0.1 Пример 1a, $\mathbb{R}^1$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} \dot{x} = u + v; \\ \dot{x} = u; \end{array}\right. \\ u(t) \in [p_1, p_2] = \mathcal{P}; \\ v(t) \in [q_1, q_2] = \mathcal{Q}; \\ \mathcal{X}_0 = [a_1, a_2], a_1 < a_2; \\ t \in [t_0, t_1]; \\ H = \{x = c\}. \end{cases} \tag{0.1}$$

Вычислим множество достижимости $\mathcal{X}_1$ первого уравнения (системы) (0.1) Для $\mathcal{X}_1$ имеем:

$$\mathcal{X}[t_1] = \left(\mathcal{X}_0 \dot{-} \int\limits_{t_1}^{t_0} \mathcal{Q}(s)ds\right) + \int\limits_{t_0}^{t_1} \mathcal{P}(s)ds$$

Пусть

$$\mathcal{Q}(t_0, t_1) = \int\limits_{t_0}^{t_1} \mathcal{Q}(s)ds$$

$$\mathcal{P}(t_0, t_1) = \int\limits_{t_0}^{t_1} \mathcal{P}(s)ds$$

Для множества $C = \left(\mathcal{X}_0 \dot{-} \mathcal{Q}(t_1, t_0)\right)$ имеем выражение

$$\rho\left(\ell \mid C\right) = \operatorname{conv}\left[\rho\left(\ell \mid \mathcal{X}_0\right) - \rho\left(\ell \mid \mathcal{Q}(t_1, t_0)\right)\right](\ell)$$

Геометрическую разность можно еще выразить как

$$A \dot{-} B = \bigcap_{\forall b \in B} (A - b)$$

Множество $C = \mathcal{X}_0 \dot{-} \mathcal{Q}(t_1, t_0)$, где $\mathcal{Q}(t_1, t_0) = [\tilde{q}_1, \tilde{q}_2]$, находится как $C = [a_1 - \tilde{q}_1, a_2 - \tilde{q}_2]$, при условии, что $a_2 - a_1 \geq \tilde{q}_2 - \tilde{q}_1$. Тогда

$$\mathcal{X}[t_1] = [a_1 - \tilde{q}_1 + \tilde{p}_1, a_2 - \tilde{q}_2 + \tilde{p}_2], \forall t_1 : a_2 - a_1 \geq \tilde{q}_2 - \tilde{q}_1$$

Множество достижимости на момент t_1 готово. Теперь нам нужно получить множество $(\tau, \mathcal{X}_H[\tau])$, где $\mathcal{X}_H[\tau] = \mathcal{X}[\tau] \cap H$. Это множество имеет сложную структуру, так как сам момент переключения зависит от управления и помехи. Поскольку помеха нам неизвестна заранее, то мы не можем явно использовать τ. Поэтому рассмотрим множество $\mathcal{X}_H^{\alpha}[\tau]$ при некоторой фиксированной помехе $v^{\alpha}(\cdot)$ Поскольку, ограничения на v нам даны, мы можем точно найти интервал принадлежности момента времени τ^{v^*}, начиная с которого мы имеем "управляемый" интервал пересечения, то есть $\tau^{v^*} + [\tau_1^{\mathcal{P}}, \tau_2^{\mathcal{P}}]$, который мы впоследствии употребляем как особое начальное множество (зависящее от v^*) для второй системы.

Идея решения задачи понимается мной так (Чтобы легче решать, полезно сначала все ясно выразить).

Для фиксированной помехи v^*(в первой системе) мы строим множество $(\tau, X^*[\tau] \cap H)$. Для всех помех соответственно:

$$(\tau, X_H[\tau]) = \left[\bigcap_{v^*} (\mathcal{X}_0 - v^*) + \mathcal{P}(t_0, t_1)\right] \bigcap H, \tau : \text{ пересечение не пусто}$$

но это общее по помехам нам сейчас не понадобиться, так мы будем искать для каждой помехи свое начальное множество (и конечное соответственно) уже для второй системы, и только после этого резльтаты можно объединять. Рассматривая множество $(\tau, X_H^*[\tau])$ мы нарезаем не по временным кусочкам τ_i а по множеству v_i. Теперь переходим ко второй подсистеме. Очевидно вложение $\mathcal{Q}_2(\tau,t) \subset \mathcal{Q}_2(\tau+h,t+h)-shift, h>0$, shift — некоторый вектор (число), так что для данной задачи он всегда существует, и выбирается из элементов $\mathcal{Q}_2$. Другими словами $\mathcal{Q}_2$ расширяется с течением времени, и дрейфует, если ноль ему не принадлежит. Здесь уместен следующий вопрос. В обычной постановке для начального множества $\mathcal{X}_0$ мы имеем полноразмерную область. В данном случае (мы можем так рассматривать) у нас имеется временная нарезка из вырожденных (размерность-1) подобластей. Поскольку этот пример $\mathbb{R}^1$, то целесообразно отойти от традиционного представления об $\mathcal{X}_0$: вместо отрезка в момент t_0 у нас точка x за отрезок времени $[\tau_1, \tau_2]$, и тем самым, если научимся вычислять такие начальные условия, то мы не усложним задачу численно(в курсовой работе, вырожденные срезы множеств мы утолщали, т.е. увеличивали размерность, плюс нарезки по времени), а значит есть надежда обсчитать за приемлемое время (но тут уже сложность с разбиением по v^*). Фактически, нам требуется вычислять именно такие начальные условия. Берем некое множество разрешимости на интервал моментов τ, о котором знаем, что оно к моменту t_1 приводит нас к искомому множеству. Рассматривая его свойства, выделяем необходимые условия: а) пересечение с гиперплоскостью, (иначе бы из нашей начальной точки $x[\tau_1, \tau_2$ нельзя было бы прийти в наше искомое множество; б) как следствие из (а), поскольку мы ищем гарантированную оценку, то интервал прихода и ухода второй помехи $[\tau_1^v, \tau_2^v]$ на гиперплоскость (в обратном времени) должнен вкладываться в начальный временной интервал $[\tau_1, \tau_2]$. Вкладываться он может разными способами, чем их больше, тем шире искомое множество(здесь как раз вопрос о связности этого множества). Множество вариаций моментов вложения $\{\tilde{\tau}\}$ и точка(множество) $\tilde{x} : v_2+\tilde{x} \subset X_H$, к которой можно уже прибавлять $(\tilde{\tau}, \mathcal{P}_2(\tilde{\tau}, t_1))$, что приводит к искомому множеству $(t_1, \mathcal{X}_1^\alpha)$. Вспоминая про начальное разбиение v_1^α, мы получили для каждого варианта помехи из первой системы конечный результат. Теперь, гарантированная оценка множества есть $\bigcap\limits_{v_1^\alpha} \mathcal{X}_1^\alpha$.

Надеюсь, что не пропустил ничего важного для понимания этого решения.