postanovka

1. Постановка задачи

Даны системы дифференциальных уравнений, описывающих состояние некоторой модели до переключения и после:

$$
\begin{cases}
\left[\begin{array}{l}
\begin{cases}
\dot{x}^{(1)} = A^{(1)}(t)x^{(1)} + B^{(1)}(t)u^{(1)}(t) + C^{(1)}(t)v(t);\\
x(t_0) \in \mathcal{E}(x_0, X_0) = \mathcal{X}^0;\\
u^{(1)}(t) \in \mathcal{E}(p^{(1)}(t), P^{(1)}(t)) \subset \mathcal{P}[t_0, t_1];\\
v^{(1)}(t) \in \mathcal{E}(w^{(1)}(t), W^{(1)}(t)) \subset \mathcal{V}[t_0, t_1];
\end{cases}\\
\\
\begin{cases}
\dot{x}^{(2)} = A^{(2)}(t)x^{(2)} + B^{(2)}(t)u^{(2)}(t) + C^{(2)}(t)v(t)^{(2)};\\
x(\tau) \in \mathcal{X}^{(1)}(\tau, t_0) \cap H;\\
u^{(2)}(t) \in \mathcal{E}(p^{(2)}(t), P^{(2)}(t)) \subset \mathcal{P}[t_0, t_1];\\
v^{(2)}(t) \in \mathcal{E}(w^{(2)}(t), W^{(2)}(t)) \subset \mathcal{V}[t_0, t_1];
\end{cases}
\end{array}\right.\\
H = \{x \in \mathbb{R}^n \colon \langle x, c\rangle = \gamma\} \text{— гиперплоскость переключения;}\\
\tau \colon \left\langle x^{(1)}(\tau), c\right\rangle - \gamma = 0,\ \tau \in [t_0, t_1]
\end{cases}
\tag{1.1}
$$

где $\mathcal{P}[t_0, t_1], \mathcal{V}[t_0, t_1]$ - классы допустимых управлений и помех. В неизвестный заранее момент времени τ, при пересечении наперед известной гиперплоскости $H = \{x \in \mathbb{R}^n \colon \langle x, c\rangle = \gamma\}$, происходит переключение с первой системы на другую. $v(t)$ - неизвестная функция, неопределенность, область значений которой ограничена k-мерной эллиптической областью, и принадлежащая классу интегрируемых функций $L_1[t_0, t_1]$. Управление $u^{(1,2)} = (u^{(1)}(\cdot), u^{(2)}(\cdot))$ выбирается из класса программных управлений $u^{(1)}\mathcal{P}^{(1)}[t_0, t_1], u^{(2)}\mathcal{P}^{(2)}[t_0, t_1]$, то есть так, что оно определяется к начальному моменту t_0 заранее и уже не изменяется в зависимости от поведения системы в дальнейшем, не зависит оно и от времени переключения τ. Для решения задачи важно, чтобы система удовлетворяла условию односторонней проницаемости, то есть чтобы при переходе через плоскость H в момент τ система

$$
\begin{cases}
\left[\begin{array}{l}
\langle \dot{x}, c\rangle \neq 0;\\
\langle x, c\rangle - \gamma \neq 0
\end{array}\right.\\
\operatorname{sign}(\left\langle \dot{x}^{(1)}(\tau), c\right\rangle) = \operatorname{sign}(\left\langle \dot{x}^{(2)}(\tau), c\right\rangle).
\end{cases}
\tag{1.2}
$$

всегда имела непустое решение. Это означает, что, во-первых, момент переключения осуществляется скачком, а во-вторых, система может пересекать эту плоскость только один раз (для момента τ) и с переходом к другой системе. Необходимо построить множество достижимости $\mathcal{X}[t, t_0]$ в классе допустимых управлений $\mathcal{P}$ для момента времени $t > t_0$ и начального множества $\mathcal{X}^0$. Таким образом, необходимо найти множество точек $\mathcal{X}[t, t_0, \mathcal{X}^0] = \{x(t)\}$, в которые система может прийти из начального множества $\mathcal{X}^0$. Мы хотим получить множество точек $\{x(t_1)\}$, о которых известно, что при любой помехе для каждой из них существует управление, такое, что множество начальных состояний $x(t_0)\mid_{x(t_1)=x}$ для каждой точки будет лежать внутри исходного начального множества $\mathcal{X}^0$

Определение 1. *Множеством достижимости $\mathcal{X}[t, t_0]$ задачи для негибридной системы называется пучок траекторий $\mathcal{X}[t, t_0] = \{x(t, t_0) \mid \exists u(\cdot) \colon\ \forall v(\cdot), x(t_0, t_0) \in \mathcal{X}_0\}$*

Определение 2. *Множество достижимости* $\mathcal{X}[t,t_0]$ *для задачи* (??) *называется*
$\mathcal{X}[t,t_0] = \{x(t,t_0) \mid \exists u^{(1)}(\cdot), u^{(2)}(\cdot) : \ \forall v^{(1)}(\cdot), v^{(2)}(\cdot), x(t_0,t_0) \in \mathcal{X}_0\}$

teoriya

2. Общая теоретическая часть

Для поиска множества $\mathcal{X}[t,t_0]$ будем использовать функцию цены

$$V(t,x) = \min_{u(\cdot)} \max_{v(\cdot)} d^2(x_0, \mathcal{X}_0) \mid_{x(t)=x}$$

где $d(x_0,\mathcal{X}_0)$ - расстояние между точкой x_0 и множеством $\mathcal{X}_0$, определяемое метрикой $d(x,\mathcal{X}) = \min_{y\in\mathcal{X}} \|x-y\|$. Такой выбор вызван следующими причинами. Мы ищем множество $\mathcal{X}[t,\mathcal{X}_0]$ всех таких точек, что для $\forall x^*(t) \in \mathcal{X}[t,\mathcal{X}_0]$ можно заранее подобрать некоторое управление $u^*(\cdot)$ и некоторое подмножество $\{x^*(t_0)\} \in \mathcal{X}_0$ так, чтобы при любой помехе $v(\cdot)$ гарантировать вхождение $x^*(t) \in \{x(t,u^*(\cdot),\{x^*(t_0)\})\}_{\forall v(\cdot)}$. В рассматриваемой здесь задаче кроме помехи $v(\cdot)$ появляется другой неизвестный параметр $\tau(u,v)$ – момент переключения, в который меняется динамика системы, что приводит к существенному усложениню задачи.

Пусть $\phi(x) = d^2(x_0,\mathcal{X}_0)$. Так как $\mathcal{X}_0$ – по условию задачи выпуклое множество, то операция двойного сопряжения приводит к тождественному результату. Поэтому удобно выразить $V(x,t)$ через двойное сопряжение функции расстояния $d^2(x,\mathcal{X}_0)$.

$$\phi^*(\ell) = \sup_x(\langle x,\ell\rangle - d^2(x,\mathcal{X}_0)) = \rho(\ell \mid \mathcal{X}_0) + \frac{\|\ell\|^2}{4},$$

тогда

$$V(t,x) = \min_{u(\cdot)} \max_{v(\cdot)} \sup_{\ell} \left(\langle \ell, x_0\rangle - \rho(\ell \mid \mathcal{X}_0) - \frac{\|\ell\|^2}{4} \right). \tag{2.1}$$

Найдем выражения для поиска $x_0 \mid_{x(t_1)=x}$. Пусть траектория точки в момент t_1 известна $x(t_1) = x$. Идя в обратном времени, найдем её значение в момент $\tau \leqslant t \leqslant t_1$ при известных $B(s), C(s), u(s), v(s)$ до переключения:

$$x^{(2)}(t,x,u,v) = G_2(t,t_1)x + \int\limits_{t_1}^{t} G_2(t,s)\left[B_2(s)u_2(s) + C_2(s)v_2(s)\right]ds, \text{при}\, \tau \leqslant t \leqslant t_1,$$

и после для $t_0 \leqslant t \leqslant \tau$:

$$\begin{aligned} x^{(2,1)}(t,\tau,x,u,v) =& G_1(t,\tau)G_2(\tau,t_1)x + G_1(t,\tau)\int\limits_{t_1}^{\tau} G_2(t,s)\left[B_2(s)u_2(s) + C_2(s)v_2(s)\right]ds + \\ &+ \int\limits_{\tau}^{t_0} G_1(t,s)\left[B_1(s)u_1(s) + C_1(s)v_1(s)\right]ds\,,\ \text{при}\, t_0 \leqslant t \leqslant \tau. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Нам необходимо, чтобы момент τ в этих выражениях удовлетворял условию на переключение, так чтобы $\langle x(\tau), c\rangle = \gamma$. Поскольку $d^2(x,\mathcal{X}) \geqslant 0$, то $V(x,t) \geqslant 0$. Тогда если $\mathcal{X}[t,t_0] = \{x \mid V(t,x) \leqslant 0\}, \forall t \in [t_0,t_1]$, то достаточно ввести штрафующий член $(\langle x(\tau), c\rangle - \gamma)^2$ в выражение для $V(t,x)$, тем самым обеспечивая для $\mathcal{X}[t,t_0]$ включение только тех траекторий, которые удовлетворяют нашим двум системам и условию на момент переключения.

Так как мы рассматриваем задачу в классе программных управлений, мы не можем строить управление в зависимости от текущего состояния системы, а должны определять его заранее. Поэтому, в формуле для $V(t,x)$ нельзя искать отдельно $\min_{u^{(i)}}\max_{v^{(i)}}$ для каждой из подсистем "до" и "после", так как момент переключения τ не известен заранее. Это означает, что выбираемое управление не может меняться в зависимости от τ. Поскольку в общем случае ограничения на управления для разных подсистем различны, то выбираемое заранее управление должно удовлетворять обоим ограничениям $[u^*(\cdot)\in\mathcal{P}^{(1)}]\wedge[u^*(\cdot)\in\mathcal{P}^{(2)}]$. Поэтому справедливо положить $u(t)\in\mathcal{P}[\mathcal{T}]=\min\{\mathcal{P}^{(1)}[\mathcal{T}],\mathcal{P}^{(2)}[\mathcal{T}]\}$ для множества $\mathcal{T}$ такого, что $\mathcal{T}=\cup_{v,u}\tau(v,u)\subseteq[t_0,t]$. Мы будем рассматривать задачу для $\mathcal{P}[t_0,t]=\mathcal{P}^{(1)}[t_0,t]=\mathcal{P}^{(2)}[t_0,t]$.

$$V(t,x)=\min_{u_1,u_2\in\mathcal{P}}\max_{v_1,v_2\in\mathcal{W}}\min_{\tau}\left\{d^2(x_0|_{x(t)=x},\mathcal{X}_0)+(\langle x(\tau),c\rangle-\gamma)^2\right\}.$$

Это значит, что искомое множество $\mathcal{X}[t,\mathcal{X}_0]$ в классе программных управлений содержит только те траектории, которые при любой допустимой помехе $v_1(\cdot),v_2(\cdot)$ и при любом $\tau(v,\cdot)$ гарантированно могут попасть на множество $\mathcal{X}[t,\mathcal{X}_0]$ Пока примем $\gamma=0$. Для линеаризации условия на переключение сделаем подстановку

$$\langle x,c\rangle^2\equiv\max_{\mu}\left\{\mu\left\langle x,c\right\rangle-\frac{\mu^2}{4}\right\},$$

и, используя (**??**), имеем

$$V(t,x)=\min_{u_1,u_2\in\mathcal{P}}\max_{v_1,v_2\in\mathcal{W}}\min_{\tau}\left\{\max_{\ell}\max_{\mu}\left\{\left\langle \ell,x_0\mid_{x(t)=x}\right\rangle+\mu\left\langle x(\tau),c\right\rangle-\frac{\mu^2}{4}-\rho(\ell\mid\mathcal{X}_0)-\frac{\|\ell\|^2}{4}\right\}\right\}.$$

Раскрывая (**??**), получим

$$V(t,x)=\min_{u_1,u_2}\max_{v_1,v_2}\min_{\tau\in[t_0,t]}\max_{\ell}\max_{\mu}\{$$

$$\langle\ell,G_1(t_0,\tau)G_2(\tau,t)x\rangle+\int_t^{\tau}\langle\ell,G_1(t_0,\tau)G_2(\tau,s)\left[B_2(s)u_2(s)+C_2(s)v_2(s)\right]\rangle\,ds+$$

$$+\int_{\tau}^{t_0}\langle\ell,G_1(t_0,s)\left[B_1(s)u_1(s)+C_1(s)v_1(s)\right]\rangle\,ds+\mu\left\langle c,G_2(\tau,t)x\right\rangle+$$

$$+\mu\int_t^{\tau}\langle c,G_2(\tau,s)\left[B_2(s)u_2(s)+C_2(s)v_2(s)\right]\rangle\,ds-$$

$$-\frac{\mu^2}{4}-\rho(\ell\mid\mathcal{X}_0)-\frac{\|\ell\|^2}{4}\}$$

Сгруппируем слагаемые

$$\tilde{S}(\tau,t)=G_2^T(\tau,t)G_1^T(t_0,\tau)\ell+\mu G_2^T(\tau,t)c,$$
$$\tilde{S}_1(t_0,\tau)=G_1^T(t_0,\tau)\ell,$$

имеем

$$
\begin{gathered}
V(t,x) = \min_{u_1,u_2}\max_{v_1,v_2}\min_{\tau\in[t_0,t]}\max_{\ell}\max_{\mu}\{ \\
\tilde{S}^T(\tau,t)x + \int\limits_t^{\tau} \tilde{S}^T(\tau,s)\left[B_2(s)u_2(s) + C_2(s)v_2(s)\right]\, ds + \\
+ \int\limits_{\tau}^{t_0} \tilde{S}_1^T(t_0,s)\left[B_1(s)u_1(s) + C_1(s)v_1(s)\right]\, ds - \\
-\frac{\mu^2}{4} - \rho(\ell \mid \mathcal{X}_0) - \frac{\|\ell\|^2}{4}\}
\end{gathered}
\tag{2.3}
$$

Чтобы эффективно вычислять множества достижимости используется прием, который позволяет заменить поиск множества допустимых траекторий вычислением опорной функции к этому множетсву. Для перехода к опорным функциям требуется менять местами порядок минимумов и максимумов в (**??**), а для этого необходимо выполнение условий теоремы минимакса. Поэтому дальнейшие преобразования выполняются с целью обеспечения этих условий. Одним из достаточных условий перестановки является линейность по минимизирующему или максимизирующему параметру. Наша цель состоим в том, чтобы перенести операции минимума по u_1, u_2 и максимума по v_1, v_2 внутрь выражения функции цены, тем самым сводя минимизацию/максимизацию на функциональном пространстве $\mathcal{P}, \mathcal{W}$ к поиску экстремумов для выпуклых(вогнутых) функций. Первыми меняются местами $\max_{v_1,v_2}\min_{\tau}(\cdot) = \min_{\tau}\max_{v_1,v_2}(\cdot)$. Для примера, сначала рассмотрим функционал

$$
T(\tau, v(s)) = \int\limits_t^{\tau} v(s)ds
$$

Легко видеть, что $T(\tau, v(s))$, являясь линейным по v, не является таковым по τ. Тогда вместо τ возьмем функцию ограниченной вариации $\tau(w) = \phi(w)$ и преобразуем

$$
T(\phi(w), v(s)) = \int\limits_{t_0}^{t} d\phi(w) \int\limits_t^{w} v(s)ds.
$$

Мы заменили множество τ более широким множеством функций $\phi(w)$. Условием нормировки для этих функций служит следующее выражение

$$
\int\limits_{t_0}^{t} d\phi(w) = 1.
$$

Теперь функционал $T(\phi, v)$ является линейным по всем аргументам.

Аналогично поступим с $V(t,x)$:

$$V(t,x) = \min_{u_1,u_2}\max_{v_1,v_2}\min_{\phi(w)}\max_{\ell(w)}\max_{\mu(w)}\int\limits_{t_0}^{t} d\phi(w)\Bigg\{$$

$$\tilde{S}^T(w,t)x + \int\limits_{t}^{w} \tilde{S}^T(w,s)\left[B_2(s)u_2(s) + C_2(s)v_2(s)\right] ds +$$

$$+\int\limits_{w}^{t_0} \tilde{S}_1^T(t_0,s)\left[B_1(s)u_1(s) + C_1(s)v_1(s)\right] ds -$$

$$-\frac{\mu^2}{4} - \rho(\ell \mid \mathcal{X}_0) - \frac{\|\ell\|^2}{4}\Bigg\},$$

Поскольку мы здесь воспользовались перестановкой

$$\int \max_{\ell,\mu} f(w,\ell,\mu)d\phi(w) = \max_{\ell(w),\mu(w)}\int f(w,\ell(w),\mu(w))d\phi(w)$$

ℓ,μ теперь функции от w, $\ell=\ell(w)$ и $\mu=\mu(w)$.

Утверждение 1.

$$\max_{x(\cdot)}\int\limits_{t_0}^{t} f(x(s))ds = \int\limits_{t_0}^{t}\max_{x(s)} f(x(s))ds$$

Пусть

$$x^*(\cdot) = \arg\max_{x(\cdot)}\int\limits_{t_0}^{t} f(x(s))ds$$

$$x^\circ(\cdot) : \int\limits_{t_0}^{t} f(x^\circ(s)) = \int\limits_{t_0}^{t}\max_{x(s)} f(x(s))ds.$$

Предположим, что $x^*(\cdot) \neq x^\circ(\cdot)$ и $\int\limits_{t_0}^{t} f(x^*(s))ds \neq \int\limits_{t_0}^{t} f(x^\circ(s))ds$.

Тогда для выражения $m(s) = f(x^*(s)) - f(x^\circ(s))$ можно указать непересекающиеся отрезки $T_<, T_>, T_=$, на которых выполняются неравенства

$$\forall s\in T_< :\, m(s)<0,\ \forall s\in T_> :\, m(s)>0,\ \forall s\in T_= :\, m(s)=0.$$

Для $T_>$ получаем, что

$$\forall s \in T_> : f(x^*(s)) > f(x^\circ(s)) = \max_{x(s)} f(x(s)$$

– противоречие.

Для $T_<$ получаем, что

$$\max_{x(\cdot)}\int\limits_{T_<} f(x(s))ds = \int\limits_{T_<} f(x^*(s))ds < \int\limits_{T_<} f(x^\circ(s))ds$$

– противоречие.

Остается единственный вариант, который и доказывает утверждение. ■

Можно заметить, что от w зависят только переменные $\tilde{S}, \tilde{S}_1$ и пределы интегрирования. Поменяем порядок интегрирования, чтобы собрать вместе члены, зависящие от w. Применяя правила замены

$$\int_{t_0}^{t} d\phi(w) \int_{t}^{w} ds(\cdot) = \int_{t}^{t_0} ds \int_{t_0}^{s} d\phi(w)(\cdot),$$

$$\int_{t_0}^{t} d\phi(w) \int_{w}^{t_0} ds(\cdot) = \int_{t}^{t_0} ds \int_{s}^{t} d\phi(w)(\cdot),$$

и делая замену переменных

$$\begin{aligned}
S(t_0, t_1) &= \int_{t_0}^{t_1} \tilde{S}(w, t_1)\, d\phi(w) = \int_{t_0}^{t_1} \left\{ G_2^T(w,t) G_1^T(t_0, w)\ell(w) + \mu(w) G_2^T(w,t)c \right\} \, d\phi(w), \\
S_1(t_0, t_1) &= \int_{t_0}^{t_1} \tilde{S}_1(t_0, w)\, d\phi(w), = \int_{t_0}^{t_1} \left\{ G_1^T(t_0, w)\ell(w) \right\} \, d\phi(w), \\
K(\ell, \mu, \mathcal{X}_0) &= \int_{t_0}^{t} \left[\frac{\mu(w)^2}{4} + \rho(\ell(w) \mid \mathcal{X}_0) + \frac{\|\ell(w)\|^2}{4} \right] \, d\phi(w)
\end{aligned}$$

придем к

$$\begin{gathered}
V(t,x) = \min_{u_1,u_2} \max_{v_1,v_2} \min_{\phi(w)} \max_{\ell(w)} \max_{\mu(w)} \Bigg\{ \\
S^T(t_0, t)x + \int_{t}^{t_0} S^T(t_0, s) \left[B_2(s)u_2(s) + C_2(s)v_2(s) \right] \, ds + \\
+ \int_{t}^{t_0} S_1^T(s, t) \left[B_1(s)u_1(s) + C_1(s)v_1(s) \right] \, ds - \\
- K(\ell, \mu, \mathcal{X}_0) \Bigg\},
\end{gathered} \tag{2.4}$$

где $K(\ell, \mu, \mathcal{X}_0)$ – выпуклая функция.

Будем искать опорную функцию к множеству достижимости $\mathcal{X}[t, \mathcal{X}_0]$, определяемому по найденному выше выражению (**??**) для $V(t,x)$. Пользуясь линейностью по ϕ, теперь можно переставить

$$\max_{v_1,v_2} \min_{\phi} \max_{\ell} \max_{\mu} (\cdot) = \min_{\phi} \max_{\ell} \max_{\mu} \max_{v_1,v_2} (\cdot),$$

и

$$\max_{v(\cdot)} \int_{t}^{t_0} f(v(s))ds = \max_{v(\cdot)} \int_{t_0}^{t} -f(v(s))ds = \int_{t_0}^{t} \max_{v(s)} [-f(v(s))] ds$$

тогда

$$V(t,x) = \min_{u_1,u_2} \min_{\phi} \max_{\ell} \max_{\mu} \Bigg\{$$

$$S^T(t_0,t)x + \int_t^{t_0} S^T(t_0,s)B_2(s)u_2(s)\,ds + \int_{t_0}^{t} \rho(-S^T(t_0,s) \mid C_2(s)\mathcal{W}_2(s))\,ds$$

$$+ \int_t^{t_0} S_1^T(s,t)B_1(s)u_1(s) + \int_{t_0}^{t} \rho(-S_1^T(s,t) \mid C_1(s)\mathcal{W}_1)\,ds-$$

$$-K(\ell,\mu,\mathcal{X}_0)\Bigg\}.$$

Далее, мы хотим поменять $\min_{u_1,u_2}(\cdot)$ на опорную функцию, но полученное выше выражение уже не является вогнутым по ℓ,μ. Поэтому, мы прибегаем к овыпуклению нужных членов и приходим к

$$V(t,x) = \min_{\phi} \max_{\ell} \max_{\mu} \Bigg\{$$

$$S^T(t_0,t)x - \int_{t_0}^{t} \rho(S_1(s,t) \mid B_1(s)\mathcal{P}_1(s))\,ds - \int_{t_0}^{t} \rho(S(t_0,s) \mid B_2(s)\mathcal{P}_2(s))\,ds-$$

$$-\mathrm{conv}\left\{ -\int_{t_0}^{t} \rho(-S_1(s,t) \mid C_1(s)\mathcal{W}_1(s))\,ds - \int_{t_0}^{t} \rho(-S(t_0,s) \mid C_2(s)\mathcal{W}_2(s))\,ds + K(\ell,\mu,\mathcal{X}_0) \right\} \Bigg\}.$$

2.1 Сопряженные функции

Найдем двойное сопряжение для функции

$$f(x) = x^2 - \alpha \mid x \mid$$

В $\mathbb{R}^1$ имеем

$$f^{**}(x) = \begin{cases} \left(\mid x \mid - \dfrac{\alpha}{2}\right)^2 - \dfrac{\alpha^2}{4}, & \mid x \mid > \dfrac{\alpha}{2} \\ -\dfrac{\alpha^2}{4}, & \text{иначе} \end{cases}$$

В пространстве $\mathbb{R}^n$ Рассмотрим функцию

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \alpha \mid x_i \mid \tag{2.5}$$

$$f^*(y) = \sup_x \left(\langle x, y\rangle - f(x)\right) = \sup_x \left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \alpha \mid x_i \mid\right) =$$

$$= \sup_{x\in D} \left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - x_i^2 + \mid x_i \mid\right)$$

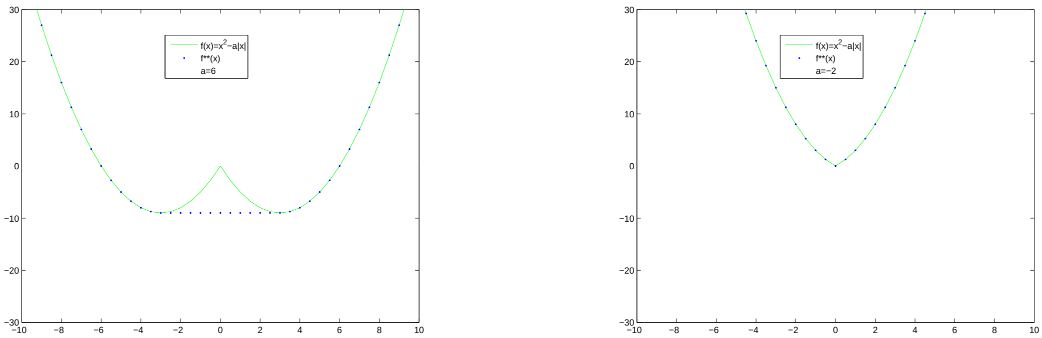

Рис. 1. Функция и её двойное сопряжение в $\mathbb{R}^1$

(Предположение)

Если область D такая, что $D(x_i)$ не зависит от $D(x_j)$ $\forall i, j \leq n$, то справедливо

$$\sup_x \sum_i (\cdot) = \sum_i \sup_{x_i} (\cdot)$$

Это верно для $D = \mathbb{R}^n$ Тогда

$$\sup_x \left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - x_i^2 + \mid x_i \mid \right) = \sum_{i=1}^{n} \sup_{x_i} \left(x_i y_i - x_i^2 + \alpha \mid x_i \mid \right)$$

И мы приходим к уже полученному результату в $\mathbb{R}^1$ для каждого i. Аналогично вычисляем f^{**}. Таким образом, в $\mathbb{R}^n$ для функции (**??**) вычисление conv сводится к ряду простых операций в $\mathbb{R}^1$. Если же $D = \mathcal{E}(()q, Q)$ - то полученный результат становиться не верным. Но рассматриваемое применение к этому случаю относиться не будет $(\forall \ell \in \mathbb{R}^n)$

prim2p

Утверждение 2.

$$\mathrm{conv}_{x(\cdot)} \int_{t_0}^{t} f(x(t))dt = \int_{t_0}^{t} \mathrm{conv}_{x(t)} f(x(t))dt$$

Примем

$$\mathrm{conv}(f) = f^{**}$$

Тогда

$$\left(\int_{t_0}^{t} f(x(s))ds \right)^* (\ell(t)) = \max_{x(\cdot)} \left(\langle \ell, x \rangle_{L_2} - \int_{t_0}^{t} f(x(s))ds \right)$$

$$\left(\int\limits_{t_0}^{t} f(x(t))dt\right)^{**}(y(t)) = \max_{\ell(\cdot)}\left(\langle y,\ell\rangle_{L_2} - \max_{x(\cdot)}\left(\langle \ell,x\rangle_{L_2} - \int\limits_{t_0}^{t} f(x(s))ds\right)\right) =$$

$$= \max_{\ell(\cdot)}\min_{x(\cdot)}\left(\langle y,\ell\rangle_{L_2} - \langle \ell,x\rangle_{L_2} + \int\limits_{t_0}^{t} f(x(s))ds\right) =$$

$$= \max_{\ell(\cdot)}\min_{x(\cdot)}\int\limits_{t_0}^{t}\left[\langle y(s),\ell(s)\rangle - \langle \ell(s),x(s)\rangle + f(x(s))\right]ds =$$

$$= \int\limits_{t_0}^{t}\max_{\ell(s)}\min_{x(s)}\left[\langle y(s),\ell(s)\rangle - \langle \ell(s),x(s)\rangle + f(x(s))\right]ds =$$

$$= \int\limits_{t_0}^{t}\max_{\ell(s)}\left[\langle y(s),\ell(s)\rangle - \max_{x(s)}\left\{\langle \ell(s),x(s)\rangle - f(x(s))\right\}\right]ds =$$

$$= \int\limits_{t_0}^{t} f^{**}(s)ds$$

■

Утверждение 3.

$$\min_{\ell}\left[\langle x,l\rangle + (\mathrm{conv}(y))(\ell)\right] = \min_{\ell}\left[\langle x,\ell\rangle + y(\ell)\right]$$

$$\min_{\ell}\left[\langle x,\ell\rangle + \max_{p}(\langle p,\ell\rangle - \max_{s}(\langle p,s\rangle - y(s)))\right] =$$

$$= \min_{\ell}\max_{p}\min_{s}\left[\langle x,l\rangle + \langle l,p\rangle - \langle p,s\rangle + y(s)\right] = \left\{\min_{\ell}\max_{p} = \max_{p}\min_{\ell}\right\} =$$

$$= \max_{p}\min_{\ell}\min_{s}\left[\langle \ell,x+p\rangle - \langle p,s\rangle + y(s)\right] = \max_{p}\left[\begin{cases} -\inf, & p\neq -x \\ 0, & p=-x\end{cases} + \min_{s}(-\langle p,s\rangle + y(s))\right] =$$

$$= \{\text{из первого } \min \text{ находим } \ p=-x\} = \min_{s}(-\langle -x,s\rangle + y(s)) =$$

$$= \min_{\ell}(\langle x,\ell\rangle + y(\ell))$$

■

2.2 Рассматриваемые примеры

2.2.1 Пример 1

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} \dot{x} = 2u + v; \\ \dot{x} = u; \end{array}\right. \\ u \in [0,1]; \\ v \in [0,1]; \\ \mathcal{X}_0 = \{x \in [-2,-1]\}; \\ t \in [0,4]; \\ H = \{x = 0\}. \end{cases} \tag{2.6}$$

2.2.2 Пример 2

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} \dot{x} = u; \\ \dot{x} = 2u + v; \end{array} \right. \\ u \in [0,1]; \\ v \in [0,1]; \\ \mathcal{X}_0 = \{x \in [-2,-1]\}; \\ t \in [0,4]; \\ H = \{x = 0\}. \end{cases} \tag{2.7}$$

Начальные условия для (0.1) и (0.2) одинаковы. Функция цены для задач (0.1) и (0.2).

$$V(t,x) = \min_u \max_v \max_\tau \max_\ell \max_\mu \left\{ \left\langle \ell, x_0 \mid_{x(t)=x} \right\rangle - \rho(\ell \mid \mathcal{X}_0) - \frac{\|\ell\|^2}{4} + \mu \left\langle x(\tau), c \right\rangle - \frac{\mu^2}{4} \right\}.$$

В одномерном случае, если рассматривать отрезок $[\alpha, \beta]$ как эллипсоид $\mathcal{E}(q, Q)$, то $q = \frac{\beta+\alpha}{2}$, $Q = \left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right)^2$. Тогда

$$\rho\left(\ell \mid \mathcal{E}(()q, Q)\right) = \langle \ell, q \rangle + \langle \ell, Q\ell \rangle^{\frac{1}{2}} = \ell \cdot q + \mid \ell \mid \sqrt{Q}.$$

Поскольку в уравнениях примеров (0.1) и (0.2) фундаментальные матрицы $G(t, t_0) \equiv I$, $c = 1$, то можно написать

$$V(t,x) = \min_u \max_v \min_\tau \max_\ell \max_\mu \big\{ \ell \cdot x + \int\limits_t^\tau \ell \cdot [B_2 u_2 + v_2] ds + \int\limits_\tau^{t_0} \ell \cdot [B_1 u_1 + v_1] ds -$$

$$-(\ell \cdot x_0 + \mid \ell \mid \sqrt{X_0}) - \frac{\ell^2}{4} + \mu \big[x + \int\limits_t^\tau [B_2 u_2 + v_2] ds \big] - \frac{\mu^2}{4} \big\}.$$

Здесь $\mathcal{X}_0 = \mathcal{E}(x_0, X_0)$, для (0.1) $v_2 \equiv 0$, для (0.2) $v_1 \equiv 0$. Если сократить, то получим для (0.1):

$$V(t,x) = \min_u \max_v \min_\tau \max_\ell \max_\mu \big\{ (\ell + \mu) x + \int\limits_t^\tau (\ell + \mu) B_2 u_2 ds + \int\limits_\tau^{t_0} \ell B_1 u_1 ds + \int\limits_\tau^{t_0} \ell v_1 ds -$$

$$-(\ell \cdot x_0 + \mid \ell \mid \sqrt{X_0}) - \frac{\ell^2}{4} - \frac{\mu^2}{4} \big\}.$$

Для (0.2)

$$V(t,x) = \min_u \max_v \min_\tau \max_\ell \max_\mu \big\{ (\ell + \mu) x + \int\limits_t^\tau (\ell + \mu) B_2 u_2 ds + \int\limits_t^\tau (\ell + \mu) v_2 ds + \int\limits_\tau^{t_0} \ell B_1 u_1 ds -$$

$$-(\ell \cdot x_0 + \mid \ell \mid \sqrt{X_0}) - \frac{\ell^2}{4} - \frac{\mu^2}{4} \big\}.$$

Эти выражения не являются выпуклыми по τ, чтобы можно было переставлять $\max_v \min_\tau$. Поэтому прибегаем к функции распределения $\phi(w)$. $\phi(w)$ – функция ограниченной вариации.

$$\int\limits_{t_0}^{t} d\phi(w) = 1.$$

Обозначим

$$S_2(t_0, s) = \int\limits_{t_0}^{s} \ell(w) + \mu(w) d\phi(w)$$

$$S_1(s, t) = \int\limits_{s}^{t} \ell(w) d\phi(w)$$

Тогда приходим к найденному ранее выражению (**??**). Используя формулу вычисления опорной функции для множеств из $\mathbb{R}^1$ запишем

$$V(t,x) = \min_{\phi} \max_{\ell} \max_{\mu} \Bigg\{$$

$$S_2(t_0,t)x - \int\limits_{t_0}^{t} S_1(s,t)p_1 + \mid S_1(s,t) \mid \sqrt{P_1} ds - \int\limits_{t_0}^{t} S_2(t_0,s)p_2 + \mid S_2(t_0,s) \mid \sqrt{P_2}\, ds -$$

$$-\mathrm{conv}\Bigg\{ \int\limits_{t_0}^{t} w_1 S_1(s,t) - \sqrt{W_1} \mid\ S_1(s,t) \mid + w_2 S_2(t_0,s) - \sqrt{W_2} \mid S_2(t_0,s) \mid\ ds +$$

$$+ \int\limits_{t_0}^{t} \frac{\ell^2(w)}{4} + \frac{\mu^2(w)}{4} + \ell(w)x_0 + \mid \ell(w) \mid \sqrt{X_0}\, d\phi(w) \Bigg\}\Bigg\}.$$

2.3 Пример $\mathbb{R}^2$

Заданы системы дифференциальных уравнений, описывающих состояние некоторой модели до переключения и после:

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \dot{x}_1^{(1)} = x_2^{(1)} + v^{(1)}(t); \\ \dot{x}_2^{(1)} = u^{(1)}(t); \\ x(t_0) \in \mathcal{X}_0 = \{x \in \mathbb{R}^2 : (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 1)^2 \leqslant 1\}; \end{cases} \\ \\ \begin{cases} \dot{x}_1^{(2)} = x_2^{(2)} + v^{(2)}(t); \\ \dot{x}_2^{(2)} = -\gamma x_1 - \mu x_2 + u^{(2)}(t); \\ x(\tau) \in \mathcal{X}^{(1)}[\tau, t_0] \cap \mathcal{H}, \tau \leqslant t \leqslant t_1; \end{cases} \end{array} \right. \\ \\ \mathcal{H} = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1 = 0\} \text{— гиперплоскость;} \\ u^{(1)} = u^{(2)} = u(\cdot) \in [-\alpha_1, \alpha_2] = \mathcal{P}[t_0, t_1]; \\ v^{(1)} = v^{(2)} = v(\cdot) \in [-\beta_1, \beta_2] \in \mathcal{W}[t_0, t_1]; \\ \gamma, \mu, \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 > 0 \text{— некоторые константы;} \\ \tau \text{ — момент переключения, при пересечении гиперплоскости.} \end{cases} \tag{2.8}$$

Множества $C_1\mathcal{W}_1$ и $C_2\mathcal{W}_2$ принимают вид $\begin{pmatrix} v \\ 0 \end{pmatrix}$, $v \in [\tilde{\beta}_1, \tilde{\beta}_2] = \mathrm{Comp}(\mathbb{R}^1)$, тогда для некоторого $\tilde{\ell} \in \mathbb{R}^2$

$$\rho(\tilde{\ell}, \begin{pmatrix} v \\ 0 \end{pmatrix}) = \sup_{v \in C_1\mathcal{W}_1(s)} (\tilde{\ell}_1 v) = \tilde{\ell}_1 \cdot \begin{cases} \tilde{\beta}_1, \ \tilde{\ell}_1 < 0 \\ \tilde{\beta}_2, \ \tilde{\ell}_1 > 0 \end{cases}$$

(Здесь пока не применены результаты для вычисления conv в $\mathbb{R}^n$, оставлено что есть)

И тогда интегралы от опорных функций вычисляются как

$$\int\limits_{t_0}^{t} \rho(-S_1(s,t) \mid C_1\mathcal{W}_1(s))\, ds = -\tilde{\beta}_1^{(1)} \int\limits_{T_>^{(1)}} S_1(t_0, s)_1\, ds - \tilde{\beta}_2^{(1)} \int\limits_{T_<^{(1)}} S_1(t_0, s)_1\, ds,$$

$$\int\limits_{t_0}^{t} \rho(-S(t_0,s) \mid C_2\mathcal{W}_2(s))\, ds = -\tilde{\beta}_1^{(2)} \int\limits_{T_>^{(2)}} S(t_0, s)_1\, ds - \tilde{\beta}_2^{(2)} \int\limits_{T_<^{(2)}} S(t_0, s)_1\, ds,$$

где $T_<^{(1)}, T_<^{(2)}$ – промежутки времени, на которых $S_1(s,t)_1 < 0$, $S(t_0,s)_1 < 0$ соответственно; $T_>^{(1)}, T_>^{(2)}$ – промежутки, где $S_1(s,t)_1 > 0$, $S(t_0,s)_1 > 0$ соответственно. Концы этих отрезков находятся из уравнений

$$S_1(s,t)_1 = \int\limits_{s}^{t} \phi(w) \left\{ G_1^T(t_0, w)\ell(w) \right\}_1 dw = 0;$$

$$S(t_0,s)_1 = \int\limits_{t_0}^{s} \phi(w) \left\{ G_1^T(t_0, w) G_2^T(w,t)\ell(w) + \mu(w) G_2^T(w,t) c \right\}_1 dw = 0,$$

где $t_0 < s < t$. Также из условий задачи $\tilde{\beta}_1^{(2)} = \tilde{\beta}_1^{(1)} = \beta_1$ и $\tilde{\beta}_2^{(1)} = \tilde{\beta}_2^{(2)} = \beta_2$.

Для $s \in [t_0, t]$ множества $B_1\mathcal{P}_1$ и $B_2\mathcal{P}_2$ имеют вид $\begin{pmatrix} 0 \\ u \end{pmatrix}$, где $u(s) \in \mathcal{R}^1$ принадлежит первому либо второму семейству управлений. Тогда аналогично

$$\int\limits_{t_0}^{t} \rho\left(S_1(s,t) \mid B_1\mathcal{P}_1\right) ds = \int\limits_{t_0}^{t} S_1(s,t)_2 \cdot \begin{cases} \alpha_1, \ S_1(s,t)_2 < 0, \\ \alpha_2, \ S_1(s,t)_2 > 0 \end{cases} ds =$$

$$= \alpha_1 \int\limits_{T_<^{(1)}} S_1(s,t)_2\, ds + \alpha_2 \int\limits_{T_>^{(1)}} S_1(s,t)_2\, ds$$

$$\int\limits_{t_0}^{t} \rho\left(S(t_0,s) \mid B_2\mathcal{P}_2\right) ds = \int\limits_{t_0}^{t} S(t_0,s)_2 \cdot \begin{cases} \alpha_1, \ S(t_0,s)_2 < 0, \\ \alpha_2, \ S(t_0,s)_2 > 0 \end{cases} ds =$$

$$= \alpha_1 \int\limits_{T_<^{(2)}} S(t_0,s)_2\, ds + \alpha_2 \int\limits_{T_>^{(2)}} S(t_0,s)_2\, ds,$$

где α_1, α_2 – ограничения на управление, $\alpha_1 \leqslant u(s) \leqslant \alpha_2$, $T^{(1)}_<, T^{(2)}_<$ – множества отрезков времени, где $S_1(s,t)_2 < 0, S(t_0,s)_2 < 0$; $T^{(1)}_>, T^{(2)}_>$ – множество отрезков времени, где $S_1(s,t)_2 > 0, S(t_0,s)_2 > 0$.

lemmas

Рассмотрим систему без переключений

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x,t) + v(t); \\ x(t_0) = \mathcal{X}_0; \\ x(t) \in \mathbb{R}^n, v(s) \in L_1^n[t_0,t_1]; \\ v(t) \in Q(t), \forall t \in [t_0,t_1], Q(t) \text{–выпуклое ограниченное множество.} \end{cases} \tag{2.9}$$

Функция $v(t)$ – неизвестная, $f(x,t)$ – известная. Множество достижимости $\mathcal{X}_1 = \mathcal{X}[t_1,t_0,\mathcal{X}_0]$ рассматривается как оценка места точек гарантированного попадания траекторий системы в момент t_1, это множество может быть пустым при некоторых условиях.

Рассмотрим отображение F в пространсве $\Omega = \mathbb{R}^n$

$$F : 2^\Omega \to \Omega$$

Определим класс подмножеств некоторого множества $X \subset \Omega$

$$\mathfrak{M}_F(X) \overset{def}{=} \{A \subset X \mid F(A) \neq \emptyset, \forall B \subset A : F(B) = \emptyset\}$$

то есть таких минимальных A, для которых $F(A)$ непусто. Для краткости введем обозначение для любого класса подмножеств $\mathfrak{K} \subseteq \mathfrak{M}_F(\Omega)$:

$$[\mathfrak{K}] \overset{def}{=} \bigcup_{\forall A \in \mathfrak{K}} A$$

Определим отображение

$$\mathcal{F}(X \subset \Omega) \overset{def}{=} \bigcup_{\forall A \in \mathfrak{M}_F(X)} F(A)$$

Пусть для некоторой точки $y \in \Omega$ существует не обязательно одно минимальное множество $A, B \in \mathfrak{M}_F(\Omega) : F(A) = F(B) = y$. Определим обратную по отношению к $\mathcal{F}$ операцию

$$G : 2^\Omega \to 2^{2^\Omega}, G(M \subset \Omega) \overset{def}{=} \bigcup_{\forall y \in M} \{A \in \mathfrak{M}_F(\Omega) \mid F(A) = y\},$$

то есть для некоторого $M \subset \Omega : G(M) \subset \mathfrak{M}_F(\Omega)$ – является классом подмножеств, отображение F для любого подмножества из которого окажется в M. Кроме того, $G(M)$ является максимальным набором подмножеств, удовлетворяющих этому условию, поскольку некоторому $y \in M$ может удовлетворять несколько подмножеств и все они содержатся в $G(M)$. Тогда для каждого $y \in M$ можно выбрать по одному соответствующему представителю из $G(y)$ и полученный из этих представителей класс подмножеств $\mathfrak{K}^\alpha(M) \subseteq G(M)$ также будет удовлетворять условию для M:

$$\bigcup_{\forall A \in \mathfrak{K}^\alpha(M)} F(A) = M,$$

где $\alpha \in \mathcal{A}$ – множество вариантов для составления таких классов подмножеств-представителей.

Выполнены вложения

$$\mathcal{X}_1 = \bigcup_{\forall A \in \mathfrak{K}^\alpha(\mathcal{X}_1)} F(A) \subseteq \mathcal{F}([\mathfrak{K}^\alpha(\mathcal{X}_1)]) \subseteq \mathcal{F}([G(\mathcal{X}_1])$$

Также справедливо и следующее

$$\forall y \in \mathcal{X}_1 \exists A \subseteq \mathcal{X}_0 : F(A) = y \Rightarrow \exists \mathfrak{K}^\alpha(\mathcal{X}_1) : \forall B \in \mathfrak{K}^\alpha : B \subseteq \mathcal{X}_0$$

Значит, существует класс представителей $[\tilde{\mathfrak{K}^\alpha}(\mathcal{X}_1)] = \tilde{\mathcal{X}_0} \subseteq \mathcal{X}_0$ такой, что $\mathcal{F}(\tilde{\mathcal{X}_0}) = \mathcal{F}(\mathcal{X}_0)$

Более того, среди $\tilde{\mathfrak{K}}^\alpha(\mathcal{X}_1)$ можно найти по крайней мере один класс представителей $\exists \alpha^*, \mathfrak{N} = \tilde{\mathfrak{K}^{\alpha^*}}(\mathcal{X}_1)$, обладающий свойством $[\mathfrak{N}] \subset \mathcal{X}_0$ и такой, что

$$\mathcal{F}([\mathfrak{N}]) = \bigcup_{\forall A \in \mathfrak{N}} F(A) = \mathcal{X}_1$$

Действительно, если бы существовало такое множество $B \subset [\mathfrak{N}] : \mathcal{F}(B) \setminus \mathcal{X}_1 \neq \emptyset$ то приходим к противоречию: $\mathcal{X}_1 \subset \mathcal{F}([\mathfrak{N}]) \subseteq \mathcal{F}(\mathcal{X}_0) = \mathcal{X}_1$.

Если $\mathcal{F}(\mathcal{X}_0)$ – взять как операцию вычисления множества достижимости для некоторого начального $\mathcal{X}_0$, то обратная операция $G(M)$ - это не совсем множество разрешимости, но $[G(M)]$ является таковым.

Отождествим операцию поиска множества достижимости $\mathcal{X}[t_1, t_0, \mathcal{X}_0]$ с этим отображением $\mathcal{F}(\mathcal{X}_0)$. Тогда для $\mathcal{F}$ из свойств решения системы (0.4) справедливы следующие утверждения

- A–выпуклые, ограниченные

- $\forall A, B \in \mathfrak{M}_F(\Omega), A \neq B \Rightarrow F(A) \neq F(B), \exists F^{-1}(x) = A \mid F(A) = x$

$\mathcal{X}_0 : \mathcal{F}(\mathcal{X},$ **primer1a**

2.4 Пример 1a, $\mathbb{R}^1$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} \dot{x} = u + v; \\ \dot{x} = u; \end{array}\right. \\ u(t) \in [p_1, p_2] = \mathcal{P}; \\ v(t) \in [q_1, q_2] = \mathcal{Q}; \\ \mathcal{X}_0 = [a_1, a_2], a_1 < a_2; \\ t \in [t_0, t_1]; \\ H = \{x = c\}. \end{cases} \tag{2.10}$$

2.4.1 Вычисляем первое множество, до переключения

Вычислим множество достижимости $\mathcal{X}_1$ первого уравнения (системы) (**??**) Для $\mathcal{X}_1$ имеем:

$$\mathcal{X}[t_1] = \left(\mathcal{X}_0 \dot{-} \int_{t_1}^{t_0} \mathcal{Q}(s) ds \right) + \int_{t_0}^{t_1} \mathcal{P}(s) ds$$

Пусть

$$\tilde{p_1} = \int_{t_0}^{t_1} p_1(s) ds; \quad \tilde{p_2} = \int_{t_0}^{t_1} p_2(s) ds;$$

$$\tilde{q_1} = \int\limits_{t_1}^{t_0} q_2(s)ds; \quad \tilde{q_2} = \int\limits_{t_1}^{t_0} q_1(s)ds;$$

$$\mathcal{Q}(\tau_1, \tau_2) = \int\limits_{\tau_1}^{\tau_2} \mathcal{Q}(s)ds$$

$$\mathcal{P}(\tau_1, \tau_2) = \int\limits_{\tau_1}^{\tau_2} \mathcal{P}(s)ds$$

Тогда $\mathcal{P}(t_0, t_1) = [\tilde{p_1}, \tilde{p_2}]$, $\mathcal{Q}(t_1, t_0) = [\tilde{q_1}, \tilde{q_2}]$ Для множества $C = \left(\mathcal{X}_0 \dot{-} \mathcal{Q}(t_1, t_0)\right)$ имеем выражение

$$\rho\left(\ell \mid C\right) = \operatorname{conv}\left[\rho\left(\ell \mid \mathcal{X}_0\right) - \rho\left(\ell \mid \mathcal{Q}(t_1, t_0)\right)\right](\ell)$$

Геометрическую разность можно еще выразить как

$$A \dot{-} B = \bigcap_{\forall b \in B} (A - b)$$

Множество $C = \mathcal{X}_0 \dot{-} \mathcal{Q}(t_1, t_0)$, где $\mathcal{Q}(t_1, t_0) = [\tilde{q}_1, \tilde{q}_2]$, находится как $C = [a_1 - \tilde{q}_1, a_2 - \tilde{q}_2]$, при условии, что $a_2 - a_1 \geq \tilde{q}_2 - \tilde{q}_1$. Тогда

$$\mathcal{X}[t_1] = [a_1 - \tilde{q}_1 + \tilde{p}_1, a_2 - \tilde{q}_2 + \tilde{p}_2], \forall t_1 : a_2 - a_1 \geq \tilde{q}_2 - \tilde{q}_1$$

Вычислим тоже самое через опорные функции.

$$\rho\left(\ell \mid \mathcal{X}[t_1]\right) = \rho\left(\ell \mid \mathcal{X}_0 \dot{-} \mathcal{Q}(t_1, t_0)\right) + \rho\left(\ell \mid \mathcal{P}(t_0, t_1)\right) \tag{2.11}$$

$$\rho\left(\ell \mid \mathcal{Q}(t_1, t_0)\right) = \rho\left(\ell \mid \int\limits_{t_1}^{t_0} \mathcal{Q}(s)ds\right) = \begin{cases} \ell\tilde{q}_2 = \int\limits_{t_1}^{t_0} \ell q_1(s)ds, \ \ell \geq 0 \\ \ell\tilde{q}_1 = \int\limits_{t_1}^{t_0} \ell q_2(s)ds, \ \ell < 0 \\ t_1 > t_0, \ q_1(s) \leq q_2(s), \forall s \end{cases}.$$

Здесь всегда выполнено $\tilde{q}_1(t_0) \leq \tilde{q}_2(t_0)$.

Для $\mathbb{R}^1$ имеем: $\mathcal{X}_1 = [b_1, b_2]$, $\mathcal{X}_0 = [a_1, a_2]$, $\mathcal{P}(s) = [p_1(s), p_2(s)]$, $\mathcal{Q} = [q_1(s), q_2(s)$, $V(\tau) = [\tilde{q}_1(\tau), \tilde{q}_2]$.

Выражение (**??**) преобразуется к

$$\ell = 1 : b_2 = a_2 - \tilde{q}_2(t_0) + \tilde{p}_2(t_1)$$
$$\ell = -1 : -b_1 = -a_1 + \tilde{q}_1(t_0) - \tilde{p}_1(t_1)$$

И получаем тоже выражение $\mathcal{X}_1 = [b_1(t_1), b_2(t_2)] = [a_1 - \tilde{q}_1(t_0) + \tilde{p}_1(t_1), a_2 - \tilde{q}_2(t_0) + \tilde{p}_2(t_1)]$. Здесь $\operatorname{conv}(\rho\left(\ell \mid \mathcal{X}_0\right) \dot{-} \mathcal{Q}(t_1, t_0)) \equiv \rho\left(\ell \mid \mathcal{X}_0\right) - \rho\left(\ell \mid \mathcal{Q}(t_1, t_0)\right)$.

Поскольку $\mathcal{X}_1$ – гарантированная оценка, то она обладает тем свойством, что не зависит от помехи. Это множество позволяет нам не рассматривать зависимость от помехи v_1.

2.4.2 Множество $\{\tau, \mathcal{X}_H[\tau]\}$

То, что получаем при пересечении гиперплоскости H:

$$\{(\tau, \mathcal{X}_H)\} = \{(\tau, \mathcal{X}_1[\tau] \cap H) \mid \tau : H \cap \mathcal{X}_1(\tau, t_0, \mathcal{X}_0) \neq \emptyset\}$$

Пусть требуется найти $(A + B) \cap H$. Представим $A = \bigcup\limits_{i \in I}(a^i_\perp + A^i_\parallel)$ и $B = \bigcup\limits_{i \in I}(b_\perp + B^i_\parallel)$, где $a^i_\perp \perp H$, $b^i_\perp \perp H$ и справедливо $(a \in A^i_\parallel, a \in H) \Rightarrow A^i_\parallel \subset H$, аналогично для $B^i_\parallel$. Тогда

$$(A + B) \cap H = \bigcup (A^i_\parallel + B^j_\parallel + a^i_\perp + b^j_\perp \mid \forall i \in I, j(i) \in I : a^i_\perp + b^j_\perp \in H)$$

Пусть требуется найти множество $B = \{\xi\}$, такое что $\forall \xi \in B : (\xi + A) \cap H \subset\neq \emptyset, \subset X_H$. Выполним разложение $B = \bigcup\limits_{\forall i \in I} (\xi^i = \xi^i_\perp + B^i_\parallel$, и соответственно для A. Найдем $\xi^i_\perp : (\xi^i_\perp + A^i_\parallel) \cap H \neq \emptyset$. $H = x \mid \langle x, c\rangle = q$. Тогда $d^i = \langle \xi^i_\perp, c\rangle = q - \langle a^i_\perp, c\rangle$ и $\xi^i_\perp = \frac{d^i c}{\langle c,c\rangle}$. Теперь найдем $\{B^j_\parallel\}$, $\{\xi^j_\perp\}$,$j \in \mathcal{J} \subset I$ для которых выполнено вложение

$$\mathcal{J} = \{i \in I \mid \exists B^i_\parallel \neq \emptyset : \xi_\perp + B^i_\parallel + A^i_\parallel \subseteq X_H\}$$

Поскольку $\xi^i_\perp + A^i_\parallel \subset H$ по построению всегда выполнено, то фактически $B^i_\parallel = X_H \dot{-} (A^i_\parallel + \xi^i_\perp) = (X_H - \xi^i_\perp) \dot{-} A^i_\parallel$.

Для $\mathbb{R}^1$ есть особенность, заключающаяся в том, что $X_H \cap H = H = x_H \in \mathbb{R}^1$, $X_H \cap H \neq \emptyset$.

$$A \cap H \subset X_H \Leftrightarrow A \cap H = H \Leftrightarrow H \subset A$$

Для $\mathcal{X}^{(1)}_1(\tau) = \{x_\perp\} = [b_1, b_2]$ множество моментов времени пересечения гиперплоскости $\{\tau_H\} = \{\tau \mid H = \{c\}, c \in [b_1(\tau), b_2(\tau)]\}$. **Как я полагаю, оно может быть и разрывным, если $\mathcal{X}_1(\tau)$ – "волнистое".**

Множество $\{\tau_H\}$ - это множество моментов времени не зависящее от помех. Очевидно, более широкое множество $\{\tau^*_H(\mathcal{Q})\}$ шире чем данное, но поскольку мы ищем гарантированную оценку $(\forall v(\cdot) \in \mathcal{Q})$, мы не можем на него полагаться.

2.4.3 Множество достижимости для второй системы

Дано начальное множество $\mathcal{X}_0 = \{\tau^\alpha_H, \mathcal{X}^\alpha_H\}$, для этого множества вычислим $\mathcal{X}_1[t_1]$. Здесь, как и прежде, гарантированная оценка множества достижимости выглядит как

$$\mathcal{X}_1[t_1] = (\mathcal{X}_0 \dot{-} \mathcal{Q}(t_1, \tau)) + \mathcal{P}(\tau, t_1)$$

Но теперь мы случай с множествами и временными параметрами.