

Московский Государственный Университет им.М.В.Ломоносова
Факультет вычислительной математики и кибернетики
Кафедра системного анализа

Отчет по заданию
компьютерного практикума

**“ Построение внешней и внутренней
эллипсоидальных оценок
множества достижимости
для линейной управляемой системы
с неопределенностью ”**

Студент магистратуры

Селиверстов Д.С.

Преподаватель:

Востриков И. В.

Содержание

1. Постановка задачи	3
2. Теоретические обоснования	4
2.1 Основные определения и свойства	4
2.2 Внутренние оценки множества достижимости	8
2.3 Внешние оценки множества достижимости	11
3. Иллюстрация работы программы	12

Москва
2010г.

1. Постановка задачи

Рассматривается линейная управляемая система

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) + C(t)v(t), t \in [t_0; t_1], \\ x(t) \in \mathbb{R}^n, \quad A(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}, \\ u(t) \in L_\infty[t_0; t_1], u(t) \in \mathbb{R}^m, u(t) \in \mathcal{E}(p(t), P(t)), B(t) \in \mathbb{R}^{n \times m}, \\ v(t) \in \mathcal{E}(q(t), Q(t)), C(t) \in \mathbb{R}^{n \times k}, \\ x(t_0) \in \mathcal{E}(x_0, X_0) = \mathcal{X}_0, x_0 \in \mathbb{R}^n, \quad X_0 \in \mathbb{R}^{n \times n}, \\ q(t) \in \mathbb{R}^k, \quad Q(t) \in \mathbb{R}^{k \times k}, \\ p(t) \in \mathbb{R}^m, \quad P(t) \in \mathbb{R}^{m \times m}, \\ A(t), B(t), C(t), Q(t), q(t), P(t), p(t) — непрерывны, \\ X_0, P(t), Q(t) — симметричные, положительно определенные \end{array} \right. \quad (1..1)$$

Требуется построить внешнюю и внутреннюю аппроксимацию множества достижимости.

2. Теоретические обоснования

2.1 Основные определения и свойства

Определение 1 Множество $\{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle x-q, Q^{-1}(x-q) \rangle \leq 1\}$, где Q — симметрическая, положительно определенная матрица, называется **эллипсоидом** с центром в точке $q \in \mathbb{R}^n$ и матрицей $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Обозначение: $\mathcal{E}(q, Q)$.

Определение 2 Опорной функцией множества $M \subset \mathbb{R}^n$ называется $\rho(l \mid M) = \sup_{x \in M} \langle l, x \rangle$.

Опорной функцией эллипсоида $\mathcal{E}(q, Q)$ является $\rho(l \mid \mathcal{E}(q, Q)) = \langle l, q \rangle + \langle l, Ql \rangle^{\frac{1}{2}}$.

Утверждение 1 Пусть $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ — невырожденная матрица. Тогда $A\mathcal{E}(q, Q) = \mathcal{E}(Aq, AQA')$.

Доказательство: Пусть $\langle x - q, Q^{-1}(x - q) \rangle \leq 1$. Тогда обозначим точки множества $A\mathcal{E}(q, Q)$ как $y = Ax$. Получим $\langle x - q, Q^{-1}(x - q) \rangle \leq 1 \Leftrightarrow \langle A^{-1}(Ax - Aq), Q^{-1}A^{-1}(Ax - Aq) \rangle \leq 1 \Leftrightarrow \langle Ax - Aq, (A^{-1})'Q^{-1}A^{-1}(Ax - Aq) \rangle \leq 1$.

Утверждение 2 Рассмотрим эллипсоиды $\mathcal{E}_i = \mathcal{E}(0, Q_i)$, $i = \overline{1, n}$, и эллипсоиды $\mathcal{E}_- = \mathcal{E}(0, Q_-)$, $\mathcal{E}_+ = \mathcal{E}(0, Q_+)$, где

$$\begin{aligned} Q_- &= Q_*^T Q_*, \quad Q_* = S_1 Q_1^{1/2} + \dots + S_n Q_n^{1/2}, \\ S_i^T S_i &= S_i S_i^T = I \quad \forall i = \overline{1, n}; \\ Q_+ &= (p_1 + \dots + p_n) \left(\frac{Q_1}{p_1} \dots \frac{Q_n}{p_n} \right), \quad p_1, \dots, p_n \neq 0. \end{aligned}$$

Тогда верно следующее включение:

$$\mathcal{E}_- \subseteq \mathcal{E}_1 + \dots + \mathcal{E}_n \subseteq \mathcal{E}_+.$$

Доказательство: 1) Рассмотрим опорную функцию множества \mathcal{E}_- :

$$\begin{aligned} \rho^2(l \mid \mathcal{E}_-) &= \sum_{i=1}^n \langle l, Q_i l \rangle + \sum_{i \neq j} \langle S_i Q_i^{1/2} l, S_j Q_j^{1/2} l \rangle \leq \\ &\leq \sum_{i=1}^n \langle l, Q_i l \rangle + \sum_{i \neq j} \langle S_i Q_i^{1/2} l, S_i Q_i^{1/2} l \rangle^{\frac{1}{2}} \langle S_j Q_j^{1/2} l, S_j Q_j^{1/2} l \rangle^{\frac{1}{2}} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^n \langle l, Q_i l \rangle + \sum_{i \neq j} \langle l, Q_i l \rangle^{\frac{1}{2}} \langle l, Q_j l \rangle^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{i=1}^n \langle l, Q_i l \rangle^{\frac{1}{2}} \right)^2 = \\
&= \rho^2(l \mid \mathcal{E}_1 + \dots + \mathcal{E}_n) \Rightarrow \mathcal{E}_- \subseteq \mathcal{E}_1 + \dots + \mathcal{E}_n.
\end{aligned}$$

Равенство при этом достигается при $S_i Q_i^{\frac{1}{2}} l = \lambda_i S_1 Q_1^{\frac{1}{2}} l$, $\lambda_i > 0$, $\forall i = \overline{1, n}$.

2) Рассмотрим опорную функцию множества \mathcal{E}_+ :

$$\begin{aligned}
\rho^2(l \mid \mathcal{E}_+) &= \sum_{i=1}^n \langle l, Q_i l \rangle + \sum_{i \neq j} \frac{p_i}{p_j} \langle l, Q_j l \rangle \geq \\
&\left\{ \frac{p_i}{p_j} \langle l, Q_j l \rangle + \frac{p_j}{p_i} \langle l, Q_i l \rangle \geq 2 \langle l, Q_j l \rangle^{\frac{1}{2}} \langle l, Q_i l \rangle^{\frac{1}{2}} \right\} \\
&\geq \sum_{i=1}^n \langle l, Q_i l \rangle + \sum_{i \neq j} \langle l, Q_j l \rangle^{\frac{1}{2}} \langle l, Q_i l \rangle^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{i=1}^n \langle l, Q_i l \rangle^{\frac{1}{2}} \right)^2 = \\
&= \rho^2(l \mid \mathcal{E}_1 + \dots + \mathcal{E}_n) \Rightarrow \mathcal{E}_1 + \dots + \mathcal{E}_n \subseteq \mathcal{E}_+.
\end{aligned}$$

Равенство при этом достигается при $p_i = \langle l, Q_i l \rangle^{\frac{1}{2}}$. \square

Замечание: В случае ненулевых центров исходных эллипсоидов q_i центры обеих оценок будут совпадать и находятся по формуле $\sum_{i=1}^n q_i$.

Определение 3 Геометрической разностью двух множеств $A, B \subset \mathbb{R}^n$ называется множество всех векторов $A \dot{-} B = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \forall b \in B \ x + b \in A\}$.

Опорная функция геометрической разности множеств равна овыпукленной разности опорных функций исходных множеств. (Овыпукленная функция является меньше исходной, при этом среди всех выпуклых функций меньших исходной она является максимальной).

$$\rho(l \mid A \dot{-} B) = \text{conv}(\rho(l \mid A) - \rho(l \mid B)).$$

Геометрическая разность двух эллипсоидов может не быть эллипсоидом. Попробуем аппроксимировать геометрическую разность эллипсоидом.

Пусть даны эллипсоиды $\mathcal{E}_1(q_1, Q_1)$ и $\mathcal{E}_2(q_2, Q_2)$. Центр аппроксимирующего эллипсоида будет равен $q_- = q_1 - q_2$. Для внутренней оценки будем искать матрицу в виде

$$Q_- = (p_1 - p_2) \left(\frac{1}{p_1} Q_1 - \frac{1}{p_2} Q_2 \right).$$

$$\begin{aligned}
(\rho(l | \mathcal{E}_-) - \langle l, q_- \rangle)^2 &= \langle l, Q_- l \rangle = \langle l, Q_1 l \rangle + \langle l, Q_2 l \rangle - \frac{p_2}{p_1} \langle l, Q_1 l \rangle - \frac{p_1}{p_2} \langle l, Q_2 l \rangle \leq \\
&\leq \langle l, Q_1 l \rangle + \langle l, Q_2 l \rangle - 2 \langle l, Q_1 l \rangle^{1/2} \langle l, Q_2 l \rangle^{1/2} = \\
&= (\langle l, Q_1 l \rangle^{1/2} - \langle l, Q_2 l \rangle^{1/2})^2 = (\rho(l | \mathcal{E}_1) - \rho(l | \mathcal{E}_2) - \langle l, q_1 - q_2 \rangle)^2 \Rightarrow \\
&\Rightarrow \rho(l | \mathcal{E}_-) \leq (\rho(l | \mathcal{E}_1) - \rho(l | \mathcal{E}_2))
\end{aligned}$$

При переходе к неравенству воспользовались тем, что среднее арифметическое больше или равно среднему геометрическому. Равенство достигается, при $p_i = \langle l, Q_i l \rangle^{1/2}$.

Мы получили, что $\rho(l | \mathcal{E}_-)$ является выпуклой функцией меньше или равной чем $(\rho(l | \mathcal{E}_1) - \rho(l | \mathcal{E}_2))$, а $\text{conv}(\rho(l | \mathcal{E}_1) - \rho(l | \mathcal{E}_2))$ является максимальной выпуклой функцией меньше исходной, следовательно

$$\rho(l | \mathcal{E}_-) \leq \text{conv}(\rho(l | \mathcal{E}_1) - \rho(l | \mathcal{E}_2)) = \rho(l | \mathcal{E}_1 \dot{-} \mathcal{E}_2).$$

Для внешней оценки выберем матрицу

$$Q_+ = Q_*^T Q_*$$

$$Q_* = S_1 Q_1^{1/2} - S_2 Q_2^{1/2},$$

где S_i — ортогональные матрицы. В таком случае получим

$$\begin{aligned}
(\rho(l | \mathcal{E}_+) - \langle l, q_- \rangle)^2 &= \langle l, Q_+ l \rangle = \langle l, Q_1 l \rangle - 2 \langle S_1 Q_1^{1/2} l, S_2 Q_2^{1/2} l \rangle + \langle l, Q_2 l \rangle \geq \\
&\geq \langle l, Q_1 l \rangle - 2 \|S_1 Q_1^{1/2} l\| \cdot \|S_2 Q_2^{1/2} l\| + \langle l, Q_2 l \rangle = \\
&= \langle l, Q_1 l \rangle - 2 \sqrt{\langle l, Q_1^{1/2} S_1^T S_1 Q_1^{1/2} l \rangle \cdot \langle l, Q_2^{1/2} S_2^T S_2 Q_2^{1/2} l \rangle} + \langle l, Q_2 l \rangle = \\
&= (\rho(l | \mathcal{E}_1) - \rho(l | \mathcal{E}_2) - \langle l, q_1 - q_2 \rangle)^2 \geq (\text{conv}\{\rho(l | \mathcal{E}_1) - \rho(l | \mathcal{E}_2)\} - \langle l, q_1 - q_2 \rangle)^2 = \\
&= (\rho(l | \mathcal{E}_1 \dot{-} \mathcal{E}_2) - \langle l, q_1 - q_2 \rangle)^2.
\end{aligned}$$

Первое неравенство является неравенством Коши-Буняковского, а в последнем неравенстве воспользовались тем, что овыпукленная функция меньше исходной.

Т.е. получили две оценки исходного множества, удовлетворяющие вложенности

$$\mathcal{E}_- \subseteq \mathcal{E}_1 \dot{-} \mathcal{E}_2 \subseteq \mathcal{E}_+$$

Определение 4 Полурастоянием Хаусдорфа между двумя множествами A, B называют

$$h_+(A, B) = \inf\{\varepsilon : A \subseteq B + B_\varepsilon(0)\};$$

$$h_-(A, B) = h_+(B, A).$$

Определение 5 Расстоянием по Хаусдорфу называют

$$h(A, B) = \max(h_-, h_+).$$

Определение 6 Множеством достижимости системы (1..1) называется множество

$$\mathcal{X}[t_1, t_0, \mathcal{X}_0] = \{x_1 \mid \exists u(\cdot) : \forall v(\cdot) : \exists x_0 : x(t_1, t_0, x_0) = x_1\}.$$

Множество достижимости системы (1..1) удовлетворяет следующим **эволюционным уравнениям**:

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0} \sigma^{-1} h_+ \{ \mathcal{X}[t + \sigma],$$

$$((I + \sigma A(t)) \mathcal{X}[t] + \sigma B(t) \mathcal{E}(p(t), P(t))) \dot{-} \sigma (C(t) \mathcal{E}(-q(t), Q(t))) \} = 0. \quad (2..1)$$

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0} \sigma^{-1} h_- \{ \mathcal{X}[t + \sigma],$$

$$((I + \sigma A(t)) \mathcal{X}[t] \dot{-} \sigma C(t) \mathcal{E}(-q(t), Q(t))) + \sigma B(t) \mathcal{E}(p(t), P(t)) \} = 0. \quad (2..2)$$

$$\mathcal{X}_0 = \mathcal{E}(x_0, X_0). \quad (2..3)$$

Теорема 2..1 Максимальное по включению решение задачи Коши (2..1), (2..3) совпадает с минимальным по включению решением задачи Коши (2..2), (2..3) и совпадает с искомым альтернированным интегралом Понтрягина $W[t]$ при условии его непустоты.

2.2 Внутренние оценки множества достижимости

Для нахождения внутренней оценки множества достижимости воспользуемся задачей Коши (2..1),(2..3). Обозначим внутреннюю оценку $\mathcal{X}_-[t] = \mathcal{E}(x_-(t), X_-(t))$. Так как $W_-[t] \subseteq W[t]$, то в силу (2..1) получаем

$$\mathcal{X}_-[t + \sigma] \subseteq \mathcal{X}[t + \sigma] \subseteq ((I + \sigma A(t))\mathcal{X}[t] + \sigma B(t)\mathcal{E}(p(t), P(t))) \dot{-} \sigma C(t)\mathcal{E}(-q(t), Q(t)) + B_\varepsilon(0), \varepsilon = o(\sigma).$$

Из этого уравнения можно получить соотношение для нахождения внутренней оценки множества достижимости (которое уже не обязательно будет максимальным по включению):

$$\mathcal{X}_-[t + \sigma] \subseteq ((I + \sigma A(t))\mathcal{X}_-[t] + \sigma B(t)\mathcal{E}(p(t), P(t))) \dot{-} \sigma C(t)\mathcal{E}(-q(t), Q(t)).$$

В итоге получаем:

$$\mathcal{E}(x_-(t + \sigma), X_-(t + \sigma)) \subseteq ((I + \sigma A(t))\mathcal{E}(x_-(t), X_-(t)) + \sigma B(t)\mathcal{E}(p(t), P(t))) \dot{-} \sigma C(t)\mathcal{E}(-q(t), Q(t)). \quad (2..4)$$

Теперь построим $\mathcal{E}(w_-(t - \sigma), W_-(t - \sigma))$ согласно способам, приведенным в утверждениях 2 и 4. Получим

$\mathcal{E}(q_1(t), Q_1(t))$ — оценка суммы первых двух слагаемых в правой части:

$$q_1(t) = (I + \sigma A(t))x_-(t) + \sigma B(t)p(t),$$

$$Q_1(t) = Q_*^T Q_*, \text{ где}$$

$$Q_* = X_-^{\frac{1}{2}}(I + \sigma A(t)) + \sigma S(t)P^{\frac{1}{2}}(t)B^T(t), \quad S(t) — ортогональная матрица.$$

Тогда

$$w_-(t - \sigma) = q_1(t) + \sigma C(t)q(t); \quad (2..5)$$

$$X_-(t + \sigma) = \left(1 - \frac{p_2(t)}{p_1(t)}\right) \left(\frac{Q_1(t)p_1(t)}{-p_2(t)} \sigma^2 C(t)Q(t)C^T(t)\right). \quad (2..6)$$

Разумно потребовать, чтобы аппроксимирующий эллипсоид касался множества достижимости в заданном направлении $l(t)$. Для этого необходимо потребовать выполнение следующих условий:

$$\sigma S P^{\frac{1}{2}} B^T l = \lambda X_-^{\frac{1}{2}}(t)(I + \sigma A^T(t))l, \quad \lambda > 0; \quad (2..7)$$

$$\begin{aligned} p_1 &= \langle l, Q_1 l \rangle^{\frac{1}{2}}, \\ p_2 &= \sigma \langle l, C Q C^T l \rangle^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (2..8)$$

Фиксируем направление $l(t + \sigma)$, в котором оценка $\mathcal{E}(x_-(t + \sigma), X_-(t + \sigma))$ будет касаться точного множества $\mathcal{X}[t + \sigma]$. Получим

$$S(t)P(t)^{\frac{1}{2}}B^T(t)l(t + \sigma) = \mu_\sigma(t)X_-^{\frac{1}{2}}(t)(I + \sigma A^T(t))l(t + \sigma), \quad \mu_\sigma(t) = \frac{\lambda(t)}{\sigma}; \quad (2..9)$$

$$\begin{aligned} \text{Здесь } \lambda(t) &= \frac{\sigma \left\| S(t)P(t)^{\frac{1}{2}}B^T(t)l(t + \sigma) \right\|}{\left\| X_-^{\frac{1}{2}}(t)(I + \sigma A^T(t))l(t + \sigma) \right\|}. \\ p_1 &= \langle l(t + \sigma), Q_1(t)l(t + \sigma) \rangle^{\frac{1}{2}}, \\ p_2 &= \sigma \langle l(t + \sigma), C(t)Q(t)C^T(t)l(t + \sigma) \rangle^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (2..10)$$

Обозначая $\frac{p_2(t)}{p_1(t)} = \sigma \pi_\sigma(t)$ и преобразовывая, получаем:

$$\dot{x}_-(t) = A(t)w_-(t) + \sigma B(t)p(t) + \sigma C(t)q(t), \quad x_-(t_0) = x_0; \quad (2..11)$$

$$\begin{aligned} \dot{X}_-(t) &= A(t)X_-(t) + X_-(t)A^T(t) + \pi(t)X_-(t) + \pi^{-1}(t)C(t)Q(t)C^T(t) + \\ &+ X_-^{\frac{1}{2}}(t)S(t)P^{\frac{1}{2}}(t)B^T(t) + B(t)P^{\frac{1}{2}}(t)S^T(t)X_-^{\frac{1}{2}}(t), \\ X_-(t_0) &= X_0. \end{aligned} \quad (2..12)$$

Матрица $S(t)$ при этом находится из уравнения

$$S(t)P(t)^{\frac{1}{2}}B^T(t)l(t) = \mu(t)X_-^{\frac{1}{2}}(t)l(t), \quad \mu(t) = \lim_{\sigma \rightarrow 0} \mu_\sigma(t). \quad (2..13)$$

Пусть $Sx = \lambda y$. Тогда представим x, y в виде $x = U_1 e_1 V_1, y = U_2 e_2 V_2$, где U_1, U_2 - унитарные матрицы, e_1, e_2 - вектора, V_1, V_2 - скаляры. Тогда $S = U_2 U_1$.

$$\pi(t) = \lim_{\sigma \rightarrow 0} \pi_\sigma(t) = \frac{\langle l(t), C(t)Q(t)C^T(t)l(t) \rangle^{\frac{1}{2}}}{\langle l(t), X_-(t)l(t) \rangle^{\frac{1}{2}}}, \quad (2..14)$$

так как $Q_1(t) \rightarrow X_-(t)$ при $\sigma \rightarrow 0$, что следует из построения $Q_1(t)$.

Построим уравнение динамики кривой $l(t)$. Предположим, что аппроксимация $X_-[t + \sigma]$ касается точного множества $X[t + \sigma]$ вдоль направления $l(t + \sigma)$. Значит

$$\begin{aligned} \rho(l(t + \sigma) \mid X_-[t + \sigma]) &= \rho(l(t + \sigma) \mid \mathcal{X}[t + \sigma]) = \\ &= \rho(l(t + \sigma) \mid (I + \sigma A(t))\mathcal{X}[t] + \sigma B(t)\mathcal{E}(p(t), P(t)) - \sigma C(t)\mathcal{E}(-q(t), Q(t))) \end{aligned}$$

с точностью до $o(\sigma)$.

Для внутренней оценки имеем

$$\begin{aligned} \rho(l(t + \sigma) \mid X_-[t + \sigma]) &\leq \\ &\leq \rho(l(t + \sigma) \mid (I + \sigma A(t))X_-[t] + \sigma B(t)\mathcal{E}(p(t), P(t)) - \\ &\quad - \rho(l(t + \sigma) \mid \sigma C(t)\mathcal{E}(q(t), Q(t))) \end{aligned} \quad (2..15)$$

Известно, что

$$\rho(l \mid A \dot{-} B) = \text{conv}(\rho(l \mid A) - \rho(l \mid B)) \leq \rho(l \mid A) - \rho(l \mid B). \quad (2..16)$$

Равенство в (2..15) достигается в том и только том случае, когда $h(l(t + \sigma)) \equiv (\text{conv } h)(l(t + \sigma))$, где

$$\begin{aligned} h(l(t + \sigma)) &= \rho(l(t + \sigma) \mid (I + \sigma A(t))X_-[t] + \sigma B(t)\mathcal{E}(-p(t), P(t)) - \\ &\quad - \rho(l(t + \sigma) \mid \sigma C(t)\mathcal{E}(-q(t), Q(t))). \end{aligned}$$

Если же это не выполняется, то внутренняя оценка множества будет вырождаться. Значит, внутренняя оценка существует не всегда.

Найдем зависимость для $l(t)$ такую, чтобы вдоль нее осуществлялось касание. Действуем "по индукции". Пусть в момент t_0 выполнено $\rho(l_0 \mid X_-(t_0)) = \rho(l_0 \mid \mathcal{X}(t_0))$. Тогда положим, что в некоторый момент t также обеспечивается касание и $\rho(l(t) \mid X_-(t)) = \rho(l(t) \mid \mathcal{X}(t))$. Из эволюционного уравнения находим, что $\mathcal{X}(t + \sigma) = (I + \sigma A(t))\mathcal{X}(t) + \dots$. Тогда, находя опорную функцию $\rho(l(t + \sigma) \mid \mathcal{X}(t + \sigma)) = \rho(l(t + \sigma) \mid (I + \sigma A(t))\mathcal{X}(t)) + \rho(l(t + \sigma) \mid (\dots))$,

заметим, что поскольку $\rho(l(t) \mid X(t)) = \rho(l(t) \mid \mathcal{X}(t))$, то $\rho((I + \sigma A^T(t))l(t + \sigma) \mid \mathcal{X}(t)) = \rho(l(t) \mid \mathcal{X}(t))$, тогда находим, что

$$(I + \sigma A^T(t))l(t + \sigma) = l(t),$$

откуда следует

$$\frac{dl}{dt}(t) = -A^T(t)l(t), l(t_0) = l_0.$$

Тогда при условии выполнения $h(l(t + \sigma)) = (convh)(l(t + \sigma))$ будут существовать "тугие" эллипсоидальные оценки.

2.3 Внешние оценки множества достижимости

Построения внешней эллипсоидальной оценки множества разрешимости проводится аналогично внутренней. Для этого воспользуемся уже задачей Коши (2..2),(2..3):

$$\dot{x}_+(t) = A(t)x_+(t) + \sigma B(t)p(t) + \sigma C(t)q(t), x_+(t_0) = x_0; \quad (2..17)$$

$$\begin{aligned} \dot{X}_+(t) = A(t)X_+(t) + X_+(t)A^T(t) + \pi(t)X_+(t) + \pi^{-1}(t)B(t)P(t)B^T(t) - \\ - X_+^{\frac{1}{2}}(t)S(t)Q^{\frac{1}{2}}(t)C^T(t) - C(t)Q^{\frac{1}{2}}(t)S^T(t)X_+^{\frac{1}{2}}(t), \\ X_+(t_0) = X_0. \end{aligned} \quad (2..18)$$

Матрица $S(t)$ при этом находится из уравнения

$$S(t)Q(t)^{\frac{1}{2}}C^T(t)l(t) = \mu(t)X_+^{\frac{1}{2}}(t)l(t), \quad \mu(t) = \frac{\|X_+^{\frac{1}{2}}(t)l(t)\|}{\|S(t)Q^{\frac{1}{2}}(t)C(t)l(t)\|}. \quad (2..19)$$

$$\pi(t) = \frac{\langle l(t), B(t)P(t)B^T(t)l(t) \rangle^{\frac{1}{2}}}{\langle l(t), X_+(t)l(t) \rangle^{\frac{1}{2}}}, \quad (2..20)$$

Обозначим, аналогично предыдущему пункту,

$$\begin{aligned} h(l(t + \sigma)) = \rho(l(t + \sigma) \mid (I + \sigma A(t))X_+[t] + \sigma B(t)\mathcal{E}(p(t), P(t))) - \\ - \rho(l(t + \sigma) \mid \sigma C(t)\mathcal{E}(-q(t), Q(t))). \end{aligned}$$

Тогда при выполнении условия $(conv \quad h)(l(t+\sigma)) = h(l(t+\sigma))$ касание внешней аппроксимации и реального множества происходит вдоль „хорошей“ кривой $l^*(t)$, являющейся решением задачи Коши

$$\begin{cases} \dot{l}^*(t) = -A^T(t)l^*(t) \\ l^*(t_0) = l_0. \end{cases} \quad (2..21)$$

Если наложенное выше условие не выполняется, внешняя оценка может вырождаться.

Замечание:

В уравнениях как для внутренних, так и для внешних оценок присутствуют функции $\pi(t)$ и $\pi^{-1}(t)$, которые могут обратиться в нуль. Для избежания этого необходимо изменить входные параметры системы. Можно, например, поставить на главной диагонали достаточно маленькие значения, что не исказит результат, но уберет вырожденность.

3. Иллюстрация работы программы

Рассмотрена модель механической колебательной системы в вязкой среде с возвратной силой:

$$\begin{cases} m_1 \ddot{y}_1(t) = -(k_1 + k_2)y_1(t) + k_2 y_2(t) - \mu_1 \dot{y}_1(t) - v_1 y_1(t) \\ m_2 \ddot{y}_2(t) = k_2 y_1(t) - (k_2 + k_3)y_2(t) + k_3 y_3(t) - \mu_2 \dot{y}_2(t) - v_2 y_2(t) \\ \dots \\ m_{N-1} \ddot{y}_{N-1}(t) = k_{N-1} y_{N-2}(t) - (k_{N-1} + k_N)y_{N-1}(t) + k_N y_N(t) - \mu_{N-1} \dot{y}_{N-1}(t) - v_{N-1} y_{N-1}(t) \\ m_N \ddot{y}_N(t) = -k_N y_{N-1}(t) + k_N y_N(t) - \mu_N \dot{y}_N(t) - v_N y_N(t) + u(t) \end{cases} \quad (3..1)$$

Размерность механической системы – \mathbb{R}^4 , соответственно для матрицы уравнений будет 8 фазовых переменных. Коэффициенты k_i, μ_i, v_i вычисляются по формуле $0.4 \cdot rand(0, 1) + 0.6$. Неопределенность, накладывается только на координаты скорости, то есть на первые 4 фазовые переменные, первые производные.

Из иллюстраций можно заметить, что внутренние оценки вырождаются в какой-то момент времени. Это происходит из-за того, что $h(l)$ не совпадает со своим овыпуклением.

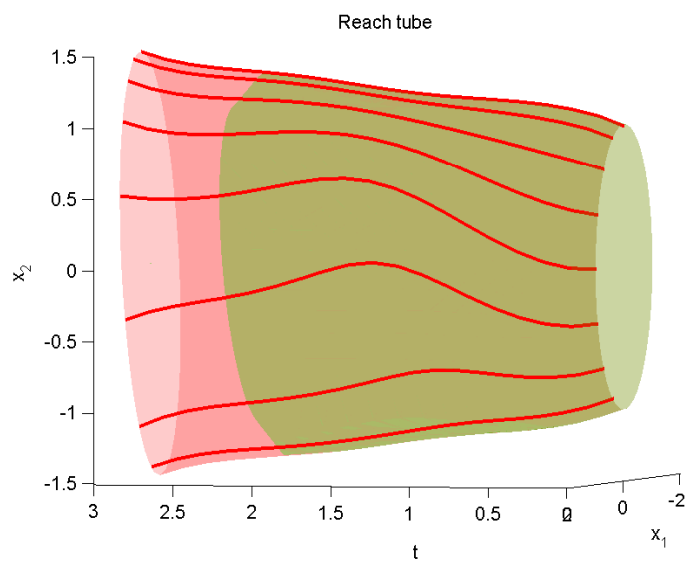


Рис. 1. Проекция на статическую плоскость, 8 эллипсоидов, внешняя, внутренняя оценка

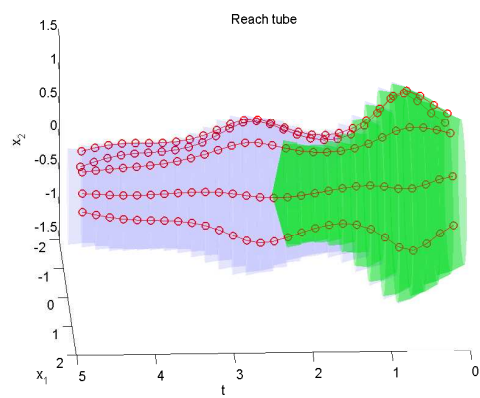
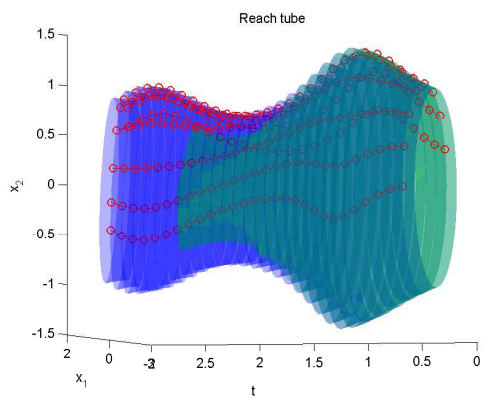


Рис. 2. Проекция на динамическую плоскость, внешняя и внутренняя оценка

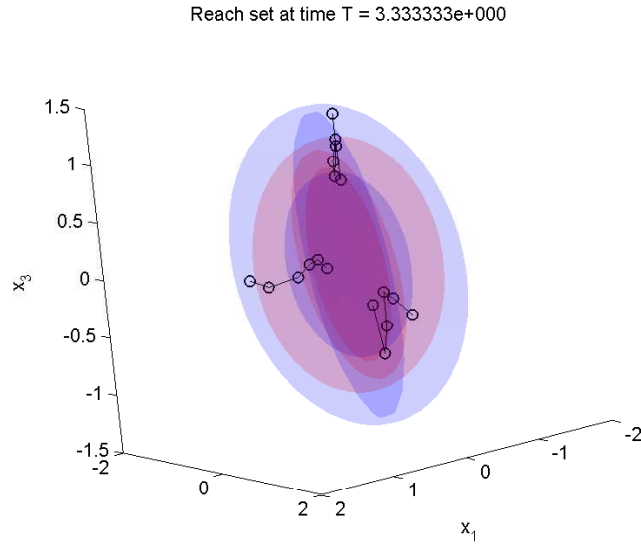


Рис. 3. Проекция в 3D, внешняя оценка

4. Выводы

Рассмотренный в работе аппарат эллипсоидальных оценок позволяет строить аппроксимации множества достижимости для систем линейных дифференциальных уравнений с эллипсоидальными ограничениями на управление и на помеху. Множество достижимости в данном случае получается в классе позиционных управлений $u(t, x)$. Помимо, замечены некоторые особенности алгоритма внутренних оценок, состоящие в том, что они в некоторый момент времени вырождаются, когда попадают в область "плохих направлений".