МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Московский Государственный Университет им. М.В.Ломоносова

Факультет вычислительной математики и кибернетики

Кафедра системного анализа

Магистерская программа по направлению

Математические модели сложных систем: теория, алгоритмы, приложения

Магистерская диссертация на тему

Построение множества достижимости для гибридной системы с одним переключением с неопределенностью

Выполнил:

Селиверстов Д.С.

Научный руководитель:

к.ф-м.н. Точилин П.А.

2010

Файл annotation.tex:

Аннотация

Данная магистерская диссертация посвящена решению одной из классических задач теории управления для нового класса сложных, нелинейных систем. А именно, решается задача построения множества достижимости для гибридной системы с одним переключением, с неопределенностью в дифференциальных уравнениях. В работе рассмотрена модель гибридной динамической системы, состоящая из двух систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений и условия переключения между ними. Задача состоит в построении и аппроксимации множества всех траекторий этой гибридной системы в конечный момент времени, в которые гарантированно можно попасть, выбрав соответствующее управление, вне зависимости от реализации помехи.

В диссертации получено решение поставленной задачи с привлечением аппарата выпуклого анализа, при помощи сопряженных функций и функций цены минимаксного типа. Множество достижимости представлено в виде объединения множеств уровня (множеств Лебега) для специальных функций. Рассмотрено решение задачи методами многозначного анализа. Этот подход позволяет явно построить искомое множество достижимости посредством операций над выпуклыми, компактными множествами. В работе 20 страниц, 2 иллюстраций.

Содержание

Файл intro.tex:

1. Введение.

В данной работе рассматривается математическая модель гибридной системы, состоящей из двух систем обыкновенных дифференциальных уравнений с управляющими параметрами и помехами, а также из условия замены одной системы на другую. Траектория такой системы развивается в каждый момент времени в силу одной из двух систем дифференциальных уравнений. При достижении определенной гиперплоскости в фазовом пространстве происходит обязательная смена активной системы уравнений — так называемое переключение траектории гибридной системы [3]. Рассматриваемые системы обыкновенных дифференциальных уравнений являются линейными по фазовым переменных, а также по управляющим параметрам и помехам. Однако, в целом система нелинейна. Похожие модели гибридных систем активно исследуются в последние годы (см. например, [6], [11], [10]), для них актуальны многие классические задачи управления, такие как задачи достижимости, верификации, синтеза управления в условиях реально доступной информации и др. Особенно важны задачи, в которых учитываются неопределенности, помехи, которые могут быть связаны как с ошибками математического моделирования, так и с заранее неизвестными воздействиями на систему.

В данной работе для гибридной системы решается задача построения множества достижимости "минимаксного типа" в классе программных управлений. То есть необходимо построить множество всех позиций системы, в которые можно попасть за счет применения программных управлений, несмотря на наличие в системе заранее неизвестных помех. Для действующих в системе помех известны лишь по-точечные ограничения. Решение данной задачи можно рассматривать как первый шаг к построению теории достижимости при неопределенности для гибридных систем с кусочно-линейной структурой в классах программных или позиционных управлений.

Поскольку рассматриваемые дифференциальные уравнения линейны по фазовым переменным, управляениям и помехам, то для решения поставленной задачи целесообразно использовать аппарат сопряженных функций и другие методы выпуклого анализа [4], [5]. Кроме того, для аппроксимации множеств достижимости возможно использование методов эллипсоидального исчисления [9], [8]. В данной работе рассматриваеся два подхода к решению задачи достижимости: 1) при помощи функций цены и методов выпуклого анализа, а также 2) при помощи методов многозначного анализа. В первом случае множества достижимости представлены в виде множеств уровней (множеств Лебега) для специальных функций, а во втором методе указанные множества построены в явном виде, за счет применения операций с выпуклыми компактами.

Файл postanovka.tex:

2. Постановка задачи

Рассматриваются две взаимосвязанные системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающих состояние некоторой модели до переключения (смены системы дифференциальных уравнений) и после:

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \dot{x}^{(1)} = A^{(1)}(t)x^{(1)} + B^{(1)}(t)u^{(1)}(t) + C^{(1)}(t)v^{(1)}(t); \\ x(t_0) \in \mathcal{E}(x_0, X_0) = \mathcal{X}_0; \end{cases} \\ \begin{cases} \dot{x}^{(2)} = A^{(2)}(t)x^{(2)} + B^{(2)}(t)u^{(2)}(t) + C^{(2)}(t)v^{(2)}(t); \\ x(\tau) \in \mathcal{X}^{(1)}(\tau, t_0) \cap H; \end{cases} \end{array} \right. \\ H = \{x \in \mathbb{R}^n \colon \langle x, c \rangle = \gamma\} \text{— гиперплоскость переключения;} \\ A(t) \in \mathbb{R}^{n\times n},\ B(t) \in \mathbb{R}^{n\times m},\ C(t) \in \mathbb{R}^{n\times k};\ A(t), B(t), C(t) \in L_1[t_0, t_1]; \\ \tau :\ \left\langle x^{(1)}(\tau), c \right\rangle - \gamma = 0,\ \tau \in [t_0, t_1] \\ u^{(1)}(t) \in \mathcal{E}(p^{(1)}(t), P^{(1)}(t)) = \mathcal{P}^{(1)}[t_0, t_1]; \\ v^{(1)}(t) \in \mathcal{E}(w^{(1)}(t), W^{(1)}(t)) = \mathcal{V}^{(1)}[t_0, t_1]; \\ u^{(2)}(t) \in \mathcal{E}(p^{(2)}(t), P^{(2)}(t)) = \mathcal{P}^{(2)}[t_0, t_1]; \\ v^{(2)}(t) \in \mathcal{E}(w^{(2)}(t), W^{(2)}(t)) = \mathcal{V}^{(2)}[t_0, t_1]; \end{cases} \tag{2.1}$$

где $\mathcal{P}^{(1,2)}[t_0, t_1], \mathcal{V}^{(1,2)}[t_0, t_1]$ - кусочно-непрерывные эллипсоидальнозначные отображения. В неизвестный заранее момент времени τ, при пересечении наперед известной гиперплоскости $H = \{x \in \mathbb{R}^n \colon \langle x, c \rangle = \gamma\}$, происходит переключение с первой системы на вторую. $v^{(i)}(t)$ - неизвестная функция, неопределенность, область значений которой в каждый момент t ограничена k-мерной эллипсоидальной областью $\mathcal{V}^{(i)}(t)$, и принадлежащая классу интегрируемых функций $L_1[t_0, t_1]$. Управление $(u^{(1)}(\cdot), u^{(2)}(\cdot))$ – интегрируемые в $L_1[t_0, t_2]$ функции, ограниченные в каждый момент t эллипсоидальными областями $u^{(1)}(t) \in \mathcal{P}^{(1)}(t)$,$u^{(2)}(t) \in \mathcal{P}^{(}$ Оно выбирается из класса программных управлений то есть так, что оно определяется к начальному моменту t_0 заранее и уже не изменяется в зависимости от поведения системы в дальнейшем, оно также не зависит от времени переключения τ. Для решения задачи важно, чтобы траектория гибридной системы удовлетворяла условию односторонней проницаемости, то есть чтобы при переходе через плоскость H в момент τ всегда выполнялось

$$\begin{cases} \langle x(\tau), c \rangle - \gamma = 0 \\ \langle x(\tau + \epsilon), c \rangle - \gamma > 0; \end{cases} \tag{2.2}$$

для любого малого $\epsilon > 0$. Это предположение будем считать выполненным как для первой системы $x(t) = x^{(1)}(t)$, так и для второй $x(t) = x^{(2)}(t)$, где $x^{(1)}(t), x^{(t)}(t)$ – фазовые переменные (траектории) системы соответственно до переключения и после. Это означает, что траектория системы может пересекать гиперплоскость переключения только один раз с переходом к другой системе, что также гарантирует связность множеста $\{(x(\tau), \tau) \mid x(\tau) \cap H\}$. Требуется построить множество достижимости $\mathcal{X}[t, t_0]$ в классе допустимых управлений $\mathcal{P}[t_0, t_1]$, в момент времени $t > t_0$, при известном начальном множестве $\mathcal{X}_0$. Таким образом, необходимо найти множество точек $\mathcal{X}[t, t_0, \mathcal{X}_0] = \{x(t)\}$, в которые система может гарантированно прийти из начального множества $\mathcal{X}^0$ за счет выбора соответствующего управления $(u^{(1)}(\cdot), u^{(2)}(\cdot))$ вне зависимости от помехи $(v^{(1)}(\cdot), v^{(2)}(\cdot))$.

Определение 1. *Множеством достижимости $\mathcal{X}[t_1, t_0, \mathcal{X}_0]$ системы линейных дифференциальных уравнений в момент t_1 называется*

$$\mathcal{X}[t_1, t_0, \mathcal{X}_0] = \{x_1 \mid \exists u(\cdot) : \ \forall v(\cdot), \exists x_0 \in \mathcal{X}_0 : x(t_1, t_0, x_0) = x_1\},$$

где $x(\cdot, t, x)$ – траектория системы при фиксированных $u(\cdot), v(\cdot)$ и начальном условии $x(t) = x$. $\mathcal{X}_0$ – начальное множество в момент времени t_0.

Определение 2. *Множеством достижимости $\mathcal{X}[t_1, t_0, \mathcal{X}_0]$ для гибридной системы* (2.1) *называется*

$$\begin{gathered}\mathcal{X}[t_1, t_0, \mathcal{X}_0] = \{x_1 \mid \exists u^{(1)}(\cdot) \in \mathcal{P}^{(1)}, u^{(2)}(\cdot) \in \mathcal{P}^{(2)} : \\ \forall v^{(1)}(\cdot) \in \mathcal{V}^{(1)}, v^{(2)}(\cdot) \in \mathcal{V}^{(2)} : \exists x_0 \in \mathcal{X}_0 : \\ x(t_1, t_0, x_0) = x_1, \exists \tau : x(\tau, t_0, x_0) \cap H \neq \emptyset, t_1 \geq \tau > t_0\},\end{gathered}$$

где $x(\tau, t, x_0)$ – траектория гибридной системы при фиксированном управлении $u^{(1,2)}$ и помехе $v^{(1,2)}$.

Файл teoriya.tex:

3. Теоретическая часть

Поиск множества достижимости непосредственным расчетом каждой траектории ведет к большим вычислительным издержкам. Поэтому разумно прибегнуть к различным методам, которые позволили бы воспользоваться свойствами данной модели, такими как линейность системы уравнений и выпуклость множеств ограничений и начального множества, что позволит сократить количество вычислений с помощью параметризации множеств с помощью вычисления конечномерных функций. Например, можно использовать множества уровней некоторой специальной функции, и по ним однозначно вычислять искомое множество. Другой подход основывается на применении приемов многзначного анализа. Так, если известна опорная функция к выпуклому компактному множеству, то по этой функции можно восстановить все множество. Рассмотрим сначала первый подход.

3.1 Функция цены

Мы будем искать множество достижимости с использованием функции цены, значениями которой будет расстояние выбранной точки $x(t)$ от искомого множества $\mathcal{X}[t, t_0, \mathcal{X}_0]$. Согласно (Опр.2.) нам необходимо найти наиболее подходящее управление, которое позволит сократить до мининмума это расстояние при любой возможной реализации помехи. Для этого используется минимаксный подход, описанный в [2] .

Для поиска множества $\mathcal{X}[t, t_0]$ используется функция цены вида

$$V(t, x) = \min_{u(\cdot)} \max_{v(\cdot)} d^2(x_0, \mathcal{X}_0) \mid_{x(t)=x}$$

где $d(x_0, \mathcal{X}_0)$ - расстояние между точкой x_0 и множеством $\mathcal{X}_0$, определяемое метрикой $d(x, \mathcal{X}) = \min_{y \in \mathcal{X}} \|x - y\|$. Поясним наш выбор. Мы ищем множество $\mathcal{X}[t, \mathcal{X}_0]$ всех таких точек, что для $\forall x^*(t) \in \mathcal{X}[t, \mathcal{X}_0]$ можно заранее подобрать некоторое управление $u^*(\cdot)$ и некоторое подмножество $\{x^*(t_0)\} \in \mathcal{X}_0$ так, чтобы при любой помехе $v(\cdot)$ гарантировать вхождение $x^*(t) \in \{x(t, u^*(\cdot), \{x^*(t_0)\})\}_{\forall v(\cdot)}$. В рассматриваемой здесь задаче кроме помехи

$v(\cdot)$ появляется другой неизвестный параметр $\tau(u,v)$ – момент переключения, в который меняется динамика системы, что приводит к существенному усложенинию задачи.

Рассмотрим функцию $\phi(x) = d^2(x, \mathcal{X})$,где $\mathcal{X}$ – выпуклый компакт. Тогда $\phi(x))$ – выпуклая, собственная, замкнутая, и тогда операция двойного сопряжения приводит к тождественному результату [4] . Поэтому удобно выразить $V(x,t)$ через двойное сопряжение функции расстояния $d^2(x, \mathcal{X}_0)$, что позволит заменить вычисление минимума на множестве в функции расстояния на вычисление максимума функции по n-мерному аргументу.

$$\phi^*(\ell^*) = \sup_x(\langle x, \ell^*\rangle - d^2(x, \mathcal{X}_0)) = \rho(\ell^* \mid \mathcal{X}_0) + \frac{\|\ell^*\|^2}{4},$$

$$\phi^{**}(\ell^{**}) = \sup_{\ell^*}\left(\langle \ell^*, \ell^{**}\rangle - \rho\left(\ell^* \mid \mathcal{X}_0\right) - \frac{\|\ell^*\|^2}{4}\right)$$

Поскольку $\phi(\ell)$ – замкнутая функция, sup достигается и его можно заменить на max , тогда

$$V(t,x) = \min_{u(\cdot)}\max_{v(\cdot)}\max_{\ell}\left(\langle \ell, x_0 \mid_x\rangle - \rho\left(\ell \mid \mathcal{X}_0\right) - \frac{\|\ell^*\|^2}{4}\right). \tag{3.1}$$

Найдем выражения для поиска $x_0 \mid_{x(t_1)=x}$. Пусть траектория точки в момент t_1 известна $x(t_1) = x$. Идя в обратном времени, найдем её значение в момент $\tau \leqslant t \leqslant t_1$ при известных $B(s), C(s), u(s), v(s)$ до переключения:

$$x^{(2)}(t,x,u,v) = G_2(t,t_1)x + \int_{t_1}^{t} G_2(t,s)\left[B_2(s)u_2(s) + C_2(s)v_2(s)\right]ds, \text{при}\, \tau \leqslant t \leqslant t_1,$$

и после для $t_0 \leqslant t \leqslant \tau$:

$$\begin{aligned} x^{(2,1)}(t,\tau,x,u,v) =& G_1(t,\tau)G_2(\tau,t_1)x + G_1(t,\tau)\int_{t_1}^{\tau} G_2(t,s)\left[B_2(s)u_2(s) + C_2(s)v_2(s)\right]ds + \\ &+ \int_{\tau}^{t_0} G_1(t,s)\left[B_1(s)u_1(s) + C_1(s)v_1(s)\right]ds\,,\ \text{при}\, t_0 \leqslant t \leqslant \tau. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Нам необходимо, чтобы момент τ в этих выражениях удовлетворял условию на переключение, так чтобы $\langle x(\tau), c\rangle = \gamma$. Поскольку $d^2(x, \mathcal{X}) \geqslant 0$, то $V(x,t) \geqslant 0$. Тогда если $\mathcal{X}[t,t_0] = \{x \mid V(t,x) \leqslant 0\}, \forall$ то достаточно ввести штрафующий член $(\langle x(\tau), c\rangle - \gamma)^2$ в выражение для $V(t,x)$, тем самым обеспечивая для $\mathcal{X}[t,t_0]$ включение только тех траекторий, которые удовлетворяют нашим двум системам и условию на момент переключения.

Так как мы рассматриваем задачу в классе программных управлений, мы не можем строить управление в зависимости от текущего состояния системы, а должны определять его заранее. Поэтому, в формуле для $V(t,x)$ нельзя искать отдельно $\min_{u^{(i)}}\max_{v^{(i)}}$ для каждой из подсистем "до" и "после", так как момент переключения τ не известен заранее. Это означает, что выбираемое управление не может меняться в зависимости от τ.

$$V(t,x) = \min_{\substack{u_1 \in \mathcal{P}^1 \\ u_2 \in \mathcal{P}^2}}\max_{\substack{v_1 \in \mathcal{V}^1 \\ v_2 \in \mathcal{V}^2}}\min_{\tau}\left\{d^2(x_0|_{x(t)=x}, \mathcal{X}_0) + \left(\langle x(\tau), c\rangle - \gamma\right)^2\right\}.$$

Это значит, что искомое множество $\mathcal{X}[t, \mathcal{X}_0]$ в классе программных управлений содержит только те траектории, которые при любой допустимой помехе $v_1(\cdot), v_2(\cdot)$ и при любом

$\tau(v,\cdot)$ гарантированно могут попасть на множество $\mathcal{X}[t,\mathcal{X}_0]$ Пока примем $\gamma = 0$. Для линеаризации условия на переключение сделаем подстановку

$$\langle x,c\rangle^2 \equiv \max_{\mu}\left\{\mu\left\langle x,c\right\rangle - \frac{\mu^2}{4}\right\},$$

и, используя (3.1), имеем

$$V(t,x) = \min_{u_1,u_2}\max_{v_1,v_2}\min_{\tau}\left\{\max_{\ell}\max_{\mu}\left\{\left\langle \ell, x_0 \mid_{x(t)=x}\right\rangle + \mu\left\langle x(\tau),c\right\rangle - \frac{\mu^2}{4} - \rho(\ell \mid \mathcal{X}_0) - \frac{\|\ell\|^2}{4}\right\}\right\}.$$

Раскрывая (3.2), получим

$$V(t,x) = \min_{u_1,u_2}\max_{v_1,v_2}\min_{\tau\in[t_0,t]}\max_{\ell}\max_{\mu}\{$$

$$\langle \ell, G_1(t_0,\tau)G_2(\tau,t)x\rangle + \int_t^{\tau}\langle \ell, G_1(t_0,\tau)G_2(\tau,s)\left[B_2(s)u_2(s)+C_2(s)v_2(s)\right]\rangle\, ds +$$

$$+\int_{\tau}^{t_0}\langle \ell, G_1(t_0,s)\left[B_1(s)u_1(s)+C_1(s)v_1(s)\right]\rangle\, ds + \mu\left\langle c, G_2(\tau,t)x\right\rangle +$$

$$+\mu\int_t^{\tau}\langle c, G_2(\tau,s)\left[B_2(s)u_2(s)+C_2(s)v_2(s)\right]\rangle\, ds -$$

$$-\frac{\mu^2}{4} - \rho(\ell \mid \mathcal{X}_0) - \frac{\|\ell\|^2}{4}\}$$

Сгруппируем слагаемые

$$\tilde{S}(\tau,t) = G_2^T(\tau,t)G_1^T(t_0,\tau)\ell + \mu G_2^T(\tau,t)c,$$
$$\tilde{S}_1(t_0,\tau) = G_1^T(t_0,\tau)\ell,$$

имеем

$$\begin{gathered}
V(t,x) = \min_{u_1,u_2}\max_{v_1,v_2}\min_{\tau\in[t_0,t]}\max_{\ell}\max_{\mu}\{ \\
\tilde{S}^T(\tau,t)x + \int_t^{\tau}\tilde{S}^T(\tau,s)\left[B_2(s)u_2(s)+C_2(s)v_2(s)\right]\, ds + \\
+\int_{\tau}^{t_0}\tilde{S}_1^T(t_0,s)\left[B_1(s)u_1(s)+C_1(s)v_1(s)\right]\, ds - \\
-\frac{\mu^2}{4} - \rho(\ell \mid \mathcal{X}_0) - \frac{\|\ell\|^2}{4}\}
\end{gathered} \tag{3.3}$$

Чтобы эффективно вычислять множества достижимости используется прием, который позволяет заменить поиск множества допустимых траекторий вычислением опорной функции к этому множетсву. Для перехода к опорным функциям требуется менять местами порядок минимумов и максимумов в (3.3), а для этого необходимо выполнение условий теоремы минимакса. Поэтому дальнейшие преобразования выполняются с целью обеспечения этих условий. Одним из достаточных условий перестановки является линейность по минимизирующему или максимизирующему параметру. Наша цель состоим в том, чтобы перенести операции минимума по u_1, u_2 и максимума по v_1, v_2 внутрь выражения функции цены, тем самым сводя минимизацию/максимизацию на функциональном пространстве $\mathcal{P}, \mathcal{V}$ к поиску экстремумов для выпуклых(вогнутых) функций. Первыми меняются местами $\max_{v_1,v_2}\min_\tau(\cdot)=\min_\tau\max_{v_1,v_2}(\cdot)$. Для примера, сначала рассмотрим функционал

$$T(\tau, v(s)) = \int\limits_t^\tau v(s)ds$$

Легко видеть, что $T(\tau, v(s))$, являясь линейным по v, не является таковым по τ. Тогда вместо τ возьмем функцию ограниченной вариации $\tau(w)=\phi(w)$ и преобразуем

$$T(\phi(w), v(s)) = \int\limits_{t_0}^t d\phi(w)\int\limits_t^w v(s)ds.$$

Мы заменили множество τ более широким множеством функций $\phi(w)$. Условием нормировки для этих функций служит следующее выражение

$$\int\limits_{t_0}^t d\phi(w) = 1.$$

Теперь функционал $T(\phi, v)$ является линейным по всем аргументам.

Аналогично поступим с $V(t,x)$:

$$V(t,x) = \min_{u_1,u_2}\max_{v_1,v_2}\min_{\phi(w)}\max_{\ell(w)}\max_{\mu(w)}\int\limits_{t_0}^t d\phi(w)\Bigg\{$$

$$\tilde{S}^T(w,t)x + \int\limits_t^w \tilde{S}^T(w,s)\left[B_2(s)u_2(s)+C_2(s)v_2(s)\right]\,ds +$$

$$+\int\limits_w^{t_0}\tilde{S}_1^T(t_0,s)\left[B_1(s)u_1(s)+C_1(s)v_1(s)\right]\,ds -$$

$$-\frac{\mu^2}{4} - \rho(\ell \mid \mathcal{X}_0) - \frac{\|\ell\|^2}{4}\Bigg\},$$

Поскольку мы здесь воспользовались перестановкой

$$\int \max_{\ell,\mu} f(w,\ell,\mu)d\phi(w) = \max_{\ell(w),\mu(w)}\int f(w,\ell(w),\mu(w))d\phi(w)$$

ℓ, μ теперь функции от w, $\ell=\ell(w)$ и $\mu=\mu(w)$.

Утверждение 1.

$$\max_{x(\cdot)}\int\limits_{t_0}^t f(x(s))ds = \int\limits_{t_0}^t \max_{x(s)} f(x(s))ds$$

Пусть

$$x^*(\cdot) = \arg\max_{x(\cdot)}\int\limits_{t_0}^t f(x(s))ds$$

$$x^\circ(\cdot): \int\limits_{t_0}^{t} f(x^\circ(s)) = \int\limits_{t_0}^{t} \max_{x(s)} f(x(s))ds.$$

Предположим, что $x^*(\cdot) \neq x^\circ(\cdot)$ и $\int\limits_{t_0}^{t} f(x^*(s))ds \neq \int\limits_{t_0}^{t} f(x^\circ(s))ds.$

Тогда для выражения $m(s) = f(x^*(s)) - f(x^\circ(s))$ можно указать непересекающиеся отрезки $T_<, T_>, T_=$, на которых выполняются неравенства

$$\forall s \in T_< : \; m(s) < 0, \; \forall s \in T_> : \; m(s) > 0, \; \forall s \in T_= : \; m(s) = 0.$$

Для $T_>$ получаем, что

$$\forall s \in T_> : f(x^*(s)) > f(x^\circ(s)) = \max_{x(s)} f(x(s)$$

– противоречие.

Для $T_<$ получаем, что

$$\max_{x(\cdot)} \int\limits_{T_<} f(x(s))ds = \int\limits_{T_<} f(x^*(s))ds < \int\limits_{T_<} f(x^\circ(s))ds$$

– противоречие.

Остается единственный вариант, который и доказывает утверждение. ■

Можно заметить, что от w зависят только переменные $\tilde{S}, \tilde{S}_1$ и пределы интегрирования. Поменяем порядок интегрирования, чтобы собрать вместе члены, зависящие от w. Применяя правила замены

$$\int\limits_{t_0}^{t} d\phi(w) \int\limits_{t}^{w} ds(\cdot) = \int\limits_{t}^{t_0} ds \int\limits_{t_0}^{s} d\phi(w)(\cdot),$$

$$\int\limits_{t_0}^{t} d\phi(w) \int\limits_{w}^{t_0} ds(\cdot) = \int\limits_{t}^{t_0} ds \int\limits_{s}^{t} d\phi(w)(\cdot),$$

и делая замену переменных

$$S(t_0, t_1) = \int\limits_{t_0}^{t_1} \tilde{S}(w, t_1)\, d\phi(w) = \int\limits_{t_0}^{t_1} \left\{ G_2^T(w,t) G_1^T(t_0, w)\ell(w) + \mu(w) G_2^T(w,t)c \right\} \, d\phi(w),$$

$$S_1(t_0, t_1) = \int\limits_{t_0}^{t_1} \tilde{S}_1(t_0, w)\, d\phi(w), = \int\limits_{t_0}^{t_1} \left\{ G_1^T(t_0, w)\ell(w) \right\} \, d\phi(w),$$

$$K(\ell, \mu, \mathcal{X}_0) = \int\limits_{t_0}^{t} \left[\frac{\mu(w)^2}{4} + \rho(\ell(w) \mid \mathcal{X}_0) + \frac{\|\ell(w)\|^2}{4} \right] \, d\phi(w)$$

придем к

$$V(t,x)=\min_{u_1,u_2}\max_{v_1,v_2}\min_{\phi(w)}\max_{\ell(w)}\max_{\mu(w)}\Big\{$$

$$S^T(t_0,t)x+\int\limits_t^{t_0} S^T(t_0,s)\left[B_2(s)u_2(s)+C_2(s)v_2(s)\right]\,ds+$$

$$+\int\limits_t^{t_0} S_1^T(s,t)\left[B_1(s)u_1(s)+C_1(s)v_1(s)\right]\,ds- \tag{3.4}$$

$$-K(\ell,\mu,\mathcal{X}_0)\Big\},$$

где $K(\ell,\mu,\mathcal{X}_0)$ – выпуклая функция.

Будем искать опорную функцию к множеству достижимости $\mathcal{X}[t,\mathcal{X}_0]$, определяемому по найденному выше выражению (3.4) для $V(t,x)$. Пользуясь линейностью по ϕ, теперь можно переставить

$$\max_{v_1,v_2}\min_{\phi}\max_{\ell}\max_{\mu}(\cdot)=\min_{\phi}\max_{\ell}\max_{\mu}\max_{v_1,v_2}(\cdot),$$

и

$$\max_{v(\cdot)}\int\limits_t^{t_0} f(v(s))ds=\max_{v(\cdot)}\int\limits_{t_0}^{t}-f(v(s))ds=\int\limits_{t_0}^{t}\max_{v(s)}[-f(v(s))]ds$$

тогда

$$V(t,x)=\min_{u_1,u_2}\min_{\phi}\max_{\ell}\max_{\mu}\Big\{$$

$$S^T(t_0,t)x+\int\limits_t^{t_0} S^T(t_0,s)B_2(s)u_2(s)\,ds+\int\limits_{t_0}^{t}\rho(-S^T(t_0,s)\mid C_2(s)\mathcal{V}_2(s))\,ds$$

$$+\int\limits_t^{t_0} S_1^T(s,t)B_1(s)u_1(s)+\int\limits_{t_0}^{t}\rho(-S_1^T(s,t)\mid C_1(s)\mathcal{V}_1)\,ds-$$

$$-K(\ell,\mu,\mathcal{X}_0)\Big\}.$$

Далее, мы хотим поменять $\min_{u_1,u_2}(\cdot)$ на опорную функцию, но полученное выше выражение уже не является вогнутым по ℓ,μ. Поэтому, мы прибегаем к овыпуклению нужных членов и приходим к

$$V(t,x)=\min_{\phi}\max_{\ell}\max_{\mu}\Big\{$$

$$S^T(t_0,t)x-\int\limits_{t_0}^{t}\rho(S_1(s,t)\mid B_1(s)\mathcal{P}_1(s))\,ds-\int\limits_{t_0}^{t}\rho(S(t_0,s)\mid B_2(s)\mathcal{P}_2(s))\,ds-$$

$$-\mathrm{conv}\left\{-\int\limits_{t_0}^{t}\rho(-S_1(s,t)\mid C_1(s)\mathcal{V}_1(s))\,ds-\int\limits_{t_0}^{t}\rho(-S(t_0,s)\mid C_2(s)\mathcal{V}_2(s))\,ds+K(\ell,\mu,\mathcal{X}_0)\right\}\Big\}.$$

Файл prim2p.tex:

Утверждение 2.

$$\mathrm{conv}_{x(\cdot)} \int\limits_{t_0}^{t} f(x(t))dt = \int\limits_{t_0}^{t} \mathrm{conv}_{x(t)} f(x(t))dt$$

Примем

$$\mathrm{conv}(f) = f^{**}$$

Тогда

$$\left(\int\limits_{t_0}^{t} f(x(s))ds\right)^{*}(\ell(t)) = \max_{x(\cdot)}\left(\langle \ell, x\rangle_{L_2} - \int\limits_{t_0}^{t} f(x(s))ds\right)$$

$$\left(\int\limits_{t_0}^{t} f(x(t))dt\right)^{**}(y(t)) = \max_{\ell(\cdot)}\left(\langle y, \ell\rangle_{L_2} - \max_{x(\cdot)}\left(\langle \ell, x\rangle_{L_2} - \int\limits_{t_0}^{t} f(x(s))ds\right)\right) =$$

$$= \max_{\ell(\cdot)}\min_{x(\cdot)}\left(\langle y, \ell\rangle_{L_2} - \langle \ell, x\rangle_{L_2} + \int\limits_{t_0}^{t} f(x(s))ds\right) =$$

$$= \max_{\ell(\cdot)}\min_{x(\cdot)}\int\limits_{t_0}^{t}\left[\langle y(s), \ell(s)\rangle - \langle \ell(s), x(s)\rangle + f(x(s))\right]ds =$$

$$= \int\limits_{t_0}^{t}\max_{\ell(s)}\min_{x(s)}\left[\langle y(s), \ell(s)\rangle - \langle \ell(s), x(s)\rangle + f(x(s))\right]ds =$$

$$= \int\limits_{t_0}^{t}\max_{\ell(s)}\left[\langle y(s), \ell(s)\rangle - \max_{x(s)}\{\langle \ell(s), x(s)\rangle - f(x(s))\}\right]ds =$$

$$= \int\limits_{t_0}^{t} f^{**}(s)ds$$

■

Утверждение 3.

$$\min_{\ell}\left[\langle x, l\rangle + (\mathrm{conv}(y))(\ell)\right] = \min_{\ell}\left[\langle x, \ell\rangle + y(\ell)\right]$$

$$\min_{\ell}\left[\langle x, \ell\rangle + \max_{p}(\langle p, \ell\rangle - \max_{s}(\langle p, s\rangle - y(s)))\right] =$$

$$= \min_{\ell}\max_{p}\min_{s}\left[\langle x, l\rangle + \langle l, p\rangle - \langle p, s\rangle + y(s)\right] = \left\{\min_{\ell}\max_{p} = \max_{p}\min_{\ell}\right\} =$$

$$= \max_{p}\min_{\ell}\min_{s}\left[\langle \ell, x+p\rangle - \langle p, s\rangle + y(s)\right] = \max_{p}\left[\begin{cases} -\inf, & p \neq -x \\ 0, & p = -x \end{cases} + \min_{s}(-\langle p, s\rangle + y(s))\right] =$$

$$= \{\text{из первого } \min \text{ находим } \ p = -x\} = \min_{s}(-\langle -x, s\rangle + y(s)) =$$

$$= \min_{\ell}(\langle x, \ell\rangle + y(\ell))$$

■

3.2 Рассматриваемые примеры

3.2.1 Пример 1

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} \dot{x} = 2u + v; \\ \dot{x} = u; \end{array}\right. \\ u \in [0,1]; \\ v \in [0,1]; \\ \mathcal{X}_0 = \{x \in [-2,-1]\}; \\ t \in [0,4]; \\ H = \{x = 0\}. \end{cases} \tag{3.5}$$

3.2.2 Пример 2

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} \dot{x} = u; \\ \dot{x} = 2u + v; \end{array}\right. \\ u \in [0,1]; \\ v \in [0,1]; \\ \mathcal{X}_0 = \{x \in [-2,-1]\}; \\ t \in [0,4]; \\ H = \{x = 0\}. \end{cases} \tag{3.6}$$

Начальные условия для (3.5) и (3.6) одинаковы. Функция цены для задач (3.5) и (3.6).

$$V(t,x) = \min_u \max_v \max_\tau \max_\ell \max_\mu \left\{ \left\langle \ell, x_0 \,|_{x(t)=x} \right\rangle - \rho(\ell \mid \mathcal{X}_0) - \frac{\|\ell\|^2}{4} + \mu \left\langle x(\tau), c \right\rangle - \frac{\mu^2}{4} \right\}.$$

В одномерном случае, если рассматривать отрезок $[\alpha, \beta]$ как эллипсоид $\mathcal{E}(q,Q)$, то $q = \frac{\beta+\alpha}{2}$, $Q = \left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right)^2$. Тогда

$$\rho\left(\ell \mid \mathcal{E}(()q,Q)\right) = \langle \ell, q \rangle + \langle \ell, Q\ell \rangle^{\frac{1}{2}} = \ell \cdot q + \mid \ell \mid \sqrt{Q}.$$

Поскольку в уравнениях примеров (3.5) и (3.6) фундаментальные матрицы $G(t,t_0) \equiv I$, $c = 1$, то можно написать

$$V(t,x) = \min_u \max_v \min_\tau \max_\ell \max_\mu \big\{ \ell \cdot x + \int\limits_t^\tau \ell \cdot [B_2 u_2 + v_2] ds + \int\limits_\tau^{t_0} \ell \cdot [B_1 u_1 + v_1] ds -$$

$$-(\ell \cdot x_0 + \mid \ell \mid \sqrt{X_0}) - \frac{\ell^2}{4} + \mu \big[x + \int\limits_t^\tau [B_2 u_2 + v_2] ds \big] - \frac{\mu^2}{4} \big\}.$$

Здесь $\mathcal{X}_0 = \mathcal{E}(x_0, X_0)$, для (3.5) $v_2 \equiv 0$, для (3.6) $v_1 \equiv 0$. Если сократить, то получим для (3.5):

$$V(t,x) = \min_u \max_v \min_\tau \max_\ell \max_\mu \big\{ (\ell + \mu) x + \int\limits_t^\tau (\ell + \mu) B_2 u_2 ds + \int\limits_\tau^{t_0} \ell B_1 u_1 ds + \int\limits_\tau^{t_0} \ell v_1 ds -$$

$$-(\ell \cdot x_0 + \mid \ell \mid \sqrt{X_0}) - \frac{\ell^2}{4} - \frac{\mu^2}{4} \big\}.$$

Для (3.6)

$$V(t,x) = \min_u \max_v \min_\tau \max_\ell \max_\mu \{(\ell+\mu)x + \int_t^\tau (\ell+\mu)B_2 u_2 ds + \int_t^\tau (\ell+\mu)v_2 ds + \int_\tau^{t_0} \ell B_1 u_1 ds -$$

$$-(\ell \cdot x_0 + \mid \ell \mid \sqrt{X_0}) - \frac{\ell^2}{4} - \frac{\mu^2}{4}\}.$$

Эти выражения не являются выпуклыми по τ, чтобы можно было переставлять $\max_v \min_\tau$. Поэтому прибегаем к функции распределения $\phi(w)$. $\phi(w)$ – функция ограниченной вариации.

$$\int_{t_0}^t d\phi(w) = 1.$$

Обозначим

$$S_2(t_0,s) = \int_{t_0}^s \ell(w) + \mu(w) d\phi(w)$$

$$S_1(s,t) = \int_s^t \ell(w) d\phi(w)$$

Тогда приходим к найденному ранее выражению (3.1). Используя формулу вычисления опорной функции для множеств из $\mathbb{R}^1$ запишем

$$V(t,x) = \min_\phi \max_\ell \max_\mu \Bigg\{$$

$$S_2(t_0,t)x - \int_{t_0}^t S_1(s,t)p_1 + \mid S_1(s,t) \mid \sqrt{P_1} ds - \int_{t_0}^t S_2(t_0,s)p_2 + \mid S_2(t_0,s) \mid \sqrt{P_2}\, ds -$$

$$-\mathrm{conv}\Bigg\{ \int_{t_0}^t w_1 S_1(s,t) - \sqrt{W_1} \mid \ S_1(s,t) \mid + w_2 S_2(t_0,s) - \sqrt{W_2} \mid S_2(t_0,s) \mid \ ds +$$

$$+ \int_{t_0}^t \frac{\ell^2(w)}{4} + \frac{\mu^2(w)}{4} + \ell(w)x_0 + \mid \ell(w) \mid \sqrt{X_0}\ d\phi(w) \Bigg\}\Bigg\}.$$

3.3 Пример $\mathbb{R}^2$

Заданы системы дифференциальных уравнений, описывающих состояние некоторой модели до переключения и после:

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \dot{x}_1^{(1)} = x_2^{(1)} + v^{(1)}(t); \\ \dot{x}_2^{(1)} = u^{(1)}(t); \\ x(t_0) \in \mathcal{X}_0 = \{x \in \mathbb{R}^2 : (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 1)^2 \leqslant 1\}; \end{cases} \\ \\ \begin{cases} \dot{x}_1^{(2)} = x_2^{(2)} + v^{(2)}(t); \\ \dot{x}_2^{(2)} = -\gamma x_1 - \mu x_2 + u^{(2)}(t); \\ x(\tau) \in \mathcal{X}^{(1)}[\tau, t_0] \cap \mathcal{H}, \tau \leqslant t \leqslant t_1; \end{cases} \end{array} \right. \\ \\ \mathcal{H} = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1 = 0\} \text{— гиперплоскость;} \\ u^{(1)} = u^{(2)} = u(\cdot) \in [-\alpha_1, \alpha_2] = \mathcal{P}[t_0, t_1]; \\ v^{(1)} = v^{(2)} = v(\cdot) \in [-\beta_1, \beta_2] \in \mathcal{W}[t_0, t_1]; \\ \gamma, \mu, \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 > 0 \text{— некоторые константы;} \\ \tau \text{ — момент переключения, при пересечении гиперплоскости.} \end{cases} \tag{3.7}$$

Множества $C_1\mathcal{W}_1$ и $C_2\mathcal{W}_2$ принимают вид $\begin{pmatrix} v \\ 0 \end{pmatrix}, v \in [\tilde{\beta}_1, \tilde{\beta}_2] = \mathrm{Comp}(\mathbb{R}^1)$, тогда для некоторого $\tilde{\ell} \in \mathbb{R}^2$

$$\rho(\tilde{\ell}, \begin{pmatrix} v \\ 0 \end{pmatrix}) = \sup_{v \in C_1\mathcal{W}_1(s)} (\tilde{\ell}_1 v) = \tilde{\ell}_1 \cdot \begin{cases} \tilde{\beta}_1, \ \tilde{\ell}_1 < 0 \\ \tilde{\beta}_2, \ \tilde{\ell}_1 > 0 \end{cases}$$

(Здесь пока не применены результаты для вычисления conv в $\mathbb{R}^n$, оставлено что есть)

И тогда интегралы от опорных функций вычисляются как

$$\int_{t_0}^{t} \rho(-S_1(s,t) \mid C_1\mathcal{W}_1(s))\, ds = -\tilde{\beta}_1^{(1)} \int_{T_>^{(1)}} S_1(t_0, s)_1\, ds - \tilde{\beta}_2^{(1)} \int_{T_<^{(1)}} S_1(t_0, s)_1\, ds,$$

$$\int_{t_0}^{t} \rho(-S(t_0,s) \mid C_2\mathcal{W}_2(s))\, ds = -\tilde{\beta}_1^{(2)} \int_{T_>^{(2)}} S(t_0, s)_1\, ds - \tilde{\beta}_2^{(2)} \int_{T_<^{(2)}} S(t_0, s)_1\, ds,$$

где $T_<^{(1)}, T_<^{(2)}$ – промежутки времени, на которых $S_1(s,t)_1 < 0$, $S(t_0,s)_1 < 0$ соответственно; $T_>^{(1)}, T_>^{(2)}$ – промежутки, где $S_1(s,t)_1 > 0$, $S(t_0,s)_1 > 0$ соответственно. Концы этих отрезков находятся из уравнений

$$S_1(s,t)_1 = \int_s^t \phi(w) \left\{ G_1^T(t_0, w)\ell(w) \right\}_1 \, dw = 0;$$

$$S(t_0,s)_1 = \int_{t_0}^{s} \phi(w) \left\{ G_1^T(t_0, w) G_2^T(w,t)\ell(w) + \mu(w) G_2^T(w,t) c \right\}_1 \, dw = 0,$$

где $t_0 < s < t$. Также из условий задачи $\tilde{\beta}_1^{(2)} = \tilde{\beta}_1^{(1)} = \beta_1$ и $\tilde{\beta}_2^{(1)} = \tilde{\beta}_2^{(2)} = \beta_2$.

Для $s \in [t_0, t]$ множества $B_1\mathcal{P}_1$ и $B_2\mathcal{P}_2$ имеют вид $\begin{pmatrix} 0 \\ u \end{pmatrix}$, где $u(s) \in \mathcal{R}^1$ принадлежит первому либо второму семейству управлений. Тогда аналогично

$$\int_{t_0}^{t} \rho\left(S_1(s,t) \mid B_1\mathcal{P}_1\right) ds = \int_{t_0}^{t} S_1(s,t)_2 \cdot \begin{cases} \alpha_1, \ S_1(s,t)_2 < 0, \\ \alpha_2, \ S_1(s,t)_2 > 0 \end{cases} ds =$$

$$= \alpha_1 \int\limits_{T_<^{(1)}} S_1(s,t)_2\, ds + \alpha_2 \int\limits_{T_>^{(1)}} S_1(s,t)_2\, ds$$

$$\int_{t_0}^{t} \rho\left(S(t_0,s) \mid B_2\mathcal{P}_2\right) ds = \int_{t_0}^{t} S(t_0,s)_2 \cdot \begin{cases} \alpha_1, \ S(t_0,s)_2 < 0, \\ \alpha_2, \ S(t_0,s)_2 > 0 \end{cases} ds =$$

$$= \alpha_1 \int\limits_{T_<^{(2)}} S(t_0,s)_2\, ds + \alpha_2 \int\limits_{T_>^{(2)}} S(t_0,s)_2\, ds,$$

где α_1, α_2 – ограничения на управление, $\alpha_1 \leqslant u(s) \leqslant \alpha_2$, $T_<^{(1)}, T_<^{(2)}$ – множества отрезков времени, где $S_1(s,t)_2 < 0, S(t_0,s)_2 < 0$; $T_>^{(1)}, T_>^{(2)}$ – множество отрезков времени, где $S_1(s,t)_2 > 0, S(t_0,s)_2 > 0$.

Файл primer1a.tex:

3.4 Пример 1a, $\mathbb{R}^1$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} \dot{x} = u + v; \\ \dot{x} = u; \end{array}\right. \\ u(t) \in [p_1, p_2] = \mathcal{P}; \\ v(t) \in [q_1, q_2] = \mathcal{Q}; \\ \mathcal{X}_0 = [a_1, a_2], a_1 < a_2; \\ t \in [t_0, t_1]; \\ H = \{x = c\}. \end{cases} \tag{3.8}$$

3.4.1 Вычисляем первое множество, до переключения

Вычислим множество достижимости $\mathcal{X}_1$ первого уравнения (системы) (3.8) Для $\mathcal{X}_1$ имеем:

$$\mathcal{X}[t_1] = \left(\mathcal{X}_0 \dot{-} \int_{t_1}^{t_0} \mathcal{Q}(s) ds\right) + \int_{t_0}^{t_1} \mathcal{P}(s) ds$$

Пусть

$$\tilde{p_1} = \int_{t_0}^{t_1} p_1(s) ds; \quad \tilde{p_2} = \int_{t_0}^{t_1} p_2(s) ds;$$

$$\tilde{q_1} = \int_{t_1}^{t_0} q_2(s) ds; \quad \tilde{q_2} = \int_{t_1}^{t_0} q_1(s) ds;$$

$$\mathcal{Q}(\tau_1,\tau_2)=\int\limits_{\tau_1}^{\tau_2}\mathcal{Q}(s)ds$$

$$\mathcal{P}(\tau_1,\tau_2)=\int\limits_{\tau_1}^{\tau_2}\mathcal{P}(s)ds$$

Тогда $\mathcal{P}(t_0,t_1)=[\tilde{p_1},\tilde{p_2}]$, $\mathcal{Q}(t_1,t_0)=[\tilde{q_1},\tilde{q_2}]$ Для множества $C=\left(\mathcal{X}_0\dot{-}\mathcal{Q}(t_1,t_0)\right)$ имеем выражение

$$\rho\left(\ell\mid C\right)=\operatorname{conv}\left[\rho\left(\ell\mid\mathcal{X}_0\right)-\rho\left(\ell\mid\mathcal{Q}(t_1,t_0)\right)\right](\ell)$$

Геометрическую разность можно еще выразить как

$$A\dot{-}B=\bigcap_{\forall b\in B}(A-b)$$

Множество $C=\mathcal{X}_0\dot{-}\mathcal{Q}(t_1,t_0)$, где $\mathcal{Q}(t_1,t_0)=[\tilde{q}_1,\tilde{q}_2]$, находится как $C=[a_1-\tilde{q}_1,a_2-\tilde{q}_2]$, при условии, что $a_2-a_1\geq\tilde{q}_2-\tilde{q}_1$. Тогда

$$\mathcal{X}[t_1]=[a_1-\tilde{q}_1+\tilde{p}_1,a_2-\tilde{q}_2+\tilde{p}_2],\forall t_1:a_2-a_1\geq\tilde{q}_2-\tilde{q}_1$$

Вычислим тоже самое через опорные функции.

$$\rho\left(\ell\mid\mathcal{X}[t_1]\right)=\rho\left(\ell\mid\mathcal{X}_0\dot{-}\mathcal{Q}(t_1,t_0)\right)+\rho\left(\ell\mid\mathcal{P}(t_0,t_1)\right)\tag{3.9}$$

$$\rho\left(\ell\mid\mathcal{Q}(t_1,t_0)\right)=\rho\left(\ell\mid\int\limits_{t_1}^{t_0}\mathcal{Q}(s)ds\right)=\begin{cases}\ell\tilde{q}_2=\int\limits_{t_1}^{t_0}\ell q_1(s)ds,\ \ell\geq0\\ \ell\tilde{q}_1=\int\limits_{t_1}^{t_0}\ell q_2(s)ds,\ \ell<0\\ t_1>t_0,\ q_1(s)\leq q_2(s),\forall s\end{cases}.$$

Здесь всегда выполнено $\tilde{q}_1(t_0)\leq\tilde{q}_2(t_0)$.

Для $\mathbb{R}^1$ имеем: $\mathcal{X}_1=[b_1,b_2]$, $\mathcal{X}_0=[a_1,a_2]$, $\mathcal{P}(s)=[p_1(s),p_2(s)]$, $\mathcal{Q}=[q_1(s),q_2(s)$, $V(\tau)=[\tilde{q}_1(\tau),\tilde{q}_2]$.

Выражение (3.9) преобразуется к

$$\ell=1:b_2=a_2-\tilde{q}_2(t_0)+\tilde{p}_2(t_1)$$
$$\ell=-1:-b_1=-a_1+\tilde{q}_1(t_0)-\tilde{p}_1(t_1)$$

И получаем тоже выражение $\mathcal{X}_1=[b_1(t_1),b_2(t_2)]=[a_1-\tilde{q}_1(t_0)+\tilde{p}_1(t_1),a_2-\tilde{q}_2(t_0)+\tilde{p}_2(t_1)]$. Здесь $\operatorname{conv}(\rho\left(\ell\mid\mathcal{X}_0\right)\dot{-}\mathcal{Q}(t_1,t_0))\equiv\rho\left(\ell\mid\mathcal{X}_0\right)-\rho\left(\ell\mid\mathcal{Q}(t_1,t_0)\right)$.

Поскольку $\mathcal{X}_1$ – гарантированная оценка, то она обладает тем свойством, что не зависит от помехи. Это множество позволяет нам не рассматривать зависимость от помехи v_1.

3.4.2 Множество $\{\tau,\mathcal{X}_H[\tau]\}$

То, что получаем при пересечении гиперплоскости H:

$$\{(\tau,\mathcal{X}_H)\}=\{(\tau,\mathcal{X}_1[\tau]\cap H)\mid\tau:H\cap\mathcal{X}_1(\tau,t_0,\mathcal{X}_0)\neq\emptyset\}$$

Пусть требуется найти $(A+B)\cap H$. Представим $A=\bigcup\limits_{i\in I}(a^i_\perp + A^i_{||})$ и $B=\bigcup\limits_{i\in I}(b_\perp + B^i_{||})$, где $a^i_\perp \perp H$, $b^i_\perp \perp H$ и справедливо $(a\in A^i_{||}, a\in H)\Rightarrow A^i_{||}\subset H$, аналогично для $B^i_{||}$. Тогда

$$(A+B)\cap H = \bigcup(A^i_{||} + B^j_{||} + a^i_\perp + b^j_\perp \mid \forall i\in I, j(i)\in I : a^i_\perp + b^j_\perp \in H)$$

Пусть требуется найти множество $B=\{\xi\}$, такое что $\forall \xi\in B : (\xi + A)\cap H \subset\neq \emptyset, \subset X_H$. Выполним разложение $B=\bigcup\limits_{\forall i\in I}(\xi^i = \xi^i_\perp + B^i_{||}$, и соответственно для A. Найдем $\xi^i_\perp : (\xi^i_\perp + A^i_{||})\cap H\neq\emptyset$. $H = x \mid \langle x, c\rangle = q$. Тогда $d^i = \langle \xi^i_\perp, c\rangle = q - \langle a^i_\perp, c\rangle$ и $\xi^i_\perp = \frac{d^i c}{\langle c,c\rangle}$. Теперь найдем $\{B^j_{||}\}$, $\{\xi^j_\perp\}$,$j\in\mathcal{J}\subset I$ для которых выполнено вложение

$$\mathcal{J}=\{i\in I\mid \exists B^i_{||}\neq\emptyset : \xi_\perp + B^i_{||} + A^i_{||}\subseteq X_H\}$$

Поскольку $\xi^i_\perp + A^i_{||}\subset H$ по построению всегда выполнено, то фактически
$B^i_{||} = X_H \dot{-} (A^i_{||} + \xi^i_\perp) = (X_H - \xi^i_\perp)\dot{-} A^i_{||}$.

Для $\mathbb{R}^1$ есть особенность, заключающаяся в том, что $X_H \cap H = H = x_H\in\mathbb{R}^1, X_H\cap H\neq\emptyset$.

$$A\cap H\subset X_H \Leftrightarrow A\cap H = H \Leftrightarrow H\subset A$$

Для $\mathcal{X}^{(1)}_1(\tau)=\{x_\perp\}=[b_1, b_2]$ множество моментов времени пересечения гиперплоскости $\{\tau_H\}=\{\tau\mid H=\{c\}, c\in[b_1(\tau), b_2(\tau)]\}$. Множество $\mathcal{T}=\{\tau_H\}$ - это множество моментов времени не зависящее от помех. В силу условия трансверсальности это множество односвязно.

3.4.3 Множество достижимости для второй системы

Дано начальное множество $\mathcal{X}_0=\{\tau^\alpha_H, \mathcal{X}^\alpha_H\}$, для этого множества вычислим $\mathcal{X}_1[t_1]$. Здесь, как и прежде, гарантированная оценка множества достижимости выглядит как

$$\mathcal{X}_1[t_1] = (\mathcal{X}_0 \dot{-} \mathcal{Q}(t_1,\tau)) + \mathcal{P}(\tau, t_1)$$

Надо дописать вычисление для второго множества (есть рукописно)
И иллюстрации

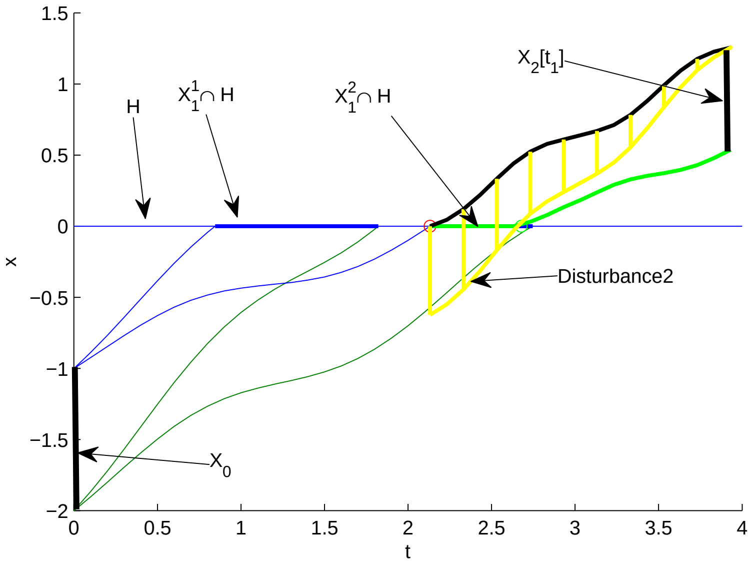

Рис. 1. Множество достижимости $\mathbb{R}^1$ наглядно

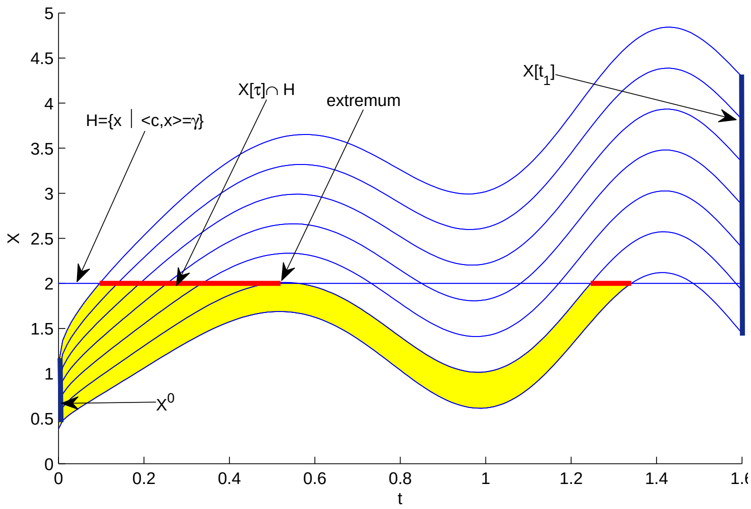

Рис. 2. Наглядность трансверсальности, если условие не выполнено

$$\begin{cases} \langle x(\tau), c\rangle - \gamma = 0 \\ \langle x(\tau+\epsilon), c\rangle - \gamma > 0; \forall \epsilon > 0 \end{cases}$$

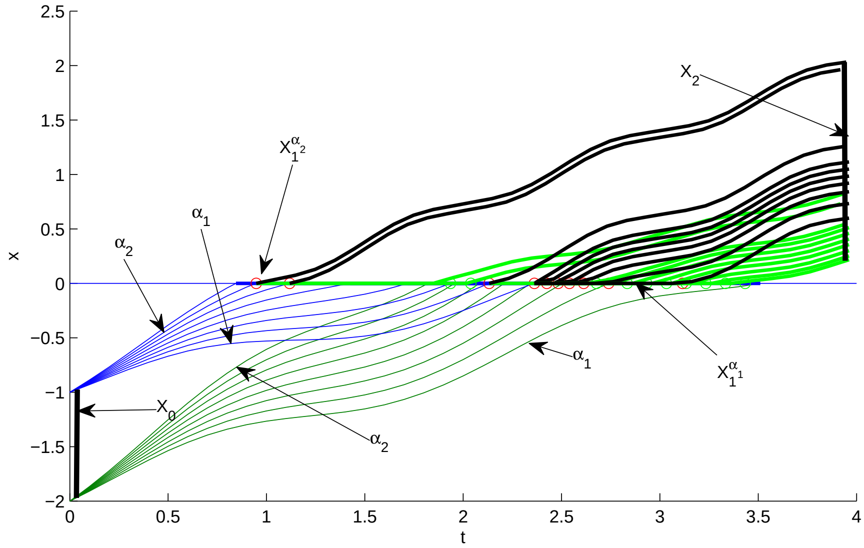

Рис. 3. Множество достижимости $\mathbb{R}^1$ полное

Файл bibl.tex:

Список литературы

[1] *Куржанский А.Б., Варайя П.* Задачи динамики и управления в гибридных системах // Труды международного семинара “Теория управления и теория обобщенных решений уравнений Гамильтона-Якоби”. Екатеринбург: Изд-во Уральского университета, 2005. с.26–33.

[2] *Куржанский А.Б.* Управление и наблюдение в условиях неопределенности. М.: Наука, 1977.

[3] *Куржанский А.Б., Точилин П.А.* Слабо инвариантные множества гибридных систем // Дифференциальные уравнения. 2008. т. 44, N11.

[4] *Пшеничный Б.Н.* Выпуклый анализ и экстремальные задачи. М.: Наука, 1980.

[5] *Рокафеллар Р.* Выпуклый анализ. М.: Мир, 1973.

[6] *Branicky M.S., Borkar V.S., Mitter S.M.* A unified framework for hybrid control: model and optimal control theory. // IEEE transactions on automatic control, 43/1 p.31–45, 1998.

[7] *Kurzhanski A.B., Varaiya P.* Ellipsoidal techniques for reachability under state constraints.// SIAM Journal on Control. 2003. V.45. N.4. p.1369–1394.

[8] *Kurzhanski A.B., Varaiya P.* Ellipsoidal techniques for reachability analysis. Internal approximation // System and Control Letters. 2000. V.41. p.201–211.

[9] *Kurzhanski A.B., Varaiya P.* Ellipsoidal techniques for reachability analysis. Part I: External approximations. Part II: Internal approximations. Box-valued constraints // Optimization methods and software. 2002. V.17. p.177–237.

[10] *Liberzon D.* Switching in systems and control. Boston: Birkhäuser, 2003.

[11] *Van der Schaft A., Schumacher H.* An introduction to hybrid dynamical systems. Lecture Notes in Control and Information Sciences. N251. Springer, 2000.