1. Пример

Заданы системы дифференциальных уравнений, описывающих состояние некоторой модели до переключения и после:

$$
\begin{cases}
\left[
\begin{array}{l}
\begin{cases}
\dot{x}_1^{(1)} = x_2^{(1)} + v^{(1)}(t);\\
\dot{x}_2^{(1)} = u^{(1)}(t);\\
x(t_0) \in \mathcal{X}_0 = \{x \in \mathbb{R}^2 : (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 1)^2 \leqslant 1\};
\end{cases}\\
\\
\begin{cases}
\dot{x}_1^{(2)} = x_2^{(2)} + v^{(2)}(t);\\
\dot{x}_2^{(2)} = -\gamma x_1 - \mu x_2 + u^{(2)}(t);\\
x(\tau) \in \mathcal{X}^{(1)}[\tau, t_0] \cap \mathcal{H}, \tau \leqslant t \leqslant t_1;
\end{cases}
\end{array}
\right.\\
\\
\mathcal{H} = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1 = 0\} \text{— гиперплоскость;}\\
u(\cdot) \in [-\alpha_1, \alpha_2] = \mathcal{P}[t_0, t_1],\ v(\cdot) \in [-\beta_1, \beta_2] \in \mathcal{W}[t_0, t_1];\\
\gamma, \mu, \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 > 0 \text{— некоторые константы;}\\
\tau \text{ — момент переключения, при пересечении гиперплоскости.}
\end{cases}
\tag{1.1}
$$

Для поиска множества $\mathcal{X}[t, t_0]$ будем использовать функцию цены

$$V(t, x) = \min_{u(\cdot)} \max_{v(\cdot)} d^2(x_0, \mathcal{X}_0) \mid_{x(t)=x}$$

где $d(x_0, \mathcal{X}_0)$ - расстояние между точкой x_0 и множеством $\mathcal{X}_0$, определяемое метрикой $d(x, \mathcal{X}) = \min_{y \in \mathcal{X}} \|x - y\|$.

Пусть $\phi(x) = d^2(x_0, \mathcal{X}_0)$, сопряженная к ней:

$$\phi^*(\ell) = \sup_x (\langle x, \ell \rangle - d^2(x, \mathcal{X}_0)) = \rho(\ell \mid \mathcal{X}_0) + \frac{\|\ell\|^2}{4},$$

тогда

$$V(t, x) = \min_{u(\cdot)} \max_{v(\cdot)} \sup_{\ell} \left(\langle \ell, x_0 \rangle - \rho(\ell \mid \mathcal{X}_0) - \frac{\|\ell\|^2}{4} \right). \tag{1.2}$$

Найдем выражения для поиска $x_0 \mid_{x(t_1)=x}$. Пусть траектория точки в момент t_1 известна $x(t_1) = x$. Идя в обратном времени, найдем её значение в момент $t \leqslant t_1$ при известных $B(s), C(s), u(s), v(s)$ до переключения:

$$x^{(2)}(t, x, u, v) = G_2(t, t_1)x + \int_{t_1}^{t} G_2(t, s)\left[B_2(s)u_2(s) + C_2(s)v_2(s)\right] ds, \text{при } \tau \leqslant t \leqslant t_1,$$

и после:

$$
\begin{aligned}
x^{(2,1)}(t, \tau, x, u, v) =& G_1(t, \tau)G_2(\tau, t_1)x + G_1(t, \tau)\int_{t_1}^{\tau} G_2(t, s)\left[B_2(s)u_2(s) + C_2(s)v_2(s)\right] ds +\\
&+ \int_{\tau}^{t_0} G_1(t, s)\left[B_1(s)u_1(s) + C_1(s)v_1(s)\right] ds\,, \text{ при } t_0 \leqslant t \leqslant \tau.
\end{aligned}
\tag{1.3}
$$

Нам необходимо, чтобы момент τ в этих выражениях удовлетворял условию пересечения, так чтобы $\langle x(\tau), c\rangle = \gamma$. Поскольку $\mathcal{X}[t,t_0] = \{x \mid V(t,x) \leqslant 0\}, \forall t \in [t_0, t_1]$, то достаточно ввести штрафующий член $(\langle x(\tau), c\rangle - \gamma)^2$ в выражение для $V(t,x)$, тем самым обеспечивая для $\mathcal{X}[t,t_0]$ включение только тех траекторий, которые удовлетворяют нашим двум системам и условию на момент переключения.

Поскольку мы рассматриваем задачу в классе программных управлений, мы не можем строить управление в зависимости от текущего состояния системы, а только заранее его определять. Поэтому, в формуле для $V(t,x)$ нельзя проводить оптимизацию отдельно для "до" и "после", так как момент переключения τ не известен заранее.

$$V(t,x) = \min_{u_1,u_2\in\mathcal{P}} \max_{v_1,v_2\in\mathcal{W}} \max_{\tau} \left\{ d^2(x_0|_{x(t)=x}, \mathcal{X}_0) + (\langle x(\tau), c\rangle - \gamma)^2 \right\}.$$

Пока примем $\gamma = 0$. Для линеаризации условия на переключение сделаем подстановку

$$\langle x, c\rangle^2 \equiv \max_{\mu} \left\{ \mu \langle x, c\rangle - \frac{\mu^2}{4} \right\},$$

и, используя (1.2), имеем

$$V(t,x) = \min_{u_1,u_2\in\mathcal{P}} \max_{v_1,v_2\in\mathcal{W}} \max_{\tau} \left\{ \max_{\ell} \max_{\mu} \left\{ \left\langle \ell, x_0 \mid_{x(t)=x} \right\rangle + \mu \langle x(\tau), c\rangle - \frac{\mu^2}{4} - \rho(\ell \mid \mathcal{X}_0) - \frac{\|\ell\|^2}{4} \right\} \right\}.$$

Раскрывая (1.3), получим

$$\begin{gathered} V(t,x) = \min_{u_1,u_2} \max_{v_1,v_2} \min_{\tau\in[t_0,t]} \max_{\ell} \max_{\mu} \{ \\ \langle \ell, G_1(t_0,\tau) G_2(\tau,t) x\rangle + \int_t^{\tau} \langle \ell, G_1(t_0,\tau) G_2(\tau,s) \left[B_2(s)u_2(s) + C_2(s)v_2(s)\right]\rangle \, ds + \\ + \int_{\tau}^{t_0} \langle \ell, G_1(t_0,s) \left[B_1(s)u_1(s) + C_1(s)v_1(s)\right]\rangle \, ds + \mu \langle c, G_2(\tau,t)x\rangle + \\ + \mu \int_t^{\tau} \langle c, G_2(\tau,s) \left[B_2(s)u_2(s) + C_2(s)v_2(s)\right]\rangle \, ds - \\ - \frac{\mu^2}{4} - \rho(\ell \mid \mathcal{X}_0) - \frac{\|\ell\|^2}{4} \} \end{gathered}$$

Сгруппируем слагаемые

$$\begin{aligned} \tilde{S}(\tau,t) &= G_2^T(\tau,t) G_1^T(t_0,\tau)\ell + \mu G_2^T(\tau,t)c, \\ \tilde{S}_1(t_0,\tau) &= G_1^T(t_0,\tau)\ell, \end{aligned}$$

имеем

$$\begin{gathered} V(t,x) = \min_{u_1,u_2} \max_{v_1,v_2} \min_{\tau\in[t_0,t]} \max_{\ell} \max_{\mu} \{ \\ \tilde{S}^T(\tau,t)x + \int_t^{\tau} \tilde{S}^T(\tau,s) \left[B_2(s)u_2(s) + C_2(s)v_2(s)\right] \, ds + \\ + \int_{\tau}^{t_0} \tilde{S}_1^T(t_0,s) \left[B_1(s)u_1(s) + C_1(s)v_1(s)\right] \, ds - \\ - \frac{\mu^2}{4} - \rho(\ell \mid \mathcal{X}_0) - \frac{\|\ell\|^2}{4} \} \end{gathered} \tag{1.4}$$

Чтобы эффективно вычислять множества достижимости используется прием, который позволяет заменить поиск множества допустимых траекторий вычислением опорной функции к этому множетсву. Для перехода к опорным функциям требуется менять местами порядок минимумов и максимумов в (1.4), а для этого необходимо выполнение условий теоремы минимакса. Поэтому дальнейшие преобразования выполняются с целью обеспечения этих условий. Одним из достаточных условий перестановки является линейность по минимизирующему или максимизирующему параметру. Наша цель состоим в том, чтобы перенести операции минимума по u_1, u_2 и максимума по v_1, v_2 внутрь выражения функции цены, тем самым сводя минимизацию/максимизацию на функциональном пространстве $\mathcal{P}, \mathcal{W}$ к поиску экстремумов для выпуклых(вогнутых) функций. Первыми меняются местами $\max_{v_1,v_2} \min_\tau(\cdot) = \min_\tau \max_{v_1,v_2}(\cdot)$. Для примера, сначала рассмотрим функционал

$$T(\tau, v(s)) = \int\limits_t^\tau v(s)ds$$

Легко видеть, что $T(\tau, v(s))$, являясь линейным по v, не является таковым по τ. Тогда вместо τ возьмем функцию $\tau(w) = \phi(w)$ и преобразуем

$$T(\phi(w), v(s)) = \int\limits_{t_0}^t \phi(w)dw \int\limits_t^w v(s)ds.$$

Мы подразумеваем здесь, что $\phi(w) = \delta(w)$. Теперь функционал $T(\phi, v)$ является линейным по всем аргументам.

Аналогично поступим с $V(t, x)$:

$$V(t,x) = \min_{u_1,u_2} \max_{v_1,v_2} \min_{\phi(w)} \max_{\ell(w)} \max_{\mu(w)} \int\limits_{t_0}^t \phi(w) \Bigg\{$$

$$\tilde{S}^T(w,t)x + \int\limits_t^w \tilde{S}^T(w,s)\left[B_2(s)u_2(s) + C_2(s)v_2(s)\right] ds +$$

$$+ \int\limits_w^{t_0} \tilde{S}_1^T(t_0,s)\left[B_1(s)u_1(s) + C_1(s)v_1(s)\right] ds -$$

$$-\frac{\mu^2}{4} - \rho(\ell \mid \mathcal{X}_0) - \frac{\|\ell\|^2}{4} \Bigg\} dw,$$

Поскольку мы здесь воспользовались перестановкой

$$\int \max_{\ell,\mu} f(w,\ell,\mu)dw = \max_{\ell(w),\mu(w)} \int f(w,\ell(w),\mu(w))dw,$$

ℓ, μ теперь функции от w, $\ell = \ell(w)$ и $\mu = \mu(w)$. Можно заметить, что от w зависят только переменные $\tilde{S}, \tilde{S}_1$ и пределы интегрирования. Поменяем порядок интегрирования, чтобы собрать вместе члены, зависящие от w. Применяя правила замены

$$\int\limits_{t_0}^t dw \int\limits_t^w ds(\cdot) = \int\limits_t^{t_0} ds \int\limits_{t_0}^s dw(\cdot),$$

$$\int\limits_{t_0}^{t} dw \int\limits_{w}^{t_0} ds(\cdot) = \int\limits_{t}^{t_0} ds \int\limits_{s}^{t} dw(\cdot),$$

и делая замену переменных

$$S(t_0,t_1) = \int\limits_{t_0}^{t_1} \phi(w)\tilde{S}(w,t_1)\,dw = \int\limits_{t_1}^{t_0} \phi(w)\left\{G_1^T(t_0,w)G_2^T(w,t)\ell(w) + \mu(w)G_2^T(w,t)c\right\}\,dw,$$

$$S_1(t_0,t_1) = \int\limits_{t_0}^{t_1} \phi(w)\tilde{S}_1(t_0,w)\,dw, = \int\limits_{t_0}^{t_1} \phi(w)\left\{G_1^T(t_0,w)\ell(w)\right\}\,dw,$$

$$K(\ell,\mu,\mathcal{X}_0) = \int\limits_{t_0}^{t} \phi(w)\left[\frac{\mu(w)^2}{4} + \rho(\ell(w)\mid\mathcal{X}_0) + \frac{\|\ell(w)\|^2}{4}\right]\,dw$$

придем к

$$\begin{gathered} V(t,x) = \min_{u_1,u_2}\max_{v_1,v_2}\min_{\phi(w)}\max_{\ell(w)}\max_{\mu(w)}\Bigg\{ \\ S^T(t_0,t)x + \int\limits_{t}^{t_0} S^T(t_0,s)\left[B_2(s)u_2(s) + C_2(s)v_2(s)\right]\,ds + \\ + \int\limits_{t}^{t_0} S_1^T(s,t)\left[B_1(s)u_1(s) + C_1(s)v_1(s)\right]\,ds - \\ -K(\ell,\mu,\mathcal{X}_0)\Bigg\}, \end{gathered} \tag{1.5}$$

где $K(\ell,\mu,\mathcal{X}_0)$ – выпуклая функция.

Будем искать опорную функцию к множеству достижимости $\mathcal{X}[t,\mathcal{X}_0]$, определяемому по найденному выше выражению (1.5) для $V(t,x)$. Пользуясь линейностью по ϕ, теперь можно переставить

$$\max_{v_1,v_2}\min_{\phi}\max_{\ell}\max_{\mu}(\cdot) = \min_{\phi}\max_{\ell}\max_{\mu}\max_{v_1,v_2}(\cdot),$$

тогда получим

$$\begin{gathered} V(t,x) = \min_{u_1,u_2}\min_{\phi}\max_{\ell}\max_{\mu}\Bigg\{ \\ S^T(t_0,t)x + \int\limits_{t}^{t_0} S^T(t_0,s)B_2(s)u_2(s)\,ds + \int\limits_{t}^{t_0} \rho(S^T(t_0,s)\mid C_2(s)\mathcal{W}_2(s))\,ds \\ + \int\limits_{t}^{t_0} S_1^T(s,t)B_1(s)u_1(s) + \int\limits_{t}^{t_0} \rho(S_1^T(s,t)\mid C_1(s)\mathcal{W}_1)\,ds - \\ -K(\ell,\mu,\mathcal{X}_0)\Bigg\}. \end{gathered}$$

Далее, мы хотим поменять $\min_{u_1,u_2}(\cdot)$ на опорную функцию, но полученное выше выражение уже не является вогнутым по ℓ,μ. Поэтому, мы прибегаем к овыпуклению нужных членов и наконец получаем

$$V(t,x) = \min_{\phi}\max_{\ell}\max_{\mu}\Bigg\{$$

$$S^T(t_0,t)x - \int\limits_{t_0}^{t} \rho(S_1(s,t) \mid B_1(s)\mathcal{P}_1(s))\,ds - \int\limits_{t_0}^{t} \rho(S(t_0,s) \mid B_2(s)\mathcal{P}_2(s))\,ds -$$

$$-\mathrm{conv}\left\{-\int\limits_{t}^{t_0} \rho(S_1(s,t) \mid C_1(s)\mathcal{W}_1(s))\,ds - \int\limits_{t}^{t_0} \rho(S(t_0,s) \mid C_2(s)\mathcal{W}_2(s))\,ds + K(\ell,\mu,\mathcal{X}_0)\right\}\Bigg\}.$$

1.1 Проблема явного выражения $\ell(w), \mu(w)$

Выражение стоящее под знаком $\min\max$ в (1.) является линейной функцией по $\tau(w)$ (лемма о интегрировании овыпуклении)

Я пытаюсь взять производную по μ

Произодная от опорной функции элипсоида

$$\frac{d}{d\mu}\rho(\ell(\mu) \mid \mathcal{E}(q,Q)) = \frac{d}{d\ell}(\langle \ell, q\rangle + \langle \ell, Q\ell\rangle^{\frac{1}{2}})\frac{d\ell}{d\mu} = \left(q + \frac{\ell^T Q}{\langle \ell, Q\ell\rangle^{\frac{1}{2}}}\right)\frac{d\ell}{d\mu}$$

Для краткости обозначим $\mathcal{E}(\tilde{q},\tilde{Q}) = \mathcal{E}(B_2 q, B_2^T Q B_2) = B_2\mathcal{P}_2)$, тогда

$$\frac{d}{d\mu}\int\limits_{t_0}^{t} \rho(S(t_0,s) \mid B_2(s)\mathcal{P}_2(s))\,ds = \tag{1.6}$$

$$\int\limits_{t_0}^{t}\left(\tilde{q} + \frac{S(t_0,s)Q^T}{\left\langle S(t_0,s), \tilde{Q}S(t_0,s)\right\rangle^{\frac{1}{2}}}\right)\cdot\left(\int\limits_{t_0}^{s}\phi(w)G_2^T c(w,t)dw\right)ds \tag{1.7}$$

Затем нужно как-то взять производную по μ для $\mathrm{conv}(\cdot)$. Я пока затрудняюсь это сделать в $\mathbb{R}^n$. И здесь, наверное, как раз можно сначала посчитать $\mathrm{conv}(\cdot)$ конкретно для примера. Но я пока здесь остановился. Производную беру, чтобы на основании выпуклости (линейности) найти единственный минимум.