1. Постановка задачи

Даны системы дифференциальных уравнений, описывающих состояние некоторой модели до переключения и после:

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \dot{x}^{(1)} = A^{(1)}(t)x^{(1)} + B^{(1)}(t)u^{(1)}(t) + C^{(1)}(t)v(t); \\ x(t_0) \in \mathcal{E}(x_0, X_0) = \mathcal{X}^0; \\ u^{(1)}(t) \in \mathcal{E}(p^{(1)}(t), P^{(1)}(t)) \subset \mathcal{P}[t_0, t_1]; \\ v^{(1)}(t) \in \mathcal{E}(w^{(1)}(t), W^{(1)}(t)) \subset \mathcal{V}[t_0, t_1]; \end{cases} \\ \\ \begin{cases} \dot{x}^{(2)} = A^{(2)}(t)x^{(2)} + B^{(2)}(t)u^{(2)}(t) + C^{(2)}(t)f(t)^{(2)}; \\ x(\tau) \in \mathcal{X}^{(1)}(\tau, t_0); \\ u^{(2)}(t) \in \mathcal{E}(p^{(2)}(t), P^{(2)}(t)) \subset \mathcal{P}[t_0, t_1]; \\ v^{(2)}(t) \in \mathcal{E}(w^{(2)}(t), W^{(2)}(t)) \subset \mathcal{V}[t_0, t_1]; \end{cases} \end{array} \right. \\ H = \{x \in \mathbb{R}^n \colon \langle x, c\rangle = \gamma\} \text{— гиперплоскость переключения;} \\ A(t) \in \mathbb{R}^{n\times n},\ B(t) \in \mathbb{R}^{n\times m},\ C(t) \in \mathbb{R}^{n\times k};\ A(t), B(t), C(t) \in D[t_0, t_1]; \\ \tau :\ \left\langle x^{(1)}(\tau), c\right\rangle - \gamma = 0. \end{cases} \tag{1.1}$$

где $\mathcal{P}[t_0, t_1], \mathcal{V}[t_0, t_1]$ - класс допустимых управлений и помех. В момент времени τ, при пересечении наперед известной гиперплоскости $H = \{x \in \mathbb{R}^n \colon \langle x, c\rangle = \gamma\}$, происходит переключение систем. $v(t)$ - неизвестная функция, неопределенность, область значений которой ограничена k-мерной эллиптической областью, и принадлежащая классу интегрируемых функций $D[t_0, t_1]$. Управление $u(\cdot)$ выбирается из класса программных управлений $\mathcal{P}[t_0, t_1]$, то есть так, что оно определяется к начальному моменту t_0 заранее и уже не изменяется в зависимости от поведения системы в дальнейшем, не зависит оно и от времени переключения τ. Для решения задачи важно, чтобы система удовлетворяла свойству односторонней проницаемости, то есть чтобы при переходе через плоскость H в момент τ система

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} \langle \dot{x}, c\rangle \neq 0; \\ \langle x, c\rangle - \gamma \neq 0 \end{array} \right. \\ \operatorname{sign}(\left\langle \dot{x}^{(1)}(\tau), c\right\rangle) = \operatorname{sign}(\left\langle \dot{x}^{(2)}(\tau), c\right\rangle). \end{cases} \tag{1.2}$$

всегда имела непустое решение. Это означает, что, во-первых, момент переключения осуществляется скачком, а во-вторых, система может пересекать эту плоскость только один раз (для момента τ) и с переходом к другой системе. Необходимо построить множество достижимости $\mathcal{X}[t, t_0]$ в классе допустимых управлений $\mathcal{P}$ для момента времени $t > t_0$ и начального множества $\mathcal{X}^0$. Таким образом, необходимо найти множество точек $\mathcal{X}[t, t_0, \mathcal{X}^0] = \{x(t)\}$, в которые система может прийти из начального множества $\mathcal{X}^0$. Мы хотим получить множество точек $\{x(t_1)\}$, о которых известно, что при любой помехе для каждой из них существует управление, такое, что множество начальных состояний $x(t_0) \mid_{x(t_1)=x}$ для каждой точки будет лежать внутри исходного начального множества $\mathcal{X}^0$

Определение 1. *Множеством достижимости* $\mathcal{X}[t, t_0]$ *задачи* (1.1) *называется пучок траекторий* $\mathcal{X}[t, t_0] = \{x(t, t_0) \mid \exists u(\cdot) :\ \forall v(\cdot), x(t_0, t_0) \in \mathcal{X}_0\}$

2. Пример

Заданы системы дифференциальных уравнений, описывающих состояние некоторой модели до переключения и после:

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \dot{x}_1^{(1)} = x_2^{(1)} + v^{(1)}(t); \\ \dot{x}_2^{(1)} = u^{(1)}(t); \\ x(t_0) \in \mathcal{X}_0 = \{x \in \mathbb{R}^2 : (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 1)^2 \leqslant 1\}; \end{cases} \\ \\ \begin{cases} \dot{x}_1^{(2)} = x_2^{(2)} + v^{(2)}(t); \\ \dot{x}_2^{(2)} = -\gamma x_1 - \mu x_2 + u^{(2)}(t); \\ x(\tau) \in \mathcal{X}^{(1)}[\tau, t_0] \cap \mathcal{H}, \tau \leqslant t \leqslant t_1; \end{cases} \end{array} \right. \\ \\ \mathcal{H} = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1 = 0\} \text{— гиперплоскость;} \\ u^{(1)} = u^{(2)} = u(\cdot) \in [-\alpha_1, \alpha_2] = \mathcal{P}[t_0, t_1]; \\ v^{(1)} = v^{(2)} = v(\cdot) \in [-\beta_1, \beta_2] \in \mathcal{W}[t_0, t_1]; \\ \gamma, \mu, \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 > 0 \text{— некоторые константы;} \\ \tau \text{ — момент переключения, при пересечении гиперплоскости.} \end{cases} \tag{2.1}$$

Для поиска множества $\mathcal{X}[t, t_0]$ будем использовать функцию цены

$$V(t, x) = \min_{u(\cdot)} \max_{v(\cdot)} d^2(x_0, \mathcal{X}_0) \mid_{x(t)=x}$$

где $d(x_0, \mathcal{X}_0)$ - расстояние между точкой x_0 и множеством $\mathcal{X}_0$, определяемое метрикой $d(x, \mathcal{X}) = \min_{y \in \mathcal{X}} \|x - y\|$.

Пусть $\phi(x) = d^2(x_0, \mathcal{X}_0)$, сопряженная к ней:

$$\phi^*(\ell) = \sup_x (\langle x, \ell \rangle - d^2(x, \mathcal{X}_0)) = \rho(\ell \mid \mathcal{X}_0) + \frac{\|\ell\|^2}{4},$$

тогда

$$V(t, x) = \min_{u(\cdot)} \max_{v(\cdot)} \sup_{\ell} \left(\langle \ell, x_0 \rangle - \rho(\ell \mid \mathcal{X}_0) - \frac{\|\ell\|^2}{4} \right). \tag{2.2}$$

Найдем выражения для поиска $x_0 \mid_{x(t_1)=x}$. Пусть траектория точки в момент t_1 известна $x(t_1) = x$. Идя в обратном времени, найдем её значение в момент $t \leqslant t_1$ при известных $B(s), C(s), u(s), v(s)$ до переключения:

$$x^{(2)}(t, x, u, v) = G_2(t, t_1)x + \int_{t_1}^{t} G_2(t, s) \left[B_2(s)u_2(s) + C_2(s)v_2(s)\right] ds, \text{при } \tau \leqslant t \leqslant t_1,$$

и после для $t \leqslant \tau$:

$$\begin{aligned} x^{(2,1)}(t, \tau, x, u, v) = & G_1(t, \tau)G_2(\tau, t_1)x + G_1(t, \tau) \int_{t_1}^{\tau} G_2(t, s) \left[B_2(s)u_2(s) + C_2(s)v_2(s)\right] ds + \\ & + \int_{\tau}^{t_0} G_1(t, s) \left[B_1(s)u_1(s) + C_1(s)v_1(s)\right] ds\,, \text{ при } t_0 \leqslant t \leqslant \tau. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Нам необходимо, чтобы момент τ в этих выражениях удовлетворял условию пересечения, так чтобы $\langle x(\tau), c\rangle = \gamma$. Поскольку $\mathcal{X}[t, t_0] = \{x \mid V(t,x) \leqslant 0\}, \forall t \in [t_0, t_1]$, то достаточно ввести штрафующий член $(\langle x(\tau), c\rangle - \gamma)^2$ в выражение для $V(t,x)$, тем самым обеспечивая для $\mathcal{X}[t, t_0]$ включение только тех траекторий, которые удовлетворяют нашим двум системам и условию на момент переключения.

Поскольку мы рассматриваем задачу в классе программных управлений, мы не можем строить управление в зависимости от текущего состояния системы, а только заранее его определять. Поэтому, в формуле для $V(t,x)$ нельзя проводить оптимизацию отдельно для "до" и "после", так как момент переключения τ не известен заранее.

$$V(t,x) = \min_{u_1,u_2\in\mathcal{P}} \max_{v_1,v_2\in\mathcal{W}} \max_{\tau} \left\{ d^2(x_0|_{x(t)=x}, \mathcal{X}_0) + (\langle x(\tau), c\rangle - \gamma)^2 \right\}.$$

Пока примем $\gamma = 0$. Для линеаризации условия на переключение сделаем подстановку

$$\langle x, c\rangle^2 \equiv \max_{\mu} \left\{ \mu \langle x, c\rangle - \frac{\mu^2}{4} \right\},$$

и, используя (2.2), имеем

$$V(t,x) = \min_{u_1,u_2\in\mathcal{P}} \max_{v_1,v_2\in\mathcal{W}} \max_{\tau} \left\{ \max_{\ell} \max_{\mu} \left\{ \left\langle \ell, x_0 \mid_{x(t)=x} \right\rangle + \mu \langle x(\tau), c\rangle - \frac{\mu^2}{4} - \rho(\ell \mid \mathcal{X}_0) - \frac{\|\ell\|^2}{4} \right\} \right\}.$$

Раскрывая (2.3), получим

$$\begin{gathered} V(t,x) = \min_{u_1,u_2} \max_{v_1,v_2} \min_{\tau\in[t_0,t]} \max_{\ell} \max_{\mu} \{ \\ \langle \ell, G_1(t_0,\tau) G_2(\tau,t) x\rangle + \int_t^{\tau} \langle \ell, G_1(t_0,\tau) G_2(\tau,s) \left[B_2(s)u_2(s) + C_2(s)v_2(s)\right]\rangle \, ds + \\ + \int_{\tau}^{t_0} \langle \ell, G_1(t_0,s) \left[B_1(s)u_1(s) + C_1(s)v_1(s)\right]\rangle \, ds + \mu \langle c, G_2(\tau,t)x\rangle + \\ + \mu \int_t^{\tau} \langle c, G_2(\tau,s) \left[B_2(s)u_2(s) + C_2(s)v_2(s)\right]\rangle \, ds - \\ - \frac{\mu^2}{4} - \rho(\ell \mid \mathcal{X}_0) - \frac{\|\ell\|^2}{4} \} \end{gathered}$$

Сгруппируем слагаемые

$$\begin{aligned} \tilde{S}(\tau,t) &= G_2^T(\tau,t) G_1^T(t_0,\tau)\ell + \mu G_2^T(\tau,t) c, \\ \tilde{S}_1(t_0,\tau) &= G_1^T(t_0,\tau)\ell, \end{aligned}$$

имеем

$$\begin{gathered} V(t,x) = \min_{u_1,u_2} \max_{v_1,v_2} \min_{\tau\in[t_0,t]} \max_{\ell} \max_{\mu} \{ \\ \tilde{S}^T(\tau,t)x + \int_t^{\tau} \tilde{S}^T(\tau,s) \left[B_2(s)u_2(s) + C_2(s)v_2(s)\right] ds + \\ + \int_{\tau}^{t_0} \tilde{S}_1^T(t_0,s) \left[B_1(s)u_1(s) + C_1(s)v_1(s)\right] ds - \\ - \frac{\mu^2}{4} - \rho(\ell \mid \mathcal{X}_0) - \frac{\|\ell\|^2}{4} \} \end{gathered} \tag{2.4}$$

Чтобы эффективно вычислять множества достижимости используется прием, который позволяет заменить поиск множества допустимых траекторий вычислением опорной функции к этому множетсву. Для перехода к опорным функциям требуется менять местами порядок минимумов и максимумов в (2.4), а для этого необходимо выполнение условий теоремы минимакса. Поэтому дальнейшие преобразования выполняются с целью обеспечения этих условий. Одним из достаточных условий перестановки является линейность по минимизирующему или максимизирующему параметру. Наша цель состоим в том, чтобы перенести операции минимума по u_1, u_2 и максимума по v_1, v_2 внутрь выражения функции цены, тем самым сводя минимизацию/максимизацию на функциональном пространстве $\mathcal{P}, \mathcal{W}$ к поиску экстремумов для выпуклых(вогнутых) функций. Первыми меняются местами $\max_{v_1,v_2} \min_\tau(\cdot) = \min_\tau \max_{v_1,v_2}(\cdot)$. Для примера, сначала рассмотрим функционал

$$T(\tau, v(s)) = \int\limits_t^\tau v(s)ds$$

Легко видеть, что $T(\tau, v(s))$, являясь линейным по v, не является таковым по τ. Тогда вместо τ возьмем функцию $\tau(w) = \phi(w)$ и преобразуем

$$T(\phi(w), v(s)) = \int\limits_{t_0}^t \phi(w)dw \int\limits_t^w v(s)ds.$$

Мы подразумеваем здесь, что $\phi(w) = \delta(w)$. Теперь функционал $T(\phi, v)$ является линейным по всем аргументам.

Аналогично поступим с $V(t, x)$:

$$V(t,x) = \min_{u_1,u_2} \max_{v_1,v_2} \min_{\phi(w)} \max_{\ell(w)} \max_{\mu(w)} \int\limits_{t_0}^t \phi(w) \Bigg\{$$

$$\tilde{S}^T(w,t)x + \int\limits_t^w \tilde{S}^T(w,s)\left[B_2(s)u_2(s) + C_2(s)v_2(s)\right] ds +$$

$$+ \int\limits_w^{t_0} \tilde{S}_1^T(t_0,s)\left[B_1(s)u_1(s) + C_1(s)v_1(s)\right] ds -$$

$$-\frac{\mu^2}{4} - \rho(\ell \mid \mathcal{X}_0) - \frac{\|\ell\|^2}{4} \Bigg\} dw,$$

Поскольку мы здесь воспользовались перестановкой

$$\int \max_{\ell,\mu} f(w,\ell,\mu)dw = \max_{\ell(w),\mu(w)} \int f(w,\ell(w),\mu(w))dw,$$

ℓ, μ теперь функции от w, $\ell = \ell(w)$ и $\mu = \mu(w)$. Можно заметить, что от w зависят только переменные $\tilde{S}, \tilde{S}_1$ и пределы интегрирования. Поменяем порядок интегрирования, чтобы собрать вместе члены, зависящие от w. Применяя правила замены

$$\int\limits_{t_0}^t dw \int\limits_t^w ds(\cdot) = \int\limits_t^{t_0} ds \int\limits_{t_0}^s dw(\cdot),$$

$$\int_{t_0}^{t} dw \int_{w}^{t_0} ds(\cdot) = \int_{t}^{t_0} ds \int_{s}^{t} dw(\cdot),$$

и делая замену переменных

$$S(t_0,t_1) = \int_{t_0}^{t_1} \phi(w)\tilde{S}(w,t_1)\,dw = \int_{t_1}^{t_0} \phi(w)\left\{G_2^T(w,t)G_1^T(t_0,w)\ell(w) + \mu(w)G_2^T(w,t)c\right\}\,dw,$$

$$S_1(t_0,t_1) = \int_{t_0}^{t_1} \phi(w)\tilde{S}_1(t_0,w)\,dw, = \int_{t_0}^{t_1} \phi(w)\left\{G_1^T(t_0,w)\ell(w)\right\}\,dw,$$

$$K(\ell,\mu,\mathcal{X}_0) = \int_{t_0}^{t} \phi(w)\left[\frac{\mu(w)^2}{4} + \rho(\ell(w)\mid\mathcal{X}_0) + \frac{\|\ell(w)\|^2}{4}\right]\,dw$$

придем к

$$\begin{gathered} V(t,x) = \min_{u_1,u_2}\max_{v_1,v_2}\min_{\phi(w)}\max_{\ell(w)}\max_{\mu(w)}\Bigg\{ \\ S^T(t_0,t)x + \int_{t}^{t_0} S^T(t_0,s)\left[B_2(s)u_2(s) + C_2(s)v_2(s)\right]\,ds + \\ + \int_{t}^{t_0} S_1^T(s,t)\left[B_1(s)u_1(s) + C_1(s)v_1(s)\right]\,ds - \\ -K(\ell,\mu,\mathcal{X}_0)\Bigg\}, \end{gathered} \tag{2.5}$$

где $K(\ell,\mu,\mathcal{X}_0)$ – выпуклая функция.

Будем искать опорную функцию к множеству достижимости $\mathcal{X}[t,\mathcal{X}_0]$, определяемому по найденному выше выражению (2.5) для $V(t,x)$. Пользуясь линейностью по ϕ, теперь можно переставить

$$\max_{v_1,v_2}\min_{\phi}\max_{\ell}\max_{\mu}(\cdot) = \min_{\phi}\max_{\ell}\max_{\mu}\max_{v_1,v_2}(\cdot),$$

и

$$\max_{v(\cdot)}\int_{t}^{t_0} f(v(s))ds = \max_{v(\cdot)}\int_{t_0}^{t} -f(v(s))ds = \int_{t_0}^{t}\max_{v(s)}[-f(v(s))]ds$$

тогда

$$\begin{gathered} V(t,x) = \min_{u_1,u_2}\min_{\phi}\max_{\ell}\max_{\mu}\Bigg\{ \\ S^T(t_0,t)x + \int_{t}^{t_0} S^T(t_0,s)B_2(s)u_2(s)\,ds + \int_{t_0}^{t} \rho(-S^T(t_0,s)\mid C_2(s)\mathcal{W}_2(s))\,ds \\ + \int_{t}^{t_0} S_1^T(s,t)B_1(s)u_1(s) + \int_{t_0}^{t} \rho(-S_1^T(s,t)\mid C_1(s)\mathcal{W}_1)\,ds - \\ -K(\ell,\mu,\mathcal{X}_0)\Bigg\}. \end{gathered}$$

Далее, мы хотим поменять $\min_{u_1,u_2}(\cdot)$ на опорную функцию, но полученное выше выражение уже не является вогнутым по ℓ, μ. Поэтому, мы прибегаем к овыпуклению нужных членов и приходим к

$$V(t,x) = \min_{\phi} \max_{\ell} \max_{\mu} \Bigg\{$$

$$S^T(t_0,t)x - \int_{t_0}^{t} \rho(S_1(s,t) \mid B_1(s)\mathcal{P}_1(s))\, ds - \int_{t_0}^{t} \rho(S(t_0,s) \mid B_2(s)\mathcal{P}_2(s))\, ds -$$

$$-\mathrm{conv}\left\{ -\int_{-t_0}^{t} \rho(-S_1(s,t) \mid C_1(s)\mathcal{W}_1(s))\, ds - \int_{t_0}^{t} \rho(-S(t_0,s) \mid C_2(s)\mathcal{W}_2(s))\, ds + K(\ell,\mu,\mathcal{X}_0) \right\} \Bigg\}.$$

$$V(t,x) = \min_{\phi} \max_{\ell} \max_{\mu} \Bigg\{$$

$$S^T(t_0,t)x - \int_{t_0}^{t} \rho(S_1(s,t) \mid B_1(s)\mathcal{P}_1(s))\, ds - \int_{t_0}^{t} \rho(S(t_0,s) \mid B_2(s)\mathcal{P}_2(s))\, ds -$$

$$-\mathrm{conv}\left\{ -\int_{t_0}^{t} \rho(-S_1(s,t) \mid C_1(s)\mathcal{W}_1(s))\, ds - \int_{t_0}^{t} \rho(-S(t_0,s) \mid C_2(s)\mathcal{W}_2(s))\, ds + K(\ell,\mu,\mathcal{X}_0) \right\} \Bigg\}.$$

Утверждение 1.

$$conv \int_{t_0}^{t} f(x(t))dt = \int_{t_0}^{t} conv f(x(t))dt$$

Примем

$$conv(f) = f^{**}$$

Тогда

$$\left(\int_{t_0}^{t} f(x(s))ds \right)^{*} (\ell(t)) = \max_{x(\cdot)} \left(\langle \ell, x \rangle_{L_2} - \int_{t_0}^{t} f(x(s))ds \right)$$

$$\left(\int_{t_0}^{t} f(x(t))dt \right)^{**} (y(t)) = \max_{\ell(\cdot)} \left(\langle y, \ell \rangle_{L_2} - \max_{x(\cdot)} \left(\langle \ell, x \rangle_{L_2} - \int_{t_0}^{t} f(x(s))ds \right) \right) =$$

$$= \max_{\ell(\cdot)} \min_{x(\cdot)} \left(\langle y, \ell \rangle_{L_2} - \langle \ell, x \rangle_{L_2} + \int_{t_0}^{t} f(x(s))ds \right) =$$

$$= \max_{\ell(\cdot)} \min_{x(\cdot)} \int_{t_0}^{t} \left[\langle y(s), \ell(s) \rangle - \langle \ell(s), x(s) \rangle + f(x(s)) \right] ds =$$

$$= \int_{t_0}^{t} \max_{\ell(s)} \min_{x(s)} \left[\langle y(s), \ell(s) \rangle - \langle \ell(s), x(s) \rangle + f(x(s)) \right] ds =$$

$$= \int\limits_{t_0}^{t} \max_{\ell(s)} \left[\langle y(s), \ell(s) \rangle - \max_{x(s)} \{ \langle \ell(s), x(s) \rangle - f(x(s)) \} \right] ds =$$

$$= \int\limits_{t_0}^{t} f^{**}(s) ds$$

■

Утверждение 2.

$$\max_{x(\cdot)} \int\limits_{t_0}^{t} f(x(s)) ds = \int\limits_{t_0}^{t} \max_{x(s)} f(x(s)) ds$$

Пусть

$$x^*(\cdot) = \arg\max_{x(\cdot)} \int\limits_{t_0}^{t} f(x(s)) ds$$

$$x^\circ(\cdot) : \int\limits_{t_0}^{t} f(x^\circ(s)) = \int\limits_{t_0}^{t} \max_{x(s)} f(x(s)) ds.$$

Предположим, что $x^*(\cdot) \neq x^\circ(\cdot)$ и $\int\limits_{t_0}^{t} f(x^*(s)) ds \neq \int\limits_{t_0}^{t} f(x^\circ(s)) ds$.
Тогда для выражения $m(s) = f(x^*(s)) - f(x^\circ(s))$ можно указать непересекающиеся отрезки $T_<, T_>, T_=$, на которых выполняются неравенства

$$\forall s \in T_< : \, m(s) < 0, \; \forall s \in T_> : \, m(s) > 0, \; \forall s \in T_= : \, m(s) = 0.$$

Для $T_>$ получаем, что

$$\forall s \in T_> : f(x^*(s)) > f(x^\circ(s)) = max_{x(s)} f(x(s)$$

– противоречие,
Для $T_<$ получаем, что

$$max_{x(\cdot)} \int\limits_{T_<} f(x(s)) ds = \int\limits_{T_<} f(x^*(s)) ds < \int\limits_{T_<} f(x^\circ(s)) ds$$

– противоречие,
Остается единственный вариант, который и доказывает утверждение. ■

Рассмотрим примеры в $\mathbb{R}^1$

Пример 1.

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} \dot{x} = 2u + v; \\ \dot{x} = u; \end{array} \right. \\ u \in [0, 1]; \\ v \in [0, 1]; \\ \mathcal{X}_0 = \{x \in [-2, -1]\}; \\ t \in [0, 4]; \\ H = \{x = 0\}. \end{cases} \tag{2.6}$$

Пример 2.

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} \dot{x} = u; \\ \dot{x} = 2u + v; \end{array}\right. \\ u \in [0,1]; \\ v \in [0,1]; \\ \mathcal{X}_0 = \{x \in [-2,-1]\}; \\ t \in [0,4]; \\ H = \{x = 0\}. \end{cases} \tag{2.7}$$

Начальные условия для (2.6) и (2.7) одинаковы. Функция цены для задач (2.6) и (2.7).

$$V(t,x) = \min_u \max_v \max_\tau \max_\ell \max_\mu \left\{ \left\langle \ell, x_0 \mid_{x(t)=x} \right\rangle - \rho(\ell \mid \mathcal{X}_0) - \frac{\|\ell\|^2}{4} + \mu \left\langle x(\tau), c \right\rangle - \frac{\mu^2}{4} \right\}.$$

В одномерном случае, если рассматривать отрезок $[\alpha,\beta]$ как эллипсоид $\mathcal{E}(q,Q)$, то $q = \frac{\beta+\alpha}{2}$, $Q = \left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right)^2$. Тогда

$$\rho\left(\ell \mid \mathcal{E}(()q,Q)\right) = \langle \ell, q\rangle + \langle \ell, Q\ell\rangle^{\frac{1}{2}} = \ell \cdot q + \mid \ell \mid \sqrt{Q}.$$

Поскольку в уравнениях примеров (2.6) и (2.7) фундаментальные матрицы $G(t,t_0) \equiv I$, то можно написать

$$V(t,x) = \min_u \max_v \max_\tau \max_\ell \max_\mu \big\{ \ell \cdot x + \int_t^\tau \ell \cdot [B_2 u_2 + v_2] ds + \int_\tau^{t_0} \ell \cdot [B_1 u_1 + v_1] ds -$$

$$-(\ell \cdot x_0 + \mid \ell \mid \sqrt{X_0}) - \frac{\ell^2}{4} + \mu\big[x + \int_t^\tau [B_2 u_2 + v_2] ds\big] - \frac{\mu^2}{4} \big\}.$$

Здесь $\mathcal{X}_0 = \mathcal{E}(x_0, X_0)$, для (2.6) $v_2 \equiv 0$, для (2.7) $v_1 \equiv 0$. Если сократить, то получим: для (2.6)

$$V(t,x) = \min_u \max_v \max_\tau \max_\ell \max_\mu \big\{ \ell \cdot x + \int_t^\tau \ell B_2 u_2 ds + \int_\tau^{t_0} \ell [B_1 u_1 + v_1] ds -$$

$$-(\ell \cdot x_0 + \mid \ell \mid \sqrt{X_0}) - \frac{\ell^2}{4} + \mu x + \int_t^\tau \mu B_2 u_2 ds - \frac{\mu^2}{4} \big\}.$$

Множества $C_1\mathcal{W}_1$ и $C_2\mathcal{W}_2$ принимают вид $\begin{pmatrix} v \\ 0 \end{pmatrix}$, $v \in [\tilde{\beta}_1, \tilde{\beta}_2] = \mathrm{Comp}(\mathbb{R}^1)$, тогда для некоторого $\tilde{\ell} \in \mathbb{R}^2$

$$\rho(\tilde{\ell}, \begin{pmatrix} v \\ 0 \end{pmatrix}) = \sup_{v \in C_1 \mathcal{W}_1(s)} (\tilde{\ell}_1 v) = \tilde{\ell}_1 \cdot \begin{cases} \tilde{\beta}_1, \ \tilde{\ell}_1 < 0 \\ \tilde{\beta}_2, \ \tilde{\ell}_1 > 0 \end{cases}$$

И тогда интегралы от опорных функций вычисляются как

$$\int_{t_0}^{t} \rho(-S_1(s,t) \mid C_1 \mathcal{W}_1(s))\, ds = -\tilde{\beta}_1^{(1)} \int_{T_>^{(1)}} S_1(t_0,s)_1\, ds - \tilde{\beta}_2^{(1)} \int_{T_<^{(1)}} S_1(t_0,s)_1\, ds,$$

$$\int_{t_0}^{t} \rho(-S(t_0,s) \mid C_2\mathcal{W}_2(s))\,ds = -\tilde{\beta}_1^{(2)} \int_{T_>^{(2)}} S(t_0,s)_1\,ds - \tilde{\beta}_2^{(2)} \int_{T_<^{(2)}} S(t_0,s)_1\,ds,$$

где $T_<^{(1)}, T_<^{(2)}$ – промежутки времени, на которых $S_1(s,t)_1 < 0$, $S(t_0,s)_1 < 0$ соответственно; $T_>^{(1)}, T_>^{(2)}$ – промежутки, где $S_1(s,t)_1 > 0$, $S(t_0,s)_1 > 0$ соответственно. Концы этих отрезков находятся из уравнений

$$S_1(s,t)_1 = \int_{s}^{t} \phi(w) \left\{ G_1^T(t_0,w)\ell(w) \right\}_1 \,dw = 0;$$

$$S(t_0,s)_1 = \int_{t_0}^{s} \phi(w) \left\{ G_1^T(t_0,w)G_2^T(w,t)\ell(w) + \mu(w)G_2^T(w,t)c \right\}_1 \,dw = 0,$$

где $t_0 < s < t$. Также из условий задачи $\tilde{\beta}_1^{(2)} = \tilde{\beta}_1^{(1)} = \beta_1$ и $\tilde{\beta}_2^{(1)} = \tilde{\beta}_2^{(2)} = \beta_2$.

Для $s \in [t_0,t]$ множества $B_1\mathcal{P}_1$ и $B_2\mathcal{P}_2$ имеют вид $\begin{pmatrix} 0 \\ u \end{pmatrix}$, где $u(s) \in \mathcal{R}^1$ принадлежит первому либо второму семейству управлений. Тогда аналогично

$$\int_{t_0}^{t} \rho\left(S_1(s,t) \mid B_1\mathcal{P}_1\right) ds = \int_{t_0}^{t} S_1(s,t)_2 \cdot \begin{cases} \alpha_1, \ S_1(s,t)_2 < 0, \\ \alpha_2, \ S_1(s,t)_2 > 0 \end{cases} ds =$$

$$= \alpha_1 \int_{T_<^{(1)}} S_1(s,t)_2\,ds + \alpha_2 \int_{T_>^{(1)}} S_1(s,t)_2\,ds$$

$$\int_{t_0}^{t} \rho\left(S(t_0,s) \mid B_2\mathcal{P}_2\right) ds = \int_{t_0}^{t} S(t_0,s)_2 \cdot \begin{cases} \alpha_1, \ S(t_0,s)_2 < 0, \\ \alpha_2, \ S(t_0,s)_2 > 0 \end{cases} ds =$$

$$= \alpha_1 \int_{T_<^{(2)}} S(t_0,s)_2\,ds + \alpha_2 \int_{T_>^{(2)}} S(t_0,s)_2\,ds,$$

где α_1, α_2 – ограничения на управление, $\alpha_1 \leqslant u(s) \leqslant \alpha_2$, $T_<^{(1)}, T_<^{(2)}$ – множества отрезков времени, где $S_1(s,t)_2 < 0, S(t_0,s)_2 < 0$; $T_>^{(1)}, T_>^{(2)}$ – множество отрезков времени, где $S_1(s,t)_2 > 0, S(t_0,s)_2 > 0$.