$$V(t,x) = \min_{\phi}\max_{\ell}\max_{\mu}\Bigg\{$$

$$S^T(t_0,t)x - \int\limits_{t_0}^{t} \rho(S_1(s,t) \mid B_1(s)\mathcal{P}_1(s))\,ds - \int\limits_{t_0}^{t} \rho(S(t_0,s) \mid B_2(s)\mathcal{P}_2(s))\,ds -$$

$$-\mathrm{conv}\left\{-\int\limits_{t_0}^{t} \rho(-S_1(s,t) \mid C_1(s)\mathcal{W}_1(s))\,ds - \int\limits_{t_0}^{t} \rho(-S(t_0,s) \mid C_2(s)\mathcal{W}_2(s))\,ds + K(\ell,\mu,\mathcal{X}_0)\right\}\Bigg\}.$$

Утверждение 1.

$$conv\int\limits_{t_0}^{t} f(x(t))dt = \int\limits_{t_0}^{t} conv f(x(t))dt$$

Примем

$$conv(f) = f^{**}$$

Тогда

$$\left(\int\limits_{t_0}^{t} f(x(s))ds\right)^{*}(\ell(t)) = \max_{x(\cdot)}\left(\langle \ell, x\rangle_{L_2} - \int\limits_{t_0}^{t} f(x(s))ds\right)$$

$$\left(\int\limits_{t_0}^{t} f(x(t))dt\right)^{**}(y(t)) = \max_{\ell(\cdot)}\left(\langle y, \ell\rangle_{L_2} - \max_{x(\cdot)}\left(\langle \ell, x\rangle_{L_2} - \int\limits_{t_0}^{t} f(x(s))ds\right)\right) =$$

$$= \max_{\ell(\cdot)}\min_{x(\cdot)}\left(\langle y, \ell\rangle_{L_2} - \langle \ell, x\rangle_{L_2} + \int\limits_{t_0}^{t} f(x(s))ds\right) =$$

$$= \max_{\ell(\cdot)}\min_{x(\cdot)}\int\limits_{t_0}^{t} \left[\langle y(s), \ell(s)\rangle - \langle \ell(s), x(s)\rangle + f(x(s))\right] ds =$$

$$= \int\limits_{t_0}^{t} \max_{\ell(s)}\min_{x(s)}\left[\langle y(s), \ell(s)\rangle - \langle \ell(s), x(s)\rangle + f(x(s))\right] ds =$$

$$= \int\limits_{t_0}^{t} \max_{\ell(s)}\left[\langle y(s), \ell(s)\rangle - \max_{x(s)}\left\{\langle \ell(s), x(s)\rangle - f(x(s))\right\}\right] ds =$$

$$= \int\limits_{t_0}^{t} f^{**}(s)ds$$

■

Утверждение 2.

$$\max_{x(\cdot)}\int\limits_{t_0}^{t} f(x(s))ds = \int\limits_{t_0}^{t} \max_{x(s)} f(x(s))ds$$

Пусть
$$x^*(\cdot) = \arg\max_{x(\cdot)} \int\limits_{t_0}^{t} f(x(s))ds$$
$$x^\circ(\cdot) : \int\limits_{t_0}^{t} f(x^\circ(s)) = \int\limits_{t_0}^{t} \max_{x(s)} f(x(s))ds.$$
Предположим, что $x^*(\cdot) \neq x^\circ(\cdot)$ и $\int\limits_{t_0}^{t} f(x^*(s))ds \neq \int\limits_{t_0}^{t} f(x^\circ(s))ds$.
Тогда для выражения $m(s) = f(x^*(s)) - f(x^\circ(s))$ можно указать непересекающиеся отрезки $T_<, T_>, T_=$, на которых выполняются неравенства
$$\forall s \in T_< : \, m(s) < 0, \; \forall s \in T_> : \, m(s) > 0, \; \forall s \in T_= : \, m(s) = 0.$$
Для $T_>$ получаем, что
$$\forall s \in T_> : f(x^*(s)) > f(x^\circ(s)) = max_{x(s)} f(x(s)$$
– противоречие,
Для $T_<$ получаем, что
$$max_{x(\cdot)} \int\limits_{T_<} f(x(s))ds = \int\limits_{T_<} f(x^*(s))ds < \int\limits_{T_<} f(x^\circ(s))ds$$
– противоречие,
Остается единственный вариант, который и доказывает утверждение. ■

Рассмотрим примеры в $\mathbb{R}^1$

Пример 1.
$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} \dot{x} = 2u + v; \\ \dot{x} = u; \end{array} \right. \\ u \in [0, 1]; \\ v \in [0, 1]; \\ \mathcal{X}_0 = \{x \in [-2, -1]\}; \\ t \in [0, 4]; \\ H = \{x = 0\}. \end{cases} \tag{0.1}$$

Пример 2.
$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} \dot{x} = u; \\ \dot{x} = 2u + v; \end{array} \right. \\ u \in [0, 1]; \\ v \in [0, 1]; \\ \mathcal{X}_0 = \{x \in [-2, -1]\}; \\ t \in [0, 4]; \\ H = \{x = 0\}. \end{cases} \tag{0.2}$$

Начальные условия для (0.1) и (0.2) одинаковы. Функция цены для задач (0.1) и (0.2).
$$V(t, x) = \min_u \max_v \max_\tau \max_\ell \max_\mu \left\{ \left\langle \ell, x_0 \mid_{x(t)=x} \right\rangle - \rho(\ell \mid \mathcal{X}_0) - \frac{\|\ell\|^2}{4} + \mu \left\langle x(\tau), c \right\rangle - \frac{\mu^2}{4} \right\}.$$

В одномерном случае, если рассматривать отрезок $[\alpha, \beta]$ как эллипсоид $\mathcal{E}(q, Q)$, то $q = \frac{\beta+\alpha}{2}$, $Q = \left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right)^2$. Тогда

$$\rho\left(\ell \mid \mathcal{E}(()q, Q)\right) = \langle \ell, q\rangle + \langle \ell, Q\ell\rangle^{\frac{1}{2}} = \ell \cdot q + \mid \ell \mid \sqrt{Q}.$$

Поскольку в уравнениях примеров (0.1) и (0.2) фундаментальные матрицы $G(t, t_0) \equiv I$, то можно написать

$$V(t,x) = \min_u \max_v \min_\tau \max_\ell \max_\mu \Big\{ \ell \cdot x + \int_t^\tau \ell \cdot [B_2 u_2 + v_2] ds + \int_\tau^{t_0} \ell \cdot [B_1 u_1 + v_1] ds -$$

$$-(\ell \cdot x_0 + \mid \ell \mid \sqrt{X_0}) - \frac{\ell^2}{4} + \mu\Big[x + \int_t^\tau [B_2 u_2 + v_2] ds\Big] - \frac{\mu^2}{4} \Big\}.$$

Здесь $\mathcal{X}_0 = \mathcal{E}(x_0, X_0)$, для (0.1) $v_2 \equiv 0$, для (0.2) $v_1 \equiv 0$. Если сократить, то получим для (0.1):

$$V(t,x) = \min_u \max_v \min_\tau \max_\ell \max_\mu \Big\{ (\ell + \mu)x + \int_t^\tau (\ell + \mu) B_2 u_2 ds + \int_\tau^{t_0} \ell B_1 u_1 ds + \int_\tau^{t_0} \ell v_1 ds -$$

$$-(\ell \cdot x_0 + \mid \ell \mid \sqrt{X_0}) - \frac{\ell^2}{4} - \frac{\mu^2}{4} \Big\}.$$

Для (0.2)

$$V(t,x) = \min_u \max_v \min_\tau \max_\ell \max_\mu \Big\{ (\ell + \mu)x + \int_t^\tau (\ell + \mu) B_2 u_2 ds + \int_t^\tau (\ell + \mu) v_2 ds + \int_\tau^{t_0} \ell B_1 u_1 ds -$$

$$-(\ell \cdot x_0 + \mid \ell \mid \sqrt{X_0}) - \frac{\ell^2}{4} - \frac{\mu^2}{4} \Big\}.$$

Эти выражения не являются выпуклыми по τ, чтобы можно было переставлять $\max_v \min_\tau$. Поэтому прибегаем к функции распределения $\phi(w)$. $\phi(w)$ – функция ограниченной вариации.

$$\int_{t_0}^t d\phi(w) = 1.$$

Обозначим

$$S_2(t_0, s) = \int_{t_0}^s \ell(w) + \mu(w) d\phi(w)$$

$$S_1(s, t) = \int_s^t \ell(w) d\phi(w)$$

Тогда приходим к найденному ранее выражению (). Использую формулу вычисления опорной функции для множеств из $\mathbb{R}^1$ запишем

$$V(t,x)=\min_{\phi}\max_{\ell}\max_{\mu}\Bigg\{$$

$$S_2(t_0,t)x-\int\limits_{t_0}^{t} S_1(s,t)p_1+\mid S_1(s,t)\mid\sqrt{P_1}ds-\int\limits_{t_0}^{t} S_2(t_0,s)p_2+\mid S_2(t_0,s)\mid\sqrt{P_2}\,ds-$$

$$-\mathrm{conv}\Bigg\{\int\limits_{t_0}^{t} S_1(s,t)w_1-\mid\ S_1(s,t)\mid\sqrt{W_1}\,ds-\int\limits_{t_0}^{t} S(t_0,s)w_2-\mid S(t_0,s)\mid\sqrt{W_2}\,ds+$$

$$+\int\limits_{t_0}^{t}\frac{\ell^2(w)}{4}+\frac{\mu^2(w)}{4}+\ell(w)x_0+\mid\ell(w)\mid\sqrt{X_0}d\phi(w))\Bigg\}\Bigg\}.$$