

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Московский Государственный Университет имени М.В. Ломоносова

Факультет вычислительной математики и кибернетики

Кафедра системного анализа

Магистерская программа по направлению

Математические модели сложных систем: теория, алгоритмы, приложения

Магистерская диссертация на тему

Построение множества достижимости для гибридной системы с
одним переключением с неопределенностью

Выполнил:

Селиверстов Д.С.

Научный руководитель:

к.ф-м.н. Точилин П.А.

Москва, 2010

Аннотация

Данная магистерская диссертация посвящена решению одной из классических задач теории управления для нового класса сложных, нелинейных систем. А именно, решается задача построения множества достижимости для гибридной системы с одним переключением, с неопределенностью в дифференциальных уравнениях. В работе рассмотрена модель гибридной динамической системы, состоящая из двух систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений и условия переключения между ними. Задача состоит в построении и аппроксимации множества всех траекторий этой гибридной системы в конечный момент времени, в которые гарантированно можно попасть, выбрав соответствующее управление, вне зависимости от реализации помехи.

В диссертации получено решение поставленной задачи с привлечением аппарата выпуклого анализа, при помощи сопряженных функций и функций цены минимаксного типа. Множество достижимости представлено в виде объединения множеств уровня (множеств Лебега) для специальных функций. Рассмотрено решение задачи методами многозначного анализа. Этот подход позволяет явно построить искомое множество достижимости посредством операций над выпуклыми, компактными множествами. В работе 19 страниц, 2 иллюстраций.

Содержание

1. Введение.	4
2. Постановка задачи	5
3. Теоретическая часть.	6
3.1 Построение множества при помощи функции цены.	6
3.2 Построение множества методами многозначного анализа.	12
3.2.1 Множество достижимости до переключения.	12
3.2.2 Пересечение с гиперплоскостью.	14
3.2.3 Вычисление множества достижимости для второй системы	16

1. Введение.

В данной работе рассматривается математическая модель гибридной системы, состоящей из двух систем обыкновенных дифференциальных уравнений с управляющими параметрами и помехами, а также из условия замены одной системы на другую. Траектория такой системы развивается в каждый момент времени в силу одной из двух систем дифференциальных уравнений. При достижении определенной гиперплоскости в фазовом пространстве происходит обязательная смена активной системы уравнений — так называемое переключение траектории гибридной системы [3]. Рассматриваемые системы обыкновенных дифференциальных уравнений являются линейными по фазовым переменным, а также по управляющим параметрам и помехам. Однако, в целом система нелинейна. Похожие модели гибридных систем активно исследуются в последние годы (см. например, [6], [11], [10]), для них актуальны многие классические задачи управления, такие как задачи достижимости, верификации, синтеза управления в условиях реально доступной информации и др. Особенно важны задачи, в которых учитываются неопределенности, помехи, которые могут быть связаны как с ошибками математического моделирования, так и с заранее неизвестными воздействиями на систему.

В данной работе для гибридной системы решается задача построения множества достижимости “минимаксного типа” в классе программных управлений. То есть необходимо построить множество всех позиций системы, в которые можно попасть за счет применения программных управлений, несмотря на наличие в системе заранее неизвестных помех. Для действующих в системе помех известны лишь по-точечные ограничения. Решение данной задачи можно рассматривать как первый шаг к построению теории достижимости при неопределенности для гибридных систем с кусочно-линейной структурой в классах программных или позиционных управлений.

Поскольку рассматриваемые дифференциальные уравнения линейны по фазовым переменным, управлениям и помехам, то для решения поставленной задачи целесообразно использовать аппарат сопряженных функций и другие методы выпуклого анализа [4], [5]. Кроме того, для аппроксимации множеств достижимости возможно использование методов эллипсоидального исчисления [9], [8]. В данной работе рассматривается два подхода к решению задачи достижимости: 1) при помощи функций цены и методов выпуклого анализа, а также 2) при помощи методов многозначного анализа. В первом случае множества достижимости представлены в виде множеств уровней (множеств Лебега) для специальных функций, а во втором методе указанные множества построены в явном виде, за счет применения операций с выпуклыми компактами.

2. Постановка задачи

Рассматриваются две взаимосвязанные системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающих состояние некоторой модели до переключения (смены системы дифференциальных уравнений) и после:

$$\left\{ \begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} \dot{x}^{(1)} = A^{(1)}(t)x^{(1)} + B^{(1)}(t)u^{(1)}(t) + C^{(1)}(t)v^{(1)}(t); \\ x(t_0) \in \mathcal{E}(x_0, X_0) = \mathcal{X}_0; \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} \dot{x}^{(2)} = A^{(2)}(t)x^{(2)} + B^{(2)}(t)u^{(2)}(t) + C^{(2)}(t)v^{(2)}(t); \\ x(\tau) \in \mathcal{X}^{(1)}(\tau, t_0) \cap H; \end{array} \right. \\ H = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, c \rangle = \gamma\} \text{— гиперплоскость переключения;} \\ A(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}, B(t) \in \mathbb{R}^{n \times m}, C(t) \in \mathbb{R}^{n \times k}; A(t), B(t), C(t) \in L_1[t_0, t_1]; \\ \tau : \langle x^{(1)}(\tau), c \rangle - \gamma = 0, \tau \in [t_0, t_1] \\ u^{(1)}(t) \in \mathcal{E}(p^{(1)}(t), P^{(1)}(t)) = \mathcal{P}^{(1)}[t_0, t_1]; \\ v^{(1)}(t) \in \mathcal{E}(w^{(1)}(t), W^{(1)}(t)) = \mathcal{V}^{(1)}[t_0, t_1]; \\ u^{(2)}(t) \in \mathcal{E}(p^{(2)}(t), P^{(2)}(t)) = \mathcal{P}^{(2)}[t_0, t_1]; \\ v^{(2)}(t) \in \mathcal{E}(w^{(2)}(t), W^{(2)}(t)) = \mathcal{V}^{(2)}[t_0, t_1]; \end{array} \right. \end{array} \right. \quad (2.1)$$

где $\mathcal{P}^{(1,2)}[t_0, t_1], \mathcal{V}^{(1,2)}[t_0, t_1]$ - кусочно-непрерывные эллипсоидальнозначные отображения. В неизвестный заранее момент времени τ , при пересечении наперед известной гиперплоскости $H = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, c \rangle = \gamma\}$, происходит переключение с первой системы на вторую. $v^{(i)}(t)$ - неизвестная функция, неопределенность, область значений которой в каждый момент t ограничена k -мерной эллипсоидальной областью $\mathcal{V}^{(i)}(t)$, и принадлежащая классу интегрируемых функций $L_1[t_0, t_1]$. Управление $(u^{(1)}(\cdot), u^{(2)}(\cdot))$ - интегрируемые в $L_1[t_0, t_2]$ функции, ограниченные в каждый момент t эллипсоидальными областями $u^{(1)}(t) \in \mathcal{P}^{(1)}(t), u^{(2)}(t) \in \mathcal{P}^{(2)}(t)$. Оно выбирается из класса программных управлений то есть так, что оно определяется к начальному моменту t_0 заранее и уже не изменяется в зависимости от поведения системы в дальнейшем, оно также не зависит от времени переключения τ . Для решения задачи важно, чтобы траектория гибридной системы удовлетворяла условию односторонней проницаемости, то есть чтобы при переходе через плоскость H в момент τ всегда выполнялось

$$\left\{ \begin{array}{l} \langle x(\tau), c \rangle - \gamma = 0 \\ \langle x(\tau + \epsilon), c \rangle - \gamma > 0; \end{array} \right. \quad (2.2)$$

для любого малого $\epsilon > 0$. Это предположение будем считать выполненным как для первой системы $x(t) = x^{(1)}(t)$, так и для второй $x(t) = x^{(2)}(t)$, где $x^{(1)}(t), x^{(2)}(t)$ - фазовые переменные (траектории) системы соответственно до переключения и после. Это означает, что траектория системы может пересекать гиперплоскость переключения только один раз с переходом к другой системе, что также гарантирует связность множества $\{(x(\tau), \tau) \mid x(\tau) \in H\}$. Требуется построить множество достижимости $\mathcal{X}[t, t_0]$ в классе допустимых управлений $\mathcal{P}[t_0, t_1]$, в момент времени $t > t_0$, при известном начальном множестве \mathcal{X}_0 . Таким образом, необходимо найти множество точек $\mathcal{X}[t, t_0, \mathcal{X}_0] = \{x(t)\}$, в которые система может гарантированно прийти из начального множества \mathcal{X}^0 за счет выбора соответствующего управления $(u^{(1)}(\cdot), u^{(2)}(\cdot))$ вне зависимости от помехи $(v^{(1)}(\cdot), v^{(2)}(\cdot))$.

Определение 1. Эллипсоидом $\mathcal{E}(q, Q)$ называется множество

$$\{x \mid (x - q)^T Q^{-1} (x - q) \leq 1\}$$

, где $x, q \in \mathbb{R}^n, Q \in \mathbb{R}^{n \times n}, Q = Q^T, Q$ – положительно определенная матрица.

Определение 2. Множеством достижимости $\mathcal{X}[t_1, t_0, \mathcal{X}_0]$ системы линейных дифференциальных уравнений в момент t_1 называется

$$\mathcal{X}[t_1, t_0, \mathcal{X}_0] = \{x_1 \mid \exists u(\cdot) : \forall v(\cdot), \exists x_0 \in \mathcal{X}_0 : x(t_1, t_0, x_0) = x_1\},$$

где $x(\cdot, t, x)$ – траектория системы при фиксированных $u(\cdot), v(\cdot)$ и начальном условии $x(t) = x$. \mathcal{X}_0 – начальное множество в момент времени t_0 .

Определение 3. Множеством достижимости $\mathcal{X}[t_1, t_0, \mathcal{X}_0]$ для гибридной системы (2.1) называется

$$\mathcal{X}[t_1, t_0, \mathcal{X}_0] = \{x_1 \mid \exists u^{(1)}(\cdot) \in \mathcal{P}^{(1)}, u^{(2)}(\cdot) \in \mathcal{P}^{(2)} :$$

$$\forall v^{(1)}(\cdot) \in \mathcal{V}^{(1)}, v^{(2)}(\cdot) \in \mathcal{V}^{(2)} : \exists x_0 \in \mathcal{X}_0 :$$

$$x(t_1, t_0, x_0) = x_1, \exists \tau : x(\tau, t_0, x_0) \cap H \neq \emptyset, t_1 \geq \tau > t_0\},$$

где $x(\tau, t, x_0)$ – траектория гибридной системы при фиксированном управлении $u^{(1,2)}$ и помехе $v^{(1,2)}$.

[Файл teoriya.tex:](#)

3. Теоретическая часть.

Поиск множества достижимости непосредственным расчетом каждой траектории ведет к большим вычислительным издержкам. Поэтому разумно прибегнуть к различным методам, которые позволили бы воспользоваться свойствами данной модели, такими как линейность системы уравнений и выпуклость множеств ограничений и начального множества, что позволит сократить количество вычислений с помощью параметризации множеств с помощью вычисления конечномерных функций. Например, можно использовать множества уровней некоторой специальной функции, и по ним однозначно вычислять искомое множество. Другой подход основывается на применении приемов многозначного анализа. Так, если известна опорная функция к выпуклому компактному множеству, то по этой функции можно восстановить все множество. Рассмотрим сначала первый подход.

3.1 Построение множества при помощи функции цены.

Будем искать множество достижимости с использованием функции цены, значениями которой будет расстояние выбранной точки $x(t)$ от искомого множества $\mathcal{X}[t, t_0, \mathcal{X}_0]$. Согласно (Опр.3.), необходимо найти наиболее подходящее управление, которое позволит сократить до минимума это расстояние при любой возможной реализации помехи. Для этого используется минимаксный подход, описанный в [2].

Для поиска множества $\mathcal{X}[t, t_0]$ используется функция цены вида

$$V(t, x) = \min_{u(\cdot)} \max_{v(\cdot)} d^2(x_0 \mid x(t)=x, \mathcal{X}_0),$$

где $d(x_0, \mathcal{X}_0)$ – расстояние между точкой x_0 и множеством \mathcal{X}_0 , определяемое метрикой $d(x, \mathcal{X}) = \min_{y \in \mathcal{X}} \|x - y\|$. Поясним наш выбор. Мы ищем множество $\mathcal{X}[t, \mathcal{X}_0]$ всех таких

точек, что для $\forall x^*(t) \in \mathcal{X}[t, \mathcal{X}_0]$ можно заранее подобрать некоторое управление $u^*(\cdot)$ и некоторое подмножество $\{x^*(t_0)\} \in \mathcal{X}_0$ так, чтобы при любой помехе $v(\cdot)$ гарантировать вхождение $x^*(t) \in \{x(t, u^*(\cdot), \{x^*(t_0)\})\}_{\forall v(\cdot)}$. В рассматриваемой здесь задаче кроме помехи $v(\cdot)$ появляется другой неизвестный параметр $\tau(u, v)$ – момент переключения, в который меняется динамика системы, что приводит к существенному усложнению задачи.

Рассмотрим функцию $\phi(x) = d^2(x, \mathcal{X})$, где \mathcal{X} – выпуклый компакт. Тогда $\phi(x)$ – выпуклая, собственная, замкнутая, и тогда операция двойного сопряжения приводит к тождественному результату [4]. Удобно выразить $V(x, t)$ через двойное сопряжение функции расстояния $d^2(x, \mathcal{X}_0)$, что позволит заменить вычисление минимума на множестве в функции расстояния на вычисление максимума функции по n -мерному аргументу.

$$\begin{aligned}\phi^*(\ell^*) &= \sup_x (\langle x, \ell^* \rangle - d^2(x, \mathcal{X}_0)) = \rho(\ell^* \mid \mathcal{X}_0) + \frac{\|\ell^*\|^2}{4}, \\ \phi^{**}(\ell^{**}) &= \sup_{\ell^*} \left(\langle \ell^*, \ell^{**} \rangle - \rho(\ell^* \mid \mathcal{X}_0) - \frac{\|\ell^*\|^2}{4} \right).\end{aligned}$$

Поскольку $\phi(\ell)$ – замкнутая функция, \sup достигается и его можно заменить на \max , тогда

$$V(t, x) = \min_{u(\cdot)} \max_{v(\cdot)} \max_{\ell} \left(\langle \ell, x_0 \mid x \rangle - \rho(\ell \mid \mathcal{X}_0) - \frac{\|\ell^*\|^2}{4} \right). \quad (3.1)$$

Найдем выражения для поиска $x_0 \mid_{x(t_1)=x}$. Пусть траектория точки в момент t_1 известна $x(t_1) = x$. Идя в обратном времени, найдем её значение в момент $\tau \leq t \leq t_1$ при известных $B(s), C(s), u(s), v(s)$ до переключения:

$$x^{(2)}(t, x, u, v) = G_2(t, t_1)x + \int_{t_1}^t G_2(t, s) [B_2(s)u_2(s) + C_2(s)v_2(s)] ds, \text{ при } \tau \leq t \leq t_1,$$

и после для $t_0 \leq t \leq \tau$:

$$\begin{aligned}x^{(2,1)}(t, \tau, x, u, v) &= G_1(t, \tau)G_2(\tau, t_1)x + G_1(t, \tau) \int_{t_1}^{\tau} G_2(t, s) [B_2(s)u_2(s) + C_2(s)v_2(s)] ds + \\ &+ \int_{\tau}^{t_0} G_1(t, s) [B_1(s)u_1(s) + C_1(s)v_1(s)] ds, \text{ при } t_0 \leq t \leq \tau.\end{aligned} \quad (3.2)$$

Нам необходимо, чтобы момент τ в этих выражениях удовлетворял условию на переключение, так чтобы $\langle x(\tau), c \rangle = \gamma$. Поскольку $d^2(x, \mathcal{X}) \geq 0$, то $V(x, t) \geq 0$. Тогда если $\mathcal{X}[t, t_0] = \{x \mid V(t, x) \leq 0\}, \forall t \in [t_0, t_1]$, то достаточно ввести штрафующий член $(\langle x(\tau), c \rangle - \gamma)^2$ в выражение для $V(t, x)$, тем самым обеспечивая для $\mathcal{X}[t, t_0]$ включение только тех траекторий, которые удовлетворяют нашим двум системам и условию на момент переключения.

Так как мы рассматриваем задачу в классе программных управлений, мы не можем строить управление в зависимости от текущего состояния системы, а должны определять его заранее. Поэтому, в формуле для $V(t, x)$ нельзя искать отдельно $\min_{u^{(i)}} \max_{v^{(i)}}$ для каждой из подсистем "до" и "после", так как момент переключения τ не известен заранее. Это означает, что выбираемое управление не может меняться в зависимости от τ . Это описывается выражением

$$V(t, x) = \min_{\substack{u_1 \in \mathcal{P}^1 \\ u_2 \in \mathcal{P}^2}} \max_{\substack{v_1 \in \mathcal{V}^1 \\ v_2 \in \mathcal{V}^2}} \min_{\tau} \left\{ d^2(x_0 |_{x(t)=x}, \mathcal{X}_0) + (\langle x(\tau), c \rangle - \gamma)^2 \right\}.$$

Это значит, что искомое множество $\mathcal{X}[t, \mathcal{X}_0]$ в классе программных управлений содержит только те траектории, которые при любой допустимой помехе $v_1(\cdot), v_2(\cdot)$ и при любом τ гарантированно могут попасть на множество $\mathcal{X}[t, \mathcal{X}_0]$. Пока примем $\gamma = 0$. Для линеаризации условия на переключение сделаем подстановку

$$\langle x, c \rangle^2 \equiv \max_{\mu} \left\{ \mu \langle x, c \rangle - \frac{\mu^2}{4} \right\},$$

и, используя (3.1), имеем

$$V(t, x) = \min_{u_1, u_2} \max_{v_1, v_2} \min_{\tau} \left\{ \max_{\ell} \max_{\mu} \left\{ \langle \ell, x_0 |_{x(t)=x} \rangle + \mu \langle x(\tau), c \rangle - \frac{\mu^2}{4} - \rho(\ell | \mathcal{X}_0) - \frac{\|\ell\|^2}{4} \right\} \right\}.$$

Раскрывая (3.2), получим

$$\begin{aligned} V(t, x) = & \min_{u_1, u_2} \max_{v_1, v_2} \min_{\tau \in [t_0, t]} \max_{\ell} \max_{\mu} \{ \\ & \langle \ell, G_1(t_0, \tau) G_2(\tau, t) x \rangle + \int_t^{\tau} \langle \ell, G_1(t_0, \tau) G_2(\tau, s) [B_2(s) u_2(s) + C_2(s) v_2(s)] \rangle ds + \\ & + \int_{\tau}^{t_0} \langle \ell, G_1(t_0, s) [B_1(s) u_1(s) + C_1(s) v_1(s)] \rangle ds + \mu \langle c, G_2(\tau, t) x \rangle + \\ & + \mu \int_t^{\tau} \langle c, G_2(\tau, s) [B_2(s) u_2(s) + C_2(s) v_2(s)] \rangle ds - \\ & - \frac{\mu^2}{4} - \rho(\ell | \mathcal{X}_0) - \frac{\|\ell\|^2}{4} \} \end{aligned}$$

Сгруппируем слагаемые

$$\begin{aligned} \tilde{S}(\tau, t) &= G_2^T(\tau, t) G_1^T(t_0, \tau) \ell + \mu G_2^T(\tau, t) c, \\ \tilde{S}_1(t_0, \tau) &= G_1^T(t_0, \tau) \ell, \end{aligned}$$

имеем

$$\begin{aligned} V(t, x) = & \min_{u_1, u_2} \max_{v_1, v_2} \min_{\tau \in [t_0, t]} \max_{\ell} \max_{\mu} \{ \\ & \tilde{S}^T(\tau, t) x + \int_t^{\tau} \tilde{S}^T(\tau, s) [B_2(s) u_2(s) + C_2(s) v_2(s)] ds + \\ & + \int_{\tau}^{t_0} \tilde{S}_1^T(t_0, s) [B_1(s) u_1(s) + C_1(s) v_1(s)] ds - \\ & - \frac{\mu^2}{4} - \rho(\ell | \mathcal{X}_0) - \frac{\|\ell\|^2}{4} \} \end{aligned} \tag{3.3}$$

Чтобы эффективно вычислять множества достижимости используется прием, который позволяет заменить поиск множества допустимых траекторий вычислением опорной функции к этому множеству. Для перехода к опорным функциям требуется менять местами порядок минимумов и максимумов в (3.3), а для этого необходимо выполнение условий

теоремы минимакса. Поэтому дальнейшие преобразования выполняются с целью обеспечения этих условий. Одним из достаточных условий перестановки является линейность по минимизирующему или максимизирующему параметру. Наша цель состоит в том, чтобы перенести операции минимума по u_1, u_2 и максимума по v_1, v_2 внутрь выражения функции цены, тем самым сводя минимизацию/максимизацию на функциональном пространстве \mathcal{P}, \mathcal{V} к поиску минимумов(максимумов) для выпуклых(вогнутых) функций. Первыми меняются местами $\max_{v_1, v_2} \min_{\tau}(\cdot) = \min_{\tau} \max_{v_1, v_2}(\cdot)$. Для примера, сначала рассмотрим функционал

$$T(\tau, v(s)) = \int_t^{\tau} v(s) ds$$

Легко видеть, что $T(\tau, v(s))$, являясь линейным по v , не является таковым по τ . Тогда вместо τ возьмем функцию ограниченной вариации $\tau(w) = \phi(w)$ и преобразуем

$$T(\phi(w), v(s)) = \int_{t_0}^t d\phi(w) \int_t^w v(s) ds.$$

Мы заменили множество τ более широким множеством функций $\phi(w)$. Условием нормировки для этих функций служит следующее выражение

$$\int_{t_0}^t d\phi(w) = 1.$$

Теперь функционал $T(\phi, v)$ является линейным по всем аргументам. Аналогично поступим с $V(t, x)$:

$$\begin{aligned} V(t, x) = & \min_{u_1, u_2} \max_{v_1, v_2} \min_{\phi(w)} \max_{\ell(w)} \max_{\mu(w)} \int_{t_0}^t d\phi(w) \left\{ \right. \\ & \tilde{S}^T(w, t)x + \int_t^w \tilde{S}^T(w, s) [B_2(s)u_2(s) + C_2(s)v_2(s)] ds + \\ & + \int_{t_0}^w \tilde{S}_1^T(t_0, s) [B_1(s)u_1(s) + C_1(s)v_1(s)] ds - \\ & \left. - \frac{\mu^2}{4} - \rho(\ell \mid \mathcal{X}_0) - \frac{\|\ell\|^2}{4} \right\}, \end{aligned}$$

Мы здесь воспользовались перестановкой

$$\int \max_{\ell, \mu} f(w, \ell, \mu) d\phi(w) = \max_{\ell(w), \mu(w)} \int f(w, \ell(w), \mu(w)) d\phi(w),$$

и теперь ℓ, μ есть функции от w .

Утверждение 1.

$$\max_{x(\cdot)} \int_{t_0}^t f(x(s)) ds = \int_{t_0}^t \max_{x(s)} f(x(s)) ds$$

Пусть

$$x^*(\cdot) = \arg \max_{x(\cdot)} \int_{t_0}^t f(x(s)) ds$$

$$x^\circ(\cdot) : \int_{t_0}^t f(x^\circ(s)) ds = \int_{t_0}^t \max_{x(s)} f(x(s)) ds.$$

Предположим, что $x^*(\cdot) \neq x^\circ(\cdot)$ и $\int_{t_0}^t f(x^*(s)) ds \neq \int_{t_0}^t f(x^\circ(s)) ds$.

Тогда для выражения $m(s) = f(x^*(s)) - f(x^\circ(s))$ можно указать непересекающиеся отрезки $T_<, T_>, T_=$, на которых выполняются неравенства

$$\forall s \in T_< : m(s) < 0, \forall s \in T_> : m(s) > 0, \forall s \in T_= : m(s) = 0.$$

Для $T_>$ получаем, что

$$\forall s \in T_> : f(x^*(s)) > f(x^\circ(s)) = \max_{x(s)} f(x(s))$$

– противоречие.

Для $T_<$ получаем, что

$$\max_{x(\cdot)} \int_{T_<} f(x(s)) ds = \int_{T_<} f(x^*(s)) ds < \int_{T_<} f(x^\circ(s)) ds$$

– противоречие.

Остается единственный вариант, который и доказывает утверждение. \square

Можно заметить, что от w зависят только переменные \tilde{S}, \tilde{S}_1 и пределы интегрирования. Поменяем порядок интегрирования, чтобы собрать вместе члены, зависящие от w . Применяя правила замены

$$\int_{t_0}^t d\phi(w) \int_t^w ds(\cdot) = \int_t^{t_0} ds \int_{t_0}^s d\phi(w)(\cdot),$$

$$\int_{t_0}^t d\phi(w) \int_w^{t_0} ds(\cdot) = \int_t^{t_0} ds \int_s^t d\phi(w)(\cdot),$$

и делая замену переменных

$$S(t_0, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} \tilde{S}(w, t_1) d\phi(w) = \int_{t_0}^{t_1} \{G_2^T(w, t) G_1^T(t_0, w) \ell(w) + \mu(w) G_2^T(w, t) c\} d\phi(w),$$

$$S_1(t_0, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} \tilde{S}_1(t_0, w) d\phi(w), = \int_{t_0}^{t_1} \{G_1^T(t_0, w) \ell(w)\} d\phi(w),$$

$$K(\ell, \mu, \mathcal{X}_0) = \int_{t_0}^t \left[\frac{\mu(w)^2}{4} + \rho(\ell(w) \mid \mathcal{X}_0) + \frac{\|\ell(w)\|^2}{4} \right] d\phi(w)$$

придем к

$$\begin{aligned}
V(t, x) = \min_{u_1, u_2} \max_{v_1, v_2} \min_{\phi(w)} \max_{\ell(w)} \max_{\mu(w)} \Big\{ \\
S^T(t_0, t)x + \int_t^{t_0} S^T(t_0, s) [B_2(s)u_2(s) + C_2(s)v_2(s)] ds + \\
+ \int_t^{t_0} S_1^T(s, t) [B_1(s)u_1(s) + C_1(s)v_1(s)] ds - \\
-K(\ell, \mu, \mathcal{X}_0) \Big\},
\end{aligned} \tag{3.4}$$

где $K(\ell, \mu, \mathcal{X}_0)$ – выпуклая функция.

Будем искать опорную функцию ко множеству достижимости $\mathcal{X}[t, \mathcal{X}_0]$, определяемому по найденному выше выражению (3.4) для $V(t, x)$. Пользуясь линейностью по ϕ , теперь можно переставить

$$\max_{v_1, v_2} \min_{\phi} \max_{\ell} \max_{\mu} (\cdot) = \min_{\phi} \max_{\ell} \max_{\mu} \max_{v_1, v_2} (\cdot),$$

и

$$\max_{v(\cdot)} \int_t^{t_0} f(v(s)) ds = \max_{v(\cdot)} \int_{t_0}^t -f(v(s)) ds = \int_{t_0}^t \max_{v(s)} [-f(v(s))] ds$$

тогда

$$\begin{aligned}
V(t, x) = \min_{u_1, u_2} \min_{\phi} \max_{\ell} \max_{\mu} \Big\{ \\
S^T(t_0, t)x + \int_t^{t_0} S^T(t_0, s) B_2(s) u_2(s) ds + \int_{t_0}^t \rho(-S^T(t_0, s) \mid C_2(s) \mathcal{V}_2(s)) ds \\
+ \int_t^{t_0} S_1^T(s, t) B_1(s) u_1(s) + \int_{t_0}^t \rho(-S_1^T(s, t) \mid C_1(s) \mathcal{V}_1) ds - \\
-K(\ell, \mu, \mathcal{X}_0) \Big\}.
\end{aligned}$$

Далее, мы хотим поменять $\min_{u_1, u_2}(\cdot)$ на опорную функцию, но полученное выше выражение уже не является вогнутым по ℓ, μ . Поэтому, мы прибегаем к овыпуклению нужных членов и приходим к

$$\begin{aligned}
V(t, x) = \min_{\phi} \max_{\ell} \max_{\mu} \Big\{ \\
S^T(t_0, t)x - \int_{t_0}^t \rho(S_1(s, t) \mid B_1(s) \mathcal{P}_1(s)) ds - \int_{t_0}^t \rho(S(t_0, s) \mid B_2(s) \mathcal{P}_2(s)) ds - \\
-\text{conv} \left\{ - \int_{t_0}^t \rho(-S_1(s, t) \mid C_1(s) \mathcal{V}_1(s)) ds - \int_{t_0}^t \rho(-S(t_0, s) \mid C_2(s) \mathcal{V}_2(s)) ds + K(\ell, \mu, \mathcal{X}_0) \right\} \Big\}.
\end{aligned}$$

Искомое множество достижимости через функцию цены можно найти как множество уровня

$$\mathcal{X}[t, t_0, \mathcal{X}_0] = \{x \mid V(t, x) \leq 0\}$$

Поскольку значения функции ищутся через вычисление \min, \max по пространству функций, то построить в явном виде эту функцию представляется затруднительным. Однако, полученные формулы можно использовать для построения аппроксимаций функции цены (и соответственно, множества достижимости).

[Файл byconv.tex:](#)

3.2 Построение множества методами многозначного анализа.

Перейдем к поиску решения задачи (2.1) с помощью оценивания множеств методами многозначного анализа.

В отличие от первого подхода, где была найдена функция, полностью характеризующая решение сразу для двух систем уравнений и условия на переключение, теперь будем рассматривать каждый этап по отдельности.

3.2.1 Множество достижимости до переключения.

Для системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{x}^{(1)} = A^{(1)}(t)x^{(1)} + B^{(1)}(t)u^{(1)}(t) + C^{(1)}(t)v^{(1)}(t); \\ x(t_0) \in \mathcal{E}(x_0, X_0) = \mathcal{X}_0; \\ u^{(1)}(t) \in \mathcal{E}(p^{(1)}(t), P^{(1)}(t)) = \mathcal{P}^{(1)}[t_0, t_1]; \\ v^{(1)}(t) \in \mathcal{E}(w^{(1)}(t), W^{(1)}(t)) = \mathcal{V}^{(1)}[t_0, t_1]; \end{cases} \quad (3.5)$$

требуется найти множество достижимости по (Опр.2.).

Это эквивалентно следующей задаче. Пусть нам даны множества $\mathcal{X}_0[t]$ –исходное множество, $\mathcal{P}(t)$ –множество допустимых управлений, $\mathcal{C}(t)$ – множество помех, $X_0, \mathcal{P}(t), \mathcal{C}(t)$ – выпуклые. Гарантированное множество достижимости находится как

$$\mathcal{X}[t] = (\mathcal{X}_0[t] \dot{-} \mathcal{C}(t)) + \mathcal{P}(t).$$

Здесь операция $\dot{-}$ — *геометрическая разность* (разность Минковского) двух компактных множеств.

Определение 4. *Геометрической разностью выражения $C = A \dot{-} B$ называется множество $C = \{c \mid c + B \subseteq A\}$.*

Решение задачи Коши для системы (3.5)

$$x(t) = G(t_0, t_1)x_0 + \int_{t_0}^{t_1} G(t_1, s)B(s)u(s)ds + \int_{t_0}^{t_1} C(s)v(s)ds,$$

где $x(t)$ – траектория системы, определяется выбранным управлением $u(\cdot)$ и неизвестной реализацией помехи $v(\cdot)$. Тогда гарантированная оценка множества достижимости имеет решение в виде

$$\mathcal{X}[t] = \left(G(t_0, t_1)\mathcal{X}_0 \dot{-} \int_{t_0}^{t_1} G(t_1, s)\mathcal{V}(s)ds \right) + \int_{t_0}^{t_1} G(t_1, s)B(s)\mathcal{P}(s)ds.$$

Поскольку напрямую решать данные интегралы от множеств затруднительно, прибежем к аппарату эллипсоидальных оценок [2, 8, 9]. Мы можем оценить искомое множество через внешние и внутренние эллипсоидальные оценки. Так что

$$\mathcal{X}[t] \subseteq \bigcap_{\ell} \mathcal{E}(q_+^{\ell}(t), Q_+^{\ell}(t));$$

$$\mathcal{X}[t] \supseteq \bigcup_{\ell} \mathcal{E}(q_{-}^{\ell}(t), Q_{-}^{\ell}(t)),$$

где ℓ – вектор, в направлении которого оценивающий эллипсоид касается искомого множества, $\mathcal{E}(q_{+}^{\ell}(t), Q_{+}^{\ell}(t))$ – внешняя эллипсоидальная оценка, $\mathcal{E}(q_{-}^{\ell}(t), Q_{-}^{\ell}(t))$ – внутренняя эллипсоидальная оценка. Поскольку ограничения на начальные условия, управление, помеху в задаче (3.5) выражены эллипсоидами, выпуклыми компактами, то само $\mathcal{X}[t]$ – также будет выпуклым [9] и справедливо

$$\bigcup_{\forall \ell} \mathcal{E}(q_{-}^{\ell}(t), Q_{-}^{\ell}(t)) = \mathcal{X}[t] = \bigcap_{\forall \ell} \mathcal{E}(q_{+}^{\ell}(t), Q_{+}^{\ell}(t)),$$

где пересечение и объединение берутся по всем возможным направлениям $\ell \in \mathbb{R}^n$.

Параметры внутренней эллипсоидальной оценки $\mathcal{E}(q_{-}^{\ell}(t), Q_{-}^{\ell}(t))$ берутся из уравнения

$$\begin{aligned} \dot{Q}_{-}(t) &= A(t)Q_{-}(t) + Q_{-}(t)A^T(t) + Q_{-}^{-\frac{1}{2}}(t)S(t)P^{\frac{1}{2}}(t)B(t) + B(t)P^{\frac{1}{2}}(t)B^T(t)S^T(t)Q_{-}^{\frac{1}{2}}(t) - \\ &\quad - \pi(t)Q_{-}(t) - \pi^{-1}(t)C(t)W(t)C^T(t), \\ \dot{q}_{-}(t) &= A(t)q(t) + B(t)p(t) + C(t)w(t), \end{aligned} \tag{3.6}$$

где $S(t), \pi(t)$ удовлетворяют соотношениям

$$\begin{aligned} S(t)P^{\frac{1}{2}}(t)B^T(t)\ell(t) &= Q_{-}^{\frac{1}{2}}(t)\ell(t)\lambda(t), \\ \pi(t) &= \frac{\langle \ell(t), C(t)W(t)C^T(t)\ell(t) \rangle^{\frac{1}{2}}}{\langle \ell(t), Q_{-}(t)\ell(t) \rangle^{\frac{1}{2}}}, \\ \lambda(t) &= \frac{\langle \ell(t), B(t)P(t)B^T(t)\ell(t) \rangle^{\frac{1}{2}}}{\langle \ell(t), Q_{-}(t)\ell(t) \rangle^{\frac{1}{2}}}, \quad \ell(t) = G^T(t, t_0)\ell_0, \quad \ell_0 \in \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

Параметры внешней эллипсоидальной оценки $\mathcal{E}(q_{+}(t), Q_{+}(t))$ находятся из

$$\begin{aligned} \dot{Q}_{+} &= A(t)Q_{-}(t) + Q_{-}(t)A^T(t) + \pi(t)Q_{+}(t) + \pi^{-1}(t)B(t)P(t)B^T(t) - \\ &\quad - Q_{+}^{\frac{1}{2}}(t)S(t)W^{\frac{1}{2}}(t)C^T(t) - C(t)W^{\frac{1}{2}}(t)S^T(t)Q_{+}^{\frac{1}{2}}(t), \end{aligned} \tag{3.7}$$

где

$$\begin{aligned} S(t)W^{\frac{1}{2}}(t)C^T(t)\ell(t) &= \lambda(t)Q_{+}^{\frac{1}{2}}(t)\ell(t), \\ \pi &= \frac{\langle \ell(t), B(t)P(t)B^T(t)\ell(t) \rangle^{\frac{1}{2}}}{\langle \ell(t), Q_{+}(t)\ell(t) \rangle^{\frac{1}{2}}}, \\ \lambda(t) &= \frac{\langle \ell(t), C(t)W(t)C^T(t)\ell(t) \rangle^{\frac{1}{2}}}{\langle \ell(t), Q_{+}(t)\ell(t) \rangle^{\frac{1}{2}}}, \quad \ell(t) = G^T(t, t_0)\ell_0, \quad \ell_0 \in \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

Итак, с помощью эллипсоидальных оценок мы можем вычислить сколь угодно точную оценку множества достижимости $\mathcal{X}^{(1)}[t, t_0, \mathcal{X}_0]$ (по Опр.2.) для любого момента времени t и начального условия \mathcal{X}_0 .

Необходимо отметить, что $\mathcal{X}[t, t_0]$ образовано двумя множествами:

$$\left(G(t_0, t_1)\mathcal{X}_0 \dot{-} \int_{t_0}^{t_1} G(t_1, s)\mathcal{V}(s) \right)$$

обеспечивает множество гарантированного попадания, а другое, $\int_{t_0}^{t_1} G(t_1, s)B(s)\mathcal{P}(s)ds$ – желаемое смещение первого множества. Кроме того, может оказаться, что начиная с некоторого $\tau > t$, $\mathcal{X}[t, t_0]$ окажется пустым, если $(\mathcal{X}_0[t] - C(t))$ выродится. Соответственно, расчет для второй системы необходимо выполнять не с начальным множеством $\mathcal{X}^{(1)}[t, t_0, \mathcal{X}_0] \cap H(c, \gamma)$, а $\left(G(t_0, t_1)\mathcal{X}_0 + \int_{t_0}^{t_1} G(t_1, s)\mathcal{V}(s)ds + \phi^\alpha \right) \cap H(c, \gamma)$, где $\phi^\alpha = \int_{t_0}^{t_1} G(t_1, s)B(s)p^\alpha(s)ds$, $p^\alpha(\cdot) \in \mathcal{P}(\cdot)$. Поэтому, в дальнейшем, мы будем искать множество достижимости второй системы для фиксированного $p^\alpha(\cdot)$.

3.2.2 Пересечение с гиперплоскостью.

Рассмотрим теперь вычисление множеств, образованных пересечением множества достижимости первой системы с гиперплоскостью $H(c, \gamma) = \{x \mid \langle x, c \rangle = \gamma\}$. Пусть

$$C(s) \stackrel{\text{def}}{=} \left(G(t_0, t_1)\mathcal{X}_0 + \int_{t_0}^{t_1} G(t_1, s)\mathcal{V}(s)ds \right),$$

$$\phi^\alpha(t) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{t_0}^t G(t_1, s)B(s)u^\alpha(s)ds,$$

$$C_H^\alpha(s) \stackrel{\text{def}}{=} (C(s) + \phi^\alpha(s)) \cap H$$

$$\mathcal{T}^\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \{\tau \mid C_H^\alpha[\tau] \neq \emptyset\} = [\tau_1^\alpha, \tau_2^\alpha]$$

Мы предполагаем условие односторонней трансверсальности выполненным, поэтому можем утверждать, что множество $C_H^\alpha(\mathcal{T}^\alpha)$ – односвязное. В случае невыполнения условий трансверсальности, множество $C_H^\alpha(\mathcal{T}^\alpha)$ может быть несвязным, в этом случае дальнейший анализ существенно затруднится (Рис.1).

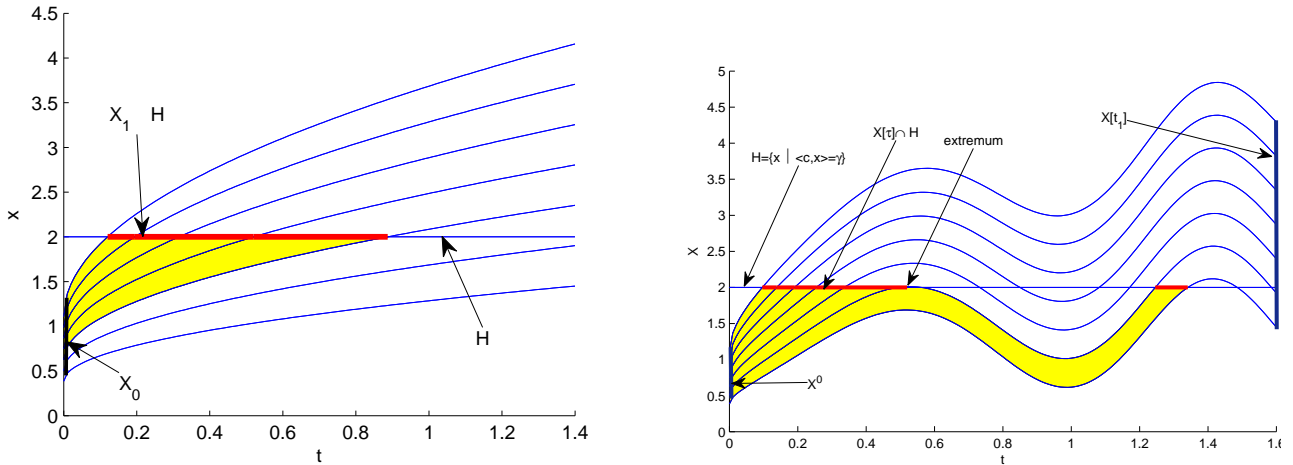


Рис. 1. Выполнение и невыполнение условий трансверсальности.

В пункте 3.2.1 мы нашли оценку множества достижимости с помощью эллипсоидальных оценок. Вычислим теперь $C_H^\alpha[\tau]$

Утверждение 2. ([1]) Пусть эллипсоид $\mathcal{E}(q, Q)$ и гиперплоскость $\mathcal{H} = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, c \rangle = \gamma\}$ таковы, что $\mathcal{E} \cap \mathcal{H} \neq \emptyset$. Тогда $\mathcal{E}(q, Q) \cap \mathcal{H} = \mathcal{E}(\tilde{q}, \tilde{Q})$ - вырожденный эллипсоид (т.е. $\tilde{Q} = \tilde{Q}^T \geq 0, \det(\tilde{Q}) = 0$).

Доказательство. Пусть $T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ - такая невырожденная матрица, что $Tc = e_1$, где $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$. Используя замену переменных $x = T'y$ и $q = T'p$, преобразуем множество $\mathcal{E}(q, Q) \cap \mathcal{H}$:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(q, Q) \cap \mathcal{H} &= \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x - q, Q^{-1}(x - q) \rangle \leq 1, \langle x, c \rangle = \gamma\} = \\ &= T'\{y = (\gamma, z)', z \in \mathbb{R}^{n-1} : \langle z - \tilde{q}, \tilde{Q}(z - \tilde{q}) \rangle \leq 1\} \\ TQ^{-1}T' &= \begin{pmatrix} a & c' \\ c & D \end{pmatrix}, D \in \mathbb{R}^{(n-1) \times (n-1)}, p = \begin{pmatrix} p_1 \\ \tilde{p} \end{pmatrix}, \tilde{p} \in \mathbb{R}^{n-1} \\ \tilde{q} &= \tilde{p} - D^{-1}(\gamma - p_1)c, A = \frac{D}{1 - (\gamma - p_1)^2(a - \langle c, D^{-1}c \rangle)} \end{aligned}$$

И проверкой подстановки

$$\tilde{q} = T' \begin{pmatrix} \gamma \\ \tilde{q} \end{pmatrix}, \tilde{Q} = T' \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & A^{-1} \end{pmatrix} T$$

завершаем доказательство утверждения. Нам важно найти не столько вырожденный эллипсоид $\mathcal{E}(\tilde{q}, \tilde{Q})$, сколько его пересечение с гиперплоскостью. Легко видеть, что это будет эллипсоид с размерностью на единицу меньше, его параметры находятся как $q_H = \gamma D^{-1}c$, $Q_H = A^{-1}$. Вектор q_H указывает смещение эллипсоида относительно опущенного на плоскость перпендикуляра, выпущенного из центра пересекаемого эллипсоида (Рис.2).

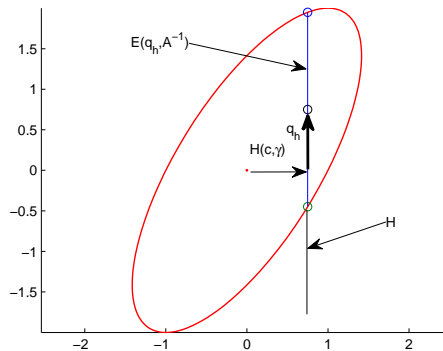


Рис. 2. Пересечение эллипсоида с плоскостью.

Таким образом, для момента времени $\tau \in \mathcal{T}^\alpha$ мы получили семейство эллипсоидов размерности на единицу меньше, расположенные на плоскости H , которые, в свою очередь оценивают искомое сечение множества пересечения, которое остается выпуклым. Это семейство внутренних и внешних оценок также можно оценивать новыми оценками, с целью уменьшения дальнейших вычислений.

3.2.3 Вычисление множества достижимости для второй системы

На данном этапе у нас имеется семейство $(\mathcal{T}^\alpha, C_H^\alpha(\mathcal{T}^\alpha))$, которое является начальным условием для задачи

$$\begin{cases} \dot{x}^{(2)} = A^{(2)}(t)x^{(2)} + B^{(2)}(t)u^{(2)}(t) + C^{(2)}(t)v^{(2)}(t); \\ x(\tau) \in C_H^\alpha[\tau], \tau \in \mathcal{T}^\alpha \\ u^{(2)}(t) \in \mathcal{E}(p^{(2)}(t), P^{(2)}(t)) = \mathcal{P}^{(2)}[t_0, t_1]; \\ v^{(2)}(t) \in \mathcal{E}(w^{(2)}(t), W^{(2)}(t)) = \mathcal{V}^{(2)}[t_0, t_1]; \end{cases} \quad (3.8)$$

Мы не можем построить множество достижимости так же как и для первой системы, поскольку здесь начальные условия "распределены" во времени, и соответственно это надо учитывать, что отличает эту задачу от предыдущей. Здесь можно воспользоваться методами решения задач с фазовыми ограничениями [7], но в отличие от них нам требуется учитывать неопределённость. Гарантированная оценка множества достижимости $\mathcal{X}_2^\alpha[t, t_0]$ для (3.8) описывается как

$$\begin{aligned} \mathcal{X}_2^\alpha[t_1] = \{x_2 \mid \exists u_2(\cdot) \in \mathcal{P}^{(2)}[t_0, t_1] : \forall v_2(\cdot) \in \mathcal{V}^{(2)}[t_0, t_1] : \\ \exists \tau \in \mathcal{T}^\alpha, x_h(\tau) \in C_H^\alpha[\tau] : x(t, \tau, x_h(\tau), u_2(\cdot), v_2(\cdot)) = x_2\} \end{aligned} \quad (3.9)$$

Найдем множество точек в момент времени τ , из которых мы можем прийти в точку $x_2 = 0$ в конечный момент t_1 при некотором фиксированном управлении.

$$\mathcal{Q}[\tau] = \int_{t_1}^{\tau} \mathcal{V}_2(s) ds$$

Согласно (3.9)

$$\forall \tau \in \mathcal{T}^\alpha : (\xi(\tau) + \mathcal{Q}[\tau]) \cap H \subseteq C_H^\alpha[\tau], \quad \text{где} \quad (3.10)$$

$$\xi(\tau) = x_2 + \int_{t_1}^{\tau} u_2(s) ds.$$

Найдем множество фазовых ограничений

$$Z[\tau] = \{\xi(\tau) \mid (\xi(\tau) + \mathcal{Q}[\tau]) \cap H \subseteq C_H^\alpha[\tau]\}$$

Для любого $\xi(\tau) \in Z[\tau]$ выполнено (3.10). Используя свойство выпуклости и симметрии множества $\mathcal{Q}[\tau]$, находим $Z[\tau]$ как дополнение ко множеству всех точек $\tilde{\xi}(\tau)$, в которых $(\tilde{\xi}(\tau) + \mathcal{Q}[\tau])$ касается $(H \setminus C_H^\alpha[\tau])$ или

$$Z[\tau] = \overline{H \setminus C_H^\alpha[\tau] + \mathcal{Q}[\tau]},$$

что проиллюстрировано на рис.3. Легко видеть, что оно строится как дополнение к некоторому семейству выпуклых множеств, и в данном случае для любых $\mathcal{Q}[\tau]$, $C_H^\alpha[\tau]$ не может быть выпуклым, что является ограничением для вычисления множества достижимости с учетом фазовых ограничений $Z[\tau]$. Поэтому, будем решать задачу поиска множества достижимости при условии огибания препятствия $Z[\tau]$. Поскольку множество $\overline{Z[\tau]}$ состоит из множества эллипсоидов (эллипсоидальные оценки множества $\mathcal{Q}[\tau]$), выделим среди них те, которые непосредственно примыкают к $Z[\tau]$, тогда мы можем обойти только считанные из них (для момента τ), и попасть на целевое множество $\mathcal{X}_2^\alpha[t_1]$. Центры всех примыкающих эллипсоидов расположены на границе $C_H^\alpha[\tau]$. Если мы решаем задачу в \mathbb{R}^1 , то множество $C_H^\alpha[\tau]$ - это точка, множество примыкающих эллипсоидов состоит из отрезка с

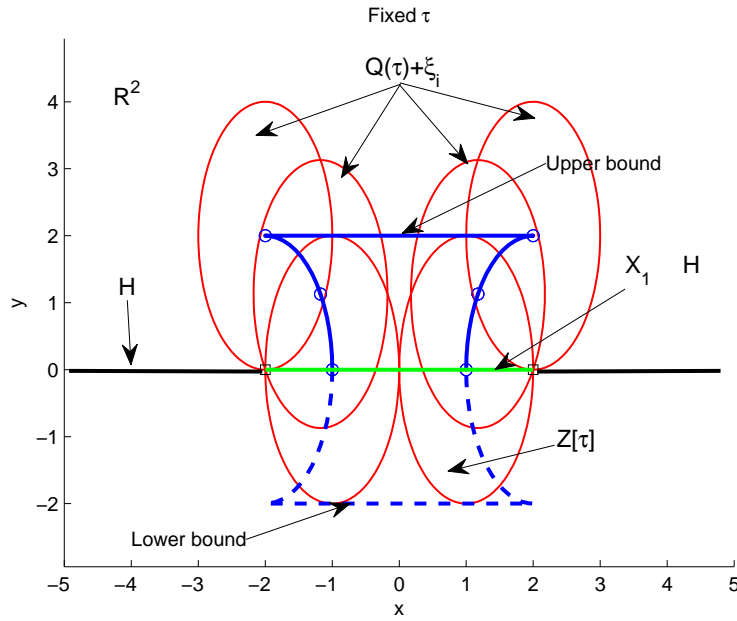


Рис. 3. Множество фазовых ограничений

центром в этой точке. Для задачи в \mathbb{R}^2 , $C_H^\alpha[\tau]$ – отрезок, концы которого служат центрами для выбранных эллипсоидальных оценок $Q[\tau]$, см. рис.3. Для $\mathbb{R}^n, n \geq 3$, множество $C_H^\alpha[\tau]$ образует замкнутую линию ($n = 3$), или поверхность ($n > 3$), так что задача существенно усложняется.

Итак мы нашли условия на фазовые ограничения для траекторий $\xi(\tau)$, таких, что выполняется (3.10). Из условий (3.9) и трансверсальности (2.2) мы обнаруживаем, что, для того, чтобы траектория $\xi(\cdot)$ принадлежала множеству $X_2[t_1]$ достаточно, чтобы она вошла во множество $Z[\tau_1]$, в любой из моментов $\tau_1 \in \mathcal{T}^\alpha$, и покидало множество $Z[\tau_2]$ в любой момент $\tau_2 \in \mathcal{T}^\alpha, \tau_2 > \tau_1$. Можно обозначить множество $X_0^{(2)}[\tau_1^\alpha] = \{x \mid x \leq H + Q[\tau_1^\alpha]\}$ как начальное множество в момент τ_1^α для задачи поиска множества достижимости с фазовыми ограничениями на огибание препятствия. Поскольку данное множество $X_0^{(2)}$ – задаёт полупространство, а мы хотим эллипсоидальную оценку, можно выбрать достаточно большой эллипсоид, который позволит нам для любого момента $\tau \in \mathcal{T}^\alpha$ полностью покрывать траекториями нижнюю границу (lower boundary на рис.3), двигаясь вверх (согласно правилу односторонней проницаемости).

Официальная часть кончилась, дальше идут краткие рассуждения

Осталось пройти сквозь коридор $Z[\tau]$.

Взято из лекций: Идея огибания строится так: дан эллипсоид $\mathcal{E}(q(t), Q)$, который нужно обойти. траектория $x(t)$ смещается так, чтобы было $\mathcal{E}(0, Q)$ (**Это меня смущает**). далее мы переходим к условию выполнения неравенства $\langle \ell^0(t), x(t) \rangle \geq 1$, где $\ell^0(\cdot)$ – специально найденные направления, чтобы не проверять $d^2(x(t), \mathcal{E}(0, Q)) > 0$. Далее от этого неравенства берется интеграл с ограниченными вариациями и выписывается неравенство, чтобы получилось

$$p^T x_2 \leq \min_{\Lambda, p} \Phi(\Lambda, p),$$

из которого можно найти достижимость (выпуклость Φ дает опорную функцию $\rho(p \mid X_2)$) Прodelываем это для каждого эллипсоида, берем пересечение множеств достижимости (потому что траектории должны проходить между ними.)

и вроде все.

Осталось сделать еще один рисунок с изображениями фазовых ограничений во времени, но это опционально. Еще два рисунка с одномерными множествами, которые еще

предстоит вставить в контекст.

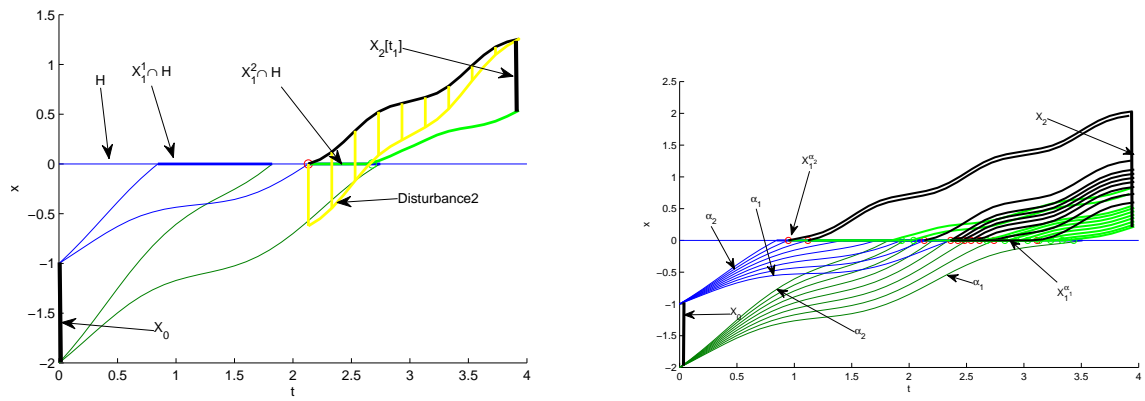


Рис. 4. Множество достижимости в \mathbb{R}^1

Список литературы

- [1] *Куржанский А.Б., Варайя П.* Задачи динамики и управления в гибридных системах // Труды международного семинара “Теория управления и теория обобщенных решений уравнений Гамильтона-Якоби”. Екатеринбург: Изд-во Уральского университета, 2005. с.26–33.
- [2] *Куржанский А.Б.* Управление и наблюдение в условиях неопределенности. М.: Наука, 1977.
- [3] *Куржанский А.Б., Точилин П.А.* Слабо инвариантные множества гибридных систем // Дифференциальные уравнения. 2008. т. 44, N11.
- [4] *Пшеничный Б.Н.* Выпуклый анализ и экстремальные задачи. М.: Наука, 1980.
- [5] *Рокафеллар Р.* Выпуклый анализ. М.: Мир, 1973.
- [6] *Branicky M.S., Borkar V.S., Mitter S.M.* A unified framework for hybrid control: model and optimal control theory. // IEEE transactions on automatic control, 43/1 p.31–45, 1998.
- [7] *Kurzhanski A.B., Varaiya P.* Ellipsoidal techniques for reachability under state constraints.// SIAM Journal on Control. 2003. V.45. N.4. p.1369–1394.
- [8] *Kurzhanski A.B., Varaiya P.* Ellipsoidal techniques for reachability analysis. Internal approximation // System and Control Letters. 2000. V.41. p.201–211.
- [9] *Kurzhanski A.B., Varaiya P.* Ellipsoidal techniques for reachability analysis. Part I: External approximations. Part II: Internal approximations. Box-valued constraints // Optimization methods and software. 2002. V.17. p.177–237.
- [10] *Liberzon D.* Switching in systems and control. Boston: Birkhäuser, 2003.
- [11] *Van der Schaft A., Schumacher H.* An introduction to hybrid dynamical systems. Lecture Notes in Control and Information Sciences. N251. Springer, 2000.