Магистерская диссертация на тему:

Построение множества достижимости для гибридной системы с одним переключением с неопределённостью

Выполнил : Селиверстов Д.С.
Научный руководитель: к.ф.-м.н. Точилин П.А.

Московский Государственный университет им. М.В. Ломоносова
Кафедра системного анализа

2010

Модель гибридной системы

$$
\left\{
\begin{array}{l}
\left[
\begin{array}{l}
\begin{cases}
\dot{x}^{(1)} = A^{(1)}(t)x^{(1)} + B^{(1)}(t)u^{(1)}(t) + C^{(1)}(t)v^{(1)}(t); \\
x(t_0) \in \mathcal{E}(x_0, X_0) = \mathcal{X}_0;
\end{cases} \\
\begin{cases}
\dot{x}^{(2)} = A^{(2)}(t)x^{(2)} + B^{(2)}(t)u^{(2)}(t) + C^{(2)}(t)v^{(2)}(t); \\
x(\tau) \in \mathcal{X}^{(1)}(\tau, t_0) \cap H;
\end{cases}
\end{array}
\right. \\
H = \{x \in \mathbb{R}^n \colon \ \langle x, c \rangle = \gamma\} \text{— гиперплоскость переключения;} \\
A(t) \in \mathbb{R}^{n\times n},\ B(t) \in \mathbb{R}^{n\times m},\ C(t) \in \mathbb{R}^{n\times k};\ A(t), B(t), C(t) \in L_1[t_0, t_1]; \\
\tau:\ \left\langle x^{(1)}(\tau), c \right\rangle - \gamma = 0,\ \tau \in [t_0, t_1] \\
u^{(1)}(t) \in \mathcal{E}(p^{(1)}(t), P^{(1)}(t)) = \mathcal{P}^{(1)}[t_0, t_1]; \\
v^{(1)}(t) \in \mathcal{E}(w^{(1)}(t), W^{(1)}(t)) = \mathcal{V}^{(1)}[t_0, t_1]; \\
u^{(2)}(t) \in \mathcal{E}(p^{(2)}(t), P^{(2)}(t)) = \mathcal{P}^{(2)}[t_0, t_1]; \\
v^{(2)}(t) \in \mathcal{E}(w^{(2)}(t), W^{(2)}(t)) = \mathcal{V}^{(2)}[t_0, t_1];
\end{array}
\right.
\tag{1}
$$

Условие трансверсальности

При переключении гибридная система должна удовлетворять условию односторонней проницаемости, что равносильно выполнению системы соотношений:

$$\begin{cases} \langle x(\tau), c\rangle - \gamma = 0, \\ \langle \dot{x}, c\rangle > 0, \end{cases}$$

где c, γ– параметры гиперплоскости

$$H = \{x \mid \langle x, c\rangle = \gamma\},$$

$x(t)$–траектория либо первой из систем, либо второй.

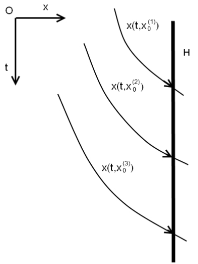

Рис.:

Тогда любая траектория гибридной системы не может касаться гиперплоскости, но пересекает эту гиперплоскость только один раз.

Выполнение условия трансверсальности

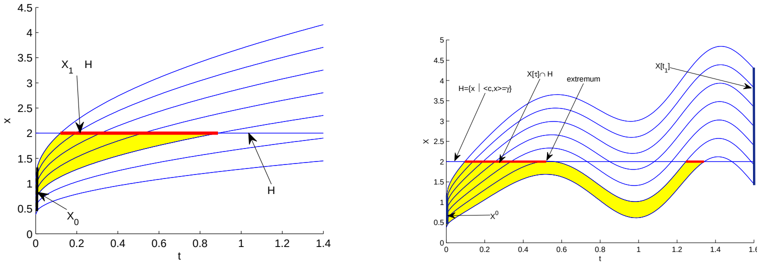

Рис.: Выполнение и невыполнение условий трансверсальности

$$
\begin{cases}
\langle x(\tau), c\rangle - \gamma = 0, \\
\langle \dot{x}, c\rangle > 0,
\end{cases}
$$

Множество достижимости

Определение

Множеством достижимости $\mathcal{X}[t, t_0]$ *для задачи* (1) *называется*

$$\mathcal{X}[t] = \{x^* \mid \exists u_1(\cdot) \in \mathcal{P}^{(1)}, \exists u_2(\cdot) \in \mathcal{P}^{(2)} :$$

$$\forall v_1(\cdot) \in \mathcal{V}^{(1)}, \forall v_2(\cdot) \in \mathcal{V}^{(2)} : \exists x_0 \in \mathcal{X}_0 :$$

$$x(t, t_0, x_0) = x^*, x(t, t_0, x_0) \cap H \neq \emptyset\}$$

Множество достижимости ищется в классе программных управлений $u(t)$, не зависящих от фазовых координат x системы, что не позволяет корректировать управление в зависимости от момента переключения τ_H и помехи.

Множество достижимости до переключения

Множество гарантированно достижимых точек

$$\mathcal{X}_1[t] = \left(\mathcal{X}_0[t] \dot{-} V_1[t]\right) + \mathcal{P}_1[t], \quad \text{где}$$

$$V_1[t] = \int\limits_{t_0}^{t} G(t,s)\mathcal{E}(w_1(s), W_1(s))ds, \text{–множество неопределенности, помех.}$$

$$\mathcal{P}_1[t] = \int\limits_{t_0}^{t} G(t,s)\mathcal{E}(p_1(s), P_1(t))ds, \text{ –множество управлений.}$$

$$\mathcal{C}^{\alpha}[t] = \mathcal{X}_0 \dot{-} V_1[t] + p^{\alpha}, \quad p^{\alpha}(t) \in \mathcal{P}_1[t],$$

– множество гарантированного покрытия при фиксированном управлении $p^{\alpha}(t)$ Эллипсоидальная оценка множества гарантированного покрытия

$$\cup \mathcal{E}_{-}^{i} \subset \mathcal{C}^{\alpha}[t] \subset \cap \mathcal{E}_{+}^{i}$$

Множество достижимости при переключении

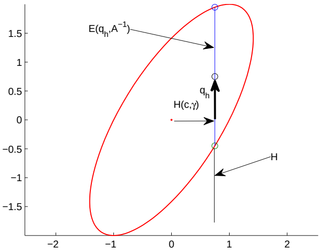

Рис.: Пересечение $\mathcal{E}_H = \mathcal{E} \cap H$

Вычисление пересечения

$$\mathcal{C}_H^\alpha[\tau] = \mathcal{C}^\alpha[\tau] \cap H$$

$$\Leftrightarrow \{\mathcal{E}^i \cap H\} \to \{\mathcal{E}_H^i\}$$

Приходим к задаче

$$\begin{cases} \dot{x}^{(2)} = A^{(2)}x^{(2)} + B^{(2)}u^{(2)} + C^{(2)}v^{(2)}; \\ x(\tau) \in \mathcal{C}_H^\alpha[\tau], \tau \in T^\alpha, \end{cases}$$

где

$$T^\alpha = \{\tau \mid \mathcal{C}^\alpha[\tau] \cap H \neq \emptyset\} \overset{(\text{трансверсальность})}{=} [\tau_1^\alpha, \tau_2^\alpha]$$

Множество достижимости после переключения

Множество достижимости ищем в соответствии

$$\mathcal{X}_2^\alpha[t] = \{x^* \mid \exists u_2 : \forall v_2 : \exists \tau \in T^\alpha, x_0 \in \mathcal{C}_H^\alpha[\tau] : x(t, \tau, x_0) = x^*\}$$

Целесообразно перейти к виду

$$\mathcal{X}_2^\alpha[t] = \{x^* \mid \exists u_2 : \forall v_2 : \exists \tau \in T^\alpha : x(\tau, t, x^*) \cap H \in \mathcal{C}_H^\alpha\} \qquad (2)$$

$x(t)$ – сумма управляемой и неуправляемой составляющей

$$x(\tau, t, x^*) = \xi(\tau) + v_2(\tau), \quad v_2(\tau) \in V_2[\tau]$$

$$V_2[\tau] = \int\limits_t^\tau G_2(\tau, s)\mathcal{E}(w_2(s), W_2(s))ds$$

Найдем все такие $\xi(\tau) \in Z[\tau]$ чтобы выполнялось (2)

$$Z[\tau] = \{\xi(\tau) \mid (\xi(\tau) + V_2[\tau]) \cap H \subset \mathcal{C}_H^\alpha[\tau]\}$$

Множество фазовых ограничений

$$Z[\tau] = \{\xi(\tau) \mid (\xi(\tau) + V_2[\tau]) \cap H \subset \mathcal{C}_H^{\alpha}[\tau]\},$$

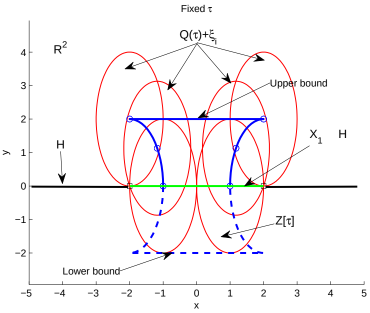

Рис.: Фазовые ограничения $Z[\tau]$ –синий, помеха $V_2[\tau]$ –красный, множество $\mathcal{C}_H^{\alpha}[\tau]$ –зеленый.

вычисляется как $Z[\tau] = \overline{H \setminus \mathcal{C}_H^{\alpha}[\tau] + V_2[\tau]}$

Решение задачи с фазовыми ограничениями

Задача на поиск множества достижимости при фазовых ограничениях, но уже без помехи.

$$\mathcal{X}_2^{\alpha}[t_1] = \left\{x(t_1) \mid \exists u_2 : G(\tau, t_1)x(t_1) + \int_{t_1}^{\tau} G(\tau, t_1)u_2(s)ds \in Z(\tau), \forall \tau \in T^{\alpha}\right\}$$

Функция цены с учетом ограничений (задача огибания $\xi[\tau] \notin \overline{Z[\tau]}$)

$$V(t,x) = \max_{\lambda(\cdot)\in L^0} \max_{\ell,\Lambda(\cdot)} \left\{p^T(t_1)x_1 - \int_{t_0}^{t_1} \rho\left(p(s) \mid \mathcal{P}(s)\right) ds - \rho\left(s(t_0) \mid \mathcal{X}_0\right) + 1\right\},$$

Тогда множество достижимости находится как множество уровня

$$\mathcal{X}_2^{\alpha}[t, t_0] = \{x \mid V(t,x) \leq 0\}$$

Пример $\mathbb{R}^1$

Рассматривается модель гибридной системы

$$
\begin{cases}
\left[\begin{array}{l} \dot{x}_1 = u_1 + v_1; \\ \dot{x}_2 = u_2 + v_2; \end{array}\right. \\
u_1(t) \in [0.4\cos(\pi\cdot t), 1.5 + 0.6\sin(\pi\cdot t)] = \mathcal{P}^{(1)}; \\
v_1(t) \in [0, 0.2 + 0.1\sin(\pi\cdot t)] = \mathcal{V}^{(1)}; \\
u_2(t) \in [0.3 + \sin^2(\pi\cdot t), 0.5\cos^2(\pi\cdot t)] = \mathcal{P}^{(2)}; \\
v_2(t) \in [-0.1\sqrt{t}, 0.1\sqrt{t}] = \mathcal{V}^{(2)}; \\
\mathcal{X}_0 = [-2, -1],\ x(t) \in \mathbb{R}^1 \\
t \in [0, 4]; \\
H = \{x = 0\}.
\end{cases} \tag{3}
$$

Вложение множества помехи $V_2[\tau]$ во множесто $\mathcal{C}_H^{\alpha}[\tau]$

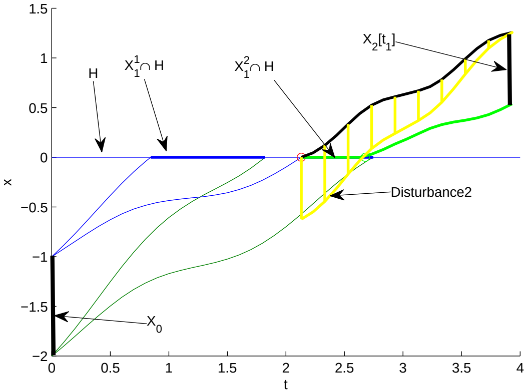

Рис.: Множество достижимости $\mathcal{X}^{\alpha}[t_1], \alpha = \{1, 2\}$

Множество достижимости для большого набора α.

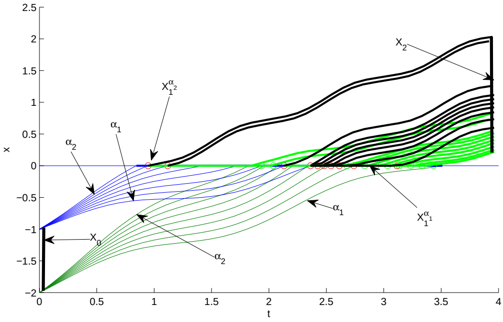

Рис.: Множество достижимости $\mathcal{X}^{\alpha}[t_1], \alpha = \{1 \dots 30\}$

Функция цены для всей гибридной системы

$$V(t,x) = \min_{\phi(\cdot)} \max_{\ell(\cdot)} \max_{\mu(\cdot)} \Big\{ S^T(t_0,t)x - \int\limits_{t_0}^{t} \rho(S_1(s,t) \mid B_1(s)\mathcal{P}_1(s))\,ds -$$

$$- \int\limits_{t_0}^{t} \rho(S(t_0,s) \mid B_2(s)\mathcal{P}_2(s))\,ds - \mathrm{conv}\{K(\ell,\mu,\mathcal{X}_0) -$$

$$- \int\limits_{t_0}^{t} \rho(-S_1(s,t) \mid C_1(s)\mathcal{V}_1(s))\,ds - \int\limits_{t_0}^{t} \rho(-S(t_0,s) \mid C_2(s)\mathcal{V}_2(s))\,ds\} \Big\}$$

Выводы

В данной работе рассмотрены два подхода к решению задачи достижимости:

- С помощью методов многозначного анализа.
- При помощи функций цены и методов выпуклого анализа

В первом случае множества достижимости построены в явном виде, за счет применения операций с выпуклыми компактами, а во втором методе указанные множества представлены в виде множеств уровней (множеств Лебега) для специальных функций.
Решение данной задачи можно рассматривать как первый шаг к построению теории достижимости при неопределенности для гибридных систем с кусочно-линейной структурой в классах программных или позиционных управлений.

Список литературы

- *Куржанский А.Б., Варайя П.* Задачи динамики и управления в гибридных системах // Труды международного семинара "Теория управления и теория обобщенных решений уравнений Гамильтона-Якоби". Екатеринбург: Изд-во Уральского университета, 2005. с.26–33.
- *Куржанский А.Б.* Управление и наблюдение в условиях неопределенности. М.: Наука, 1977.
- *Куржанский А.Б., Точилин П.А.* Слабо инвариантные множества гибридных систем // Дифференциальные уравнения. 2008. т. 44, N11.
- *Пшеничный Б.Н.* Выпуклый анализ и экстремальные задачи. М.: Наука, 1980.
- *Рокафеллар Р.* Выпуклый анализ. М.: Мир, 1973.