

1. Постановка задачи

Даны системы дифференциальных уравнений, описывающих состояние некоторой модели до переключения и после:

$$\left\{ \begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} \dot{x}^{(1)} = A^{(1)}(t)x^{(1)} + B^{(1)}(t)u^{(1)}(t) + C^{(1)}(t)v(t); \\ x(t_0) \in \mathcal{E}(x_0, X_0) = \mathcal{X}^0; \\ u^{(1)}(t) \in \mathcal{E}(p^{(1)}(t), P^{(1)}(t)) \subset \mathcal{P}[t_0, t_1]; \\ v^{(1)}(t) \in \mathcal{E}(w^{(1)}(t), W^{(1)}(t)) \subset \mathcal{V}[t_0, t_1]; \end{array} \right. \\ \\ \left[\begin{array}{l} \dot{x}^{(2)} = A^{(2)}(t)x^{(2)} + B^{(2)}(t)u^{(2)}(t) + C^{(2)}(t)f(t)^{(2)}; \\ x(\tau) \in \mathcal{X}^{(1)}(\tau, t_0); \\ u^{(2)}(t) \in \mathcal{E}(p^{(2)}(t), P^{(2)}(t)) \subset \mathcal{P}[t_0, t_1]; \\ v^{(2)}(t) \in \mathcal{E}(w^{(2)}(t), W^{(2)}(t)) \subset \mathcal{V}[t_0, t_1]; \end{array} \right. \\ \\ H = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, c \rangle = \gamma\} \text{— гиперплоскость переключения;} \\ A(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}, B(t) \in \mathbb{R}^{n \times m}, C(t) \in \mathbb{R}^{n \times k}; A(t), B(t), C(t) \in D[t_0, t_1]; \\ \tau : \langle x^{(1)}(\tau), c \rangle - \gamma = 0, \tau \in [t_0, t_1] \end{array} \right. \quad (1.1)$$

где $\mathcal{P}[t_0, t_1], \mathcal{V}[t_0, t_1]$ - класс допустимых управлений и помех. В момент времени τ , при пересечении наперед известной гиперплоскости $H = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, c \rangle = \gamma\}$, происходит переключение систем. $v(t)$ - неизвестная функция, неопределенность, область значений которой ограничена k -мерной эллиптической областью, и принадлежащая классу интегрируемых функций $D[t_0, t_1]$. Управление $u(\cdot)$ выбирается из класса программных управлений $\mathcal{P}[t_0, t_1]$, то есть так, что оно определяется к начальному моменту t_0 заранее и уже не изменяется в зависимости от поведения системы в дальнейшем, не зависит оно и от времени переключения τ . Для решения задачи важно, чтобы система удовлетворяла свойству односторонней проникаемости, то есть чтобы при переходе через плоскость H в момент τ система

$$\left\{ \begin{array}{l} \langle \dot{x}, c \rangle \neq 0; \\ \langle x, c \rangle - \gamma \neq 0 \\ \text{sign}(\langle \dot{x}^{(1)}(\tau), c \rangle) = \text{sign}(\langle \dot{x}^{(2)}(\tau), c \rangle). \end{array} \right. \quad (1.2)$$

всегда имела непустое решение. Это означает, что, во-первых, момент переключения осуществляется скачком, а во-вторых, система может пересекать эту плоскость только один раз (для момента τ) и с переходом к другой системе. Необходимо построить множество достижимости $\mathcal{X}[t, t_0]$ в классе допустимых управлений \mathcal{P} для момента времени $t > t_0$ и начального множества \mathcal{X}^0 . Таким образом, необходимо найти множество точек $\mathcal{X}[t, t_0, \mathcal{X}^0] = \{x(t)\}$, в которые система может прийти из начального множества \mathcal{X}^0 . Мы хотим получить множество точек $\{x(t_1)\}$, о которых известно, что при любой помехе для каждой из них существует управление, такое, что множество начальных состояний $x(t_0) |_{x(t_1)=x}$ для каждой точки будет лежать внутри исходного начального множества \mathcal{X}^0 .

Определение 1. Множеством достижимости $\mathcal{X}[t, t_0]$ задачи (1.1) называется пучок траекторий $\mathcal{X}[t, t_0] = \{x(t, t_0) \mid \exists u(\cdot) : \forall v(\cdot), x(t_0, t_0) \in \mathcal{X}^0\}$

2. Общая теоретическая часть

Для поиска множества $\mathcal{X}[t, t_0]$ будем использовать функцию цены

$$V(t, x) = \min_{u(\cdot)} \max_{v(\cdot)} d^2(x_0, \mathcal{X}_0) \mid_{x(t)=x}$$

где $d(x_0, \mathcal{X}_0)$ - расстояние между точкой x_0 и множеством \mathcal{X}_0 , определяемое метрикой $d(x, \mathcal{X}) = \min_{y \in \mathcal{X}} \|x - y\|$. Такой выбор вызван следующими причинами. Мы ищем множество $\mathcal{X}[t, \mathcal{X}_0]$ всех таких точек, что для $\forall x^*(t) \in \mathcal{X}[t, \mathcal{X}_0]$ можно заранее подобрать некоторое управление $u^*(\cdot)$ и некоторое подмножество $\{x^*(t_0)\} \in \mathcal{X}_0$ так, чтобы при любой помехе $v(\cdot)$ гарантировать вхождение $x^*(t) \in \{x(t, u^*(\cdot), \{x^*(t_0)\})\}_{\forall v(\cdot)}$. В рассматриваемой здесь задаче кроме помехи $v(\cdot)$ появляется другой неизвестный параметр $\tau(u, v)$ - момент переключения, в который меняется динамика системы, что приводит к существенному усложнению задачи.

Пусть $\phi(x) = d^2(x, \mathcal{X}_0)$. Так как \mathcal{X}_0 - по условию задачи выпуклое множество, то операция двойного сопряжения приводит к тождественному результату. Поэтому удобно выразить $V(x, t)$ через двойное сопряжение функции расстояния $d^2(x, \mathcal{X}_0)$.

$$\phi^*(\ell) = \sup_x (\langle x, \ell \rangle - d^2(x, \mathcal{X}_0)) = \rho(\ell \mid \mathcal{X}_0) + \frac{\|\ell\|^2}{4},$$

тогда

$$V(t, x) = \min_{u(\cdot)} \max_{v(\cdot)} \sup_{\ell} \left(\langle \ell, x_0 \rangle - \rho(\ell \mid \mathcal{X}_0) - \frac{\|\ell\|^2}{4} \right). \quad (2.1)$$

Найдем выражения для поиска $x_0 \mid_{x(t_1)=x}$. Пусть траектория точки в момент t_1 известна $x(t_1) = x$. Идя в обратном времени, найдем её значение в момент $\tau \leq t \leq t_1$ при известных $B(s), C(s), u(s), v(s)$ до переключения:

$$x^{(2)}(t, x, u, v) = G_2(t, t_1)x + \int_{t_1}^t G_2(t, s) [B_2(s)u_2(s) + C_2(s)v_2(s)] ds, \text{ при } \tau \leq t \leq t_1,$$

и после для $t_0 \leq t \leq \tau$:

$$\begin{aligned} x^{(2,1)}(t, \tau, x, u, v) = & G_1(t, \tau)G_2(\tau, t_1)x + G_1(t, \tau) \int_{t_1}^{\tau} G_2(t, s) [B_2(s)u_2(s) + C_2(s)v_2(s)] ds + \\ & + \int_{\tau}^{t_0} G_1(t, s) [B_1(s)u_1(s) + C_1(s)v_1(s)] ds, \text{ при } t_0 \leq t \leq \tau. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Нам необходимо, чтобы момент τ в этих выражениях удовлетворял условию на переключение, так чтобы $\langle x(\tau), c \rangle = \gamma$. Поскольку $d^2(x, \mathcal{X}) \geq 0$, то $V(x, t) \geq 0$. Тогда если $\mathcal{X}[t, t_0] = \{x \mid V(t, x) \leq 0\}, \forall t \in [t_0, t_1]$, то достаточно ввести штрафующий член $(\langle x(\tau), c \rangle - \gamma)^2$ в выражение для $V(t, x)$, тем самым обеспечивая для $\mathcal{X}[t, t_0]$ включение только тех траекторий, которые удовлетворяют нашим двум системам и условию на момент переключения.

Так как мы рассматриваем задачу в классе программных управлений, мы не можем строить управление в зависимости от текущего состояния системы, а должны определять его заранее. Поэтому, в формуле для $V(t, x)$ нельзя искать отдельно $\min_{u^{(i)}} \max_{v^{(i)}}$ для каждой из подсистем "до" и "после", так как момент переключения τ не известен

заранее. Это означает, что выбираемое управление не может меняться в зависимости от τ . Поскольку в общем случае ограничения на управления для разных подсистем различны, то выбираемое заранее управление должно удовлетворять обоим ограничениям $[u^*(\cdot) \in \mathcal{P}^{(1)}] \wedge [u^*(\cdot) \in \mathcal{P}^{(2)}]$. Поэтому справедливо положить $u(t) \in \mathcal{P}[\mathcal{T}] = \min\{\mathcal{P}^{(1)}[\mathcal{T}], \mathcal{P}^{(2)}[\mathcal{T}]\}$ для множества \mathcal{T} такого, что $\mathcal{T} = \cup_{v,u} \tau(v, u) \subseteq [t_0, t]$. Мы будем рассматривать задачу для $\mathcal{P}[t_0, t] = \mathcal{P}^{(1)}[t_0, t] = \mathcal{P}^{(2)}[t_0, t]$.

$$V(t, x) = \min_{u_1, u_2 \in \mathcal{P}} \max_{v_1, v_2 \in \mathcal{W}} \min_{\tau} \left\{ d^2(x_0 |_{x(t)=x}, \mathcal{X}_0) + (\langle x(\tau), c \rangle - \gamma)^2 \right\}.$$

Это значит, что искомое множество $\mathcal{X}[t, \mathcal{X}_0]$ в классе программных управлений содержит только те траектории, которые при любой допустимой помехе $v_1(\cdot), v_2(\cdot)$ и при любом $\tau(v, \cdot)$ гарантированно могут попасть на множество $\mathcal{X}[t, \mathcal{X}_0]$. Пока примем $\gamma = 0$. Для линеаризации условия на переключение сделаем подстановку

$$\langle x, c \rangle^2 \equiv \max_{\mu} \left\{ \mu \langle x, c \rangle - \frac{\mu^2}{4} \right\},$$

и, используя (2.1), имеем

$$V(t, x) = \min_{u_1, u_2 \in \mathcal{P}} \max_{v_1, v_2 \in \mathcal{W}} \min_{\tau} \left\{ \max_{\ell} \max_{\mu} \left\{ \langle \ell, x_0 |_{x(t)=x} \rangle + \mu \langle x(\tau), c \rangle - \frac{\mu^2}{4} - \rho(\ell | \mathcal{X}_0) - \frac{\|\ell\|^2}{4} \right\} \right\}.$$

Раскрывая (2.2), получим

$$\begin{aligned} V(t, x) = & \min_{u_1, u_2} \max_{v_1, v_2} \min_{\tau \in [t_0, t]} \max_{\ell} \max_{\mu} \{ \\ & \langle \ell, G_1(t_0, \tau) G_2(\tau, t) x \rangle + \int_t^{\tau} \langle \ell, G_1(t_0, \tau) G_2(\tau, s) [B_2(s) u_2(s) + C_2(s) v_2(s)] \rangle ds + \\ & + \int_{\tau}^{t_0} \langle \ell, G_1(t_0, s) [B_1(s) u_1(s) + C_1(s) v_1(s)] \rangle ds + \mu \langle c, G_2(\tau, t) x \rangle + \\ & + \mu \int_t^{\tau} \langle c, G_2(\tau, s) [B_2(s) u_2(s) + C_2(s) v_2(s)] \rangle ds - \\ & - \frac{\mu^2}{4} - \rho(\ell | \mathcal{X}_0) - \frac{\|\ell\|^2}{4} \} \end{aligned}$$

Сгруппируем слагаемые

$$\begin{aligned} \tilde{S}(\tau, t) &= G_2^T(\tau, t) G_1^T(t_0, \tau) \ell + \mu G_2^T(\tau, t) c, \\ \tilde{S}_1(t_0, \tau) &= G_1^T(t_0, \tau) \ell, \end{aligned}$$

имеем

$$\begin{aligned} V(t, x) = & \min_{u_1, u_2} \max_{v_1, v_2} \min_{\tau \in [t_0, t]} \max_{\ell} \max_{\mu} \{ \\ & \tilde{S}^T(\tau, t) x + \int_t^{\tau} \tilde{S}^T(\tau, s) [B_2(s) u_2(s) + C_2(s) v_2(s)] ds + \\ & + \int_{\tau}^{t_0} \tilde{S}_1^T(t_0, s) [B_1(s) u_1(s) + C_1(s) v_1(s)] ds - \\ & - \frac{\mu^2}{4} - \rho(\ell | \mathcal{X}_0) - \frac{\|\ell\|^2}{4} \} \end{aligned} \tag{2.3}$$

Чтобы эффективно вычислять множества достижимости используется прием, который позволяет заменить поиск множества допустимых траекторий вычислением опорной функции к этому множеству. Для перехода к опорным функциям требуется менять местами порядок минимумов и максимумов в (2.3), а для этого необходимо выполнение условий теоремы минимакса. Поэтому дальнейшие преобразования выполняются с целью обеспечения этих условий. Одним из достаточных условий перестановки является линейность по минимизирующему или максимизирующему параметру. Наша цель состоит в том, чтобы перенести операции минимума по u_1, u_2 и максимума по v_1, v_2 внутрь выражения функции цены, тем самым сводя минимизацию/максимизацию на функциональном пространстве \mathcal{P}, \mathcal{W} к поиску экстремумов для выпуклых(вогнутых) функций. Первыми меняются местами $\max_{v_1, v_2} \min_{\tau}(\cdot) = \min_{\tau} \max_{v_1, v_2}(\cdot)$. Для примера, сначала рассмотрим функционал

$$T(\tau, v(s)) = \int_t^{\tau} v(s) ds$$

Легко видеть, что $T(\tau, v(s))$, являясь линейным по v , не является таковым по τ . Тогда вместо τ возьмем функцию ограниченной вариации $\tau(w) = \phi(w)$ и преобразуем

$$T(\phi(w), v(s)) = \int_{t_0}^t d\phi(w) \int_t^w v(s) ds.$$

Мы заменили множество τ более широким множеством функций $\phi(w)$. Условием нормировки для этих функций служит следующее выражение

$$\int_{t_0}^t d\phi(w) = 1.$$

Теперь функционал $T(\phi, v)$ является линейным по всем аргументам.

Аналогично поступим с $V(t, x)$:

$$\begin{aligned} V(t, x) = & \min_{u_1, u_2} \max_{v_1, v_2} \min_{\phi(w)} \max_{\ell(w)} \max_{\mu(w)} \int_{t_0}^t d\phi(w) \left\{ \right. \\ & \tilde{S}^T(w, t)x + \int_t^w \tilde{S}^T(w, s) [B_2(s)u_2(s) + C_2(s)v_2(s)] ds + \\ & + \int_w^{t_0} \tilde{S}_1^T(t_0, s) [B_1(s)u_1(s) + C_1(s)v_1(s)] ds - \\ & \left. - \frac{\mu^2}{4} - \rho(\ell \mid \mathcal{X}_0) - \frac{\|\ell\|^2}{4} \right\}, \end{aligned}$$

Поскольку мы здесь воспользовались перестановкой

$$\int \max_{\ell, \mu} f(w, \ell, \mu) d\phi(w) = \max_{\ell(w), \mu(w)} \int f(w, \ell(w), \mu(w)) d\phi(w)$$

ℓ, μ теперь функции от w , $\ell = \ell(w)$ и $\mu = \mu(w)$.

Утверждение 1.

$$\max_{x(\cdot)} \int_{t_0}^t f(x(s))ds = \int_{t_0}^t \max_{x(s)} f(x(s))ds$$

Пусть

$$x^*(\cdot) = \arg \max_{x(\cdot)} \int_{t_0}^t f(x(s))ds$$

$$x^\circ(\cdot) : \int_{t_0}^t f(x^\circ(s)) = \int_{t_0}^t \max_{x(s)} f(x(s))ds.$$

Предположим, что $x^*(\cdot) \neq x^\circ(\cdot)$ и $\int_{t_0}^t f(x^*(s))ds \neq \int_{t_0}^t f(x^\circ(s))ds$.

Тогда для выражения $m(s) = f(x^*(s)) - f(x^\circ(s))$ можно указать непересекающиеся отрезки $T_<, T_>, T_=$, на которых выполняются неравенства

$$\forall s \in T_< : m(s) < 0, \forall s \in T_> : m(s) > 0, \forall s \in T_= : m(s) = 0.$$

Для $T_>$ получаем, что

$$\forall s \in T_> : f(x^*(s)) > f(x^\circ(s)) = \max_{x(s)} f(x(s))$$

– противоречие.

Для $T_<$ получаем, что

$$\max_{x(\cdot)} \int_{T_<} f(x(s))ds = \int_{T_<} f(x^*(s))ds < \int_{T_<} f(x^\circ(s))ds$$

– противоречие.

Остается единственный вариант, который и доказывает утверждение. ■

Можно заметить, что от w зависят только переменные \tilde{S}, \tilde{S}_1 и пределы интегрирования. Поменяем порядок интегрирования, чтобы собрать вместе члены, зависящие от w . Применяя правила замены

$$\int_{t_0}^t d\phi(w) \int_t^w ds(\cdot) = \int_t^{t_0} ds \int_{t_0}^s d\phi(w)(\cdot),$$

$$\int_{t_0}^t d\phi(w) \int_w^{t_0} ds(\cdot) = \int_t^{t_0} ds \int_s^t d\phi(w)(\cdot),$$

и делая замену переменных

$$S(t_0, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} \tilde{S}(w, t_1) d\phi(w) = \int_{t_0}^{t_1} \{G_2^T(w, t)G_1^T(t_0, w)\ell(w) + \mu(w)G_2^T(w, t)c\} d\phi(w),$$

$$S_1(t_0, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} \tilde{S}_1(t_0, w) d\phi(w), = \int_{t_0}^{t_1} \{G_1^T(t_0, w)\ell(w)\} d\phi(w),$$

$$K(\ell, \mu, \mathcal{X}_0) = \int_{t_0}^t \left[\frac{\mu(w)^2}{4} + \rho(\ell(w) \mid \mathcal{X}_0) + \frac{\|\ell(w)\|^2}{4} \right] d\phi(w)$$

придем к

$$\begin{aligned}
V(t, x) = \min_{u_1, u_2} \max_{v_1, v_2} \min_{\phi(w)} \max_{\ell(w)} \max_{\mu(w)} \Big\{ \\
S^T(t_0, t)x + \int_t^{t_0} S^T(t_0, s) [B_2(s)u_2(s) + C_2(s)v_2(s)] ds + \\
+ \int_t^{t_0} S_1^T(s, t) [B_1(s)u_1(s) + C_1(s)v_1(s)] ds - \\
-K(\ell, \mu, \mathcal{X}_0) \Big\},
\end{aligned} \tag{2.4}$$

где $K(\ell, \mu, \mathcal{X}_0)$ – выпуклая функция.

Будем искать опорную функцию к множеству достижимости $\mathcal{X}[t, \mathcal{X}_0]$, определяемому по найденному выше выражению (2.4) для $V(t, x)$. Пользуясь линейностью по ϕ , теперь можно переставить

$$\max_{v_1, v_2} \min_{\phi} \max_{\ell} \max_{\mu} (\cdot) = \min_{\phi} \max_{\ell} \max_{\mu} \max_{v_1, v_2} (\cdot),$$

и

$$\max_{v(\cdot)} \int_t^{t_0} f(v(s)) ds = \max_{v(\cdot)} \int_{t_0}^t -f(v(s)) ds = \int_{t_0}^t \max_{v(s)} [-f(v(s))] ds$$

тогда

$$\begin{aligned}
V(t, x) = \min_{u_1, u_2} \min_{\phi} \max_{\ell} \max_{\mu} \Big\{ \\
S^T(t_0, t)x + \int_t^{t_0} S^T(t_0, s) B_2(s) u_2(s) ds + \int_{t_0}^t \rho(-S^T(t_0, s) \mid C_2(s) \mathcal{W}_2(s)) ds \\
+ \int_t^{t_0} S_1^T(s, t) B_1(s) u_1(s) + \int_{t_0}^t \rho(-S_1^T(s, t) \mid C_1(s) \mathcal{W}_1(s)) ds - \\
-K(\ell, \mu, \mathcal{X}_0) \Big\}.
\end{aligned}$$

Далее, мы хотим поменять $\min_{u_1, u_2}(\cdot)$ на опорную функцию, но полученное выше выражение уже не является вогнутым по ℓ, μ . Поэтому, мы прибегаем к овыпуклению нужных членов и приходим к

$$\begin{aligned}
V(t, x) = \min_{\phi} \max_{\ell} \max_{\mu} \Big\{ \\
S^T(t_0, t)x - \int_{t_0}^t \rho(S_1(s, t) \mid B_1(s) \mathcal{P}_1(s)) ds - \int_{t_0}^t \rho(S(t_0, s) \mid B_2(s) \mathcal{P}_2(s)) ds - \\
-\text{conv} \left\{ - \int_{t_0}^t \rho(-S_1(s, t) \mid C_1(s) \mathcal{W}_1(s)) ds - \int_{t_0}^t \rho(-S(t_0, s) \mid C_2(s) \mathcal{W}_2(s)) ds + K(\ell, \mu, \mathcal{X}_0) \right\} \Big\}.
\end{aligned}$$

Утверждение 2.

$$\text{conv}_{x(\cdot)} \int_{t_0}^t f(x(t)) dt = \int_{t_0}^t \text{conv}_{x(t)} f(x(t)) dt$$

Примем

$$\text{conv}(f) = f^{**}$$

Тогда

$$\begin{aligned} \left(\int_{t_0}^t f(x(s)) ds \right)^* (\ell(t)) &= \max_{x(\cdot)} \left(\langle \ell, x \rangle_{L_2} - \int_{t_0}^t f(x(s)) ds \right) \\ \left(\int_{t_0}^t f(x(t)) dt \right)^{**} (y(t)) &= \max_{\ell(\cdot)} \left(\langle y, \ell \rangle_{L_2} - \max_{x(\cdot)} \left(\langle \ell, x \rangle_{L_2} - \int_{t_0}^t f(x(s)) ds \right) \right) = \\ &= \max_{\ell(\cdot)} \min_{x(\cdot)} \left(\langle y, \ell \rangle_{L_2} - \langle \ell, x \rangle_{L_2} + \int_{t_0}^t f(x(s)) ds \right) = \\ &= \max_{\ell(\cdot)} \min_{x(\cdot)} \int_{t_0}^t [\langle y(s), \ell(s) \rangle - \langle \ell(s), x(s) \rangle + f(x(s))] ds = \\ &= \int_{t_0}^t \max_{\ell(s)} \min_{x(s)} [\langle y(s), \ell(s) \rangle - \langle \ell(s), x(s) \rangle + f(x(s))] ds = \\ &= \int_{t_0}^t \max_{\ell(s)} \left[\langle y(s), \ell(s) \rangle - \max_{x(s)} \{ \langle \ell(s), x(s) \rangle - f(x(s)) \} \right] ds = \\ &= \int_{t_0}^t f^{**}(s) ds \end{aligned}$$

■

2.1 Сопряженные функции

Найдем двойное сопряжение для функции

$$f(x) = x^2 - \alpha |x|$$

В \mathbb{R}^1 имеем

$$f^{**}(x) = \begin{cases} \left(|x| - \frac{\alpha}{2} \right)^2 - \frac{\alpha^2}{4}, & |x| > \frac{\alpha}{2} \\ -\frac{\alpha^2}{4}, & \text{иначе} \end{cases}$$

В пространстве \mathbb{R}^n Рассмотрим функцию

$$f(x) = \sum_{i=1}^n x_i^2 - \alpha |x_i| \quad (2.5)$$

$$f^*(y) = \sup_x (\langle x, y \rangle - f(x)) = \sup_x \left(\sum_{i=1}^n x_i y_i - \sum_{i=1}^n x_i^2 - \alpha |x_i| \right) =$$

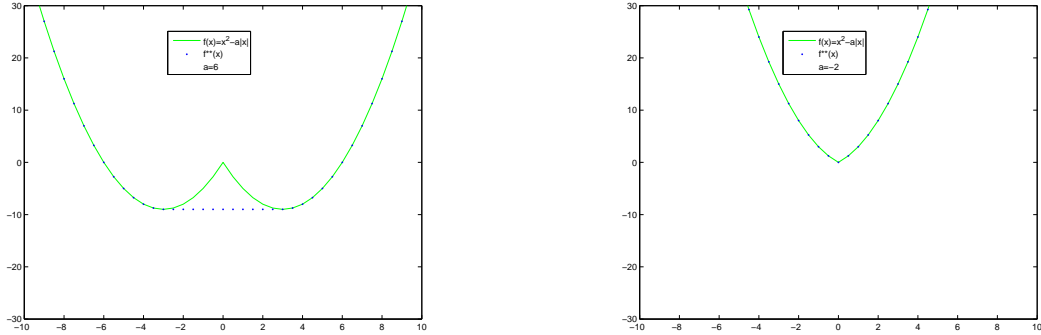


Рис. 1. Функция и её двойное сопряжение в \mathbb{R}^1

$$= \sup_{x \in D} \left(\sum_{i=1}^n x_i y_i - x_i^2 + |x_i| \right)$$

(Предположение)

Если область D такая, что $D(x_i)$ не зависит от $D(x_j) \forall i, j \leq n$, то справедливо

$$\sup_x \sum_i (\cdot) = \sum_i \sup_{x_i} (\cdot)$$

Это верно для $D = \mathbb{R}^n$ Тогда

$$\sup_x \left(\sum_{i=1}^n x_i y_i - x_i^2 + |x_i| \right) = \sum_{i=1}^n \sup_{x_i} (x_i y_i - x_i^2 + \alpha |x_i|)$$

И мы приходим к уже полученному результату в \mathbb{R}^1 для каждого i . Аналогично вычисляем f^{**} . Таким образом, в \mathbb{R}^n для функции (??) вычисление conv сводится к ряду простых операций в \mathbb{R}^1 . Если же $D = \mathcal{E}(\cdot)q, Q$ - то полученный результат становится не верным. Но рассматриваемое применение к этому случаю относиться не будет ($\forall \ell \in \mathbb{R}^n$)

Утверждение 3.

$$\text{conv}_{x(\cdot)} \int_{t_0}^t f(x(t)) dt = \int_{t_0}^t \text{conv}_{x(t)} f(x(t)) dt$$

Примем

$$\text{conv}(f) = f^{**}$$

Тогда

$$\begin{aligned}
\left(\int_{t_0}^t f(x(s)) ds \right)^* (\ell(t)) &= \max_{x(\cdot)} \left(\langle \ell, x \rangle_{L_2} - \int_{t_0}^t f(x(s)) ds \right) \\
\left(\int_{t_0}^t f(x(t)) dt \right)^{**} (y(t)) &= \max_{\ell(\cdot)} \left(\langle y, \ell \rangle_{L_2} - \max_{x(\cdot)} \left(\langle \ell, x \rangle_{L_2} - \int_{t_0}^t f(x(s)) ds \right) \right) = \\
&= \max_{\ell(\cdot)} \min_{x(\cdot)} \left(\langle y, \ell \rangle_{L_2} - \langle \ell, x \rangle_{L_2} + \int_{t_0}^t f(x(s)) ds \right) = \\
&= \max_{\ell(\cdot)} \min_{x(\cdot)} \int_{t_0}^t [\langle y(s), \ell(s) \rangle - \langle \ell(s), x(s) \rangle + f(x(s))] ds = \\
&= \int_{t_0}^t \max_{\ell(s)} \min_{x(s)} [\langle y(s), \ell(s) \rangle - \langle \ell(s), x(s) \rangle + f(x(s))] ds = \\
&= \int_{t_0}^t \max_{\ell(s)} \left[\langle y(s), \ell(s) \rangle - \max_{x(s)} \{ \langle \ell(s), x(s) \rangle - f(x(s)) \} \right] ds = \\
&= \int_{t_0}^t f^{**}(s) ds
\end{aligned}$$

■

Утверждение 4.

$$\begin{aligned}
\min_{\ell} [\langle x, \ell \rangle + (\text{conv}(y))(\ell)] &= \min_{\ell} [\langle x, \ell \rangle + y(\ell)] \\
\min_{\ell} \left[\langle x, \ell \rangle + \max_p (\langle p, \ell \rangle - \max_s (\langle p, s \rangle - y(s))) \right] &= \\
= \min_{\ell} \max_p \min_s [\langle x, \ell \rangle + \langle l, p \rangle - \langle p, s \rangle + y(s)] &= \left\{ \min_{\ell} \max_p = \max_p \min_{\ell} \right\} = \\
= \max_p \min_{\ell} \min_s [\langle \ell, x + p \rangle - \langle p, s \rangle + y(s)] &= \max_p \left[\begin{cases} -\inf, & p \neq -x \\ 0, & p = -x \end{cases} + \min_s (-\langle p, s \rangle + y(s)) \right] = \\
= \{ \text{из первого min находим } p = -x \} &= \min_s (-\langle -x, s \rangle + y(s)) = \\
= \min_{\ell} (\langle x, \ell \rangle + y(\ell))
\end{aligned}$$

■

2.2 Рассматриваемые примеры

2.2.1 Пример 1

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = 2u + v; \\ \dot{x} = u; \\ u \in [0, 1]; \\ v \in [0, 1]; \\ \mathcal{X}_0 = \{x \in [-2, -1]\}; \\ t \in [0, 4]; \\ H = \{x = 0\}. \end{array} \right. \quad (2.6)$$

2.2.2 Пример 2

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = u; \\ \dot{x} = 2u + v; \\ u \in [0, 1]; \\ v \in [0, 1]; \\ \mathcal{X}_0 = \{x \in [-2, -1]\}; \\ t \in [0, 4]; \\ H = \{x = 0\}. \end{array} \right. \quad (2.7)$$

Начальные условия для (2.5) и (2.6) одинаковы. Функция цены для задач (2.5) и (2.6).

$$V(t, x) = \min_u \max_v \max_\tau \max_\ell \max_\mu \left\{ \langle \ell, x_0 |_{x(t)=x} \rangle - \rho(\ell | \mathcal{X}_0) - \frac{\|\ell\|^2}{4} + \mu \langle x(\tau), c \rangle - \frac{\mu^2}{4} \right\}.$$

В одномерном случае, если рассматривать отрезок $[\alpha, \beta]$ как эллипсоид $\mathcal{E}(q, Q)$, то $q = \frac{\beta+\alpha}{2}$, $Q = \left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right)^2$. Тогда

$$\rho(\ell | \mathcal{E}(q, Q)) = \langle \ell, q \rangle + \langle \ell, Q\ell \rangle^{\frac{1}{2}} = \ell \cdot q + |\ell| \sqrt{Q}.$$

Поскольку в уравнениях примеров (2.5) и (2.6) фундаментальные матрицы $G(t, t_0) \equiv I$, $c = 1$, то можно написать

$$V(t, x) = \min_u \max_v \min_\tau \max_\ell \max_\mu \left\{ \ell \cdot x + \int_t^\tau \ell \cdot [B_2 u_2 + v_2] ds + \int_\tau^{t_0} \ell \cdot [B_1 u_1 + v_1] ds - \right. \\ \left. - (\ell \cdot x_0 + |\ell| \sqrt{X_0}) - \frac{\ell^2}{4} + \mu \left[x + \int_t^\tau [B_2 u_2 + v_2] ds \right] - \frac{\mu^2}{4} \right\}.$$

Здесь $\mathcal{X}_0 = \mathcal{E}(x_0, X_0)$, для (2.5) $v_2 \equiv 0$, для (2.6) $v_1 \equiv 0$. Если сократить, то получим для (2.5):

$$V(t, x) = \min_u \max_v \min_\tau \max_\ell \max_\mu \left\{ (\ell + \mu)x + \int_t^\tau (\ell + \mu) B_2 u_2 ds + \int_\tau^{t_0} \ell B_1 u_1 ds + \int_\tau^{t_0} \ell v_1 ds - \right. \\ \left. - (\ell \cdot x_0 + |\ell| \sqrt{X_0}) - \frac{\ell^2}{4} - \frac{\mu^2}{4} \right\}.$$

Для (2.6)

$$V(t, x) = \min_u \max_v \min_\tau \max_\ell \max_\mu \left\{ (\ell + \mu)x + \int_t^\tau (\ell + \mu) B_2 u_2 ds + \int_t^\tau (\ell + \mu) v_2 ds + \int_\tau^{t_0} \ell B_1 u_1 ds - \right. \\ \left. - (\ell \cdot x_0 + |\ell| \sqrt{X_0}) - \frac{\ell^2}{4} - \frac{\mu^2}{4} \right\}.$$

Эти выражения не являются выпуклыми по τ , чтобы можно было переставлять $\max_v \min_\tau$. Поэтому прибегаем к функции распределения $\phi(w)$. $\phi(w)$ – функция ограниченной вариации.

$$\int_{t_0}^t d\phi(w) = 1.$$

Обозначим

$$S_2(t_0, s) = \int_{t_0}^s \ell(w) + \mu(w) d\phi(w)$$

$$S_1(s, t) = \int_s^t \ell(w) d\phi(w)$$

Тогда приходим к найденному ранее выражению (2.). Используя формулу вычисления опорной функции для множеств из \mathbb{R}^1 запишем

$$V(t, x) = \min_\phi \max_\ell \max_\mu \left\{ \right. \\ S_2(t_0, t)x - \int_{t_0}^t S_1(s, t) p_1 + |S_1(s, t)| \sqrt{P_1} ds - \int_{t_0}^t S_2(t_0, s) p_2 + |S_2(t_0, s)| \sqrt{P_2} ds - \\ - \text{conv} \left\{ \int_{t_0}^t w_1 S_1(s, t) - \sqrt{W_1} |S_1(s, t)| + w_2 S_2(t_0, s) - \sqrt{W_2} |S_2(t_0, s)| ds + \right. \\ \left. + \int_{t_0}^t \frac{\ell^2(w)}{4} + \frac{\mu^2(w)}{4} + \ell(w)x_0 + |\ell(w)| \sqrt{X_0} d\phi(w) \right\} \left. \right\}.$$

2.3 Пример \mathbb{R}^2

Заданы системы дифференциальных уравнений, описывающих состояние некоторой модели до переключения и после:

$$\left\{ \begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} \dot{x}_1^{(1)} = x_2^{(1)} + v^{(1)}(t); \\ \dot{x}_2^{(1)} = u^{(1)}(t); \\ x(t_0) \in \mathcal{X}_0 = \{x \in \mathbb{R}^2 : (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 1)^2 \leq 1\}; \end{array} \right. \\ \\ \left[\begin{array}{l} \dot{x}_1^{(2)} = x_2^{(2)} + v^{(2)}(t); \\ \dot{x}_2^{(2)} = -\gamma x_1 - \mu x_2 + u^{(2)}(t); \\ x(\tau) \in \mathcal{X}^{(1)}[\tau, t_0] \cap \mathcal{H}, \tau \leq t \leq t_1; \end{array} \right. \end{array} \right. \quad (2.8)$$

$\mathcal{H} = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1 = 0\}$ — гиперплоскость;
 $u^{(1)} = u^{(2)} = u(\cdot) \in [-\alpha_1, \alpha_2] = \mathcal{P}[t_0, t_1];$
 $v^{(1)} = v^{(2)} = v(\cdot) \in [-\beta_1, \beta_2] \in \mathcal{W}[t_0, t_1];$
 $\gamma, \mu, \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 > 0$ — некоторые константы;
 τ — момент переключения, при пересечении гиперплоскости.

Множества $C_1\mathcal{W}_1$ и $C_2\mathcal{W}_2$ принимают вид $\begin{pmatrix} v \\ 0 \end{pmatrix}, v \in [\tilde{\beta}_1, \tilde{\beta}_2] = \text{Comp}(\mathbb{R}^1)$, тогда для некоторого $\tilde{\ell} \in \mathbb{R}^2$

$$\rho(\tilde{\ell}, \begin{pmatrix} v \\ 0 \end{pmatrix}) = \sup_{v \in C_1\mathcal{W}_1(s)} (\tilde{\ell}_1 v) = \tilde{\ell}_1 \cdot \begin{cases} \tilde{\beta}_1, & \tilde{\ell}_1 < 0 \\ \tilde{\beta}_2, & \tilde{\ell}_1 > 0 \end{cases}$$

(Здесь пока не применены результаты для вычисления conv в \mathbb{R}^n , оставлено что есть)

И тогда интегралы от опорных функций вычисляются как

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^t \rho(-S_1(s, t) \mid C_1\mathcal{W}_1(s)) ds &= -\tilde{\beta}_1^{(1)} \int_{T_{>}^{(1)}} S_1(t_0, s)_1 ds - \tilde{\beta}_2^{(1)} \int_{T_{<}^{(1)}} S_1(t_0, s)_1 ds, \\ \int_{t_0}^t \rho(-S(t_0, s) \mid C_2\mathcal{W}_2(s)) ds &= -\tilde{\beta}_1^{(2)} \int_{T_{>}^{(2)}} S(t_0, s)_1 ds - \tilde{\beta}_2^{(2)} \int_{T_{<}^{(2)}} S(t_0, s)_1 ds, \end{aligned}$$

где $T_{<}^{(1)}, T_{<}^{(2)}$ — промежутки времени, на которых $S_1(s, t)_1 < 0$, $S(t_0, s)_1 < 0$ соответственно; $T_{>}^{(1)}, T_{>}^{(2)}$ — промежутки, где $S_1(s, t)_1 > 0$, $S(t_0, s)_1 > 0$ соответственно. Концы этих отрезков находятся из уравнений

$$\begin{aligned} S_1(s, t)_1 &= \int_s^t \phi(w) \{G_1^T(t_0, w)\ell(w)\}_1 dw = 0; \\ S(t_0, s)_1 &= \int_{t_0}^s \phi(w) \{G_1^T(t_0, w)G_2^T(w, t)\ell(w) + \mu(w)G_2^T(w, t)c\}_1 dw = 0, \end{aligned}$$

где $t_0 < s < t$. Также из условий задачи $\tilde{\beta}_1^{(2)} = \tilde{\beta}_1^{(1)} = \beta_1$ и $\tilde{\beta}_2^{(1)} = \tilde{\beta}_2^{(2)} = \beta_2$.

Для $s \in [t_0, t]$ множества $B_1\mathcal{P}_1$ и $B_2\mathcal{P}_2$ имеют вид $\begin{pmatrix} 0 \\ u \end{pmatrix}$, где $u(s) \in \mathcal{R}^1$ принадлежит первому либо второму семейству управлений. Тогда аналогично

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^t \rho(S_1(s, t) \mid B_1\mathcal{P}_1) ds &= \int_{t_0}^t S_1(s, t)_2 \cdot \begin{cases} \alpha_1, & S_1(s, t)_2 < 0, \\ \alpha_2, & S_1(s, t)_2 > 0 \end{cases} ds = \\ &= \alpha_1 \int_{T_{<}^{(1)}} S_1(s, t)_2 ds + \alpha_2 \int_{T_{>}^{(1)}} S_1(s, t)_2 ds \\ \int_{t_0}^t \rho(S(t_0, s) \mid B_2\mathcal{P}_2) ds &= \int_{t_0}^t S(t_0, s)_2 \cdot \begin{cases} \alpha_1, & S(t_0, s)_2 < 0, \\ \alpha_2, & S(t_0, s)_2 > 0 \end{cases} ds = \\ &= \alpha_1 \int_{T_{<}^{(2)}} S(t_0, s)_2 ds + \alpha_2 \int_{T_{>}^{(2)}} S(t_0, s)_2 ds, \end{aligned}$$

где α_1, α_2 – ограничения на управление, $\alpha_1 \leq u(s) \leq \alpha_2$, $T_{<}^{(1)}, T_{<}^{(2)}$ – множества отрезков времени, где $S_1(s, t)_2 < 0, S(t_0, s)_2 < 0$; $T_{>}^{(1)}, T_{>}^{(2)}$ – множество отрезков времени, где $S_1(s, t)_2 > 0, S(t_0, s)_2 > 0$.