В.Г.Кулакова

ПОЛОЖИТЕЛЬНЫЕ ПРОЕКТОРЫ И УСЛОВНЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОЖИДАНИЯ

В настоящей статье изучается строение положительных проекторов в L^1 и их связь с условными математическими ожиданиями. В отличие от других работ на эту тему (напр.[2]) не делается никаких предположений относительно нормы и используются только "порядковые" свойства оператора. Мы придерживаемся терминологии и обозначений теории полуупорядоченных пространств[3].

I. Пусть $\{\Omega, \mathcal{A}, P\}$–пространство с вероятностной мерой, T – линейный положительный идемпотентный оператор ("проектор"), действующий в $L^1(\Omega,\mathcal{A},P)$. Такой оператор вполне линеен и имеет компоненту существенной положительности X_0. Это означает, что

$$Tx > \mathbf{0} \quad \text{при} \quad x \in X_0^+, \quad Tx = \mathbf{0} \quad \text{при} \quad x \in X_0^d.$$

Компоненту X_0 можно представлять как $L^1(\Omega_0, \mathcal{A}|_{\Omega_0}, P)$, $\Omega_0 \subset \Omega$. Пусть $U = U_{X_0}$ – "канонический" проектор на X_0. Положим $\tilde{T} = UT$. Ясно, что $TU \stackrel{X_0}{=} T$, поэтому $\tilde{T}^2 = UTUT = UT^2 = UT = \tilde{T}$, так что $\tilde{T}$ – проектор. Он строго положителен на X_0: если $x \in X_0^+$, то $T(\tilde{T}x) = T^2x = Tx > \mathbf{0}$ и $\tilde{T}x > \mathbf{0}$. Итак, изучение произвольного положительного проектора сводится к случаю, когда он строго положителен.*)

II. Рассмотрим строго положительный проектор T. Пусть $Y = T(L^1) = \{f \mid Tf = f\}$. Покажем, что Y – з а м к н у т а я л и н е й н а я п о д с т р у к т у р а в L^1. (это верно и в произвольном К–пространстве).

Достаточно показать, что если $f \in Y$, то и $f^+, f^- \in Y$. Разложим f : $f = f^+ - f^-$. Тогда $Tf = Tf^+ - Tf^-$ и $Tf = (Tf)^+ - (Tf)^-$. Известно, что $Tf^+ \geqslant (Tf)^+$, $Tf^- \geqslant (Tf)^-$. Так как $Tf = f$, то $(Tf) = (Tf)^+ - (Tf)^- = f^+ - f^-$. Представление элемента в виде разности дизъюнктных единственно, значит $(Tf)^+ = f^+$, $(Tf)^- = f^-$. Отсюда $Tf^+ \geqslant f^+$, $Tf^- \geqslant f^-$. Оператор T идемпотентен и строго положителен, поэтому неравенства $Tf^+ > f^+$ и $Tf^- > f^-$ невозможны. Значит, $f^+, f^- \in Y$. Мы доказали, что Y – подструктура. Замкнутость Y вытекает из непрерывности оператора T. Как показано в [1] множество Y, будучи замкнутой линейной подструктурой, представимо в виде $Y = g L^1(\Omega, \mathcal{B}, P|_{\mathcal{B}})$, где $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ – некото-

---

*) В роли "дополнительного" оператора $T - \tilde{T}$ может выступать любой W со свойствами: $W \geqslant \mathbf{0}$, $WU = W\tilde{T} = W$, $UW = W^2 = 0$.

рая σ -алгебра, g - неотрицательная $\mathcal{A}$ -измеримая функция.

Будем рассматривать только множество $\Omega_1 = \{ x \mid g(x) > 0 \}$. Это равносильно выделению из L^1 компоненты X_1, порожденной элементом g. Поскольку, очевидно, $g \in Y$, то $Tg = g$ и эта компонента T - инвариантна. Рассмотрим пространство $R = gL^1(\Omega_1, \mathcal{A}|_{\Omega_1}, P)$ и в нем оператор $T_1 = V_g T V_{g^{-1}}$ (V_g - оператор умножения на g). Ясно, что T_1 - строго положительный проектор в R. Введем в R норму: $\|h\|_* = \|T_1(|h|)\|_{L^1} = \|gT(\frac{|h|}{g})\|_{L^1}$. Относительно этой нормы оператор T_1 будет изометричен:

$$\|T_1 h\|_* = \|T_1^2(|h|)\|_{L^1} = \|T_1(|h|)\|_{L^1} = \|h\|_*.$$

Используя общие теоремы о представлении функционалов[3], легко показать, что новая норма имеет интегральное представление:

$$\|h\|_* = \int |h| d\tilde{P},$$

где $\tilde{P}$ - некоторая мера на $\mathcal{A}^{\Omega_1}$, абсолютно непрерывная относительно P.

Докажем, что T_1 есть условное математическое ожидание относительно алгебры $\mathcal{B}$ и меры $\tilde{P}$ в пространстве R. Для этого нужно проверить, что $\int_B T_1 h\, d\tilde{P} = \int_B h\, d\tilde{P}$ при всех $B \in \mathcal{B}, h \in R$. Мы проверим это для функций вида $g^2 \chi_S$, где $S \in \mathcal{A}|_{\Omega_1}, \chi_S$ - характеристическая функция S. (Такие функции входят в R и образуют там фундаментальное множество). Прежде всего заметим, что $g \in Y$ и $Tg = g$. Поэтому

$$T_1 g^2 = gTg = g^2. \qquad (I)$$

Аналогично $T_1(g^2 \chi_B) = g^2 \chi_B$, $(B \in \mathcal{B})$. Далее, при всех $S \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}$

$$\int_B g^2 \chi_S d\tilde{P} \geqslant \int_B T_1(g^2 \chi_S) d\tilde{P}. \qquad (2)$$

Действительно, это следует из неравенств

$$T_1(g^2 \chi_{B \cap S}) \leqslant T_1(g^2 \chi_B) = g^2 \chi_B, \quad T_1(g^2 \chi_{CB \cap S}) \leqslant g^2 \chi_{CB},$$

$$\int_B T_1(g^2 \chi_S) d\tilde{P} = \int_B T_1(g^2 \chi_{S \cap B}) dP + \int_B T_1(g^2 \chi_{S \cap CB}) d\tilde{P} =$$

$$= \int_B T_1(g^2 \chi_{S \cap B}) d\tilde{P} \leqslant \|T_1(g^2 \chi_{S \cap B})\|_* = \int_B g^2 \chi_S d\tilde{P}.$$

Теперь можно написать (используя (I)):

$$\int_B g^2 \chi_S d\tilde{P} + \int_B g^2 \chi_{CS} d\tilde{P} = \int_B T_1(g^2 \chi_S) d\tilde{P} + \int_B T_1(g^2 \chi_{CS}) d\tilde{P}.$$

Отсюда, в силу (2), следует, что

$$\int_B g^2 \chi_s \, d\tilde{P} = \int_B T_1(g^2\chi_s)\, d\tilde{P}.$$

Это и требовалось доказать.

Нетрудно проверить, что пространство R, где действует оператор T_1, совпадает с $L^1(\Omega_1, \tilde{P})$. Что касается отброшенного слагаемого $T - V_{g^{-1}} T_1 V_g$, то легко установить, что им может быть любой положительный оператор, равный нулю на X_1 и отображающий X_1^d в $T(X_1) = Y$.

Ш. Условимся говорить, что A есть оператор "типа у.м.о.", если $A = V_\tau B V_{\tau^{-1}}$, где τ – строго положительная функция, B – условное математическое ожидание относительно некоторой абсолютно непрерывной меры. В п. П показано, как из строго положительного проектора выделить оператор типа у.м.о. Окончательный результат может быть сформулирован в виде теоремы:

<u>Теорема</u>. Общий вид строго положительного проектора в L^1 дается формулой

$$T = T_1 U_{X_1} + T_2 U_{X_2}.$$

Здесь X_1 и X_2 – взаимно дополнительные компоненты; $X_1 \neq 0$; T_1 – оператор типа у.м.о. в X_1; T_2 – положительный оператор из X_2 в X_1 такой, что $T_2(X_2) \subset T_1(X_1)$.

Нетрудно дать также описание и произвольного положительного проектора (см. примечание на стр.172).

ЛИТЕРАТУРА

1. Douglas R.G., Contractive projections on an L^1 space. Pacific J. Math., 1965, 15, 443-462.
2. Daniel E., Wulbert., A note on the characterization of conditional expectation operators. Pacific J.Math. 1970, 34, 285-288.
3. Вулих Б.З., Введение в теорию полуупорядоченных пространств. М., Физматгиз, 1961.