

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Московский Государственный Университет им. М.В.Ломоносова

Факультет вычислительной математики и кибернетики

Кафедра системного анализа

Магистерская программа по направлению

Математические модели сложных систем: теория, алгоритмы, приложения

Магистерская диссертация на тему

Построение множества достижимости для гибридной системы с  
одним переключением с неопределенностью

Выполнил:

*Селиверстов Д.С.*

Научный руководитель:

*к.ф-м.н. Точилин П.А.*

Файл `annotation.tex`:

## Аннотация

Тема данной дипломной работы – ”Построение множества достижимости для гибридной системы с одним переключением с неопределенностью”, в рамках которой была рассмотрена модель гибридной системы, состоящая из двух систем линейных дифференциальных уравнений и условием переключения между ними.

Задача состоит в оценивании множества траекторий этой гибридной системы в конечный момент времени, в которые гарантированно можно попасть, выбрав соответствующее управление, независимо от реализации помехи.

Исходя из поставленной задачи, в дипломной работе рассматривается решение данной задачи с привлечением аппарата выпуклого анализа через сопряженные функции и функцию цены минимаксного типа. В этом случае множества достижимости представлены в виде множеств уровней (множеств Лебега) для специальных функций. Также рассматривается решение задачи методами многозначного анализа, что позволяет явно построить искомое множество посредством операций над выпуклыми компактами. В работе 19 страниц, 2 иллюстраций.

# Содержание

<b>1. Введение.</b>	<b>3</b>
<b>2. Постановка задачи</b>	<b>4</b>
<b>3. Теоретическая часть</b>	<b>5</b>
3.1 Функция цены . . . . .	5
3.2 Рассматриваемые примеры . . . . .	12
3.2.1 Пример 1 . . . . .	12
3.2.2 Пример 2 . . . . .	12
3.3 Пример $\mathbb{R}^2$ . . . . .	14
3.4 Пример 1a, $\mathbb{R}^1$ . . . . .	15
3.4.1 Вычисляем первое множество, до переключения . . . . .	15
3.4.2 Множество $\{\tau, \mathcal{X}_H[\tau]\}$ . . . . .	16
3.4.3 Множество достижимости для второй системы . . . . .	17
<b>Файл <a href="#">intro.tex</a>:</b>	

## 1. Введение.

В данной работе рассматривается математическая модель гибридной системы, состоящей из двух систем обыкновенных дифференциальных уравнений с управляющими параметрами и помехами, а также из условия замены одной системы на другую. Траектория такой системы развивается в каждый момент времени в силу одной из двух систем дифференциальных уравнений. При достижении определенной гиперплоскости в фазовом пространстве происходит обязательная смена активной системы уравнений — так называемое переключение траектории гибридной системы [3]. Рассматриваемые системы обыкновенных дифференциальных уравнений являются линейными по фазовым переменным, а также по управляющим параметрам и помехам. Однако, в целом система нелинейна. Похожие модели гибридных систем активно исследуются в последние годы (см. например, [6], [11], [10]), для них актуальны многие классические задачи управления, такие как задачи достижимости, верификации, синтеза управления в условиях реально доступной информации и др. Особенно важны задачи, в которых учитываются неопределенности, помехи, которые могут быть связаны как с ошибками математического моделирования, так и с заранее неизвестными воздействиями на систему.

В данной работе для гибридной системы решается задача построения множества достижимости “минимаксного типа” в классе программных управлений. То есть необходимо построить множество всех позиций системы, в которые можно попасть за счет применения программных управлений, несмотря на наличие в системе заранее неизвестных помех. Для действующих в системе помех известны лишь по-точечные ограничения. Решение данной задачи можно рассматривать как первый шаг к построению теории достижимости при неопределенности для гибридных систем с кусочно-линейной структурой в классах программных или позиционных управлений.

Поскольку рассматриваемые дифференциальные уравнения линейны по фазовым переменным, управлениям и помехам, то для решения поставленной задачи целесообразно использовать аппарат сопряженных функций и другие методы выпуклого анализа [4], [5]. Кроме того, для аппроксимации множеств достижимости возможно использование методов эллипсоидального исчисления [9], [8]. В данной работе рассматривается два подхода к решению задачи достижимости: 1) при помощи функций цены и методов выпуклого анализа, а также 2) при помощи методов многозначного анализа. В первом случае множества

достижимости представлены в виде множеств уровней (множеств Лебега) для специальных функций, а во втором методе указанные множества построены в явном виде, за счет применения операций с выпуклыми компактами.

[Файл `postanovka.tex`:](#)

## 2. Постановка задачи

Даны две системы дифференциальных уравнений, описывающих состояние некоторой модели до переключения и после:

$$\left\{ \begin{array}{l} \left[ \begin{array}{l} \dot{x}^{(1)} = A^{(1)}(t)x^{(1)} + B^{(1)}(t)u^{(1)}(t) + C^{(1)}(t)v(t); \\ x(t_0) \in \mathcal{E}(x_0, X_0) = \mathcal{X}_0; \\ \dot{x}^{(2)} = A^{(2)}(t)x^{(2)} + B^{(2)}(t)u^{(2)}(t) + C^{(2)}(t)v(t)^{(2)}; \\ x(\tau) \in \mathcal{X}^{(1)}(\tau, t_0) \cap H; \end{array} \right. \\ H = \{x \in \mathbb{R}^n: \langle x, c \rangle = \gamma\} \text{— гиперплоскость переключения;} \\ A(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}, B(t) \in \mathbb{R}^{n \times m}, C(t) \in \mathbb{R}^{n \times k}; A(t), B(t), C(t) \in L_1[t_0, t_1]; \\ \tau: \langle x^{(1)}(\tau), c \rangle - \gamma = 0, \tau \in [t_0, t_1] \\ u^{(1)}(t) \in \mathcal{E}(p^{(1)}(t), P^{(1)}(t)) = \mathcal{P}^{(1)}[t_0, t_1]; \\ v^{(1)}(t) \in \mathcal{E}(w^{(1)}(t), W^{(1)}(t)) = \mathcal{V}^{(1)}[t_0, t_1]; \\ u^{(2)}(t) \in \mathcal{E}(p^{(2)}(t), P^{(2)}(t)) = \mathcal{P}^{(2)}[t_0, t_1]; \\ v^{(2)}(t) \in \mathcal{E}(w^{(2)}(t), W^{(2)}(t)) = \mathcal{V}^{(2)}[t_0, t_1]; \end{array} \right. \quad (2.1)$$

где  $\mathcal{P}^{(1,2)}[t_0, t_1], \mathcal{V}^{(1,2)}[t_0, t_1]$  - кусочно-непрерывные эллипсоидальнозначные отображения. В неизвестный заранее момент времени  $\tau$ , при пересечении наперед известной гиперплоскости  $H = \{x \in \mathbb{R}^n: \langle x, c \rangle = \gamma\}$ , происходит переключение с первой системы на вторую.  $v^{(i)}(t)$  - неизвестная функция, неопределенность, область значений которой в каждый момент  $t$  ограничена  $k$ -мерной эллипсоидальной областью  $\mathcal{V}^i(t)$ , и принадлежащая классу интегрируемых функций  $L_1[t_0, t_1]$ . Управление  $(u^{(1)}(\cdot), u^{(2)}(\cdot))$  - интегрируемые в  $L_1[t_0, t_2]$  функции, ограниченные в каждый момент  $t$  эллипсоидальными областями  $u^{(1)}(t) \in \mathcal{P}^{(1)}(t), u^{(2)}(t) \in \mathcal{P}^{(2)}(t)$ . Оно выбирается из класса программных управлений то есть так, что оно определяется к начальному моменту  $t_0$  заранее и уже не изменяется в зависимости от поведения системы в дальнейшем, оно также не зависит от времени переключения  $\tau$ . Для решения задачи важно, чтобы траектория гибридной системы удовлетворяла условию односторонней проницаемости, то есть чтобы при переходе через плоскость  $H$  в момент  $\tau$  всегда выполнялось

$$\left\{ \begin{array}{l} \langle x(\tau), c \rangle - \gamma = 0 \\ \langle x(\tau + \epsilon), c \rangle - \gamma > 0; \end{array} \right. \quad (2.2)$$

для любого малого  $\epsilon > 0$ . Это условие одинаково справедливо как для первой системы  $x(t) = x^{(1)}(t)$ , так и для второй  $x(t) = x^{(2)}(t)$ , где  $x^{(1)}(t), x^{(2)}(t)$  - фазовые переменные (траектории) системы соответственно до переключения и после. Это означает, что траектория системы может пересекать эту плоскость только один раз с переходом к другой системе, что также гарантирует связность множества пересечения  $\{(x(\tau), \tau) \mid x(\tau) \in H\}$ . Требуется построить множество достижимости  $\mathcal{X}[t, t_0]$  в классе допустимых управлений  $\mathcal{P}[t_0, t_1]$  для момента времени  $t > t_0$  и начального множества  $\mathcal{X}_0$ . Таким образом, необходимо найти множество точек  $\mathcal{X}[t, t_0, \mathcal{X}_0] = \{x(t)\}$ , в которые система может гарантированно прийти

из начального множества  $\mathcal{X}^0$  выбором соответствующего управления  $(u^{(1)}(\cdot), u^{(2)}(\cdot))$  вне зависимости от помехи  $(v^{(1)}(\cdot), v^{(2)}(\cdot))$ .

**Определение 1.** Множеством достижимости  $\mathcal{X}[t_1, t_0, \mathcal{X}_0]$  системы линейных дифференциальных уравнений в момент  $t_1$  называется пучок траекторий

$$\mathcal{X}[t_1, t_0, \mathcal{X}_0] = \{x_1 \mid \exists u(\cdot) : \forall v(\cdot), x(t_0, t_1, x_1) \in \mathcal{X}_0\},$$

где  $x(\cdot, t, x)$  – траектория системы при фиксированных  $u(\cdot), v(\cdot)$  и начальном условии  $x(t)=x$ .  $\mathcal{X}_0$  – начальное множество в момент времени  $t_0$ .

Для гибридной модели положим

**Определение 2.** Множество достижимости  $\mathcal{X}[t_1, t_0, \mathcal{X}_0]$  для задачи (2.1) называется

$$\mathcal{X}[t_1, t_0, \mathcal{X}_0] = \{x_1 \mid \exists u^{(1)}(\cdot) \in \mathcal{P}^{(1)}, u^{(2)}(\cdot) \in \mathcal{P}^{(1)} :$$

$$\forall v^{(1)}(\cdot) \in \mathcal{V}^{(1)}, v^{(2)}(\cdot) \in \mathcal{V}^{(1)} :$$

$$x(t_0, t_0, x_1) \in \mathcal{X}_0, \exists \tau : x(\tau, t_1, x_1) \cap H \neq \emptyset, t_1 \geq \tau > t_0\},$$

где  $x(\tau, t, x_0)$  – траектория гибридной системы при фиксированном управлении  $u^{(1,2)}$  и помехе  $v^{(1,2)}$ .

[Файл teoriya.tex:](#)

### 3. Теоретическая часть

Поиск множества достижимости непосредственным расчетом каждой траектории ведет к большим вычислительным издержкам. Поэтому разумно прибегнуть к различным методам, которые позволили бы воспользоваться свойствами данной модели, такими как линейность системы уравнений и выпуклость множеств ограничений и начального множества, что позволит сократить количество вычислений с помощью параметризации множеств с помощью вычисления конечномерных функций. Например, можно использовать множества уровней некоторой специальной функции, и по ним однозначно вычислять искомое множество. Другой подход основывается на применении приемов многозначного анализа. Так, если известна опорная функция к выпуклому компактному множеству, то по этой функции можно восстановить все множество. Рассмотрим сначала первый подход.

#### 3.1 Функция цены

Мы будем искать множество достижимости с использованием функции цены, значениями которой будет расстояние выбранной точки  $x(t)$  от искомого множества  $\mathcal{X}[t, t_0, \mathcal{X}_0]$ . Согласно (Опр.2.) нам необходимо найти наиболее подходящее управление, которое позволит сократить до минимума это расстояние при любой возможной реализации помехи. Для этого используется минимаксный подход, описанный в [2].

Для поиска множества  $\mathcal{X}[t, t_0]$  используется функция цены вида

$$V(t, x) = \min_{u(\cdot)} \max_{v(\cdot)} d^2(x_0, \mathcal{X}_0) \mid_{x(t)=x}$$

где  $d(x_0, \mathcal{X}_0)$  – расстояние между точкой  $x_0$  и множеством  $\mathcal{X}_0$ , определяемое метрикой  $d(x, \mathcal{X}) = \min_{y \in \mathcal{X}} \|x - y\|$ . Поясним наш выбор. Мы ищем множество  $\mathcal{X}[t, \mathcal{X}_0]$  всех таких точек, что для  $\forall x^*(t) \in \mathcal{X}[t, \mathcal{X}_0]$  можно заранее подобрать некоторое управление  $u^*(\cdot)$  и

некоторое подмножество  $\{x^*(t_0)\} \in \mathcal{X}_0$  так, чтобы при любой помехе  $v(\cdot)$  гарантировать вхождение  $x^*(t) \in \{x(t, u^*(\cdot), \{x^*(t_0)\})\}_{\forall v(\cdot)}$ . В рассматриваемой здесь задаче кроме помехи  $v(\cdot)$  появляется другой неизвестный параметр  $\tau(u, v)$  – момент переключения, в который меняется динамика системы, что приводит к существенному усложнению задачи.

Рассмотрим функцию  $\phi(x) = d^2(x, \mathcal{X})$ , где  $\mathcal{X}$  – выпуклый компакт. Тогда  $\phi(x)$  – выпуклая, собственная, замкнутая, и тогда операция двойного сопряжения приводит к тождественному результату [4]. Поэтому удобно выразить  $V(x, t)$  через двойное сопряжение функции расстояния  $d^2(x, \mathcal{X}_0)$ , что позволит заменить вычисление минимума на множестве в функции расстояния на вычисление максимума функции по  $n$ -мерному аргументу.

$$\begin{aligned}\phi^*(\ell^*) &= \sup_x (\langle x, \ell^* \rangle - d^2(x, \mathcal{X}_0)) = \rho(\ell^* | \mathcal{X}_0) + \frac{\|\ell^*\|^2}{4}, \\ \phi^{**}(\ell^{**}) &= \sup_{\ell^*} \left( \langle \ell^*, \ell^{**} \rangle - \rho(\ell^* | \mathcal{X}_0) - \frac{\|\ell^*\|^2}{4} \right)\end{aligned}$$

Поскольку  $\phi(\ell)$  – замкнутая функция,  $\sup$  достигается и его можно заменить на  $\max$ , тогда

$$V(t, x) = \min_{u(\cdot)} \max_{v(\cdot)} \max_{\ell} \left( \langle \ell, x_0 | x \rangle - \rho(\ell | \mathcal{X}_0) - \frac{\|\ell^*\|^2}{4} \right). \quad (3.1)$$

Найдем выражения для поиска  $x_0 |_{x(t_1)=x}$ . Пусть траектория точки в момент  $t_1$  известна  $x(t_1) = x$ . Идя в обратном времени, найдем её значение в момент  $\tau \leq t \leq t_1$  при известных  $B(s), C(s), u(s), v(s)$  до переключения:

$$x^{(2)}(t, x, u, v) = G_2(t, t_1)x + \int_{t_1}^t G_2(t, s) [B_2(s)u_2(s) + C_2(s)v_2(s)] ds, \text{ при } \tau \leq t \leq t_1,$$

и после для  $t_0 \leq t \leq \tau$ :

$$\begin{aligned}x^{(2,1)}(t, \tau, x, u, v) &= G_1(t, \tau)G_2(\tau, t_1)x + G_1(t, \tau) \int_{t_1}^{\tau} G_2(t, s) [B_2(s)u_2(s) + C_2(s)v_2(s)] ds + \\ &+ \int_{\tau}^{t_0} G_1(t, s) [B_1(s)u_1(s) + C_1(s)v_1(s)] ds, \text{ при } t_0 \leq t \leq \tau.\end{aligned} \quad (3.2)$$

Нам необходимо, чтобы момент  $\tau$  в этих выражениях удовлетворял условию на переключение, так чтобы  $\langle x(\tau), c \rangle = \gamma$ . Поскольку  $d^2(x, \mathcal{X}) \geq 0$ , то  $V(x, t) \geq 0$ . Тогда если  $\mathcal{X}[t, t_0] = \{x \mid V(t, x) \leq 0\}, \forall t \in [t_0, t_1]$ , то достаточно ввести штрафующий член  $(\langle x(\tau), c \rangle - \gamma)^2$  в выражение для  $V(t, x)$ , тем самым обеспечивая для  $\mathcal{X}[t, t_0]$  включение только тех траекторий, которые удовлетворяют нашим двум системам и условию на момент переключения.

Так как мы рассматриваем задачу в классе программных управлений, мы не можем строить управление в зависимости от текущего состояния системы, а должны определять его заранее. Поэтому, в формуле для  $V(t, x)$  нельзя искать отдельно  $\min_{u(i)} \max_{v(i)}$  для каждой из подсистем "до" и "после", так как момент переключения  $\tau$  не известен заранее. Это означает, что выбираемое управление не может меняться в зависимости от  $\tau$ .

$$V(t, x) = \min_{u_1 \in \mathcal{P}^1} \max_{v_1 \in \mathcal{V}^1} \min_{\tau} \left\{ d^2(x_0 |_{x(t)=x}, \mathcal{X}_0) + (\langle x(\tau), c \rangle - \gamma)^2 \right\}.$$

$$u_2 \in \mathcal{P}^2 \quad v_2 \in \mathcal{V}^2$$

Это значит, что искомое множество  $\mathcal{X}[t, \mathcal{X}_0]$  в классе программных управлений содержит только те траектории, которые при любой допустимой помехе  $v_1(\cdot), v_2(\cdot)$  и при любом  $\tau(v, \cdot)$  гарантированно могут попасть на множество  $\mathcal{X}[t, \mathcal{X}_0]$ . Пока примем  $\gamma = 0$ . Для линеаризации условия на переключение сделаем подстановку

$$\langle x, c \rangle^2 \equiv \max_{\mu} \left\{ \mu \langle x, c \rangle - \frac{\mu^2}{4} \right\},$$

и, используя (3.1), имеем

$$V(t, x) = \min_{u_1, u_2} \max_{v_1, v_2} \min_{\tau} \left\{ \max_{\ell} \max_{\mu} \left\{ \langle \ell, x_0 |_{x(t)=x} \rangle + \mu \langle x(\tau), c \rangle - \frac{\mu^2}{4} - \rho(\ell | \mathcal{X}_0) - \frac{\|\ell\|^2}{4} \right\} \right\}.$$

Раскрывая (3.2), получим

$$\begin{aligned} V(t, x) = & \min_{u_1, u_2} \max_{v_1, v_2} \min_{\tau \in [t_0, t]} \max_{\ell} \max_{\mu} \{ \\ & \langle \ell, G_1(t_0, \tau) G_2(\tau, t) x \rangle + \int_t^{\tau} \langle \ell, G_1(t_0, \tau) G_2(\tau, s) [B_2(s) u_2(s) + C_2(s) v_2(s)] \rangle ds + \\ & + \int_{\tau}^{t_0} \langle \ell, G_1(t_0, s) [B_1(s) u_1(s) + C_1(s) v_1(s)] \rangle ds + \mu \langle c, G_2(\tau, t) x \rangle + \\ & + \mu \int_t^{\tau} \langle c, G_2(\tau, s) [B_2(s) u_2(s) + C_2(s) v_2(s)] \rangle ds - \\ & - \frac{\mu^2}{4} - \rho(\ell | \mathcal{X}_0) - \frac{\|\ell\|^2}{4} \} \end{aligned}$$

Сгруппируем слагаемые

$$\begin{aligned} \tilde{S}(\tau, t) &= G_2^T(\tau, t) G_1^T(t_0, \tau) \ell + \mu G_2^T(\tau, t) c, \\ \tilde{S}_1(t_0, \tau) &= G_1^T(t_0, \tau) \ell, \end{aligned}$$

имеем

$$\begin{aligned} V(t, x) = & \min_{u_1, u_2} \max_{v_1, v_2} \min_{\tau \in [t_0, t]} \max_{\ell} \max_{\mu} \{ \\ & \tilde{S}^T(\tau, t) x + \int_t^{\tau} \tilde{S}^T(\tau, s) [B_2(s) u_2(s) + C_2(s) v_2(s)] ds + \\ & + \int_{\tau}^{t_0} \tilde{S}_1^T(t_0, s) [B_1(s) u_1(s) + C_1(s) v_1(s)] ds - \\ & - \frac{\mu^2}{4} - \rho(\ell | \mathcal{X}_0) - \frac{\|\ell\|^2}{4} \} \end{aligned} \tag{3.3}$$

Чтобы эффективно вычислять множества достижимости используется прием, который позволяет заменить поиск множества допустимых траекторий вычислением опорной функции к этому множеству. Для перехода к опорным функциям требуется менять местами порядок минимумов и максимумов в (3.3), а для этого необходимо выполнение условий теоремы минимакса. Поэтому дальнейшие преобразования выполняются с целью обеспечения этих условий. Одним из достаточных условий перестановки является линейность по минимизирующему или максимизирующему параметру. Наша цель состоит в том, чтобы

перенести операции минимума по  $u_1, u_2$  и максимума по  $v_1, v_2$  внутрь выражения функции цены, тем самым сводя минимизацию/максимизацию на функциональном пространстве  $\mathcal{P}, \mathcal{V}$  к поиску экстремумов для выпуклых(вогнутых) функций. Первыми меняются местами  $\max_{v_1, v_2} \min_{\tau}(\cdot) = \min_{\tau} \max_{v_1, v_2}(\cdot)$ . Для примера, сначала рассмотрим функционал

$$T(\tau, v(s)) = \int_t^{\tau} v(s) ds$$

Легко видеть, что  $T(\tau, v(s))$ , являясь линейным по  $v$ , не является таковым по  $\tau$ . Тогда вместо  $\tau$  возьмем функцию ограниченной вариации  $\tau(w) = \phi(w)$  и преобразуем

$$T(\phi(w), v(s)) = \int_{t_0}^t d\phi(w) \int_t^w v(s) ds.$$

Мы заменили множество  $\tau$  более широким множеством функций  $\phi(w)$ . Условием нормировки для этих функций служит следующее выражение

$$\int_{t_0}^t d\phi(w) = 1.$$

Теперь функционал  $T(\phi, v)$  является линейным по всем аргументам. Аналогично поступим с  $V(t, x)$ :

$$\begin{aligned} V(t, x) = & \min_{u_1, u_2} \max_{v_1, v_2} \min_{\phi(w)} \max_{\ell(w)} \max_{\mu(w)} \int_{t_0}^t d\phi(w) \left\{ \right. \\ & \tilde{S}^T(w, t)x + \int_t^w \tilde{S}^T(w, s) [B_2(s)u_2(s) + C_2(s)v_2(s)] ds + \\ & + \int_w^{t_0} \tilde{S}_1^T(t_0, s) [B_1(s)u_1(s) + C_1(s)v_1(s)] ds - \\ & \left. - \frac{\mu^2}{4} - \rho(\ell \mid \mathcal{X}_0) - \frac{\|\ell\|^2}{4} \right\}, \end{aligned}$$

Поскольку мы здесь воспользовались перестановкой

$$\int \max_{\ell, \mu} f(w, \ell, \mu) d\phi(w) = \max_{\ell(w), \mu(w)} \int f(w, \ell(w), \mu(w)) d\phi(w)$$

$\ell, \mu$  теперь функции от  $w$ ,  $\ell = \ell(w)$  и  $\mu = \mu(w)$ .

**Утверждение 1.**

$$\max_{x(\cdot)} \int_{t_0}^t f(x(s)) ds = \int_{t_0}^t \max_{x(s)} f(x(s)) ds$$

Пусть

$$x^*(\cdot) = \arg \max_{x(\cdot)} \int_{t_0}^t f(x(s)) ds$$



$$x^\circ(\cdot) : \int_{t_0}^t f(x^\circ(s)) = \int_{t_0}^t \max_{x(s)} f(x(s)) ds.$$

Предположим, что  $x^*(\cdot) \neq x^\circ(\cdot)$  и  $\int_{t_0}^t f(x^*(s)) ds \neq \int_{t_0}^t f(x^\circ(s)) ds$ .

Тогда для выражения  $m(s) = f(x^*(s)) - f(x^\circ(s))$  можно указать непересекающиеся отрезки  $T_<, T_>, T_=$ , на которых выполняются неравенства

$$\forall s \in T_< : m(s) < 0, \forall s \in T_> : m(s) > 0, \forall s \in T_= : m(s) = 0.$$

Для  $T_>$  получаем, что

$$\forall s \in T_> : f(x^*(s)) > f(x^\circ(s)) = \max_{x(s)} f(x(s))$$

– противоречие.

Для  $T_<$  получаем, что

$$\max_{x(\cdot)} \int_{T_<} f(x(s)) ds = \int_{T_<} f(x^*(s)) ds < \int_{T_<} f(x^\circ(s)) ds$$

– противоречие.

Остается единственный вариант, который и доказывает утверждение. ■

Можно заметить, что от  $w$  зависят только переменные  $\tilde{S}, \tilde{S}_1$  и пределы интегрирования. Поменяем порядок интегрирования, чтобы собрать вместе члены, зависящие от  $w$ . Применяя правила замены

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^t d\phi(w) \int_t^w ds(\cdot) &= \int_t^{t_0} ds \int_{t_0}^s d\phi(w)(\cdot), \\ \int_{t_0}^t d\phi(w) \int_w^{t_0} ds(\cdot) &= \int_t^{t_0} ds \int_s^t d\phi(w)(\cdot), \end{aligned}$$

и делая замену переменных

$$\begin{aligned} S(t_0, t_1) &= \int_{t_0}^{t_1} \tilde{S}(w, t_1) d\phi(w) = \int_{t_0}^{t_1} \{G_2^T(w, t) G_1^T(t_0, w) \ell(w) + \mu(w) G_2^T(w, t) c\} d\phi(w), \\ S_1(t_0, t_1) &= \int_{t_0}^{t_1} \tilde{S}_1(t_0, w) d\phi(w), = \int_{t_0}^{t_1} \{G_1^T(t_0, w) \ell(w)\} d\phi(w), \\ K(\ell, \mu, \mathcal{X}_0) &= \int_{t_0}^t \left[ \frac{\mu(w)^2}{4} + \rho(\ell(w) \mid \mathcal{X}_0) + \frac{\|\ell(w)\|^2}{4} \right] d\phi(w) \end{aligned}$$

придем к

$$\begin{aligned}
V(t, x) = \min_{u_1, u_2} \max_{v_1, v_2} \min_{\phi(w)} \max_{\ell(w)} \max_{\mu(w)} \Big\{ \\
S^T(t_0, t)x + \int_t^{t_0} S^T(t_0, s) [B_2(s)u_2(s) + C_2(s)v_2(s)] ds + \\
+ \int_t^{t_0} S_1^T(s, t) [B_1(s)u_1(s) + C_1(s)v_1(s)] ds - \\
-K(\ell, \mu, \mathcal{X}_0) \Big\},
\end{aligned} \tag{3.4}$$

где  $K(\ell, \mu, \mathcal{X}_0)$  – выпуклая функция.

Будем искать опорную функцию к множеству достижимости  $\mathcal{X}[t, \mathcal{X}_0]$ , определяемому по найденному выше выражению (3.4) для  $V(t, x)$ . Пользуясь линейностью по  $\phi$ , теперь можно переставить

$$\max_{v_1, v_2} \min_{\phi} \max_{\ell} \max_{\mu} (\cdot) = \min_{\phi} \max_{\ell} \max_{\mu} \max_{v_1, v_2} (\cdot),$$

и

$$\max_{v(\cdot)} \int_t^{t_0} f(v(s)) ds = \max_{v(\cdot)} \int_{t_0}^t -f(v(s)) ds = \int_{t_0}^t \max_{v(s)} [-f(v(s))] ds$$

тогда

$$\begin{aligned}
V(t, x) = \min_{u_1, u_2} \min_{\phi} \max_{\ell} \max_{\mu} \Big\{ \\
S^T(t_0, t)x + \int_t^{t_0} S^T(t_0, s) B_2(s) u_2(s) ds + \int_{t_0}^t \rho(-S^T(t_0, s) \mid C_2(s) \mathcal{V}_2(s)) ds \\
+ \int_t^{t_0} S_1^T(s, t) B_1(s) u_1(s) + \int_{t_0}^t \rho(-S_1^T(s, t) \mid C_1(s) \mathcal{V}_1(s)) ds - \\
-K(\ell, \mu, \mathcal{X}_0) \Big\}.
\end{aligned}$$

Далее, мы хотим поменять  $\min_{u_1, u_2}(\cdot)$  на опорную функцию, но полученное выше выражение уже не является вогнутым по  $\ell, \mu$ . Поэтому, мы прибегаем к овыпуклению нужных членов и приходим к

$$\begin{aligned}
V(t, x) = \min_{\phi} \max_{\ell} \max_{\mu} \Big\{ \\
S^T(t_0, t)x - \int_{t_0}^t \rho(S_1(s, t) \mid B_1(s) \mathcal{P}_1(s)) ds - \int_{t_0}^t \rho(S(t_0, s) \mid B_2(s) \mathcal{P}_2(s)) ds - \\
-\text{conv} \left\{ - \int_{t_0}^t \rho(-S_1(s, t) \mid C_1(s) \mathcal{V}_1(s)) ds - \int_{t_0}^t \rho(-S(t_0, s) \mid C_2(s) \mathcal{V}_2(s)) ds + K(\ell, \mu, \mathcal{X}_0) \right\} \Big\}.
\end{aligned}$$

**Файл prim2p.tex:**

**Утверждение 2.**

$$\text{conv}_{x(\cdot)} \int_{t_0}^t f(x(t))dt = \int_{t_0}^t \text{conv}_{x(t)} f(x(t))dt$$

Примем

$$\text{conv}(f) = f^{**}$$

Тогда

$$\begin{aligned} \left( \int_{t_0}^t f(x(s))ds \right)^* (\ell(t)) &= \max_{x(\cdot)} \left( \langle \ell, x \rangle_{L_2} - \int_{t_0}^t f(x(s))ds \right) \\ \left( \int_{t_0}^t f(x(t))dt \right)^{**} (y(t)) &= \max_{\ell(\cdot)} \left( \langle y, \ell \rangle_{L_2} - \max_{x(\cdot)} \left( \langle \ell, x \rangle_{L_2} - \int_{t_0}^t f(x(s))ds \right) \right) = \\ &= \max_{\ell(\cdot)} \min_{x(\cdot)} \left( \langle y, \ell \rangle_{L_2} - \langle \ell, x \rangle_{L_2} + \int_{t_0}^t f(x(s))ds \right) = \\ &= \max_{\ell(\cdot)} \min_{x(\cdot)} \int_{t_0}^t [\langle y(s), \ell(s) \rangle - \langle \ell(s), x(s) \rangle + f(x(s))] ds = \\ &= \int_{t_0}^t \max_{\ell(s)} \min_{x(s)} [\langle y(s), \ell(s) \rangle - \langle \ell(s), x(s) \rangle + f(x(s))] ds = \\ &= \int_{t_0}^t \max_{\ell(s)} \left[ \langle y(s), \ell(s) \rangle - \max_{x(s)} \{ \langle \ell(s), x(s) \rangle - f(x(s)) \} \right] ds = \\ &= \int_{t_0}^t f^{**}(s)ds \end{aligned}$$

■

**Утверждение 3.**

$$\begin{aligned} \min_{\ell} [\langle x, \ell \rangle + (\text{conv}(y))(\ell)] &= \min_{\ell} [\langle x, \ell \rangle + y(\ell)] \\ \min_{\ell} \left[ \langle x, \ell \rangle + \max_p (\langle p, \ell \rangle - \max_s (\langle p, s \rangle - y(s))) \right] &= \\ = \min_{\ell} \max_p \min_s [\langle x, \ell \rangle + \langle \ell, p \rangle - \langle p, s \rangle + y(s)] &= \left\{ \min_{\ell} \max_p = \max_p \min_{\ell} \right\} = \\ = \max_p \min_{\ell} \min_s [\langle \ell, x + p \rangle - \langle p, s \rangle + y(s)] &= \max_p \left[ \begin{cases} -\inf, & p \neq -x \\ 0, & p = -x \end{cases} + \min_s (-\langle p, s \rangle + y(s)) \right] = \\ = \{ \text{из первого min находим } p = -x \} &= \min_s (-\langle -x, s \rangle + y(s)) = \\ = \min_{\ell} (\langle x, \ell \rangle + y(\ell)) \end{aligned}$$

■

## 3.2 Рассматриваемые примеры

### 3.2.1 Пример 1

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = 2u + v; \\ \dot{x} = u; \\ u \in [0, 1]; \\ v \in [0, 1]; \\ \mathcal{X}_0 = \{x \in [-2, -1]\}; \\ t \in [0, 4]; \\ H = \{x = 0\}. \end{array} \right. \quad (3.5)$$

### 3.2.2 Пример 2

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = u; \\ \dot{x} = 2u + v; \\ u \in [0, 1]; \\ v \in [0, 1]; \\ \mathcal{X}_0 = \{x \in [-2, -1]\}; \\ t \in [0, 4]; \\ H = \{x = 0\}. \end{array} \right. \quad (3.6)$$

Начальные условия для (3.5) и (3.6) одинаковы. Функция цены для задач (3.5) и (3.6).

$$V(t, x) = \min_u \max_v \max_\tau \max_\ell \max_\mu \left\{ \langle \ell, x_0 |_{x(t)=x} \rangle - \rho(\ell | \mathcal{X}_0) - \frac{\|\ell\|^2}{4} + \mu \langle x(\tau), c \rangle - \frac{\mu^2}{4} \right\}.$$

В одномерном случае, если рассматривать отрезок  $[\alpha, \beta]$  как эллипсоид  $\mathcal{E}(q, Q)$ , то  $q = \frac{\beta+\alpha}{2}$ ,  $Q = \left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right)^2$ . Тогда

$$\rho(\ell | \mathcal{E}(q, Q)) = \langle \ell, q \rangle + \langle \ell, Q\ell \rangle^{\frac{1}{2}} = \ell \cdot q + |\ell| \sqrt{Q}.$$

Поскольку в уравнениях примеров (3.5) и (3.6) фундаментальные матрицы  $G(t, t_0) \equiv I$ ,  $c = 1$ , то можно написать

$$V(t, x) = \min_u \max_v \min_\tau \max_\ell \max_\mu \left\{ \ell \cdot x + \int_t^\tau \ell \cdot [B_2 u_2 + v_2] ds + \int_\tau^{t_0} \ell \cdot [B_1 u_1 + v_1] ds - \right. \\ \left. - (\ell \cdot x_0 + |\ell| \sqrt{X_0}) - \frac{\ell^2}{4} + \mu \left[ x + \int_t^\tau [B_2 u_2 + v_2] ds \right] - \frac{\mu^2}{4} \right\}.$$

Здесь  $\mathcal{X}_0 = \mathcal{E}(x_0, X_0)$ , для (3.5)  $v_2 \equiv 0$ , для (3.6)  $v_1 \equiv 0$ . Если сократить, то получим для (3.5):

$$V(t, x) = \min_u \max_v \min_\tau \max_\ell \max_\mu \left\{ (\ell + \mu)x + \int_t^\tau (\ell + \mu) B_2 u_2 ds + \int_\tau^{t_0} \ell B_1 u_1 ds + \int_\tau^{t_0} \ell v_1 ds - \right. \\ \left. - (\ell \cdot x_0 + |\ell| \sqrt{X_0}) - \frac{\ell^2}{4} - \frac{\mu^2}{4} \right\}.$$

Для (3.6)

$$V(t, x) = \min_u \max_v \min_\tau \max_\ell \max_\mu \left\{ (\ell + \mu)x + \int_t^\tau (\ell + \mu) B_2 u_2 ds + \int_t^\tau (\ell + \mu) v_2 ds + \int_\tau^{t_0} \ell B_1 u_1 ds - \right. \\ \left. - (\ell \cdot x_0 + |\ell| \sqrt{X_0}) - \frac{\ell^2}{4} - \frac{\mu^2}{4} \right\}.$$

Эти выражения не являются выпуклыми по  $\tau$ , чтобы можно было переставлять  $\max_v \min_\tau$ . Поэтому прибегаем к функции распределения  $\phi(w)$ .  $\phi(w)$  – функция ограниченной вариации.

$$\int_{t_0}^t d\phi(w) = 1.$$

Обозначим

$$S_2(t_0, s) = \int_{t_0}^s \ell(w) + \mu(w) d\phi(w)$$

$$S_1(s, t) = \int_s^t \ell(w) d\phi(w)$$

Тогда приходим к найденному ранее выражению (3.1). Используя формулу вычисления опорной функции для множеств из  $\mathbb{R}^1$  запишем

$$V(t, x) = \min_\phi \max_\ell \max_\mu \left\{ \right. \\ S_2(t_0, t)x - \int_{t_0}^t S_1(s, t) p_1 + |S_1(s, t)| \sqrt{P_1} ds - \int_{t_0}^t S_2(t_0, s) p_2 + |S_2(t_0, s)| \sqrt{P_2} ds - \\ - \text{conv} \left\{ \int_{t_0}^t w_1 S_1(s, t) - \sqrt{W_1} |S_1(s, t)| + w_2 S_2(t_0, s) - \sqrt{W_2} |S_2(t_0, s)| ds + \right. \\ \left. + \int_{t_0}^t \frac{\ell^2(w)}{4} + \frac{\mu^2(w)}{4} + \ell(w)x_0 + |\ell(w)| \sqrt{X_0} d\phi(w) \right\} \Bigg\}.$$

### 3.3 Пример $\mathbb{R}^2$

Заданы системы дифференциальных уравнений, описывающих состояние некоторой модели до переключения и после:

$$\left\{ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_1^{(1)} = x_2^{(1)} + v^{(1)}(t); \\ \dot{x}_2^{(1)} = u^{(1)}(t); \\ x(t_0) \in \mathcal{X}_0 = \{x \in \mathbb{R}^2 : (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 1)^2 \leq 1\}; \end{array} \right. \\ \\ \left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_1^{(2)} = x_2^{(2)} + v^{(2)}(t); \\ \dot{x}_2^{(2)} = -\gamma x_1 - \mu x_2 + u^{(2)}(t); \\ x(\tau) \in \mathcal{X}^{(1)}[\tau, t_0] \cap \mathcal{H}, \tau \leq t \leq t_1; \end{array} \right. \end{array} \right. \quad (3.7)$$

$\mathcal{H} = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1 = 0\}$ — гиперплоскость;  
 $u^{(1)} = u^{(2)} = u(\cdot) \in [-\alpha_1, \alpha_2] = \mathcal{P}[t_0, t_1];$   
 $v^{(1)} = v^{(2)} = v(\cdot) \in [-\beta_1, \beta_2] \in \mathcal{W}[t_0, t_1];$   
 $\gamma, \mu, \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 > 0$ — некоторые константы;  
 $\tau$  — момент переключения, при пересечении гиперплоскости.

Множества  $C_1\mathcal{W}_1$  и  $C_2\mathcal{W}_2$  принимают вид  $\begin{pmatrix} v \\ 0 \end{pmatrix}, v \in [\tilde{\beta}_1, \tilde{\beta}_2] = \text{Comp}(\mathbb{R}^1)$ , тогда для некоторого  $\tilde{\ell} \in \mathbb{R}^2$

$$\rho(\tilde{\ell}, \begin{pmatrix} v \\ 0 \end{pmatrix}) = \sup_{v \in C_1\mathcal{W}_1(s)} (\tilde{\ell}_1 v) = \tilde{\ell}_1 \cdot \begin{cases} \tilde{\beta}_1, & \tilde{\ell}_1 < 0 \\ \tilde{\beta}_2, & \tilde{\ell}_1 > 0 \end{cases}$$

**(Здесь пока не применены результаты для вычисления  $\text{conv}$  в  $\mathbb{R}^n$ , оставлено что есть)**

И тогда интегралы от опорных функций вычисляются как

$$\int_{t_0}^t \rho(-S_1(s, t) \mid C_1\mathcal{W}_1(s)) ds = -\tilde{\beta}_1^{(1)} \int_{T_{>}^{(1)}} S_1(t_0, s)_1 ds - \tilde{\beta}_2^{(1)} \int_{T_{<}^{(1)}} S_1(t_0, s)_1 ds,$$

$$\int_{t_0}^t \rho(-S(t_0, s) \mid C_2\mathcal{W}_2(s)) ds = -\tilde{\beta}_1^{(2)} \int_{T_{>}^{(2)}} S(t_0, s)_1 ds - \tilde{\beta}_2^{(2)} \int_{T_{<}^{(2)}} S(t_0, s)_1 ds,$$

где  $T_{<}^{(1)}, T_{<}^{(2)}$  — промежутки времени, на которых  $S_1(s, t)_1 < 0$ ,  $S(t_0, s)_1 < 0$  соответственно;  $T_{>}^{(1)}, T_{>}^{(2)}$  — промежутки, где  $S_1(s, t)_1 > 0$ ,  $S(t_0, s)_1 > 0$  соответственно. Концы этих отрезков находятся из уравнений

$$S_1(s, t)_1 = \int_s^t \phi(w) \{G_1^T(t_0, w)\ell(w)\}_1 dw = 0;$$

$$S(t_0, s)_1 = \int_{t_0}^s \phi(w) \{G_1^T(t_0, w)G_2^T(w, t)\ell(w) + \mu(w)G_2^T(w, t)c\}_1 dw = 0,$$

где  $t_0 < s < t$ . Также из условий задачи  $\tilde{\beta}_1^{(2)} = \tilde{\beta}_1^{(1)} = \beta_1$  и  $\tilde{\beta}_2^{(1)} = \tilde{\beta}_2^{(2)} = \beta_2$ .

Для  $s \in [t_0, t]$  множества  $B_1\mathcal{P}_1$  и  $B_2\mathcal{P}_2$  имеют вид  $\begin{pmatrix} 0 \\ u \end{pmatrix}$ , где  $u(s) \in \mathcal{R}^1$  принадлежит первому либо второму семейству управлений. Тогда аналогично

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^t \rho(S_1(s, t) \mid B_1\mathcal{P}_1) ds &= \int_{t_0}^t S_1(s, t)_2 \cdot \begin{cases} \alpha_1, & S_1(s, t)_2 < 0, \\ \alpha_2, & S_1(s, t)_2 > 0 \end{cases} ds = \\ &= \alpha_1 \int_{T_{<}^{(1)}} S_1(s, t)_2 ds + \alpha_2 \int_{T_{>}^{(1)}} S_1(s, t)_2 ds \\ \int_{t_0}^t \rho(S(t_0, s) \mid B_2\mathcal{P}_2) ds &= \int_{t_0}^t S(t_0, s)_2 \cdot \begin{cases} \alpha_1, & S(t_0, s)_2 < 0, \\ \alpha_2, & S(t_0, s)_2 > 0 \end{cases} ds = \\ &= \alpha_1 \int_{T_{<}^{(2)}} S(t_0, s)_2 ds + \alpha_2 \int_{T_{>}^{(2)}} S(t_0, s)_2 ds, \end{aligned}$$

где  $\alpha_1, \alpha_2$  – ограничения на управление,  $\alpha_1 \leq u(s) \leq \alpha_2$ ,  $T_{<}^{(1)}, T_{<}^{(2)}$  – множества отрезков времени, где  $S_1(s, t)_2 < 0, S(t_0, s)_2 < 0$ ;  $T_{>}^{(1)}, T_{>}^{(2)}$  – множество отрезков времени, где  $S_1(s, t)_2 > 0, S(t_0, s)_2 > 0$ .

**Файл [primer1a.tex](#):**

### 3.4 Пример 1а, $\mathbb{R}^1$

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = u + v; \\ \dot{x} = u; \\ u(t) \in [p_1, p_2] = \mathcal{P}; \\ v(t) \in [q_1, q_2] = \mathcal{Q}; \\ \mathcal{X}_0 = [a_1, a_2], a_1 < a_2; \\ t \in [t_0, t_1]; \\ H = \{x = c\}. \end{array} \right. \quad (3.8)$$

#### 3.4.1 Вычисляем первое множество, до переключения

Вычислим множество достижимости  $\mathcal{X}_1$  первого уравнения (системы) (3.8) Для  $\mathcal{X}_1$  имеем:

$$\mathcal{X}[t_1] = \left( \mathcal{X}_0 \dot{-} \int_{t_1}^{t_0} \mathcal{Q}(s) ds \right) + \int_{t_0}^{t_1} \mathcal{P}(s) ds$$

Пусть

$$\begin{aligned} \tilde{p}_1 &= \int_{t_0}^{t_1} p_1(s) ds; & \tilde{p}_2 &= \int_{t_0}^{t_1} p_2(s) ds; \\ \tilde{q}_1 &= \int_{t_1}^{t_0} q_2(s) ds; & \tilde{q}_2 &= \int_{t_1}^{t_0} q_1(s) ds; \end{aligned}$$

$$\mathcal{Q}(\tau_1, \tau_2) = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \mathcal{Q}(s) ds$$

$$\mathcal{P}(\tau_1, \tau_2) = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \mathcal{P}(s) ds$$

Тогда  $\mathcal{P}(t_0, t_1) = [\tilde{p}_1, \tilde{p}_2]$ ,  $\mathcal{Q}(t_1, t_0) = [\tilde{q}_1, \tilde{q}_2]$  Для множества  $C = (\mathcal{X}_0 \dot{-} \mathcal{Q}(t_1, t_0))$  имеем выражение

$$\rho(\ell \mid C) = \text{conv}[\rho(\ell \mid \mathcal{X}_0) - \rho(\ell \mid \mathcal{Q}(t_1, t_0))](\ell)$$

Геометрическую разность можно еще выразить как

$$A \dot{-} B = \bigcap_{\forall b \in B} (A - b)$$

Множество  $C = \mathcal{X}_0 \dot{-} \mathcal{Q}(t_1, t_0)$ , где  $\mathcal{Q}(t_1, t_0) = [\tilde{q}_1, \tilde{q}_2]$ , находится как  $C = [a_1 - \tilde{q}_1, a_2 - \tilde{q}_2]$ , при условии, что  $a_2 - a_1 \geq \tilde{q}_2 - \tilde{q}_1$ . Тогда

$$\mathcal{X}[t_1] = [a_1 - \tilde{q}_1 + \tilde{p}_1, a_2 - \tilde{q}_2 + \tilde{p}_2], \forall t_1 : a_2 - a_1 \geq \tilde{q}_2 - \tilde{q}_1$$

Вычислим тоже самое через опорные функции.

$$\rho(\ell \mid \mathcal{X}[t_1]) = \rho(\ell \mid \mathcal{X}_0 \dot{-} \mathcal{Q}(t_1, t_0)) + \rho(\ell \mid \mathcal{P}(t_0, t_1)) \quad (3.9)$$

$$\rho(\ell \mid \mathcal{Q}(t_1, t_0)) = \rho\left(\ell \mid \int_{t_1}^{t_0} \mathcal{Q}(s) ds\right) = \begin{cases} \ell \tilde{q}_2 = \int_{t_1}^{t_0} \ell q_1(s) ds, \ell \geq 0 \\ \ell \tilde{q}_1 = \int_{t_1}^{t_0} \ell q_2(s) ds, \ell < 0 \\ t_1 > t_0, q_1(s) \leq q_2(s), \forall s \end{cases}.$$

Здесь всегда выполнено  $\tilde{q}_1(t_0) \leq \tilde{q}_2(t_0)$ .

Для  $\mathbb{R}^1$  имеем:  $\mathcal{X}_1 = [b_1, b_2]$ ,  $\mathcal{X}_0 = [a_1, a_2]$ ,  $\mathcal{P}(s) = [p_1(s), p_2(s)]$ ,  $\mathcal{Q} = [q_1(s), q_2(s)]$ ,  $V(\tau) = [\tilde{q}_1(\tau), \tilde{q}_2(\tau)]$ .

Выражение (3.9) преобразуется к

$$\begin{aligned} \ell = 1 : b_2 &= a_2 - \tilde{q}_2(t_0) + \tilde{p}_2(t_1) \\ \ell = -1 : -b_1 &= -a_1 + \tilde{q}_1(t_0) - \tilde{p}_1(t_1) \end{aligned}$$

И получаем тоже выражение  $\mathcal{X}_1 = [b_1(t_1), b_2(t_2)] = [a_1 - \tilde{q}_1(t_0) + \tilde{p}_1(t_1), a_2 - \tilde{q}_2(t_0) + \tilde{p}_2(t_1)]$ . Здесь  $\text{conv}(\rho(\ell \mid \mathcal{X}_0) \dot{-} \mathcal{Q}(t_1, t_0)) \equiv \rho(\ell \mid \mathcal{X}_0) - \rho(\ell \mid \mathcal{Q}(t_1, t_0))$ .

Поскольку  $\mathcal{X}_1$  – гарантированная оценка, то она обладает тем свойством, что не зависит от помехи. Это множество позволяет нам не рассматривать зависимость от помехи  $v_1$ .

### 3.4.2 Множество $\{\tau, \mathcal{X}_H[\tau]\}$

То, что получаем при пересечении гиперплоскости  $H$ :

$$\{(\tau, \mathcal{X}_H)\} = \{(\tau, \mathcal{X}_1[\tau] \cap H) \mid \tau : H \cap \mathcal{X}_1(\tau, t_0, \mathcal{X}_0) \neq \emptyset\}$$



Пусть требуется найти  $(A + B) \cap H$ . Представим  $A = \bigcup_{i \in I} (a_{\perp}^i + A_{\parallel}^i)$  и  $B = \bigcup_{i \in I} (b_{\perp} + B_{\parallel}^i)$ , где  $a_{\perp}^i \perp H$ ,  $b_{\perp} \perp H$  и справедливо  $(a \in A_{\parallel}^i, a \in H) \Rightarrow A_{\parallel}^i \subset H$ , аналогично для  $B_{\parallel}^i$ . Тогда

$$(A + B) \cap H = \bigcup (A_{\parallel}^i + B_{\parallel}^j + a_{\perp}^i + b_{\perp}^j \mid \forall i \in I, j(i) \in I : a_{\perp}^i + b_{\perp}^j \in H)$$

Пусть требуется найти множество  $B = \{\xi\}$ , такое что  $\forall \xi \in B : (\xi + A) \cap H \subsetneq \emptyset, \subset X_H$ . Выполним разложение  $B = \bigcup_{i \in I} (\xi^i = \xi_{\perp}^i + B_{\parallel}^i)$ , и соответственно для  $A$ . Найдем  $\xi_{\perp}^i : (\xi_{\perp}^i + A_{\parallel}^i) \cap H \neq \emptyset$ .  $H = x \mid \langle x, c \rangle = q$ . Тогда  $d^i = \langle \xi_{\perp}^i, c \rangle = q - \langle a_{\perp}^i, c \rangle$  и  $\xi_{\perp}^i = \frac{d^i c}{\langle c, c \rangle}$ . Теперь найдем  $\{B_{\parallel}^j\}, \{\xi_{\perp}^j\}, j \in \mathcal{J} \subset I$  для которых выполнено вложение

$$\mathcal{J} = \{i \in I \mid \exists B_{\parallel}^i \neq \emptyset : \xi_{\perp}^i + B_{\parallel}^i + A_{\parallel}^i \subseteq X_H\}$$

Поскольку  $\xi_{\perp}^i + A_{\parallel}^i \subset H$  по построению всегда выполнено, то фактически  $B_{\parallel}^i = X_H \dot{-} (A_{\parallel}^i + \xi_{\perp}^i) = (X_H - \xi_{\perp}^i) \dot{-} A_{\parallel}^i$ .

Для  $\mathbb{R}^1$  есть особенность, заключающаяся в том, что  $X_H \cap H = H = x_H \in \mathbb{R}^1, X_H \cap H \neq \emptyset$ .

$$A \cap H \subset X_H \Leftrightarrow A \cap H = H \Leftrightarrow H \subset A$$

Для  $\mathcal{X}_1^{(1)}(\tau) = \{x_{\perp}\} = [b_1, b_2]$  множество моментов времени пересечения гиперплоскости  $\{\tau_H\} = \{\tau \mid H = \{c\}, c \in [b_1(\tau), b_2(\tau)]\}$ . Множество  $\mathcal{T} = \{\tau_H\}$  - это множество моментов времени не зависящее от помех. В силу условия трансверсальности это множество односвязно.

### 3.4.3 Множество достижимости для второй системы

Дано начальное множество  $\mathcal{X}_0 = \{\tau_H^{\alpha}, \mathcal{X}_H^{\alpha}\}$ , для этого множества вычислим  $\mathcal{X}_1[t_1]$ . Здесь, как и прежде, гарантированная оценка множества достижимости выглядит как

$$\mathcal{X}_1[t_1] = (\mathcal{X}_0 \dot{-} \mathcal{Q}(t_1, \tau)) + \mathcal{P}(\tau, t_1)$$

**Надо дописать вычисление для второго множества (есть рукописно)**

И иллюстрации

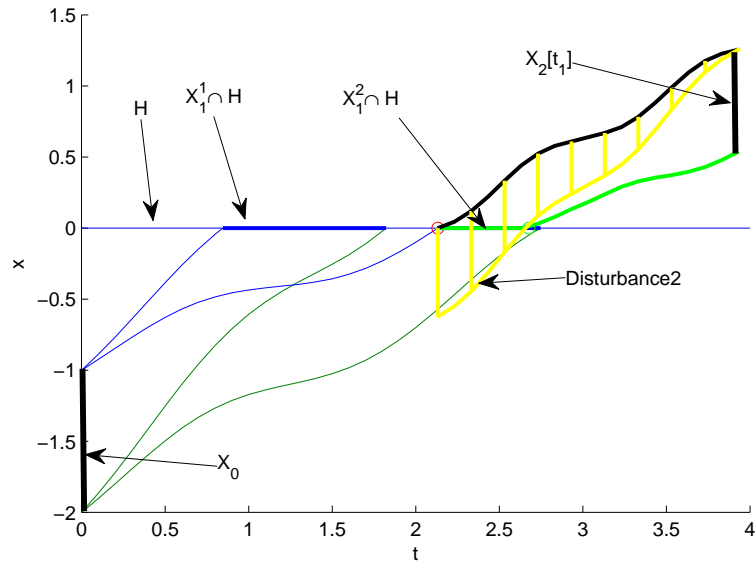


Рис. 1. Множество достижимости  $\mathbb{R}^1$  наглядно

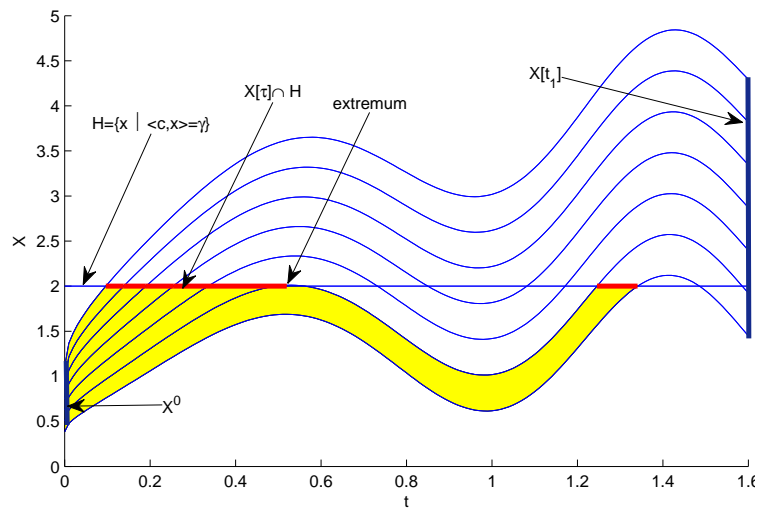


Рис. 2. Наглядность трансверсальности, если условие не выполнено

$$\begin{cases} \langle x(\tau), c \rangle - \gamma = 0 \\ \langle x(\tau + \epsilon), c \rangle - \gamma > 0; \forall \epsilon > 0 \end{cases}$$

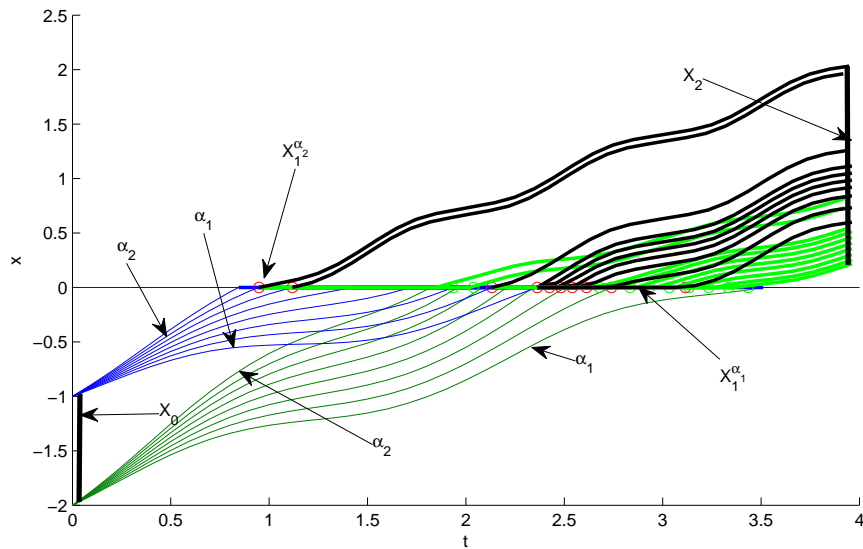


Рис. 3. Множество достижимости  $\mathbb{R}^1$  полное

Файл [bibl.tex](#):

## Список литературы

- [1] Куржанский А.Б., Варайя П. Задачи динамики и управления в гибридных системах // Труды международного семинара “Теория управления и теория обобщенных решений уравнений Гамильтона-Якоби”. Екатеринбург: Изд-во Уральского университета, 2005. с.26–33.
- [2] Куржанский А.Б. Управление и наблюдение в условиях неопределенности. М.: Наука, 1977.
- [3] Куржанский А.Б., Точилин П.А. Слабо инвариантные множества гибридных систем // Дифференциальные уравнения. 2008. т. 44, N11.
- [4] Пшеничный Б.Н. Выпуклый анализ и экстремальные задачи. М.: Наука, 1980.
- [5] Рокафеллар Р. Выпуклый анализ. М.: Мир, 1973.
- [6] Branicky M.S., Borkar V.S., Mitter S.M. A unified framework for hybrid control: model and optimal control theory. // IEEE transactions on automatic control, 43/1 p.31–45, 1998.
- [7] Kurzhanski A.B., Varaiya P. Ellipsoidal techniques for reachability under state constraints.// SIAM Journal on Control. 2003. V.45. N.4. p.1369–1394.
- [8] Kurzhanski A.B., Varaiya P. Ellipsoidal techniques for reachability analysis. Internal approximation // System and Control Letters. 2000. V.41. p.201–211.
- [9] Kurzhanski A.B., Varaiya P. Ellipsoidal techniques for reachability analysis. Part I: External approximations. Part II: Internal approximations. Box-valued constraints // Optimization methods and software. 2002. V.17. p.177–237.
- [10] Liberzon D. Switching in systems and control. Boston: Birkhäuser, 2003.

- [11] *Van der Schaft A., Schumacher H.* An introduction to hybrid dynamical systems. Lecture Notes in Control and Information Sciences. N251. Springer, 2000.