

# 1. Пример

Заданы системы дифференциальных уравнений, описывающих состояние некоторой модели до переключения и после:

$$\left\{ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_1^{(1)} = x_2^{(1)} + v^{(1)}(t); \\ \dot{x}_2^{(1)} = u^{(1)}(t); \\ x(t_0) \in \mathcal{X}_0 = \{x \in \mathbb{R}^2 : (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 1)^2 \leq 1\}; \end{array} \right. \\ \\ \left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_1^{(2)} = x_2^{(2)} + v^{(2)}(t); \\ \dot{x}_2^{(2)} = -\gamma x_1 - \mu x_2 + u^{(2)}(t); \\ x(\tau) \in \mathcal{X}^{(1)}[\tau, t_0] \cap \mathcal{H}, \tau \leq t \leq t_1; \end{array} \right. \end{array} \right. \quad (1.1)$$

$\mathcal{H} = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1 = 0\}$ — гиперплоскость;  
 $u^{(1)} = u^{(2)} = u(\cdot) \in [-\alpha_1, \alpha_2] = \mathcal{P}[t_0, t_1];$   
 $v^{(1)} = v^{(2)} = v(\cdot) \in [-\beta_1, \beta_2] \in \mathcal{W}[t_0, t_1];$   
 $\gamma, \mu, \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 > 0$ — некоторые константы;  
 $\tau$  — момент переключения, при пересечении гиперплоскости.

Для поиска множества  $\mathcal{X}[t, t_0]$  будем использовать функцию цены

$$V(t, x) = \min_{u(\cdot)} \max_{v(\cdot)} d^2(x_0, \mathcal{X}_0) \mid_{x(t)=x}$$

где  $d(x_0, \mathcal{X}_0)$  - расстояние между точкой  $x_0$  и множеством  $\mathcal{X}_0$ , определяемое метрикой  $d(x, \mathcal{X}) = \min_{y \in \mathcal{X}} \|x - y\|$ .

Пусть  $\phi(x) = d^2(x_0, \mathcal{X}_0)$ , сопряженная к ней:

$$\phi^*(\ell) = \sup_x (\langle x, \ell \rangle - d^2(x, \mathcal{X}_0)) = \rho(\ell \mid \mathcal{X}_0) + \frac{\|\ell\|^2}{4},$$

тогда

$$V(t, x) = \min_{u(\cdot)} \max_{v(\cdot)} \sup_{\ell} \left( \langle \ell, x_0 \rangle - \rho(\ell \mid \mathcal{X}_0) - \frac{\|\ell\|^2}{4} \right). \quad (1.2)$$

Найдем выражения для поиска  $x_0 \mid_{x(t_1)=x}$ . Пусть траектория точки в момент  $t_1$  известна  $x(t_1) = x$ . Идя в обратном времени, найдем её значение в момент  $t \leq t_1$  при известных  $B(s), C(s), u(s), v(s)$  до переключения:

$$x^{(2)}(t, x, u, v) = G_2(t, t_1)x + \int_{t_1}^t G_2(t, s) [B_2(s)u_2(s) + C_2(s)v_2(s)] ds, \text{ при } \tau \leq t \leq t_1,$$

и после:

$$\begin{aligned} x^{(2,1)}(t, \tau, x, u, v) = & G_1(t, \tau)G_2(\tau, t_1)x + G_1(t, \tau) \int_{t_1}^{\tau} G_2(t, s) [B_2(s)u_2(s) + C_2(s)v_2(s)] ds + \\ & + \int_{\tau}^{t_0} G_1(t, s) [B_1(s)u_1(s) + C_1(s)v_1(s)] ds, \text{ при } t_0 \leq t \leq \tau. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Нам необходимо, чтобы момент  $\tau$  в этих выражениях удовлетворял условию пересечения, так чтобы  $\langle x(\tau), c \rangle = \gamma$ . Поскольку  $\mathcal{X}[t, t_0] = \{x \mid V(t, x) \leq 0\}, \forall t \in [t_0, t_1]$ , то достаточно ввести штрафующий член  $(\langle x(\tau), c \rangle - \gamma)^2$  в выражение для  $V(t, x)$ , тем самым обеспечивая для  $\mathcal{X}[t, t_0]$  включение только тех траекторий, которые удовлетворяют нашим двум системам и условию на момент переключения.

Поскольку мы рассматриваем задачу в классе программных управлений, мы не можем строить управление в зависимости от текущего состояния системы, а только заранее его определять. Поэтому, в формуле для  $V(t, x)$  нельзя проводить оптимизацию отдельно для "до" и "после", так как момент переключения  $\tau$  не известен заранее.

$$V(t, x) = \min_{u_1, u_2 \in \mathcal{P}} \max_{v_1, v_2 \in \mathcal{W}} \max_{\tau} \left\{ d^2(x_0|_{x(t)=x}, \mathcal{X}_0) + (\langle x(\tau), c \rangle - \gamma)^2 \right\}.$$

Пока примем  $\gamma = 0$ . Для линеаризации условия на переключение сделаем подстановку

$$\langle x, c \rangle^2 \equiv \max_{\mu} \left\{ \mu \langle x, c \rangle - \frac{\mu^2}{4} \right\},$$

и, используя (1.2), имеем

$$V(t, x) = \min_{u_1, u_2 \in \mathcal{P}} \max_{v_1, v_2 \in \mathcal{W}} \max_{\tau} \left\{ \max_{\ell} \max_{\mu} \left\{ \langle \ell, x_0|_{x(t)=x} \rangle + \mu \langle x(\tau), c \rangle - \frac{\mu^2}{4} - \rho(\ell \mid \mathcal{X}_0) - \frac{\|\ell\|^2}{4} \right\} \right\}.$$

Раскрывая (1.3), получим

$$\begin{aligned} V(t, x) = & \min_{u_1, u_2} \max_{v_1, v_2} \min_{\tau \in [t_0, t]} \max_{\ell} \max_{\mu} \{ \\ & \langle \ell, G_1(t_0, \tau) G_2(\tau, t) x \rangle + \int_t^{\tau} \langle \ell, G_1(t_0, \tau) G_2(\tau, s) [B_2(s) u_2(s) + C_2(s) v_2(s)] \rangle ds + \\ & + \int_{\tau}^{t_0} \langle \ell, G_1(t_0, s) [B_1(s) u_1(s) + C_1(s) v_1(s)] \rangle ds + \mu \langle c, G_2(\tau, t) x \rangle + \\ & + \mu \int_t^{\tau} \langle c, G_2(\tau, s) [B_2(s) u_2(s) + C_2(s) v_2(s)] \rangle ds - \\ & - \frac{\mu^2}{4} - \rho(\ell \mid \mathcal{X}_0) - \frac{\|\ell\|^2}{4} \} \end{aligned}$$

Сгруппируем слагаемые

$$\begin{aligned} \tilde{S}(\tau, t) &= G_2^T(\tau, t) G_1^T(t_0, \tau) \ell + \mu G_2^T(\tau, t) c, \\ \tilde{S}_1(t_0, \tau) &= G_1^T(t_0, \tau) \ell, \end{aligned}$$

имеем

$$\begin{aligned} V(t, x) = & \min_{u_1, u_2} \max_{v_1, v_2} \min_{\tau \in [t_0, t]} \max_{\ell} \max_{\mu} \{ \\ & \tilde{S}^T(\tau, t) x + \int_t^{\tau} \tilde{S}^T(\tau, s) [B_2(s) u_2(s) + C_2(s) v_2(s)] ds + \\ & + \int_{\tau}^{t_0} \tilde{S}_1^T(t_0, s) [B_1(s) u_1(s) + C_1(s) v_1(s)] ds - \\ & - \frac{\mu^2}{4} - \rho(\ell \mid \mathcal{X}_0) - \frac{\|\ell\|^2}{4} \} \end{aligned} \tag{1.4}$$

Чтобы эффективно вычислять множества достижимости используется прием, который позволяет заменить поиск множества допустимых траекторий вычислением опорной функции к этому множеству. Для перехода к опорным функциям требуется менять местами порядок минимумов и максимумов в (1.4), а для этого необходимо выполнение условий теоремы минимакса. Поэтому дальнейшие преобразования выполняются с целью обеспечения этих условий. Одним из достаточных условий перестановки является линейность по минимизирующему или максимизирующему параметру. Наша цель состоит в том, чтобы перенести операции минимума по  $u_1, u_2$  и максимума по  $v_1, v_2$  внутрь выражения функции цены, тем самым сводя минимизацию/максимизацию на функциональном пространстве  $\mathcal{P}, \mathcal{W}$  к поиску экстремумов для выпуклых(вогнутых) функций. Первыми меняются местами  $\max_{v_1, v_2} \min_{\tau}(\cdot) = \min_{\tau} \max_{v_1, v_2}(\cdot)$ . Для примера, сначала рассмотрим функционал

$$T(\tau, v(s)) = \int_t^{\tau} v(s) ds$$

Легко видеть, что  $T(\tau, v(s))$ , являясь линейным по  $v$ , не является таковым по  $\tau$ . Тогда вместо  $\tau$  возьмем функцию  $\tau(w) = \phi(w)$  и преобразуем

$$T(\phi(w), v(s)) = \int_{t_0}^t \phi(w) dw \int_t^w v(s) ds.$$

Мы подразумеваем здесь, что  $\phi(w) = \delta(w)$ . Теперь функционал  $T(\phi, v)$  является линейным по всем аргументам.

Аналогично поступим с  $V(t, x)$ :

$$\begin{aligned} V(t, x) = & \min_{u_1, u_2} \max_{v_1, v_2} \min_{\phi(w)} \max_{\ell(w)} \max_{\mu(w)} \int_{t_0}^t \phi(w) \left\{ \right. \\ & \tilde{S}^T(w, t)x + \int_t^w \tilde{S}^T(w, s) [B_2(s)u_2(s) + C_2(s)v_2(s)] ds + \\ & + \int_w^{t_0} \tilde{S}_1^T(t_0, s) [B_1(s)u_1(s) + C_1(s)v_1(s)] ds - \\ & \left. - \frac{\mu^2}{4} - \rho(\ell \mid \mathcal{X}_0) - \frac{\|\ell\|^2}{4} \right\} dw, \end{aligned}$$

Поскольку мы здесь воспользовались перестановкой

$$\int \max_{\ell, \mu} f(w, \ell, \mu) dw = \max_{\ell(w), \mu(w)} \int f(w, \ell(w), \mu(w)) dw,$$

$\ell, \mu$  теперь функции от  $w$ ,  $\ell = \ell(w)$  и  $\mu = \mu(w)$ . Можно заметить, что от  $w$  зависят только переменные  $\tilde{S}, \tilde{S}_1$  и пределы интегрирования. Поменяем порядок интегрирования, чтобы собрать вместе члены, зависящие от  $w$ . Применяя правила замены

$$\int_{t_0}^t dw \int_t^w ds(\cdot) = \int_t^{t_0} ds \int_{t_0}^s dw(\cdot),$$

$$\int_{t_0}^t dw \int_w^{t_0} ds(\cdot) = \int_t^{t_0} ds \int_s^t dw(\cdot),$$

и делая замену переменных

$$\begin{aligned} S(t_0, t_1) &= \int_{t_0}^{t_1} \phi(w) \tilde{S}(w, t_1) dw = \int_{t_1}^{t_0} \phi(w) \{G_1^T(t_0, w) G_2^T(w, t) \ell(w) + \mu(w) G_2^T(w, t) c\} dw, \\ S_1(t_0, t_1) &= \int_{t_0}^{t_1} \phi(w) \tilde{S}_1(t_0, w) dw = \int_{t_0}^{t_1} \phi(w) \{G_1^T(t_0, w) \ell(w)\} dw, \\ K(\ell, \mu, \mathcal{X}_0) &= \int_{t_0}^t \phi(w) \left[ \frac{\mu(w)^2}{4} + \rho(\ell(w) \mid \mathcal{X}_0) + \frac{\|\ell(w)\|^2}{4} \right] dw \end{aligned}$$

придем к

$$\begin{aligned} V(t, x) &= \min_{u_1, u_2} \max_{v_1, v_2} \min_{\phi(w)} \max_{\ell(w)} \max_{\mu(w)} \left\{ \right. \\ &S^T(t_0, t)x + \int_t^{t_0} S^T(t_0, s) [B_2(s)u_2(s) + C_2(s)v_2(s)] ds + \\ &+ \int_t^{t_0} S_1^T(s, t) [B_1(s)u_1(s) + C_1(s)v_1(s)] ds - \\ &\left. - K(\ell, \mu, \mathcal{X}_0) \right\}, \end{aligned} \tag{1.5}$$

где  $K(\ell, \mu, \mathcal{X}_0)$  – выпуклая функция.

Будем искать опорную функцию к множеству достижимости  $\mathcal{X}[t, \mathcal{X}_0]$ , определяемому по найденному выше выражению (1.5) для  $V(t, x)$ . Пользуясь линейностью по  $\phi$ , теперь можно переставить

$$\max_{v_1, v_2} \min_{\phi} \max_{\ell} \max_{\mu} (\cdot) = \min_{\phi} \max_{\ell} \max_{\mu} \max_{v_1, v_2} (\cdot),$$

тогда

$$\begin{aligned} V(t, x) &= \min_{u_1, u_2} \min_{\phi} \max_{\ell} \max_{\mu} \left\{ \right. \\ &S^T(t_0, t)x + \int_t^{t_0} S^T(t_0, s) B_2(s) u_2(s) ds + \int_t^{t_0} \rho(S^T(t_0, s) \mid C_2(s) \mathcal{W}_2(s)) ds \\ &+ \int_t^{t_0} S_1^T(s, t) B_1(s) u_1(s) + \int_t^{t_0} \rho(S_1^T(s, t) \mid C_1(s) \mathcal{W}_1) ds - \\ &\left. - K(\ell, \mu, \mathcal{X}_0) \right\}. \end{aligned}$$

Далее, мы хотим поменять  $\min_{u_1, u_2}(\cdot)$  на опорную функцию, но полученное выше выражение уже не является вогнутым по  $\ell, \mu$ . Поэтому, мы прибегаем к овыпуклению нужных членов и приходим к

$$V(t, x) = \min_{\phi} \max_{\ell} \max_{\mu} \left\{ \begin{aligned} & S^T(t_0, t)x - \int_{t_0}^t \rho(S_1(s, t) \mid B_1(s)\mathcal{P}_1(s)) ds - \int_{t_0}^t \rho(S(t_0, s) \mid B_2(s)\mathcal{P}_2(s)) ds - \\ & - \text{conv} \left\{ - \int_t^{t_0} \rho(S_1(s, t) \mid C_1(s)\mathcal{W}_1(s)) ds - \int_t^{t_0} \rho(S(t_0, s) \mid C_2(s)\mathcal{W}_2(s)) ds + K(\ell, \mu, \mathcal{X}_0) \right\} \end{aligned} \right\}.$$

Далее используется равенство

$$\max_{x \in \mathcal{X}} \int_{t_0}^{t_1} \langle \ell, x \rangle ds = \max_{x \in \mathcal{X}} \int_{t_1}^{t_0} \langle -\ell, x \rangle ds = \int_{t_1}^{t_0} \rho(-\ell \mid \mathcal{X}) ds, \quad \mathcal{X} \in \text{Comp}(\mathbb{H}).$$

И тогда

$$V(t, x) = \min_{\phi} \max_{\ell} \max_{\mu} \left\{ \begin{aligned} & S^T(t_0, t)x - \int_{t_0}^t \rho(S_1(s, t) \mid B_1(s)\mathcal{P}_1(s)) ds - \int_{t_0}^t \rho(S(t_0, s) \mid B_2(s)\mathcal{P}_2(s)) ds - \\ & - \text{conv} \left\{ - \int_{t_0}^t \rho(-S_1(s, t) \mid C_1(s)\mathcal{W}_1(s)) ds - \int_{t_0}^t \rho(-S(t_0, s) \mid C_2(s)\mathcal{W}_2(s)) ds + K(\ell, \mu, \mathcal{X}_0) \right\} \end{aligned} \right\}.$$

Далнейшие рассуждения относятся к задаче (1.1). Рассмотрим теперь выражение под  $\text{conv}(\cdot)$ .

Множества  $C_1\mathcal{W}_1$  и  $C_2\mathcal{W}_2$  принимают вид  $\begin{pmatrix} v \\ 0 \end{pmatrix}, v \in [\tilde{\beta}_1, \tilde{\beta}_2] = \text{Comp}(\mathbb{R}^1)$ , тогда для некоторого  $\tilde{\ell} \in \mathbb{R}^2$

$$\rho(\tilde{\ell}, \begin{pmatrix} v \\ 0 \end{pmatrix}) = \sup_{v \in C_1\mathcal{W}_1(s)} (\tilde{\ell}_1 v) = \tilde{\ell}_1 \cdot \begin{cases} \tilde{\beta}_1, & \tilde{\ell}_1 < 0 \\ \tilde{\beta}_2, & \tilde{\ell}_1 > 0 \end{cases}$$

И тогда интегралы от опорных функций вычисляются как

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^t \rho(-S_1(s, t) \mid C_1\mathcal{W}_1(s)) ds &= \tilde{\beta}_1^{(1)} \int_{T_{>}^{(1)}} S_1(t_0, s)_1 ds + \tilde{\beta}_2^{(1)} \int_{T_{<}^{(1)}} S_1(t_0, s)_1 ds, \\ \int_{t_0}^t \rho(-S(t_0, s) \mid C_2\mathcal{W}_2(s)) ds &= \tilde{\beta}_1^{(2)} \int_{T_{>}^{(2)}} S(t_0, s)_1 ds + \tilde{\beta}_2^{(2)} \int_{T_{<}^{(2)}} S(t_0, s)_1 ds, \end{aligned}$$

где  $T_{<}^{(1)}, T_{<}^{(2)}$  – промежутки времени, на которых  $S_1(s, t)_1 < 0$ ,  $S(t_0, s)_1 < 0$  соответственно;  $T_{>}^{(1)}, T_{>}^{(2)}$  – промежутки, где  $S_1(s, t)_1 > 0$ ,  $S(t_0, s)_1 > 0$  соответственно. Концы

этих отрезков находятся из уравнений

$$S_1(s, t)_1 = \int_s^t \phi(w) \{G_1^T(t_0, w)\ell(w)\}_1 dw = 0;$$

$$S(t_0, s)_1 = \int_{t_0}^s \phi(w) \{G_1^T(t_0, w)G_2^T(w, t)\ell(w) + \mu(w)G_2^T(w, t)c\}_1 dw = 0,$$

где  $t_0 < s < t$ . Также из условий задачи  $\tilde{\beta}_1^{(2)} = \tilde{\beta}_1^{(1)} = \beta_1$  и  $\tilde{\beta}_2^{(1)} = \tilde{\beta}_2^{(2)} = \beta_2$ .

Для  $s \in [t_0, t]$  множества  $B_1\mathcal{P}_1$  и  $B_2\mathcal{P}_2$  имеют вид  $\begin{pmatrix} 0 \\ u \end{pmatrix}$ , где  $u(s) \in \mathcal{R}^1$  принадлежит первому либо второму семейству управлений. Тогда аналогично

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^t \rho(S_1(s, t) \mid B_1\mathcal{P}_1) ds &= \int_{t_0}^t S_1(s, t)_2 \cdot \begin{cases} \alpha_1, & S_1(s, t)_2 < 0, \\ \alpha_2, & S_1(s, t)_2 > 0 \end{cases} ds = \\ &= \alpha_1 \int_{T_{<}^{(1)}} S_1(s, t)_2 ds + \alpha_2 \int_{T_{>}^{(1)}} S_1(s, t)_2 ds \\ \int_{t_0}^t \rho(S(t_0, s) \mid B_2\mathcal{P}_2) ds &= \int_{t_0}^t S(t_0, s)_2 \cdot \begin{cases} \alpha_1, & S(t_0, s)_2 < 0, \\ \alpha_2, & S(t_0, s)_2 > 0 \end{cases} ds = \\ &= \alpha_1 \int_{T_{<}^{(2)}} S(t_0, s)_2 ds + \alpha_2 \int_{T_{>}^{(2)}} S(t_0, s)_2 ds, \end{aligned}$$

где  $\alpha_1, \alpha_2$  – ограничения на управление,  $\alpha_1 \leq u(s) \leq \alpha_2$ ,  $T_{<}^{(1)}, T_{<}^{(2)}$  – множества отрезков времени, где  $S_1(s, t)_2 < 0, S(t_0, s)_2 < 0$ ;  $T_{>}^{(1)}, T_{>}^{(2)}$  – множество отрезков времени, где  $S_1(s, t)_2 > 0, S(t_0, s)_2 > 0$ .

Можем использовать равенство  $S(t_0, s) = S(t_0, t) - S(s, t)$ , если потребуется.