Курс лекций по предмету
Математические модели окружающей среды
Куржанский А.Б.

В рамках курса мы будем рассматривать модели переноса и диффузии субстанций (например, загрязняющих) и на их примере изучать задачи наблюдаемости и управляемости систем и такие подходы к решению задач, как использование сопряженных уравнений и регуляризация.

Содержание

1 Вывод уравнения диффузии

Пусть $c(t,x,y,z)$ — интенсивность аэрозольной субстанции, мигрирующей вместе с потоком воздуха в атмосфере. Тогда перенос субстанции вдоль траектории частиц воздуха с сохранением ее интенсивности описывается уравнением

$$\left.\frac{dc}{dt}\right|_{\mathbf{v}} = 0 \tag{1}$$

Здесь $\mathbf{v}$ вектор скорости частиц воздуха. Раскроем производную:

$$\left.\frac{dc}{dt}\right|_{\mathbf{v}} = \frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial c}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial c}{\partial y}\dot{y} + \frac{\partial c}{\partial z}\dot{z} = \frac{\partial c}{\partial t} + < \operatorname{grad} c, \mathbf{v} >= 0 \tag{2}$$

Так как для градиента произведения верна следующая формула

$$\operatorname{div}(c\mathbf{v}) = c \operatorname{div} \mathbf{v} + < \operatorname{grad} c, \mathbf{v} >, \tag{3}$$

а для нижней части атмосферы с хорошей точностью выполняется закон сохранения массы, выраженный уравнением неразрывности:

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = \operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \tag{4}$$

уравнение переноса можно переписать в виде:

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \operatorname{div}(c\mathbf{v}) = 0. \tag{5}$$

Уравнение (5) может быть обобщено. Если в процессе распространения часть субстанции входит в реакцию со внешней средой или распадается, то этот процесс можно интерпретировать как поглощение субстанции. В этом случае уравнение (5) перейдет в следующее:

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \operatorname{div}(c\mathbf{v}) + \sigma c = 0, \tag{6}$$

где коэффициент $\sigma \geq 0$ характеризует поглощение. Также если в области определения решения есть какие-либо источники рассматриваемой загрязняющей субстанции, описываемые функцией $f(t,x,y,z)$, то уравнение примет вид

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \operatorname{div}(c\mathbf{v}) + \sigma c = f \tag{7}$$

Например, если в области имеется точечный источник загрязнения, труба завода, расположенная на высоте H, с интенсивностью выделения субстанции $\mu(t)$, правая часть примет вид $f(t,x,y,z) = \mu(t)\delta(x-x_0)\delta(y-y_0)\delta(z-H)$.

Если положить скорость ветра равной 0, а $f(t) = f_0$, легко понять смысл коэффициента σ. В этом случае решением уравнения (7) будет функция $c(t, \cdot) = (c_0(\cdot) - f_0/\sigma)e^{-\sigma t} + f_0/\sigma$, где $c_0(\cdot)$ — начальное распределение субстанции в момент $t = 0$. Таким образом, при отсутствии ветра и равномерном загрязнении количество субстанции стремится экспоненциально со скоростью σ к величине f_0/σ, то есть к решению стационарной задачи $\sigma c = f_0$.

Известно, что такая простейшая модель не описывает основных особенностей переноса субстанции. Мы знаем, что в атмосфере даже при отсутствии ветра субстанция рассеивается в значительной окрестности от выброса. Это неудивительно, поскольку даже в безветренную погоду атмосфера является средой турбулентной, где спонтанно образуются мелкомасштабные флуктуации (обычно вихри). Необходимо модифицировать модель так, чтобы она учитывала постоянно генерируемые атмосферные флуктуации. Их математическое описание до сих пор в большинстве случаев основывается на полуэмпирических соотношениях. Рассмотрим эту теорию.

Представим концентрацию и ветер в виде суммы двух компонентов — осредненного и флуктуационного, причем первый много больше второго.

$$\begin{array}{rcl} c &=& \overline{c} + c^*, \quad c^* << \overline{c} \\ \mathbf{v} &=& \overline{\mathbf{v}} + \mathbf{v}^*, \quad \mathbf{v}^* << \overline{\mathbf{v}} \end{array} \tag{8}$$

Будем проводить усреднение (то есть интегрирование) уравнения на интервале $(t, t+\theta)$, где θ выбрано таким образом, чтобы на этом интервале функции $\overline{c}, \overline{\mathbf{v}}$ менялись мало, но достаточном, чтобы

$$\overline{c^*} = \frac{1}{\theta}\int\limits_t^{t+\theta} c^* d\tau = 0 \qquad \overline{\mathbf{v}^*} = \frac{1}{\theta}\int\limits_t^{t+\theta} \mathbf{v}^* d\tau = 0 \tag{9}$$

Итак, пусть наш процесс удовлетворяет условиям (8)-(9). Проинтегрируем уравнение (7) на интервале $(t, t+\theta)$.

$$c(t+\theta, \cdot) - c(t, \cdot) + \int\limits_t^{t+\theta} \operatorname{div}(c\mathbf{v}) d\tau + \int\limits_t^{t+\theta} \sigma c d\tau = 0$$

$$\overline{c}(t+\theta, \cdot) - \overline{c}(t, \cdot) + \int\limits_t^{t+\theta} \operatorname{div}(c\mathbf{v}) d\tau + \int\limits_t^{t+\theta} \sigma \overline{c} d\tau = -(c^*(t+\theta, \cdot) - c^*(t, \cdot))$$

Рассмотрим отдельно интеграл от дивергенции. Так как дивергенция состоит из производных по пространственным переменным, а интегрирование ведется по времени, правомерны следующие преобразования:

$$\int\limits_t^{t+\theta} \operatorname{div}(c\mathbf{v}) d\tau = \operatorname{div} \int\limits_t^{t+\theta} c\mathbf{v} d\tau = \operatorname{div} \int\limits_t^{t+\theta} (\overline{c}\overline{\mathbf{v}} + \overline{c}\mathbf{v}^* + c^*\overline{\mathbf{v}} + c^*\mathbf{v}^*) d\tau$$

В силу малого изменения c и $\mathbf{v}$ и соотношений (9) имеем

$$\operatorname{div}\left(\int\limits_t^{t+\theta}\overline{c}\overline{\mathbf{v}}d\tau+\int\limits_t^{t+\theta}\overline{c}\mathbf{v}^*d\tau+\int\limits_t^{t+\theta}c^*\overline{\mathbf{v}}d\tau+\int\limits_t^{t+\theta}c^*\mathbf{v}^*d\tau\right)=\operatorname{div}(\theta\overline{c}\overline{\mathbf{v}}+0+0+\int\limits_t^{t+\theta}c^*\mathbf{v}^*d\tau)$$

Введем масштабирование основных величин. Пусть $c^*=\varepsilon c'$ где c' и $\overline{c}$ — величины одного порядка ($\varepsilon << 1$). Поделим уравнение на θ.

$$\frac{\overline{c}(t+\theta,\cdot)-\overline{c}(t,\cdot)}{\theta}+\operatorname{div}\overline{c}\overline{\mathbf{v}}+\frac{1}{\theta}\int\limits_t^{t+\theta}\operatorname{div}(c^*\mathbf{v}^*)d\tau+\frac{1}{\theta}\int\limits_t^{t+\theta}\sigma\overline{c}d\tau=-\frac{\varepsilon}{\theta}(c'(t+\theta,\cdot)-c'(t,\cdot))$$

Справа стоит величина $\varepsilon/\theta O(1)$, где $O(1)$ — величина порядка c'. Таким образом, правая часть является малой величиной порядка ε/θ и может быть отброшена. В силу малого изменения $\overline{c}$ имеем:

$$\frac{\partial\overline{c}(t,\cdot)}{\partial t}+\operatorname{div}\overline{c}\overline{\mathbf{v}}+\frac{1}{\theta}\int\limits_t^{t+\theta}\operatorname{div}(c^*\mathbf{v}^*)d\tau+\sigma\overline{c}=0$$

Установлено, что для атмосферных процессов возможно следующее полуэмпирическое представление компонентов вектора $1/\theta\int\limits_t^{t+\theta}c^*\mathbf{v}^*$:

$$\frac{1}{\theta}\int\limits_t^{t+\theta}c^*v_x^*=-K_x\frac{\partial\overline{c}}{\partial x},\quad\frac{1}{\theta}\int\limits_t^{t+\theta}c^*v_y^*=-K_y\frac{\partial\overline{c}}{\partial y},\quad\frac{1}{\theta}\int\limits_t^{t+\theta}c^*v_z^*=-K_z\frac{\partial\overline{c}}{\partial z}$$

Здесь K_x, K_y и K_z — коэффициенты горизонтальной и вертикальной диффузии. Таким образом, получаем уравнение теплопроводности:

$$\frac{\partial\overline{c}(t,\cdot)}{\partial t}+\operatorname{div}\overline{c}\overline{\mathbf{v}}-\frac{\partial}{\partial x}K_x\frac{\partial\overline{c}}{\partial x}-\frac{\partial}{\partial y}K_y\frac{\partial\overline{c}}{\partial y}-\frac{\partial}{\partial z}K_z\frac{\partial\overline{c}}{\partial z}+\sigma\overline{c}=0$$

2 Постановка задачи

$$\frac{\partial\overline{c}(t,\cdot)}{\partial t}+\operatorname{div}\overline{c}\overline{\mathbf{v}}-\frac{\partial}{\partial x}K_x\frac{\partial\overline{c}}{\partial x}-\frac{\partial}{\partial y}K_y\frac{\partial\overline{c}}{\partial y}-\frac{\partial}{\partial z}K_z\frac{\partial\overline{c}}{\partial z}+\sigma\overline{c}=0 \tag{10}$$

К уравнению (10) на $c(t, x, y, z)$ необходимо добавить начальные и краевые условия. Допустим, мы рассматриваем процесс переноса субстанции в циллиндрической области (рис.1). Например, возможна следующая постановка:

$$\begin{array}{ll} c(t,x,y,H)=0 & (x,y)\in\Omega \\ c(t,x,y,0)=\alpha(t)\delta(x-x^0)\delta(y-y_0) & (x,y)\in\Omega \\ \quad\text{(или, например,} & \\ \quad c(t,x,y,0)=\frac{\partial c}{\partial t}(t,x,y,0)) & \\ (\operatorname{grad} c,\mathbf{n})=u & (x,y)\in\partial\Omega \quad z\in(0,H) \\ c(t_0,x,y,z)=\Psi(x,y,z) & (x,y)\in\Omega \quad z\in(0,H) \end{array}$$

В этом случае существует единственное классическое решение задачи.

Перечислим возможные постановки задач, которые мы будем рассматривать в рамках данного курса в связи с этим уравнением.

2.1 Задачи наблюдаемости

Наряду с уравнением (10) мы будем рассматривать уравнения наблюдения (а потом с помощью результатов наблюдения решать поставленные задачи оценивания). Наблюдения производятся с помощью операторов наблюдения $\mathbf{G}$ с помехой $\eta(\cdot)$, доступная нам информация — множество значений $y(\cdot)$.

$$y(\cdot)=\mathbf{G}c(\cdot,\cdot)+\eta(\cdot), \quad 0\le t\le T \tag{11}$$

Перечислим возможные типы **операторов наблюдения**.

1. Интегральный сенсор, или распределенное наблюдение $y(t)=\int\limits_D g(\mathbf{x})c(t,\mathbf{x})d\mathbf{x}+\eta(t)$.
2. Точечный сенсор $y(t)=c(t,\mathbf{x}^0)+\eta(t) \;\; t\in[t_1,t_2] \; t_1>0$.
3. Движущийся точечный сенсор $y(t)=c(t,\mathbf{x}(\mathbf{t}))+\eta(t) \;\; t\in[t_1,t_2] \; t_1>0$.
4. Финальное наблюдение $y(\mathbf{x})=c(\theta,\mathbf{x})+\eta(\mathbf{x})$.
5. Движущийся интегральный сенсор $y(t)=\int\limits_{O_\varepsilon(\mathbf{x}(\mathbf{t}))} g(t,\mathbf{x})c(t,\mathbf{x})d\mathbf{x}+\eta(t)$.

Задача — при заданной информации о наблюдении и ограничении на помеху, но неизвестном начальном условии $c(0,\cdot)$ оценить состояние системы в момент t_0, то есть оценить $c(t_0,\cdot)$. В зависимости от оператора наблюдения **G** информационное множество функций $c(t_0, \cdot)$, совместимых с ограничением на помеху и результатами наблюдений, может получиться как ограниченным, так и неограниченным. В последнем случае для получения оценки состояния системы необходимо проводить регуляризацию задачи (так как иначе она является некорректно поставленной). Регуляризация проводится добавлением в постановку некоторого слагаемого или ограничения, помноженного на малый параметр ε, после чего исследуется поведение решения при $\varepsilon \to 0$.

Возможна также следующая задача оценивания: в области имеется несколько источников загрязнения, мы измеряем суммарное загрязнение:

$$y(t, \cdot) = \sum_{i=1}^{p} c_i(t, \cdot) + \eta(t, \cdot)$$

Требуется определить, насколько каждый отдельный источник загрязняет атмосферу, то есть вычислить $c_1(t, \cdot),\ c_2(t, \cdot), \ldots\ c_p(t, \cdot)$.

2.2 Минимизация функции цены

Задача также может формулироваться как минимизация некоторого критерия при заданных ограничениях. Например, пусть правая часть уравнения (10) имеет вид $f = Q(t)\delta(x-x_0)\delta(y-y_0)\delta(z-h)$ и пусть задано одно из следующих ограничений:

1. $c(t, x^*, y^*) \leq \gamma \quad t \in [\delta, T]$
2. $\int\limits_{\mathcal{D}} c(t, x, y)dxdy \leq \gamma \quad t \in [0, T]$
3. $\int\limits_0^T \int\limits_{\mathcal{D}} c(t, x, y)dxdydt \leq \gamma$

Эти ограничения характеризуют степень загрязнения в заданной области $\mathcal{D}$ или в заданной точке (x^*, y^*). Она не должна превышать предельно допустимую. Однако завод, расположенный в точке (x_0, y_0, h), должен работать с максимально возможной отдачей. Это можно сформулировать как максимизацию интеграла

$$\int\limits_0^T Q^2(t)dt \to \max$$

3 Решение задачи в простейших случаях

3.1 Стационарная одномерная задача с нулевым ветром

Итак, мы рассматриваем уравнение диффузии

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \mathrm{div}(\mathbf{v}c) + \sigma c = \frac{\partial}{\partial x}(K_x \frac{\partial c}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y}(K_y \frac{\partial c}{\partial y}) + \frac{\partial}{\partial z}(K_z \frac{\partial c}{\partial z}) + f$$

и хотим выяснить, как выглядит его решение. Решим сперва упрощенное уравнение — стационарное, в предположении что $\mathbf{v} = 0$ и источник примеси локализован в точке x_0:

$$\sigma c = Kc'' + Q\delta(x - x_0) \tag{12}$$

Будем искать решение, удовлетворяющее ограничению $c(x) \to 0$ при $x \to 0$. Для этого вычислим функцию Грина классическим методом (см.[6]). Будем считать что решение непрерывно дифференцируемо на полупрямых $(-\infty, x_0)$ и (x_0, ∞) и удовлетворяет на этих лучах уравнению (12) с однородной правой частью. В точке x_0 первая производная имеет разрыв 1 рода, что при дифференцировании как раз дает дельта функцию. Обозначим решение на $(-\infty, x_0)$ c_-, а на интервале (x_0, ∞) — c_+ и проинтегрируем уравнение на интервале $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$:

$$\sigma \int\limits_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} c(x) = K \left.\frac{\partial c}{\partial x}\right|_{x_0+\varepsilon} - K \left.\frac{\partial c}{\partial x}\right|_{x_0-\varepsilon} + Q$$

Устремив ε к 0, получаем

$$\left.\frac{\partial c_+}{\partial x}\right|_{x_0} - \left.\frac{\partial c_-}{\partial x}\right|_{x_0} = -\frac{Q}{K}$$

Таким образом, $c(x)$ непрерывна, а $\frac{\partial c}{\partial x}$ имеет разрыв высотой $\frac{Q}{K}$ в точке x_0. Теперь вычислим c_- и c_+ Характеристическое уравнение имеет вид: $\lambda^2 - \frac{\sigma}{K} = 0$, следовательно, его корни равны

$$\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{\sigma}{\mathcal{K}}}$$

Следовательно, решение представляется в виде:

$$c_\pm(x) = c_\pm^1 e^{\sqrt{\frac{\sigma}{K}}(x-x_0)} + c_\pm^2 e^{-\sqrt{\frac{\sigma}{K}}(x-x_0)}$$

Так как решение ограничено на бесконечности, $c_-^2 = c_+^1 = 0$.

Из непрерывности решения следует, что $c_-^2 = c_+^1$.

Скачок производной равен $-\sqrt{\frac{\sigma}{K}}c^{+} - \sqrt{\frac{\sigma}{K}}c^{-} = -\frac{Q}{K}$, значит, $c = \frac{Q}{2\sqrt{\sigma K}}$. В результате имеем: решение равно

$$c(x) = \frac{Q}{2\sqrt{\sigma K}} e^{-\sqrt{\frac{\sigma}{K}}|x-x_0|}$$

3.2 Стационарная одномерная задача с ненулевым ветром

Рассмотрим теперь то же уравнение (12) с $v \neq 0$:

$$vc' + \sigma c - Kc'' = Q\delta(x - x_0) \tag{13}$$

Мы опять ищем решение в классе функций, убывающих на бесконечности:

$$c(x) \to 0 \quad x \to \pm\infty \tag{14}$$

После аналогичных рассуждений приходим к следующим соотношениям:

$$\begin{array}{ll} c_+|_{x_0} = c_-|_{x_0}; & \frac{\partial c_+}{\partial x}\Big|_{x_0} - \frac{\partial c_-}{\partial x}\Big|_{x_0} = -\frac{Q}{K} \\ \lambda^2 - \frac{v}{K}\lambda - \frac{\sigma}{K} = 0 & \Longrightarrow \lambda = \frac{v}{2K} \pm \sqrt{\frac{v^2}{4k^2} + \frac{\sigma}{K}} \end{array}$$

аналогично решение представляется в виде суммы экспонент, две константы обращаются в нули, оставшиеся две равны и вычисляются из условия

$$c(\frac{v}{2K} - \sqrt{\frac{v^2}{4k^2} + \frac{\sigma}{K}} - \frac{v}{2K} - \sqrt{\frac{v^2}{4k^2} + \frac{\sigma}{K}}) = -\frac{Q}{K}$$

Отсюда имеем $c = \frac{Q}{\sqrt{v^2 + 4\sigma K}}$. Решение имеет вид

$$c(x) = \frac{Q}{\sqrt{v^2 + 4\sigma K}} e^{\frac{v}{2K}(x-x_0) - \sqrt{\frac{v^2}{4K^2} + \frac{\sigma}{K}}|x-x_0|}$$

3.3 Нестационарная одномерная задача в частных производных

Теперь решение будем обозначать символом φ. Имеем задачу Коши

$$\begin{array}{l} \dfrac{\partial\varphi}{\partial t} + \sigma\varphi + v\dfrac{\partial\varphi}{\partial x} = K\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + f \qquad -\infty < x < +\infty \\ \varphi(0, x) = \varphi_0(x) \\ \varphi \to 0 \ x \to \pm\infty \end{array} \tag{15}$$

Для того, чтобы решить данное уравнение с произвольной правой частью f и начальным условием φ_0, достаточно решить уравнение с нулевым начальным условием и правой частью в виде $\delta(x-\xi)\delta(t-\tau)$ (см. [1]). Решением этого уравнения будет функция Грина $G(x,\xi,t,\tau)$, и тогда решение уравнения (15) будет представляться в виде свертки функции Грина с правой частью и с начальным условием. Причем в силу независимости коэффициентов уравнения (15) от времени и пространственной переменной $G(x,\xi,t,\tau)=G(x-\xi,0,t-\tau,0)$, поэтому достаточно рассмотреть правую часть в виде $\delta(x)\delta(t)$.

Упражнение 1. *Докажите это.*

Итак, имеем:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\sigma\varphi+v\frac{\partial\varphi}{\partial x}=K\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\delta(x)\delta(t) \qquad -\infty<x<+\infty$$
$$\varphi(0,x)=0$$
$$\varphi\to 0\ x\to\pm\infty$$

Применим преобразование Фурье. По определению

$$F(\varphi)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-i\omega x}\varphi(x)dx, \quad \text{причем выполнено} \quad F(\frac{\partial\varphi}{\partial x})=i\omega F(\varphi) \quad F(\delta)=1$$

Тогда после преобразования Фурье уравнение примет вид

$$\tfrac{\partial F}{\partial t}+\sigma F+K\omega^2F+vi\omega F=\delta(t)\Longleftrightarrow$$
$$\tfrac{\partial F}{\partial t}+F(\sigma+K\omega^2+vi\omega)=\delta(t)$$
$$F|_{t=0}=0$$

Мы пришли к обыкновенному дифференциальному уравнению относительно переменной t. Его решение записывается в виде
$$F(t)=\chi(t)e^{-(\sigma+K\omega^2+vi\omega)t}$$

По определению обратного преобразования Фурье имеем: $\varphi(t,x)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{i\omega x}F(t,\omega)d\omega$. Так как $\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-(a\omega)^2}=\dfrac{\sqrt{\pi}}{|a|}$,

$$\varphi=\frac{\chi(t)}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-kt(\omega-\frac{vt+x}{2kt}i)^2-\frac{(x_vt)^2}{4kt}-\sigma t}d\omega=\frac{\chi(t)}{2\pi}e^{-\frac{(x+vt)^2}{4kt}-\sigma t}\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{kt}}=\frac{\chi(t)}{2\sqrt{\pi kt}}e^{-\sigma t-\frac{(x+vt)^2}{4kt}}$$

Итак, $G(x,t) = \frac{\chi(t)}{2\sqrt{\pi k t}} e^{-\sigma t - \frac{(x+vt)^2}{4kt}}$, а решение представляется в виде

$$\varphi = \int\limits_0^T \int\limits_{-\infty}^{\infty} G(x-\xi, t-\tau) p(\xi,\tau) d\xi d\tau \qquad p(\xi,\tau) = f(\xi,\tau) + \delta(t)\varphi_0(\xi)$$

4 Использование сопряженных уравнений

4.1 Одномерный случай

Допустим, теперь нам требуется для разных правых частей f вычислить функционал J от решения уравнения (15) (например, это может быть один из функционалов 1-3 из секции 2.2).

$$J = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_0^T p(t,x)\varphi(t,x) dx dt - ?$$

Как его найти? Можно решить уравнение (15) для разных правых частей, а затем проинтегрировать решение с весом p. Но можно сделать это, затратив значительно меньше вычислительных мощностей, если использовать аппарат сопряженных уравнений. Поясним, откуда появляется сопряженное уравнение. Домножим уравнение (15) на φ^* и проинтегрируем по области $(0,T) \times (-\infty, \infty)$:

$$\int\limits_0^T \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \varphi}{\partial t}\varphi^* + \int\limits_0^T \int\limits_{-\infty}^{\infty} \sigma\varphi\varphi^* - K \int\limits_0^T \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}\varphi^* = \int\limits_0^T \int\limits_{-\infty}^{\infty} f\varphi^*$$

Применив формулы интегрирования по частям, перебрасываем производные с φ на φ^* и получаем: первое слагаемое переходит в выражение

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi\varphi^* \Big|_0^T - \int\limits_0^T \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi \frac{\partial \varphi^*}{\partial t} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi^*(T,x)\varphi(T,x) - \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi^*(0,x)\varphi_0(x) - \int\limits_0^T \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \varphi^*}{\partial t}\varphi$$

Третье слагаемое переходит в выражение

$$= -K \int\limits_0^T \frac{\partial \varphi}{\partial x}\varphi^* \Big|_{-\infty}^{\infty} + K \int\limits_0^T \varphi \frac{\partial \varphi^*}{\partial x} \Big|_{-\infty}^{\infty} - K \int\limits_0^T \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi \frac{\partial^2 \varphi^*}{\partial x^2}$$

теперь, приводя подобные, получаем:

$$\int\limits_0^T \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(-\frac{\partial \varphi^*}{\partial t} + \sigma\varphi^* - K\frac{\partial^2 \varphi^*}{\partial x^2}) + \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi^*(T,x)\varphi(T,x) - \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi^*(0,x)\varphi_0(x) = \int\limits_0^T \int\limits_{-\infty}^{\infty} f\varphi^*$$

Теперь, если рассмотреть так называемую сопряженную задачу на φ^*

$$\begin{aligned} & -\frac{\partial \varphi^*}{\partial t} + \sigma\varphi^* - K\frac{\partial^2 \varphi^*}{\partial x^2} - v\frac{\partial \varphi^*}{\partial x} = p \qquad -\infty < x < \infty \\ & \varphi^*(T, x) = 0 \end{aligned} \tag{16}$$

то с помощью решения этого уравнения φ^* функционал J можно представить в виде:

$$J = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{0}^{T} p(t,x)\varphi(t,x)dxdt = \int\limits_{0}^{T}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f\varphi^* + \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi^*(0,x)\varphi_0(x)dx$$

Сопряженная задача составляется таким образом, чтобы, зная начальные условия и правую часть, можно было легко вычислить требуемый функционал J. Как же решать сопряженное уравнение? Сделаем замену $\tau = T - t \Rightarrow$

$$\begin{aligned} & -\frac{\partial \varphi^*}{\partial t} + \sigma\varphi^* - K\frac{\partial^2 \varphi^*}{\partial x^2} - v\frac{\partial \varphi^*}{\partial x} = \delta(x)\delta(t) \\ & \varphi^*(0, x) = 0 \end{aligned}$$

А это уравнение решать мы умеем. Мы предположили, что все интегралы сходятся и все операции правомерны.

Итак, нам была задана задача на функцию φ

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + v\varphi' + \sigma\varphi = k\varphi'' + f \qquad \varphi(0,x) = \varphi_0 \tag{17}$$

и необходимо было найти $\langle p, \varphi \rangle_{L_2}$, то есть мы хотели найти такие функции φ^* и ψ^*, что

$$\langle p, \varphi \rangle = \langle \varphi^*, f \rangle + \left\langle \psi^*, \varphi^0 \right\rangle$$

Составив сопряженную задачу (16), мы получили, что

$$\langle \varphi, p \rangle = \langle f, \varphi^* \rangle + \langle \varphi|_{t=0}, \varphi^*|_{t=0} \rangle$$

Пример. Рассмотрим конкретный пример. Пусть в точке x_0 расположен город, а в точке x_3 - промышленное предприятие, производящее выброс примеси в атмосферу с интенсивностью $Q(t)$. Тогда концентрация примеси в регионе будет удовлетворять уравнению (17) с $f = Q(t)\delta(x - x_3)$. Пусть необходимо, чтобы концентрация вредной аэрозоли в городе не превышала ПДК, т.е

$$J = \int\limits_{0}^{T} \varphi(t, x_0)p(t)dt \leq \text{ПДК}.$$

Взяв в качестве p из двойственной задачи (16) $p(t)\delta(x-x_0)$, получим

$$J = \int\limits_0^T \varphi^*(x_3,t)Q(t)dt + \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi_0\varphi^*(0)dx \leq \text{ПДК}.$$

Из этого уравнения несложно вычислить, какая именно концентрация $Q(t)$ удовлетворит ПДК и в то же время имеет максимальную в $L_2(0,T)$ норму.

Пример. Рассмотрим еще один пример. Для начала зададим функцию $q(x)$, которая будет характеризовать "важность"данного места. Например, в экологически более значимых и более густонаселенных областях она будет принимать большие значения. Наша задача - выяснить, при какой интенсивности выбросов $Q(t)$ интеграл $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(x,T)q(x)dx$ не превысит ПДК.

Получаем сопряженную задачу -

$$\begin{gathered} \tfrac{\partial\varphi^*}{\partial t} - v\varphi^{*\prime} + \sigma\varphi^* - k\varphi^{*\prime\prime} = 0 \\ \varphi^*(x,T) = q(x), \end{gathered}$$

тогда

$$\langle\varphi(T), q\rangle = \langle\varphi_0, \varphi^*|_{t=0}\rangle + \langle f, \varphi^*\rangle$$

4.2 Трехмерный случай

Для трехмерного случая уравнение диффузии примет следующий вид:

$$\begin{aligned} &\tfrac{\partial\varphi}{\partial t} + \operatorname{div}(v\varphi) + \sigma\varphi = \sum_{i=1}^{3} \tfrac{\partial}{\partial x_i}\left(K_i \tfrac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right) + f = A\varphi + f \\ &\tfrac{\partial\varphi}{\partial n_A} + a(\xi)\varphi = \sum K_i \tfrac{\partial\varphi}{\partial x_i}\cos\alpha_i + a(\xi)\varphi = u_0 \qquad (18) \\ &\varphi(0,x) = \varphi_0 \end{aligned}$$

Теперь попытаемся сделать тоже самое (выписать сопряженное уравнение) для трехмерного случая.

Для этого нам понадобится формула Остроградского-Гаусса, которая выглядит следующим образом:

$$\iiint\limits_{\Omega} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) d\Omega = \iint\limits_{S} \left(P\cos x + Q\cos y + R\cos z\right) dS$$

Итак, домножим (18) на φ^*, проинтегрируем по пространству и времени и будем с помощью интегрирования по частям перебрасывать производные на φ^*

$$\overbrace{\int\limits_0^T\int\limits_\Omega \frac{\partial\varphi}{\partial t}\varphi^* dt\,d\Omega}^{(1)} + \overbrace{\int\limits_0^T\int\limits_\Omega \operatorname{div}(\vec{v}\varphi)\varphi^* dt\,d\Omega}^{(2)} + \overbrace{\int\limits_0^T\int\limits_\Omega \sigma\varphi\varphi^* dt\,d\Omega}^{(3)} =$$
$$= \underbrace{\int\limits_0^T\int\limits_\Omega \sum \frac{\partial}{\partial x_i}\left(K_i\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right)\varphi^* dt\,d\Omega}_{(4)} + \underbrace{\int\limits_0^T\int\limits_\Omega f\varphi^* dt\,d\Omega}_{(5)}$$

Рассмотрим преобразования каждого из слагаемых:

$$(1) = \int\limits_\Omega \varphi\varphi^* d\Omega|_0^T - \int\limits_0^T\int\limits_\Omega \varphi\frac{\partial\varphi^*}{\partial t}d\Omega$$

Так как $\operatorname{div}\vec{v} = 0$, $\varphi^*\operatorname{div}(\vec{v}\varphi) = \operatorname{div}(\varphi^*\vec{v}\varphi) - \varphi\operatorname{div}(\varphi^*\vec{v})$ и

$$(2) = \int\limits_0^T\iint\limits_S \sum v_i\varphi\varphi^*\cos\alpha_i - \int\limits_0^T\int\limits_\Omega \varphi\operatorname{div}(\varphi^*\vec{v})\,d\Omega dt,$$

$$\begin{aligned}
(4) &= \int\limits_0^T\int\limits_\Omega \sum\frac{\partial}{\partial x_i}\left(K_i\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\varphi^*\right)dt\,d\Omega - \int\limits_0^T\int\limits_\Omega \sum K_i\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\frac{\partial\varphi^*}{\partial x_i}dt\,d\Omega = \\
&= \int\limits_0^T\iint\limits_S \sum K_i\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\varphi^*\cos\alpha_i dS\,dt - \int\limits_0^T\int\limits_\Omega \sum K_i\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\varphi\frac{\partial\varphi^*}{\partial x_i}\right)dt\,d\Omega + \int\limits_0^T\int\limits_\Omega \sum K_i\varphi\frac{\partial^2\varphi^*}{\partial x_i^2}dt\,d\Omega = \\
&= \left\{\sum K_i\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\cos\alpha_i + a(\xi)\varphi = u_0 \text{ (краевое условие)},\ K_i \text{ не зависят от } x\right\} = \\
&= \int\limits_0^T\iint\limits_S \varphi^*(u_0 - a(\xi)\varphi)dS\,dt - \int\limits_0^T\iint\limits_S \sum K_i\varphi\frac{\partial\varphi^*}{\partial x_i}\cos\alpha_i dt\,dS + \int\limits_0^T\int\limits_\Omega \sum K_i\varphi\frac{\partial^2\varphi^*}{\partial x_i^2}dt\,d\Omega = \\
&= \int\limits_0^T\iint\limits_S \varphi^* u_0 dS\,dt - -\int\limits_0^T\iint\limits_S \varphi\left[a(\xi)\varphi^* + \sum K_i\frac{\partial\varphi^*}{\partial x_i}\cos\alpha_i\right]dS\,dt + \int\limits_0^T\int\limits_\Omega \sum K_i\varphi\frac{\partial^2\varphi^*}{\partial x_i^2}dt\,d\Omega.
\end{aligned}$$

Тогда исходное выражение запишется в следующем виде:

$$\int\limits_0^T\int\limits_\Omega \varphi\left[-\frac{\partial\varphi^*}{\partial t} - div(\vec{v}\varphi^*) + \sigma\varphi^* - \sum K_i\frac{\partial^2\varphi^*}{\partial x_i^2}\right]dt\,d\Omega +$$
$$+\int\limits_0^T\iint\limits_S \varphi\left[\sum K_i\frac{\partial\varphi^*}{\partial x_i}\cos\alpha_i + a(\xi)\varphi^* + \sum v_i\cos\alpha_i\varphi^*\right]ds\,dt - \int\limits_0^T\iint\limits_S \varphi^* u_0 dS\,dt +$$
$$+\int\limits_\Omega \varphi^*\varphi|_{t=T}d\Omega - \int\limits_\Omega \varphi^*\varphi|_{t=0}d\Omega = \int\limits_0^T\int\limits_\Omega f\varphi^* dt\,d\Omega$$

Таким образом, если мы желаем вычислить, чему равно

$$J = \langle p, \varphi \rangle + \langle q, \varphi|_{\partial\Omega} \rangle + \langle r, \varphi|_{t=T} \rangle$$

то мы можем это сделать с помощью двойственной задачи.

Упражнение 2. *Записать двойственную задачу.*

4.3 Примеры применения сопряженных уравнений

В предыдущей части мы установили, что функционал от решения задачи можно выразить с помощью функционала от решения сопряженного уравнения:

$$J = \int\limits_0^T \int\limits_\Omega q(t,x)\varphi(t,x)dxdt = \int\limits_0^T \int\limits_\Omega \varphi^*(t,x)f(t,x)\,dxdt.$$

Рассмотрим конкретные примеры применения сопряженных уравнений.

Пример 1. Пусть у нас несколько источников разных примесей в точках $x_i^* \in \Omega \subset R^m$, $i = 1, ..n$, пропорциональной интенсивности $\gamma_i \cdot Q(t)$. В точке x_0 находится город, концентрации примесей в котором не должны превышать предельно допустимые величины Π_i:

$$J_i = \int\limits_0^T \varphi_i(x_0, t)dt \le \Pi_i. \tag{19}$$

Концентрация i-ой примеси в точке x в момент t равна $\varphi_i(x,t)$ и изменяется в соответствии с уравнением

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \varphi_i}{\partial t} - \sigma_i\varphi_i + \operatorname{div}(\vec{v}\varphi_i) - \sum_{j=1}^m \frac{\partial}{\partial x_j} K_i^j \cdot \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} = \delta(x - x_i^*)Q(t)\gamma_i \qquad x \in \Omega\ t \in [0,T] \\
&\varphi_i|_{\partial\Omega} = 0 \qquad \varphi_i(x,0) = 0
\end{aligned} \tag{20}$$

Допустим, что мэрия города выбирает некий коэффициент μ, ограничивающий выбросы всех этих промышленных предприятий:

$$\int\limits_0^T Q^2(t)dt \le \mu^2 \tag{21}$$

Мэрия хочет вычислить максимальный коэффициент μ, такой, который обеспечил бы выполнение всех ПДК в условиях (19):

$$\forall Q(t) : \int\limits_0^T Q^2(t)dt \le \mu^2 \Rightarrow J_i \le \Pi_i. \qquad (22)$$

Задача состоит в нахождении μ. Будем действовать в соответствии с разработанным нами аппаратом сопряженных уравнений. Если $\varphi_i^*(x,t)$ — решения сопряженных к (20) задач, то функционалы (19) представляются в виде

$$J_i = \int\limits_0^T \varphi_i(x_0,t)dt = \int\limits_0^T Q(t)\varphi_i^*(x_i^*,t)\gamma_i dt \le \Pi_i. \qquad (23)$$

Обозначая за $\mathbf{\Pi} = \{\Pi_1,\dots,\Pi_n\}$, $\mathbf{h} = \{\varphi_1^*(x_1^*,t)\gamma_1,\dots,\varphi_1^*(x_1^*,t)\gamma_n\}$ получим следующее векторное неравенство:

$$\int\limits_0^T Q(t)\mathbf{h}\,dt \le \mathbf{\Pi}.$$

Домножив обе части неравенства на вектор l из положительного октанта R_+^n, получим, что должно выполняться следующее неравенство

$$\int\limits_0^T Q(t) < \mathbf{h}, l > dt \ \le < \mathbf{\Pi}, l >, \ \ \forall l \in R_+^n. \qquad (24)$$

Левую часть неравенства можно оценить следующим образом:

$$\int\limits_0^T Q(t) < \mathbf{h}, l > \ dt \le \sqrt{\int\limits_0^T Q^2(t)dt} \cdot \sqrt{\int\limits_0^T < \mathbf{h}, l >^2 \ dt} \le \mu \cdot \sqrt{\int\limits_0^T < \mathbf{h}, l >^2 \ dt}.$$

Теперь потребуем выполнения (24):

$$\mu \cdot \sqrt{\int\limits_0^T < \mathbf{h}, l >^2 \ dt} \ \le < \mathbf{\Pi}, l > .$$

Отсюда

$$\mu \le \frac{< \mathbf{\Pi}, l >}{\sqrt{\int_0^T < \mathbf{h}, l >^2 \ dt}} \qquad \forall l \in R_+^n.$$

Следовательно, мэрия может выбрать коэффициент следующим образом:

$$\mu = \min_{l \in R^n_+} \frac{< \mathbf{\Pi}, l >}{\sqrt{\int\limits_0^T < \mathbf{h}, l >^2 \ dt}}.$$

Упражнение 3. *Доказать, что минимум достигается.*

Упражнение 4.* *Рассмотреть случай, когда интенсивности заводов $Q_i(t)$ — произвольные различные функции, удовлетворяющие (21).*

Упражнение 5.* *Будет ли найденное нами μ оптимальным (может быть, выгоднее взять максимальное μ, обеспечивающее выполнение условий (23))? А что будет для различных $Q_i(t)$?*

Пример 2. Одномерный случай. В этом примере рассмотрим один завод в точке x_0 и город в точке $x = 0$. Допустим, что концентрация примеси не зависит от времени и равна $c(x|x_0)$. В этом случае она удовлетворяет системе (13)-(14). Требуется минимизировать расстояние от города до завода

$$|x_0| \to \min$$

при условии ограничений загрязнения в городе

$$c(0|x_0) \leq \gamma.$$

Мы знаем (см. параграф 3.2), что

$$c(x|x_0) = \frac{Q}{\sqrt{v^2 + 4\sigma K}} \exp\left\{\frac{v}{2K}(x - x_0) - \sqrt{\frac{v^2}{4K^2} + \frac{\sigma}{K}} \cdot |x - x_0|\right\}$$

тогда

$$c(0, x_0) = \frac{Q}{\beta} \cdot \exp\left\{-\frac{v}{2K}(x_0) - \sqrt{\frac{v^2}{4K^2} + \frac{\sigma}{K}} \cdot |x_0|\right\},$$

где $\beta = \sqrt{v^2 + 4\sigma K}$.

Если $x_0 > 0$, то имеем $\frac{Q}{2K} e^{-\alpha x_0} \leq \gamma$, где $\alpha = \frac{v}{2K} + \sqrt{\frac{v^2}{4K^2} + \frac{\sigma}{K}} > 0$.

Если $x_0 < 0$, то имеем $\frac{Q}{2K} e^{-\alpha x_0} \leq \gamma$, где $\alpha = \frac{v}{2K} - \sqrt{\frac{v^2}{4K^2} + \frac{\sigma}{K}} < 0$.

Тогда, разобрав для каждого направления ветра эти 2 случая расположения завода и сравнив модули оптимальных значений x_0, получаем:

1. $v > 0 \Longrightarrow x_0 \geq \frac{1}{\alpha} \ln \frac{\beta\gamma}{Q}$

2. $v < 0 \Longrightarrow x_0 \leq \frac{1}{\alpha} \ln \frac{\beta\gamma}{Q}$

Упражнение 6. *Рассмотрите самостоятельно случай, когда в рассматриваемом регионе возможно 2 типических метеорологических ситуации с* $v = v_1 > 0$ *и* $v = v_2 < 0$. *Где выгодно расположить завод в этом случае?*

Пример 3. Модифицируем предыдущий пример, рассмотрев уже не один, а n заводов $x_1^*, \ldots, x_n^*$, осуществляющих выбросы одной и той же вредной примеси. Концентрация примеси, соответствующая вкладу i-го завода, является решением соответствующей стационарной задачи и равна

$$c(0|x_i^*) = \frac{Q}{\beta} \cdot \exp\left\{ -\frac{v}{2K}(x_i^*) - \sqrt{\frac{v^2}{4K^2} + \frac{\sigma}{K}} \cdot |x_i^*| \right\}.$$

Пусть нам требуется свести к минимуму затраты по постройке дорог до заводов и перевозкам людей и материалов при условии, что концентрация примеси в городе не превышает предельно допустимую:

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{n} a_i |x_i^*| \to \min \\ \sum\limits_{i=1}^{n} c_i(0|x_i^*) \leq \gamma \end{cases}$$

Здесь весовые коэффициенты a_i отражают материальные затраты на организацию транспортного сообщения, а ПДК$= \gamma$.

Можно указать три возможных пути решения этой задачи:

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=1} a_i|x_i^*| \to \min \\ \sum\limits_{i=1}^{n} c_i(0|x_i^*) \le \gamma \end{cases}$$

I путь / II путь / III путь

I путь	II путь	III путь
Сведение к многокритериальной задаче, решение будет принимать ЛПР: $\begin{pmatrix} a_1\lvert x_1^*\rvert \\ \dots \\ a_n\lvert x_n^*\rvert \end{pmatrix} \to \min$	Снятие модулей с помощью перебора всех возможных комбинаций знаков x_i^* и сведение к задаче ЛП: $\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{n} \tilde{a}_i x_i^* \to \min \\ c_i(0\lvert x_i^*) \le \gamma_i \ \ i = 1..n \end{cases}$	Снятие модулей с помощью перебора всех возможных комбинаций знаков x_i^*: $\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{n} \tilde{a}_i x_i^* \to \min \\ \sum\limits_{i=1}^{n} c_i(0\lvert x_i^*) \le \gamma \end{cases}$

Упражнение 7. *Покажите, что путь II действительно ведет к задаче линейного программирования.*

С точки зрения нашего курса нам наиболее интересен третий путь. Итак, формулируем задачу следующим образом:

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{n} \tilde{a}_i x_i^* \to \min \\ \sum\limits_{i=1}^{n} c_i(0|x_i^*) \le \gamma \end{cases} \tag{25}$$

Здесь $\tilde{a}_i$ — коэффициенты a_i, возможно, помноженные на -1. Перебрав все возможные комбинации знаков a_i, мы рассмотрим все ситуации расположения промышленных предприятий.

Упражнение 8. *Доказать, что в задаче (25) ограничение обеспечивает существование конечного минимума.*

С помощью метода Лагранжа сведем задачу (25) к задаче на безусловный экстремум

$$\sum_{i=1}^{n} \tilde{a}_i x_i^* + \lambda \cdot \left[\sum_{i=1}^{n} \frac{Q_i}{\beta}\, e^{-\alpha_i x_i^*} - \gamma \right] \to \mathrm{extr}$$

Замечание. Коэффициенты α_i могут иметь разный знак в зависимости от расположения соответствующих x_i^*, поэтому индекс i убирать нельзя.

После дифференцирования имеем:

$$\begin{aligned} &\tilde{a}_i - \lambda \tfrac{Q_i}{\beta}\,\alpha_i \cdot e^{-\alpha_i x_i^*} = 0 &&\Longrightarrow \quad x_i^* = \tfrac{1}{\alpha_i} \cdot \ln \tfrac{Q_i \lambda \alpha_i}{\tilde{a}_i \beta} \\ &\tfrac{1}{\lambda} \sum \tfrac{\tilde{a}_i}{\alpha_i} - \gamma = 0 &&\Longrightarrow \quad \lambda = \frac{\sum \frac{\tilde{a}_i}{\alpha_i}}{\gamma} \end{aligned}$$

Итак, имеем: $x_i^* = \dfrac{1}{\alpha_i} \cdot \ln \dfrac{Q_i \sum_{j=1}^n \frac{\tilde{a}_j}{\alpha_j}}{\frac{\tilde{a}_i}{\alpha_i}\beta\gamma}$.

Перебрав все возможные комбинации знаков a_i и рассмотрев стандартные метеорологические ситуации, получаем оптимальное расположение заводов.

Упражнение 9. *Минимум ли функционала мы нашли?*

Пример 4. Допустим, что имеются некие "зеленые зоны" (заповедники, национальные парки, населенные пункты и т.д.) $D_1, \ldots, D_n \subset \Omega$, в которых правительство решило ограничить концентрацию загрязняющей субстанции, выбрасываемой заводом, расположенным в точке $x^0 \in \Omega$:

$$J_i = \int\limits_{D_i} c(x|x^0) p_i(x) dx \leq \Pi_i \qquad i = 1..n. \tag{26}$$

Здесь $p_i(x)$ — весовые функции.

Требуется определить зону, в которой можно расположить промышленное предприятие с соблюдением ограничений (26). Введем следующие обозначения:

$$X_i^0 = \{x^0 | J_i(x^0) \leq \Pi_i\}.$$

Если мы хотим также, чтобы завод был расположен не далее чем на расстоянии r от точки $a \in \Omega$, искомая область есть

$$\{x^0\} = \bigcap_i X_i^0 \bigcap O_r(a)$$

Иногда требуется найти точку, целая окрестность которой расположена в допустимой области:

$$\{x^0\} = \left\{ x^0 \,\middle|\, O_\varepsilon(x^0) \subset \bigcap_i X_i^0 \bigcap O_r(a) \right\}.$$

Возможна также следующая постановка: поиск расположения завода, оптимального с точки зрения минимизации некоторого критерия, например:

$$\int\limits_0^T (Q(t) - Q^*)^2 dt \to \min.$$

Пример 5. Пусть теперь у нас на плоскости расположены n заводов в точках $x_1^*, \ldots, x_n^* \in R^2$, каждый из которых произвел ровно один выброс загрязняющей субстанции. Пусть эти загрязняющие субстанции различны. Источник загрязнения, соответствующий i-му заводу и i-ой примеси, имеет вид $\delta(t)\delta(x - x_i^*)Q_i$. Допустим, имеется постоянный ветер $\vec{v}$. Тогда линии уровня концентрации i-ой примеси описываются следующим уравнением:

$$e^{-\frac{(x-v_1 t)^2}{4K_1 t} - \frac{(y-v_2 t)^2}{4K_2 t} - \sigma t} = \nu(t).$$

Это - эллипсоиды на плоскости R^2.

Упражнение 10. *Расширяются ли эти эллипсоиды со временем или сужаются?*

Упражнение 11. *Выпишите самостоятельно матрицу, соответствующую подобному эллипсоиду, и его центр.*

Если потребовать, чтобы в городе (то есть в точке x^0) концентрация каждой из примесей не превышала некоторой константы Π_i, то мы получим, что x^0 должен лежать в дополнениях до двумерных эллипсоидов. Обозначим эти эллипсоиды с центрами в точках $p_i(t)$ и матрицами $P_i(t)$ через $\mathcal{E}(p_i(t), P_i(t))$. Тогда множество допустимых значений точки x^0 есть

$$\{x^0\} = \bigcap_{i=1}^{n} \mathcal{E}_i^C(p_i(t), P_i(t)).$$

5 Управляемость и наблюдаемость конечномерных систем.

5.1 Наблюдаемость

5.1.1 Стационарный случай

Рассмотрим следующую линейную дифференциальную систему

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = P(t)x, \quad t \in [t_0, t_1] \\ x(t_0) = x_0 \qquad x_0 \in R^n \qquad \text{— неизвестно} \end{cases} \tag{27}$$

Наряду с ней рассмотрим уравнение наблюдения

$$y(t) = G(t)x(t) \quad t \in [t_0, t_1] \quad \text{— наблюдение.} \tag{28}$$

Здесь в каждый момент времени t $x(t) \in R^n$, $P(t) \in R^{n\times n}$, $y(t) \in R^m$, $G(t) \in R^{m\times n}$, а матрица $P(t)$ такова, что выполнены условия существования, единственности и продолжаемости решения.

Определение. Система (27)-(28) вполне наблюдаема, если, как бы не реализовалось наблюдение y, по нему можно однозначно определить x_0:

$$y \longmapsto !x_0$$

Или, другими словами, если для $y(\cdot)$ существует такое $x_0 \in R^n$, что порожденное им в силу системы (27) решение удовлетворяет уравнению наблюдения (28), то такое x_0 единственно.

Теорема 5.1. Пусть $P(t) \equiv P$, $G(t) \equiv G$. Система (27)-(28) вполне наблюдаема тогда и только тогда, когда ранг матрицы

$$rang \begin{bmatrix} G \\ GP \\ \dots \\ GP^{n-1} \end{bmatrix} = n \tag{29}$$

Доказательство. Рассмотрим фундаментальную систему решений. Для этого рассмотрим n линейно независимых решений системы (27) — $x_1(t), \dots, x_n(t)$ и обозначим $z(t) = [x_1(t), \dots, x_n(t)]$. В этом случае ФСР системы (27) равна

$$\Phi(t, t_0) = z^{-1}(t_0)z(t)$$

а в стационарном случае при $P(t) \equiv P$ функция Φ зависит лишь от разности переменных t и t_0:

$$\Phi(t, t_0) = \hat{\Phi}(t - t_0)$$

Отсюда

$$x(t) = \hat{\Phi}(t - t_0)x_0 + \int_{t_0}^{t} \hat{\Phi}(t - \tau)f(\tau)d\tau \tag{30}$$

Тогда, подставив выражение (30) в уравнение наблюдения (28), получим $y(t) = G\hat{\Phi}(t - t_0)x_0$. Продифференцировав несколько раз это выражение, имеем:

$$\begin{pmatrix} y(t) \\ y'(t) \\ \dots \\ y^{n-1}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G \\ GP \\ \dots \\ GP^{n-1} \end{pmatrix} \hat{\Phi}(t - t_0)x_0 \tag{31}$$

Достаточность. Если система не вполне наблюдаема, то существуют два различных начальных условия x_0^1, x_0^2, отвечающих одному y. Следовательно, их разность $x_0^1 - x_0^2$ отвечает нулевому наблюдению. Рассмотрим (31) при $t = t_0$. Однородная система имеет нетривиальное решение, следовательно, ранг матрицы меньше n, ч.т.д..

Необходимость. Рассмотрим (31) при $t = t_0$. Пусть ранг матрицы меньше n, тогда однородная система имеет нетривиальное решение x_0. Следовательно,

$$x_0 \in \operatorname{Ker} G, \;\; Px_0 \in \operatorname{Ker} G, \ldots, \;\; P^{n-1}x_0 \in \operatorname{Ker} G$$

Докажем, что $\hat{\Phi}(t-t_0)x_0 \in \operatorname{Ker} G$. Для этого покажем, что

$$P^k x_0 \in \operatorname{Ker} G \quad \forall k \in N \tag{32}$$

Пусть l — такое число, что система $x_0, \ldots, P^{l-1}x_0$ – линейно независима, а $x_0, \ldots, P^l x_0$ - линейно зависима. В силу конечной размерности пространства l существует и не превосходит n. Тогда

$$P^l x_0 = \sum_{i=0}^{l-1} c_i \cdot P^i x_0 \in \operatorname{Ker} G \implies$$

$$P^{l+1}x_0 = P\sum_{i=0}^{l-2} c_i \cdot P^i x_0 + P \cdot c_{l-1} \cdot P^{l-1}x_0 = \sum_{i=0}^{l-2} c_i P^{i+1}x_0 + \sum_{i=0}^{l-1} c_{l-1}c_i P^i x_0$$

Таким образом, имеем:

$$P^{l+1}x_0 = \sum_{i=0}^{l-1} \gamma_i P^i x_0 \in \operatorname{Ker} G$$

Аналогично по индукции легко доказать, что (32) верно. Из (30) получаем, что

$$\hat{\Phi}(t-t_0)x_0 = e^{P(t-t_0)}x_0 = \sum_{i=0}^{\infty} P^i \frac{(t-t_0)^i}{i!} x_0 \in \operatorname{Ker} G$$

Отсюда $y(t) = G\hat{\Phi}(t-t_0)x_0 \equiv 0$, что противоречит вполне наблюдаемости, ч.т.д..

Замечание 1. Система (27)-(28) вполне наблюдаема $\Leftrightarrow$ наблюдению $y \equiv 0$ соответствует только $x_0 = 0$:

$$y \longmapsto !x_0 \;\; \Leftrightarrow y \equiv 0 \longmapsto !x_0 = 0$$

Это выполнено в силу линейности системы и наблюдения.

Замечание 2. Задача об отыскании $x(t_0)$ по результатам наблюдений эквивалентна задаче об отыскании $x(t_1)$ (в отличие от бесконечномерного случая).

$$y \longmapsto !x(t_0) \;\; \Leftrightarrow y \longmapsto !x(t_1)$$

5.1.2 Нестационарный случай

Рассмотрим нестационарный случай. Имеем:

$$x(t) = \Phi(t, t_0)x_0 \qquad y(t) = G(t)\Phi(t, t_0)x_0$$

Пусть

$$W = \int_{t_0}^{t_1} \Phi^T(t, t_0)G^T(t)G(t)\Phi(t, t_0)dt$$

Теорема 5.2. Система (27)-(28) наблюдаема на промежутке времени $[t_0, t_1] \Leftrightarrow$ матрица W обратима.

Доказательство. Необходимость. В силу

$$Wx_0 = \int_{t_0}^{t_1} \Phi^T(t, t_0)G^T(t)G(t)\Phi(t, t_0)dtx_0 = \int_{t_0}^{t_1} \Phi^T(t, t_0)G^T(t)y(t)dt$$

начальное условие явным образом выражается через наблюдение, следовательно, оно единственно и система вполне наблюдаема.

Достаточность. Пусть система вполне наблюдаема. Докажем, что ранг матрицы W равен m.

Пусть W^{-1} не существует. Тогда

$$\exists \overline{x}_0 \neq 0 : W\overline{x}_0 = 0.$$

Домножив это выражение слева на $\overline{x}_0^T$, получим:

$$\overline{x}_0^T W\overline{x}_0 = \int_{t_0}^{t_1} \overline{x}_0^T \Phi^T(t, t_0)G^T(t)G(t)\Phi(t, t_0)\overline{x}_0 dt =< d(t), d(t) >_{L_2[t_0,t_1]} = 0$$

Таким образом, $d(t) = G(t)\Phi(t, t_0)x_0 = y(t) \equiv 0$. Значит, система не является вполне наблюдаемой, ч.т.д..

5.1.3 Наличие помехи измерений

Пусть теперь наблюдения производятся не точно, а с некоторой помехой, то есть уравнение наблюдения (28) имеет вид

$$y(t) = G(t)x(t) + \xi, \xi \in S \subset \mathcal{S} \tag{33}$$

Здесь $\mathcal{S}$ — метрическое пространство, а S — множество, ограниченное в $\mathcal{S}$. Нас интересует оценка начального состояния x_0.

Определение. Информационное множество системы (27),(33) есть

$$U(y, t_0) = \{x_0 : \text{для траектории } x(t), \text{ порожденной системой (27), } \exists \xi \in S : (33)\}$$

Определение. Система (27),(33) называется наблюдаемой на $[t_0, t_1]$, если для любого наблюдения $y(\cdot)$, полученного в силу системы (33), информационное множество $U(y(\cdot), t_0)$ ограничено.

Пусть система (27)-(28) была наблюдаема $\Rightarrow \exists W^{-1}$. Домножим уравнение (33) слева на $\Phi^T(t, t_0)G^T(t)$ и проинтегрируем на $[t_0, t_1]$:

$$\int_{t_0}^{t_1} \Phi^T G^T y(t) dt = \int_{t_0}^{t_1} \Phi^T G^T G \Phi dt x_0 + \int_{t_0}^{t_1} \Phi^T G^T \xi(t) dt$$

Пусть для простоты $\mathcal{S} = L_2^m[t_0, t_1]$ (т.е. помеха ограничена в L_2). Тогда существует такое число μ, что

$$\|\xi\|_{L_2} \leq \mu \quad \Rightarrow \quad \|x_0\| \leq \|W^{-1}\| \left\{ c_1 \|y\|_{L_2^m[t_0,t_1]} + c_2 \mu \right\}$$

Значит, $U(y(\cdot), t_0)$ ограничено и система (27),(33) наблюдаема.

5.2 Управляемость

Рассмотрим следующую систему

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = A(t)x + B(t)u(t), & t \in [t_0, t_1] \\ x(t_0) = x_0, \ x(t_1) = x_1 & x_0, \ x_1 \in R^n \end{cases} \tag{34}$$

Причем коэффициенты должны обеспечивать существование, единственность и продолжаемость решения на $[t_0, t_1]$ $\forall u(\cdot) \in L_2^m[t_0, t_1]$.

Определение. Задача (34) вполне управляема на $[t_0, t_1]$, если $\forall \ x_0 \in R^n, \ x_1 \in R^n \quad \exists u \in L_2^m[t_0, t_1]$, такое, что выполняется (34):

$$\exists u(\cdot) : \ x_0 \mapsto x_1 \text{ в силу (34)}$$

Будем рассматривать стационарный случай: $B(t) \equiv B, \ A(t) \equiv A$.

Теорема 5.3. Задача (34) вполне управляема $\Leftrightarrow rang\{B|AB|\dots|A^{n-1}B\} = n$.

Упражнение 12. *Проведите доказательство теоремы самостоятельно, используя приведенные ниже замечания.*

Замечание 1. Система

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -A^T x(t), \\ y(t) = B^T x(t) \end{cases}$$

называется сопряженной к (34). Она вполне наблюдаема $\Leftrightarrow$ **(34) вполне управляема**

Замечание 2. Система (34) вполне управляема $\Leftrightarrow$ **она ноль управляема, т.е.** $\forall x_0 \in R^n \quad \exists u(\cdot) \in L_2^m[t_0, t_1]$**: для решения (34)** $x_1 = 0$**:**

$$\forall x_0 \ \exists u(\cdot): \ x_0 \mapsto 0 \textbf{ в силу (34)}$$

Доказательство. Мы знаем, что система (34) 0-управляема на $[t_0, t_1]$. Зафиксируем произвольные $x_0, \ x_1 \in R^n$ и построим управление $u(\cdot): \ x_0 \mapsto x_1$. Система (34) стационарна, следовательно,

$$\forall \tilde{t} \in (t_0, t_1) \text{ (34) 0-управляема на } [t_0, \tilde{t}], \ [\tilde{t}, t_1]$$

Построим на этих промежутках управления следующего вида:

$$\begin{aligned} &u_1(\cdot), \ [t_0, \tilde{t}]: \ x_0 \mapsto 0 \\ &u_2(\cdot), \ [\tilde{t}, t_1]: \ [\hat{\Phi}(t_1 - \tilde{t})]^{-1} x_1 \mapsto 0 \end{aligned}$$

Построим управление

$$u(t) = \begin{cases} u_1(\cdot), t \in [t_0, \tilde{t}), \\ -u_2(\cdot), t \in [\tilde{t}, t_1] \end{cases}$$

Тогда решение системы (34) с $x(t_0) = x_0$ будет удовлетворять следующим равенствам:

$$x(\tilde{t}) = 0 \qquad x(t_1) = \hat{\Phi}(t_1 - \tilde{t}) \cdot 0 + \int_{\tilde{t}}^{t_1} \hat{\Phi}(t_1 - \tau) B(-u_2(\tau)) d\tau$$

По определению u_2:

$$0 = \hat{\Phi}(t_1 - \tilde{t}) \{ (\hat{\Phi}(t_1 - \tilde{t}))^{-1} x_1 \} + \int_{\tilde{t}}^{t_1} \hat{\Phi}(t_1 - \tau) B u_2(\tau) d\tau$$

Следовательно, $x(t_1) = x_1$, ч.т.д..

Дадим теперь переформулировку задачи поиска $u(\cdot)$, облегчающее ее понимание. Требуется найти такое $u(\cdot)$, чтобы

$$0 = \hat{\Phi}(t_1 - t_0) x_0 + \int_{t_0}^{t_1} \hat{\Phi}(t_1 - \tau) B u(\tau) d\tau.$$

Обозначим

$$\hat{\Phi}(t_1-t_0)x_0 = -\begin{bmatrix}\alpha_1\\ \dots\\ \alpha_n\end{bmatrix} \qquad \hat{\Phi}(t_1-\tau)B = \begin{bmatrix}\varphi_1(\tau)\\ \dots\\ \varphi_n(\tau)\end{bmatrix} \qquad \varphi_i(\cdot)\in L_2^m[t_0,t_1]$$

Замечание 3. "Проблема моментов"Управляемость задачи (34) эквивалентна существованию $u(\cdot)\in L_2^m[t_0,t_1]$, такого, что

$$\begin{bmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \dots\\ \alpha_n\end{bmatrix} =< \begin{bmatrix}\varphi_1(\tau)\\ \varphi_2(\tau)\\ \dots\\ \varphi_n(\tau)\end{bmatrix}, u(\cdot) >_{L_2^m[t_0,t_1]}$$

Или, что то же самое,

$$\alpha_i =< \varphi_i, u(\cdot) >_{L_2^m[t_0,t_1]} \qquad i=1..n$$

Такая задача называется проблемой моментов.

Ясно, что в случае линейной зависимости $\{\varphi_i(\cdot)\}_{i=1}^n$ задача в общем случае не разрешима. Линейная же независимость системы $\{\varphi_i(\cdot)\}_{i=1}^n$ эквивалентна тому, что определитель Грамма не равен 0:

$$0 \neq \left|\begin{pmatrix} <\varphi_1,\varphi_1> & <\varphi_1,\varphi_2> & \dots & <\varphi_1,\varphi_n> \\ <\varphi_2,\varphi_1> & <\varphi_2,\varphi_2> & \dots & <\varphi_2,\varphi_n> \\ \dots & \dots & & \dots \\ <\varphi_n,\varphi_1> & <\varphi_n,\varphi_2> & \dots & <\varphi_n,\varphi_n> \end{pmatrix}\right|$$

Доказательство этого утверждения очевидно из определения линейной зависимости.

Замечание 4. Если система 0-управляема, существует бесконечное число управлений, переводящих ее из фиксированного x_0 в фиксированный x_1. Однако существует хотя бы одно управление, такое, что

$$\|u(\cdot)\| \leq C\left\{\max_i|\alpha_i| + \max_i\|\phi_i\|_{L_2^m[t_0,t_1]}\right\}$$

где константа C зависит от системы.

6 Управляемость и наблюдаемость бесконечномерных систем

6.1 Наблюдаемость систем с распределенными параметрами

6.1.1 Постановка задачи

В этой главе мы будем рассматривать систему

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} & 0 < x < l,\ 0 < t \le T \\ u(0,t) = u(l,t) = 0 & 0 < t \le T \\ u(x,0) = u_0 & \text{— неизвестно} \end{cases} \tag{35}$$

и уравнение наблюдения

$$y = \mathbf{G}u(\cdot,\cdot) + \xi \tag{36}$$

Примеры возможных операторов наблюдения приведены на с. 7 для $u(\cdot,\cdot) = c(\cdot,\cdot)$ (пространственно усредненные наблюдения, финальное наблюдение, точечный сенсор).

Известно, что $\forall u_0 \in L_2(0,l)$ существует решение уравнения (35) из энергетического класса (см. [3]), то есть такое, что

1. $u(\cdot,\cdot) \in H^{1,0}((0,l)\times(0,T))$, то есть
   $u,\ \frac{du}{dx} \in L_2((0,l)\times(0,T))$
2. $\forall v \in H^1((0,l)\times(0,T)),\ v|_{t=T} = 0$ выполнено
   $\int\limits_0^l \int\limits_0^T (-uv_t + a^2 u_x v_x) dx dt = \int\limits_0^l u_0(x) v(x,0) dx$

Более того, u можно представить в виде ряда

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_0^k e^{-\lambda_k t} \varphi_k(x) \tag{37}$$

Где $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ — ОНС собственных функций задачи

$$\begin{aligned} &a^2 \varphi_k'' = -\lambda_k \varphi_k, \qquad 0 < x < l \\ &\varphi_k(0) = \varphi_k(l) = 0 \end{aligned}$$

а λ_k — соответствующие им собственные значения. В нашей задаче

$$\varphi_k = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{\pi n x}{l} \qquad \lambda_k = \left(\frac{\pi k}{l}\right)^2 a^2.$$

Коэффициенты же u_0^k в (37) — коэффициенты Фурье разложения u_0 по $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$:

$$u_0^k = \int\limits_0^l \varphi_k(x) u_0(x) dx$$

Исследуем свойства ряда (37).

Замечание 1. Ряд сходится равномерно на любом множестве $[\delta, T] \times [0, l]$ где $\delta > 0$.

Доказательство.

$$|u(x,t)| \le \sum_{k=1}^{\infty} e^{-(\frac{\pi k}{l} a)^2 \delta} |u_0^k| < \infty$$

Из равномерной сходимости ряда следует, в частности, непрерывность u на любом сегменте такого вида.

Замечание 2. Функция $u(x,t)$ непрерывна на $t > 0$. Более того, u можно любое число раз дифференцировать по x и по t в области $[\delta, T] \times [0, l]$ и производная будет непрерывна в этой области.

Замечание 3. Если рассматривать ту же задачу в $\Omega \subset R^n$,

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u & x \in \Omega,\ 0 < t \le T \\ u|_{t=0} = u_0 \\ u|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

где $\partial\Omega \in C^2$, $u_0 \in L_2(\Omega)$, то $u(\cdot, t) \in H^2(\Omega)$ по аргументу x $\forall t > 0$, а при $n \le 3$ $u(\cdot, t) \in C(\overline{\Omega})$.

Доказательство. Для доказательства используем следующую теорему (см. [3]):

Теорема 6.1. $H^{l+1+[\frac{n}{2}]}(\Omega) \subset C^l(\overline{\Omega})$

6.1.2 Различные виды наблюдаемости

Итак, мы рассматриваем задачу

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} & 0 < x < l,\ 0 < t \le T \\ u(0,t) = u(l,t) = 0 & 0 < t \le T \\ u(x,0) = u_0 - ? \end{cases} \tag{38}$$

при наблюдении

$$y = \mathbf{G} u(\cdot, \cdot). \tag{39}$$

или при наблюдении с возможной помехой:

$$y = \mathbf{G}u(\cdot,\cdot) + \xi \tag{40}$$

где $\mathbf{G}$ – линейный оператор, так называемый оператор наблюдения, линейный и непрерывный на том пространстве, которому принадлежит решение задачи (38). В нашем случае $\mathbf{G} \in \mathcal{L}(H^{1,0}((0,l)\times(0,T)),\mathcal{Y})$, $\mathcal{Y}$ — некоторое гильбертово пространство. Часто $\mathcal{Y}$ имеет вид $\mathcal{Y} = L_2(Y;(0,T))$, где Y, в свою очередь, гильбертово пространство. Примеры операторов наблюдения приведены на с. 7.

В случае, когда рассматривается уравнение (40), помеха предполагается ограниченной в $\mathcal{Y}$:

$$\|\xi\|_{\mathcal{Y}} \le \mu \tag{41}$$

Нужно по результатам наблюдения y оценить состояние системы в некоторый заданный момент времени t.

Определение. Система (38), (39) называется **(слабо) наблюдаемой**, если по $y(\cdot)$ можно однозначно восстановить u_0.

Замечание. Система слабо наблюдаема $\Leftrightarrow$ когда сигналу $y \equiv 0$ соответствует только $u_0 = 0$

Пример. Исследуем, выполнено ли свойство слабой наблюдаемости, если в качестве оператора $\mathbf{G}$ рассматривать оператор финального наблюдения $y = u(x,T)$ Из представления (37) имеем:

$$y(x) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-(\frac{\pi n}{l}a)^2 T} u_0^n \sqrt{\frac{2}{l}} \sin\frac{\pi n x}{l},$$

где u_0^n – коэффициенты Фурье.

Пусть $y(x) \equiv 0$. Домножим скалярно это уравнение на $\sqrt{\frac{2}{l}}\sin\frac{\pi k x}{l}$. Тогда

$$0 = e^{-(\frac{\pi k}{l}a)^2 T} u_0^k.$$

Отсюда $u_0^k = 0 \quad \forall k$. Следовательно, $u_0 \equiv 0$. Значит, при данном операторе $\mathbf{G}$ система (38)-(39) слабо наблюдаема.

Рассмотрим теперь систему (38),(40),(41) с тем же оператором наблюдения. Рассмотрим информационное множество для нулевого наблюдения в момент времени $t = 0$

$$U[0,0] = \{u_0 | u(x,t) \text{ — решение (38)},\ u(x,T) + \xi = 0,\ \|\xi\| \le \mu\}.$$

Докажем, что оно не ограничено. Рассмотрим следующую последовательность начальных условий:

$$u_0^{(k)} = Ck\mu\sqrt{\frac{2}{l}}\sin\frac{\pi k x}{l},$$

где C – некоторая константа. Тогда

$$\|u_0^{(k)}\| = Ck\mu\sqrt{\frac{2}{l}} \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} \infty,$$

а решения задачи (38) с $u_0 = u_0^{(k)}$ в момент $t = T$ равны

$$\|u^{(k)}(x,T)\| = \|Ck\mu\sqrt{\frac{2}{l}} sin\frac{\pi kx}{l} e^{-(\frac{\pi k}{l})^2 T}\| = ck\mu e^{-(\frac{\pi k}{l})^2 T} \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Следовательно, существует C такое, что $\forall\mu \quad \|u^{(k)}(x,T)\| \le \mu$. А значит, $U[0,0]$ неограничено.

И такая ситуация складывается для большинства возможных операторов наблюдения. Для них задача оценивания начального состояния поставлена некорректно. Поэтому будем решать задачу оценки конечного состояния.

Определение. Система (38), (40), (41) называется **сильно наблюдаемой**, если информационное множество

$$U[y,T] = \{u(x,T) | u(x,t) - \text{решение (38)}, \ \mathbf{G}u(\cdot,\cdot) + \xi(\cdot) = y(\cdot), \|\xi\| \le \mu\}$$

ограничено.

Введем оператор D, действующий следующим образом:

$$\begin{array}{rcl} u(\cdot,T) & \rightarrow & u_0(\cdot) \\ D\downarrow & & \downarrow \\ \mathbf{G}u(\cdot,\cdot) & \leftarrow & u(\cdot,\cdot) \end{array}$$

Определение. Система (38), (40) называется **непрерывно наблюдаемой**, если оператор D^{-1} непрерывен.

Теорема 6.2. **Непрерывная наблюдаемость эквивалентна сильной наблюдаемости.**

Упражнение 13. *Доказать теорему.*

Замечание.

$$\begin{aligned} y(x) = u(x,T) &= \sum_1^\infty e^{-(\frac{\pi n}{l}a)^2 T} \left\{ \sqrt{\tfrac{2}{l}} \int_0^l u_0(\xi) \sin\tfrac{\pi n\xi}{l} d\xi \right\} \sqrt{\tfrac{2}{l}} \sin\tfrac{\pi n x}{l} = \\ &= \int_0^l \left\{ \sum_{n=1}^\infty e^{-(\frac{\pi n}{l}a)^2 T} \tfrac{2}{l} \sin\tfrac{\pi n\xi}{l} \sin\tfrac{\pi n x}{l} \right\} u_0(\xi) d\xi = \\ &= \int_0^l K(x,\xi) u_0(\xi) d\xi \end{aligned}$$

Это — уравнение Фредгольма первого рода с непрерывным ядром $K(x, \xi)$. Имеем:

$$y(x) = \mathcal{K}u_0, \qquad \mathcal{K} \in \mathcal{L}(L_2(0, l))$$

Оператор $\mathcal{K}$ будет вполне непрерывным. Поэтому задача поиска u_0 является некорректно поставленной.

6.1.3 Исследование наблюдаемости системы с неподвижным точечным сенсором

Рассмотрим точечный сенсор $y(t) = u(\bar{x}, t), \quad 0 < \Delta \le t \le T$. Исследуем наблюдаемость системы (38), (39) с таким сенсором ($u_0 \in L_2$):

1. ранее (см. с. 30) было доказано, что $y(t)$ непрерывна;

2. Докажем, что $y \in L_2[\Delta, T]$:

$$\begin{aligned}
\int\limits_{\Delta}^{T} y^2(t)dt \; &= \int\limits_{\Delta}^{T} \{\sum_{k=1}^{\infty} e^{-\lambda_k t} u_0^k \varphi_k(\bar{x})\}^2 dt \le \{\text{неравенство Коши-Буняковского}\} \le \\
&\le \int\limits_{\Delta}^{T} \{\sqrt{\sum (u_0^k)^2} \cdot \sqrt{\sum e^{-2\lambda_k t} \varphi_k^2(\bar{x})}\}^2 dt \le \\
&\le \|u_0\|^2 \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k^2(\bar{x})(T - \Delta)e^{-2\lambda_k \Delta} \le \|u_0\|^2 \sum_{k=1}^{\infty} (T - \Delta)e^{-2\lambda_k \Delta} \cdot \tfrac{2}{l} < \infty
\end{aligned}$$

3. Докажем слабую наблюдаемость системы (38),(39). Пусть

$$y = \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\lambda_k t} \varphi_k(\bar{x}) u_0^k \equiv 0, \quad t \in [\Delta, T] \tag{42}$$

Перейдем к комплексной плоскости (см. рисунок). Рассмотрим функцию комплексного переменного $\phi(z) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} e^{-\lambda_k z} \varphi_k(\bar{x}) u_0^k$ на множестве $\{z | \; Re \; z \ge \frac{\Delta}{2}\}$. Этот ряд сходится равномерно по признаку Вейерштрасса, так как

$$|\phi(z)| \le \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\lambda_k \frac{\Delta}{2}} |\varphi_k(\bar{x}) u_0^k|.$$

Следовательно, $\phi(z)$ – аналитическая функция. Кроме того, $\phi(z) \equiv 0$ на $[\Delta, T]$. Отсюда $\phi(z) \equiv 0$ на $\{z | \; Re \; z \ge \frac{\Delta}{2}\}$.

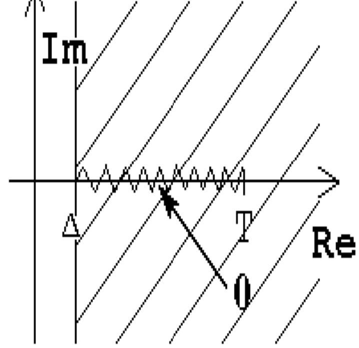

Рис. 1: Выход в комплексную плоскость

Итак, мы установили, что $\phi(z) \equiv 0$, следовательно, равенство (42) выполнено не только на $t \in [\Delta, T]$, но и на $t \in [\Delta, \infty]$. Тогда, домножив (42) на $e^{\lambda_1 t}$, получим:

$$\sum_{k=2}^{\infty} e^{-(\lambda_k - \lambda_1)t} \varphi_k(\bar{x}) u_0^k + \varphi_1(\bar{x}) u_0^1 \equiv 0.$$

Откуда при $t \to \infty$ получим: $\varphi_1(\bar{x}) u_0^1 = 0$. Аналогично

$$\varphi_n(\bar{x}) u_0^n = 0, \quad n = 2, 3, \ldots,$$

где $\varphi_i(\bar{x}) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{\pi \bar{x} i}{l}$. Отсюда следует следующая теорема:

Теорема 6.3. Система слабо наблюдаема $\Leftrightarrow$ $\bar{x}/l$ иррационально.

4. Исследуем сильную наблюдаемость системы (38),(40),(41). Пусть

$$y = \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\lambda_k t} \varphi_k(\bar{x}) u_0^k + \xi(t) \equiv 0$$

Заменим $e^{-t} = z$. Тогда

$$\sum_{k=1}^{\infty} z^{\lambda_k} \varphi_k(\bar{x}) u_0^k + \xi(-\ln z) \equiv 0, \quad a = e^{-T} \le z \le e^{-\Delta} = b.$$

Для дальнейшего доказательства нам потребуется следующая теорема:

Теорема 6.4. *(Мюнтца-Шатца).*

(a) Система $\{z^{\lambda_k}\}$ полна в $L_2[a,b]$ $\Leftrightarrow$ $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k} = \infty$;

(b) **Если $\sum\limits_{k=1} \frac{1}{\lambda_k} < \infty$, то существует система $\{p_k(z)\}_{k=1}^{\infty}$ такая, что $< z^{\lambda_k}, p_n >_{L_2} = \delta_n^k$ и $\|p_n\|_{L_2} \le \alpha e^{\sqrt{\lambda_n}\beta}$, где $\alpha,\ \beta$ – некоторые константы.**

В нашем случае соответствующий ряд сходится. Домножим скалярно уравнение на $p_n(z)$. Получим:

$$u_0^n \varphi_n(\bar{x}) = -\int\limits_{e^{-T}}^{e^{-\Delta}} \xi(-\ln z) p_n(z) dz.$$

Отсюда

$$|u_0^n| \le \frac{|\int \xi(-\ln z) p_n(z) dz|}{|\varphi_n(\bar{x})|} \le \{\text{нер-во Коши-Буняковского}\} \le \frac{\|\xi\| \|p_n\|}{|\varphi_n(\bar{x})|} \le \frac{\mu\alpha e^{\frac{\pi n}{l}\beta}}{|\varphi_n(\bar{x})|}$$

Следовательно,

$$\|u(\cdot, T)\| \le \sum_{n=1}^{\infty} e^{-(\frac{\pi n}{l} a)^2 T + \frac{\pi n}{l}\beta} \frac{\mu\alpha}{|\varphi_n(\bar{x})|}$$

Обозначим через $[\![x]\!]$ расстояние от точки x до ближайшего целого.

Определение. $\{x |\ [\![kx]\!] \ge \frac{c_0}{k}\}$ – точки **постоянного типа**. Такими точками являются, например, точки вида $x = A + \sqrt{B}$, где B – не полный квадрат.

Теорема 6.5. Если $\bar{x}$ – иррациональная точка, а $\frac{\bar{x}}{l}$ – точка постоянного типа, то рассматриваемая система сильно наблюдаема.

Доказательство. Следует из вышеприведенных рассуждений в силу:

$$\left|\sin\frac{\pi n \bar{x}}{l}\right| = \left|\sin(\pi\{k + [\![\frac{n\bar{x}}{l}]\!]\})\right| = \left|\sin(\pi k + \pi [\![\frac{n\bar{x}}{l}]\!])\right| = \left|\sin(\pi [\![\frac{n\bar{x}}{l}]\!])\right| \ge \frac{2\pi}{\pi} [\![\frac{n\bar{x}}{l}]\!] \ge \frac{2c_0}{n},$$

так как при $\gamma \in [0, \pi/2]$ выполнено $\sin\gamma \ge 2\gamma/\pi$.

6.1.4 Исследование наблюдаемости системы с неподвижным сенсором при $n > 1$

Рассмотрим в n-мерном пространстве, $n \le 3$, следующую задачу:

$$\begin{cases} u_t = \Delta u & x \in \Omega \subset R^n,\ 0 < t \le T \\ u|_{\partial\Omega} = 0 & \partial\Omega \in C^2 \\ u(x, 0) = u_0 - ? & \end{cases} \tag{43}$$

и сенсор $\begin{pmatrix} y_1(t) \\ \dots \\ y_M(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u(\bar{x}_1, t) \\ \dots \\ u(\bar{x}_M, t) \end{pmatrix}$ или $\begin{pmatrix} \int\limits_\Omega \omega_1(x) u(x,t) dx \\ \dots \\ \int\limits_\Omega \omega_M(x) u(x,t) dx \end{pmatrix}$

Специфика $n = 2, 3$ состоит в том, что одному собственному значению может соответствовать несколько собственных функций, например, функциям $\sin\frac{n\pi x}{l}\cdot\sin\frac{m\pi y}{l}$ и $\sin\frac{m\pi x}{l}\cdot\sin\frac{n\pi y}{l}$ отвечает одно собственное значение $\lambda = n^2 + m^2$.

Решение имеет вид

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\lambda_k t} \sum_{j=1}^{m_k} u_0^{kj} \varphi_{kj}(x),$$

где m_k — кратность λ_k.

Рассмотрим пространственно усредненные наблюдения и докажем слабую наблюдаемость системы (43).

$$y_i(t) = \int\limits_{\Omega} \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\lambda_k t} \sum_{j=1}^{m_k} u_0^{kj} \varphi_{kj}(x) \omega_i(x) dx = \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\lambda_k t} \sum_{j=1}^{m_k} u_0^{kj} \omega_i^{kj},$$

где ω_i^{kj} – коэффициенты Фурье для ω_i. Пусть $y_i(t) \equiv 0$ на $[0, T]$ $i = 1..M$. Проведя рассуждения, аналогичные использованным при доказательстве слабой наблюдаемости системы с точечным сенсором в одномерном пространстве (с. 33), получаем:

$$\sum_{j=1}^{m_k} u_0^{kj} \omega_i^{kj} = 0$$

Введем следующие обозначения:

$$U_k = \begin{pmatrix} u_0^{k1} \\ \dots \\ u_0^{km_k} \end{pmatrix} \text{ и } W_k = \begin{pmatrix} w_1^{k1} & \dots & w_1^{km_k} \\ & \dots & \\ w_M^{k1} & \dots & w_M^{km_k} \end{pmatrix}$$

Тогда последнее уравнение можно записать в следующем виде:

$$W_k U_k = 0 \quad \forall k$$

Теорема 6.6. **Пусть существует** $\bar{M}$ **такое что** $m_k \leq \bar{M} \quad \forall k$**. Тогда система (43) с интегральным сенсором слабо наблюдаема** $\Leftrightarrow$ **когда** $rang\ W_k = m_k\ \forall k$**.**

Упражнение 14. *Сформулировать и доказать аналогичную теорему для векторного точечного сенсора.*

6.1.5 Исследование наблюдаемости систем с движущимся точечным сенсором

Рассмотрим движущийся точечный сенсор:

$$y(t) = u(x(t), t) + \xi \qquad \mathcal{Y} = C[t_0, T] \tag{44}$$

Принцип максимума (для уравнения теплопроводности)

$$u(x,T) \le \max_{\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3} |u(x,t)|$$

Где γ_1 – траектория сенсора, удовлетворяющая некоторым требованиям гладкости, проходящая

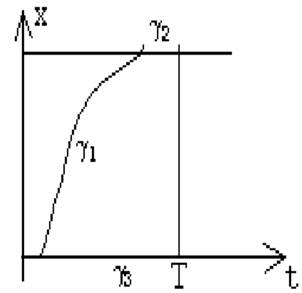

Рис. 2: Траектория сенсора

весь отрезок по x.

Теорема 6.7. Если $x(t)$ — гладкая на $0 < t_0 \le t \le t_1 < T$ кривая, проходящая весь отрезок, то система (38),(44) сильно наблюдаема.

Доказательство. По принципу максимума

$$\max |u(x,T)| \le \max_{\gamma_1} |u(x,t)| = \max_{[t_0,t_1]} |u(x(t),t)| = \max_{[t_0,t_1]} |y-\xi| \le \|y\| + \|\xi\|.$$

ч.т.д..

Теперь рассмотрим движущийся сенсор в R^n, $n \le 3$, и систему

$$\begin{cases} u_t = \Delta u & x \in \Omega \subset R^n \\ u|_{\partial\Omega} = 0 & \partial\Omega \in C^2 \\ u(x,0) - ? \end{cases} \tag{45}$$

$$y = u(\bar{x}(t),t) + \xi, \tag{46}$$

где функция $\bar{x}(t)$ кусочно-непрерывна на $[\Delta, T]$, и ограничение

$$\|\xi\|_{C(\Delta,T)} \le \mu. \tag{47}$$

Пространство $C(\bar{\Omega}\times[\Delta,T])$ сепарабельно. Следовательно, $\forall\varepsilon > 0$ в этом пространстве существует счетная ε-сеть. Напомним определение:

Определение. Система $\{\varphi_i^\varepsilon\}_{i=1}^\infty$ образует счетную ε-сеть в пространстве $\mathcal{Y}$, если $\forall y \in \mathcal{Y}$ существует номер $i^*: \ \|\varphi_{i^*}^\varepsilon - y\|_\mathcal{Y} \le \varepsilon$.

Итак, существует система $\{u_i^\varepsilon(x,t)\}_{i=1}^\infty \subset C(\bar\Omega \times [\Delta, T])$. Рассмотрим последовательность $\{t_k\}_1^\infty: \ \forall k \ \Delta \le t_1 < t_2 < \dots < t_k < T$. В силу монотонности последовательности существует $\bar T = \lim\limits_{k\to\infty} t_k$. Рассмотрим точки

$$x_i \in Arg \max_{\bar\Omega} |u_i^\varepsilon(x, t_i)| \tag{48}$$

Построим траекторию $\bar x(t)$, которая в момент времени t_i проходит через точку $x_i, \ i = 1\dots\infty$, и непрерывна на $[\Delta, \bar T) \cup (\bar T, T]$.

Теорема 6.8. При такой траектории $\bar x(t)$ система (45)-(47) сильно наблюдаема.

Доказательство. Докажем ограниченность информационного множества

$$U(y,T) = \{\hat u | \ \exists u_0 \in L_2(\Omega): \ u(x,t) \text{ - решение (45)}, \ \hat u = u(x,T), \|y(\cdot) - u(\bar x(\cdot), \cdot)\|_C \le \mu\}$$

По определению ε-сети

$$\exists i_*: \|u_{i^*}^\varepsilon(x,t) - u(x,t)\|_{C(\bar\Omega \times [\Delta, T])} \le \varepsilon \tag{49}$$

Теперь, используя принцип максимума, можно записать следующую цепочку неравенств:

$$\begin{aligned}|u(x,T)| &\le \max_{\bar\Omega} |u(x, t_{i^*})| \le \{\text{в силу (49)}\} \le \max_{\bar\Omega} |u_{i^*}^\varepsilon(x, t_{i^*})| + \varepsilon = \\ &= \{\text{в силу (48)}\} = |u_{i^*}^\varepsilon(x_{i^*}, t_{i^*})| + \varepsilon \le \{\text{из определения } \varepsilon\text{-сети}\} \le \\ &\le |u(x_{i^*}, t_{i^*})| + 2\varepsilon = \{\text{из (46)}\} = |y(t_{i^*}) - \xi(t_{i^*})| + 2\varepsilon \le \|y\|_{C(\bar\Omega \times [\Delta, T])} + \mu + 2\varepsilon\end{aligned}$$

Следовательно, информационное множество ограничено, и система является сильно наблюдаемой.

6.2 Управляемость систем с распределенными параметрами

6.2.1 Двойственность управляемости и наблюдаемости

Для формулировки задачи управляемости, двойственной к рассмотренной задаче наблюдаемости, введем новые обозначения. Обозначим за $S(t)$ оператор, переводящий $u_0 \in L_2(\Omega)$ в решение задачи (45):

$$S(t): \ u_0 \mapsto u(\cdot, t; u_0) \qquad S(0) = \mathcal{E} \qquad S(t) \in \mathcal{L}(L_2(\Omega), L_2(\Omega))$$

Операторы $S(t)$ образуют сильно непрерывную полугруппу, т.е. они непрерывны по t в сильной топологии и $S(t_1 + t_2) = S(t_1)S(t_2)$. Также обозначим

$$\mathcal{K} = \mathbf{G}S(\cdot) \in \mathcal{L}(L_2(\Omega), \mathcal{Y}) \ \Rightarrow \ \mathcal{K}u_0 = y(\cdot)$$

В терминах оператора $\mathcal{K}$ можно переписать некоторые данные в 6.1.2 определения.

Теорема 6.9. **Слабая наблюдаемость** $\Leftrightarrow \operatorname{Ker}\mathcal{K} = \{0\} \Leftrightarrow \overline{\operatorname{Im}\mathcal{K}^*} = \mathcal{Y}$.

Определение. Пусть $\mathcal{P}$ - гильбертово, $P \subseteq \mathcal{P}$. Опорной функцией к множеству P в направлении l называется следующая функция:

$$\rho(l|P) = \sup_{p\in P} < l, p >, \qquad l \in \mathcal{P}$$

Теорема 6.10. **Система сильно наблюдаема** $\Leftrightarrow \rho(l|U[T,y]) < \infty, \forall l \in L_2(\Omega)$.

Доказательство. Напомним, что система называется сильно наблюдаемой, если информационное множество $U[T,y]$ ограничено. Здесь

$$U[T,y] = \{\hat{u}|\ \exists u_0 \in L_2(\Omega):\ \hat{u} = S(T)u_0,\ \|y - \mathcal{K}u_0\| \le \mu\}$$

Множество ограничено $\Leftrightarrow$ его опорная функция ограничена $\forall l$ (по теореме Банаха-Штейнгауза из курса функционального анализа).

Исследуем теперь эту опорную функцию:

$$\begin{aligned}\rho(l|U[T,y]) &= \sup_{u_0\in\Omega}\{< l, S(T)u_0 > |\ \|y - \mathcal{K}u_0\| \le \mu\} = \\ &= \sup_{u_0}\{< S^*(T)l, u_0 > |\ \|y - \mathcal{K}u_0\| \le \mu\} = \rho(S^*(T)l|U[0,y])\end{aligned}$$

Теорема 6.11. **Система сильно наблюдаема** $\Leftrightarrow \forall l \in L_2(\Omega)\ \exists\lambda \in \mathcal{Y}^*:$
$\mathcal{K}^*\lambda = S^*(T)l$

Доказательство. Поясним сформулированную только что теорему. Имеем:

$$\rho(l|U[T,y]) = \sup_{u_0\in\Omega}\{< S^*(T)l, u_0 > |\ \|y - \mathcal{K}u_0\| \le \mu\}$$

Так как $\|\mathcal{K}u_0\| \le \mu + \|y\|$, ограниченность $U[T,0]$ равносильна ограниченности $U[T,y]$. Допустим, что существует такое $\lambda \in \mathcal{Y}^*$, что $\mathcal{K}^*\lambda = S^*(T)l$. Тогда $< S^*(T)l, u_0 >=< \mathcal{K}^*\lambda, u_0 >=< \lambda, \mathcal{K}u_0 >$. Оказывается, что

$$\rho(l|U[T,0]) = \sup_{u_0}\{< S^*(T)l, u_0 > |\ \|\mathcal{K}u_0\| \le \mu\} = \inf_{\lambda\in\mathcal{Y}^*}\{\mu\|\lambda\|\ |\ \mathcal{K}^*\lambda = S^*(T)l\} \qquad (50)$$

Упражнение 15. *Покажите самостоятельно, что в (50)* $\sup \le \inf$.

Понятно, что $\rho(l|U[T,0]) < \infty \Leftrightarrow$ инфимум в (50) ограничен. А это верно в том случае, если

$$\exists\lambda \in \mathcal{Y}^*: \mathcal{K}^*\lambda = S^*(T)l \qquad (51)$$

Если рассматривать λ как управление, оказывается, что задача нахождения λ (51) есть задача управляемости, эквивалентная задаче наблюдаемости

$$\begin{cases} u_t = \Delta u & x \in \Omega \subset R^n \\ u|_{\partial\Omega} = 0 & \partial\Omega \in C^2 \\ u(x,0) - ? \end{cases} \tag{52}$$

$$y = \mathbf{G}u(\cdot,\cdot) + \xi \tag{53}$$

$$\|\xi\|_{\mathcal{Y}} \leq \mu. \tag{54}$$

Пример. Рассмотрим задачу (52)-(54) с $n = 1, \Omega = (0, l), \mathbf{G}u(\cdot,\cdot) = \int\limits_0^l w(x)u(x,t)dx$ (интегральный сенсор) и $\mathcal{Y} = L_2(0,T)$. Найдем $\mathcal{K}^*$. Используя представление (37), имеем:

$$\mathcal{K}u_0 = \int\limits_\Omega \omega(x)S(t)u_0dx = \int\limits_\Omega \omega(x)\sum_{i=1}^\infty e^{-\lambda_i t}\varphi_i(x)u_0^i dx = \sum_{i=1}^\infty e^{-\lambda_i t}\omega_i u_0^i$$

Здесь ω_i — коэффициенты Фурье функции $\omega(x) \in L_2(0,l)$. Теперь для вычисления $\mathcal{K}^*$ необходимо рассмотреть скалярное произведение $< \mathcal{K}u_0, \lambda >$ и свести его к виду $< u_0,\ \ldots\ \lambda >$.

$$< \mathcal{K}u_0, \lambda > = < \sum_{i=1}^\infty e^{-\lambda_i t}\omega_i u_0^i, \lambda >_{L_2(0,T)} = \sum_{i=1}^\infty u_0^i \left\{ w_i \int\limits_0^T e^{-\lambda_i t}\lambda(t)\,dt \right\} =$$
$$= < u_0, \sum_{i=1}^\infty \varphi_i(x) w_i \int\limits_0^T e^{-\lambda_i t}\lambda(t)\,dt > .$$

Отсюда $K^*\lambda(\cdot) = \sum\limits_{i=1}^\infty \varphi_i(x) w_i \int\limits_0^T e^{-\lambda_i t}\lambda(t)\,dt.$

Мы воспользовались тем, что, если $u_1 = \sum \varphi_i u_1^i$ и $u_2 = \sum \varphi_i u_2^i$, то $< u_1, u_2 >= \sum u_1^i u_2^i$.

Если сформулировать следующую задачу управления:

$$\begin{cases} v_t = -v_{xx} + w(x)\lambda(t) & 0 < x < l,\ 0 < t \leq T \\ v(0,t) = v(l,t) = 0 & 0 < t \leq T \\ v(x,T) = 0;\ v(x,0) = S^*(T)l \end{cases} \tag{55}$$

где $\lambda(\cdot) \in L_2(0,l)$ — допустимые управления, а цель — привести систему в обратном времени из точки 0 в точку $S^*(T)l$, то $v(x,0)$ как раз равно $\mathcal{K}^*\lambda(\cdot)$. Таким образом, задача об управляемости системы (55) эквивалентна разрешимости уравнения $\mathcal{K}^*\lambda = S^*(T)l$, что в свою очередь эквивалентно сильной наблюдаемости системы (52)-(54) с интегральным сенсором.

6.2.2 Связь между различными видами управляемости и наблюдаемости

Используя приведенные в предыдущем параграфе рассуждения, легко доказать следующую теорему:

Теорема 6.12.

$$\left\{ \begin{array}{c} \textbf{Сильная} \\ \textbf{наблюдаемость} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \exists\lambda(\cdot) \in \mathcal{Y}^* : \\ \mathcal{K}^*\lambda = S^*(T)l \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} S^*(T)\{L_2(\Omega)\} \subset \operatorname{Im}\mathcal{K}^* \\ \textbf{(сильная управляемость)} \end{array} \right\}$$

Определение. Если $\forall\varphi \in L_2(\Omega),\ \forall\varepsilon > 0\ \exists\varphi_\varepsilon(\varphi) \in O_\varepsilon(\varphi)$, такое, что $\exists\lambda_\varepsilon(\cdot) : \mathcal{K}^*\lambda_e = \varphi_\varepsilon$, система управления

$$\mathcal{K}^*\lambda = S^*(T)l \tag{56}$$

называется **аппроксимативно управляемой**.

Так как слабая наблюдаемость $\Leftrightarrow \overline{\operatorname{Im}\mathcal{K}^*} = L_2(\Omega) \Leftrightarrow \forall\varphi\ \forall\varepsilon\ \exists\varphi_\varepsilon \in O_\varepsilon(\varphi)$, такой что $\exists\lambda_\varepsilon$: $K^*\lambda_e = \varphi_\varepsilon$, верна следующая теорема:

Теорема 6.13. Слабая наблюдаемость системы (52)-(54) $\Leftrightarrow$ аппроксимативной управляемости (56).

Теорема 6.14. Слабая наблюдаемость (52)-(54)
$\Leftrightarrow \nexists u_0 \neq 0 :\ \forall\alpha \in R^1\ \alpha u_0 \in U[0,0]$
$\Leftrightarrow \nexists u \neq 0 :\ \forall\alpha \in R^1\ \alpha u \in U[T,0]$ Заметим, что в случае $\alpha u \notin U[T,0]$ тем не менее возможно, что $\alpha u \in \overline{U[T,0]}$.

Упражнение 16. *Докажите теорему самостоятельно, используя, что* $U[0,0] = \{u_0 |\ \|\mathcal{K}u_0\| \leq \mu\}$.

Определение. Система (52)-(54) **ε-наблюдаема**, если $\forall y\ \forall l \in L_2\ \forall\varepsilon > 0\ \exists l_\varepsilon \in O_\varepsilon(l) : \rho(l_\varepsilon | U[T,y]) < \infty$.

Теорема 6.15. Система ε-наблюдаема $\Leftrightarrow \nexists u \neq 0 : \forall\alpha \in R^1\ \alpha u \in \overline{U[T,0]}$

Без доказательства

Замечание. Сильная наблюдаемость $\Rightarrow$ ε-наблюдаемость $\Rightarrow$ слабая наблюдаемость

Докажем, что из слабой наблюдаемости не следует ε-наблюдаемости.

Пример. Рассмотрим систему

$$\begin{cases} u_t = u_{xx}, \qquad 0 < x < \pi, \quad 0 < t \le T \\ u(0,t) = 0;\ u(\pi,t) = 0 \\ u(x,0) = u_0(x) - ? \end{cases} \tag{57}$$

$$y = y(t) = \int\limits_0^\pi g(x,t)u(x,t)\,dx, \quad 0 < \Delta \le t \le T \tag{58}$$

где функция $g(x,t)$ имеет вид:

$$g(x,t) = \varphi_1(x)e^{-\lambda_1 T} + \sum_{k=2}^\infty \varphi_k(x)\, e^{-\lambda_k(T-t)} \left\{ e^{-\lambda_k t} - \frac{k}{k-1} e^{-\lambda_{k-1} t} \right\} \in L_2([0,l]\times[\Delta,T])$$

1. Система (57)-(58) слабо наблюдаема:

$$\begin{aligned} 0 \quad &= y(t) = G(t)S(t)u_0 = \int\limits_0^\pi g(x,t) \left\{ \sum_{k=1}^\infty \varphi_k(x) e^{-\lambda_k t} u_0^k \right\} dx = e^{-\lambda_1 T - \lambda_1 t} u_0^1 + \\ &+ \sum_{k=2}^\infty e^{-\lambda_k(T-t)} \{ e^{-\lambda_k t} e^{-\lambda_k t} u_0^k \} - \sum_{k=2}^\infty \tfrac{k}{k-1} e^{-\lambda_k(T-t)} e^{-\lambda_{k-1} t} e^{-\lambda_k T} u_0^k = \\ &= e^{-\lambda_1 T - \lambda_1 t} u_0^1 + + \sum_{k=2}^\infty e^{-\lambda_k T - \lambda_k t} u_0^k - \sum_{k'=1}^\infty \tfrac{k'+1}{k'} e^{-\lambda_{k'+1} T - \lambda_{k'} t} u_0^{k'+1} = \\ &= \sum_{k=1}^\infty e^{-\lambda_k t} \{ e^{-\lambda_k T} u_0^k - \tfrac{k+1}{k} e^{-\lambda_{k+1} T} u_0^{k'+1} \} = 0 \end{aligned}$$

Мы получили тождество вида $\sum e^{-\lambda_i t} p_i \equiv 0$, где p_i — некоторые константы. Используя переход в комплексную плоскость и проведя рассуждения, аналогичные использованным при доказательстве слабой наблюдаемости системы с точечным сенсором в одномерном пространстве (с. 33), получаем: $p_i = 0\ \forall i$, то есть:

$$u_0^k e^{-\lambda_k T} = \frac{k+1}{k} u_0^{k+1} e^{-\lambda_{k+1} T} \qquad k = 1, 2, \ldots$$

Отсюда следует слабая наблюдаемость системы, так как:
Если $u_0^1 = 0 \Rightarrow u_0^i = 0 \quad \forall i$
Если $u_0^1 \neq 0 \Rightarrow |u_0^{k+1}| >= |u_0^k| \quad \forall k \ \Rightarrow$ ряд $\sum (u_0^k)^2$ расходится.

2. Система (57)-(58) не является ε-наблюдаемой.

Для доказательства воспользуемся критерием: система не является ε-наблюдаемой $\Leftrightarrow \exists u :$ $\forall \alpha \in R^1\ \alpha u \in \overline{U[T,0]}$ Докажем, что

$$\exists u^{(N)} \in U[0,T] : u^{(N)} \to \sqrt[4]{N} \hat{u}$$

(т.к. множество выпукло, то достаточно доказать для таких α). Рассмотрим

$$\hat{u} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}\varphi_k(x) \in L_2(0,\pi) \qquad u^{(N)} = \sqrt[4]{N}\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k}\varphi_k(\cdot)$$

Легко показать, что $\|u^{(N)} - \sqrt[4]{N}\hat{u}\| \to 0$ при $N \to \infty$:

$$\|u^{(N)} - \sqrt[4]{N}\hat{u}\| = \sqrt[4]{N}\left\|\sum_{N+1}^{\infty} \frac{1}{k}\varphi_k(\cdot)\right\| = \sqrt[4]{N}\sum_{N+1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \to 0$$

Докажем, что $u^{(N)} \in U[T,0] = \{\hat{u} = S(T)u_0 |\ \|\mathcal{K}u_0\| \le \mu\}$. Для этого достаточно показать, что существуют соответствующие функциям $u^{(N)}$ начальные условия $u_0^{(N)}$, такие, что $\|\mathcal{K}u_0\| \le \mu$:

$$u_0^{(N)} = \sqrt[4]{N}\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k}e^{\lambda_k T}\varphi_k(x) \mapsto u^{(N)} :$$

$$\begin{aligned}\mathcal{K}u_0^{(N)} &= \sqrt[4]{N}\Big(e^{-\lambda_1 T - \lambda_1 t}e^{\lambda_1 T} + \textstyle\sum\limits_{k=2}^{N} e^{-\lambda_k T - \lambda_k t + \lambda_k T}\frac{1}{k} - \\ &- \textstyle\sum\limits_{k=1}^{N-1} \frac{k+1}{k}e^{-\lambda_{k+1}T - \lambda_{k+1}t + \lambda_{k+1}T}\frac{1}{k+1}\Big) = \sqrt[4]{N}\Big(\textstyle\sum\limits_{k=1}^{N} \frac{1}{k}e^{-\lambda_k t} - \textstyle\sum\limits_{k=1}^{N-1} \frac{1}{k}e^{-\lambda_k t}\Big) = \\ &= \sqrt[4]{N}\tfrac{1}{N}e^{-\lambda_N t}\end{aligned}$$

Таким образом, $\exists \mu :\ \|\mathcal{K}u_0^{(N)}\| \le \mu\ \forall N$ ч.т.д..

7 Идентификация параметров задачи

7.1 Задача идентификации источника загрязнения

Рассмотрим одномерное уравнение переноса с известными начальными данными и неизвестным источником загрязнения:

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + F(x,t) & 0 < x < l \quad 0 < t \le T \\ u(0,t) = u(l,t) = 0 & 0 < t \le T \\ u(x,0) = 0 \text{ — задано} \end{cases} \tag{59}$$

Часто правая часть имеет вид $F(x,t) = f(x) * Q(t)$, где одна из функций $f(\cdot) \in L_2(0,l)$, $Q(\cdot) \in L_2(0,T)$ задана, а вторая — неизвестна, и требуется ее идентифицировать. Для примера рассмотрим наблюдение с помощью точечного сенсора:

$$y(t) = u(\overline{x}, t) \qquad 0 \le t \le T \tag{60}$$

7.1.1 Задача 1: $f(\cdot)$ задана, $Q(\cdot)$ — ?

Так как $u_0 = 0$, наблюдение имеет вид

$$y(t) = \int_0^t \sum_{i=1}^{\infty} e^{-\lambda_i(t-\tau)} Q(\tau) d\tau f_i \varphi_i(\overline{x}) dt \tag{61}$$

Покажем, что $\forall t \geq 0$ функция $u(x,t)$ непрерывна по x и t. При $t = 0$ u_0 непрерывна. При $t > 0$ имеет место

$$\begin{aligned}
u(x,t) = & \sum_{i=1}^{\infty} \int_0^t e^{-\lambda_i(t-\tau)} Q(\tau) d\tau \cdot f_i \cdot \varphi_i(x) \\
|u(x,t)| \leq & \sum_{i=1}^{\infty} \int_0^t e^{-\lambda_i(t-\tau)} |Q(\tau)| d\tau \cdot |f_i| \cdot \sqrt{\tfrac{2}{l}} \leq \\
\leq & \sqrt{\tfrac{2}{l}} * \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} f_i^2} * \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} (\int_0^t e^{-\lambda_i(t-\tau)} |Q(\tau)| d\tau)^2} \leq \\
\leq & \sqrt{\tfrac{2}{l}} ||f|| \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} \int_0^t e^{-2\lambda_i(t-\tau)} d\tau \cdot \int_0^t Q^2(\tau) d\tau} \leq \\
\leq & \sqrt{\tfrac{2}{l}} ||f|| \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} \tfrac{1}{\lambda_i}} \cdot ||Q(\cdot)||_{L_2[0,T]} < \infty
\end{aligned}$$

Значит, $u(x,t)$ равномерно непрерывна как сумма непрерывных функций. Таким образом, $y(t)$ непрерывна. Уравнение (61) является уравнением Вольтерра 1 рода:

$$\int_0^t K(t,\tau) Q(\tau) d\tau = y(t), \qquad \text{где} \;\; K(t,\tau) = \sum_{i=1}^{\infty} e^{-\lambda_i(t-\tau)} f_i \varphi_i(\overline{x}). \tag{62}$$

Теорема 7.1. Пусть $f \in C^2[0,l]$, $f(0) = f(l) = 0$, $f''(0) = f''(l) = 0$, $f(\overline{x}) \neq 0$. Тогда решение уравнения (62) единственно в классе $C[0,l]$.

Доказательство. Для доказательства единственности рассмотрим уравнение (62) с однородной правой частью. При заданных ограничениях на функцию f ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \lambda_i^2 f_i^2$ сходится, следовательно, и $K(t,\tau)$, и $K_t(t,\tau)$ непрерывны в области $0 \leq \tau \leq t \leq T$. Продифференцируем уравнение (62) по t при $y = 0$:

$$K(t,t)Q(t) + \int_0^t K_t(t,\tau) Q(\tau) d\tau = 0, \qquad K(t,t) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k \varphi_k(\overline{x}) = f(\overline{x}) \neq 0$$

Здесь ряд для $K(t,t)$ сходится в силу непрерывности f. Мы получили уравнение Вольтерра 2 рода с непрерывным ядром, следовательно, решение в $C[0,l]$ существует и единственно ([1]).

Пример. Допустим, $\overline{x} = l/2$, а $f(x) = -f(l-x)$ (четная относительно оси $x = l/2$). Тогда $K(t,\tau) \equiv 0$ и любая $Q(t)$ удовлетворяет уравнению.

7.1.2 Задача 2: $Q(\cdot)$ задана, $f(\cdot)$ — ?

Итак, требуется найти $f(x)$. Докажем, что, если уравнение наблюдения имеет вид (60), удовлетворяющая ему функция $f(\cdot)$ единственна. Для этого рассмотрим случай $y(t) \equiv 0$ и докажем, что ему соответствует только $f \equiv 0$. Наблюдение равно

$$\begin{aligned} y(t) = & \sum_{i=1}^{\infty} \int_0^t e^{-\lambda_i(t-\tau)} Q(\tau) d\tau \cdot f_i \varphi_i(\overline{x}) = \\ = & \sum_{i=1}^{\infty} \psi_i(t) \cdot f_i \varphi_i(\overline{x}) = 0 \end{aligned}$$

Необходимо, чтобы это уравнение имело только тривиальное решение. Рассмотрим частный случай: $Q(t) \equiv Q$, $\varphi_i(\overline{x}) \neq 0 \ \forall i$. Тогда можно вычислить функции ψ_i:

$$\begin{aligned} 0 = & \sum_{i=1}^{\infty} Q e^{-\lambda_i t} \frac{e^{\lambda_i t} - 1}{\lambda_i} f_i \varphi_i(\overline{x}) = \\ = & \ e^{0t} \sum_{i=1}^{\infty} Q \frac{1}{\lambda_i} f_i \varphi_i(\overline{x}) - \sum_{i=1}^{\infty} e^{-\lambda_i t} Q \frac{1}{\lambda_i} f_i \varphi_i(\overline{x}) = 0 \end{aligned}$$

Применяя прием перехода в комплексную плоскость и обратно (см. доказательство наблюдаемости системы с точечным сенсором), легко доказать следующую теорему:

Теорема 7.2. Пусть интенсивность $Q(t) \equiv Q$, и точка $\overline{x}$ такова, что $\varphi_i(\overline{x}) \neq 0 \ \forall i$. Тогда задача (59)-(60) идентификации функции $f(x)$ имеет единственно решение.

7.2 Задача идентификации коэффициента атмосферной диффузии

Рассмотрим уравнение атмосферной диффузии с источником загрязнения интенсивности $Q(t)$, расположенном в точке $P = P_0$ где $P = P(x,y,z)$.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \mu \Delta u - \operatorname{div}(uv) + Q(t)\delta(P - P_0) \tag{63}$$

В окрестности точки P_0 диффузия примеси описывается уравнением (63). Однако вдали от источника загрязнения его влияние ослабевает, зато усиливается влияние посторонних примесей, которые взаимодействуют с нашей примесью. При $v \equiv 0$, если рассматривать задачу в области $0 < x < \infty$, изменение концентрации аэрозоли более точно описывает уравнение (64):

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \int_0^T d\tau \int_0^\infty d\alpha \ K(t,x,\tau,\alpha) u(\tau,\alpha) \tag{64}$$

Здесь функция $K(t, x, \tau, \alpha)$ отвечает за химическое взаимодействие частиц.

Нас интересует коэффициент диффузии μ. Мы будем его оценивать на основе наблюдений. Наблюдения проводятся следующим образом:

$$y_i^{(j)} = u(t^{(j)}, x_i) + \xi_i^{(j)} \qquad i = 1..M \; j = 1..K \tag{65}$$

Необходимо вычислить, какое значение μ обеспечит минимум функционала $J(\mu, y)$:

$$J(\mu) = \sum_{i=1}^{M} \sum_{j=1}^{K} \left(u(t^{(j)}, x_i) - y_i^{(j)} \right)^2 \tag{66}$$

Уравнение наблюдения (65) и функционал (66) можно обобщить следующим образом: будем искать коэффициент диффузии, минимизирующий функционал

$$J(\mu) = \int_0^T \int_0^\infty (u(t, x) - y(t, x))^2 R(t, x) dx dt \tag{67}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \int_0^T d\tau \int_0^\infty d\alpha \; K(t, x, \tau, \alpha) u(\tau, \alpha) \quad x > 0 \\ u|_{x=0} = 0 \\ u \to 0 \text{ при } x \to \infty \\ u|_{t=0} = u_0(x) \end{cases} \tag{68}$$

Для того, чтобы решить поставленную задачу, предположим, что искомый коэффициент диффузии равен $\mu_0 > 0$, и произведем его вариацию: $\mu = \mu_0 + \delta\mu$. Новому значению μ соответствует новое значение концентрации $u(t, x) = u_0(t, x) + \delta u(t, x)$. Тогда уравнение (68) примет вид:

$$\frac{\partial}{\partial t}\{u_0 + \delta u\} = \{\mu_0 + \delta\mu\} \frac{\partial^2}{\partial x^2}\{u_0 + \delta u\} + \int_0^T d\tau \int_0^\infty d\alpha \; K(t, x, \tau, \alpha)\{u_0 + \delta u\}$$

С учетом уравнения на μ_0 и u_0 имеем:

$$\begin{cases} \frac{\partial \delta u}{\partial t} = \frac{\partial^2 \delta u}{\partial x^2}\{\mu_0 + \delta\mu\} + \delta\mu \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + \int_0^T d\tau \int_0^\infty d\alpha \; K(t, x, \tau, \alpha) \delta u(\tau, \alpha) \\ \delta u|_{t=0} = 0 \qquad \delta u|_{x=0} = 0 \qquad \delta u \to 0 \text{ при } x \to \infty \end{cases} \tag{69}$$

Для функционала J имеем

$$J(\mu_0 + \delta\mu) - J(\mu_0) = \int_0^T dt \int_0^\infty dx \; 2R(t, x)(u_0(t, x) - y(t, x)) \delta u(t, x) + \int_0^T dt \int_0^\infty dx \; R(t, x)(\delta u(t, x))^2 \tag{70}$$

Рассмотрим уравнение, сопряженное к (68):

$$\begin{cases} \frac{\partial p}{\partial t} = -\mu_0 \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \int\limits_0^T d\tau \int\limits_0^\infty d\alpha\, K(\tau,\alpha,t,x) p(\tau,\alpha) + 2R(t,x)(u_0(t,x) - y(t,x)) \quad x > 0 \\ p(x,T) = 0 \qquad p(0,t) = 0 \qquad p(x,t) \to 0 \text{ при } x \to \infty \end{cases} \tag{71}$$

Тогда если умножить уравнение (69) на решение сопряженного уравнения (71) и проинтегрировать, имеем

$$0 = \int\limits_0^T dt \int\limits_0^\infty dx\, p(t,x) \Big\{ \frac{\partial \delta u}{\partial t} - \frac{\partial^2 \delta u}{\partial x^2}\mu_0 - \frac{\partial^2 \delta u}{\partial x^2}\delta\mu - \delta\mu \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} - \int\limits_0^T d\tau \int\limits_0^\infty d\alpha\, K(t,x,\tau,\alpha)\delta u(\tau,\alpha) \Big\} =$$
$$= -\delta\mu \int\limits_0^T dt \int\limits_0^\infty dx\, p \frac{\partial^2}{\partial x^2}\delta u - \delta\mu \int\limits_0^T dt \int\limits_0^\infty dx\, p \frac{\partial^2}{\partial x^2} u_0 - 2\int\limits_0^T dt \int\limits_0^\infty dx\, R(t,x)\{u_0(t,x) - y(t,x)\}\delta u$$

Необходимо, чтобы вариация функционала была положительна. Используем полученное нами равенство, подставив его в выражение (70) для вариации J:

$$\delta J(\mu_0) = -\delta\mu \int\limits_0^T dt \int\limits_0^\infty dx p \frac{\partial^2}{\partial x^2}\delta u - \delta\mu \int\limits_0^T dt \int\limits_0^\infty dx\, p \frac{\partial^2}{\partial x^2} u_0 - \int\limits_0^T dt \int\limits_0^\infty dx R(t,x)(\delta u(t,x))^2 \geq 0$$

Первый и третий член имеют второй порядок малости. Необходима положительность второго члена для любой достаточно малой вариации μ. Так как $\delta\mu$ может иметь любой знак,

Теорема 7.3. Пусть $\mu_0 \neq 0$ доставляет минимум функционалу J (66) $\Rightarrow \int\limits_0^T dt \int\limits_0^\infty dx p \frac{\partial^2}{\partial x^2} u_0 = 0$.

8 Проблема регуляризации задачи наблюдения

8.1 Регуляризация на фиксированном временном промежутке

8.1.1 Постановка задачи и основные определения

Итак, мы рассматриваем следующую задачу:

$$\begin{cases} u_t = \Delta u, \quad x \in \Omega,\ 0 < t \leq T \\ u|_{\partial\Omega} = 0 \\ u|_{t=0} = u_0 \end{cases} \tag{72}$$

$$y = \mathbf{G}u(\cdot,\cdot;u_0) + \xi \qquad y,\xi \in \mathcal{Y} \tag{73}$$

$$||\xi||_{\mathcal{Y}} \le \mu \tag{74}$$

Как было отмечено в параграфе 6.1.2, при всех рассмотренных операторах наблюдения множество $U[0,y]$ оказывается неограниченным. Это обусловлено характером параболического уравнения. В силу сглаживания решения прямой задачи при разрешении обратной задачи малые помехи приводят к большим вариациям оцениваемого начального состояния.

Пусть информационное множество $U[0,y]$ неограничено. Тогда поставим следующую задачу:

(P) Требуется найти хотя бы один элемент $u_0 \in U[0,y]$ то есть $u_0 : (72) - (74)$

Итак, требуется найти $u_0 : \|y - \mathbf{G}u(\cdot,\cdot;u_0)\| \le \mu$. Эта задача также является некорректно поставленной, следовательно, необходима ее регуляризация.

Рассмотрим линейный оператор $\mathcal{R}_\varepsilon \in L(\mathcal{Y}, L_2(\Omega))$, непрерывно зависящий от ε в смысле операторной нормы.

В качестве решения задачи (P) будем рассматривать $u_0 = \mathcal{R}_\varepsilon(y)$.

Определение. Функционал $\mathcal{R}_\varepsilon$ **регуляризует** (P) **по функционалу**, если для любого зафиксированного $\hat{u}_0$ $\exists \varepsilon_0 : \forall\ 0 < \varepsilon \le \varepsilon_0 \Rightarrow \mathcal{R}_\varepsilon(y) \in U[0,y]$.

Определение. Функционал $\mathcal{R}_\varepsilon$ **регуляризует** (P) **по аргументу**, если для любого зафиксированного $\hat{u}_0$ существует функция $\varepsilon(\mu)$: при $\mu \to 0,\ \varepsilon(\mu) \to 0$, если измерения производятся в соответствии с уравнением $y_\mu = \mathbf{G}u(\cdot,\cdot;\hat{u}_0) + \xi, ||\xi||_{\mathcal{Y}} \le \mu$, то $\mathcal{R}_\varepsilon(y) \to \hat{u}_0$.

Приведем пример регуляризатора.

Метод регуляризации Тихонова:

$$\mathcal{R}_\varepsilon^T(y) = \underset{u_0 \in L_2(\Omega)}{\operatorname{argmin}} \{\varepsilon^2 ||u_0||^2_{L_2(\Omega)} + ||y - \mathbf{G}u(\cdot,\cdot,u_0)||^2_{\mathcal{Y}}\}$$

Пример. Посмотрим, чему равен регуляризатор Тихонова в случае финального наблюдения: $y = S(T)u_0 + \xi$ т.е. $\mathbf{G}u(\cdot,\cdot) = u(\cdot,T)$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \mathcal{R}_\varepsilon^T &= \operatorname{argmin}\{\varepsilon^2 < u_0, u_0 > + < y - S(T)u_0, y - S(T)u_0 >\} = \\ &= \operatorname{argmin}\{< u_0, [\varepsilon^2 \mathcal{E} + S^*(T)S(T)]u_0 > + < y, y > -2 < y, S(T)u_0 >\} \end{aligned}$$

Обозначим $\mathcal{H}_\varepsilon = \varepsilon^2 \mathcal{E} + S^*(T)S(T)$, где $\mathcal{E}$ - единичный оператор.

$$\begin{aligned} \Rightarrow \mathcal{R}_\varepsilon^T &= \operatorname{argmin}\{< u_0 - \mathcal{H}_\varepsilon^{-1} S^*(T)y, \mathcal{H}_\varepsilon[u_0 - \mathcal{H}_\varepsilon^{-1} S^*(T)y] > + \gamma\} = \\ &= \mathcal{H}_\varepsilon^{-1} S^*(T)y \end{aligned}$$

Можно доказать , что при $\mu \to 0$ и $\frac{\ldots}{\mu^2} \to 0$ $\mathcal{R}_\varepsilon^1$ будет регуляризатором по аргументу и по функционалу. При $\varepsilon^2 = 0$ $\mathcal{H}_\varepsilon$ был бы необратим, так как, как мы ранее доказывали, $U[0, y]$ - неограниченное множество.

Пример. Приведем еще один пример регуляризирующего функционала.

Пусть есть некоторый набор коэффициентов Фурье: $(u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots) \in l_2$, который нам неизвестен, зато задан набор приближений этих коэффициентов $(\tilde{u}_1, \tilde{u}_2, \ldots, \tilde{u}_n, \ldots) \in l_2$, причем $\|\tilde{u} - u\|^2 = \sum\limits_{i=1}^{\infty} (\tilde{u}_i - u_i)^2 \leq \delta^2$.

Можно построить приближенное решение: $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \tilde{u}_i \varphi_i(x) = \tilde{u}$. Его норма в L_2 будет отличаться от нормы точного решения $\sum\limits_{i=1}^{\infty} u_i \varphi_i(x) = u$ не более чем на δ. Однако если мы хотим, чтобы u и $\tilde{u}$ были близки по норме C, необходима регуляризация.

Покажем это. Пусть $\tilde{u}_i = u_i + \frac{\varepsilon}{i}$. Это допустимо, так как ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{\varepsilon^2}{i^2} < \infty$. Но по норме в $C(0, \pi)$

$$\|\tilde{u} - u\|_C = \max_{[0,\pi]} |\tilde{u} - u| = \max_{[0,\pi]} |\sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k(x) \frac{\varepsilon}{k}| = \{\varphi_k(x) = \cos kx\} = \varepsilon \max_{[0,\pi]} |\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos kx}{k}| = \infty$$

Таким образом, составленный нами ряд может оказаться как угодно далек от приближаемого по норме в C. Рассмотрим следующий метод регуляризации:

$$\tilde{u} = \sum_{i=1}^{N} \tilde{u}_i \varphi_i(x) \text{ где } N = [\frac{\eta(\delta)}{\delta^2}], \text{ где } \eta(\delta) : \eta(\delta) \to 0 \text{ при } \delta \to 0 \text{ и } \frac{\eta(\delta)}{\delta^2} \to \infty \text{ при } \delta \to 0$$

Тогда

$$\begin{aligned} \|\tilde{u} - u\|_C &= \| \sum_{i=1}^{\infty} u_i \varphi_i - \sum_{i=1}^{N} \tilde{u}_i \varphi_i \|_C \leq \| \sum_{i=1}^{N} (u_i - \tilde{u}_i) \varphi_i \|_C + \| \sum_{i=N+1}^{\infty} u_i \varphi_i \|_C \leq \{\text{Нер-во Коши-Буняковского}\} \\ &\leq \sqrt{\sum_{i=1}^{N} (u_i - \tilde{u}_i)^2} \cdot \max_{[0,\pi]} \sqrt{| \sum_{i=1}^{N} \varphi_i^2(\cdot) |} + \| \sum_{i=N+1}^{\infty} u_i \varphi_i(\cdot) \|_C \leq \delta \sqrt{N} + \| \sum_{i=N+1}^{\infty} u_i \varphi_i(\cdot) \|_C \end{aligned}$$

Если вспомнить теперь, что $N = [\frac{\eta(\delta)}{\delta^2}]$, ясно, что первое слагаемое стремится к 0 по определению $\eta(\cdot)$, а второе слагаемое — в силу сходимости этого ряда в C.

Упражнение 17. *Покажите, где здесь оператор $\mathcal{R}_\varepsilon$, где здесь параметр регуляризации ε и объясните, регуляризирует ли $\mathcal{R}_\varepsilon$ задачу по аргументу.*

8.1.2 Интерпретация регуляризатора Тихонова. Обобщенный регуляризатор

Покажем, что с помощью оператора регуляризации можно решить не только задачу (P) (с. 48), но и задачу нахождения оценки информационного множества $U_\varepsilon[0, y]$. Заменим в задаче (72)-(74) ограничение (74) на ограничение следующего вида:

$$\varepsilon^2||u_0||^2 + ||\xi||^2 \leq \mu^2 + \gamma_\varepsilon^2 \tag{75}$$

где γ_ε выбран достаточно большим, чтобы реальные y, ξ, u_0 из (72)-(74) удовлетворяли (75). Для задачи (72), (73), (75) информационное множество $U_\varepsilon[0, y]$ будет выпукло, ограниченно, замкнуто и будет являться эллипсоидом с центром $u_\varepsilon^* = \mathcal{R}_\varepsilon^T(y) = \mathcal{H}_\varepsilon^{-1}S^*(T)y$:

$$U_\varepsilon[0, y] = \left\{u_0 \Big| < u_0 - u_\varepsilon^*, \mathcal{H}_\varepsilon(u_0 - u_\varepsilon^*) > \leq \mu^2 + \gamma_\varepsilon^2 - < y, y > + < \mathcal{H}_\varepsilon^{-1}S^*(T)y, S^*(T)y > \right\}$$

Таким образом, вместо задачи (P) мы можем решать задачу (P_ε) нахождения $U[0, y]$ для (72), (73), (75).

Перечислим еще несколько методов регуляризации:

1. Метод Квазирешений Иванова
$$\mathcal{R}_\varepsilon^{\text{И}} = \underset{||u_0||_{L_2} \leq \frac{1}{\varepsilon}}{\operatorname{argmin}} \{||y - \mathbf{G}u(\cdot, \cdot; u_0)||_{\mathcal{Y}}\}$$

2. Метод невязки :
$$\mathcal{R}_\varepsilon^{H} = \underset{\|y - \mathbf{G}u(\cdot, \cdot; u_0)\| \leq \varepsilon}{\operatorname{argmin}} \|u_0\|$$

Теорема 8.1.

1) $\mathcal{R}_\varepsilon^T(y) = \mathcal{R}_{\bar{\varepsilon}}^H(y)$ **при** $\bar{\varepsilon} = ||y - \mathbf{G}u(\cdot, \cdot; \mathcal{R}_\varepsilon^T(y))||$**, если** $\min \|u_0\|$ **не достигается внутри шара** $\|y - \mathbf{G}u\| \leq \bar{\varepsilon}$**.**

2) $\mathcal{R}_\varepsilon^T(y) = \mathcal{R}_{\bar{\varepsilon}}^{\text{И}}(y)$ **при** $\bar{\varepsilon} = \|\mathcal{R}_\varepsilon^T(y)\|^{-1}$

Определение. Обобщенным регуляризатором называется оператор

$$\mathcal{R}_\varepsilon(y) = \underset{u_0 \in L_2(\Omega)}{\operatorname{argmin}} \{< u_0, \mathcal{N}_\varepsilon u_0 >_{L_2(\Omega)} + < y - \mathbf{G}u(\cdot, \cdot; u_0), \mathcal{M}_\varepsilon(y - \mathbf{G}u(\cdot, \cdot; u_0)) >_{\mathcal{Y}}\}$$

где

1. $\mathcal{N}_\varepsilon \in \mathcal{L}(L_2(\Omega))$, $\quad \mathcal{M}_\varepsilon \in \mathcal{L}(\mathcal{Y})$

2. $\mathcal{N}_\varepsilon$ и $\mathcal{M}_\varepsilon$ непрерывно зависят от ε в операторной норме

3. $\exists \mathcal{N}_\varepsilon^{-1} \in \mathcal{L}(L_2(\Omega))$

4. $\mathcal{N}_\varepsilon,\ \mathcal{M}_\varepsilon \geq 0$

$\Rightarrow \exists! \mathcal{R}_\varepsilon(y)$ - непрерывный по y $\forall \varepsilon > 0$

Рассмотренные нами $\mathcal{R}_\varepsilon^T(y),\ \mathcal{R}_\varepsilon^{\text{И}},\ \mathcal{R}_\varepsilon^H$ - частные случаи этого функционала:

- Метод Тихонова: $\mathcal{N}_\varepsilon = \varepsilon^2 \mathcal{E},\ \mathcal{M}_\varepsilon = \mathcal{E}_\mathcal{Y}$, где $\mathcal{E}_\mathcal{Y}$ — тождественный оператор в $\mathcal{Y}$.
- Метод невязки: $\mathcal{N}_\varepsilon = \mathcal{E},\ \mathcal{M}_\varepsilon = \beta(\varepsilon)\mathcal{E}_\mathcal{Y}$ где $\beta(\varepsilon)$ равно $\frac{1}{\varepsilon}$
- Метод Иванова: $\inf\limits_{u_0} \|y - \mathbf{G}u(\cdot,\cdot;u_0)\|$ не достигается $\Rightarrow \mathcal{N}_\varepsilon = \alpha(\varepsilon)\mathcal{E},\ \mathcal{M}_\varepsilon = \mathcal{E}_\mathcal{Y}$

Итак, мы рассматриваем обобщенный регуляризатор

$$\mathcal{R}_\varepsilon(y) = \operatorname*{argmin}_{u_0 \in L_2(\Omega)} \Big\{ < u_0, \mathcal{N}_\varepsilon u_0 >_{L_2(\Omega)} + < y - \mathbf{G}u(\cdot,\cdot;u_0), \mathcal{M}_\varepsilon(y - \mathbf{G}u(\cdot,\cdot;u_0)) >_\mathcal{Y} \Big\} \qquad (76)$$

В силу квадратичного характера выражения (76) значение оператора можно вычислить явно:

$$\mathcal{R}_\varepsilon(y(\cdot)) = \left(\mathcal{N}_\varepsilon + \mathcal{K}^*\mathcal{M}_\varepsilon\mathcal{K}\right)^{-1} \mathcal{K}^*\mathcal{M}_\varepsilon y(\cdot) \qquad (77)$$

Пример. Выпишем значение оператора регуляризации (76) для случая “финального наблюдения” в R^1:

$$y(x) = u(x,T) + \xi(x) = \mathcal{K}u_0 + \xi \quad 0 < x < l \qquad \mathcal{Y} = L_2(0,l)$$

Значит, по определению оператора $S(t)$ (см. с. 38)

$$\mathcal{K} = S(T) = \mathcal{K}^* (\text{последнее выполнено так как задача (72) — самосопряженная})$$

Рассмотрим операторы $\mathcal{N}_\varepsilon$ и $\mathcal{M}_\varepsilon$, такие, что

$$\mathcal{N}_\varepsilon u = \sum_{i=1}^{\infty} n_\varepsilon^i u^i \varphi_i(x) \qquad \mathcal{M}_\varepsilon y = \sum_{i=1}^{\infty} m_\varepsilon^i y^i \varphi_i(x)$$

где u^i — коэффициенты элемента $u \in L_2(0,l)$ в разложении Фурье (по аналогии с (37)):

$$u(\cdot) = \sum_{i=1}^{\infty} u^i \varphi_i(\cdot)$$

Тогда результат регуляризации есть

$$\mathcal{R}_\varepsilon(y) = \sum_{i=1}^{\infty}(n_\varepsilon^i + e^{-\lambda_i T} m_\varepsilon^i e^{-\lambda_i T})^{-1} e^{-\lambda_i T} m_\varepsilon^i y^i \varphi_i(x)$$

(Ясно, что если $\mathcal{R}u = \sum\limits_{i=1}^{\infty} r^i u^i \varphi_i(\cdot)$, то $\mathcal{R}^{-1}u = \sum\limits_{i=1}^{\infty} (r^i)^{-1} u^i \varphi_i(\cdot)$.)

Рассмотрим еще один метод регуляризации, состоящий в том, что происходит модификация не ограничения, а самой задачи.

8.1.3 Метод квазиобращения Лионса-Латтеса

В качестве сенсора рассматривается “финальное наблюдение”. Для простоты рассмотрим одномерную задачу с $l = \pi$.

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} & 0 < x < \pi,\ 0 < t \le T \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0 & 0 < t \le T \\ u(x,0) = u_0 & \text{— ?} \\ y = u(x,T) + \xi & \\ \|\xi\|_{L_2(0,\pi)} \le \mu & \end{cases} \tag{78}$$

Заменим ее на задачу в обратном времени

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + \varepsilon u_{xxxx} & 0 < x < \pi,\ 0 < t \le T \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0 & \\ u_{xx}(0,t) = u_{xx}(\pi,t) = 0 & \\ u(x,T) = y(x) & \text{— результат финального наблюдения} \end{cases} \tag{79}$$

и возьмем в качестве значения оператора регуляризации

$$\mathcal{R}_\varepsilon(y) = u(x,0),\ \text{где } u \text{ — решение задачи (79)}$$

Для вычисления $\mathcal{R}_\varepsilon$ необходимо решить (79) в обратном времени.

Будем искать решение в виде

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t)\varphi_k(x) \text{ где } \varphi_k(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin kx$$

Тогда имеем на $u_k(t)$ следующее ОДУ

$$\begin{cases} u_k'(t) = -k^2 u_k(t) + \varepsilon k^4 u_k(t) & 0 < t \le T \\ u_k(T) = y^k & \end{cases}$$

Решением этого линейного уравнения будет функция $u_k(t) = e^{(-k^2+\varepsilon k^4)(t-T)}y^k$, что позволяет выписать решение системы (79):

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} y^k e^{(-k^2+\varepsilon k^4)(t-T)}\varphi_k(x)$$

Отсюда

$$\mathcal{R}_\varepsilon(y) = \sum_{k=1}^{\infty} y_k e^{(k^2-\varepsilon k^4)T}\varphi_k(x) \tag{80}$$

Докажем теперь, что оператор (80) является регуляризатором по аргументу. Рассмотрим

$$y(x) = u(x,T;\hat{u}_0) + \xi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \hat{u}_0^k e^{-k^2T}\varphi_k(x) + \sum_{k=1}^{\infty} \xi^k \varphi_k(x)$$

где $\hat{u}_0$ фиксировано. Докажем, что $\mathcal{R}_\varepsilon(y) \to \hat{u}_0$:

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{R}_\varepsilon - \hat{u}_0\| &= \left\| \sum_{k=1}^{\infty} \hat{u}_0^k e^{-k^2T} e^{(k^2-\varepsilon k^4)T}\varphi_k(\cdot) + \sum_{k=1}^{\infty} \xi^k e^{(k^2-\varepsilon k^4)T}\varphi_k(\cdot) - \sum_{k=1}^{\infty} \hat{u}_0^k \varphi_k(\cdot) \right\|_{L_2(0,\pi)} = \\
&= \left\| \sum_{k=1}^{\infty} (\hat{u}_0^k e^{-\varepsilon k^4 T} - \hat{u}_0^k)\varphi_k(\cdot) + \sum_{k=1}^{\infty} \xi^k e^{(k^2-\varepsilon k^4)T}\varphi_k(\cdot) \right\|_{L_2(0,\pi)} \le \\
&\le \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} (u_0^k)^2 (1-e^{-\varepsilon k^4})^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} (\xi^k)^2 e^{2T(-\varepsilon k^4 + k^2)}}
\end{aligned}$$

Покажем, что оба слагаемых стремятся к 0. Рассмотрим произвольное $\delta > 0$. Покажем, что можно выбрать ε и μ так, что $\|\mathcal{R}_\varepsilon - \hat{u}_0\| < 3\delta$.Так как $\hat{u}_0$ зафиксировано, а $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (\hat{u}_0^k)^2 < \infty$, существует номер $N = N(\delta)$ такой, что $\sum\limits_{k=N+1}^{\infty} (\hat{u}_0^k)^2 < \delta^2$. Тогда $\sum\limits_{k=N+1}^{\infty} (\hat{u}_0^k)^2 (1-e^{-\varepsilon k^4})^2 < \delta^2$, а $\sum\limits_{k=1}^{N} (\hat{u}_0^k)^2 (1-e^{-\varepsilon k^4})^2 \to 0$ при $\varepsilon \to 0$. Значит, можно выбрать ε так, что $\sum\limits_{k=1}^{N}$ тоже меньше δ^2. Итак, имеем:

$$\|\mathcal{R}_\varepsilon - \hat{u}\| < \sqrt{2}\delta + \mu\sqrt{\max_k e^{2(-\varepsilon k^4 + k^2)T}}$$

Вычислим производную функции $f(x) = e^{2(-\varepsilon x^4 + x^2)T}$.

$$\begin{aligned}
&f' = 2Te^{2(-\varepsilon x^4+x^2)T}(-4\varepsilon x^3 + 2x) = 4Te^{2(-\varepsilon x^4+x^2)T}x(-2\varepsilon x^2+1) \to 0 \text{ при } x \to \infty, \\
&f' = 0 \Leftrightarrow x = 0 \quad x = \pm\sqrt{\tfrac{1}{2\varepsilon}}
\end{aligned}$$

Следовательно, $\max\limits_k f(k) \le f(\sqrt{\frac{1}{2\varepsilon}}) = e^{\frac{T}{2\varepsilon}}$. Мы доказали следующую теорему:

Теорема 8.2. При $\mu \to 0,\ \varepsilon \to 0,\ e^{\frac{4}{\varepsilon}}\mu \to 0$ выполнено $\|\mathcal{R}_\varepsilon(y) \to u_0\|$. Следовательно, оператор Лионса-Латтеса является регуляризатором по аргументу.

Проинтерпретируем теперь полученные результаты с помощью введенного ранее обобщенного регуляризатора. Дадим несколько определений.

Рассмотрим следующие задачи:

$$(P)\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} \qquad 0 < x < l,\ 0 < t \le T \\ u(0,t) = u(l,t) = 0 \\ u(x,0) = u_0 \\ y = \mathbf{G}u(\cdot,\cdot;u_0) + \xi \\ \|\xi\|_{\mathcal{Y}} \le \mu \\ \\ u_0 \in U[0,y] \end{cases}$$

$$(P_\varepsilon)\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} \qquad 0 < x < l,\ 0 < t \le T \\ u(0,t) = u(l,t) = 0 \\ u(x,0) = u_0 \\ y = \mathbf{G}u(\cdot,\cdot;u_0) + \xi \\ < u_0, \mathcal{N}_\varepsilon u_0 >_{L_2(\Omega)} + < \xi, \mathcal{M}_\varepsilon \xi >_{\mathcal{Y}} \le \mu^2 + \gamma_\varepsilon \\ \\ u_\varepsilon^* \in U_\varepsilon[0,y] \ \ \text{ищем центр} \\ \mathcal{R}_\varepsilon(y(\cdot)) = u_\varepsilon^* = (\mathcal{N}_\varepsilon + \mathcal{K}^*\mathcal{M}_\varepsilon\mathcal{K})^{-1}\mathcal{K}^*\mathcal{M}_\varepsilon y \end{cases}$$

Это u_ε^* является **гарантированной оценкой** начального распределения u_0 по наблюдению y при ограничении

$$< u_0, \mathcal{N}_\varepsilon u_0 >_{L_2(\Omega)} + < \xi, \mathcal{M}_\varepsilon \xi >_{\mathcal{Y}} \le \mu^2 + \gamma_\varepsilon \tag{81}$$

Элемент u_ε^* также является **минимаксной оценкой** начального распределения по наблюдению y при ограничении (81):

$$\min_{v \in L_2(0,l)} \max_{u_0 \in U_\varepsilon[0,y]} \|v - u_0\| = \max_{u_0 \in U_\varepsilon[0,y]} \|u_\varepsilon^* - u_0\|$$

(она является чебышевским центром).

Определение. Элемент v^* называется **чебышевским центром** множества $P \in \mathcal{P}$, если

$$\min_{v \in \mathcal{P}} \max_{u \in P} \|v - u\| = \sup_{u \in P} \|v^* - u\|$$

Определение. Задача (P_ε) называется **регуляризующей** для (P), если для зафиксированного $\hat{u}_0$ существует функция $\varepsilon = \varepsilon(\mu)$ такая что если последовательно проводить наблюдения $y_\mu = \mathbf{G}u(\cdot,\cdot;\hat{u}_0) + \xi_\mu$ с помехой $\|\xi\|_{\mathcal{Y}} \le \mu$, то при $\varepsilon \to 0$ и $\mu \to 0 \Rightarrow \mathcal{R}_\varepsilon(y_\mu) \to \hat{u}_0$.

Вспомним теперь о методе квазиобращений Лионса-Латтеса:

$$\mathcal{R}_\varepsilon^{(\text{Л})}(y) = \sum_{k=1}^{\infty} e^{(-\varepsilon^2\lambda_k^2+\lambda_k)T} y^k \varphi_k(\cdot)$$

Теорема 8.3. Рассмотрим (P_ε): в ограничении (81)
$\mathcal{N}_\varepsilon u_0 = \sum\limits_{k=1}^{\infty}(1-e^{-\lambda_k^2 T\varepsilon})u_0^k\varphi_k(\cdot)$ $\quad \mathcal{M}_\varepsilon \xi = \sum\limits_{k=1}^{\infty} e^{(-\varepsilon\lambda_k^2+2\lambda_k)T}\xi^k\varphi_k(\cdot) \Rightarrow \mathcal{R}\varepsilon(y) = \mathcal{R}_\varepsilon^{(\text{Л})}(y)$**.**

(хотя метод Лионса не есть минимизация!)

Доказательство. Выпишем $\mathcal{R}_\varepsilon(y)$ явно, используя представление (77):

$$\mathcal{R}_\varepsilon(y) = \sum_{k=1}^{\infty}\left[1 - e^{-\varepsilon\lambda_k^2 T} + e^{-\lambda_k T} e^{(-\varepsilon\lambda_k^2+2\lambda_k)T} e^{-\lambda_k T}\right]^{-1} e^{-\lambda_k T} e^{(-\varepsilon\lambda_k^2+2\lambda_k)T} y^k \varphi(\cdot) = \mathcal{R}_\varepsilon^{(\text{Л})}(y)$$

Легко показать, что введенные в теореме операторы $\mathcal{N}_\varepsilon$ и $\mathcal{M}_\varepsilon$ удовлетворяют необходимым требованиям положительности, а $\mathcal{N}_\varepsilon$ имеет непрерывный обратный оператор

$$N_\varepsilon^{-1}u = \sum_{k=1}^{\infty}(1-e^{-\lambda_k^2 T\varepsilon})^{-1}u^k\varphi_k(\cdot)$$

в силу $1 - e^{-\lambda_1^2 T\varepsilon} \leq 1 - e^{-\lambda_k^2 T\varepsilon} \leq 1$.

8.1.4 Метод Гаевского-Захариаса

Рассмотрим еще один метод регуляризации, также состоящий в модификации самой задачи. В отличие от метода Лионса-Латтеса, исходная задача (82) здесь сводится к задаче (83), разрешимой не только к обратном, но и в прямом времени. Как и раньше, для простоты задача рассматривается в R^1.

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} & 0 < x < l,\ 0 < t \leq T \\ u(0,t) = u(l,t) = 0 & 0 < t \leq T \\ u(x,0) = u_0 & \text{— ?} \\ y = u(x,T) + \xi & \\ \|\xi\|_{L_2(0,l)} \leq \mu & \end{cases} \tag{82}$$

Заменим ее на следующую задачу в обратном времени

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} + \varepsilon u_{xxt} & 0 < x < l,\ 0 < t \leq T \\ u(0,t) = u(l,t) = 0 & \\ u(x,T) = y(x) & \text{— результат финального наблюдения} \end{cases} \tag{83}$$

Опять рассмотрим в качестве значения оператора регуляризации

$$\mathcal{R}_\varepsilon(y) = u(x,0), \text{ где } u \text{ — решение задачи (83)}$$

Будем искать решение в виде ряда Фурье. Проводя рассуждения, аналогичные рассуждениям в параграфе 8.1.3, имеем:

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t)\varphi_k(x)$$
$$\begin{cases} u_k'(t) = -\lambda_k u_k(t) - \varepsilon\lambda_k u_k'(t) & 0 < t \le T \\ u_k(T) = y^k \end{cases} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow u_k(t) = e^{\frac{-\lambda_k}{1+\varepsilon\lambda_k}(t-T)} y^k \Rightarrow$$
$$\Rightarrow u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} y^k e^{\frac{-\lambda_k}{1+\varepsilon\lambda_k}(t-T)}\varphi_k(x) \Rightarrow$$

Отсюда

$$\mathcal{R}_\varepsilon(y) = \sum_{k=1}^{\infty} y_k e^{\frac{-\lambda_k}{1+\varepsilon\lambda_k}(-T)}\varphi_k(x) \tag{84}$$

Докажем, что оператор (84) является регуляризатором по аргументу. Рассмотрим фиксированное $\hat{u}_0$. В силу $\exp(\frac{\lambda_k T}{1+\varepsilon\lambda_k} - \lambda_k T) = \exp(-\frac{\varepsilon\lambda_k T}{1+\varepsilon\lambda_k})$ имеем:

$$\|\mathcal{R}_\varepsilon - \hat{u}_0\| \le \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} (\hat{u}_0^k)^2 (1 - e^{\frac{-\lambda_k T\varepsilon}{1+\varepsilon\lambda_k}})^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} (\xi^k)^2 e^{\frac{2\lambda_k T}{1+\varepsilon\lambda_k}}}$$

Аналогично параграфу 8.1.3, имеем: первое слагаемое стремится к 0. Второе слагаемое можно оценить следующим образом

$$\sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} (\xi^k)^2 e^{\frac{\lambda_k T}{1+\varepsilon\lambda_k}}} \le \mu \max_k e^{\frac{\lambda_k T}{1+\varepsilon\lambda_k}} \le e^{\frac{T}{\varepsilon}}\mu$$

Теорема 8.4. При $\mu \to 0,\ \varepsilon \to 0,\ e^{\frac{T}{\varepsilon}}\mu \to 0$ выполнено $\|\mathcal{R}_\varepsilon(y) \to \hat{u}_0\|$. Следовательно, оператор Гаевского-Захариаса является регуляризатором по аргументу.

Упражнение 18. *Выписать самостоятельно операторы $\mathcal{N}_\varepsilon,\ \mathcal{M}_\varepsilon$ аналогичные операторам из главы 8.1.3.*

8.2 Построение динамических оценок состояния системы

8.2.1 Уравнения минимаксного фильтра

Рассмотрим систему

$$\begin{cases} u_t = Du + Bf, \qquad x \in \Omega, t > 0, \\ u|_{t=0} = u_0, \\ u|_{\partial\Omega} = 0 \\ y(t) = G(t)u(\cdot, t) + \xi(t). \end{cases} \tag{85}$$

Здесь f - неизвестная правая часть, u_0 - начальное состояние, $\xi(t)$ — помеха. Допустим, что мы хотим получить оценку состояния системы в момент T. Ранее мы рассматривали задачу при $f = 0$ и ограничение

$$F(T) = \|\xi\|^2_{\mathcal{Y}} + \varepsilon^2 \|u_0\|^2_{L_2(\Omega)} \leq \mu^2 + \gamma_\varepsilon$$

Гарантированная оценка u_0^* доставляла минимум функционала $F(T)$ и вычислялась по формуле

$$u_0^* = u_0^*(T) = (\varepsilon^2 \mathcal{E} + \mathcal{K}^*\mathcal{K})^{-1}\mathcal{K}^* y \tag{86}$$

Вычислив информационное множество регуляризующей задачи $U_\varepsilon[0, y]$, можно получить оценки состояния системы $u(x, T)$ по формуле

$$U_\varepsilon[T, y] = S(T)U_\varepsilon[0, y] \qquad U_\varepsilon[0, y] = \{u_0 |\ \exists \xi(\cdot) \in \mathcal{Y} : F(T) \leq \mu^2 + \gamma_\varepsilon\}$$

Здесь информационное множество $U_\varepsilon[0, y]$ является эллипсоидом с центром u_0^*. Однако, если мы вычислили u_0^* и $U_\varepsilon[0, y]$ на основе наблюдений, произведенных на отрезке времени $[0, T]$, и поступили новые данные наблюдений на отрезке $[T, T + \Delta t]$, приходится снова вычислять все операторы в выражении (86). В данной главе мы постараемся получить динамическую по T оценку состояния системы.

Допустим, что информация на момент времени T описывается следующим неравенством:

$$F(T) =< \xi, \mathcal{M}\xi >_{\mathcal{Y}} + < u_0, \mathcal{N}u_0 >_{L_2(\Omega)} + < f, \mathcal{R}f >_{L_2(\Omega,[0,T])} =$$

$$=< y - G(t)S(t)u_0 - G(t)\int_0^t S(t,\tau)Bf(\tau)d\tau, \mathcal{M}(y - G(t)S(t)u_0 - G(t)\int_0^t S(t,\tau)Bf(\tau)d\tau) >_{L_2(Y,(0,T))} +$$

$$+ < u_0, \mathcal{N}u_0 >_{L_2(\Omega)} + < f, \mathcal{R}f >_{L_2(\Omega,[0,T])} \leq \mu^2 + \gamma_\varepsilon$$

Нетрудно проверить, что данное ограничение задает эллипсоид. Информационное множество в данном случае будет иметь вид

$$U[y, T] = \{u |\ \exists u_0,\ f : F(T) \leq \mu^2 + \gamma_\varepsilon\}$$

Будем искать центр эллипсоида, то есть функции f и u_0, минимизирующие функционал $F(T)$

$$F =< \xi, \mathcal{M}\xi >_{\mathcal{Y}} + < u_0, \mathcal{N}u_0 >_{L_2(\Omega)} + < f, \mathcal{R}f >_{L_2(\Omega,[0,T])},$$

где операторы $\mathcal{M}(t)$, $\mathcal{N}(t)$, $\mathcal{R}(t)$ задаются при постановке задачи и являются самосопряженными.

Для вычисления минимизаторов продифференцируем $F(T)$ по u_0 и приравняем полученное к 0:

$$2\int_0^T S^*(t)G^*(t)\mathcal{M}(t)G(t)S(t)dtu_0 - 2\int_0^T S^*(t)G^*(t)\mathcal{M}(t)\Big(y(t) - G(t)\int_0^t S(t-\tau)Bf(\tau)d\tau\Big)dt + 2\mathcal{N}u_0 = 0$$

Обозначим минимизаторы функционала $F(T)$ за $f(\cdot, T)$ и $u_0(T)$. Обозначим порожденное ими решение системы (85) $u(t,T)$:

$$u(t,T) = S(t)u_0(T) + \int_0^t S(t-\tau)Bf(\tau,T)dt \tag{87}$$

Из последних двух уравнений получаем:

$$u_0(T) = \mathcal{N}^{-1}\int_0^T S^*(t)G^*(t)\mathcal{M}(t)\left(y(t) - G(t)u(t,T)\right)dt \tag{88}$$

Продифференцируем теперь $F(T)$ по f. Для этого сначала преобразуем одно из слагаемых в функционале $F(T)$, сделав замену и переставив местами пределы интегрирования:

$$\begin{aligned}
&\int\limits_0^T < G(t)\int\limits_0^t S(t-\tau)Bf(\tau)d\tau, \mathcal{M}(t)G(t)\int\limits_0^t S(t-\tau)Bf(\tau)d\tau >_{L_2(\Omega)}dt = \\
&\quad = \int\limits_0^T < G(t)\int\limits_0^t S(t-\gamma)Bf(\gamma)d\gamma, \mathcal{M}(t)G(t)\int\limits_0^t S(t-\tau)Bf(\tau)d\tau >_{L_2(\Omega)}dt = \\
&\quad = \int\limits_0^T\int\limits_\gamma^T < G(t)S(t-\gamma)Bf(\gamma), \mathcal{M}(t)\int\limits_0^t G(t)S(t-\tau)Bf(\tau)d\tau >_{L_2(\Omega)} dt\, d\gamma = \\
&\quad = \int\limits_0^T < f(\gamma), \int\limits_\gamma^T B^*(\gamma)S^*(t-\gamma)G^*(t)\mathcal{M}(t)G(t)\int\limits_0^t S(t-\tau)Bf(\tau)d\tau\, dt > d\gamma
\end{aligned}$$

Теперь мы можем вычислить производную от функционала $F(T)$ по f:

$$\begin{aligned}
&2\int\limits_t^T B^*(t)S^*(\tau-t)G^*(\tau)\mathcal{M}(\tau)G(\tau)\int\limits_0^\tau S(\tau-s)Bf(s,T)dsd\tau - \\
&\quad -2\int\limits_t^T B^*(t)S^*(\tau-t)G^*(\tau)\mathcal{M}(\tau)\left(y(\tau) - G(\tau)S(\tau)u_0(T)\right)dt + 2\mathcal{R}(t)f(t,T) = 0
\end{aligned}$$

Отсюда

$$f(t,T) = \mathcal{R}^{-1}(t)\int_t^T B^*(t)S^*(\tau - t)G^*(\tau)\mathcal{M}(\tau)\left(y(\tau) - G(\tau)u_0(\tau,T)\right)d\tau. \tag{89}$$

Продифференцировав формулы (88), (89), приходим к следующим формулам

$$\frac{\partial u_0(T)}{\partial T} = \mathcal{N}^{-1}S^*(T)æ(T) - \mathcal{N}^{-1}\int\limits_0^T S^*(t)G^*(t)\mathcal{M}(t)G(t)\frac{\partial u(t,T)}{\partial T}dt \tag{90}$$

$$\frac{\partial f(t,T)}{\partial T} = \mathcal{R}^{-1}B^*(t)S^*(T-t)æ(T) - \mathcal{R}^{-1}\int\limits_t^T B^*(t)S^*(\tau - T)G^*(\tau)\mathcal{M}(\tau)G(\tau)\frac{\partial u(\tau,T)}{\partial T}d\tau \tag{91}$$

где

$$æ(T) = G^*(T)\mathcal{M}(T)\left(y(T) - G(T)u(T,T)\right)$$

Следовательно, подставив эти выражения в (87), имеем:

$$\begin{aligned}\tfrac{\partial u(t,T)}{\partial T} &= \Big(S(t)\mathcal{N}^{-1}S^*(T) + \int\limits_0^t S(t-\tau)B(\tau)\mathcal{R}^{-1}(\tau)B^*(\tau)S^*(T-\tau)dt\Big)æ(T) - \\ &-S(t)\mathcal{N}^{-1}\int\limits_0^T S^*(\tau)G^*(\tau)\mathcal{M}(\tau)G(\tau)\tfrac{\partial u(\tau,T)}{\partial T} - \\ &-\int\limits_0^t S(t-\tau)B(\tau)\mathcal{R}^{-1}(\tau)\int\limits_\tau^T B^*(s)S^*(s-\tau)G^*(s)\mathcal{M}(s)G(s)\tfrac{\partial u(s,T)}{\partial T}ds\, d\tau.\end{aligned} \tag{92}$$

Получили уравнение Фредгольма второго рода. Пусть оно разрешимо, тогда существует ядро $\widetilde{K}(t,s,T)$, не зависящее от наблюдений, такое что решение можно представить в виде:

$$\begin{aligned}\tfrac{\partial u(t,T)}{\partial T} &= \int\limits_0^T \widetilde{K}(t,s,T)\Big(S(s)\mathcal{N}^{-1}S^*(T) + \int\limits_0^s S(s-\tau)B(\tau)\mathcal{R}^{-1}(\tau)B^*(\tau)S^*(T-\tau)dt\Big)dsæ(T) = \\ &= K(t,T)æ(T)\end{aligned}$$

Здесь $K(t,T)$ — некоторый оператор. Нас интересует оценка центра информационного множества $U[T,y]$ и ее эволюция. Продифференцируем по T введенную ранее функцию $u(t,T)$ (87), взятую в точке $t = T$:

$$\begin{aligned}\frac{du(T,T)}{dT} &= Du(T,T) + B(T)f(T,T) + K(T,T)æ(T) = \\ &= \{\text{используя (89) и положив } P(T) = K(T,T)\} = \\ &= Du(T,T) + 0 + P(T)G^*(T)\mathcal{M}(T)\left(y(T) - G(T)u(T,T)\right)\end{aligned} \tag{93}$$

По определению оператора $K(t,T)$ он дает решение уравнения Фредгольма (92) для любого $\text{æ}(T)$. Значит, если в (92) вместо $\frac{\partial u(t,T)}{\partial T}$ подставить $K(t,T)\text{æ}(T)$, получим:

$$\begin{aligned} P(T)\text{æ}(T) &= K(T,T)\text{æ}(T) = \Big\{S(T)\mathcal{N}^{-1}S^*(T) + \int\limits_0^T S(T-\tau)B(\tau)\mathcal{R}^{-1}(\tau)B^*(\tau)S^*(T-\tau)d\tau - \\ &- S(T)\mathcal{N}^{-1}\int\limits_0^T S^*(t)G^*(t)\mathcal{M}(t)G(t)K(t,T)dt - \\ &- \int\limits_0^T S(T-\tau)B(\tau)\mathcal{R}^{-1}(\tau)\int\limits_\tau^T B^*(s)S^*(s-\tau)G^*(s)\mathcal{M}(s)G(s)K(s,T)ds\, d\tau\Big\}\text{æ}(T). \end{aligned} \tag{94}$$

В силу произвольности $\text{æ}(T)$ его можно сократить, и тогда получим выражение для $P(T)$

$$\begin{aligned} P(T) &= K(T,T) = S(T)\mathcal{N}^{-1}S^*(T) + \int\limits_0^T S(T-\tau)B(\tau)\mathcal{R}^{-1}(\tau)B^*(\tau)S^*(T-\tau)d\tau - \\ &- S(T)\mathcal{N}^{-1}\int\limits_0^T S^*(t)G^*(t)\mathcal{M}(t)G(t)K(t,T)dt - \\ &- \int\limits_0^T S(T-\tau)B(\tau)\mathcal{R}^{-1}(\tau)\int\limits_\tau^T B^*(s)S^*(s-\tau)G^*(s)\mathcal{M}(s)G(s)K(s,T)ds\, d\tau \end{aligned} \tag{95}$$

Аналогично, подставив в (91)-(90) вместо $\frac{\partial u(t,T)}{\partial T}$ выражение $K(t,T)\text{æ}(T)$, имеем:

$$\begin{aligned} \tfrac{\partial f(t,T)}{\partial T} &= \Big(R^{-1}(t)B^*(t)S^*(T-t) - R^{-1}(t)\int\limits_t^T B^*(t)S^*(t-\tau)G^*(\tau)M(\tau)G(\tau)K(\tau,T)d\tau\Big)\text{æ}(\tau) \\ \tfrac{\partial u_0(T)}{\partial T} &= \Big(\mathcal{N}^{-1}S^*(T) - \mathcal{N}^{-1}\int\limits_0^T S^*(t)G^*(t)\mathcal{M}(t)G(t)K(t,T)dt\Big)\text{æ}(T) \end{aligned} \tag{96}$$

Итак, нам удалось выразить динамику центра информационного множества с помощью уравнения (93). Если вычислить производную оператора $P(T)$, можно будет эффективно оценивать изменение $u(T,T)$. Однако если дифференцировать выражение (95), появятся производные ядра уравнения Фредгольма — $\frac{\partial K(t,T)}{\partial T}$. Исследуем, чему равна эта функция.

Подставим в (92) вместо $\frac{\partial u(t,T)}{\partial T}$ произвольную функцию $g(t,T)$. В силу свойств уравнения Фредгольма получим

$$g(t,T) = K(t,T)\text{æ}(T)$$

Заменим $\text{æ}(T)$ на произвольное γ. В силу линейности уравнения Фредгольма

$$g(t,T) = K(t,T)\gamma \tag{97}$$

Продифференцируем полученное уравнение по T:

$$\frac{\partial g(t,T)}{\partial T} = \frac{\partial K(t,T)}{\partial T}\gamma \tag{98}$$

Но $g(t,T)$ удовлетворяет уравнению

$$
\begin{aligned}
g(t,T) \quad &= \Big(S(t)\mathcal{N}^{-1}S^*(T) + \int\limits_0^t S(t-\tau)B(\tau)\mathcal{R}^{-1}(\tau)B^*(\tau)S^*(T-\tau)dt\Big)\gamma - \\
&-S(t)\mathcal{N}^{-1}\int\limits_0^T S^*(\tau)G^*(\tau)\mathcal{M}(\tau)G(\tau)g(\tau,T) - \\
&-\int\limits_0^t S(t-\tau)B(\tau)\mathcal{R}^{-1}(\tau)\int\limits_\tau^T B^*(s)S^*(s-\tau)G^*(s)\mathcal{M}(s)G(s)g(s,T)ds\, d\tau.
\end{aligned} \tag{99}
$$

Продифференцируем это уравнение по T. Получится уравнение Фредгольма на функцию $\frac{\partial g(T,T)}{\partial T}$:

$$
\begin{aligned}
\tfrac{\partial g(t,T)}{\partial T} \quad &= \Big(S(t)\mathcal{N}^{-1}S^*(T) + \int\limits_0^t S(t-\tau)B(\tau)\mathcal{R}^{-1}(\tau)B^*(\tau)S^*(T-\tau)dt\Big)D^*\gamma - \\
&-S(t)\mathcal{N}^{-1}S^*(T)G^*(T)\mathcal{M}(T)G(T)g(T,T) - \\
&-S(t)\mathcal{N}^{-1}\int\limits_0^T S^*(\tau)G^*(\tau)\mathcal{M}(\tau)G(\tau)\tfrac{\partial g(\tau,T)}{\partial T} - \\
&-\int\limits_0^t S(t-\tau)B(\tau)\mathcal{R}^{-1}(\tau)\int\limits_\tau^T B^*(T)S^*(T-\tau)G^*(T)\mathcal{M}(T)G(T)g(T,T)d\tau - \\
&-\int\limits_0^t S(t-\tau)B(\tau)\mathcal{R}^{-1}(\tau)\int\limits_\tau^T B^*(s)S^*(s-\tau)G^*(s)\mathcal{M}(s)G(s)\tfrac{\partial g(s,T)}{\partial T}ds\, d\tau.
\end{aligned} \tag{100}
$$

Преобразуем это уравнение, используя (97) и группируя вместе вторую и четвертую строки:

$$
\begin{aligned}
\tfrac{\partial g(t,T)}{\partial T} \quad &= \Big(S(t)\mathcal{N}^{-1}S^*(T) + \int\limits_0^t S(t-\tau)B(\tau)\mathcal{R}^{-1}(\tau)B^*(\tau)S^*(T-\tau)dt\Big)D^*\gamma - \\
&-S(t)\mathcal{N}^{-1}S^*(T)G^*(T)\mathcal{M}(T)G(T)P(T)\gamma - \\
&-\int\limits_0^t S(t-\tau)B(\tau)\mathcal{R}^{-1}(\tau)\int\limits_\tau^T B^*(T)S^*(T-\tau)d\tau G^*(T)\mathcal{M}(T)G(T)P(T)\gamma - \\
&-S(t)\mathcal{N}^{-1}\int\limits_0^T S^*(\tau)G^*(\tau)\mathcal{M}(\tau)G(\tau)\tfrac{\partial g(\tau,T)}{\partial T} - \\
&-\int\limits_0^t S(t-\tau)B(\tau)\mathcal{R}^{-1}(\tau)\int\limits_\tau^T B^*(s)S^*(s-\tau)G^*(s)\mathcal{M}(s)G(s)\tfrac{\partial g(s,T)}{\partial T}ds\, d\tau.
\end{aligned} \tag{101}
$$

Сгруппировав первую, вторую и третью строки (101), получим:

$$
\begin{aligned}
\tfrac{\partial g(t,T)}{\partial T} \quad &= \Big(S(t)\mathcal{N}^{-1}S^*(T) + \int\limits_0^t S(t-\tau)B(\tau)\mathcal{R}^{-1}(\tau)B^*(\tau)S^*(T-\tau)dt\Big)(D^* - G^*(T)\mathcal{M}(T)G(T)P(T))\gamma - \\
&-S(t)\mathcal{N}^{-1}\int\limits_0^T S^*(\tau)G^*(\tau)\mathcal{M}(\tau)G(\tau)\tfrac{\partial g(\tau,T)}{\partial T} - \\
&-\int\limits_0^t S(t-\tau)B(\tau)\mathcal{R}^{-1}(\tau)\int\limits_\tau^T B^*(s)S^*(s-\tau)G^*(s)\mathcal{M}(s)G(s)\tfrac{\partial g(s,T)}{\partial T}ds\, d\tau.
\end{aligned} \tag{102}
$$

Итак, получилось то же самое уравнение Фредгольма, что и (99), где вместо $g(t,T)$ стоит $\frac{\partial g(t,T)}{\partial T}$, а вместо γ — $(D^* - G^*(T)\mathcal{M}(T)G(T)P(T))\gamma$. Учитывая (98), получаем:

$$\frac{\partial g(t,T)}{\partial T} = \frac{\partial K(t,T)}{\partial T}\gamma = K(t,T)(D^* - G^*(T)\mathcal{M}(T)G(T)P(T))\gamma$$

В силу произвольности γ

$$\frac{\partial K(t,T)}{\partial T} = K(t,T)(D^* - G^*(T)\mathcal{M}(T)G(T)P(T))$$

Теперь можно продифференцировать уравнение (95) по T. Проделав это, легко получить уравнение Рикатти на оператор $P(T)$:

$$\dot{P}(T) = DP(T) + R^{-1}(T) + P(T)D - P(T)G^*(T)M(T)G(T)P(T)$$

Используя (99), можно выписать начальное условие для $P(T)$

$$P(0) = \mathcal{N}^{-1}$$

Итак, уравнения (90)-(91) задают эволюцию оптимальных оценок $f(t,T)$ и $u_0(T)$ с помощью оператора $K(t,T)$. Эволюция $u(T,T)$ (элемента, порожденного минимизаторами) описывается уравнением (93). В него входит оператор $P(T)$, удовлетворяющий уравнению Рикатти. Сведем воедино все полученное:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f(t,T)}{\partial T} &= \Big(R^{-1}(t)B^*(t)S^*(T-t) - R^{-1}(t)\int\limits_t^T B^*(t)S^*(t-\tau)G^*(\tau)M(\tau)G(\tau)K(\tau,T)d\tau\Big)\times \\
&\times G^*(T)\mathcal{M}(T)(y(T) - G(T)u(T,T)) \\
\frac{\partial u_0(T)}{\partial T} &= \Big(\mathcal{N}^{-1}S^*(T) - \mathcal{N}^{-1}\int\limits_0^T S^*(t)G^*(t)\mathcal{M}(t)G(t)K(t,T)dt\Big)G^*(T)\mathcal{M}(T)(y(T) - G(T)u(T,T)) \\
\frac{du(T,T)}{dT} &= Du(T,T) + P(T)G^*(T)\mathcal{M}(T)\left(y(T) - G(T)u(T,T)\right) \\
\frac{\partial K(t,T)}{\partial T} &= K(t,T)(D^* - G^*(T)\mathcal{M}(T)G(T)P(T)) \\
\dot{P}(T) &= DP(T) + R^{-1}(T) + P(T)D - P(T)G^*(T)M(T)G(T)P(T) \\
f(T,T) &= 0 \qquad \forall T \\
u_0(0) &= 0 \\
K(T,T) &= P(T) \qquad \forall T \\
P(0) &= \mathcal{N}^{-1}
\end{aligned} \tag{103}$$

Таким образом, если, например, вычислено значение функции $f(t, T_1)$ на промежутке $t \in [0, T_1]$ и поступили новые наблюдения, можно, используя уравнения (103), рассчитать $f(\cdot, T_1 + \Delta T)$, не минимизируя заново функционал $F(T)$ на новом промежутке времени, а используя производную $\frac{\partial f(t,T)}{\partial T}$.

8.2.2 Задачи управления и фильтрации в бесконечномерных пространствах

Рассмотрим следующую задачу

$$\begin{cases} x' = Ax(t) + Bu(t) \\ x(0) = x_0 \in H \text{ — гильбертово} \end{cases} \tag{104}$$

и функционал

$$J(u(\cdot)) = \int_o^T |cx(\tau)|^2 + |u(\tau)|^2 d\tau + <P_0 x(T), x(T)> \to \inf \tag{105}$$

Здесь оператор $A : D(A) \subset H \to H$ порождает сильно непрерывную полугруппу e^{tA} на H. Т.е.

$$\lim_{t \to 0+} \frac{e^{tA} - I}{t} = A \tag{106}$$

$B \in \mathcal{L}(U, H)$, $P_0 \in \mathcal{L}(H)$, эрмитов, неотрицательный; $C \in \mathcal{L}(H, Y)$, Y, U, H - гильбертовы.

Получаем

$$x(t) = e^{At} x_0 + \int_{t_0}^t e^{(t-\tau)A} Bu(\tau) d\tau \tag{107}$$

вместо e^{At} будем писать $S(t)$.

Пример: уравнение теплопроводности.

$$S(t)u_0 = \sum e^{-\lambda_i t} u_o^i \varphi_i(\cdot), \ u_0 \text{ - начальное условие} \tag{108}$$

Можно доказать, что $S(t)$ сильно непрерывна по t и $S(\tau_1)S(\tau_2)u_0 = S(\tau_1 + \tau_2)u_0$, то есть выполнено полугрупповое свойство.

При указанных условиях на операторы A, B, P_0, C рассмотрим $P(t)$ - решение уравнения Рикатти

$$\begin{cases} \dot{P}(t) = A^* P + PA - PBB^* P + C^* C \\ P(0) = P_0 \end{cases} \tag{109}$$

Под решением этого оперторного уравнения мы подразумеваем так называемое “mild solution”, то есть решение эквивалентного ему интегрального уравнения

$$P(t)x = e^{tA^*} P(t) e^{tA} x + \int_0^t e^{\tau A^*} C^* C e^{\tau A} x d\tau - \int_0^t e^{(t-\tau)A^*} P(\tau) BB^* P(\tau) e^{(t-\tau)A} x d\tau \tag{110}$$

Теорема 8.5. При заданных ограничениях на A, B и C существует "mild solution" $P(t) \in C_S(I, \Sigma^+(H))$. Здесь $I = [0,T]$, $\Sigma^+(H)$ - пространство неотрицательных, самосопряженных (т.е. эрмитовых) операторов в H. Непрерывность в $C_S : P(\cdot)x$ непрерывна по $t\ \forall x$ Идея доказательства: воспользоваться методом сжимающих отображений

Теорема 8.6. Кроме того, с помощью $P(t)$ можно представить оптимальное управление $u^* = -B^*P(T-t)x^*(t)$. Оно будет единственным и, кроме того, $J(u^*) =< P(T)x_0, x_0 >$. Здесь $x^*(t)$ есть решение следующего уравнения:

$$\begin{cases} x'(t) = [A - BB^*P(T-t)]x(t), \quad t \in [0,T], \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

Идея доказательства: если $P(T)$ — решение уравнения Рикатти, можно показать, что

$$J(u) = \int\limits_0^T |u(s) + B^*P(T-s)x(s)|^2 ds + (P(T)x_0, x_0).$$

9 Прикладные задачи защиты окружающей среды

$$\begin{cases} \frac{\partial\varphi}{\partial t} + \operatorname{div}(\vec{v}\varphi) + \sigma\varphi = \sum\limits_{i=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(K_i - \frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right) + f \qquad \text{в } Q \\ \varphi\Big|_{t=0} = 0 \\ \varphi\Big|_{\Sigma} = 0 \\ \frac{\partial\varphi}{\partial x_3} = \alpha\varphi \text{ на } \Sigma_0 \\ \frac{\partial\varphi}{\partial x_3} = 0 \text{ на } \Sigma_H \end{cases} \tag{111}$$

У этой задачи существует единственное решение ([4]).

Упражнение 19. *Записать сопряженную задачу.*

В этой части мы будем рассматривать функционалы вида

$$J = <p, \varphi>_{L_2(Q)} = <f, \varphi^*>_{L_2(Q)} \tag{112}$$

где $Q = G \times [0,T]$, $G = \Omega \times (0,H)$, а функция p характеризует “значимость” загрязнения в области Σ_0, а также в некоторых экологически значимых зонах Ω_k (и соответствующих им G_k).

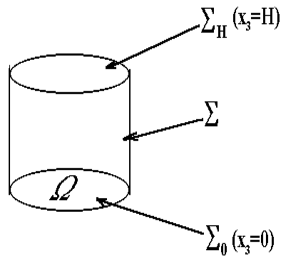

Рис. 3: Множество Q

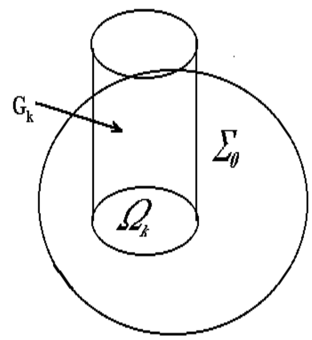

Рис. 4: Почва и атмосфера

Здесь Ω_k — область $\Omega_k \subset \Sigma_0$; G_k — прямая призма с основанием Ω_k высотой H.

Пример 1. Рассмотрим функционалы $J_0,\ J_1,\ \dots,\ J_m$ следующего вида. Эффект от суммарного загрязнения области Q представляется с помощью функционала J_0:

$$J_0 = <\varphi, p_0> \text{ — загрязнение во всей } \sigma_0 \text{ и } G,$$

где функционал $p_0 = B(x,y) + \delta(x_3)A(x,y)$. Здесь функция $B(x,y)$ характеризует отрицательный эффект от загрязнения атмосферы над областью Ω_k, а функция $A(x,y)$ характеризует эфффект от загрязнения почвы и вод области Ω_k. Пусть также функционалы $J_1,\ \dots,\ J_m$ характеризуют загрязнение в областях $G_k,\ \Omega_k$:

$$J_k = <\varphi, p_k> \text{ — загрязнение в } \Omega_k, G_k.$$

Где функционалы p_k имеют вид

$$p_k = \begin{cases} b_k + a_k\delta(x_3), & (x_1,x_2,x_3) \in G_k \\ 0, & (x_1,x_2,x_3) \notin G_k \end{cases} \tag{113}$$

Как было отмечено выше, функции $A(x, y)$ и $a_k(x, y)$ характеризуют отрицательный эффект от загрязнения точки (x, y) поверхности земли, а $B(x, y, z)$ и $b_k(x, y, z)$ — от загрязнения точки (x, y, z) области Q.

Мы хотим, чтобы были выполнены неравенства:

$$J_0 \leq C_0,\ J_k \leq C_k,\ k = 1, ..., m$$

Для оценки этих функционалов составим $m + 1$ сопряженное уравнение с правыми частями $p_i, i = 0, ..., m$. Тогда

$$J_i = \langle p_i, \varphi \rangle = \langle f, \varphi_i^* \rangle \leq C_i \tag{114}$$

Пусть теперь требуется решить задачу об оптимальном размещении промышленного предприятия. Если расположить его в точке x^0, правая часть уравнения (111) будет иметь вид $f = \delta(\vec{x} - \vec{x}_0)Q$. Пусть нам известно, что интенсивность выбросов будет постоянной: $Q \equiv const$. Тогда

$$J_i = J_i(\vec{x}_0) =< f, \varphi^* >= Q\varphi_i^*(\vec{x}_0) \leq C_i$$

Построим линии уровня функций φ^*. Тогда допустимые x_0 будут расположены вне областей $\varphi_i^*(\vec{x}_0) = C_i/Q$.

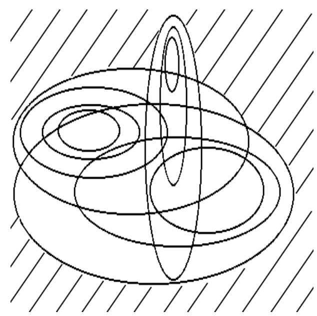

Рис. 5: Линии уровня

Если обозначить

$$\omega_i = \left\{ \vec{x}_0 \middle| \varphi_i(\vec{x}_0) \leq \frac{C_i}{Q} \right\}, \tag{115}$$

то допустимые решения задачи будет задаваться следующим соотношением:

$$\vec{x}_0 \in \bigcap_{i=0}^{m} \omega_i \quad \text{(заштрихованная область на рисунке)} \tag{116}$$

Пример 2. Пусть в данном районе возможно всего j_0 различных стандартных метеорологических ситуаций: характерные сила и направления ветра и т.п.. В этом случае для решения задачи оптимального расположения промышленного предприятия нужно решить $(m+1)j_0$ сопряженных уравнений (с различными правыми частями, соответствующими функционалам p_k, и различными параметрами, соответствующими метеорологическим условиям). Искомое множество будет являться пересечением полученных областей ω_i $i = 1 \dots (m+1)j_0$.

Пример 3. Задача минимизации стоимости потерь продуктов биосферы (= затрат на их восстановление). Пусть рассматриваются n различных аэрозолей. Рассмотрим функционал вида

$$J = \sum_{j=1}^{n} \int_0^T dt \int_{\Sigma_0} \sum_{l=1}^{s} n_l \cdot \beta_l \cdot b_{jl} \cdot \varphi_j d\Sigma = \sum_j <p_0^j, \varphi_j> \leq const \tag{117}$$

здесь

- j - номер аэрозоли;
- l - номер компонента биосферы;
- n_l - плотность популяции l-го компонента биосферы в данной точке;
- β_l - цена (стоимость восстановления) единицы l-го компонента биосферы;
- b_{jl} - количество "умирающих"единиц биомассы l-го типа в расчете на одну единицу j-й аэрозоли;
- φ - концентрация j-й аэрозоли.

Для вычисления этого функционала необходимо решить n сопряженных задач (по одному на каждый тип аэрозоли).

Однако известно, что, если все аэрозоли легкие и являются окислами различных соединений, то они распространяются по одному закону. Пусть Q_j - интенсивность j-й аэрозоли. Введем коэффициент

$$\gamma_j = \frac{Q_j}{\sum\limits_{i=1}^{n} Q_i} \tag{118}$$

Тогда, если решать задачу с правой частью $Q = \sum\limits_{i=1}^{n} Q_i$, все функции φ_j будут пропорционально этому решению: $\varphi_j = \gamma_j \varphi$, то есть достаточно решить только одну сопряженную задачу и

$$J = <\varphi, \sum_{i=1}^{n} p_0^j \gamma_j> =< \varphi^*, f > \tag{119}$$

После данного преобразования функционала J можно решать задачу об оптимальном размещении предприятий, аналогично предыдущему примеру.

Пример 4. Оптимизация выбросов уже работающих заводов: пусть в точках $\vec{r}_i$ расположены заводы, которые выбрасывают загрязнения в атмосферу с интенсивностью Q_i. Составим функционал модернизации:

$$J = \sum \xi_i (Q_i - \overline{Q}_i) \tag{120}$$

Здесь ξ_i - стоимость модернизации i-го предприятия на единицу уменьшения выбросов. В результате приходим к задаче линейного программирования:

$$\begin{cases} \sum \tilde{Q}_i \xi_i \to \min \\ \sum a_{ik} \tilde{Q}_i \geq R_k \quad \text{соблюдение ПДК} \\ \tilde{Q}_i \geq 0 \end{cases} \tag{121}$$

где $\tilde{Q}_i = Q_i - \overline{Q}_i$.

Список литературы

[1] Владимиров В.С. *Уравнения математической физики.*

[2] Денисов А.М. *Введение в теорию обратных задач.*

[3] Ладыженская Солонников Уральцева *Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа.*

[4] Марчук Г.И. *Математическое моделирование в проблеме окружающей среды.*

[5] Тихонов Арсенин *Методы решения некорректных задач.*

[6] Шварц Л. *Математические методы для физических наук.*