Построение множества достижимости для гибридной системы с одним преключением с неопределённостью

Выполнил : Селиверстов Д.С.
Научный руководитель: к.ф.-м.н Точилин П.А.

28 апреля 2010

Постановка задачи

$$
\begin{cases}
\left[
\begin{array}{l}
\begin{cases}
\dot{x}^{(1)} = A^{(1)}(t)x^{(1)} + B^{(1)}(t)u^{(1)}(t) + C^{(1)}(t)v(t); \\
x(t_0) \in \mathcal{E}(x_0, X_0) = \mathcal{X}^0; \\
u^{(1)}(t) \in \mathcal{E}(p^{(1)}(t), P^{(1)}(t)) \subset \mathcal{P}[t_0, t_1]; \\
v^{(1)}(t) \in \mathcal{E}(w^{(1)}(t), W^{(1)}(t)) \subset \mathcal{V}[t_0, t_1];
\end{cases} \\
\\
\begin{cases}
\dot{x}^{(2)} = A^{(2)}(t)x^{(2)} + B^{(2)}(t)u^{(2)}(t) + C^{(2)}(t)f(t)^{(2)}; \\
x(\tau) \in \mathcal{X}^{(1)}(\tau, t_0) \cap H; \\
u^{(2)}(t) \in \mathcal{E}(p^{(2)}(t), P^{(2)}(t)) \subset \mathcal{P}[t_0, t_1]; \\
v^{(2)}(t) \in \mathcal{E}(w^{(2)}(t), W^{(2)}(t)) \subset \mathcal{V}[t_0, t_1];
\end{cases}
\end{array}
\right. \\
H = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, c \rangle = \gamma\} \text{— гиперплоскость переключения;} \\
\tau : \left\langle x^{(1)}(\tau), c \right\rangle - \gamma = 0, \ \tau \in [t_0, t_1]
\end{cases}
\tag{1}
$$

Условие на переключение

При переключении гибридная система должна удовлетворять условию односторонней проницаемости (трансверсальности), что равносильно выполнению соотношения:

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} \langle \dot{x}, c \rangle \neq 0; \\ \langle x, c \rangle - \gamma \neq 0 \end{array} \right. \\ \operatorname{sign}(\left\langle \dot{x}^{(1)}(\tau), c \right\rangle) = \operatorname{sign}(\left\langle \dot{x}^{(2)}(\tau), c \right\rangle). \end{cases} \tag{2}$$

Это означает, что любая траектория гибридной системы не может касаться гиперплоскости, но пересекает эту плоскость только один раз.

Множество достижимости

Определение

Множество достижимости $\mathcal{X}[t, t_0]$ *для задачи* (1) *называется*

$$\mathcal{X}[t] = \{x^* \mid \exists u_1(\cdot) \in \mathcal{P}^{(1)}, \exists u_2(\cdot) \in \mathcal{P}^{(2)} :$$

$$\forall v_1(\cdot) \in \mathcal{V}^{(1)}, \forall v_2(\cdot) \in \mathcal{V}^{(2)} :$$

$$x(t_0, t_1, x^*) \in \mathcal{X}_0, x(t, t_0, x^*) \cap H \neq \emptyset\}$$

Множество достижимости до переключения

$$V_1[t_0, t] = \left\{ \int_{t_0}^{t} v_1(s)ds \mid \forall v_1(\cdot) \in \mathcal{V}^1[t_0, t_1] \right\}$$

$\mathcal{C}[t] = \mathcal{X}_0 \dot{-} V_1[t, t_0]$ – множество гарантированного попадания

$$p^\alpha(\cdot) \in \mathcal{P}^{(1)}: \quad \mathcal{C}_H^\alpha[\tau] = \{(\mathcal{C}[\tau] + p^\alpha(t_0, \tau)) \cap H\}$$

$$T^\alpha = \{\tau \mid \mathcal{C}_H^\alpha[\tau] \neq \emptyset\} \overset{\text{(трансверсальность)}}{=} [\tau_1^\alpha, \tau_2^\alpha]$$

Множество достижимости после переключения

$$\mathcal{P}_2[t_0, t_1] = \left\{ \int\limits_{t_0}^{t_1} p_2(s)ds \mid \forall p_2(\cdot) \in \mathcal{P}^{(2)} \right\}$$

$$\mathcal{X}_2^{\alpha}[t_1] = \bigcap_{v_2 \in \mathcal{V}_2} \bigcup_{\tau \in T^{\alpha}} (\mathcal{C}_H^{\alpha}[\tau] + v_2(\tau, t_1) + \mathcal{P}_2[\tau, t_1])$$

$$\mathcal{X}^{(2)}[t_1] = \bigcup_{p^{\alpha} \in \mathcal{P}_1} \mathcal{X}_2^{\alpha}[t_1]$$

Функция цены, начальный вид

$$V(t,x) = \min_{u_1,u_2} \max_{v_1,v_2} \min_{\tau} \left\{ d^2(x_0|_{x(t)=x}, \mathcal{X}_0) + (\langle x(\tau), c\rangle - \gamma)^2 \right\}$$

$$u_1(\cdot) \in \mathcal{P}^{(1)}[t_0,t_1],\ u_2(\cdot) \in \mathcal{P}^{(1)}[t_0,t_1],$$

$$v_1(\cdot) \in \mathcal{V}^{(1)}[t_0,t_1],\ v_2(\cdot) \in \mathcal{V}^{(2)}[t_0,t_1],$$

$$\tau \in [t_0, t_1]$$

Линеаризация по времени

$$T(\tau, \Psi(\cdot)) = \int_t^\tau \Psi(s)ds$$

Используя класс функций ограниченной вариации $\phi(w) \in V[t_0, t_1]$ осуществляем линеаризацию по $\phi(\cdot)$

$$T(\phi(w), \Psi(\cdot)) = \int_{t_0}^{t} d\phi(w) \int_t^w \Psi(w)ds.$$

Функция цены, преобразования

$$S(t_0,t_1)=\int\limits_{t_0}^{t_1}\left\{G_2^T(w,t)G_1^T(t_0,w)\ell(w)+\mu(w)G_2^T(w,t)c\right\}\,d\phi(w),$$

$$S_1(t_0,t_1)=\int\limits_{t_0}^{t_1}\left\{G_1^T(t_0,w)\ell(w)\right\}\,d\phi(w),$$

$$K(\ell,\mu,\mathcal{X}_0)=\int\limits_{t_0}^{t}\left[\frac{\mu(w)^2}{4}+\rho(\ell(w)\mid\mathcal{X}_0)+\frac{\|\ell(w)\|^2}{4}\right]\,d\phi(w)$$

Функция цены, конечное выражение

$$V(t,x) = \min_{\phi(\cdot)} \max_{\ell(\cdot)} \max_{\mu(\cdot)} \Big\{ S^T(t_0,t)x - \int_{t_0}^{t} \rho(S_1(s,t) \mid B_1(s)\mathcal{P}_1(s))\,ds -$$

$$- \int_{t_0}^{t} \rho(S(t_0,s) \mid B_2(s)\mathcal{P}_2(s))\,ds - \mathrm{conv}\{K(\ell,\mu,\mathcal{X}_0) -$$

$$- \int_{t_0}^{t} \rho(-S_1(s,t) \mid C_1(s)\mathcal{V}_1(s))\,ds - \int_{t_0}^{t} \rho(-S(t_0,s) \mid C_2(s)\mathcal{V}_2(s))\,ds\} \Big\}$$

Пример 1, постановка

$$
\begin{cases}
\left[\begin{array}{l} \dot{x} = 2u + v; \\ \dot{x} = u; \end{array}\right. \\
u \in [0, 1]; \\
v \in [0, 1]; \\
\mathcal{X}_0 = \{x \in [-2, -1]\}; \\
t \in [0, 4]; \\
H = \{x = 0\}.
\end{cases} \tag{3}
$$

Пример 2, постановка

$$
\begin{cases}
\left[\begin{array}{l} \dot{x} = u; \\ \dot{x} = 2u + v; \end{array}\right. \\
u \in [0, 1]; \\
v \in [0, 1]; \\
\mathcal{X}_0 = \{x \in [-2, -1]\}; \\
t \in [0, 4]; \\
H = \{x = 0\}.
\end{cases}
\tag{4}
$$

Выводы

В данной работе рассмотрены два подхода к решению задачи достижимости:

- При помощи функций цены и методов выпуклого анализа,
- С помощью методов многозначного анализа.

В первом случае множества достижимости представлены в виде множеств уровней (множеств Лебега) для специальных функций, а во втором методе указанные множества построены в явном виде, за счет применения операций с выпуклыми компактами. Рассмотрены два примера в одномерном фазовом пространстве.
Решение данной задачи можно рассматривать как первый шаг к построению теории достижимости при неопределенности для гибридных систем с кусочно-линейной структурой в классах программных или позиционных управлений.

Список литературы

- *Куржанский А.Б., Варайя П.* Задачи динамики и управления в гибридных системах // Труды международного семинара “Теория управления и теория обобщенных решений уравнений Гамильтона-Якоби”. Екатеринбург: Изд-во Уральского университета, 2005. с.26–33.
- *Куржанский А.Б.* Управление и наблюдение в условиях неопределенности. М.: Наука, 1977.
- *Куржанский А.Б., Точилин П.А.* Слабо инвариантные множества гибридных систем // Дифференциальные уравнения. 2008. т. 44, N11.
- *Пшеничный Б.Н.* Выпуклый анализ и экстремальные задачи. М.: Наука, 1980.
- *Рокафеллар Р.* Выпуклый анализ. М.: Мир, 1973.