1. Общая теоретическая часть

Для поиска множества $\mathcal{X}[t, t_0]$ будем использовать функцию цены

$$V(t,x) = \min_{u(\cdot)} \max_{v(\cdot)} d^2(x_0, \mathcal{X}_0) \mid_{x(t)=x}$$

где $d(x_0, \mathcal{X}_0)$ - расстояние между точкой x_0 и множеством $\mathcal{X}_0$, определяемое метрикой $d(x, \mathcal{X}) = \min_{y\in\mathcal{X}} \|x-y\|$. Такой выбор вызван следующими причинами. Мы ищем множество $\mathcal{X}[t, \mathcal{X}_0]$ всех таких точек, что для $\forall x^*(t) \in \mathcal{X}[t, \mathcal{X}_0]$ можно заранее подобрать некоторое управление $u^*(\cdot)$ и некоторое подмножество $\{x^*(t_0)\} \in \mathcal{X}_0$ так, чтобы при любой помехе $v(\cdot)$ гарантировать вхождение $x^*(t) \in \{x(t, u^*(\cdot), \{x^*(t_0)\})\}_{\forall v(\cdot)}$. В рассматриваемой здесь задаче кроме помехи $v(\cdot)$ появляется другой неизвестный параметр $\tau(u, v)$ – момент переключения, в который меняется динамика системы, что приводит к существенному усложениню задачи.

Пусть $\phi(x) = d^2(x_0, \mathcal{X}_0)$, сопряженная к ней:

$$\phi^*(\ell) = \sup_x(\langle x, \ell\rangle - d^2(x, \mathcal{X}_0)) = \rho(\ell \mid \mathcal{X}_0) + \frac{\|\ell\|^2}{4},$$

тогда

$$V(t,x) = \min_{u(\cdot)} \max_{v(\cdot)} \sup_{\ell} \left(\langle \ell, x_0 \rangle - \rho(\ell \mid \mathcal{X}_0) - \frac{\|\ell\|^2}{4} \right). \tag{1.1}$$

Найдем выражения для поиска $x_0 \mid_{x(t_1)=x}$. Пусть траектория точки в момент t_1 известна $x(t_1) = x$. Идя в обратном времени, найдем её значение в момент $\tau \leqslant t \leqslant t_1$ при известных $B(s), C(s), u(s), v(s)$ до переключения:

$$x^{(2)}(t, x, u, v) = G_2(t, t_1)x + \int\limits_{t_1}^{t} G_2(t, s) \left[B_2(s)u_2(s) + C_2(s)v_2(s)\right] ds, \text{при}\, \tau \leqslant t \leqslant t_1,$$

и после для $t_0 \leqslant t \leqslant \tau$:

$$\begin{aligned} x^{(2,1)}(t, \tau, x, u, v) =& G_1(t, \tau)G_2(\tau, t_1)x + G_1(t, \tau) \int\limits_{t_1}^{\tau} G_2(t, s) \left[B_2(s)u_2(s) + C_2(s)v_2(s)\right] ds + \\ &+ \int\limits_{\tau}^{t_0} G_1(t, s) \left[B_1(s)u_1(s) + C_1(s)v_1(s)\right] ds\,,\ \text{при}\, t_0 \leqslant t \leqslant \tau. \end{aligned} \tag{1.2}$$

Нам необходимо, чтобы момент τ в этих выражениях удовлетворял условию на переключение, так чтобы $\langle x(\tau), c\rangle = \gamma$. Поскольку $d^2(x, \mathcal{X}) \geqslant 0$, то $V(x,t) \geqslant 0$. Тогда если $\mathcal{X}[t, t_0] = \{x \mid V(t,x) \leqslant 0\}, \forall t \in [t_0, t_1]$, то достаточно ввести штрафующий член $(\langle x(\tau), c\rangle - \gamma)^2$ в выражение для $V(t,x)$, тем самым обеспечивая для $\mathcal{X}[t, t_0]$ включение только тех траекторий, которые удовлетворяют нашим двум системам и условию на момент переключения.

Так как мы рассматриваем задачу в классе программных управлений, мы не можем строить управление в зависимости от текущего состояния системы, а должны определять его заранее. Поэтому, в формуле для $V(t,x)$ нельзя искать отдельно $\min_{u^{(i)}} \max_{v^{(i)}}$ для каждой из подсистем "до" и "после", так как момент переключения τ не известен заранее. Это означает, что выбираемое управление не может меняться в зависимости от

τ. Поскольку в общем случае ограничения на управления для разных подсистем различны, то выбираемое заранее управление должно удовлетворять обоим ограничениям $[u^*(\cdot) \in \mathcal{P}^{(1)}] \wedge [u^*(\cdot) \in \mathcal{P}^{(2)}]$. Поэтому справедливо положить $u(t) \in \mathcal{P}[\mathcal{T}] = \min\{\mathcal{P}^{(1)}[\mathcal{T}], \mathcal{P}^{(2)}[\mathcal{T}]\}$ для множества $\mathcal{T}$ такого, что $\mathcal{T} = \cup_{v,u}\tau(v,u) \subseteq [t_0, t]$. Мы будем рассматривать задачу для $\mathcal{P}[t_0,t] = \mathcal{P}^{(1)}[t_0,t] = \mathcal{P}^{(2)}[t_0,t]$.

$$V(t,x) = \min_{u_1,u_2\in\mathcal{P}} \max_{v_1,v_2\in\mathcal{W}} \min_{\tau} \left\{ d^2(x_0|_{x(t)=x}, \mathcal{X}_0) + (\langle x(\tau), c\rangle - \gamma)^2 \right\}.$$

Это значит, что искомое множество $\mathcal{X}[t,\mathcal{X}_0]$ в классе программных управлений содержит только те траектории, которые при любой допустимой помехе $v_1(\cdot), v_2(\cdot)$ и при любом $\tau(v,\cdot)$ гарантированно могут попасть на множество $\mathcal{X}[t,\mathcal{X}_0]$ Пока примем $\gamma = 0$. Для линеаризации условия на переключение сделаем подстановку

$$\langle x, c\rangle^2 \equiv \max_{\mu} \left\{ \mu \langle x, c\rangle - \frac{\mu^2}{4} \right\},$$

и, используя (1.1), имеем

$$V(t,x) = \min_{u_1,u_2\in\mathcal{P}} \max_{v_1,v_2\in\mathcal{W}} \min_{\tau} \left\{ \max_{\ell} \max_{\mu} \left\{ \left\langle \ell, x_0 \mid_{x(t)=x} \right\rangle + \mu \langle x(\tau), c\rangle - \frac{\mu^2}{4} - \rho(\ell \mid \mathcal{X}_0) - \frac{\|\ell\|^2}{4} \right\} \right\}.$$

Раскрывая (1.2), получим

$$V(t,x) = \min_{u_1,u_2} \max_{v_1,v_2} \min_{\tau\in[t_0,t]} \max_{\ell} \max_{\mu} \{$$

$$\langle \ell, G_1(t_0,\tau)G_2(\tau,t)x\rangle + \int_t^{\tau} \langle \ell, G_1(t_0,\tau)G_2(\tau,s)\left[B_2(s)u_2(s) + C_2(s)v_2(s)\right]\rangle\, ds +$$

$$+ \int_{\tau}^{t_0} \langle \ell, G_1(t_0,s)\left[B_1(s)u_1(s) + C_1(s)v_1(s)\right]\rangle\, ds + \mu\langle c, G_2(\tau,t)x\rangle +$$

$$+\mu \int_t^{\tau} \langle c, G_2(\tau,s)\left[B_2(s)u_2(s) + C_2(s)v_2(s)\right]\rangle\, ds -$$

$$-\frac{\mu^2}{4} - \rho(\ell \mid \mathcal{X}_0) - \frac{\|\ell\|^2}{4}\}$$

Сгруппируем слагаемые

$$\tilde{S}(\tau,t) = G_2^T(\tau,t)G_1^T(t_0,\tau)\ell + \mu G_2^T(\tau,t)c,$$
$$\tilde{S}_1(t_0,\tau) = G_1^T(t_0,\tau)\ell,$$

имеем

$$V(t,x) = \min_{u_1,u_2} \max_{v_1,v_2} \min_{\tau\in[t_0,t]} \max_{\ell} \max_{\mu} \{$$

$$\tilde{S}^T(\tau,t)x + \int_t^{\tau} \tilde{S}^T(\tau,s)\left[B_2(s)u_2(s) + C_2(s)v_2(s)\right] ds +$$

$$+ \int_{\tau}^{t_0} \tilde{S}_1^T(t_0,s)\left[B_1(s)u_1(s) + C_1(s)v_1(s)\right] ds - \tag{1.3}$$

$$-\frac{\mu^2}{4} - \rho(\ell \mid \mathcal{X}_0) - \frac{\|\ell\|^2}{4}\}$$

Чтобы эффективно вычислять множества достижимости используется прием, который позволяет заменить поиск множества допустимых траекторий вычислением опорной функции к этому множетсву. Для перехода к опорным функциям требуется менять местами порядок минимумов и максимумов в (1.3), а для этого необходимо выполнение условий теоремы минимакса. Поэтому дальнейшие преобразования выполняются с целью обеспечения этих условий. Одним из достаточных условий перестановки является линейность по минимизирующему или максимизирующему параметру. Наша цель состоим в том, чтобы перенести операции минимума по u_1, u_2 и максимума по v_1, v_2 внутрь выражения функции цены, тем самым сводя минимизацию/максимизацию на функциональном пространстве $\mathcal{P}, \mathcal{W}$ к поиску экстремумов для выпуклых(вогнутых) функций. Первыми меняются местами $\max_{v_1,v_2} \min_\tau(\cdot) = \min_\tau \max_{v_1,v_2}(\cdot)$. Для примера, сначала рассмотрим функционал

$$T(\tau, v(s)) = \int\limits_t^\tau v(s)ds$$

Легко видеть, что $T(\tau, v(s))$, являясь линейным по v, не является таковым по τ. Тогда вместо τ возьмем функцию ограниченной вариации $\tau(w) = \phi(w)$ и преобразуем

$$T(\phi(w), v(s)) = \int\limits_{t_0}^t d\phi(w) \int\limits_t^w v(s)ds.$$

Мы заменили множество τ более широким множеством функций $\phi(w)$. Условием нормировки (или одним из) для этих функций служит следующее выражение

$$\int\limits_{t_0}^t d\phi(w) = 1.$$

Теперь функционал $T(\phi, v)$ является линейным по всем аргументам.

Аналогично поступим с $V(t,x)$:

$$V(t,x) = \min_{u_1,u_2} \max_{v_1,v_2} \min_{\phi(w)} \max_{\ell(w)} \max_{\mu(w)} \int\limits_{t_0}^t d\phi(w) \Bigg\{$$

$$\tilde{S}^T(w,t)x + \int\limits_t^w \tilde{S}^T(w,s) \left[B_2(s)u_2(s) + C_2(s)v_2(s)\right] ds +$$

$$+ \int\limits_w^{t_0} \tilde{S}_1^T(t_0,s) \left[B_1(s)u_1(s) + C_1(s)v_1(s)\right] ds -$$

$$-\frac{\mu^2}{4} - \rho(\ell \mid \mathcal{X}_0) - \frac{\|\ell\|^2}{4} \Bigg\},$$

Поскольку мы здесь воспользовались перестановкой

$$\int \max_{\ell,\mu} f(w,\ell,\mu) d\phi(w) = \max_{\ell(w),\mu(w)} \int f(w,\ell(w),\mu(w)) d\phi(w)$$

ℓ, μ теперь функции от w, $\ell = \ell(w)$ и $\mu = \mu(w)$.

Утверждение 1.

$$\max_{x(\cdot)} \int\limits_{t_0}^{t} f(x(s))ds = \int\limits_{t_0}^{t} \max_{x(s)} f(x(s))ds$$

Пусть

$$x^*(\cdot) = \arg\max_{x(\cdot)} \int\limits_{t_0}^{t} f(x(s))ds$$

$$x^\circ(\cdot) : \int\limits_{t_0}^{t} f(x^\circ(s)) = \int\limits_{t_0}^{t} \max_{x(s)} f(x(s))ds.$$

Предположим, что $x^*(\cdot) \neq x^\circ(\cdot)$ и $\int\limits_{t_0}^{t} f(x^*(s))ds \neq \int\limits_{t_0}^{t} f(x^\circ(s))ds$.

Тогда для выражения $m(s) = f(x^*(s)) - f(x^\circ(s))$ можно указать непересекающиеся отрезки $T_<, T_>, T_=$, на которых выполняются неравенства

$$\forall s \in T_< : \, m(s) < 0, \; \forall s \in T_> : \, m(s) > 0, \; \forall s \in T_= : \, m(s) = 0.$$

Для $T_>$ получаем, что

$$\forall s \in T_> : f(x^*(s)) > f(x^\circ(s)) = \max_{x(s)} f(x(s)$$

– противоречие.

Для $T_<$ получаем, что

$$\max_{x(\cdot)} \int\limits_{T_<} f(x(s))ds = \int\limits_{T_<} f(x^*(s))ds < \int\limits_{T_<} f(x^\circ(s))ds$$

– противоречие.

Остается единственный вариант, который и доказывает утверждение. ■

Можно заметить, что от w зависят только переменные $\tilde{S}, \tilde{S}_1$ и пределы интегрирования. Поменяем порядок интегрирования, чтобы собрать вместе члены, зависящие от w. Применяя правила замены

$$\int\limits_{t_0}^{t} d\phi(w) \int\limits_{t}^{w} ds(\cdot) = \int\limits_{t}^{t_0} ds \int\limits_{t_0}^{s} d\phi(w)(\cdot),$$

$$\int\limits_{t_0}^{t} d\phi(w) \int\limits_{w}^{t_0} ds(\cdot) = \int\limits_{t}^{t_0} ds \int\limits_{s}^{t} d\phi(w)(\cdot),$$

и делая замену переменных

$$S(t_0, t_1) = \int\limits_{t_0}^{t_1} \tilde{S}(w, t_1)\, d\phi(w) = \int\limits_{t_0}^{t_1} \left\{ G_2^T(w, t) G_1^T(t_0, w)\ell(w) + \mu(w) G_2^T(w, t)c \right\} \, d\phi(w),$$

$$S_1(t_0, t_1) = \int\limits_{t_0}^{t_1} \tilde{S}_1(t_0, w)\, d\phi(w), = \int\limits_{t_0}^{t_1} \left\{ G_1^T(t_0, w)\ell(w) \right\} \, d\phi(w),$$

$$K(\ell, \mu, \mathcal{X}_0) = \int\limits_{t_0}^{t} \left[\frac{\mu(w)^2}{4} + \rho(\ell(w) \mid \mathcal{X}_0) + \frac{\|\ell(w)\|^2}{4} \right] \, d\phi(w)$$

придем к

$$V(t,x)=\min_{u_1,u_2}\max_{v_1,v_2}\min_{\phi(w)}\max_{\ell(w)}\max_{\mu(w)}\Bigg\{$$

$$S^T(t_0,t)x+\int\limits_t^{t_0}S^T(t_0,s)\left[B_2(s)u_2(s)+C_2(s)v_2(s)\right]\,ds+$$

$$+\int\limits_t^{t_0}S_1^T(s,t)\left[B_1(s)u_1(s)+C_1(s)v_1(s)\right]\,ds- \tag{1.4}$$

$$-K(\ell,\mu,\mathcal{X}_0)\Bigg\},$$

где $K(\ell,\mu,\mathcal{X}_0)$ – выпуклая функция.

Будем искать опорную функцию к множеству достижимости $\mathcal{X}[t,\mathcal{X}_0]$, определяемому по найденному выше выражению (1.4) для $V(t,x)$. Пользуясь линейностью по ϕ, теперь можно переставить

$$\max_{v_1,v_2}\min_{\phi}\max_{\ell}\max_{\mu}(\cdot)=\min_{\phi}\max_{\ell}\max_{\mu}\max_{v_1,v_2}(\cdot),$$

и

$$\max_{v(\cdot)}\int\limits_t^{t_0}f(v(s))ds=\max_{v(\cdot)}\int\limits_{t_0}^{t}-f(v(s))ds=\int\limits_{t_0}^{t}\max_{v(s)}[-f(v(s))]ds$$

тогда

$$V(t,x)=\min_{u_1,u_2}\min_{\phi}\max_{\ell}\max_{\mu}\Bigg\{$$

$$S^T(t_0,t)x+\int\limits_t^{t_0}S^T(t_0,s)B_2(s)u_2(s)\,ds+\int\limits_{t_0}^{t}\rho(-S^T(t_0,s)\mid C_2(s)\mathcal{W}_2(s))\,ds$$

$$+\int\limits_t^{t_0}S_1^T(s,t)B_1(s)u_1(s)+\int\limits_{t_0}^{t}\rho(-S_1^T(s,t)\mid C_1(s)\mathcal{W}_1)\,ds-$$

$$-K(\ell,\mu,\mathcal{X}_0)\Bigg\}.$$

Далее, мы хотим поменять $\min_{u_1,u_2}(\cdot)$ на опорную функцию, но полученное выше выражение уже не является вогнутым по ℓ,μ. Поэтому, мы прибегаем к овыпуклению нужных членов и приходим к

$$V(t,x)=\min_{\phi}\max_{\ell}\max_{\mu}\Bigg\{$$

$$S^T(t_0,t)x-\int\limits_{t_0}^{t}\rho(S_1(s,t)\mid B_1(s)\mathcal{P}_1(s))\,ds-\int\limits_{t_0}^{t}\rho(S(t_0,s)\mid B_2(s)\mathcal{P}_2(s))\,ds-$$

$$-\mathrm{conv}\left\{-\int\limits_{t_0}^{t}\rho(-S_1(s,t)\mid C_1(s)\mathcal{W}_1(s))\,ds-\int\limits_{t_0}^{t}\rho(-S(t_0,s)\mid C_2(s)\mathcal{W}_2(s))\,ds+K(\ell,\mu,\mathcal{X}_0)\right\}\Bigg\}.$$

Утверждение 2.

$$\mathrm{conv}_{x(\cdot)}\int\limits_{t_0}^{t}f(x(t))dt=\int\limits_{t_0}^{t}\mathrm{conv}_{x(t)}f(x(t))dt$$

Примем
$$\operatorname{conv}(f) = f^{**}$$
Тогда
$$\left(\int\limits_{t_0}^{t} f(x(s))ds\right)^{*}(\ell(t)) = \max_{x(\cdot)}\left(\langle \ell, x\rangle_{L_2} - \int\limits_{t_0}^{t} f(x(s))ds\right)$$
$$\left(\int\limits_{t_0}^{t} f(x(t))dt\right)^{**}(y(t)) = \max_{\ell(\cdot)}\left(\langle y, \ell\rangle_{L_2} - \max_{x(\cdot)}\left(\langle \ell, x\rangle_{L_2} - \int\limits_{t_0}^{t} f(x(s))ds\right)\right) =$$
$$= \max_{\ell(\cdot)}\min_{x(\cdot)}\left(\langle y, \ell\rangle_{L_2} - \langle \ell, x\rangle_{L_2} + \int\limits_{t_0}^{t} f(x(s))ds\right) =$$
$$= \max_{\ell(\cdot)}\min_{x(\cdot)}\int\limits_{t_0}^{t}\left[\langle y(s), \ell(s)\rangle - \langle \ell(s), x(s)\rangle + f(x(s))\right]ds =$$
$$= \int\limits_{t_0}^{t}\max_{\ell(s)}\min_{x(s)}\left[\langle y(s), \ell(s)\rangle - \langle \ell(s), x(s)\rangle + f(x(s))\right]ds =$$
$$= \int\limits_{t_0}^{t}\max_{\ell(s)}\left[\langle y(s), \ell(s)\rangle - \max_{x(s)}\left\{\langle \ell(s), x(s)\rangle - f(x(s))\right\}\right]ds =$$
$$= \int\limits_{t_0}^{t} f^{**}(s)ds$$
■

Утверждение 3.
$$\min_{\ell}\left[\langle x, l\rangle + (\operatorname{conv}(y))(\ell)\right] = \min_{\ell}\left[\langle x, \ell\rangle + y(\ell)\right]$$
$$\min_{\ell}\left[\langle x, \ell\rangle + \max_{p}(\langle p, \ell\rangle - \max_{s}(\langle p, s\rangle - y(s)))\right] =$$
$$= \min_{\ell}\max_{p}\min_{s}\left[\langle x, l\rangle + \langle l, p\rangle - \langle p, s\rangle + y(s)\right] = \left\{\min_{\ell}\max_{p} = \max_{p}\min_{\ell}\right\} =$$
$$= \max_{p}\min_{\ell}\min_{s}\left[\langle \ell, x+p\rangle - \langle p, s\rangle + y(s)\right] = \max_{p}\left[\begin{cases} -\inf, & p \neq -x \\ 0, & p = -x \end{cases} + \min_{s}(-\langle p, s\rangle + y(s))\right] =$$
$$= \{\text{из первого } \min \text{ находим } \ p = -x\} = \min_{s}(-\langle -x, s\rangle + y(s)) =$$
$$= \min_{\ell}(\langle x, \ell\rangle + y(\ell))$$
■

Рассмотрим примеры в $\mathbb{R}^1$

Пример 1.

$$
\begin{cases}
\left[\begin{array}{l} \dot{x} = 2u + v; \\ \dot{x} = u; \end{array}\right. \\
u \in [0,1]; \\
v \in [0,1]; \\
\mathcal{X}_0 = \{x \in [-2,-1]\}; \\
t \in [0,4]; \\
H = \{x = 0\}.
\end{cases} \tag{1.5}
$$

Пример 2.

$$
\begin{cases}
\left[\begin{array}{l} \dot{x} = u; \\ \dot{x} = 2u + v; \end{array}\right. \\
u \in [0,1]; \\
v \in [0,1]; \\
\mathcal{X}_0 = \{x \in [-2,-1]\}; \\
t \in [0,4]; \\
H = \{x = 0\}.
\end{cases} \tag{1.6}
$$

Начальные условия для (1.5) и (1.6) одинаковы. Функция цены для задач (1.5) и (1.6).

$$
V(t,x) = \min_u \max_v \max_\tau \max_\ell \max_\mu \left\{ \left\langle \ell, x_0 \mid_{x(t)=x} \right\rangle - \rho(\ell \mid \mathcal{X}_0) - \frac{\|\ell\|^2}{4} + \mu \left\langle x(\tau), c \right\rangle - \frac{\mu^2}{4} \right\}.
$$

В одномерном случае, если рассматривать отрезок $[\alpha,\beta]$ как эллипсоид $\mathcal{E}(q,Q)$, то $q = \frac{\beta+\alpha}{2}$, $Q = \left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right)^2$. Тогда

$$
\rho\left(\ell \mid \mathcal{E}(()q,Q)\right) = \langle \ell, q \rangle + \langle \ell, Q\ell \rangle^{\frac{1}{2}} = \ell \cdot q + \mid \ell \mid \sqrt{Q}.
$$

Поскольку в уравнениях примеров (1.5) и (1.6) фундаментальные матрицы $G(t,t_0) \equiv I$, $c = 1$, то можно написать

$$
V(t,x) = \min_u \max_v \min_\tau \max_\ell \max_\mu \big\{ \ell \cdot x + \int_t^\tau \ell \cdot [B_2 u_2 + v_2] ds + \int_\tau^{t_0} \ell \cdot [B_1 u_1 + v_1] ds -
$$

$$
-(\ell \cdot x_0 + \mid \ell \mid \sqrt{X_0}) - \frac{\ell^2}{4} + \mu \big[x + \int_t^\tau [B_2 u_2 + v_2] ds \big] - \frac{\mu^2}{4} \big\}.
$$

Здесь $\mathcal{X}_0 = \mathcal{E}(x_0, X_0)$, для (1.5) $v_2 \equiv 0$, для (1.6) $v_1 \equiv 0$. Если сократить, то получим для (1.5):

$$
V(t,x) = \min_u \max_v \min_\tau \max_\ell \max_\mu \big\{ (\ell + \mu) x + \int_t^\tau (\ell + \mu) B_2 u_2 ds + \int_\tau^{t_0} \ell B_1 u_1 ds + \int_\tau^{t_0} \ell v_1 ds -
$$

$$
-(\ell \cdot x_0 + \mid \ell \mid \sqrt{X_0}) - \frac{\ell^2}{4} - \frac{\mu^2}{4} \big\}.
$$

Для (1.6)

$$V(t,x)=\min_u\max_v\min_\tau\max_\ell\max_\mu\big\{(\ell+\mu)x+\int\limits_t^\tau(\ell+\mu)B_2u_2ds+\int\limits_t^\tau(\ell+\mu)v_2ds+\int\limits_\tau^{t_0}\ell B_1u_1ds-$$

$$-(\ell\cdot x_0+\mid\ell\mid\sqrt{X_0})-\frac{\ell^2}{4}-\frac{\mu^2}{4}\big\}.$$

Эти выражения не являются выпуклыми по τ, чтобы можно было переставлять $\max_v\min_\tau$. Поэтому прибегаем к функции распределения $\phi(w)$. $\phi(w)$ – функция ограниченной вариации.

$$\int\limits_{t_0}^t d\phi(w)=1.$$

Обозначим

$$S_2(t_0,s)=\int\limits_{t_0}^s \ell(w)+\mu(w)d\phi(w)$$

$$S_1(s,t)=\int\limits_s^t \ell(w)d\phi(w)$$

Тогда приходим к найденному ранее выражению (1.). Используя формулу вычисления опорной функции для множеств из $\mathbb{R}^1$ запишем

$$V(t,x)=\min_\phi\max_\ell\max_\mu\Bigg\{$$

$$S_2(t_0,t)x-\int\limits_{t_0}^t S_1(s,t)p_1+\mid S_1(s,t)\mid\sqrt{P_1}ds-\int\limits_{t_0}^t S_2(t_0,s)p_2+\mid S_2(t_0,s)\mid\sqrt{P_2}\,ds-$$

$$-\mathrm{conv}\Bigg\{\int\limits_{t_0}^t w_1S_1(s,t)-\sqrt{W_1}\mid\ S_1(s,t)\mid+w_2S_2(t_0,s)-\sqrt{W_2}\mid S_2(t_0,s)\mid\ ds+$$

$$+\int\limits_{t_0}^t\frac{\ell^2(w)}{4}+\frac{\mu^2(w)}{4}+\ell(w)x_0+\mid\ell(w)\mid\sqrt{X_0}\,d\phi(w)\Bigg\}\Bigg\}.$$