1. Постановка задачи

Даны системы дифференциальных уравнений, описывающих состояние некоторой модели до переключения и после:

$$
\begin{cases}
\left[\begin{array}{l}
\begin{cases}
\dot{x}^{(1)} = A^{(1)}(t)x^{(1)} + B^{(1)}(t)u^{(1)}(t) + C^{(1)}(t)v(t);\\
x(t_0) \in \mathcal{E}(x_0, X_0) = \mathcal{X}^0;\\
u^{(1)}(t) \in \mathcal{E}(p^{(1)}(t), P^{(1)}(t)) \subset \mathcal{P}[t_0, t_1];\\
v^{(1)}(t) \in \mathcal{E}(w^{(1)}(t), W^{(1)}(t)) \subset \mathcal{V}[t_0, t_1];
\end{cases}\\
\\
\begin{cases}
\dot{x}^{(2)} = A^{(2)}(t)x^{(2)} + B^{(2)}(t)u^{(2)}(t) + C^{(2)}(t)f(t)^{(2)};\\
x(\tau) \in \mathcal{X}^{(1)}(\tau, t_0);\\
u^{(2)}(t) \in \mathcal{E}(p^{(2)}(t), P^{(2)}(t)) \subset \mathcal{P}[t_0, t_1];\\
v^{(2)}(t) \in \mathcal{E}(w^{(2)}(t), W^{(2)}(t)) \subset \mathcal{V}[t_0, t_1];
\end{cases}
\end{array}\right.\\
H = \{x \in \mathbb{R}^n \colon\ \langle x, c\rangle = \gamma\}\text{— гиперплоскость переключения};\\
A(t) \in \mathbb{R}^{n\times n},\ B(t) \in \mathbb{R}^{n\times m},\ C(t) \in \mathbb{R}^{n\times k};\ A(t), B(t), C(t) \in D[t_0, t_1];\\
\tau:\ \left\langle x^{(1)}(\tau), c\right\rangle - \gamma = 0.
\end{cases}
\tag{1.1}
$$

где $\mathcal{P}[t_0, t_1], \mathcal{V}[t_0, t_1]$ - класс допустимых управлений и помех. В момент времени τ, при пересечении наперед известной гиперплоскости $H = \{x \in \mathbb{R}^n \colon \langle x, c\rangle = \gamma\}$, происходит переключение систем. $v(t)$ - неизвестная функция, неопределенность, область значений которой ограничена k-мерной эллиптической областью, и принадлежащая классу интегрируемых функций $D[t_0, t_1]$. Управление $u(\cdot)$ выбирается из класса программных управлений $\mathcal{P}[t_0, t_1]$, то есть так, что оно определяется к начальному моменту t_0 заранее и уже не изменяется в зависимости от поведения системы в дальнейшем, не зависит оно и от времени переключения τ. Для решения задачи важно, чтобы система удовлетворяла свойству односторонней проницаемости, то есть чтобы при переходе через плоскость H в момент τ система

$$
\begin{cases}
\left[\begin{array}{l}
\langle \dot{x}, c\rangle \neq 0;\\
\langle x, c\rangle - \gamma \neq 0
\end{array}\right.\\
\operatorname{sign}(\left\langle \dot{x}^{(1)}(\tau), c\right\rangle) = \operatorname{sign}(\left\langle \dot{x}^{(2)}(\tau), c\right\rangle).
\end{cases}
\tag{1.2}
$$

всегда имела непустое решение. Это означает, что, во-первых, момент переключения осуществляется скачком, а во-вторых, система может пересекать эту плоскость только один раз (для момента τ) и с переходом к другой системе. Необходимо построить множество достижимости $\mathcal{X}[t, t_0]$ в классе допустимых управлений $\mathcal{P}$ для момента времени $t > t_0$ и начального множества $\mathcal{X}^0$. Таким образом, необходимо найти множество точек $\mathcal{X}[t, t_0, \mathcal{X}^0] = \{x(t)\}$, в которые система может прийти из начального множества $\mathcal{X}^0$. Мы хотим получить множество точек $\{x(t_1)\}$, о которых известно, что при любой помехе для каждой из них существует управление, такое, что множество начальных состояний $x(t_0)\mid_{x(t_1)=x}$ для каждой точки будет лежать внутри исходного начального множества $\mathcal{X}^0$

Определение 1. *Множеством достижимости* $\mathcal{X}[t, t_0]$ *задачи* (1.1) *называется пучок траекторий* $\mathcal{X}[t, t_0] = \{x(t, t_0) \mid \exists u(\cdot) :\ \forall v(\cdot), x(t_0, t_0) \in \mathcal{X}_0\}$

2. Пример

Заданы системы дифференциальных уравнений, описывающих состояние некоторой модели до переключения и после:

$$\left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \dot{x}_1^{(1)} = x_2^{(1)} + v^{(1)}(t); \\ \dot{x}_2^{(1)} = u^{(1)}(t); \\ x(t_0) \in \mathcal{X}_0 = \{x \in \mathbb{R}^2 : (x_1-2)^2 + (x_2-1)^2 \leqslant 1\}; \end{cases} \\ \\ \begin{cases} \dot{x}_1^{(2)} = x_2^{(2)} + v^{(2)}(t); \\ \dot{x}_2^{(2)} = -\gamma x_1 - \mu x_2 + u^{(2)}(t); \\ x(\tau) \in \mathcal{X}^{(1)}[\tau, t_0] \cap \mathcal{H}, \tau \leqslant t \leqslant t_1; \end{cases} \end{array}\right. \\ \\ \mathcal{H} = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1 = 0\} \text{— гиперплоскость;} \\ u^{(1)} = u^{(2)} = u(\cdot) \in [-\alpha_1, \alpha_2] = \mathcal{P}[t_0, t_1]; \\ v^{(1)} = v^{(2)} = v(\cdot) \in [-\beta_1, \beta_2] \in \mathcal{W}[t_0, t_1]; \\ \gamma, \mu, \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 > 0 \text{— некоторые константы;} \\ \tau \text{ — момент переключения, при пересечении гиперплоскости.} \end{array}\right. \tag{2.1}$$

Для поиска множества $\mathcal{X}[t, t_0]$ будем использовать функцию цены

$$V(t,x) = \min_{u(\cdot)} \max_{v(\cdot)} d^2(x_0, \mathcal{X}_0) \mid_{x(t)=x}$$

где $d(x_0, \mathcal{X}_0)$ - расстояние между точкой x_0 и множеством $\mathcal{X}_0$, определяемое метрикой $d(x, \mathcal{X}) = \min_{y \in \mathcal{X}} \|x - y\|$.

Пусть $\phi(x) = d^2(x_0, \mathcal{X}_0)$, сопряженная к ней:

$$\phi^*(\ell) = \sup_x (\langle x, \ell \rangle - d^2(x, \mathcal{X}_0)) = \rho(\ell \mid \mathcal{X}_0) + \frac{\|\ell\|^2}{4},$$

тогда

$$V(t,x) = \min_{u(\cdot)} \max_{v(\cdot)} \sup_{\ell} \left(\langle \ell, x_0 \rangle - \rho(\ell \mid \mathcal{X}_0) - \frac{\|\ell\|^2}{4} \right). \tag{2.2}$$

Найдем выражения для поиска $x_0 \mid_{x(t_1)=x}$. Пусть траектория точки в момент t_1 известна $x(t_1) = x$. Идя в обратном времени, найдем её значение в момент $t \leqslant t_1$ при известных $B(s), C(s), u(s), v(s)$ до переключения:

$$x^{(2)}(t,x,u,v) = G_2(t,t_1)x + \int\limits_{t_1}^{t} G_2(t,s)\left[B_2(s)u_2(s) + C_2(s)v_2(s)\right] ds, \text{при}\, \tau \leqslant t \leqslant t_1,$$

и после для $t \leqslant \tau$:

$$\begin{aligned} x^{(2,1)}(t,\tau,x,u,v) =& G_1(t,\tau)G_2(\tau,t_1)x + G_1(t,\tau)\int\limits_{t_1}^{\tau} G_2(t,s)\left[B_2(s)u_2(s) + C_2(s)v_2(s)\right] ds + \\ &+ \int\limits_{\tau}^{t_0} G_1(t,s)\left[B_1(s)u_1(s) + C_1(s)v_1(s)\right] ds\,,\ \text{при}\, t_0 \leqslant t \leqslant \tau. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Нам необходимо, чтобы момент τ в этих выражениях удовлетворял условию пересечения, так чтобы $\langle x(\tau), c\rangle = \gamma$. Поскольку $\mathcal{X}[t,t_0] = \{x \mid V(t,x) \leqslant 0\}, \forall t \in [t_0,t_1]$, то достаточно ввести штрафующий член $(\langle x(\tau), c\rangle - \gamma)^2$ в выражение для $V(t,x)$, тем самым обеспечивая для $\mathcal{X}[t,t_0]$ включение только тех траекторий, которые удовлетворяют нашим двум системам и условию на момент переключения.

Поскольку мы рассматриваем задачу в классе программных управлений, мы не можем строить управление в зависимости от текущего состояния системы, а только заранее его определять. Поэтому, в формуле для $V(t,x)$ нельзя проводить оптимизацию отдельно для "до" и "после", так как момент переключения τ не известен заранее.

$$V(t,x) = \min_{u_1,u_2\in\mathcal{P}} \max_{v_1,v_2\in\mathcal{W}} \max_{\tau} \left\{ d^2(x_0|_{x(t)=x}, \mathcal{X}_0) + (\langle x(\tau), c\rangle - \gamma)^2 \right\}.$$

Пока примем $\gamma = 0$. Для линеаризации условия на переключение сделаем подстановку

$$\langle x, c\rangle^2 \equiv \max_{\mu} \left\{ \mu \langle x, c\rangle - \frac{\mu^2}{4} \right\},$$

и, используя (2.2), имеем

$$V(t,x) = \min_{u_1,u_2\in\mathcal{P}} \max_{v_1,v_2\in\mathcal{W}} \max_{\tau} \left\{ \max_{\ell} \max_{\mu} \left\{ \left\langle \ell, x_0 \mid_{x(t)=x} \right\rangle + \mu \langle x(\tau), c\rangle - \frac{\mu^2}{4} - \rho(\ell \mid \mathcal{X}_0) - \frac{\|\ell\|^2}{4} \right\} \right\}.$$

Раскрывая (2.3), получим

$$\begin{gathered}
V(t,x) = \min_{u_1,u_2} \max_{v_1,v_2} \min_{\tau\in[t_0,t]} \max_{\ell} \max_{\mu} \{ \\
\langle \ell, G_1(t_0,\tau)G_2(\tau,t)x\rangle + \int_t^{\tau} \langle \ell, G_1(t_0,\tau)G_2(\tau,s)\left[B_2(s)u_2(s) + C_2(s)v_2(s)\right]\rangle \, ds + \\
+ \int_{\tau}^{t_0} \langle \ell, G_1(t_0,s)\left[B_1(s)u_1(s) + C_1(s)v_1(s)\right]\rangle \, ds + \mu \langle c, G_2(\tau,t)x\rangle + \\
+\mu \int_t^{\tau} \langle c, G_2(\tau,s)\left[B_2(s)u_2(s) + C_2(s)v_2(s)\right]\rangle \, ds - \\
-\frac{\mu^2}{4} - \rho(\ell \mid \mathcal{X}_0) - \frac{\|\ell\|^2}{4} \}
\end{gathered}$$

Сгруппируем слагаемые

$$\begin{aligned}
\tilde{S}(\tau,t) &= G_2^T(\tau,t)G_1^T(t_0,\tau)\ell + \mu G_2^T(\tau,t)c, \\
\tilde{S}_1(t_0,\tau) &= G_1^T(t_0,\tau)\ell,
\end{aligned}$$

имеем

$$\begin{gathered}
V(t,x) = \min_{u_1,u_2} \max_{v_1,v_2} \min_{\tau\in[t_0,t]} \max_{\ell} \max_{\mu} \{ \\
\tilde{S}^T(\tau,t)x + \int_t^{\tau} \tilde{S}^T(\tau,s)\left[B_2(s)u_2(s) + C_2(s)v_2(s)\right] \, ds + \\
+ \int_{\tau}^{t_0} \tilde{S}_1^T(t_0,s)\left[B_1(s)u_1(s) + C_1(s)v_1(s)\right] \, ds - \\
-\frac{\mu^2}{4} - \rho(\ell \mid \mathcal{X}_0) - \frac{\|\ell\|^2}{4} \}
\end{gathered} \tag{2.4}$$

Чтобы эффективно вычислять множества достижимости используется прием, который позволяет заменить поиск множества допустимых траекторий вычислением опорной функции к этому множетсву. Для перехода к опорным функциям требуется менять местами порядок минимумов и максимумов в (2.4), а для этого необходимо выполнение условий теоремы минимакса. Поэтому дальнейшие преобразования выполняются с целью обеспечения этих условий. Одним из достаточных условий перестановки является линейность по минимизирующему или максимизирующему параметру. Наша цель состоим в том, чтобы перенести операции минимума по u_1, u_2 и максимума по v_1, v_2 внутрь выражения функции цены, тем самым сводя минимизацию/максимизацию на функциональном пространстве $\mathcal{P}, \mathcal{W}$ к поиску экстремумов для выпуклых(вогнутых) функций. Первыми меняются местами $\max_{v_1,v_2} \min_\tau(\cdot) = \min_\tau \max_{v_1,v_2}(\cdot)$. Для примера, сначала рассмотрим функционал

$$T(\tau, v(s)) = \int\limits_t^\tau v(s)ds$$

Легко видеть, что $T(\tau, v(s))$, являясь линейным по v, не является таковым по τ. Тогда вместо τ возьмем функцию ограниченной вариации $\tau(w) = \phi(w)$ и преобразуем

$$T(\phi(w), v(s)) = \int\limits_{t_0}^t d\phi(w) \int\limits_t^w v(s)ds.$$

Теперь функционал $T(\phi, v)$ является линейным по всем аргументам.

Аналогично поступим с $V(t, x)$:

$$V(t,x) = \min_{u_1,u_2} \max_{v_1,v_2} \min_{\phi(w)} \max_{\ell(w)} \max_{\mu(w)} \int\limits_{t_0}^t d\phi(w) \Bigg\{$$

$$\tilde{S}^T(w,t)x + \int\limits_t^w \tilde{S}^T(w,s) \left[B_2(s)u_2(s) + C_2(s)v_2(s)\right] ds +$$

$$+ \int\limits_w^{t_0} \tilde{S}_1^T(t_0,s) \left[B_1(s)u_1(s) + C_1(s)v_1(s)\right] ds -$$

$$- \frac{\mu^2}{4} - \rho(\ell \mid \mathcal{X}_0) - \frac{\|\ell\|^2}{4} \Bigg\},$$

Поскольку мы здесь воспользовались перестановкой

$$\int \max_{\ell,\mu} f(w,\ell,\mu) d\phi(w) = \max_{\ell(w),\mu(w)} \int f(w, \ell(w), \mu(w)) d\phi(w)$$

ℓ, μ теперь функции от w, $\ell = \ell(w)$ и $\mu = \mu(w)$. Можно заметить, что от w зависят только переменные $\tilde{S}, \tilde{S}_1$ и пределы интегрирования. Поменяем порядок интегрирования, чтобы собрать вместе члены, зависящие от w. Применяя правила замены

$$\int\limits_{t_0}^t d\phi(w) \int\limits_t^w ds(\cdot) = \int\limits_t^{t_0} ds \int\limits_{t_0}^s d\phi(w)(\cdot),$$

$$\int\limits_{t_0}^t d\phi(w) \int\limits_w^{t_0} ds(\cdot) = \int\limits_t^{t_0} ds \int\limits_s^t d\phi(w)(\cdot),$$

и делая замену переменных

$$
\begin{aligned}
S(t_0,t_1) &= \int\limits_{t_0}^{t_1} \tilde S(w,t_1)\,d\phi(w) = \int\limits_{t_1}^{t_0} \left\{G_2^T(w,t)G_1^T(t_0,w)\ell(w) + \mu(w)G_2^T(w,t)c\right\}\,d\phi(w),\\
S_1(t_0,t_1) &= \int\limits_{t_0}^{t_1} \tilde S_1(t_0,w)\,d\phi(w), = \int\limits_{t_0}^{t_1} \left\{G_1^T(t_0,w)\ell(w)\right\}\,d\phi(w),\\
K(\ell,\mu,\mathcal{X}_0) &= \int\limits_{t_0}^{t} \left[\frac{\mu(w)^2}{4} + \rho(\ell(w)\mid \mathcal{X}_0) + \frac{\|\ell(w)\|^2}{4}\right]\,d\phi(w)
\end{aligned}
$$

придем к

$$
\begin{gathered}
V(t,x) = \min_{u_1,u_2}\max_{v_1,v_2}\min_{\phi(w)}\max_{\ell(w)}\max_{\mu(w)}\Bigg\{\\
S^T(t_0,t)x + \int\limits_{t}^{t_0} S^T(t_0,s)\left[B_2(s)u_2(s) + C_2(s)v_2(s)\right]\,ds+\\
+\int\limits_{t}^{t_0} S_1^T(s,t)\left[B_1(s)u_1(s) + C_1(s)v_1(s)\right]\,ds-\\
-K(\ell,\mu,\mathcal{X}_0)\Bigg\},
\end{gathered}
\tag{2.5}
$$

где $K(\ell,\mu,\mathcal{X}_0)$ – выпуклая функция.

Будем искать опорную функцию к множеству достижимости $\mathcal{X}[t,\mathcal{X}_0]$, определяемому по найденному выше выражению (2.5) для $V(t,x)$. Пользуясь линейностью по ϕ, теперь можно переставить

$$
\max_{v_1,v_2}\min_{\phi}\max_{\ell}\max_{\mu}(\cdot) = \min_{\phi}\max_{\ell}\max_{\mu}\max_{v_1,v_2}(\cdot),
$$

и

$$
\max_{v(\cdot)}\int\limits_{t}^{t_0} f(v(s))ds = \max_{v(\cdot)}\int\limits_{t_0}^{t} -f(v(s))ds = \int\limits_{t_0}^{t} \max_{v(s)}[-f(v(s))]ds
$$

тогда

$$
\begin{gathered}
V(t,x) = \min_{u_1,u_2}\min_{\phi}\max_{\ell}\max_{\mu}\Bigg\{\\
S^T(t_0,t)x + \int\limits_{t}^{t_0} S^T(t_0,s)B_2(s)u_2(s)\,ds + \int\limits_{t_0}^{t} \rho(-S^T(t_0,s)\mid C_2(s)\mathcal{W}_2(s))\,ds\\
+\int\limits_{t}^{t_0} S_1^T(s,t)B_1(s)u_1(s) + \int\limits_{t_0}^{t} \rho(-S_1^T(s,t)\mid C_1(s)\mathcal{W}_1)\,ds-\\
-K(\ell,\mu,\mathcal{X}_0)\Bigg\}.
\end{gathered}
$$

Далее, мы хотим поменять $\min_{u_1,u_2}(\cdot)$ на опорную функцию, но полученное выше выражение уже не является вогнутым по ℓ,μ. Поэтому, мы прибегаем к овыпуклению нужных членов и приходим к

$$V(t,x)=\min_{\phi}\max_{\ell}\max_{\mu}\Bigg\{$$

$$S^T(t_0,t)x-\int\limits_{t_0}^{t}\rho(S_1(s,t)\mid B_1(s)\mathcal{P}_1(s))\,ds-\int\limits_{t_0}^{t}\rho(S(t_0,s)\mid B_2(s)\mathcal{P}_2(s))\,ds-$$

$$-\mathrm{conv}\left\{-\int\limits_{-t_0}^{t}\rho(-S_1(s,t)\mid C_1(s)\mathcal{W}_1(s))\,ds-\int\limits_{t_0}^{t}\rho(-S(t_0,s)\mid C_2(s)\mathcal{W}_2(s))\,ds+K(\ell,\mu,\mathcal{X}_0)\right\}\Bigg\}.$$

$$V(t,x)=\min_{\phi}\max_{\ell}\max_{\mu}\Bigg\{$$

$$S^T(t_0,t)x-\int\limits_{t_0}^{t}\rho(S_1(s,t)\mid B_1(s)\mathcal{P}_1(s))\,ds-\int\limits_{t_0}^{t}\rho(S(t_0,s)\mid B_2(s)\mathcal{P}_2(s))\,ds-$$

$$-\mathrm{conv}\left\{-\int\limits_{t_0}^{t}\rho(-S_1(s,t)\mid C_1(s)\mathcal{W}_1(s))\,ds-\int\limits_{t_0}^{t}\rho(-S(t_0,s)\mid C_2(s)\mathcal{W}_2(s))\,ds+K(\ell,\mu,\mathcal{X}_0)\right\}\Bigg\}.$$

Утверждение 1.

$$conv\int\limits_{t_0}^{t}f(x(t))dt=\int\limits_{t_0}^{t}convf(x(t))dt$$

Примем

$$conv(f)=f^{**}$$

Тогда

$$\left(\int\limits_{t_0}^{t}f(x(s))ds\right)^*(\ell(t))=\max_{x(\cdot)}\left(\langle\ell,x\rangle_{L_2}-\int\limits_{t_0}^{t}f(x(s))ds\right)$$

$$\left(\int\limits_{t_0}^{t}f(x(t))dt\right)^{**}(y(t))=\max_{\ell(\cdot)}\left(\langle y,\ell\rangle_{L_2}-\max_{x(\cdot)}\left(\langle\ell,x\rangle_{L_2}-\int\limits_{t_0}^{t}f(x(s))ds\right)\right)=$$

$$=\max_{\ell(\cdot)}\min_{x(\cdot)}\left(\langle y,\ell\rangle_{L_2}-\langle\ell,x\rangle_{L_2}+\int\limits_{t_0}^{t}f(x(s))ds\right)=$$

$$=\max_{\ell(\cdot)}\min_{x(\cdot)}\int\limits_{t_0}^{t}\left[\langle y(s),\ell(s)\rangle-\langle\ell(s),x(s)\rangle+f(x(s))\right]ds=$$

$$=\int\limits_{t_0}^{t}\max_{\ell(s)}\min_{x(s)}\left[\langle y(s),\ell(s)\rangle-\langle\ell(s),x(s)\rangle+f(x(s))\right]ds=$$

$$=\int\limits_{t_0}^{t}\max_{\ell(s)}\left[\langle y(s),\ell(s)\rangle-\max_{x(s)}\left\{\langle\ell(s),x(s)\rangle-f(x(s))\right\}\right]ds=$$

$$= \int\limits_{t_0}^{t} f^{**}(s)ds$$

■

Утверждение 2.

$$\max_{x(\cdot)} \int\limits_{t_0}^{t} f(x(s))ds = \int\limits_{t_0}^{t} \max_{x(s)} f(x(s))ds$$

Пусть

$$x^*(\cdot) = \arg\max_{x(\cdot)} \int\limits_{t_0}^{t} f(x(s))ds$$

$$x^\circ(\cdot) : \int\limits_{t_0}^{t} f(x^\circ(s)) = \int\limits_{t_0}^{t} \max_{x(s)} f(x(s))ds.$$

Предположим, что $x^*(\cdot) \neq x^\circ(\cdot)$ и $\int\limits_{t_0}^{t} f(x^*(s))ds \neq \int\limits_{t_0}^{t} f(x^\circ(s))ds$.
Тогда для выражения $m(s) = f(x^*(s)) - f(x^\circ(s))$ можно указать непересекающиеся отрезки $T_<, T_>, T_=$, на которых выполняются неравенства

$$\forall s \in T_< : \, m(s) < 0, \; \forall s \in T_> : \, m(s) > 0, \; \forall s \in T_= : \, m(s) = 0.$$

Для $T_>$ получаем, что

$$\forall s \in T_> : f(x^*(s)) > f(x^\circ(s)) = max_{x(s)} f(x(s)$$

– противоречие,
Для $T_<$ получаем, что

$$max_{x(\cdot)} \int\limits_{T_<} f(x(s))ds = \int\limits_{T_<} f(x^*(s))ds < \int\limits_{T_<} f(x^\circ(s))ds$$

– противоречие,
Остается единственный вариант, который и доказывает утверждение. ■

Рассмотрим примеры в $\mathbb{R}^1$

Пример 1.

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} \dot{x} = 2u + v; \\ \dot{x} = u; \end{array} \right. \\ u \in [0, 1]; \\ v \in [0, 1]; \\ \mathcal{X}_0 = \{x \in [-2, -1]\}; \\ t \in [0, 4]; \\ H = \{x = 0\}. \end{cases} \tag{2.6}$$

Пример 2.

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} \dot{x} = u; \\ \dot{x} = 2u + v; \end{array}\right. \\ u \in [0,1]; \\ v \in [0,1]; \\ \mathcal{X}_0 = \{x \in [-2,-1]\}; \\ t \in [0,4]; \\ H = \{x = 0\}. \end{cases} \tag{2.7}$$

Начальные условия для (2.6) и (2.7) одинаковы. Функция цены для задач (2.6) и (2.7).

$$V(t,x) = \min_u \max_v \max_\tau \max_\ell \max_\mu \left\{ \left\langle \ell, x_0 \mid_{x(t)=x} \right\rangle - \rho(\ell \mid \mathcal{X}_0) - \frac{\|\ell\|^2}{4} + \mu \left\langle x(\tau), c \right\rangle - \frac{\mu^2}{4} \right\}.$$

В одномерном случае, если рассматривать отрезок $[\alpha, \beta]$ как эллипсоид $\mathcal{E}(q,Q)$, то $q = \frac{\beta+\alpha}{2}$, $Q = \left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right)^2$. Тогда

$$\rho\left(\ell \mid \mathcal{E}(()q,Q)\right) = \langle \ell, q \rangle + \langle \ell, Q\ell \rangle^{\frac{1}{2}} = \ell \cdot q + \mid \ell \mid \sqrt{Q}.$$

Поскольку в уравнениях примеров (2.6) и (2.7) фундаментальные матрицы $G(t,t_0) \equiv I$, $c = 1$, то можно написать

$$V(t,x) = \min_u \max_v \min_\tau \max_\ell \max_\mu \big\{ \ell \cdot x + \int\limits_t^\tau \ell \cdot [B_2 u_2 + v_2] ds + \int\limits_\tau^{t_0} \ell \cdot [B_1 u_1 + v_1] ds -$$

$$-(\ell \cdot x_0 + \mid \ell \mid \sqrt{X_0}) - \frac{\ell^2}{4} + \mu \big[x + \int\limits_t^\tau [B_2 u_2 + v_2] ds \big] - \frac{\mu^2}{4} \big\}.$$

Здесь $\mathcal{X}_0 = \mathcal{E}(x_0, X_0)$, для (2.6) $v_2 \equiv 0$, для (2.7) $v_1 \equiv 0$. Если сократить, то получим для (2.6):

$$V(t,x) = \min_u \max_v \min_\tau \max_\ell \max_\mu \big\{ (\ell + \mu) x + \int\limits_t^\tau (\ell + \mu) B_2 u_2 ds + \int\limits_\tau^{t_0} \ell B_1 u_1 ds + \int\limits_\tau^{t_0} \ell v_1 ds -$$

$$-(\ell \cdot x_0 + \mid \ell \mid \sqrt{X_0}) - \frac{\ell^2}{4} - \frac{\mu^2}{4} \big\}.$$

Для (2.7)

$$V(t,x) = \min_u \max_v \min_\tau \max_\ell \max_\mu \big\{ (\ell + \mu) x + \int\limits_t^\tau (\ell + \mu) B_2 u_2 ds + \int\limits_t^\tau (\ell + \mu) v_2 ds + \int\limits_\tau^{t_0} \ell B_1 u_1 ds -$$

$$-(\ell \cdot x_0 + \mid \ell \mid \sqrt{X_0}) - \frac{\ell^2}{4} - \frac{\mu^2}{4} \big\}.$$

Эти выражения не являются выпуклыми по τ, чтобы можно было переставлять $\max_v \min_\tau$. Поэтому прибегаем к функции распределения $\phi(w)$. $\phi(w)$ – функция ограниченной вариации.

$$\int_{t_0}^{t} d\phi(w) = 1.$$

Обозначим

$$S_2(t_0, s) = \int_{t_0}^{s} \ell(w) + \mu(w) d\phi(w)$$

$$S_1(s, t) = \int_{s}^{t} \ell(w) d\phi(w)$$

Тогда приходим к найденному ранее выражению (2.). Используя формулу вычисления опорной функции для множеств из $\mathbb{R}^1$ запишем

$$V(t, x) = \min_{\phi} \max_{\ell} \max_{\mu} \Bigg\{$$

$$S_2(t_0, t)x - \int_{t_0}^{t} S_1(s, t)p_1 + \mid S_1(s, t) \mid \sqrt{P_1} ds - \int_{t_0}^{t} S_2(t_0, s)p_2 + \mid S_2(t_0, s) \mid \sqrt{P_2}\, ds -$$

$$-\mathrm{conv}\Bigg\{ \int_{t_0}^{t} w_1 S_1(s, t) - \sqrt{W_1} \mid \; S_1(s, t) \mid + w_2 S_2(t_0, s) - \sqrt{W_2} \mid S_2(t_0, s) \mid \; ds +$$

$$+ \int_{t_0}^{t} \frac{\ell^2(w)}{4} + \frac{\mu^2(w)}{4} + \ell(w)x_0 + \mid \ell(w) \mid \sqrt{X_0}\, d\phi(w) \Bigg\} \Bigg\}.$$