиения Σ_k.

Ниже всюду считаем *без дальнейших напоминаний*, что предположение 1.1 *выполнено*[4].

Следуя (1.6)–(1.8), приходим к аналитическому выражению

$$\mathcal{I}(\tau, t_1, \mathcal{M}, \Sigma_k) = \left(\dots\left(\left(\mathcal{M} + \int_{t_1-\sigma_1}^{t_1} (-\mathcal{P}(\tau))\, d\tau\right) \dot{-} \int_{t_1-\sigma_1}^{t_1} \mathcal{Q}(\tau)\, d\tau\right) + \dots \dot{-} \int_{t}^{t+\sigma_k} \mathcal{Q}(\tau)\, d\tau\right). \tag{1.9}$$

[4]Следует заметить, что данное замечание введено не только для облегчения выкладок. В его отсутствие некоторые из утверждений, приводимых ниже, могут оказаться неверными.

Множества $\mathcal{I}(\tau, t_1, \mathcal{M}, \Sigma_k)$ суть выпуклые компакты для любого Σ_k. Рассмотрим хаусдорфов предел этих множеств при $\max\{\sigma_i \colon i = 1, \ldots, k\} \to 0$, $k \to \infty$.

(Напомним, что *хаусдорфово полурасстояние* между компактами $\mathcal{Q}$, $\mathcal{M}$ определяется как

$$h_+(\mathcal{Q}, \mathcal{M}) = \max_x \min_z \{(x - z, x - z)^{1/2} \mid x \in \mathcal{Q},\ z \in \mathcal{M}\},$$

тогда как *хаусдорфово расстояние* $h(\mathcal{Q}, \mathcal{M}) = \max\{h_+(\mathcal{Q}, \mathcal{M}), h_+(\mathcal{M}, \mathcal{Q})\}$, причем $h_+(x, \mathcal{M}) = d(x, \mathcal{M})$.)

Лемма 1.1. *Существует хаусдорфов предел* $\mathcal{I}(t, t_1, \mathcal{M})$

$$\lim h\Big(\mathcal{I}(t, t_1, \mathcal{M}, \Sigma_k), \mathcal{I}(t, t_1, \mathcal{M})\Big) = 0$$

при

$$\max\{\sigma_i \colon i = 1, \ldots, k\} \to 0, \quad k \to \infty, \qquad \sum_{i=1}^{k} \sigma_i = t_1 - t.$$

Этот предел не зависит от способа разбиения Σ_k.

Множество

$$\mathcal{I}(t, t_1, \mathcal{M}) = \mathcal{W}^*(t, t_1, \mathcal{M}) = \mathcal{W}^*[t] \tag{1.10}$$

будем называть *альтернированной областью разрешимости* задачи определения 1.1, обозначая его как

$$\mathcal{I}(t, t_1, \mathcal{M}) = \int_{t_1, \mathcal{M}}^{t} \Big((-\mathcal{P}(\tau))\, d\tau \mathbin{\dot{-}} \mathcal{Q}(\tau)\, d\tau\Big).$$

Фактически множество $\mathcal{I}(t, t_1, \mathcal{M})$ есть значение некоторого *многозначного интеграла*, известного как *альтернированный интеграл Понтрягина*. Этот интеграл был введен в работе [18] и подробно описан в статье [19].

Лемма 1.2. *Многозначное отображение* $\mathcal{W}^*(\tau, t_1, \mathcal{M})$ *удовлетворяет полугрупповому свойству (в попятном времени). Именно*

$$\mathcal{W}^*(\tau, t_1, \mathcal{M}) = \mathcal{W}^*(\tau, t, \mathcal{W}^*(t, t_1, \mathcal{M})), \tag{1.11}$$

где $\tau \le t \le t_1$.

Доказательство последнего предложения вытекает из свойства аддитивности альтернированного интеграла $\mathcal{I}(t, t_1, \mathcal{M})$.

Ключевое свойство альтернированного интеграла содержится в следующем предложении.

Теорема 1.1. *Множество разрешимости* $\mathcal{W}[t]$ *определения* 1.1 *может быть представлено как*

$$\mathcal{W}[t] \equiv \mathcal{W}^*[t] \equiv \mathcal{I}(t, t_1, \mathcal{M}), \qquad t_0 \le t \le t_1. \tag{1.12}$$

Ниже отмечено, что альтернированный интеграл тесно связан с функциями цены соответствующих дифференциальных игр. Он был использован в решении линейных дифференциальных игр преследования (см. [18, 19, 17]). Однако здесь возникают определенные трудности (см. комментарий в статье [19]). Было немало попыток разработать методы вычисления этого интеграла, а следовательно, и трубки $\mathcal{W}[t]$. Но эта задача нелегка.

В самом деле, трудности вычисления становятся заметны, как только делается попытка сосчитать *опорную функцию*

$$\rho(l|\mathcal{W}[t]) = \{\max(l, x)|\ x \in \mathcal{W}[t]\} \tag{1.13}$$

альтернированного интеграла. Хотя функция $\mathcal{W}[t]$ и принимает значения среди выпуклых компактов, вычисление $\rho(l|\mathcal{W}[t])$ требует повторных вычислений опорной функции геометрической разности выпуклых компактов. Последнее в свою очередь приводит к трудоемкой операции овыпукления разности положительно однородных выпуклых функций. К тому же требуется вычислять изменения интеграла $\mathcal{I}(t, T_1, \mathcal{M})$ во времени, а также другие сложные агрегаты решения.

Помимо обсуждения интерпретаций альтернированного интеграла, отличных от [19], целью настоящей заметки является указание на возможность использования *эллипсоидального исчисления*, в рамках которого вычисление этого интеграла, а также других элементов решения задачи синтеза управлений и дифференциальных игр можно осуществить, *не прибегая формально к операциям овыпукления*. В частности, это позволяет представить решения целого ряда задач синтеза управлений при неопределенности с геометрическими ограничениями в виде эффективных аналитических соотношений [14].

2. ГАРАНТИРОВАННЫЙ СИНТЕЗ УПРАВЛЕНИЙ. ФУНКЦИИ ЦЕНЫ

Рассмотрим задачу *целевого синтеза управлений при неопределенности*, сформулированную в определении 1.1. Данная задача не содержит каких-либо критериев оптимальности. В ней требуется найти лишь допустимое "гарантированное" решение. Тем не менее будем рассматривать ее посредством сведения к процедурам оптимизации, а именно в рамках решения соответствующих *минимаксных задач*, навеянных идеями динамического программирования. Введем *функцию цены*

$$\mathcal{V}(t, x) = \min_{\mathcal{U}} \max_{x(\cdot)} \{\mathcal{I}(t, x)|\ \mathcal{U} \in U_{\mathcal{P}},\ x(\cdot) \in \mathcal{X}_{\mathcal{U}}(\cdot)\}, \tag{2.1}$$

где

$$\mathcal{I}(t, x) = d^2(x[t_1], \mathcal{M})$$

и $\mathcal{X}_{\mathcal{U}}(\cdot)$ означает множество всех траекторий $x(\cdot)$ включения

$$\dot{x} \in \mathcal{U}(t, x) + \mathcal{Q}(t), \qquad x(\tau) = x, \tag{2.2}$$

порожденных заданной стратегией $\mathcal{U} \in U_{\mathcal{P}}$.

Формальное уравнение Гамильтона–Якоби–Беллмана–Айзекса (HJBI) для функции $\mathcal{V}(t, x)$ имеет следующий вид:

$$\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial t} + \min_u \max_v \left(\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x}, u + v\right) = 0, \qquad u \in \mathcal{P}(t), \quad v \in \mathcal{Q}(t), \tag{2.3}$$

с граничным условием

$$\mathcal{V}(t_1, x) = d^2(x, \mathcal{M}). \tag{2.4}$$

В общем случае подобное уравнение может не иметь классического решения и для его рассмотрения следует привлекать понятия обобщенных "вязкостных" или эквивалентных "минимаксных" решений [5, 21], (см. также [15, 6, 2]). При этом в конкретных задачах данной статьи функция цены $\mathcal{V}(t,x)$ оказывается выпуклой или квазивыпуклой по x. Поэтому решения соответствующих уравнений вида HJBI, рассматриваемых здесь, не выходят за рамки вязкостных или даже классических решений.

Перейдем к другой интерпретации функции цены $\mathcal{V}(t,x)$. Рассматривая интервал $\tau \le t \le t_1$, построим разбиение $\Sigma_k = \{\sigma_1, \dots, \sigma_k\}$, подобное введенному в разд. 1. Для данного разбиения рассмотрим рекуррентные соотношения

$$V_k^+(t_1-\sigma_1, x) = \Big\{\max_v \min_u d^2(x(t_1), \mathcal{M}) |\; t_1-\sigma_1 \le t \le t_1,\; x(t_1-\sigma_1) = x\Big\},$$

$$V_k^+(t_1-\sigma_1-\sigma_2, x) = \Big\{\max_v \min_u V_k^+(t_1-\sigma_1, x(t_1-\sigma_1)) |\; t_1-\sigma_1-\sigma_2 \le t \le t_1-\sigma_1,$$
$$x(t_1-\sigma_1-\sigma_2) = x\Big\},$$

$$V_k^+(\tau, x) = \Big\{\max_v \min_u V_k^+(\tau+\sigma_k, x(\tau+\sigma_k)) |\; \tau \le t \le \tau+\sigma_k,\; x(\tau) = x\Big\},$$

где $v(t) \in \mathcal{Q}(t)$, $u(t) \in \mathcal{P}(t)$ почти всюду на соответствующих интервалах.

Лемма 2.1. *При*

$$\max\{\sigma_i\colon i = 1, \dots, k\} \to 0, \quad k \to \infty, \qquad \sum_{i=1}^k \sigma_i = t_1 - \tau,$$

существует поточечный предел

$$V^+(\tau, x) = \lim_{k\to\infty} V_k^+(\tau, x), \tag{2.5}$$

не зависящий от выбора разбиений Σ_k.

Будем говорить, что $V^+(\tau,x)$ — *последовательный максимин*. Обозначим

$$V^+(\tau, x) = V^+(\tau, x | V^+(t_1, \cdot)), \qquad V^+(t_1, x) \equiv d^2(x, \mathcal{M}). \tag{2.6}$$

Нетрудно заметить следующее.

Лемма 2.2. *Функция* $V^+(\tau,x)$ *удовлетворяет полугрупповому свойству*

$$V^+(\tau, x | V^+(t_1, \cdot)) = V^+(\tau, x | V^+(t, \cdot | V^+(t_1, \cdot))). \tag{2.7}$$

Справедливо неравенство

$$V^+(t, x) \ge \{\max_v \min_u V^+(t+\sigma, x(t+\sigma)) |\; x(t) = x\}, \qquad \sigma > 0. \tag{2.8}$$

Прямым счетом посредством техники выпуклого анализа (см., например, [20; 14, разд. 1.5–1.8]) можно проверить следующее соотношение.

Лемма 2.3. *Справедливо равенство*

$$V^+(\tau, x) = d^2(x, \mathcal{W}^*(\tau, t_1, \mathcal{M})),$$

где $\mathcal{W}^*[\tau] = \mathcal{W}^*(\tau, t_1, \mathcal{M}) = \mathcal{I}(\tau, t_1, \mathcal{M})$ — *значение альтернированного интеграла* (1.10).

Отсюда прямо следует

Лемма 2.4. *Альтернированный интеграл* $\mathcal{I}(\tau, t_1, \mathcal{M})$ *совпадает с множеством уровня*

$$\mathcal{I}(\tau, t_1, \mathcal{M}) = \{x\colon\ V^+(\tau, x) \le 0\}$$

последовательного максимина $V^+(\tau, x)$.

Сформулируем теперь другую задачу, подобную предыдущей. Рассматривая снова разбиение вида Σ_k, построим рекуррентные соотношения

$$V_k^-(t_1 - \sigma_1, x) = \Big\{\min_u \max_v d^2(x(t_1), \mathcal{M}) \mid t_1 - \sigma_1 \le t \le t_1,\ x(t_1 - \sigma_1) = x\Big\},$$

$$V_k^-(t_1 - \sigma_1 - \sigma_2, x) = \Big\{\min_u \max_v V_k^-(t_1 - \sigma_1, x(t_1 - \sigma_1)) \mid t_1 - \sigma_1 - \sigma_2 \le t \le t_1 - \sigma_1,$$
$$x(t_1 - \sigma_1 - \sigma_2) = x\Big\},$$

$$V_k^-(\tau, x) = \Big\{\min_u \max_v V_k^+(\tau + \sigma_k, x(\tau + \sigma_k)) \mid \tau \le t \le \tau + \sigma_k,\ x(\tau) = x\Big\}.$$

Лемма 2.5. (i) *При*

$$\max\{\sigma_i\colon i = 1, \dots, k\} \to 0, \quad k \to \infty, \qquad \sum_{i=1}^{k} \sigma_i = t_1 - \tau,$$

существует поточечный предел ("последовательный минимакс")

$$V^-(\tau, x) = \lim_{k \to \infty} V_k^-(\tau, x), \tag{2.9}$$

не зависящий от выбора разбиений Σ_k.

(ii) *Функция* $V^-(\tau, x)$ *удовлетворяет полугрупповому свойству*

$$V^-(\tau, x \mid V^-(t_1, \cdot)) = V^-(\tau, x \mid V^-(t, \cdot \mid V^-(t_1, \cdot))). \tag{2.10}$$

(iii) *Справедливо неравенство*

$$V^-(t, x) \le \min_u \max_v \{V^-(t + \sigma, x(t + \sigma)) \mid x(t) = x\}, \qquad \sigma > 0. \tag{2.11}$$

Вспоминая, что альтернированный интеграл $\mathcal{I}(\tau, t_1, \mathcal{M})$ есть множество уровня для функции $V^+(\tau, x)$, можно задаться вопросом: как интерпретировать множество уровня для $V^-(\tau, x)$?

Ответ здесь состоит в том, что это снова будет некоторый многозначный интеграл. Определим его. Обозначая

$$W_-[s] = W_-(s, t_1, \mathcal{M}) = \Big\{x\colon\ \min_u \max_v d^2(x(t_1), \mathcal{M}) \le 0 \mid s \le t \le t_1,\ x(s) = x\Big\},$$

построим формальную схему — найдем множество $\mathcal{W}_-^*(\tau, t_1, \mathcal{M})$, представляющее собой некоторую суперпозицию множеств $W_-(t, t_1, \mathcal{M})$. Взяв интервал $\tau \le t \le t_1$, введя разбиение $\Sigma_k = \{\sigma_1, \dots, \sigma_k\}$ и следуя схеме, подобной построению интеграла $\mathcal{I}$, получим

$$W_-(t_1 - \sigma_1, t_1, \mathcal{M}) = \left(\mathcal{M} \dot{-} \int_{t_1 - \sigma_1}^{t_1} \mathcal{Q}(s)\, ds\right) + \int_{t_1 - \sigma_1}^{t_1} (-\mathcal{P}(s))\, ds. \tag{2.12}$$

Далее, подобно (1.5)–(1.9) приходим к выражению

$$\mathcal{I}_-(\tau, t_1, \mathcal{M}, \Sigma_k) = \left(\dots\left(\left(\mathcal{M} \dot{-} \int\limits_{t_1-\sigma_1}^{t_1} \mathcal{Q}(t)dt\right) + \int\limits_{t_1-\sigma_1}^{t_1} (-\mathcal{P}(t))dt\right) \dot{-} \dots + \int\limits_{\tau}^{\tau+\sigma_k} (-\mathcal{P}(t))dt\right). \quad (2.13)$$

В приведенной формальной схеме предполагается, что все множества $W_-[\cdot]$ вида (2.13) являются непустыми. Сказанное обеспечивается *условием невырожденности*, подобным предположению 1.1, которое далее *считается выполненным без дополнительных оговорок.*

Лемма 2.6. *Существует замкнутое множество — хаусдорфов предел* $\mathcal{I}_-(\tau, t_1, \mathcal{M})$

$$\lim h\Big(\mathcal{I}_-(\tau, t_1, \mathcal{M}, \Sigma_k), \mathcal{I}_-(\tau, t_1, \mathcal{M})\Big) = 0$$

при

$$\max\{\sigma_i\colon i = 1, \dots, k\} \to 0, \quad k \to \infty, \qquad \sum_{i=1}^{k} \sigma_i = t_1 - \tau.$$

Этот предел не зависит от выбора разбиений Σ_k.

Будем называть

$$\mathcal{I}_-(\tau, t_1, \mathcal{M}) = \mathcal{W}_-^*(\tau, t_1, \mathcal{M}) = \mathcal{W}^*[t] \quad (2.14)$$

альтернированным интегралом Понтрягина второго типа.

Лемма 2.7. *Справедливы соотношения*

$$V_-(\tau, x) = d^2(x, \mathcal{W}_-^*(\tau, t_1, \mathcal{M})), \qquad \mathcal{I}_-(\tau, t_1, \mathcal{M}) = \{x\colon V_-(t, x) \le 0\}.$$

С учетом свойства аддитивности интеграла $\mathcal{I}_-$ справедлива

Лемма 2.8. *Многозначное отображение* $\mathcal{W}_-^*(\tau, t_1, \mathcal{M})$ *удовлетворяет полугрупповому свойству (в попятном времени). Именно*

$$\mathcal{W}_-^*(\tau, t_1, \mathcal{M}) = \mathcal{W}_-^*(\tau, t, \mathcal{W}^*(t, t_1, \mathcal{M})) \quad (2.15)$$

при $\tau \le t \le t_1$.

Из определений альтернированных интегралов вытекает включение $\mathcal{I}_-(t, t_1, \mathcal{M}) \subseteq \mathcal{I}(t, t_1, \mathcal{M})$. Однако прямые вычисления позволяют показать, что на самом деле здесь справедливо равенство. Они также позволяют суммировать рассуждения в виде следующего предложения.

Теорема 2.1. *Справедливы соотношения.*

(i) $\mathcal{W}_-^*(\tau, t_1, \mathcal{M}) = \mathcal{W}^*(\tau, t_1, \mathcal{M})$, *или в иных обозначениях* $\mathcal{I}_-(\tau, t_1, \mathcal{M}) = \mathcal{I}(\tau, t_1, \mathcal{M})$.

(*Альтернированный интеграл Понтрягина совпадает с альтернированным интегралом второго типа.*)

(ii) $V^+(\tau, x) \equiv V^-(\tau, x) \equiv \mathcal{V}(\tau, x)$.

(*Значения последовательных максимина* V^+ *и минимакса* V^- *совпадают. Они также совпадают со значениями функции* $\mathcal{V}$ *из* (2.1).)

(iii) *Справедлив принцип оптимальности*

$$\mathcal{V}(\tau,x|\mathcal{V}(t_1,\cdot)) = \mathcal{V}(\tau,x|\mathcal{V}(t,\cdot|\mathcal{V}(t_1,\cdot))), \qquad \mathcal{V}(t_1,x)\equiv d^2(x,\mathcal{M}), \quad \tau\le t\le t_1.$$

(iv) *Альтернированный интеграл $\mathcal{I}$ есть множество уровня для $\mathcal{V}$*:

$$\mathcal{I}(\tau,t_1,\mathcal{M}) = \{x\colon \mathcal{V}(\tau,x)\le 0\} = \mathcal{W}^*(\tau,t_1,\mathcal{M}).$$

Утверждения (i)–(iii) последней теоремы вместе с условиями (2.8), (2.11) приводят также к следующему предложению.

Теорема 2.2. (i) *Функция цены $\mathcal{V}(\tau,x)$ есть единственное решение уравнения* (2.3), (2.4), *рассматриваемое в классическом смысле, а при отсутствии классического решения — в вязкостном (минимаксном) смысле.*

(ii) *Множество разрешимости $\mathcal{W}[\tau]=\mathcal{W}(\tau,t_1,\mathcal{M})$ определения* 1.1 *совпадает с альтернированным интегралом*

$$\mathcal{W}[\tau] = \mathcal{I}(\tau,t_1,\mathcal{M}) = \{x\colon \mathcal{V}(\tau,x)\le 0\}, \qquad t_0\le\tau\le t_1 \tag{2.16}$$

(*альтернированный интеграл Понтрягина есть сечение “моста Красовского” $\mathcal{W}[\tau]$, а также множество уровня функции $\mathcal{V}(\tau,x)$*).

Если решить уравнение (2.3), (2.4), то разрешающую стратегию можно получить в виде

$$\mathcal{U}_*(t,x) = \arg\min\{(\partial\mathcal{V}(t,x)/\partial x, u)|\ u\in\mathcal{P}(t)\} \tag{2.17}$$

(когда градиент $\partial\mathcal{V}(t,x)/\partial x$ в точке $\{t,x\}$ существует) или в более общем случае как

$$\mathcal{U}_*(t,x) = \Big\{u\colon \max_v\{dh_+^2(x,\mathcal{W}^*[t])/dt \mid v\in\mathcal{Q}(t)\}\le 0\Big\}. \tag{2.18}$$

Отсюда видно, что для нахождения стратегии управления $\mathcal{U}_*$ достаточно знать лишь сечение (множество уровня) $\mathcal{W}^*[t]$ функции цены[5] $\mathcal{V}(t,x)$. В то же время решение уравнения HJBI (2.3), (2.4) может потребовать весьма тонких вычислений. Поэтому в дальнейшем мы будем изучать и аппроксимировать не саму функцию цены $\mathcal{V}(t,x)$, а ее сечения (срезки) $\mathcal{W}[t]$. Таким образом, работая только со срезками, мы сможем избежать необходимости интегрировать уравнения HJBI для задач, рассматриваемых в данной статье. В частности, далее будет рассмотрено параметризованное семейство внешних и внутренних *эллипсоидальных аппроксимаций* для этих срезок. При этом срезки $\mathcal{W}[t]$ будут вычисляться без вычисления $\mathcal{V}$. Выше было отмечено, однако, что эти срезки $\mathcal{W}^*[t]=\mathcal{I}(t,t_1,\mathcal{M})$ как раз совпадают со “значениями” альтернированного интеграла Понтрягина. Следовательно, решение задачи синтеза будет сведено к построению эллипсоидальных представлений и аппроксимаций этого интеграла.

Важно отметить также, что в условиях невырожденности (см. предположение 1.1) многозначная функция $\mathcal{W}[t]$ будет решением следующего эволюционного “уравнения интегральных воронок”.

[5]Здесь свойства функции цены $\mathcal{V}(t,x)$ таковы, что производная в (2.18) существует, а соответствующая стратегия $\mathcal{U}_*(t,x)\in U_{\mathcal{P}}$ заведомо допустима.

Лемма 2.9. *Многозначная функция $\mathcal{W}[t]$ удовлетворяет при всех $t \in [t_0, t_1]$ эволюционному уравнению*

$$\lim_{\sigma\to 0} \sigma^{-1} h_+\Big(\mathcal{W}[t-\sigma] + \sigma\mathcal{Q}(t), \mathcal{W}[t] - \sigma\mathcal{P}(t)\Big) = 0, \qquad \mathcal{W}[t_1] = \mathcal{M}. \tag{2.19}$$

Это решение максимально по включению относительно всех других решений того же уравнения[6].

Функция $\mathcal{W}[\cdot]$ также является "стабильным мостом" в смысле [8, 10, 22].

Итак, основное свойство решения состоит в следующем.

Теорема 2.3. *При условии $x_\tau = x(\tau) \in \mathcal{W}^*[t]$ все решения $x(t)$ дифференциального включения*

$$\dot{x} \in \mathcal{U}_*(t,x) + v(t), \qquad x(\tau) = x_\tau, \tag{2.20}$$

удовлетворяют условию $x(t) \in \mathcal{W}^*[t]$, $\tau \le t \le t_1$, и, следовательно, достигают целевого (терминального) множества $\mathcal{M}$: $x(t_1) \in \mathcal{M}$, каким бы ни было неизвестное возмущение $v(t)$.

Таким образом синтезирующая стратегия $\mathcal{U}_*(t,x)$ разрешает задачу целевого синтеза управлений при неопределенности[7]. В условиях невырожденности, принятых в настоящей работе, нигде *не требуется, чтобы ограничения* на входы u, v *были однотипными* (вида $\mathcal{Q}(t) = \alpha\mathcal{P}(t)$, $0 < \alpha < 1$).

Среди допустимых стратегий $\mathcal{U}(t,x)$, удовлетворяющих включению $\mathcal{U}(t,x) \subseteq \mathcal{U}_*(t,x)$ и, следовательно, обеспечивающих выполнение теоремы 2.3, находится $\mathcal{U}_e(t,x)$ — стратегия "экстремального прицеливания" [8, 10], задаваемая условиями

$$\mathcal{U}_e(t,x) = \partial_l k(t,-l) = \arg\min\{(l^0,u) \mid u \in \mathcal{P}(t)\}. \tag{2.21}$$

Здесь $\partial_l k$ — субдифференциал функции $k(t,l)$ по переменной l, $k(t,l) = \rho(l \mid \mathcal{P}(t))$, $l^0 = l^0(t,x) \neq 0$ — максимизатор задачи

$$h_+(x, \mathcal{W}^*[\tau]) = \max\{(l,x) - \rho(l \mid \mathcal{W}^*[\tau]) \mid (l,l) \le 1\}, \tag{2.22}$$

причем $l^0(t,x) = 0$, если $h_+(x, \mathcal{W}^*[\tau]) = 0$.

Упомянем, наконец, что срезка $\mathcal{W}_*[t]$ может быть получена из следующей функции цены:

$$\mathcal{V}_*(\tau,x) = \min_{\mathcal{U}} \max_{v} \max_{x(\cdot)} \{\mathcal{I}_*(\tau,x) \mid \mathcal{U}(\cdot,\cdot),\ v(\cdot)\}$$

как множество $\mathcal{W}_*[\tau] = \{x\colon \mathcal{V}_*(\tau,x) \le 0\}$, где

$$\mathcal{I}_*(\tau,x) = \int_{\tau}^{t_1} \Big(h_+^2(u, \mathcal{P}(t)) - h_+^2(v, \mathcal{Q}(t))\Big)dt + h_+^2(x(t_1), \mathcal{M})$$

и $x(\cdot)$ пробегает по всем траекториям системы (2.20), порожденным стратегией $\mathcal{U}$ и функцией v. Функция цены вида $\mathcal{V}_*(t,x)$ отражает так называемый подход H_∞ к задаче синтеза управлений (см. [3, 7]).

[6] Решение $W[t]$ уравнения (2.19) называется максимальным по включению, если $W[t] \supseteq W_*[t]$, где $W_*[t]$ — любое другое решение того же уравнения.

[7] Из приведенных построений сразу видно, что $\mathcal{U}$ — нелинейное отображение, так что синтезированная система (2.20) *нелинейна*.

"Точные" решения, описанные здесь, требуют вычисления трубки $\mathcal{W}_*[\cdot]$, так что искомая стратегия $\mathcal{U}_*$ определяется фактически *в виде алгоритма*. Целью же "эллипсоидальных" подходов, рассматриваемых в следующем разделе, является получение "гарантирующего синтеза" в виде "аналитического регулятора". Перейдем к описанию эллипсоидальных представлений трубки $\mathcal{W}[\cdot]$ и ее сечений $\mathcal{W}[t] = \mathcal{I}(t, t_1, \mathcal{M})$ — срезок функции цены $\mathcal{V}(t, x)$.

3. ЭЛЛИПСОИДАЛЬНЫЕ ТРУБКИ РАЗРЕШИМОСТИ

Далее в данном и следующем разделах будем рассматривать задачу синтеза определения 1.1, полагая, что множества $\mathcal{P}$, $\mathcal{Q}$, X^0, $\mathcal{M}$ суть *эллипсоиды*. Приняв обозначение

$$\mathcal{E}(a, K) = \{x\colon (x - a, K^{-1}(x - a)) \le 1\}, \qquad x \in \mathbb{R}^n, \quad K > 0,$$

получим включения

$$u \in \mathcal{E}(p(t), P(t)), \qquad v \in \mathcal{E}(q(t), Q(t)), \qquad x^0 \in \mathcal{E}(x^*, X_0), \qquad \mathcal{M} = \mathcal{E}(m, M), \tag{3.1}$$

где непрерывные функции $p(t)$, $q(t)$, векторы x^*, m, непрерывные матричные функции $P(t) > 0$, $Q(t) > 0$ и матрицы $X_0 > 0$, $M > 0$ полагаются известными. Условие *невырожденности* предположения 1.1 считается выполненным[8].

В связи с тем что срезка $\mathcal{W}_*[t] = \mathcal{W}[t]$ функции $\mathcal{V}[t]$ изменяется во времени согласно уравнению (2.19), имеет смысл аппроксимировать $\mathcal{W}[t]$ при помощи лишь эллипсоидальнозначных решений этого уравнения. Подробные вычисления (см. [14]) тогда приводят к обыкновенному дифференциальному уравнению

$$\dot{x}^* = p(t) + q(t), \tag{3.2}$$

а также

$$\dot{X}_+ = -\pi(t)X_+ - \pi^{-1}(t)P(t) + H^{-1}(t)F(H(t), X_+, Q(t))H'^{-1}(t), \tag{3.3}$$

$$\dot{X}_- = +\pi(t)X_- + \pi^{-1}(t)Q(t) - H^{-1}(t)F(H(t), X_-, P(t))H'^{-1}(t) \tag{3.4}$$

с краевым условием

$$x^*(t_1) = m, \qquad X_+(t_1) = M, \qquad X_-(t_1) = M. \tag{3.5}$$

Здесь

$$F(H, X, P) = (HXH')^{1/2}(HPH')^{1/2} + (HPH')^{1/2}(HXH')^{1/2}.$$

Обозначим решения системы (3.3), (3.4) при условиях (3.5) как $X_+(t|\pi(\cdot), H(\cdot))$, $X_-(t|\pi(\cdot), H(\cdot))$. Следуя технике [14], оказывается возможным доказать следующее утверждение.

Теорема 3.1. *Для любого вектора $l \in \mathbb{R}^n$ справедливы включения (какими бы ни были измеримые функции $\pi(t) > 0$ и $H(t) = H'(t)$)*

$$\mathcal{E}_+[t] = \mathcal{E}(x^*(t), X_+(t|\pi(\cdot), H(\cdot))) \supseteq \mathcal{W}[t] \supseteq \mathcal{E}(x^*(t), X_-(t|\pi(\cdot), H(\cdot))) = \mathcal{E}_-[t]. \tag{3.6}$$

[8] При $P(t) > 0$ необходимым условием такой невырожденности является требование *полной управляемости* системы (1.1) при $C(t) \equiv 0$ на любом конечном промежутке времени [14, разд. 3.2].

Более того, справедливы соотношения

$$\rho(l|\mathcal{W}[t]) = \inf\Big\{\rho(l|\mathcal{E}(x^*(t), X_+(t|\pi(\cdot), H(\cdot))))|\ \pi(\cdot), H(\cdot)\Big\}, \tag{3.7}$$

$$\mathcal{W}[t] = \bigcap\{\mathcal{E}(x^*(t), X_+(t|\pi(\cdot), H(\cdot)))\}, \tag{3.8}$$

а также

$$\rho(l|\mathcal{W}[t]) = \sup\Big\{\rho(l|\mathcal{E}(x^*(t), X_-(t|\pi(\cdot), H(\cdot))))|\ \pi(\cdot), H(\cdot)\Big\}, \tag{3.9}$$

$$\mathcal{W}[t] = \overline{\bigcup\{\mathcal{E}(x^*(t), X_-(t|\pi(\cdot), H(\cdot)))|\ \pi(\cdot), H(\cdot)\}}\,, \tag{3.10}$$

где $\pi(t) > 0$, $H(t) = H'(t)$ *— измеримые функции. Здесь черта сверху означает замыкание соответствующего множества.*

Для заданных пар функций $\pi(\cdot)$, $H(\cdot)$ и граничных значений m^*, M^* обозначим

$$E_+(t,\tau,\mathcal{E}(m^*,M^*)) = \mathcal{E}(x^*(t,\tau,m^*), X_+(t,\tau,M^*)), \tag{3.11}$$

$$E_-(t,\tau,\mathcal{E}(m^*,M^*)) = \mathcal{E}(x^*(t,\tau,m^*), X_-(t,\tau,M^*)). \tag{3.12}$$

Тогда, очевидно, $E_-(t,\tau,\mathcal{E}(m^*,M^*)) \subseteq \mathcal{W}[t] \subseteq E_+(t,\tau,\mathcal{E}(m^*,M^*))$.

Лемма 3.1. *При* $t \le \tau \le t_1$ *справедливы тождества*

$$E_-(t,\tau,E_-(\tau,t_1,\mathcal{E}(m,M))) \equiv E_-(t,t_1,\mathcal{E}(m,M)), \tag{3.13}$$

$$E_+(t,t_1,\mathcal{E}(m,M)) \equiv E_+(t,\tau,E_+(\tau,t_1,\mathcal{E}(m,M))). \tag{3.14}$$

Условия (3.13), (3.14) определяют в попятном времени соответственно "верхнее" и "нижнее" полугрупповые свойства рассматриваемых отображений.

Подчеркнем еще раз, что $\mathcal{E}_-[t]$ — *внутренняя эллипсоидальная аппроксимация альтернированного интеграла Понтрягина* $\mathcal{I}(t,t_1,\mathcal{M})$ из (1.10). Из предыдущей теоремы можно также заключить, что указанные внешние и внутренние эллипсоидальные оценки $\mathcal{E}_+[t] = \mathcal{E}(x(t), X_+(t|\pi(\cdot), H(\cdot)))$ и $\mathcal{E}_-[t] = \mathcal{E}(x(t), X_-(t,|\pi(\cdot), H(\cdot)))$ являются соответственно *минимальными и максимальными по включению* по сравнению с любыми другими внешними и внутренними оценками множеств $\mathcal{W}[t]$.

При отсутствии неопределенности в системе (т.е. при заданной функции $v(t)$) внешние и внутренние аппроксимации множеств $\mathcal{W}[t]$ могут быть получены из (3.2)–(3.5) при $Q(t) = 0$ и при $\pi(t) = 0$, $\pi^{-1}(t)Q(t) = 0$. Соответствующие уравнения для *областей достижимости* могут быть далее получены из (3.2)–(3.5) путем обращения времени [14] (см. также [4]).

Замечание 3.1. Свойство *максимальности по включению*, а также *полугрупповое свойство* внутренней оценки — отображения $E_-(t,\tau,\mathcal{E}(m^*,M^*))$ — являются определяющими для применения эллипсоидальных методов к задаче синтеза управлений. Заметим также, что для решения задачи синтеза необходимы лишь внутренние аппроксимации множества разрешимости $\mathcal{W}$. Тем не менее мы привели также формулы для внешних аппроксимаций, так как эти формулы путем обращения времени могут быть использованы для аппроксимации "областей достижимости при неопределенности" — множеств точек, доступных точно или с прогнозируемой ошибкой, несмотря на воздействие неизвестных возмущений. Соответствующие "точные" множества достижимости при неопределенности будут также представимы при помощи одного из вариантов альтернированного интеграла Понтрягина, однако построенного уже не попятным образом, как в разд. 1, а при помощи "прямой" процедуры.

4. "ЭЛЛИПСОИДАЛЬНЫЙ" СИНТЕЗ УПРАВЛЕНИЙ

Вернемся к исходной задаче синтеза управлений. Стратегия $\mathcal{U}_e(t,x)$ ее решения требует согласно (2.21), чтобы была найдена трубка $\mathcal{W}[\cdot] = \mathcal{W}^*[\cdot]$ и далее для каждого t функция $h_+(x(t), \mathcal{W}[t])$ вместе со своей полной призводной, а значит, и решение экстремальной задачи вида (2.22). Решение указанных задач приводит, в конце концов, к искомой стратегии $\mathcal{U}_e(t,x)$, которая таким образом определяется фактически *как алгоритм.*

Чтобы получить более простую схему, заменим множество $\mathcal{W}[t]$ одной из его *внутренних эллипсоидальных аппроксимаций* $\mathcal{E}_-[t] = \mathcal{E}(x^*, X(t))$. Гипотеза состоит в том, что, заменив $\mathcal{W}[t]$ ее внутренней аппроксимацией $\mathcal{E}_-[t]$, следует просто скопировать схему разд. 2, в частности (2.21), (2.22), сконструировав стратегию $\mathcal{U}_-(t,x)$ так, чтобы каждое решение $x(t)$ дифференциального включения

$$\dot{x}[t] \in \mathcal{U}_-(t, x(t)) + v(t), \qquad \tau \le t \le t_1, \qquad x[\tau] = x_\tau, \qquad x_\tau \in \mathcal{E}_-[\tau], \tag{4.1}$$

удовлетворяло бы включению $x(t) \in \mathcal{E}_-[t]$, $\tau \le t \le t_1$, и, следовательно, $x(t_1) \in \mathcal{E}(m, M) = \mathcal{M} = \mathcal{E}_-[t]$, каким бы ни было возмущение $v(t)$.

При построении "эллипсоидального синтеза" будем имитировать стратегию $\mathcal{U}_e$ из (2.21), применяя соответствующую схему к внутренней аппроксимации $\mathcal{E}_-[t]$ множества $\mathcal{W}[t]$. В монографии [14] было показано, что если аппроксимация $\mathcal{E}_-[t]$ построена "подходящим образом" (т.е. согласно (3.2)–(3.5)), то соответствующая *"эллипсоидальная" стратегия* $\mathcal{U}_-(t,x)$ *действительно решает задачу.* Говоря более точно, будем иметь те же соотношения (2.21), (2.22), но только $\mathcal{W}[t]$ будет теперь заменено на $\mathcal{E}_-[t]$. А именно, это дает

$$\mathcal{U}_-(t,x) = \begin{cases} \mathcal{E}(p(t), P(t)), & \text{если } x \in \mathcal{E}_-[t], \\ p(t) - P(t)l^0(l^0, P(t)l^0)^{-1/2}, & \text{если } x \notin \mathcal{E}_-[t], \end{cases} \tag{4.2}$$

где $l^0 = l^0(t,x)$ — единичный вектор, единственное решение задачи

$$h_+(x, \mathcal{E}_-[t]) = (l^0, x) - \rho(l^0 | \mathcal{E}_-[t]) = \max\{(l,x) - \rho(l|\mathcal{E}_-[t]) \mid \|l\| \le 1\}. \tag{4.3}$$

Нетрудно заметить, что соотношение (4.3) совпадает с (2.22), если только заменить $\mathcal{W}[t]$ на $\mathcal{E}_-[t]$. Однако задача максимизации (4.3) может быть теперь решена более подробно, чем ее более общий аналог (2.22). В самом деле, если s^0 — решение задачи минимизации

$$s^0 = \arg\min\{\|(x-s)\| \mid s \in \mathcal{E}_-[t],\ x = x(t)\}, \tag{4.4}$$

то в (4.3) можно положить $l^0 = k(x(t) - s^0)$, $k > 0$, так что l^0 будет *градиентом* расстояния $h_+(x, \mathcal{E}_-[t])$ при фиксированном t. (Последнее можно проверить, дифференцируя либо (4.3), либо (4.4) по x.)

Лемма 4.1. *Рассмотрим невырожденный эллипсоид* $\mathcal{E} = \mathcal{E}(x^*, X)$, *а также вектор* $x \notin \mathcal{E}(a, Q)$. *Тогда градиент*

$$l^0 = \partial h_+(x, \mathcal{E}(x^*, X))/\partial x$$

может быть выражен как

$$l^0 = (x - s^0)/\|x - s^0\|, \qquad s^0 = (I + \lambda X^{-1})^{-1}(x - a) + a, \tag{4.5}$$

где множитель $\lambda > 0$ *— единственный корень уравнения* $f(\lambda) = 0$, *причем*

$$f(\lambda) = \Big((I + \lambda X^{-1})^{-1}(x - a), X^{-1}(I + \lambda X^{-1})^{-1}(x - a)\Big)^{-1}.$$

Следствие 4.1. *При известных параметрах* x^*, X *и переменном* x *множитель* λ *может быть представлен единственным образом как* $\lambda = \lambda(x)$.

Рассматривая (2.21) и учитывая $\mathcal{P}(t) = \mathcal{E}(p(t), P(t))$, замечаем, что

$$\arg\min\{(l^0, u)|\ u \in \mathcal{E}(p(t), P(t))\} = \mathcal{U}_-(t, x). \tag{4.6}$$

Но тогда результат (4.2) будет вытекать из следующего факта.

Лемма 4.2. *Пусть задан эллипсоид* $\mathcal{E}(p, P)$. *Тогда минимизатор* u^* *задачи*

$$\min\{(l, u)|\ u \in \mathcal{E}(p, P)\} = (l, u^*), \qquad l \neq 0,$$

есть вектор $u^* = p - Pl(l, Pl)^{-1/2}$.

Данная лемма следует из формулы опорной функции эллипсоида. Суммируя результаты, будем иметь следующее утверждение.

Теорема 4.1. *Для множества* $\mathcal{W}[t]$ *определим внутреннюю аппроксимацию* $\mathcal{E}_-[t] = \mathcal{E}_-(x^*(t), X_-(t))$ *с фиксированными параметризующими функциями* $\pi(t)$, $H(t)$ (3.3). *Если* $x(\tau) \in \mathcal{E}_-[\tau]$ *и синтезирующая стратегия взята как* $\mathcal{U}_-(t, x)$ *из* (4.2), *то будет справедливо включение* $x(t) \in \mathcal{E}_-[t]$, $\tau \le t \le t_1$, *и, следовательно,* $x(t_1) \in \mathcal{E}(m, M)$, *каким бы ни было неизвестное возмущение* $v(t)$.

Приведенный здесь "эллипсоидальный синтез" позволяет определить стратегию $\mathcal{U}_-(t, x)$ для любой внутренней аппроксимации $\mathcal{E}_-[t] = \mathcal{E}_-(x(t), X_-(t))$ множества $\mathcal{W}[t]$. При $x \notin \mathcal{E}_-[t]$ функция $\mathcal{U}_-(t, x)$ однозначная, тогда как при $x \in \mathcal{E}_-[t]$ имеем $\mathcal{U}_-(t, x) = \mathcal{E}_-[t]$. Таким образом, совокупное решение $\mathcal{U}(t, x)$ оказывается полунепрерывным сверху по x и измеримым по t, обеспечивая, следовательно, существование решения дифференциального включения (4.1).

Благодаря теореме 3.1 (см. (3.9)) каждый элемент внутренности $x \in \operatorname{int} \mathcal{W}[t]$ принадлежит некоторому эллипсоиду $\mathcal{E}_-[t]$ и может быть, следовательно, приведен на целевое множество $\mathcal{M}$ посредством "эллипсоидальной" стратегии управления $\mathcal{U}_-(t, x)$.

Соотношения (4.2), (4.5) указывают на то, что стратегия $\mathcal{U}_-(t, x)$ найдена в явном виде, за исключением лишь множителя λ из леммы 4.1, являющегося единственным корнем уравнения $f(\lambda) = 0$. Однако ввиду следствия 4.1 функция $\lambda = \lambda(t, x)$ может быть вычислена *заранее* по известным функциям $x^*(t)$, $X_-(t)$, определяющим внутреннюю аппроксимацию $\mathcal{E}_-[t]$, которая, таким образом, может быть также вычислена заранее и обеспечивает допустимость стратегии $\mathcal{U}_-$. С учетом последней оговорки предложенная стратегия $\mathcal{U}_-(t, x)$ может рассматриваться как *аналитический регулятор*[9].

[9]Следует заметить, что если допустить несколько иную модификацию эллипсоидального синтеза, а именно такую, когда в формуле (4.3) максимум ищется при ограничении $(l, X_-(t)l) \le 1$ вместо $(l, l) \le 1$, то соответствующий множитель $\lambda(t, x)$ будет вычисляться в явном виде. Вследствие этого стратегия $\mathcal{U}_-(t, x)$ может рассматриваться как аналитический регулятор уже без оговорок.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Aubin J.-P., Frankowska H.* Set-valued analysis. Boston: Birkhäuser, 1990.
2. *Bardi M., Capuzzo-Dolcetta I.* Optimal control and viscosity solutions of Hamilton–Jacobi–Bellman equations. Boston: Birkhäuser, 1997.
3. *Basar T., Bernhard P.* H^∞ optimal control and related minimax design problems. 2nd ed. Boston: Birkhäuser, 1995.
4. *Chernousko F.L.* State estimation for dynamic systems. Singapore: CRC Press, 1994.
5. *Crandall M.G., Lions P.L.* Viscosity solutions of Hamilton–Jacobi equations // Trans. Amer. Math. Soc. 1983. V. 277. P. 1–42.
6. *Fleming W.H., Soner H.M.* Controlled Markov processes and viscosity solutions. N.Y. etc.: Springer, 1993.
7. *Knobloch H., Isidori A., Flockerzi D.* Topics in control theory. Boston etc.: Birkhäuser, 1993. (DMV-Seminar; Bd. 22).
8. *Красовский Н.Н.* Игровые задачи о встрече движений. М.: Наука, 1970.
9. *Красовский Н.Н.* Управление динамической системой. М.: Наука, 1986.
10. *Krasovski N.N., Subbotin A.I.* Positional differential games. N.Y. etc.: Springer, 1988.
11. *Куржанский А.Б.* Управление и наблюдение в условиях неопределенности. М.: Наука, 1977.
12. *Куржанский А.Б., Никонов О.И.* О задаче синтеза стратегий управления. Эволюционные уравнения и многозначное интегрирование // ДАН СССР. 1990. Т. 311. С. 788–793.
13. *Куржанский А.Б., Никонов О.И.* Эволюционные уравнения для трубок траекторий синтезированных систем управления // Докл. РАН. 1994. Т. 48, №3. С. 606–611.
14. *Kurzhanski A.B., Vályi I.* Ellipsoidal calculus for estimation and control. Boston: Birkhäuser, 1996.
15. *Lions P-L., Souganidis P.E.* Differential games, optimal control and directional derivatives of viscosity solutions of Bellman's and Isaac's Equations // SIAM J. Contr. Optim. 1985. V. 23. P. 566–583.
16. *Мищенко Е.Ф.* Задачи преследования и уклонения от встречи в теории дифференциальных игр // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1971. №5. С. 3–9.
17. *Никольский М.С.* О нижнем альтернированном интеграле Понтрягина в линейных дифференциальных играх преследования // Мат. сб. 1985. Т. 128, №1. С. 35–49.
18. *Понтрягин Л.С.* О линейных дифференциальных играх. I, II // ДАН СССР. 1967. Т. 8. С. 769–771; 910–912.
19. *Понтрягин Л.С.* Линейные дифференциальные игры преследования // Мат. сб. 1980. Т. 112, №3. С. 307–330.
20. *Rockafellar R.T.* Convex analysis. Princeton Univ. Press, 1970.
21. *Subbotin A.I.* Generalized solutions of first-order PDE's. The dynamic optimization perspective. Boston: Birkhäuser, 1995.
22. *Субботин А.И., Ченцов А.Г.* Оптимизация гарантий в задачах управления. М.: Наука, 1981.
23. *Varaiya P., Lin J.C.* Existence of saddle points in differential games // SIAM J. Contr. Optim. 1969. V. 7, N 1. P. 142–157.