МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Московский Государственный Университет имени М.В. Ломоносова

Факультет вычислительной математики и кибернетики

Кафедра системного анализа

Магистерская программа по направлению

Математические модели сложных систем: теория, алгоритмы, приложения

Отчет по практикуму по курсу ”Окружающая среда”

на тему:

Решение задачи о распространении аэрозоля и поиск функции цены минимальной концентрации

Вариант 1

Выполнил:

Селиверстов Д.С.

Проверил:

Востриков И.В.

2010

1. Постановка задачи

I Рассматривается стационарное уравнение

$$\mathcal{A}C(\cdot) + f(x) = 0, \tag{1.1}$$

в области

$$x \in \Omega = \{-\infty < x < \infty\} \tag{1.2}$$

с граничными условиями

$$C(t,x) \mid_{x\to\pm\infty} \to 0. \tag{1.3}$$

Здесь

$$\mathcal{A} = \frac{\partial}{\partial x}\left(K\frac{\partial}{\partial x}\right) + u\frac{\partial}{\partial x} - \sigma(x),$$

$$K = const, \quad u = const,$$

$$f = Q\delta(x),$$

$$\sigma(x) = \begin{cases} 1, & x \in I \\ \epsilon, & x \notin I \end{cases}$$

$$I = [0, \ell]$$

Необходимо найти функцию $C(x)$, удовлетворяющую уравнению (1.1), условиям (1.3) в области (1.2).

II

Рассматривается функционал

$$J(Q_1, Q_2) = C_1(x'') + C_2(x''), \tag{1.4}$$

где C_1, C_2 есть решение задачи (1.1) со значениями $Q = Q_1, u = u_1 > 0$ и $Q = Q_2, u = u_2 < 0$, и условие

$$Q_1 + Q_2 \geq Q_0 > 0. \tag{1.5}$$

Здесь $x'' > 0, \ell <\mid x'' \mid$. Необходимо

1. Найти Q_i, доставляющее минимум функционалу (1.4) при условии (1.5).

2. Вычислить функцию цены $V(x', x'') = \min_{Q_1,Q_2}\{J(Q_1, Q_2) \mid (1.5)\}$.

2. Теоретические обоснования

Необходимо решить уравнение (1.1) со следующими особенностями:

- правая часть—δ-функция
- коэффициент $\sigma(x)$ — ступенчатая функция.

Приведем уравнение (1.1) к виду

$$C''(x) + \frac{u}{K}C'(x) - \frac{\sigma}{K}(x)C(x) = -\frac{Q}{K}\delta(x);$$

и переобозначим коэффициенты как $\frac{u}{K} \rightsquigarrow \omega$, $\frac{\sigma}{K} \rightsquigarrow \{\sigma_1, \sigma_2\}$,
$\frac{Q}{K} \rightsquigarrow \tilde{Q}$, где $\tilde{\sigma}(x) = \frac{\sigma}{K} = \sigma_1, x \in I, \frac{\sigma}{K} = \sigma_2, x \notin I$.

$$Z''(x) + \omega Z'(x) - \tilde{\sigma}(x) Z(x) = -\tilde{Q} \tag{2.1}$$

Поскольку функция $\sigma(x)$–ступенчатая, здесь уместно рассмотреть решение на каждом подынтервале непрерывности $\sigma(x)$. Рассмотрим эти подынтервалы:

$$\begin{cases} Z_1''(x) + \omega Z_1'(x) - \sigma_2 Z_1(x) = -\tilde{Q}\delta(x), \quad x \in (-\infty, 0) \\ Z_2''(x) + \omega Z_2'(x) - \sigma_1 Z_2(x) = -\tilde{Q}\delta(x), \quad x \in [0, \ell] \\ Z_3''(x) + \omega Z_3'(x) - \sigma_2 Z_3(x) = 0, \quad x \in [\ell, \infty], \\ Z(x) = Z_1(x) \cup Z_2(x) \cup Z_3(x), \\ Z \in \mathcal{C}^1(-\infty, \infty). \end{cases} \tag{2.2}$$

Мы обозначили переменной $Z(x)$ решение для $C(x)$. На каждом шаге мы получили простое дифференциальное уравненние второго порядка с постоянными коэффициентами. Выпишем общее решение для каждого из этих уравнений.

$$\begin{cases} Z_1(x) = C_1 \exp^{\lambda_{11}x} + C_2 \exp^{\lambda_{12}x} \\ Z_2(x) = C_3 \exp^{\lambda_{21}x} + C_4 \exp^{\lambda_{22}x} \\ Z_3(x) = C_5 \exp^{\lambda_{11}x} + C_6 \exp^{\lambda_{12}x} \\ Z \in \mathcal{C}^1(-\infty, \infty). \end{cases} \tag{2.3}$$

где

$$\lambda_{11} = -\frac{\omega}{2} + \sqrt{\frac{\omega^2}{4} + \sigma_2} \leq 0, \lambda_{12} = -\frac{\omega}{2} - \sqrt{\frac{\omega^2}{4} + \sigma_2} \geq 0$$
$$\lambda_{21} = -\frac{\omega}{2} + \sqrt{\frac{\omega^2}{4} + \sigma_1} \leq 0, \lambda_{22} = -\frac{\omega}{2} - \sqrt{\frac{\omega^2}{4} + \sigma_1} \geq 0$$

Вспоминая условие (1.3), из $Z(x) \mid_{x \to -\infty} \to 0$ следует $C_2 = 0$. Аналогично, для $Z_3(x)$ имеем $C_5 = 0$. Для произвольного $\ell \to \infty$ мы также справедливо требуем выполнения $Z(x) \to 0, x = \ell \to \infty \Rightarrow C_3 = 0$. Так как функция $Z(x)$– непрерывная,то $C_1 = C_4$ и $C_1 \exp^{\lambda_{22}\ell} = C_6 \exp^{\lambda_{12}\ell}$. Откуда находим $C_6 = C_1 \exp^{(\lambda_{22} - \lambda_{12})\ell}$. Тогда решения примут вид

$$\begin{cases} Z_1(x) = C_1 \exp^{\lambda_{11}x} \\ Z_2(x) = C_1 \exp^{\lambda_{22}x} \\ Z_3(x) = C_1 \exp^{(\lambda_{22} - \lambda_{12})\ell} \exp^{\lambda_{12}x} \\ Z \in \mathcal{C}^1(-\infty, \infty). \end{cases}$$

Осталось найти C_1.

Рассмотрим теперь уравнение с правой частью. Возьмем некоторое $\epsilon > 0, \epsilon \to 0$ и проинтегрируем уравнение (2.1)

$$\int\limits_{x-\epsilon}^{x+\epsilon} Z''(x) + \omega(Z \mid_{x-\epsilon}^{x+\epsilon} - \epsilon(\sigma_1(Z(x+\epsilon) - Z(x)) + \sigma_2(Z(x) - Z(x-\epsilon))) = -\tilde{Q},$$

получим

$$Z_2'(x+0) - Z_1'(x-0) = -\tilde{Q}$$

и тогда приходим к

$$C_1(\lambda_{22} - \lambda_{11}) = -\tilde{Q},$$

откуда

$$C_1 = \frac{Q}{\sqrt{\frac{u^2}{4} + 4K\sigma_1} + \sqrt{\frac{u^2}{4} + 4K\sigma_2}}$$

Общий множитель Q можно вынести из $Z_1(x), Z_2(x), Z_3(x)$. Запишем решение

$$C(x) = \frac{Q}{\sqrt{\frac{u^2}{4} + 4K\sigma_1} + \sqrt{\frac{u^2}{4} + 4K\sigma_2}} \cdot \begin{cases} \exp^{(-\frac{u}{2K} + \sqrt{\frac{u^2}{4K^2} + \sigma_2})x}, & x \in (-infty, 0) \\ \exp^{(-\frac{u}{2K} - \sqrt{\frac{u^2}{4K^2} + \sigma_1})x}, & x \in [0, \ell] \\ \exp^{(\sqrt{\frac{u^2}{4K^2} + \sigma_2} - \sqrt{\frac{u^2}{4K^2} + \sigma_1})\ell} \exp^{(-\frac{u}{2K} - \sqrt{\frac{u^2}{4K^2} + \sigma_2})x}, & x \in (\ell, \infty) \end{cases} \tag{2.4}$$

$$= Q * \tilde{Z}(x)$$

3. Функция цены

Рассматривается функционал

$$J(Q_1, Q_2) = C_1(x'') + C_2(x''), \tag{3.1}$$

где C_1, C_2 есть решение задачи (1.1) со значениями $Q = Q_1, u = u_1 > 0$ и $Q = Q_2, u = u_2 < 0$, и условие

$$Q_1 + Q_2 \geq Q_0 > 0. \tag{3.2}$$

Здесь $x'' > 0, \ell <| x'' |$. Необходимо

1. Найти Q_i, доставляющее минимум функционалу (3.1) при условии (3.2).

2. Вычислить функцию цены $V(x', x'') = \min_{Q_1, Q_2}\{J(Q_1, Q_2) \mid (1.5)\}$.

Поскольку полученное решение (2.4) представимо в виде

$$C_i(x) = Q_i * \tilde{Z}(x, u_i)$$

то задача (3.1) и вычисление функция цены сводится к задаче линейного программирования. Действительно, для минимизации (3.1) имеем условия $b^T = [Z(x'', u_1), Z(x'', u_2)]$, $A^T = [11]$, $u^T = [Q_1, Q_2]$ и постановка задачи линейного программирования запишется как

$$\begin{cases} b^T u \to \min \\ A^T u \geq Q_0 \\ u \geq 0 \end{cases} \tag{3.3}$$

Для функции цены $V(x', x'') = \min_{Q_1, Q_2}\{J(Q_1, Q_2) \mid (1.5)\}$ постановка отличается только выражением $b^T = [Z(x', u_1), Z(x'', u_2)]$. Для двумерной задачи решение находится просто. Пусть $Q_2 = Q_0 - Q_1 + x, x \geq 0$. Тогда ищем $Q_1 \leq 0 : (b_1 - b_2)Q_1 + b_2 x + b_2 Q_0 \to \min$. Поскольку всегда выполнено $b_2 \geq 0$, то выбор оптимального набора $\{Q_1, Q_2\}$ определяется знаком $(b_1 - b_2)$.

Таким образом наша задача решена.

4. Численный эксперимент

Реализация алгоритмов была выполнена в среде Matlab 7.8. Произведено вычисление функции цены задачи (3.1) с параметрами системы

$$
\begin{aligned}
&K = 1, Q_0 = 1,\\
&\sigma(x) = \begin{cases} \sigma_1 = 1, x \in I \\ \sigma_2 = 0.1, x \notin I \end{cases},\\
&\ell = 0.4\\
&x \in [-4, 4]
\end{aligned}
$$

что проиллюстрировано на рис.1

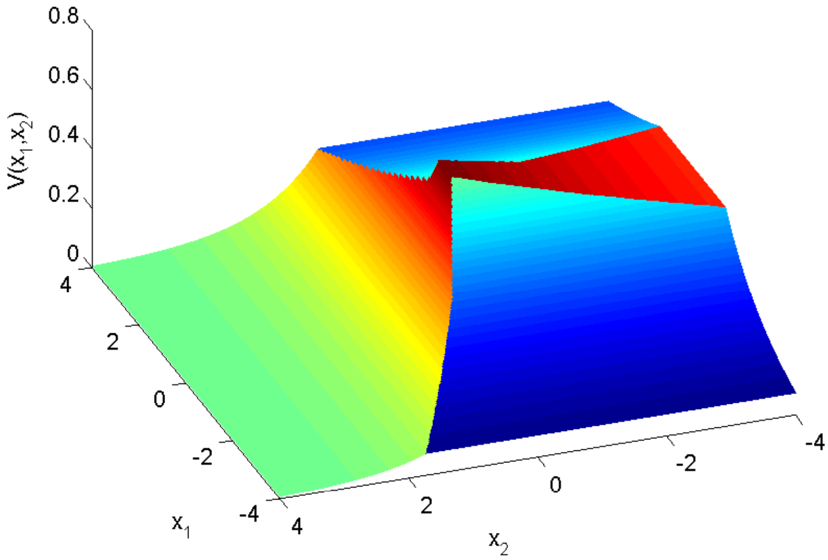

Рис. 1. Поверхность уровней функции цены для задачи (3.1)

Решение задачи (1.1) при различных параметрах ветра u проиллюстрировано на рис.2

5. Заключение

Проведенное в данной работе исследование уравнений, описывающих распространение аэрозолей в атмосфере позволяет наглядно оценить некоторые характерные особенности данного процесса. Кроме этого Была найдена стратегия, минимизирующая концентрацию вещества в заданных точках, что позволяет проанализировать зависимости допустимой концентрации вещества и близости источников выброса. Хотя было рассмотрено достаточно простая модель, тем не менее, опыт такого анализа вполне можно применить для более сложных моделей.

Список литературы

[1] А.Б. Куржанский Лекции по математическим моделям окружающей среды.

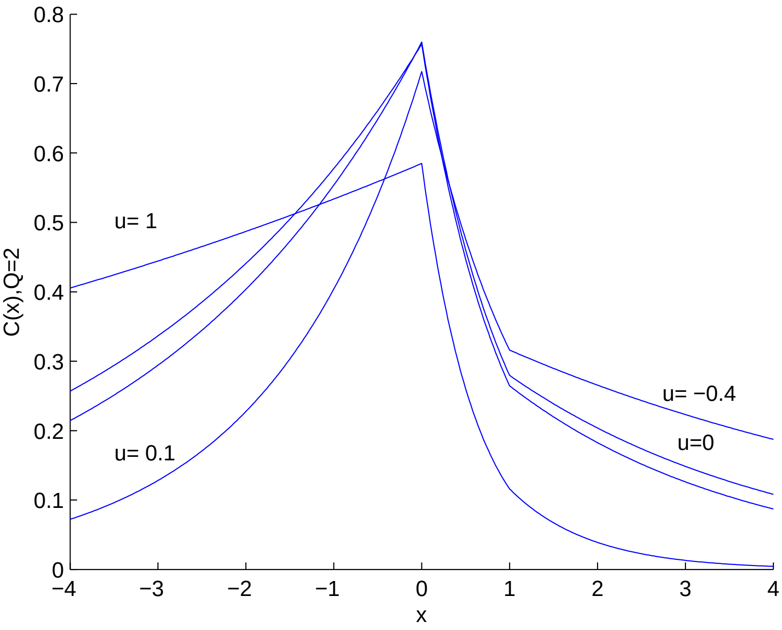

Рис. 2. Распределение концентрации при различных параметрах ветра u