1. Постановка задачи

Даны системы дифференциальных уравнений, описывающих состояние некоторой модели до переключения и после:

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \dot{x}^{(1)} = A^{(1)}(t)x^{(1)} + B^{(1)}(t)u^{(1)}(t) + C^{(1)}(t)v(t); \\ x(t_0) \in \mathcal{E}(x_0, X_0) = \mathcal{X}^0; \\ u^{(1)}(t) \in \mathcal{E}(p^{(1)}(t), P^{(1)}(t)) \subset \mathcal{P}[t_0, t_1]; \\ v^{(1)}(t) \in \mathcal{E}(w^{(1)}(t), W^{(1)}(t)) \subset \mathcal{V}[t_0, t_1]; \end{cases} \\ \\ \begin{cases} \dot{x}^{(2)} = A^{(2)}(t)x^{(2)} + B^{(2)}(t)u^{(2)}(t) + C^{(2)}(t)f(t)^{(2)}; \\ x(\tau) \in \mathcal{X}^{(1)}(\tau, t_0); \\ u^{(2)}(t) \in \mathcal{E}(p^{(2)}(t), P^{(2)}(t)) \subset \mathcal{P}[t_0, t_1]; \\ v^{(2)}(t) \in \mathcal{E}(w^{(2)}(t), W^{(2)}(t)) \subset \mathcal{V}[t_0, t_1]; \end{cases} \end{array} \right. \\ H = \{x \in \mathbb{R}^n \colon \langle x, c \rangle = \gamma\} \text{— гиперплоскость переключения;} \\ A(t) \in \mathbb{R}^{n \times n},\ B(t) \in \mathbb{R}^{n \times m},\ C(t) \in \mathbb{R}^{n \times k};\ A(t), B(t), C(t) \in D[t_0, t_1]; \\ \tau :\ \left\langle x^{(1)}(\tau), c \right\rangle - \gamma = 0. \end{cases} \tag{1.1}$$

где $\mathcal{P}[t_0, t_1], \mathcal{V}[t_0, t_1]$ - класс допустимых управлений и помех. В момент времени τ, при пересечении наперед известной гиперплоскости $H = \{x \in \mathbb{R}^n \colon \langle x, c \rangle = \gamma\}$, происходит переключение систем. $v(t)$ - неизвестная функция, неопределенность, область значений которой ограничена k-мерной эллиптической областью, и принадлежащая классу интегрируемых функций $D[t_0, t_1]$. Управление $u(\cdot)$ выбирается из класса программных управлений $\mathcal{P}[t_0, t_1]$, то есть так, что оно определяется к начальному моменту t_0 заранее и уже не изменяется в зависимости от поведения системы в дальнейшем, не зависит оно и от времени переключения τ. Для решения задачи важно, чтобы система удовлетворяла свойству односторонней проницаемости, то есть чтобы при переходе через плоскость H в момент τ система

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} \langle \dot{x}, c \rangle \neq 0; \\ \langle x, c \rangle - \gamma \neq 0 \end{array} \right. \\ \operatorname{sign}(\left\langle \dot{x}^{(1)}(\tau), c \right\rangle) = \operatorname{sign}(\left\langle \dot{x}^{(2)}(\tau), c \right\rangle). \end{cases} \tag{1.2}$$

всегда имела непустое решение. Это означает, что, во-первых, момент переключения осуществляется скачком, а во-вторых, система может пересекать эту плоскость только один раз (для момента τ) и с переходом к другой системе. Необходимо построить множество достижимости $\mathcal{X}[t, t_0]$ в классе допустимых управлений $\mathcal{P}$ для момента времени $t > t_0$ и начального множества $\mathcal{X}^0$. Таким образом, необходимо найти множество точек $\mathcal{X}[t, t_0, \mathcal{X}^0] = \{x(t)\}$, в которые система может прийти из начального множества $\mathcal{X}^0$. Мы хотим получить множество точек $\{x(t_1)\}$, о которых известно, что при любой помехе для каждой из них существует управление, такое, что множество начальных состояний $x(t_0) \mid_{x(t_1)=x}$ для каждой точки будет лежать внутри исходного начального множества $\mathcal{X}^0$

Определение 1. *Множеством достижимости* $\mathcal{X}[t, t_0]$ *задачи* (1.1) *называется пучок траекторий* $\mathcal{X}[t, t_0] = \{x(t, t_0) \mid \exists u(\cdot) :\ \forall v(\cdot), x(t_0, t_0) \in \mathcal{X}_0\}$

2. Общая теоретическая часть

Для поиска множества $\mathcal{X}[t, t_0]$ будем использовать функцию цены

$$V(t,x) = \min_{u(\cdot)} \max_{v(\cdot)} d^2(x_0, \mathcal{X}_0) \mid_{x(t)=x}$$

где $d(x_0, \mathcal{X}_0)$ - расстояние между точкой x_0 и множеством $\mathcal{X}_0$, определяемое метрикой $d(x, \mathcal{X}) = \min_{y \in \mathcal{X}} \|x - y\|$. Такой выбор вызван следующими причинами. Мы ищем множество $\mathcal{X}[t, \mathcal{X}_0]$ всех таких точек, что для $\forall x^*(t) \in \mathcal{X}[t, \mathcal{X}_0]$ можно заранее подобрать некоторое управление $u^*(\cdot)$ и некоторое подмножество $\{x^*(t_0)\} \in \mathcal{X}_0$ так, чтобы при любой помехе $v(\cdot)$ гарантировать вхождение $x^*(t) \in \{x(t, u^*(\cdot), \{x^*(t_0)\})\}_{\forall v(\cdot)}$. В рассматриваемой здесь задаче кроме помехи $v(\cdot)$ появляется другой неизвестный параметр $\tau(u,v)$ – момент переключения, в который меняется динамика системы, что приводит к существенному усложениню задачи.

Пусть $\phi(x) = d^2(x_0, \mathcal{X}_0)$, сопряженная к ней:

$$\phi^*(\ell) = \sup_x (\langle x, \ell \rangle - d^2(x, \mathcal{X}_0)) = \rho(\ell \mid \mathcal{X}_0) + \frac{\|\ell\|^2}{4},$$

тогда

$$V(t,x) = \min_{u(\cdot)} \max_{v(\cdot)} \sup_{\ell} \left(\langle \ell, x_0 \rangle - \rho(\ell \mid \mathcal{X}_0) - \frac{\|\ell\|^2}{4} \right). \tag{2.1}$$

Найдем выражения для поиска $x_0 \mid_{x(t_1)=x}$. Пусть траектория точки в момент t_1 известна $x(t_1) = x$. Идя в обратном времени, найдем её значение в момент $\tau \leqslant t \leqslant t_1$ при известных $B(s), C(s), u(s), v(s)$ до переключения:

$$x^{(2)}(t,x,u,v) = G_2(t,t_1)x + \int_{t_1}^{t} G_2(t,s) \left[B_2(s) u_2(s) + C_2(s) v_2(s) \right] ds, \text{при}\, \tau \leqslant t \leqslant t_1,$$

и после для $t_0 \leqslant t \leqslant \tau$:

$$\begin{aligned} x^{(2,1)}(t,\tau,x,u,v) =& G_1(t,\tau) G_2(\tau,t_1)x + G_1(t,\tau) \int_{t_1}^{\tau} G_2(t,s) \left[B_2(s) u_2(s) + C_2(s) v_2(s) \right] ds + \\ &+ \int_{\tau}^{t_0} G_1(t,s) \left[B_1(s) u_1(s) + C_1(s) v_1(s) \right] ds\,, \ \text{при}\, t_0 \leqslant t \leqslant \tau. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Нам необходимо, чтобы момент τ в этих выражениях удовлетворял условию на переключение, так чтобы $\langle x(\tau), c \rangle = \gamma$. Поскольку $d^2(x, \mathcal{X}) \geqslant 0$, то $V(x,t) \geqslant 0$. Тогда если $\mathcal{X}[t, t_0] = \{x \mid V(t,x) \leqslant 0\}, \forall t \in [t_0, t_1]$, то достаточно ввести штрафующий член $(\langle x(\tau), c \rangle - \gamma)^2$ в выражение для $V(t,x)$, тем самым обеспечивая для $\mathcal{X}[t, t_0]$ включение только тех траекторий, которые удовлетворяют нашим двум системам и условию на момент переключения.

Так как мы рассматриваем задачу в классе программных управлений, мы не можем строить управление в зависимости от текущего состояния системы, а должны определять его заранее. Поэтому, в формуле для $V(t,x)$ нельзя искать отдельно $\min_{u^{(i)}} \max_{v^{(i)}}$ для каждой из подсистем "до" и "после", так как момент переключения τ не известен заранее. Это означает, что выбираемое управление не может меняться в зависимости от

τ. Поскольку в общем случае ограничения на управления для разных подсистем различны, то выбираемое заранее управление должно удовлетворять обоим ограничениям $[u^*(\cdot) \in \mathcal{P}^{(1)}] \wedge [u^*(\cdot) \in \mathcal{P}^{(2)}]$. Поэтому справедливо положить $u(t) \in \mathcal{P}[\mathcal{T}] = \min\{\mathcal{P}^{(1)}[\mathcal{T}], \mathcal{P}^{(2)}[\mathcal{T}]\}$ для множества $\mathcal{T}$ такого, что $\mathcal{T} = \cup_{v,u}\tau(v,u) \subseteq [t_0, t]$. Мы будем рассматривать задачу для $\mathcal{P}[t_0,t] = \mathcal{P}^{(1)}[t_0,t] = \mathcal{P}^{(2)}[t_0,t]$.

$$V(t,x) = \min_{u_1,u_2 \in \mathcal{P}} \max_{v_1,v_2 \in \mathcal{W}} \min_{\tau} \left\{ d^2(x_0|_{x(t)=x}, \mathcal{X}_0) + (\langle x(\tau), c\rangle - \gamma)^2 \right\}.$$

Это значит, что искомое множество $\mathcal{X}[t, \mathcal{X}_0]$ в классе программных управлений содержит только те траектории, которые при любой допустимой помехе $v_1(\cdot), v_2(\cdot)$ и при любом $\tau(v,\cdot)$ гарантированно могут попасть на множество $\mathcal{X}[t, \mathcal{X}_0]$ Пока примем $\gamma = 0$. Для линеаризации условия на переключение сделаем подстановку

$$\langle x, c\rangle^2 \equiv \max_{\mu} \left\{ \mu \langle x, c\rangle - \frac{\mu^2}{4} \right\},$$

и, используя (2.1), имеем

$$V(t,x) = \min_{u_1,u_2 \in \mathcal{P}} \max_{v_1,v_2 \in \mathcal{W}} \min_{\tau} \left\{ \max_{\ell} \max_{\mu} \left\{ \left\langle \ell, x_0 \mid_{x(t)=x} \right\rangle + \mu \langle x(\tau), c\rangle - \frac{\mu^2}{4} - \rho(\ell \mid \mathcal{X}_0) - \frac{\|\ell\|^2}{4} \right\} \right\}.$$

Раскрывая (2.2), получим

$$V(t,x) = \min_{u_1,u_2} \max_{v_1,v_2} \min_{\tau \in [t_0,t]} \max_{\ell} \max_{\mu} \{$$

$$\langle \ell, G_1(t_0,\tau) G_2(\tau,t) x\rangle + \int_t^{\tau} \langle \ell, G_1(t_0,\tau) G_2(\tau,s) \left[B_2(s)u_2(s) + C_2(s)v_2(s)\right]\rangle \, ds +$$

$$+ \int_{\tau}^{t_0} \langle \ell, G_1(t_0,s) \left[B_1(s)u_1(s) + C_1(s)v_1(s)\right]\rangle \, ds + \mu \langle c, G_2(\tau,t)x\rangle +$$

$$+\mu \int_t^{\tau} \langle c, G_2(\tau,s) \left[B_2(s)u_2(s) + C_2(s)v_2(s)\right]\rangle \, ds -$$

$$-\frac{\mu^2}{4} - \rho(\ell \mid \mathcal{X}_0) - \frac{\|\ell\|^2}{4} \}$$

Сгруппируем слагаемые

$$\tilde{S}(\tau,t) = G_2^T(\tau,t) G_1^T(t_0,\tau)\ell + \mu G_2^T(\tau,t)c,$$
$$\tilde{S}_1(t_0,\tau) = G_1^T(t_0,\tau)\ell,$$

имеем

$$V(t,x) = \min_{u_1,u_2} \max_{v_1,v_2} \min_{\tau \in [t_0,t]} \max_{\ell} \max_{\mu} \{$$

$$\tilde{S}^T(\tau,t)x + \int_t^{\tau} \tilde{S}^T(\tau,s) \left[B_2(s)u_2(s) + C_2(s)v_2(s)\right] ds +$$

$$+ \int_{\tau}^{t_0} \tilde{S}_1^T(t_0,s) \left[B_1(s)u_1(s) + C_1(s)v_1(s)\right] ds - \tag{2.3}$$

$$-\frac{\mu^2}{4} - \rho(\ell \mid \mathcal{X}_0) - \frac{\|\ell\|^2}{4} \}$$

Чтобы эффективно вычислять множества достижимости используется прием, который позволяет заменить поиск множества допустимых траекторий вычислением опорной функции к этому множетсву. Для перехода к опорным функциям требуется менять местами порядок минимумов и максимумов в (2.3), а для этого необходимо выполнение условий теоремы минимакса. Поэтому дальнейшие преобразования выполняются с целью обеспечения этих условий. Одним из достаточных условий перестановки является линейность по минимизирующему или максимизирующему параметру. Наша цель состоим в том, чтобы перенести операции минимума по u_1, u_2 и максимума по v_1, v_2 внутрь выражения функции цены, тем самым сводя минимизацию/максимизацию на функциональном пространстве $\mathcal{P}, \mathcal{W}$ к поиску экстремумов для выпуклых(вогнутых) функций. Первыми меняются местами $\max_{v_1,v_2} \min_\tau(\cdot) = \min_\tau \max_{v_1,v_2}(\cdot)$. Для примера, сначала рассмотрим функционал

$$T(\tau, v(s)) = \int\limits_t^\tau v(s)ds$$

Легко видеть, что $T(\tau, v(s))$, являясь линейным по v, не является таковым по τ. Тогда вместо τ возьмем функцию ограниченной вариации $\tau(w) = \phi(w)$ и преобразуем

$$T(\phi(w), v(s)) = \int\limits_{t_0}^t d\phi(w) \int\limits_t^w v(s)ds.$$

Мы заменили множество τ более широким множеством функций $\phi(w)$. Условием нормировки (или одним из) для этих функций служит следующее выражение

$$\int\limits_{t_0}^t d\phi(w) = 1.$$

Теперь функционал $T(\phi, v)$ является линейным по всем аргументам.

Аналогично поступим с $V(t, x)$:

$$V(t,x) = \min_{u_1,u_2} \max_{v_1,v_2} \min_{\phi(w)} \max_{\ell(w)} \max_{\mu(w)} \int\limits_{t_0}^t d\phi(w) \Bigg\{$$

$$\tilde{S}^T(w,t)x + \int\limits_t^w \tilde{S}^T(w,s)\left[B_2(s)u_2(s) + C_2(s)v_2(s)\right] ds +$$

$$+ \int\limits_w^{t_0} \tilde{S}_1^T(t_0,s)\left[B_1(s)u_1(s) + C_1(s)v_1(s)\right] ds -$$

$$-\frac{\mu^2}{4} - \rho(\ell \mid \mathcal{X}_0) - \frac{\|\ell\|^2}{4} \Bigg\},$$

Поскольку мы здесь воспользовались перестановкой

$$\int \max_{\ell,\mu} f(w,\ell,\mu)d\phi(w) = \max_{\ell(w),\mu(w)} \int f(w,\ell(w),\mu(w))d\phi(w)$$

ℓ, μ теперь функции от w, $\ell = \ell(w)$ и $\mu = \mu(w)$.

Утверждение 1.

$$\max_{x(\cdot)} \int\limits_{t_0}^{t} f(x(s))ds = \int\limits_{t_0}^{t} \max_{x(s)} f(x(s))ds$$

Пусть

$$x^*(\cdot) = \arg\max_{x(\cdot)} \int\limits_{t_0}^{t} f(x(s))ds$$

$$x^\circ(\cdot) : \int\limits_{t_0}^{t} f(x^\circ(s)) = \int\limits_{t_0}^{t} \max_{x(s)} f(x(s))ds.$$

Предположим, что $x^*(\cdot) \neq x^\circ(\cdot)$ и $\int\limits_{t_0}^{t} f(x^*(s))ds \neq \int\limits_{t_0}^{t} f(x^\circ(s))ds$.

Тогда для выражения $m(s) = f(x^*(s)) - f(x^\circ(s))$ можно указать непересекающиеся отрезки $T_<, T_>, T_=$, на которых выполняются неравенства

$$\forall s \in T_< :\ m(s) < 0,\ \forall s \in T_> :\ m(s) > 0,\ \forall s \in T_= :\ m(s) = 0.$$

Для $T_>$ получаем, что

$$\forall s \in T_> : f(x^*(s)) > f(x^\circ(s)) = \max_{x(s)} f(x(s)$$

– противоречие.

Для $T_<$ получаем, что

$$\max_{x(\cdot)} \int\limits_{T_<} f(x(s))ds = \int\limits_{T_<} f(x^*(s))ds < \int\limits_{T_<} f(x^\circ(s))ds$$

– противоречие.

Остается единственный вариант, который и доказывает утверждение. ■

Можно заметить, что от w зависят только переменные $\tilde{S}, \tilde{S}_1$ и пределы интегрирования. Поменяем порядок интегрирования, чтобы собрать вместе члены, зависящие от w. Применяя правила замены

$$\int\limits_{t_0}^{t} d\phi(w) \int\limits_{t}^{w} ds(\cdot) = \int\limits_{t}^{t_0} ds \int\limits_{t_0}^{s} d\phi(w)(\cdot),$$

$$\int\limits_{t_0}^{t} d\phi(w) \int\limits_{w}^{t_0} ds(\cdot) = \int\limits_{t}^{t_0} ds \int\limits_{s}^{t} d\phi(w)(\cdot),$$

и делая замену переменных

$$S(t_0, t_1) = \int\limits_{t_0}^{t_1} \tilde{S}(w, t_1)\, d\phi(w) = \int\limits_{t_0}^{t_1} \left\{ G_2^T(w,t) G_1^T(t_0, w)\ell(w) + \mu(w) G_2^T(w,t)c \right\}\, d\phi(w),$$

$$S_1(t_0, t_1) = \int\limits_{t_0}^{t_1} \tilde{S}_1(t_0, w)\, d\phi(w), = \int\limits_{t_0}^{t_1} \left\{ G_1^T(t_0, w)\ell(w) \right\}\, d\phi(w),$$

$$K(\ell, \mu, \mathcal{X}_0) = \int\limits_{t_0}^{t} \left[\frac{\mu(w)^2}{4} + \rho(\ell(w) \mid \mathcal{X}_0) + \frac{\|\ell(w)\|^2}{4} \right]\, d\phi(w)$$

придем к

$$
\begin{gathered}
V(t,x) = \min_{u_1,u_2}\max_{v_1,v_2}\min_{\phi(w)}\max_{\ell(w)}\max_{\mu(w)}\Bigg\{ \\
S^T(t_0,t)x + \int\limits_t^{t_0} S^T(t_0,s)\left[B_2(s)u_2(s)+C_2(s)v_2(s)\right]\,ds+ \\
+\int\limits_t^{t_0} S_1^T(s,t)\left[B_1(s)u_1(s)+C_1(s)v_1(s)\right]\,ds- \\
-K(\ell,\mu,\mathcal{X}_0)\Bigg\},
\end{gathered} \tag{2.4}
$$

где $K(\ell,\mu,\mathcal{X}_0)$ – выпуклая функция.

Будем искать опорную функцию к множеству достижимости $\mathcal{X}[t,\mathcal{X}_0]$, определяемому по найденному выше выражению (2.4) для $V(t,x)$. Пользуясь линейностью по ϕ, теперь можно переставить

$$
\max_{v_1,v_2}\min_{\phi}\max_{\ell}\max_{\mu}(\cdot) = \min_{\phi}\max_{\ell}\max_{\mu}\max_{v_1,v_2}(\cdot),
$$

и

$$
\max_{v(\cdot)}\int\limits_t^{t_0} f(v(s))ds = \max_{v(\cdot)}\int\limits_{t_0}^{t} -f(v(s))ds = \int\limits_{t_0}^{t}\max_{v(s)}[-f(v(s))]ds
$$

тогда

$$
\begin{gathered}
V(t,x) = \min_{u_1,u_2}\min_{\phi}\max_{\ell}\max_{\mu}\Bigg\{ \\
S^T(t_0,t)x + \int\limits_t^{t_0} S^T(t_0,s)B_2(s)u_2(s)\,ds + \int\limits_{t_0}^{t}\rho(-S^T(t_0,s)\mid C_2(s)\mathcal{W}_2(s))\,ds \\
+\int\limits_t^{t_0} S_1^T(s,t)B_1(s)u_1(s) + \int\limits_{t_0}^{t}\rho(-S_1^T(s,t)\mid C_1(s)\mathcal{W}_1)\,ds- \\
-K(\ell,\mu,\mathcal{X}_0)\Bigg\}.
\end{gathered}
$$

Далее, мы хотим поменять $\min_{u_1,u_2}(\cdot)$ на опорную функцию, но полученное выше выражение уже не является вогнутым по ℓ,μ. Поэтому, мы прибегаем к овыпуклению нужных членов и приходим к

$$
\begin{gathered}
V(t,x) = \min_{\phi}\max_{\ell}\max_{\mu}\Bigg\{ \\
S^T(t_0,t)x - \int\limits_{t_0}^{t}\rho(S_1(s,t)\mid B_1(s)\mathcal{P}_1(s))\,ds - \int\limits_{t_0}^{t}\rho(S(t_0,s)\mid B_2(s)\mathcal{P}_2(s))\,ds- \\
-\mathrm{conv}\left\{-\int\limits_{t_0}^{t}\rho(-S_1(s,t)\mid C_1(s)\mathcal{W}_1(s))\,ds - \int\limits_{t_0}^{t}\rho(-S(t_0,s)\mid C_2(s)\mathcal{W}_2(s))\,ds + K(\ell,\mu,\mathcal{X}_0)\right\}\Bigg\}.
\end{gathered}
$$

Утверждение 2.

$$
\mathrm{conv}_{x(\cdot)}\int\limits_{t_0}^{t} f(x(t))dt = \int\limits_{t_0}^{t}\mathrm{conv}_{x(t)}f(x(t))dt
$$

Примем

$$\operatorname{conv}(f) = f^{**}$$

Тогда

$$\left(\int\limits_{t_0}^{t} f(x(s))ds\right)^{*}(\ell(t)) = \max_{x(\cdot)}\left(\langle \ell, x\rangle_{L_2} - \int\limits_{t_0}^{t} f(x(s))ds\right)$$

$$\left(\int\limits_{t_0}^{t} f(x(t))dt\right)^{**}(y(t)) = \max_{\ell(\cdot)}\left(\langle y, \ell\rangle_{L_2} - \max_{x(\cdot)}\left(\langle \ell, x\rangle_{L_2} - \int\limits_{t_0}^{t} f(x(s))ds\right)\right) =$$

$$= \max_{\ell(\cdot)}\min_{x(\cdot)}\left(\langle y, \ell\rangle_{L_2} - \langle \ell, x\rangle_{L_2} + \int\limits_{t_0}^{t} f(x(s))ds\right) =$$

$$= \max_{\ell(\cdot)}\min_{x(\cdot)}\int\limits_{t_0}^{t}\left[\langle y(s), \ell(s)\rangle - \langle \ell(s), x(s)\rangle + f(x(s))\right]ds =$$

$$= \int\limits_{t_0}^{t}\max_{\ell(s)}\min_{x(s)}\left[\langle y(s), \ell(s)\rangle - \langle \ell(s), x(s)\rangle + f(x(s))\right]ds =$$

$$= \int\limits_{t_0}^{t}\max_{\ell(s)}\left[\langle y(s), \ell(s)\rangle - \max_{x(s)}\{\langle \ell(s), x(s)\rangle - f(x(s))\}\right]ds =$$

$$= \int\limits_{t_0}^{t} f^{**}(s)ds$$

■

Утверждение 3.

$$\min_{\ell}\left[\langle x, l\rangle + (\operatorname{conv}(y))(\ell)\right] = \min_{\ell}\left[\langle x, \ell\rangle + y(\ell)\right]$$

$$\min_{\ell}\left[\langle x, \ell\rangle + \max_{p}(\langle p, \ell\rangle - \max_{s}(\langle p, s\rangle - y(s)))\right] =$$

$$= \min_{\ell}\max_{p}\min_{s}\left[\langle x, l\rangle + \langle l, p\rangle - \langle p, s\rangle + y(s)\right] = \left\{\min_{\ell}\max_{p} = \max_{p}\min_{\ell}\right\} =$$

$$= \max_{p}\min_{\ell}\min_{s}\left[\langle \ell, x+p\rangle - \langle p, s\rangle + y(s)\right] = \max_{p}\left[\begin{cases} -\inf, & p \neq -x \\ 0, & p = -x \end{cases} + \min_{s}(-\langle p, s\rangle + y(s))\right] =$$

$$= \{\text{из первого } \min \text{ находим } \ p = -x\} = \min_{s}(-\langle -x, s\rangle + y(s)) =$$

$$= \min_{\ell}(\langle x, \ell\rangle + y(\ell))$$

■

Рассмотрим примеры в $\mathbb{R}^1$

Пример 1.

$$
\begin{cases}
\left[\begin{array}{l}\dot{x} = 2u + v;\\ \dot{x} = u;\end{array}\right.\\
u \in [0,1];\\
v \in [0,1];\\
\mathcal{X}_0 = \{x \in [-2,-1]\};\\
t \in [0,4];\\
H = \{x = 0\}.
\end{cases}
\tag{2.5}
$$

Пример 2.

$$
\begin{cases}
\left[\begin{array}{l}\dot{x} = u;\\ \dot{x} = 2u + v;\end{array}\right.\\
u \in [0,1];\\
v \in [0,1];\\
\mathcal{X}_0 = \{x \in [-2,-1]\};\\
t \in [0,4];\\
H = \{x = 0\}.
\end{cases}
\tag{2.6}
$$

Начальные условия для (2.5) и (2.6) одинаковы. Функция цены для задач (2.5) и (2.6).

$$
V(t,x) = \min_u \max_v \max_\tau \max_\ell \max_\mu \left\{ \left\langle \ell, x_0 \mid_{x(t)=x} \right\rangle - \rho(\ell \mid \mathcal{X}_0) - \frac{\|\ell\|^2}{4} + \mu \left\langle x(\tau), c \right\rangle - \frac{\mu^2}{4} \right\}.
$$

В одномерном случае, если рассматривать отрезок $[\alpha, \beta]$ как эллипсоид $\mathcal{E}(q,Q)$, то $q = \frac{\beta+\alpha}{2}$, $Q = \left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right)^2$. Тогда

$$
\rho\left(\ell \mid \mathcal{E}(()q,Q)\right) = \langle \ell, q\rangle + \langle \ell, Q\ell\rangle^{\frac{1}{2}} = \ell \cdot q + \mid \ell \mid \sqrt{Q}.
$$

Поскольку в уравнениях примеров (2.5) и (2.6) фундаментальные матрицы $G(t,t_0) \equiv I$, $c = 1$, то можно написать

$$
V(t,x) = \min_u \max_v \min_\tau \max_\ell \max_\mu \big\{ \ell \cdot x + \int\limits_t^\tau \ell \cdot [B_2 u_2 + v_2] ds + \int\limits_\tau^{t_0} \ell \cdot [B_1 u_1 + v_1] ds -
$$

$$
-(\ell \cdot x_0 + \mid \ell \mid \sqrt{X_0}) - \frac{\ell^2}{4} + \mu\big[x + \int\limits_t^\tau [B_2 u_2 + v_2] ds\big] - \frac{\mu^2}{4}\big\}.
$$

Здесь $\mathcal{X}_0 = \mathcal{E}(x_0, X_0)$, для (2.5) $v_2 \equiv 0$, для (2.6) $v_1 \equiv 0$. Если сократить, то получим для (2.5):

$$
V(t,x) = \min_u \max_v \min_\tau \max_\ell \max_\mu \big\{ (\ell + \mu)x + \int\limits_t^\tau (\ell + \mu) B_2 u_2 ds + \int\limits_\tau^{t_0} \ell B_1 u_1 ds + \int\limits_\tau^{t_0} \ell v_1 ds -
$$

$$
-(\ell \cdot x_0 + \mid \ell \mid \sqrt{X_0}) - \frac{\ell^2}{4} - \frac{\mu^2}{4}\big\}.
$$

Для (2.6)

$$V(t,x)=\min_u\max_v\min_\tau\max_\ell\max_\mu\big\{(\ell+\mu)x+\int\limits_t^\tau(\ell+\mu)B_2u_2ds+\int\limits_t^\tau(\ell+\mu)v_2ds+\int\limits_\tau^{t_0}\ell B_1u_1ds-$$

$$-(\ell\cdot x_0+\mid\ell\mid\sqrt{X_0})-\frac{\ell^2}{4}-\frac{\mu^2}{4}\big\}.$$

Эти выражения не являются выпуклыми по τ, чтобы можно было переставлять $\max_v\min_\tau$. Поэтому прибегаем к функции распределения $\phi(w)$. $\phi(w)$ – функция ограниченной вариации.

$$\int\limits_{t_0}^t d\phi(w)=1.$$

Обозначим

$$S_2(t_0,s)=\int\limits_{t_0}^s\ell(w)+\mu(w)d\phi(w)$$

$$S_1(s,t)=\int\limits_s^t\ell(w)d\phi(w)$$

Тогда приходим к найденному ранее выражению (2.). Используя формулу вычисления опорной функции для множеств из $\mathbb{R}^1$ запишем

$$V(t,x)=\min_\phi\max_\ell\max_\mu\Bigg\{$$

$$S_2(t_0,t)x-\int\limits_{t_0}^t S_1(s,t)p_1+\mid S_1(s,t)\mid\sqrt{P_1}ds-\int\limits_{t_0}^t S_2(t_0,s)p_2+\mid S_2(t_0,s)\mid\sqrt{P_2}\,ds-$$

$$-\mathrm{conv}\Bigg\{\int\limits_{t_0}^t w_1S_1(s,t)-\sqrt{W_1}\mid\ S_1(s,t)\mid+w_2S_2(t_0,s)-\sqrt{W_2}\mid S_2(t_0,s)\mid\ ds+$$

$$+\int\limits_{t_0}^t\frac{\ell^2(w)}{4}+\frac{\mu^2(w)}{4}+\ell(w)x_0+\mid\ell(w)\mid\sqrt{X_0}\,d\phi(w)\Bigg\}\Bigg\}.$$