

1. Пример

Заданы системы дифференциальных уравнений, описывающих состояние некоторой модели до переключения и после:

$$\left\{ \begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} \dot{x}_1^{(1)} = x_2^{(1)} + v^{(1)}(t); \\ \dot{x}_2^{(1)} = u^{(1)}(t); \\ x(t_0) \in \mathcal{X}_0 = \{x \in \mathbb{R}^2 : (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 1)^2 \leq 1\}; \end{array} \right. \\ \\ \left[\begin{array}{l} \dot{x}_1^{(2)} = x_2^{(2)} + v^{(2)}(t); \\ \dot{x}_2^{(2)} = -\gamma x_1 - \mu x_2 + u^{(2)}(t); \\ x(\tau) \in \mathcal{X}^{(1)}[\tau, t_0] \cap \mathcal{H}, \tau \leq t \leq t_1; \end{array} \right. \end{array} \right. \quad (1.1)$$

$\mathcal{H} = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1 = 0\}$ — гиперплоскость;
 $u(\cdot) \in [-\alpha_1, \alpha_2] = \mathcal{P}[t_0, t_1], v(\cdot) \in [-\beta_1, \beta_2] \in \mathcal{W}[t_0, t_1];$
 $\gamma, \mu, \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 > 0$ — некоторые константы;
 τ — момент переключения, при пересечении гиперплоскости.

Для поиска множества $\mathcal{X}[t, t_0]$ будем использовать функцию цены

$$V(t, x) = \min_{u(\cdot)} \max_{v(\cdot)} d^2(x_0, \mathcal{X}_0) |_{x(t)=x}$$

где $d(x_0, \mathcal{X}_0)$ - расстояние между точкой x_0 и множеством \mathcal{X}_0 , определяемое метрикой $d(x, \mathcal{X}) = \min_{y \in \mathcal{X}} \|x - y\|$.

Пусть $\phi(x) = d^2(x_0, \mathcal{X}_0)$, сопряженная к ней:

$$\phi^*(\ell) = \sup_x (\langle x, \ell \rangle - d^2(x, \mathcal{X}_0)) = \rho(\ell | \mathcal{X}_0) + \frac{\|\ell\|^2}{4},$$

тогда

$$V(t, x) = \min_{u(\cdot)} \max_{v(\cdot)} \sup_{\ell} \left(\langle \ell, x_0 \rangle - \rho(\ell | \mathcal{X}_0) - \frac{\|\ell\|^2}{4} \right). \quad (1.2)$$

Найдем выражения для поиска $x_0 |_{x(t_1)=x}$. Пусть траектория точки в момент t_1 известна $x(t_1) = x$. Идя в обратном времени, найдем её значение в момент $t \leq t_1$ при известных $B(s), C(s), u(s), v(s)$ до переключения:

$$x^{(2)}(t, x, u, v) = G_2(t, t_1)x + \int_{t_1}^t G_2(t, s) [B_2(s)u_2(s) + C_2(s)v_2(s)] ds, \text{ при } \tau \leq t \leq t_1,$$

и после:

$$\begin{aligned} x^{(2,1)}(t, \tau, x, u, v) = & G_1(t, \tau)G_2(\tau, t_1)x + G_1(t, \tau) \int_{t_1}^{\tau} G_2(t, s) [B_2(s)u_2(s) + C_2(s)v_2(s)] ds + \\ & + \int_{\tau}^{t_0} G_1(t, s) [B_1(s)u_1(s) + C_1(s)v_1(s)] ds, \text{ при } t_0 \leq t \leq \tau. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Нам необходимо, чтобы момент τ в этих выражениях удовлетворял условию пересечения, так чтобы $\langle x(\tau), c \rangle = \gamma$. Поскольку $\mathcal{X}[t, t_0] = \{x \mid V(t, x) \leq 0\}, \forall t \in [t_0, t_1]$, то достаточно ввести штрафующий член $(\langle x(\tau), c \rangle - \gamma)^2$ в выражение для $V(t, x)$, тем самым обеспечивая для $\mathcal{X}[t, t_0]$ включение только тех траекторий, которые удовлетворяют нашим двум системам и условию на момент переключения.

$$V(t, x) = \min_{u_1 \in \mathcal{P}_1} \max_{v_1 \in \mathcal{W}_1} \min_{u_2 \in \mathcal{P}_2} \max_{v_2 \in \mathcal{W}_2} \max_{\tau} \{d^2(x_0|_{x(t)=x}, \mathcal{X}_0) + (\langle x(\tau), c \rangle - \gamma)^2\}.$$

Пока примем $\gamma = 0$. Для линеаризации условия на переключение сделаем подстановку

$$\langle x(\tau), c \rangle^2 \equiv \max_{\mu} \left\{ \mu \langle x(\tau), c \rangle - \frac{\mu^2}{4} \right\},$$

и, используя (1.2), имеем

$$V(t, x) = \min_{u_1 \in \mathcal{P}_1} \max_{v_1 \in \mathcal{W}_1} \min_{u_2 \in \mathcal{P}_2} \max_{v_2 \in \mathcal{W}_2} \max_{\tau} \left\{ \max_{\ell} \max_{\mu} \left\{ \langle \ell, x_0|_{x(t)=x} \rangle + \mu \langle x(\tau), c \rangle - \frac{\mu^2}{4} - \rho(\ell \mid \mathcal{X}_0) - \frac{\|\ell\|^2}{4} \right\} \right\}.$$

Раскрывая (1.3), получим

$$\begin{aligned} V(t, x) = & \min_{u_1 \in \mathcal{P}_1} \max_{v_1 \in \mathcal{W}_1} \min_{u_2 \in \mathcal{P}_2} \max_{v_2 \in \mathcal{W}_2} \min_{\tau \in [t_0, t]} \max_{\ell} \max_{\mu} \{ \\ & \langle \ell, G_1(t_0, \tau) G_2(\tau, t) x \rangle + \int_t^{\tau} \langle \ell, G_1(t_0, \tau) G_2(\tau, s) [B_2(s) u_2(s) + C_2(s) v_2(s)] \rangle ds + \\ & + \int_{\tau}^{t_0} \langle \ell, G_1(t_0, s) [B_1(s) u_1(s) + C_1(s) v_1(s)] \rangle ds + \mu \langle c, G_2(\tau, t) x \rangle + \\ & + \mu \int_t^{\tau} \langle c, G_2(\tau, s) [B_2(s) u_2(s) + C_2(s) v_2(s)] \rangle ds - \\ & - \frac{\mu^2}{4} - \rho(\ell \mid \mathcal{X}_0) - \frac{\|\ell\|^2}{4} \} \end{aligned}$$

Сгруппируем слагаемые

$$\begin{aligned} \tilde{S}(\tau, t) &= \ell^T G_1(t_0, \tau) G_2(\tau, t) + \mu c^T G_2(\tau, t), \\ \tilde{S}_1(t_0, \tau) &= \ell^T G_1(t_0, \tau), \end{aligned}$$

получим

$$\begin{aligned} V(t, x) = & \min_{u_1 \in \mathcal{P}_1} \max_{v_1 \in \mathcal{W}_1} \min_{u_2 \in \mathcal{P}_2} \max_{v_2 \in \mathcal{W}_2} \min_{\tau \in [t_0, t]} \max_{\ell} \max_{\mu} \{ \\ & \tilde{S}(\tau, t) x + \int_t^{\tau} \tilde{S}(\tau, s) [B_2(s) u_2(s) + C_2(s) v_2(s)] ds + \\ & + \int_{\tau}^{t_0} \tilde{S}_1(t_0, s) [B_1(s) u_1(s) + C_1(s) v_1(s)] ds - \\ & - \frac{\mu^2}{4} - \rho(\ell \mid \mathcal{X}_0) - \frac{\|\ell\|^2}{4} \} \end{aligned} \tag{1.4}$$

Чтобы эффективно вычислять множества достижимости используется прием, который позволяет заменить поиск множества допустимых траекторий вычислением опорной

функции к этому множеству. Для перехода к опорным функциям требуется менять местами порядок минимумов и максимумов в (1.4), а для этого необходимо выполнение условий теоремы минимакса. Поэтому дальнейшие преобразования выполняются с целью обеспечения этих условий. Одним из достаточных условий перестановки является линейность по минимизирующему или максимизирующему параметру. Наша цель состоит в том, чтобы перенести операции минимума по u_1, u_2 и максимума по v_1, v_2 внутрь выражения функции цены, тем самым сводя минимизацию/максимизацию на пространстве функций к минимизации/максимизации на евклидовом пространстве. Первыми меняются местами $\max_{v_2} \min_{\tau}(\cdot) = \min_{\tau} \max_{v_2}(\cdot)$. Для примера, рассмотрим функционал

$$T(\tau, v(s)) = \int_t^{\tau} v(s) ds$$

Легко видеть, что $T(\tau, v(s))$, являясь линейным по v , не является таковым по τ . Для этого, вместо τ возьмем функцию $\tau(w) = \phi(w)$ и преобразуем

$$T(\phi(w), v(s)) = \int_{t_0}^t \phi(w) dw \int_t^w v(s) ds.$$

Мы подразумеваем здесь, что $\phi(w) = \delta(w)$. Теперь функционал $T(\phi, v)$ является линейным по всем аргументам.

Таким же образом мы поступим с $V(t, x)$:

$$\begin{aligned} V(t, x) = & \min_{u_1 \in \mathcal{P}_1} \max_{v_1 \in \mathcal{W}_1} \min_{u_2 \in \mathcal{P}_2} \max_{v_2 \in \mathcal{W}_2} \min_{\phi(w)} \max_{\ell} \max_{\mu} \int_{t_0}^t \phi(w) \left\{ \right. \\ & \tilde{S}(w, t)x + \int_t^w \tilde{S}(w, s) [B_2(s)u_2(s) + C_2(s)v_2(s)] ds + \\ & + \int_w^{t_0} \tilde{S}_1(t_0, s) [B_1(s)u_1(s) + C_1(s)v_1(s)] ds - \\ & \left. - \frac{\mu^2}{4} - \rho(\ell \mid \mathcal{X}_0) - \frac{\|\ell\|^2}{4} \right\} dw, \end{aligned}$$

Поскольку мы здесь воспользовались перестановкой

$$\int \max_{\ell, \mu} f(w, \ell, \mu) dw = \max_{\ell(w), \mu(w)} \int f(w, \ell(w), \mu(w)) dw,$$

ℓ, μ теперь функции от w , $\ell = \ell(w)$ и $\mu = \mu(w)$. Можно заметить, что от w зависят только переменные \tilde{S}, \tilde{S}_1 и пределы интегрирования. Поменяем порядок интегрирования, чтобы собрать вместе члены, зависящие от w . Применяя правила замены

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^t dw \int_t^w ds(\cdot) &= \int_t^{t_0} ds \int_{t_0}^s dw(\cdot), \\ \int_{t_0}^t dw \int_w^{t_0} ds(\cdot) &= \int_t^{t_0} ds \int_s^t dw(\cdot), \end{aligned}$$

и делая замену переменных

$$S(t_0, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} \phi(w) \tilde{S}(w, t_1) dw = \int_{t_0}^{t_1} \phi(w) \{ \ell^T G_1(t_0, w) G_2(w, t) + \mu c^T G_2(w, t) \} dw,$$

$$S_1(t_0, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} \phi(w) \tilde{S}_1(t_0, w) dw = \int_{t_1}^{t_0} \phi(w) \{ \ell^T G_1(t_0, w) \} dw,$$

придем к

$$\begin{aligned} V(t, x) = & \min_{u_1 \in \mathcal{P}_1} \max_{v_1 \in \mathcal{W}_1} \min_{u_2 \in \mathcal{P}_2} \max_{v_2 \in \mathcal{W}_2} \min_{\phi(w)} \max_{\ell(w)} \max_{\mu(w)} \left\{ \right. \\ & S(t_0, t)x + \int_t^{t_0} S(t_0, s) [B_2(s)u_2(s) + C_2(s)v_2(s)] ds + \\ & + \int_t^{t_0} S_1(s, t) [B_1(s)u_1(s) + C_1(s)v_1(s)] ds - \\ & \left. - \frac{\mu^2}{4} - \rho(\ell \mid \mathcal{X}_0) - \frac{\|\ell\|^2}{4} \right\}. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Будем искать опорную функцию к множеству достижимости $\mathcal{X}[t, \mathcal{X}_0]$, определяемому по найденному выше выражению (1.5) для $V(t, x)$. Пользуясь линейностью по $\phi(w)$, теперь можно переставить

$$\max_{v_2 \in \mathcal{W}_2} \min_{\phi(w)} \max_{\ell(w)} \max_{\mu(w)} (\cdot) = \min_{\phi(w)} \max_{\ell(w)} \max_{\mu(w)} \max_{v_2 \in \mathcal{W}_2} (\cdot),$$

тогда получим

$$\begin{aligned} V(t, x) = & \min_{u_1 \in \mathcal{P}_1} \max_{v_1 \in \mathcal{W}_1} \min_{u_2 \in \mathcal{P}_2} \min_{\phi(w)} \max_{\ell(w)} \max_{\mu(w)} \left\{ \right. \\ & S(t_0, t)x + \int_t^{t_0} S(t_0, s) B_2(s) u_2(s) ds + \int_t^{t_0} \rho(S(t_0, s) \mid C_2(s) \mathcal{W}_2(s)) ds \\ & + \int_t^{t_0} S_1(s, t) [B_1(s)u_1(s) + C_1(s)v_1(s)] ds - \\ & \left. - \frac{\mu^2}{4} - \rho(\ell \mid \mathcal{X}_0) - \frac{\|\ell\|^2}{4} \right\}. \end{aligned}$$

Далее, мы хотим заменить $\min_{u_2}(\cdot)$ опорной функцией, но полученное нами выражение уже не является вогнутым по ℓ, μ . Чтобы исправить ситуацию, мы прибегаем к овыпуклению нужных членов и получаем

$$\begin{aligned} V(t, x) = & \min_{u_1 \in \mathcal{P}_1} \max_{v_1 \in \mathcal{W}_1} \min_{\phi(w)} \max_{\ell(w)} \max_{\mu(w)} \left\{ \right. \\ & S(t_0, t)x - \int_{t_0}^t \rho(S(t_0, s) \mid B_2(s) \mathcal{P}_2(s)) ds + \int_t^{t_0} S_1(s, t) [B_1(s)u_1(s) + C_1(s)v_1(s)] ds \\ & \left. - \text{conv} \left\{ - \int_t^{t_0} \rho(S(t_0, s) \mid C_2(s) \mathcal{W}_2(s)) ds + \frac{\mu^2}{4} + \rho(\ell \mid \mathcal{X}_0) + \frac{\|\ell\|^2}{4} \right\} \right\}. \end{aligned}$$

Аналогично, \max_{v_1} переставляется также как и \max_{v_2} , имеем

$$V(t, x) = \min_{u_1 \in \mathcal{P}_1} \min_{\phi(w)} \max_{\ell(w)} \max_{\mu(w)} \left\{ \right. \\ S(t_0, t)x - \int_{t_0}^t S_1(s, t)B_1(s)u_1(s) ds + \int_t^{t_0} \rho(S_1(s, t) \mid C_1(s)\mathcal{W}_1(s)) ds - \int_{t_0}^t \rho(S(t_0, s) \mid B_2(s)\mathcal{P}_2(s)) ds \\ \left. - \text{conv} \left\{ - \int_t^{t_0} \rho(S(t_0, s) \mid C_2(s)\mathcal{W}_2(s)) ds + \frac{\mu^2}{4} + \rho(\ell \mid \mathcal{X}_0) + \frac{\|\ell\|^2}{4} \right\} \right\}.$$

Опять сталкиваемся с ситуацией овыпукления:

$$V(t, x) = \min_{\phi(w)} \max_{\ell(w)} \max_{\mu(w)} \left\{ \right. \\ S(t_0, t)x - \int_{t_0}^t \rho(S_1(s, t) \mid B_1(s)\mathcal{P}_1(s)) ds - \int_{t_0}^t \rho(S(t_0, s) \mid B_2(s)\mathcal{P}_2(s)) ds + \\ + \text{conc} \left\{ \int_t^{t_0} \rho(S_1(s, t) \mid C_1(s)\mathcal{W}_1(s)) ds - \right. \\ \left. - \text{conv} \left\{ - \int_t^{t_0} \rho(S(t_0, s) \mid C_2(s)\mathcal{W}_2(s)) ds + \frac{\mu^2}{4} + \rho(\ell \mid \mathcal{X}_0) + \frac{\|\ell\|^2}{4} \right\} \right\} \right\},$$

и наконец

$$V(t, x) = \min_{\phi(w)} \max_{\ell(w)} \max_{\mu(w)} \left\{ \right. \\ S(t_0, t)x - \int_{t_0}^t \rho(S_1(s, t) \mid B_1(s)\mathcal{P}_1(s)) ds - \int_{t_0}^t \rho(S(t_0, s) \mid B_2(s)\mathcal{P}_2(s)) ds + \\ + \text{conc} \left\{ \int_t^{t_0} \rho(S_1(s, t) \mid C_1(s)\mathcal{W}_1(s)) ds + \int_t^{t_0} \rho(S(t_0, s) \mid C_2(s)\mathcal{W}_2(s)) ds - \frac{\mu^2}{4} - \rho(\ell \mid \mathcal{X}_0) - \frac{\|\ell\|^2}{4} \right\} \right\}.$$