0.1 Пример 1a, $\mathbb{R}^1$

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x} = u + v; \\ \dot{x} = u; \end{bmatrix} \\ u(t) \in [p_1, p_2] = \mathcal{P}; \\ v(t) \in [q_1, q_2] = \mathcal{Q}; \\ \mathcal{X}_0 = [a_1, a_2], a_1 < a_2; \\ t \in [t_0, t_1]; \\ H = \{x = c\}. \end{cases} \tag{0.1}$$

0.1.1 Вычисляем первое множество, до переключения

Вычислим множество достижимости $\mathcal{X}_1$ первого уравнения (системы) (0.1) Для $\mathcal{X}_1$ имеем:

$$\mathcal{X}[t_1] = \left(\mathcal{X}_0 \dot{-} \int\limits_{t_1}^{t_0} \mathcal{Q}(s) ds \right) + \int\limits_{t_0}^{t_1} \mathcal{P}(s) ds$$

Пусть

$$\tilde{p_1} = \int\limits_{t_0}^{t_1} p_1(s) ds; \quad \tilde{p_2} = \int\limits_{t_0}^{t_1} p_2(s) ds;$$

$$\tilde{q_1} = \int\limits_{t_1}^{t_0} q_2(s) ds; \quad \tilde{q_2} = \int\limits_{t_1}^{t_0} q_1(s) ds;$$

$$\mathcal{Q}(\tau_1, \tau_2) = \int\limits_{\tau_1}^{\tau_2} \mathcal{Q}(s) ds$$

$$\mathcal{P}(\tau_1, \tau_2) = \int\limits_{\tau_1}^{\tau_2} \mathcal{P}(s) ds$$

Тогда $\mathcal{P}(t_0, t_1) = [\tilde{p_1}, \tilde{p_2}]$, $\mathcal{Q}(t_1, t_0) = [\tilde{q_1}, \tilde{q_2}]$ Для множества $C = \big(\mathcal{X}_0 \dot{-} \mathcal{Q}(t_1, t_0)\big)$ имеем выражение

$$\rho\left(\ell \mid C\right) = \operatorname{conv}\left[\rho\left(\ell \mid \mathcal{X}_0\right) - \rho\left(\ell \mid \mathcal{Q}(t_1, t_0)\right)\right](\ell)$$

Геометрическую разность можно еще выразить как

$$A \dot{-} B = \bigcap_{\forall b \in B} (A - b)$$

Множество $C = \mathcal{X}_0 \dot{-} \mathcal{Q}(t_1, t_0)$, где $\mathcal{Q}(t_1, t_0) = [\tilde{q}_1, \tilde{q}_2]$, находится как $C = [a_1 - \tilde{q}_1, a_2 - \tilde{q}_2]$, при условии, что $a_2 - a_1 \geq \tilde{q}_2 - \tilde{q}_1$. Тогда

$$\mathcal{X}[t_1] = [a_1 - \tilde{q}_1 + \tilde{p}_1, a_2 - \tilde{q}_2 + \tilde{p}_2], \forall t_1 : a_2 - a_1 \geq \tilde{q}_2 - \tilde{q}_1$$

Вычислим тоже самое через опорные функции.

$$\rho\left(\ell \mid \mathcal{X}[t_1]\right) = \rho\left(\ell \mid \mathcal{X}_0 \dot{-} \mathcal{Q}(t_1, t_0)\right) + \rho\left(\ell \mid \mathcal{P}(t_0, t_1)\right) \tag{0.2}$$

$$\rho\left(\ell \mid \mathcal{Q}(t_1,t_0)\right) = \rho\left(\ell \mid \int\limits_{t_1}^{t_0} \mathcal{Q}(s)ds\right) = \begin{cases} \ell\tilde{q}_2 = \int\limits_{t_1}^{t_0} \ell q_1(s)ds,\ \ell \geq 0 \\ \ell\tilde{q}_1 = \int\limits_{t_1}^{t_0} \ell q_2(s)ds,\ \ell < 0 \\ t_1 > t_0,\ q_1(s) \leq q_2(s), \forall s \end{cases}.$$

Здесь всегда выполнено $\tilde{q}_1(t_0) \leq \tilde{q}_2(t_0)$.

Для $\mathbb{R}^1$ имеем: $\mathcal{X}_1 = [b_1, b_2]$, $\mathcal{X}_0 = [a_1, a_2]$, $\mathcal{P}(s) = [p_1(s), p_2(s)]$, $\mathcal{Q} = [q_1(s), q_2(s)$, $V(\tau) = [\tilde{q}_1(\tau), \tilde{q}_2]$.

Выражение (0.2) преобразуется к

$$\ell = 1 : b_2 = a_2 - \tilde{q}_2(t_0) + \tilde{p}_2(t_1)$$
$$\ell = -1 : -b_1 = -a_1 + \tilde{q}_1(t_0) - \tilde{p}_1(t_1)$$

И получаем тоже выражение $\mathcal{X}_1 = [b_1(t_1), b_2(t_2)] = [a_1 - \tilde{q}_1(t_0) + \tilde{p}_1(t_1), a_2 - \tilde{q}_2(t_0) + \tilde{p}_2(t_1)]$. Здесь $\operatorname{conv}(\rho\left(\ell \mid \mathcal{X}_0\right) \dot{-} \mathcal{Q}(t_1,t_0)) \equiv \rho\left(\ell \mid \mathcal{X}_0\right) - \rho\left(\ell \mid \mathcal{Q}(t_1,t_0)\right)$.

Поскольку $\mathcal{X}_1$ – гарантированная оценка, то она обладает тем свойством, что не зависит от помехи. Это множество позволяет нам не рассматривать зависимость от помехи v_1.

Комментарий. Меня смущает вот что: $C = \mathcal{X}_0 \dot{-} \mathcal{Q}(t_1, t_0)$ – это часть траекторий из $\mathcal{X}_0$, а $\mathcal{P}$ – это фактически то, куда пятно C может быть направлено. Если мы далее вычитаем из $\mathcal{X}_H$ некоторое случайное множество $\mathcal{Q}_2$, которое по размеру больше чем C, то получается, что гарантированной оценки не будет. То есть я предполагаю, что вычисление гарантированной оценки должно быть таким:

$$\mathcal{X}_1[t_1] = \bigcap_{\forall \tau_H} \left(\mathcal{X}_0 \dot{-} \mathcal{Q}_1(\tau,t_0) \dot{-} \mathcal{Q}_2(t_1,\tau)\right) + \mathcal{P}_1(t_0,\tau) + \mathcal{P}_2(\tau,t_1),$$

а здесь я фактически буду вычислять

$$\mathcal{X}_1[t_1] = \bigcap_{\forall \tau_H} \left[\left(\mathcal{X}_0 \dot{-} \mathcal{Q}_1(\tau,t_0)\right) + \mathcal{P}_1(t_0,\tau)\right] \dot{-} \mathcal{Q}_2(t_1,\tau) + \mathcal{P}_2(\tau,t_1)$$

Правда, как выше показано в случае $\mathbb{R}^1$, $\mathcal{X}_0 \dot{-} \mathcal{Q}_1 + \mathcal{P}_1 = \mathcal{X}_0 + \mathcal{P}_1 \dot{-} \mathcal{Q}_1$, но это верно при условии непустой геометрической разности для левого выражения. Да и переделать одно в другое, если что, не так сложно. **Конец комментария.**

0.1.2 Множество $\{\tau, \mathcal{X}_H[\tau]\}$

То, что получаем при пересечении гиперплоскости H:

$$\{(\tau, \mathcal{X}_H)\} = \{(\tau, \mathcal{X}_1[\tau] \cap H) \mid \tau : H \cap \mathcal{X}_1(\tau, t_0, \mathcal{X}_0) \neq \emptyset\}$$

Пусть требуется найти $(A+B) \cap H$. Представим $A = \bigcup\limits_{i \in I}(a^i_\perp + A^i_\parallel)$ и $B = \bigcup\limits_{i \in I}(b_\perp + B^i_\parallel)$, где $a^i_\perp \perp H$, $b^i_\perp \perp H$ и справедливо $(a \in A^i_\parallel, a \in H) \Rightarrow A^i_\parallel \subset H$, аналогично для $B^i_\parallel$. Тогда

$$(A+B) \cap H = \bigcup (A^i_\parallel + B^j_\parallel + a^i_\perp + b^j_\perp \mid \forall i \in I, j(i) \in I : a^i_\perp + b^j_\perp \in H)$$

Пусть требуется найти множество $B = \{\xi\}$, такое что $\forall \xi \in B : (\xi + A) \cap H \subset\neq \emptyset, \subset X_H$. Выполним разложение $B = \bigcup\limits_{\forall i \in I}(\xi^i = \xi^i_\perp + B^i_\parallel$, и соответственно для A. Найдем $\xi^i_\perp : (\xi^i_\perp + A^i_\parallel) \cap H \neq \emptyset$. $H = x \mid \langle x, c\rangle = q$. Тогда $d^i = \langle \xi^i_\perp, c\rangle = q - \langle a^i_\perp, c\rangle$ и $\xi^i_\perp = \frac{d^i c}{\langle c, c\rangle}$. Теперь найдем $\{B^j_\parallel\}$, $\{\xi^j_\perp\}, j \in \mathcal{J} \subset I$ для которых выполнено вложение

$$\mathcal{J} = \{i \in I \mid \exists B^i_{\|} \neq \emptyset : \xi_{\perp} + B^i_{\|} + A^i_{\|} \subseteq X_H\}$$

Поскольку $\xi^i_{\perp} + A^i_{\|} \subset H$ по построению всегда выполнено, то фактически $B^i_{\|} = X_H \dot{-} (A^i_{\|} + \xi^i_{\perp}) = (X_H - \xi^i_{\perp}) \dot{-} A^i_{\|}$.

Для $\mathbb{R}^1$ есть особенность, заключающаяся в том, что $X_H \cap H = H = x_H \in \mathbb{R}^1$, $X_H \cap H \neq \emptyset$.

$$A \cap H \subset X_H \Leftrightarrow A \cap H = H \Leftrightarrow H \subset A$$

Для $\mathcal{X}^{(1)}_1(\tau) = \{x_{\perp}\} = [b_1, b_2]$ множество моментов времени пересечения гиперплоскости $\{\tau_H\} = \{\tau \mid H = \{c\}, c \in [b_1(\tau), b_2(\tau)]\}$. **Как я полагаю, оно может быть и разрывным, если $\mathcal{X}_1(\tau)$ – ”волнистое”.**

Множество $\{\tau_H\}$ - это множество моментов времени не зависящее от помех. Очевидно, более широкое множество $\{\tau^*_H(\mathcal{Q})\}$ шире чем данное, но поскольку мы ищем гарантированную оценку $(\forall v(\cdot) \in \mathcal{Q})$, мы не можем на него полагаться.

0.1.3 Множество достижимости для второй системы

Дано начальное множество $\mathcal{X}_0 = \{\tau^{\alpha}_H, \mathcal{X}^{\alpha}_H\}$, для этого множества вычислим $\mathcal{X}_1[t_1]$. Здесь, как и прежде, гарантированная оценка множества достижимости выглядит как

$$\mathcal{X}_1[t_1] = (\mathcal{X}_0 \dot{-} \mathcal{Q}(t_1, \tau)) + \mathcal{P}(\tau, t_1)$$

Но теперь мы случай с множествами и временными параметрами.