

# 1. Общая теоретическая часть

Для поиска множества  $\mathcal{X}[t, t_0]$  будем использовать функцию цены

$$V(t, x) = \min_{u(\cdot)} \max_{v(\cdot)} d^2(x_0, \mathcal{X}_0) |_{x(t)=x}$$

где  $d(x_0, \mathcal{X}_0)$  - расстояние между точкой  $x_0$  и множеством  $\mathcal{X}_0$ , определяемое метрикой  $d(x, \mathcal{X}) = \min_{y \in \mathcal{X}} \|x - y\|$ . Такой выбор вызван следующими причинами. Мы ищем множество  $\mathcal{X}[t, \mathcal{X}_0]$  всех таких точек, что для  $\forall x^*(t) \in \mathcal{X}[t, \mathcal{X}_0]$  можно заранее подобрать некоторое управление  $u^*(\cdot)$  и некоторое подмножество  $\{x^*(t_0)\} \in \mathcal{X}_0$  так, чтобы при любой помехе  $v(\cdot)$  гарантировать вхождение  $x^*(t) \in \{x(t, u^*(\cdot), \{x^*(t_0)\})\}_{\forall v(\cdot)}$ . В рассматриваемой здесь задаче кроме помехи  $v(\cdot)$  появляется другой неизвестный параметр  $\tau(u, v)$  - момент переключения, в который меняется динамика системы, что приводит к существенному усложнению задачи.

Пусть  $\phi(x) = d^2(x_0, \mathcal{X}_0)$ , сопряженная к ней:

$$\phi^*(\ell) = \sup_x (\langle x, \ell \rangle - d^2(x, \mathcal{X}_0)) = \rho(\ell | \mathcal{X}_0) + \frac{\|\ell\|^2}{4},$$

тогда

$$V(t, x) = \min_{u(\cdot)} \max_{v(\cdot)} \sup_{\ell} \left( \langle \ell, x_0 \rangle - \rho(\ell | \mathcal{X}_0) - \frac{\|\ell\|^2}{4} \right). \quad (1.1)$$

Найдем выражения для поиска  $x_0 |_{x(t_1)=x}$ . Пусть траектория точки в момент  $t_1$  известна  $x(t_1) = x$ . Идя в обратном времени, найдем её значение в момент  $\tau \leq t \leq t_1$  при известных  $B(s), C(s), u(s), v(s)$  до переключения:

$$x^{(2)}(t, x, u, v) = G_2(t, t_1)x + \int_{t_1}^t G_2(t, s) [B_2(s)u_2(s) + C_2(s)v_2(s)] ds, \text{ при } \tau \leq t \leq t_1,$$

и после для  $t_0 \leq t \leq \tau$ :

$$\begin{aligned} x^{(2,1)}(t, \tau, x, u, v) = & G_1(t, \tau)G_2(\tau, t_1)x + G_1(t, \tau) \int_{t_1}^{\tau} G_2(t, s) [B_2(s)u_2(s) + C_2(s)v_2(s)] ds + \\ & + \int_{\tau}^{t_0} G_1(t, s) [B_1(s)u_1(s) + C_1(s)v_1(s)] ds, \text{ при } t_0 \leq t \leq \tau. \end{aligned} \quad (1.2)$$

Нам необходимо, чтобы момент  $\tau$  в этих выражениях удовлетворял условию на переключение, так чтобы  $\langle x(\tau), c \rangle = \gamma$ . Поскольку  $d^2(x, \mathcal{X}) \geq 0$ , то  $V(x, t) \geq 0$ . Тогда если  $\mathcal{X}[t, t_0] = \{x \mid V(t, x) \leq 0\}, \forall t \in [t_0, t_1]$ , то достаточно ввести штрафующий член  $(\langle x(\tau), c \rangle - \gamma)^2$  в выражение для  $V(t, x)$ , тем самым обеспечивая для  $\mathcal{X}[t, t_0]$  включение только тех траекторий, которые удовлетворяют нашим двум системам и условию на момент переключения.

Так как мы рассматриваем задачу в классе программных управлений, мы не можем строить управление в зависимости от текущего состояния системы, а должны определять его заранее. Поэтому, в формуле для  $V(t, x)$  нельзя искать отдельно  $\min_{u^{(i)}} \max_{v^{(i)}}$  для каждой из подсистем "до" и "после", так как момент переключения  $\tau$  не известен заранее. Это означает, что выбираемое управление не может меняться в зависимости от

$\tau$ . Поскольку в общем случае ограничения на управления для разных подсистем различны, то выбираемое заранее управление должно удовлетворять обоим ограничениям  $[u^*(\cdot) \in \mathcal{P}^{(1)}] \wedge [u^*(\cdot) \in \mathcal{P}^{(2)}]$ . Поэтому справедливо положить  $u(t) \in \mathcal{P}[\mathcal{T}] = \min\{\mathcal{P}^{(1)}[\mathcal{T}], \mathcal{P}^{(2)}[\mathcal{T}]\}$  для множества  $\mathcal{T}$  такого, что  $\mathcal{T} = \cup_{v,u} \tau(v, u) \subseteq [t_0, t]$ . Мы будем рассматривать задачу для  $\mathcal{P}[t_0, t] = \mathcal{P}^{(1)}[t_0, t] = \mathcal{P}^{(2)}[t_0, t]$ .

$$V(t, x) = \min_{u_1, u_2 \in \mathcal{P}} \max_{v_1, v_2 \in \mathcal{W}} \min_{\tau} \{d^2(x_0|_{x(t)=x}, \mathcal{X}_0) + (\langle x(\tau), c \rangle - \gamma)^2\}.$$

Это значит, что искомое множество  $\mathcal{X}[t, \mathcal{X}_0]$  в классе программных управлений содержит только те траектории, которые при любой допустимой помехе  $v_1(\cdot), v_2(\cdot)$  и при любом  $\tau(v, \cdot)$  гарантированно могут попасть на множество  $\mathcal{X}[t, \mathcal{X}_0]$ . Пока примем  $\gamma = 0$ . Для линеаризации условия на переключение сделаем подстановку

$$\langle x, c \rangle^2 \equiv \max_{\mu} \left\{ \mu \langle x, c \rangle - \frac{\mu^2}{4} \right\},$$

и, используя (1.1), имеем

$$V(t, x) = \min_{u_1, u_2 \in \mathcal{P}} \max_{v_1, v_2 \in \mathcal{W}} \min_{\tau} \left\{ \max_{\ell} \max_{\mu} \left\{ \langle \ell, x_0 |_{x(t)=x} \rangle + \mu \langle x(\tau), c \rangle - \frac{\mu^2}{4} - \rho(\ell | \mathcal{X}_0) - \frac{\|\ell\|^2}{4} \right\} \right\}.$$

Раскрывая (1.2), получим

$$\begin{aligned} V(t, x) = & \min_{u_1, u_2} \max_{v_1, v_2} \min_{\tau \in [t_0, t]} \max_{\ell} \max_{\mu} \{ \\ & \langle \ell, G_1(t_0, \tau) G_2(\tau, t) x \rangle + \int_t^{\tau} \langle \ell, G_1(t_0, \tau) G_2(\tau, s) [B_2(s) u_2(s) + C_2(s) v_2(s)] \rangle ds + \\ & + \int_{\tau}^{t_0} \langle \ell, G_1(t_0, s) [B_1(s) u_1(s) + C_1(s) v_1(s)] \rangle ds + \mu \langle c, G_2(\tau, t) x \rangle + \\ & + \mu \int_t^{\tau} \langle c, G_2(\tau, s) [B_2(s) u_2(s) + C_2(s) v_2(s)] \rangle ds - \\ & - \frac{\mu^2}{4} - \rho(\ell | \mathcal{X}_0) - \frac{\|\ell\|^2}{4} \} \end{aligned}$$

Сгруппируем слагаемые

$$\begin{aligned} \tilde{S}(\tau, t) &= G_2^T(\tau, t) G_1^T(t_0, \tau) \ell + \mu G_2^T(\tau, t) c, \\ \tilde{S}_1(t_0, \tau) &= G_1^T(t_0, \tau) \ell, \end{aligned}$$

имеем

$$\begin{aligned} V(t, x) = & \min_{u_1, u_2} \max_{v_1, v_2} \min_{\tau \in [t_0, t]} \max_{\ell} \max_{\mu} \{ \\ & \tilde{S}^T(\tau, t) x + \int_t^{\tau} \tilde{S}^T(\tau, s) [B_2(s) u_2(s) + C_2(s) v_2(s)] ds + \\ & + \int_{\tau}^{t_0} \tilde{S}_1^T(t_0, s) [B_1(s) u_1(s) + C_1(s) v_1(s)] ds - \\ & - \frac{\mu^2}{4} - \rho(\ell | \mathcal{X}_0) - \frac{\|\ell\|^2}{4} \} \end{aligned} \tag{1.3}$$

Чтобы эффективно вычислять множества достижимости используется прием, который позволяет заменить поиск множества допустимых траекторий вычислением опорной функции к этому множеству. Для перехода к опорным функциям требуется менять местами порядок минимумов и максимумов в (1.3), а для этого необходимо выполнение условий теоремы минимакса. Поэтому дальнейшие преобразования выполняются с целью обеспечения этих условий. Одним из достаточных условий перестановки является линейность по минимизирующему или максимизирующему параметру. Наша цель состоит в том, чтобы перенести операции минимума по  $u_1, u_2$  и максимума по  $v_1, v_2$  внутрь выражения функции цены, тем самым сводя минимизацию/максимизацию на функциональном пространстве  $\mathcal{P}, \mathcal{W}$  к поиску экстремумов для выпуклых(вогнутых) функций. Первыми меняются местами  $\max_{v_1, v_2} \min_{\tau}(\cdot) = \min_{\tau} \max_{v_1, v_2}(\cdot)$ . Для примера, сначала рассмотрим функционал

$$T(\tau, v(s)) = \int_t^{\tau} v(s) ds$$

Легко видеть, что  $T(\tau, v(s))$ , являясь линейным по  $v$ , не является таковым по  $\tau$ . Тогда вместо  $\tau$  возьмем функцию ограниченной вариации  $\tau(w) = \phi(w)$  и преобразуем

$$T(\phi(w), v(s)) = \int_{t_0}^t d\phi(w) \int_t^w v(s) ds.$$

Мы заменили множество  $\tau$  более широким множеством функций  $\phi(w)$ . Условием нормировки (или одним из) для этих функций служит следующее выражение

$$\int_{t_0}^t d\phi(w) = 1.$$

Теперь функционал  $T(\phi, v)$  является линейным по всем аргументам. Аналогично поступим с  $V(t, x)$ :

$$\begin{aligned} V(t, x) = & \min_{u_1, u_2} \max_{v_1, v_2} \min_{\phi(w)} \max_{\ell(w)} \max_{\mu(w)} \int_{t_0}^t d\phi(w) \left\{ \right. \\ & \tilde{S}^T(w, t)x + \int_t^w \tilde{S}^T(w, s) [B_2(s)u_2(s) + C_2(s)v_2(s)] ds + \\ & + \int_w^{t_0} \tilde{S}_1^T(t_0, s) [B_1(s)u_1(s) + C_1(s)v_1(s)] ds - \\ & \left. - \frac{\mu^2}{4} - \rho(\ell \mid \mathcal{X}_0) - \frac{\|\ell\|^2}{4} \right\}, \end{aligned}$$

Поскольку мы здесь воспользовались перестановкой

$$\int \max_{\ell, \mu} f(w, \ell, \mu) d\phi(w) = \max_{\ell(w), \mu(w)} \int f(w, \ell(w), \mu(w)) d\phi(w)$$

$\ell, \mu$  теперь функции от  $w$ ,  $\ell = \ell(w)$  и  $\mu = \mu(w)$ .

**Утверждение 1.**

$$\max_{x(\cdot)} \int_{t_0}^t f(x(s))ds = \int_{t_0}^t \max_{x(s)} f(x(s))ds$$

Пусть

$$x^*(\cdot) = \arg \max_{x(\cdot)} \int_{t_0}^t f(x(s))ds$$

$$x^\circ(\cdot) : \int_{t_0}^t f(x^\circ(s)) = \int_{t_0}^t \max_{x(s)} f(x(s))ds.$$

Предположим, что  $x^*(\cdot) \neq x^\circ(\cdot)$  и  $\int_{t_0}^t f(x^*(s))ds \neq \int_{t_0}^t f(x^\circ(s))ds$ .

Тогда для выражения  $m(s) = f(x^*(s)) - f(x^\circ(s))$  можно указать непересекающиеся отрезки  $T_<, T_>, T_=$ , на которых выполняются неравенства

$$\forall s \in T_< : m(s) < 0, \forall s \in T_> : m(s) > 0, \forall s \in T_= : m(s) = 0.$$

Для  $T_>$  получаем, что

$$\forall s \in T_> : f(x^*(s)) > f(x^\circ(s)) = \max_{x(s)} f(x(s))$$

– противоречие.

Для  $T_<$  получаем, что

$$\max_{x(\cdot)} \int_{T_<} f(x(s))ds = \int_{T_<} f(x^*(s))ds < \int_{T_<} f(x^\circ(s))ds$$

– противоречие.

Остается единственный вариант, который и доказывает утверждение. ■

Можно заметить, что от  $w$  зависят только переменные  $\tilde{S}, \tilde{S}_1$  и пределы интегрирования. Поменяем порядок интегрирования, чтобы собрать вместе члены, зависящие от  $w$ . Применяя правила замены

$$\int_{t_0}^t d\phi(w) \int_t^w ds(\cdot) = \int_t^{t_0} ds \int_{t_0}^s d\phi(w)(\cdot),$$

$$\int_{t_0}^t d\phi(w) \int_w^{t_0} ds(\cdot) = \int_t^{t_0} ds \int_s^t d\phi(w)(\cdot),$$

и делая замену переменных

$$S(t_0, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} \tilde{S}(w, t_1) d\phi(w) = \int_{t_0}^{t_1} \{G_2^T(w, t)G_1^T(t_0, w)\ell(w) + \mu(w)G_2^T(w, t)c\} d\phi(w),$$

$$S_1(t_0, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} \tilde{S}_1(t_0, w) d\phi(w), = \int_{t_0}^{t_1} \{G_1^T(t_0, w)\ell(w)\} d\phi(w),$$

$$K(\ell, \mu, \mathcal{X}_0) = \int_{t_0}^t \left[ \frac{\mu(w)^2}{4} + \rho(\ell(w) \mid \mathcal{X}_0) + \frac{\|\ell(w)\|^2}{4} \right] d\phi(w)$$

придем к

$$\begin{aligned}
V(t, x) = \min_{u_1, u_2} \max_{v_1, v_2} \min_{\phi(w)} \max_{\ell(w)} \max_{\mu(w)} \Big\{ \\
S^T(t_0, t)x + \int_t^{t_0} S^T(t_0, s) [B_2(s)u_2(s) + C_2(s)v_2(s)] ds + \\
+ \int_t^{t_0} S_1^T(s, t) [B_1(s)u_1(s) + C_1(s)v_1(s)] ds - \\
-K(\ell, \mu, \mathcal{X}_0) \Big\},
\end{aligned} \tag{1.4}$$

где  $K(\ell, \mu, \mathcal{X}_0)$  – выпуклая функция.

Будем искать опорную функцию к множеству достижимости  $\mathcal{X}[t, \mathcal{X}_0]$ , определяемому по найденному выше выражению (1.4) для  $V(t, x)$ . Пользуясь линейностью по  $\phi$ , теперь можно переставить

$$\max_{v_1, v_2} \min_{\phi} \max_{\ell} \max_{\mu} (\cdot) = \min_{\phi} \max_{\ell} \max_{\mu} \max_{v_1, v_2} (\cdot),$$

и

$$\max_{v(\cdot)} \int_t^{t_0} f(v(s)) ds = \max_{v(\cdot)} \int_{t_0}^t -f(v(s)) ds = \int_{t_0}^t \max_{v(s)} [-f(v(s))] ds$$

тогда

$$\begin{aligned}
V(t, x) = \min_{u_1, u_2} \min_{\phi} \max_{\ell} \max_{\mu} \Big\{ \\
S^T(t_0, t)x + \int_t^{t_0} S^T(t_0, s) B_2(s) u_2(s) ds + \int_{t_0}^t \rho(-S^T(t_0, s) \mid C_2(s) \mathcal{W}_2(s)) ds \\
+ \int_t^{t_0} S_1^T(s, t) B_1(s) u_1(s) + \int_{t_0}^t \rho(-S_1^T(s, t) \mid C_1(s) \mathcal{W}_1(s)) ds - \\
-K(\ell, \mu, \mathcal{X}_0) \Big\}.
\end{aligned}$$

Далее, мы хотим поменять  $\min_{u_1, u_2}(\cdot)$  на опорную функцию, но полученное выше выражение уже не является вогнутым по  $\ell, \mu$ . Поэтому, мы прибегаем к овыпуклению нужных членов и приходим к

$$\begin{aligned}
V(t, x) = \min_{\phi} \max_{\ell} \max_{\mu} \Big\{ \\
S^T(t_0, t)x - \int_{t_0}^t \rho(S_1(s, t) \mid B_1(s) \mathcal{P}_1(s)) ds - \int_{t_0}^t \rho(S(t_0, s) \mid B_2(s) \mathcal{P}_2(s)) ds - \\
-\text{conv} \left\{ - \int_{t_0}^t \rho(-S_1(s, t) \mid C_1(s) \mathcal{W}_1(s)) ds - \int_{t_0}^t \rho(-S(t_0, s) \mid C_2(s) \mathcal{W}_2(s)) ds + K(\ell, \mu, \mathcal{X}_0) \right\} \Big\}.
\end{aligned}$$

**Утверждение 2.**

$$\text{conv} \int_{t_0}^t f(x(t)) dt = \int_{t_0}^t \text{conv} f(x(t)) dt$$

Примем

$$\text{conv}(f) = f^{**}$$

Тогда

$$\begin{aligned} \left( \int_{t_0}^t f(x(s)) ds \right)^* (\ell(t)) &= \max_{x(\cdot)} \left( \langle \ell, x \rangle_{L_2} - \int_{t_0}^t f(x(s)) ds \right) \\ \left( \int_{t_0}^t f(x(t)) dt \right)^{**} (y(t)) &= \max_{\ell(\cdot)} \left( \langle y, \ell \rangle_{L_2} - \max_{x(\cdot)} \left( \langle \ell, x \rangle_{L_2} - \int_{t_0}^t f(x(s)) ds \right) \right) = \\ &= \max_{\ell(\cdot)} \min_{x(\cdot)} \left( \langle y, \ell \rangle_{L_2} - \langle \ell, x \rangle_{L_2} + \int_{t_0}^t f(x(s)) ds \right) = \\ &= \max_{\ell(\cdot)} \min_{x(\cdot)} \int_{t_0}^t [\langle y(s), \ell(s) \rangle - \langle \ell(s), x(s) \rangle + f(x(s))] ds = \\ &= \int_{t_0}^t \max_{\ell(s)} \min_{x(s)} [\langle y(s), \ell(s) \rangle - \langle \ell(s), x(s) \rangle + f(x(s))] ds = \\ &= \int_{t_0}^t \max_{\ell(s)} \left[ \langle y(s), \ell(s) \rangle - \max_{x(s)} \{ \langle \ell(s), x(s) \rangle - f(x(s)) \} \right] ds = \\ &= \int_{t_0}^t f^{**}(s) ds \end{aligned}$$

■

Рассмотрим примеры в  $\mathbb{R}^1$

Пример 1.

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = 2u + v; \\ \dot{x} = u; \\ u \in [0, 1]; \\ v \in [0, 1]; \\ \mathcal{X}_0 = \{x \in [-2, -1]\}; \\ t \in [0, 4]; \\ H = \{x = 0\}. \end{array} \right. \quad (1.5)$$

Пример 2.

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = u; \\ \dot{x} = 2u + v; \\ u \in [0, 1]; \\ v \in [0, 1]; \\ \mathcal{X}_0 = \{x \in [-2, -1]\}; \\ t \in [0, 4]; \\ H = \{x = 0\}. \end{array} \right. \quad (1.6)$$

Начальные условия для (1.5) и (1.6) одинаковы. Функция цены для задач (1.5) и (1.6).

$$V(t, x) = \min_u \max_v \max_\tau \max_\ell \max_\mu \left\{ \langle \ell, x_0 |_{x(t)=x} \rangle - \rho(\ell | \mathcal{X}_0) - \frac{\|\ell\|^2}{4} + \mu \langle x(\tau), c \rangle - \frac{\mu^2}{4} \right\}.$$

В одномерном случае, если рассматривать отрезок  $[\alpha, \beta]$  как эллипсоид  $\mathcal{E}(q, Q)$ , то  $q = \frac{\beta+\alpha}{2}$ ,  $Q = \left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right)^2$ . Тогда

$$\rho(\ell | \mathcal{E}(q, Q)) = \langle \ell, q \rangle + \langle \ell, Q\ell \rangle^{\frac{1}{2}} = \ell \cdot q + |\ell| \sqrt{Q}.$$

Поскольку в уравнениях примеров (1.5) и (1.6) фундаментальные матрицы  $G(t, t_0) \equiv I$ ,  $c = 1$ , то можно написать

$$V(t, x) = \min_u \max_v \min_\tau \max_\ell \max_\mu \left\{ \ell \cdot x + \int_t^\tau \ell \cdot [B_2 u_2 + v_2] ds + \int_\tau^{t_0} \ell \cdot [B_1 u_1 + v_1] ds - \right. \\ \left. - (\ell \cdot x_0 + |\ell| \sqrt{X_0}) - \frac{\ell^2}{4} + \mu \left[ x + \int_t^\tau [B_2 u_2 + v_2] ds \right] - \frac{\mu^2}{4} \right\}.$$

Здесь  $\mathcal{X}_0 = \mathcal{E}(x_0, X_0)$ , для (1.5)  $v_2 \equiv 0$ , для (1.6)  $v_1 \equiv 0$ . Если сократить, то получим для (1.5):

$$V(t, x) = \min_u \max_v \min_\tau \max_\ell \max_\mu \left\{ (\ell + \mu)x + \int_t^\tau (\ell + \mu) B_2 u_2 ds + \int_\tau^{t_0} \ell B_1 u_1 ds + \int_\tau^{t_0} \ell v_1 ds - \right. \\ \left. - (\ell \cdot x_0 + |\ell| \sqrt{X_0}) - \frac{\ell^2}{4} - \frac{\mu^2}{4} \right\}.$$

Для (1.6)

$$V(t, x) = \min_u \max_v \min_\tau \max_\ell \max_\mu \left\{ (\ell + \mu)x + \int_t^\tau (\ell + \mu) B_2 u_2 ds + \int_t^\tau (\ell + \mu) v_2 ds + \int_\tau^{t_0} \ell B_1 u_1 ds - \right. \\ \left. - (\ell \cdot x_0 + |\ell| \sqrt{X_0}) - \frac{\ell^2}{4} - \frac{\mu^2}{4} \right\}.$$

Эти выражения не являются выпуклыми по  $\tau$ , чтобы можно было переставлять  $\max_v \min_\tau$ . Поэтому прибегаем к функции распределения  $\phi(w)$ .  $\phi(w)$  – функция ограниченной вариации.

$$\int_{t_0}^t d\phi(w) = 1.$$

Обозначим

$$S_2(t_0, s) = \int_{t_0}^s \ell(w) + \mu(w) d\phi(w)$$

$$S_1(s, t) = \int_s^t \ell(w) d\phi(w)$$

Тогда приходим к найденному ранее выражению (1.). Используя формулу вычисления опорной функции для множеств из  $\mathbb{R}^1$  запишем

$$\begin{aligned}
V(t, x) = \min_{\phi} \max_{\ell} \max_{\mu} \Big\{ & \\
& S_2(t_0, t)x - \int_{t_0}^t S_1(s, t)p_1 + |S_1(s, t)|\sqrt{P_1}ds - \int_{t_0}^t S_2(t_0, s)p_2 + |S_2(t_0, s)|\sqrt{P_2}ds - \\
& - \text{conv} \left\{ \int_{t_0}^t w_1 S_1(s, t) - \sqrt{W_1} |S_1(s, t)| + w_2 S_2(t_0, s) - \sqrt{W_2} |S_2(t_0, s)| ds + \right. \\
& \left. + \int_{t_0}^t \frac{\ell^2(w)}{4} + \frac{\mu^2(w)}{4} + \ell(w)x_0 + |\ell(w)|\sqrt{X_0} d\phi(w) \right\} \Big\}.
\end{aligned}$$