

# 1. Постановка задачи

Даны системы дифференциальных уравнений, описывающих состояние некоторой модели до переключения и после:

$$\left\{ \begin{array}{l} \left[ \begin{array}{l} \dot{x}^{(1)} = A^{(1)}(t)x^{(1)} + B^{(1)}(t)u^{(1)}(t) + C^{(1)}(t)v(t); \\ x(t_0) \in \mathcal{E}(x_0, X_0) = \mathcal{X}^0; \\ u^{(1)}(t) \in \mathcal{E}(p^{(1)}(t), P^{(1)}(t)) \subset \mathcal{P}[t_0, t_1]; \\ v^{(1)}(t) \in \mathcal{E}(w^{(1)}(t), W^{(1)}(t)) \subset \mathcal{V}[t_0, t_1]; \end{array} \right. \\ \\ \left[ \begin{array}{l} \dot{x}^{(2)} = A^{(2)}(t)x^{(2)} + B^{(2)}(t)u^{(2)}(t) + C^{(2)}(t)f(t)^{(2)}; \\ x(\tau) \in \mathcal{X}^{(1)}(\tau, t_0); \\ u^{(2)}(t) \in \mathcal{E}(p^{(2)}(t), P^{(2)}(t)) \subset \mathcal{P}[t_0, t_1]; \\ v^{(2)}(t) \in \mathcal{E}(w^{(2)}(t), W^{(2)}(t)) \subset \mathcal{V}[t_0, t_1]; \end{array} \right. \\ H = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, c \rangle = \gamma\} \text{— гиперплоскость переключения;} \\ A(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}, B(t) \in \mathbb{R}^{n \times m}, C(t) \in \mathbb{R}^{n \times k}; A(t), B(t), C(t) \in D[t_0, t_1]; \\ \tau : \langle x^{(1)}(\tau), c \rangle - \gamma = 0. \end{array} \right. \quad (1.1)$$

где  $\mathcal{P}[t_0, t_1], \mathcal{V}[t_0, t_1]$  - класс допустимых управлений и помех. В момент времени  $\tau$ , при пересечении наперед известной гиперплоскости  $H = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, c \rangle = \gamma\}$ , происходит переключение систем.  $v(t)$  - неизвестная функция, неопределенность, область значений которой ограничена  $k$ -мерной эллиптической областью, и принадлежащая к некоторому (пока не знаю какому, предположительно к итегрируемому) классу функций  $D[t_0, t_1]$ . Управление  $u(\cdot)$  выбирается из класса программных управлений  $\mathcal{P}[t_0, t_1]$ , то есть так, что оно определяется к начальному моменту  $t_0$  заранее и уже не изменяется в зависимости от поведения системы в дальнейшем, не зависит оно и от времени переключения  $\tau$ . Для решения задачи важно, чтобы система удовлетворяла свойству односторонней проницаемости, то есть чтобы при переходе через плоскость  $H$  в момент  $\tau$  система

$$\left\{ \begin{array}{l} \left[ \begin{array}{l} \langle \dot{x}, c \rangle \neq 0; \\ \langle x, c \rangle - \gamma \neq 0 \end{array} \right. \\ \text{sign}(\langle \dot{x}^{(1)}(\tau), c \rangle) = \text{sign}(\langle \dot{x}^{(2)}(\tau), c \rangle). \end{array} \right. \quad (1.2)$$

всегда имела непустое решение. Это означает, что, во-первых, момент переключения осуществляется скачком, а во-вторых, система может пересекать эту плоскость только один раз (для момента  $\tau$ ) и с переходом к другой системе. Необходимо построить множество достижимости  $\mathcal{X}[t, t_0]$  в классе допустимых управлений  $\mathcal{P}$  для момента времени  $t > t_0$  и начального множества  $\mathcal{X}^0$ . Таким образом, необходимо найти множество точек  $\mathcal{X}[t, t_0, \mathcal{X}^0] = \{x(t)\}$ , в которые система может прийти из начального множества  $\mathcal{X}^0$ . Мы хотим получить множество точек  $\{x(t_1)\}$ , о которых известно, что при любой помехе для каждой из них существует управление, такое, что множество начальных состояний  $x(t_0) |_{x(t_1)=x}$  для каждой точки будет лежать внутри исходного начального множества  $\mathcal{X}^0$

**Определение 1.** Множеством достижимости  $\mathcal{X}[t, t_0]$  задачи (1.1) называется пучок траекторий  $\mathcal{X}[t, t_0] = \{x(t, t_0) \mid \exists u(\cdot) : \forall v(\cdot), x(t_0, t_0) \in \mathcal{X}^0\}$

## 2. Пример

Заданы системы дифференциальных уравнений, описывающих состояние некоторой модели до переключения и после:

$$\left\{ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_1^{(1)} = x_2^{(1)} + v^{(1)}(t); \\ \dot{x}_2^{(1)} = u^{(1)}(t); \\ x(t_0) \in \mathcal{X}_0 = \{x \in \mathbb{R}^2 : (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 1)^2 \leq 1\}; \end{array} \right. \\ \\ \left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_1^{(2)} = x_2^{(2)} + v^{(2)}(t); \\ \dot{x}_2^{(2)} = -\gamma x_1 - \mu x_2 + u^{(2)}(t); \\ x(\tau) \in \mathcal{X}^{(1)}[\tau, t_0] \cap \mathcal{H}, \tau \leq t \leq t_1; \end{array} \right. \end{array} \right. \quad (2.1)$$

$\mathcal{H} = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1 = 0\}$ — гиперплоскость;  
 $u^{(1)} = u^{(2)} = u(\cdot) \in [-\alpha_1, \alpha_2] = \mathcal{P}[t_0, t_1];$   
 $v^{(1)} = v^{(2)} = v(\cdot) \in [-\beta_1, \beta_2] \in \mathcal{W}[t_0, t_1];$   
 $\gamma, \mu, \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 > 0$ — некоторые константы;  
 $\tau$  — момент переключения, при пересечении гиперплоскости.

Для поиска множества  $\mathcal{X}[t, t_0]$  будем использовать функцию цены

$$V(t, x) = \min_{u(\cdot)} \max_{v(\cdot)} d^2(x_0, \mathcal{X}_0) |_{x(t)=x}$$

где  $d(x_0, \mathcal{X}_0)$  - расстояние между точкой  $x_0$  и множеством  $\mathcal{X}_0$ , определяемое метрикой  $d(x, \mathcal{X}) = \min_{y \in \mathcal{X}} \|x - y\|$ .

Пусть  $\phi(x) = d^2(x_0, \mathcal{X}_0)$ , сопряженная к ней:

$$\phi^*(\ell) = \sup_x (\langle x, \ell \rangle - d^2(x, \mathcal{X}_0)) = \rho(\ell | \mathcal{X}_0) + \frac{\|\ell\|^2}{4},$$

тогда

$$V(t, x) = \min_{u(\cdot)} \max_{v(\cdot)} \sup_{\ell} \left( \langle \ell, x_0 \rangle - \rho(\ell | \mathcal{X}_0) - \frac{\|\ell\|^2}{4} \right). \quad (2.2)$$

Найдем выражения для поиска  $x_0 |_{x(t_1)=x}$ . Пусть траектория точки в момент  $t_1$  известна  $x(t_1) = x$ . Идя в обратном времени, найдем её значение в момент  $t \leq t_1$  при известных  $B(s), C(s), u(s), v(s)$  до переключения:

$$x^{(2)}(t, x, u, v) = G_2(t, t_1)x + \int_{t_1}^t G_2(t, s) [B_2(s)u_2(s) + C_2(s)v_2(s)] ds, \text{ при } \tau \leq t \leq t_1,$$

и после для  $t \leq \tau$ :

$$\begin{aligned} x^{(2,1)}(t, \tau, x, u, v) = & G_1(t, \tau)G_2(\tau, t_1)x + G_1(t, \tau) \int_{t_1}^{\tau} G_2(t, s) [B_2(s)u_2(s) + C_2(s)v_2(s)] ds + \\ & + \int_{\tau}^{t_0} G_1(t, s) [B_1(s)u_1(s) + C_1(s)v_1(s)] ds, \text{ при } t_0 \leq t \leq \tau. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Нам необходимо, чтобы момент  $\tau$  в этих выражениях удовлетворял условию пересечения, так чтобы  $\langle x(\tau), c \rangle = \gamma$ . Поскольку  $\mathcal{X}[t, t_0] = \{x \mid V(t, x) \leq 0\}, \forall t \in [t_0, t_1]$ , то достаточно ввести штрафующий член  $(\langle x(\tau), c \rangle - \gamma)^2$  в выражение для  $V(t, x)$ , тем самым обеспечивая для  $\mathcal{X}[t, t_0]$  включение только тех траекторий, которые удовлетворяют нашим двум системам и условию на момент переключения.

Поскольку мы рассматриваем задачу в классе программных управлений, мы не можем строить управление в зависимости от текущего состояния системы, а только заранее его определять. Поэтому, в формуле для  $V(t, x)$  нельзя проводить оптимизацию отдельно для "до" и "после", так как момент переключения  $\tau$  не известен заранее.

$$V(t, x) = \min_{u_1, u_2 \in \mathcal{P}} \max_{v_1, v_2 \in \mathcal{W}} \max_{\tau} \left\{ d^2(x_0 |_{x(t)=x}, \mathcal{X}_0) + (\langle x(\tau), c \rangle - \gamma)^2 \right\}.$$

Пока примем  $\gamma = 0$ . Для линеаризации условия на переключение сделаем подстановку

$$\langle x, c \rangle^2 \equiv \max_{\mu} \left\{ \mu \langle x, c \rangle - \frac{\mu^2}{4} \right\},$$

и, используя (2.2), имеем

$$V(t, x) = \min_{u_1, u_2 \in \mathcal{P}} \max_{v_1, v_2 \in \mathcal{W}} \max_{\tau} \left\{ \max_{\ell} \max_{\mu} \left\{ \langle \ell, x_0 |_{x(t)=x} \rangle + \mu \langle x(\tau), c \rangle - \frac{\mu^2}{4} - \rho(\ell \mid \mathcal{X}_0) - \frac{\|\ell\|^2}{4} \right\} \right\}.$$

Раскрывая (2.3), получим

$$\begin{aligned} V(t, x) = & \min_{u_1, u_2} \max_{v_1, v_2} \min_{\tau \in [t_0, t]} \max_{\ell} \max_{\mu} \{ \\ & \langle \ell, G_1(t_0, \tau) G_2(\tau, t) x \rangle + \int_t^{\tau} \langle \ell, G_1(t_0, \tau) G_2(\tau, s) [B_2(s) u_2(s) + C_2(s) v_2(s)] \rangle ds + \\ & + \int_{\tau}^{t_0} \langle \ell, G_1(t_0, s) [B_1(s) u_1(s) + C_1(s) v_1(s)] \rangle ds + \mu \langle c, G_2(\tau, t) x \rangle + \\ & + \mu \int_t^{\tau} \langle c, G_2(\tau, s) [B_2(s) u_2(s) + C_2(s) v_2(s)] \rangle ds - \\ & - \frac{\mu^2}{4} - \rho(\ell \mid \mathcal{X}_0) - \frac{\|\ell\|^2}{4} \} \end{aligned}$$

Сгруппируем слагаемые

$$\begin{aligned} \tilde{S}(\tau, t) &= G_2^T(\tau, t) G_1^T(t_0, \tau) \ell + \mu G_2^T(\tau, t) c, \\ \tilde{S}_1(t_0, \tau) &= G_1^T(t_0, \tau) \ell, \end{aligned}$$

имеем

$$\begin{aligned} V(t, x) = & \min_{u_1, u_2} \max_{v_1, v_2} \min_{\tau \in [t_0, t]} \max_{\ell} \max_{\mu} \{ \\ & \tilde{S}^T(\tau, t) x + \int_t^{\tau} \tilde{S}^T(\tau, s) [B_2(s) u_2(s) + C_2(s) v_2(s)] ds + \\ & + \int_{\tau}^{t_0} \tilde{S}_1^T(t_0, s) [B_1(s) u_1(s) + C_1(s) v_1(s)] ds - \\ & - \frac{\mu^2}{4} - \rho(\ell \mid \mathcal{X}_0) - \frac{\|\ell\|^2}{4} \} \end{aligned} \tag{2.4}$$

Чтобы эффективно вычислять множества достижимости используется прием, который позволяет заменить поиск множества допустимых траекторий вычислением опорной функции к этому множеству. Для перехода к опорным функциям требуется менять местами порядок минимумов и максимумов в (2.4), а для этого необходимо выполнение условий теоремы минимакса. Поэтому дальнейшие преобразования выполняются с целью обеспечения этих условий. Одним из достаточных условий перестановки является линейность по минимизирующему или максимизирующему параметру. Наша цель состоит в том, чтобы перенести операции минимума по  $u_1, u_2$  и максимума по  $v_1, v_2$  внутрь выражения функции цены, тем самым сводя минимизацию/максимизацию на функциональном пространстве  $\mathcal{P}, \mathcal{W}$  к поиску экстремумов для выпуклых(вогнутых) функций. Первыми меняются местами  $\max_{v_1, v_2} \min_{\tau}(\cdot) = \min_{\tau} \max_{v_1, v_2}(\cdot)$ . Для примера, сначала рассмотрим функционал

$$T(\tau, v(s)) = \int_t^{\tau} v(s) ds$$

Легко видеть, что  $T(\tau, v(s))$ , являясь линейным по  $v$ , не является таковым по  $\tau$ . Тогда вместо  $\tau$  возьмем функцию  $\tau(w) = \phi(w)$  и преобразуем

$$T(\phi(w), v(s)) = \int_{t_0}^t \phi(w) dw \int_t^w v(s) ds.$$

Мы подразумеваем здесь, что  $\phi(w) = \delta(w)$ . Теперь функционал  $T(\phi, v)$  является линейным по всем аргументам.

Аналогично поступим с  $V(t, x)$ :

$$\begin{aligned} V(t, x) = & \min_{u_1, u_2} \max_{v_1, v_2} \min_{\phi(w)} \max_{\ell(w)} \max_{\mu(w)} \int_{t_0}^t \phi(w) \left\{ \right. \\ & \tilde{S}^T(w, t)x + \int_t^w \tilde{S}^T(w, s) [B_2(s)u_2(s) + C_2(s)v_2(s)] ds + \\ & + \int_w^{t_0} \tilde{S}_1^T(t_0, s) [B_1(s)u_1(s) + C_1(s)v_1(s)] ds - \\ & \left. - \frac{\mu^2}{4} - \rho(\ell \mid \mathcal{X}_0) - \frac{\|\ell\|^2}{4} \right\} dw, \end{aligned}$$

Поскольку мы здесь воспользовались перестановкой

$$\int \max_{\ell, \mu} f(w, \ell, \mu) dw = \max_{\ell(w), \mu(w)} \int f(w, \ell(w), \mu(w)) dw,$$

$\ell, \mu$  теперь функции от  $w$ ,  $\ell = \ell(w)$  и  $\mu = \mu(w)$ . Можно заметить, что от  $w$  зависят только переменные  $\tilde{S}, \tilde{S}_1$  и пределы интегрирования. Поменяем порядок интегрирования, чтобы собрать вместе члены, зависящие от  $w$ . Применяя правила замены

$$\int_{t_0}^t dw \int_t^w ds(\cdot) = \int_t^{t_0} ds \int_{t_0}^s dw(\cdot),$$

$$\int_{t_0}^t dw \int_w^{t_0} ds(\cdot) = \int_t^{t_0} ds \int_s^t dw(\cdot),$$

и делая замену переменных

$$\begin{aligned} S(t_0, t_1) &= \int_{t_0}^{t_1} \phi(w) \tilde{S}(w, t_1) dw = \int_{t_1}^{t_0} \phi(w) \{G_2^T(w, t) G_1^T(t_0, w) \ell(w) + \mu(w) G_2^T(w, t) c\} dw, \\ S_1(t_0, t_1) &= \int_{t_0}^{t_1} \phi(w) \tilde{S}_1(t_0, w) dw = \int_{t_0}^{t_1} \phi(w) \{G_1^T(t_0, w) \ell(w)\} dw, \\ K(\ell, \mu, \mathcal{X}_0) &= \int_{t_0}^t \phi(w) \left[ \frac{\mu(w)^2}{4} + \rho(\ell(w) \mid \mathcal{X}_0) + \frac{\|\ell(w)\|^2}{4} \right] dw \end{aligned}$$

придем к

$$\begin{aligned} V(t, x) &= \min_{u_1, u_2} \max_{v_1, v_2} \min_{\phi(w)} \max_{\ell(w)} \max_{\mu(w)} \left\{ \right. \\ &S^T(t_0, t)x + \int_t^{t_0} S^T(t_0, s) [B_2(s)u_2(s) + C_2(s)v_2(s)] ds + \\ &+ \int_t^{t_0} S_1^T(s, t) [B_1(s)u_1(s) + C_1(s)v_1(s)] ds - \\ &\left. - K(\ell, \mu, \mathcal{X}_0) \right\}, \end{aligned} \tag{2.5}$$

где  $K(\ell, \mu, \mathcal{X}_0)$  – выпуклая функция.

Будем искать опорную функцию к множеству достижимости  $\mathcal{X}[t, \mathcal{X}_0]$ , определяемому по найденному выше выражению (2.5) для  $V(t, x)$ . Пользуясь линейностью по  $\phi$ , теперь можно переставить

$$\max_{v_1, v_2} \min_{\phi} \max_{\ell} \max_{\mu} (\cdot) = \min_{\phi} \max_{\ell} \max_{\mu} \max_{v_1, v_2} (\cdot),$$

и

$$\max_{v(\cdot)} \int_t^{t_0} f(v(s)) ds = \max_{v(\cdot)} \int_{t_0}^t -f(v(s)) ds = \int_{t_0}^t \max_{v(s)} [-f(v(s))] ds$$

тогда

$$\begin{aligned} V(t, x) &= \min_{u_1, u_2} \min_{\phi} \max_{\ell} \max_{\mu} \left\{ \right. \\ &S^T(t_0, t)x + \int_t^{t_0} S^T(t_0, s) B_2(s) u_2(s) ds + \int_{t_0}^t \rho(-S^T(t_0, s) \mid C_2(s) \mathcal{W}_2(s)) ds \\ &+ \int_t^{t_0} S_1^T(s, t) B_1(s) u_1(s) + \int_{t_0}^t \rho(-S_1^T(s, t) \mid C_1(s) \mathcal{W}_1) ds - \\ &\left. - K(\ell, \mu, \mathcal{X}_0) \right\}. \end{aligned}$$

Далее, мы хотим поменять  $\min_{u_1, u_2}(\cdot)$  на опорную функцию, но полученное выше выражение уже не является вогнутым по  $\ell, \mu$ . Поэтому, мы прибегаем к овыпуклению нужных членов и приходим к

$$V(t, x) = \min_{\phi} \max_{\ell} \max_{\mu} \left\{ S^T(t_0, t)x - \int_{t_0}^t \rho(S_1(s, t) \mid B_1(s)\mathcal{P}_1(s)) ds - \int_{t_0}^t \rho(S(t_0, s) \mid B_2(s)\mathcal{P}_2(s)) ds - \right. \\ \left. -\text{conv} \left\{ - \int_{-t_0}^t \rho(-S_1(s, t) \mid C_1(s)\mathcal{W}_1(s)) ds - \int_{t_0}^t \rho(-S(t_0, s) \mid C_2(s)\mathcal{W}_2(s)) ds + K(\ell, \mu, \mathcal{X}_0) \right\} \right\}.$$

$$V(t, x) = \min_{\phi} \max_{\ell} \max_{\mu} \left\{ S^T(t_0, t)x - \int_{t_0}^t \rho(S_1(s, t) \mid B_1(s)\mathcal{P}_1(s)) ds - \int_{t_0}^t \rho(S(t_0, s) \mid B_2(s)\mathcal{P}_2(s)) ds - \right. \\ \left. -\text{conv} \left\{ - \int_{t_0}^t \rho(-S_1(s, t) \mid C_1(s)\mathcal{W}_1(s)) ds - \int_{t_0}^t \rho(-S(t_0, s) \mid C_2(s)\mathcal{W}_2(s)) ds + K(\ell, \mu, \mathcal{X}_0) \right\} \right\}.$$

**Утверждение 1.**

$$\text{conv} \int_{t_0}^t f(x(t))dt = \int_{t_0}^t \text{conv} f(x(t))dt$$

Примем

$$\text{conv}(f) = f^{**}$$

Тогда

$$\left( \int_{t_0}^t f(x(s))ds \right)^* (\ell(t)) = \max_{x(\cdot)} \left( \langle \ell, x \rangle_{L_2} - \int_{t_0}^t f(x(s))ds \right) \\ \left( \int_{t_0}^t f(x(t))dt \right)^{**} (y(t)) = \max_{\ell(\cdot)} \left( \langle y, \ell \rangle_{L_2} - \max_{x(\cdot)} \left( \langle \ell, x \rangle_{L_2} - \int_{t_0}^t f(x(s))ds \right) \right) = \\ = \max_{\ell(\cdot)} \min_{x(\cdot)} \left( \langle y, \ell \rangle_{L_2} - \langle \ell, x \rangle_{L_2} + \int_{t_0}^t f(x(s))ds \right) = \\ = \max_{\ell(\cdot)} \min_{x(\cdot)} \int_{t_0}^t [\langle y(s), \ell(s) \rangle - \langle \ell(s), x(s) \rangle + f(x(s))] ds = \\ = \int_{t_0}^t \max_{\ell(s)} \min_{x(s)} [\langle y(s), \ell(s) \rangle - \langle \ell(s), x(s) \rangle + f(x(s))] ds =$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{t_0}^t \max_{\ell(s)} \left[ \langle y(s), \ell(s) \rangle - \max_{x(s)} \{ \langle \ell(s), x(s) \rangle - f(x(s)) \} \right] ds = \\
&= \int_{t_0}^t f^{**}(s) ds
\end{aligned}$$

■

**Утверждение 2.**

$$\max_{x(\cdot)} \int_{t_0}^t f(x(s)) ds = \int_{t_0}^t \max_{x(s)} f(x(s)) ds$$

Пусть

$$\begin{aligned}
x^*(\cdot) &= \arg \max_{x(\cdot)} \int_{t_0}^t f(x(s)) ds \\
x^\circ(\cdot) &: \int_{t_0}^t f(x^\circ(s)) ds = \int_{t_0}^t \max_{x(s)} f(x(s)) ds.
\end{aligned}$$

Предположим, что  $x^*(\cdot) \neq x^\circ(\cdot)$  и  $\int_{t_0}^t f(x^*(s)) ds \neq \int_{t_0}^t f(x^\circ(s)) ds$ .

Тогда для выражения  $m(s) = f(x^*(s)) - f(x^\circ(s))$  можно указать непересекающиеся отрезки  $T_<, T_>, T_=$ , на которых выполняются неравенства

$$\forall s \in T_< : m(s) < 0, \forall s \in T_> : m(s) > 0, \forall s \in T_=: m(s) = 0.$$

Для  $T_>$  получаем, что

$$\forall s \in T_> : f(x^*(s)) > f(x^\circ(s)) = \max_{x(s)} f(x(s))$$

– противоречие,

Для  $T_<$  получаем, что

$$\max_{x(\cdot)} \int_{T_<} f(x(s)) ds = \int_{T_<} f(x^*(s)) ds < \int_{T_<} f(x^\circ(s)) ds$$

– противоречие,

Остается единственный вариант, который и доказывает утверждение. ■

Далнейшие рассуждения относятся к задаче (2.1). Рассмотрим теперь выражение под  $\text{conv}(\cdot)$ .

Множества  $C_1\mathcal{W}_1$  и  $C_2\mathcal{W}_2$  принимают вид  $\begin{pmatrix} v \\ 0 \end{pmatrix}, v \in [\tilde{\beta}_1, \tilde{\beta}_2] = \text{Comp}(\mathbb{R}^1)$ , тогда для некоторого  $\tilde{\ell} \in \mathbb{R}^2$

$$\rho(\tilde{\ell}, \begin{pmatrix} v \\ 0 \end{pmatrix}) = \sup_{v \in C_1\mathcal{W}_1(s)} (\tilde{\ell}_1 v) = \tilde{\ell}_1 \cdot \begin{cases} \tilde{\beta}_1, & \tilde{\ell}_1 < 0 \\ \tilde{\beta}_2, & \tilde{\ell}_1 > 0 \end{cases}$$

И тогда интегралы от опорных функций вычисляются как

$$\int_{t_0}^t \rho(-S_1(s, t) \mid C_1 \mathcal{W}_1(s)) ds = -\tilde{\beta}_1^{(1)} \int_{T_{>}^{(1)}} S_1(t_0, s)_1 ds - \tilde{\beta}_2^{(1)} \int_{T_{<}^{(1)}} S_1(t_0, s)_1 ds,$$

$$\int_{t_0}^t \rho(-S(t_0, s) \mid C_2 \mathcal{W}_2(s)) ds = -\tilde{\beta}_1^{(2)} \int_{T_{>}^{(2)}} S(t_0, s)_1 ds - \tilde{\beta}_2^{(2)} \int_{T_{<}^{(2)}} S(t_0, s)_1 ds,$$

где  $T_{<}^{(1)}, T_{<}^{(2)}$  – промежутки времени, на которых  $S_1(s, t)_1 < 0$ ,  $S(t_0, s)_1 < 0$  соответственно;  $T_{>}^{(1)}, T_{>}^{(2)}$  – промежутки, где  $S_1(s, t)_1 > 0$ ,  $S(t_0, s)_1 > 0$  соответственно. Концы этих отрезков находятся из уравнений

$$S_1(s, t)_1 = \int_s^t \phi(w) \{G_1^T(t_0, w)\ell(w)\}_1 dw = 0;$$

$$S(t_0, s)_1 = \int_{t_0}^s \phi(w) \{G_1^T(t_0, w)G_2^T(w, t)\ell(w) + \mu(w)G_2^T(w, t)c\}_1 dw = 0,$$

где  $t_0 < s < t$ . Также из условий задачи  $\tilde{\beta}_1^{(2)} = \tilde{\beta}_1^{(1)} = \beta_1$  и  $\tilde{\beta}_2^{(1)} = \tilde{\beta}_2^{(2)} = \beta_2$ .

Для  $s \in [t_0, t]$  множества  $B_1 \mathcal{P}_1$  и  $B_2 \mathcal{P}_2$  имеют вид  $\begin{pmatrix} 0 \\ u \end{pmatrix}$ , где  $u(s) \in \mathcal{R}^1$  принадлежит первому либо второму семейству управлений. Тогда аналогично

$$\int_{t_0}^t \rho(S_1(s, t) \mid B_1 \mathcal{P}_1) ds = \int_{t_0}^t S_1(s, t)_2 \cdot \begin{cases} \alpha_1, & S_1(s, t)_2 < 0, \\ \alpha_2, & S_1(s, t)_2 > 0 \end{cases} ds =$$

$$= \alpha_1 \int_{T_{<}^{(1)}} S_1(s, t)_2 ds + \alpha_2 \int_{T_{>}^{(1)}} S_1(s, t)_2 ds$$

$$\int_{t_0}^t \rho(S(t_0, s) \mid B_2 \mathcal{P}_2) ds = \int_{t_0}^t S(t_0, s)_2 \cdot \begin{cases} \alpha_1, & S(t_0, s)_2 < 0, \\ \alpha_2, & S(t_0, s)_2 > 0 \end{cases} ds =$$

$$= \alpha_1 \int_{T_{<}^{(2)}} S(t_0, s)_2 ds + \alpha_2 \int_{T_{>}^{(2)}} S(t_0, s)_2 ds,$$

где  $\alpha_1, \alpha_2$  – ограничения на управление,  $\alpha_1 \leq u(s) \leq \alpha_2$ ,  $T_{<}^{(1)}, T_{<}^{(2)}$  – множества отрезков времени, где  $S_1(s, t)_2 < 0, S(t_0, s)_2 < 0$ ;  $T_{>}^{(1)}, T_{>}^{(2)}$  – множество отрезков времени, где  $S_1(s, t)_2 > 0, S(t_0, s)_2 > 0$ .