Упражнение 1. Две функции полезности u и u' порождают один и тот же порядок на пространстве распределений $\mathbb{P}$ тогда и только тогда, когда существует положительное аффинное преобразование $\phi(x) = ax + b$, $a > 0$, такое, что $u' = \phi \circ u$.

Упражнение 2. Доказать, что если выполнено

$$u(x + a) = \alpha(a)u(x) + \beta(a), \quad \forall x$$

для любой константы a, то

$$u(x) = -e^{-\lambda x} \quad \text{(с точностью до положительного аффинного преобразования).}$$

При доказательстве нельзя пользоваться дифференцированием, а использовать конечные разности и свести к уравнению $u(x + y) = u(x) + u(y)$.

Упражнение 3. Доказать, что если выполнено

$$u(bx) = \alpha(b)u(x) + \beta(b), \quad \forall x > 0$$

для любой константы $b > 0$, то

$$u'(x) = cx^{-\gamma}, \quad c > 0.$$

Упражнение 4. Показать, что после дисконтирования условие самофинансирования сохраняет свой вид, причем оно выполнено тогда и только тогда, когда оно выполнено в исходной задаче.

Упражнение 5. Показать, что если КЛАТР(x) неограничено растет, то условие

$$\frac{\inf\limits_x u'(x)}{\sup\limits_x u'(x)} > \rho,$$

где $0 < \rho < 1$, не выполнено.

Упражнение 6. Пусть функция полезности в задаче оптимального инвестирования имеет вид:

$$u(c_1, c_2) = (a_1 u_1(c_1) + b_1)(a_2 u_2(c_2) + b_2),$$

где $c_1, c_2 \geqslant 0$ — потребление в моменты времени $t = 1, 2$ соответственно, а a_1, a_2, b_1, b_2 — некоторые неизвестные параметры. Пусть также проведена следующая нормировка (это допустимо, так как функция полезности определена с точностью до положительного аффинного преобразования):

$$\sup_c u(c_1, c_2) = 1, \quad \inf_c u(c_1, c_2) = 0.$$

Таким образом, остается 2 свободных параметра. Дать им интерпретацию как параметров замещения потребления.

Упражнение 7. Найти характеристику для доминирования второго порядка в терминах функции распределения.

Упражнение 8. В детерминистской постановке задачи оптимального хеджирования: проверить, что при $0 \leq \xi_t \leq C$ выполнена теорема о минимаксе для уравнения Беллмана.