МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Московский Государственный Университет имени М.В. Ломоносова

Факультет вычислительной математики и кибернетики

Кафедра системного анализа

Магистерская программа по направлению

Математические модели сложных систем: теория, алгоритмы, приложения

Магистерская диссертация на тему

Построение множества достижимости для гибридной системы с одним переключением с неопределенностью

Выполнил:

Селиверстов Д.С.

Научный руководитель:

к.ф-м.н. Точилин П.А.

Москва, 2010

Аннотация

Данная магистерская диссертация посвящена решению одной из классических задач теории управления для нового класса сложных, нелинейных систем. А именно, решается задача построения множества достижимости для гибридной системы с одним переключением, с неопределенностью в дифференциальных уравнениях. В работе рассмотрена модель гибридной динамической системы, состоящая из двух систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений и условия переключения между ними. Задача состоит в построении и аппроксимации множества всех траекторий этой гибридной системы в конечный момент времени, в которые гарантированно можно попасть, выбрав соответствующее управление, вне зависимости от реализации помехи.

В диссертации получено решение поставленной задачи с привлечением аппарата выпуклого анализа, при помощи сопряженных функций и функций цены минимаксного типа. Множество достижимости представлено в виде объединения множеств уровня (множеств Лебега) для специальных функций. Рассмотрено решение задачи методами многозначного анализа. Этот подход позволяет явно построить искомое множество достижимости посредством операций над выпуклыми компактными множествами. В работе 22 страницы, 5 иллюстраций.

Содержание

1. Введение. **4**

2. Постановка задачи **5**

3. Построение множества при помощи функции цены. **6**

4. Построение множества методами многозначного анализа. **11**

4.1 Множество достижимости до переключения. 12

4.2 Пересечение с гиперплоскостью. 14

4.3 Вычисление множества достижимости для второй системы 15

4.4 Пример 19

5. Заключение **21**

1. Введение.

В данной работе рассматривается математическая модель гибридной системы, состоящей из двух систем обыкновенных дифференциальных уравнений с управляющими параметрами и помехами, а также из условия замены одной системы на другую. Траектория такой системы развивается в каждый момент времени в силу одной из двух систем дифференциальных уравнений. При достижении определенной гиперплоскости в фазовом пространстве происходит обязательная смена активной системы уравнений — так называемое переключение траектории гибридной системы [3]. Рассматриваемые системы обыкновенных дифференциальных уравнений являются линейными по фазовым переменным, а также по управляющим параметрам и помехам. Однако, в целом система нелинейна. Похожие модели гибридных систем активно исследуются в последние годы (см. например, [6], [11], [10]), для них актуальны многие классические задачи управления, такие как задачи достижимости, верификации, синтеза управления в условиях реально доступной информации и др. Особенно важны задачи, в которых учитываются неопределенности, помехи, которые могут быть связаны как с ошибками математического моделирования, так и с заранее неизвестными воздействиями на систему.

В данной работе для гибридной системы решается задача построения множества достижимости “минимаксного типа” в классе программных управлений. То есть необходимо построить множество всех позиций системы, в которые можно попасть за счет применения программных управлений, несмотря на наличие в системе заранее неизвестных помех. Для действующих в системе помех известны лишь по-точечные ограничения. Решение данной задачи можно рассматривать как первый шаг к построению теории достижимости при неопределенности для гибридных систем с кусочно-линейной структурой в классах программных или позиционных управлений.

Поскольку рассматриваемые дифференциальные уравнения линейны по фазовым переменным, управлениям и помехам, то для решения поставленной задачи целесообразно использовать аппарат сопряженных функций и другие методы выпуклого анализа [4], [5]. Кроме того, для аппроксимации множеств достижимости возможно использование методов эллипсоидального исчисления [9], [8]. В данной работе рассматривается два подхода к решению задачи достижимости: 1) при помощи функций цены и методов выпуклого анализа, а также 2) при помощи методов многозначного анализа. В первом случае множества достижимости представлены в виде множеств уровней (множеств Лебега) для специальных функций, а во втором методе указанные множества построены в явном виде, за счет применения операций с выпуклыми компактами.

В работе приведено теоретическое описание двух подходов к построению множеств достижимости, рассмотрен пример в одномерном фазовом пространстве.

2. Постановка задачи

Рассматриваются две взаимосвязанные системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающие состояние некоторой модели до переключения (смены системы дифференциальных уравнений) и после:

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \dot{x}^{(1)} = A^{(1)}(t)x^{(1)} + B^{(1)}(t)u^{(1)}(t) + C^{(1)}(t)v^{(1)}(t); \\ x(t_0) \in \mathcal{E}(x_0, X_0) = \mathcal{X}_0; \end{cases} \\ \begin{cases} \dot{x}^{(2)} = A^{(2)}(t)x^{(2)} + B^{(2)}(t)u^{(2)}(t) + C^{(2)}(t)v^{(2)}(t); \\ x(\tau) \in \mathcal{X}^{(1)}(\tau, t_0) \cap H; \end{cases} \end{array} \right. \\ H = \{x \in \mathbb{R}^n \colon \langle x, c\rangle = \gamma\} \text{— гиперплоскость переключения}; \\ A(t) \in \mathbb{R}^{n\times n},\ B(t) \in \mathbb{R}^{n\times m},\ C(t) \in \mathbb{R}^{n\times k};\ A(t), B(t), C(t) \in L_1[t_0, t_1]; \\ \tau :\ \left\langle x^{(1)}(\tau), c\right\rangle - \gamma = 0,\ \tau \in [t_0, t_1] \\ u^{(1)}(t) \in \mathcal{E}(p^{(1)}(t), P^{(1)}(t)) = \mathcal{P}^{(1)}[t_0, t_1]; \\ v^{(1)}(t) \in \mathcal{E}(w^{(1)}(t), W^{(1)}(t)) = \mathcal{V}^{(1)}[t_0, t_1]; \\ u^{(2)}(t) \in \mathcal{E}(p^{(2)}(t), P^{(2)}(t)) = \mathcal{P}^{(2)}[t_0, t_1]; \\ v^{(2)}(t) \in \mathcal{E}(w^{(2)}(t), W^{(2)}(t)) = \mathcal{V}^{(2)}[t_0, t_1]; \end{cases} \tag{2.1}$$

где $\mathcal{P}^{(1,2)}[t_0, t_1], \mathcal{V}^{(1,2)}[t_0, t_1]$ - кусочно-непрерывные эллипсоидальнозначные отображения. В неизвестный заранее момент времени τ, при пересечении наперед известной гиперплоскости $H = \{x \in \mathbb{R}^n \colon \langle x, c\rangle = \gamma\}$, происходит переключение с первой системы на вторую. $v^{(i)}(t)$ - неизвестная функция, неопределенность, область значений которой в каждый момент t ограничена k-мерной эллипсоидальной областью $\mathcal{V}^{(i)}(t)$, и принадлежащая к классу интегрируемых функций $L_1[t_0, t_1]$. Управление $(u^{(1)}(\cdot), u^{(2)}(\cdot))$ – интегрируемые в $L_1[t_0, t_2]$ функции, ограниченные в каждый момент t эллипсоидальными областями $u^{(1)}(t) \in \mathcal{P}^{(1)}(t)$,$u^{(2)}(t) \in \mathcal{P}^{(2)}(t)$. Оно выбирается из класса программных управлений то есть так, что оно определяется к начальному моменту t_0 заранее и уже не изменяется в зависимости от поведения системы в дальнейшем, оно также не зависит от времени переключения τ. Для решения задачи важно, чтобы траектория гибридной системы удовлетворяла условию односторонней проницаемости, то есть чтобы при переходе через плоскость H в момент τ всегда выполнялось

$$\begin{cases} \langle x(\tau), c\rangle - \gamma = 0 \\ \langle x(\tau + \epsilon), c\rangle - \gamma > 0; \end{cases} \tag{2.2}$$

для любого малого $\epsilon > 0$. Это предположение будем считать выполненным как для первой системы $x(t) = x^{(1)}(t)$, так и для второй $x(t) = x^{(2)}(t)$, где $x^{(1)}(t), x^{(t)}(t)$ – фазовые переменные (траектории) системы соответственно до переключения и после. Это означает, что траектория системы может пересекать гиперплоскость переключения только один раз с переходом к другой системе, что также гарантирует связность множества $\{(x(\tau), \tau) \mid x(\tau) \cap H\}$. Требуется построить множество достижимости $\mathcal{X}[t, t_0]$ в классе допустимых управлений $\mathcal{P}[t_0, t_1]$, в момент времени $t > t_0$, при известном начальном множестве $\mathcal{X}_0$. Таким образом, необходимо найти множество точек $\mathcal{X}[t, t_0, \mathcal{X}_0] = \{x(t)\}$, в которые система может гарантированно прийти из начального множества $\mathcal{X}^0$ за счет выбора соответствующего управления $(u^{(1)}(\cdot), u^{(2)}(\cdot))$ вне зависимости от помехи $(v^{(1)}(\cdot), v^{(2)}(\cdot))$.

Определение 1. *Эллипсоидом $\mathcal{E}(q, Q)$ называется множество*

$$\{x \mid (x - q)^T Q^{-1}(x - q) \leq 1\},$$

где $x, q \in \mathbb{R}^n, Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $Q = Q^T$, Q – положительно определенная матрица.

Определение 2. *Множеством достижимости $\mathcal{X}[t_1, t_0, \mathcal{X}_0]$ системы линейных дифференциальных уравнений в момент t_1 называется*

$$\mathcal{X}[t_1, t_0, \mathcal{X}_0] = \{x_1 \mid \exists u(\cdot):\ \forall v(\cdot), \exists x_0 \in \mathcal{X}_0 : x(t_1, t_0, x_0) = x_1\},$$

где $x(\cdot, t, x)$ – траектория системы при фиксированных $u(\cdot), v(\cdot)$ и начальном условии $x(t) = x$. $\mathcal{X}_0$ – начальное множество в момент времени t_0.

Определение 3. *Множеством достижимости для гибридной системы* (2.1) *называется*

$$\mathcal{X}[t_1, t_0, \mathcal{X}_0] = \{x_1 \mid \exists u^{(1)}(\cdot) \in \mathcal{P}^{(1)}, u^{(2)}(\cdot) \in \mathcal{P}^{(2)} :$$
$$\forall v^{(1)}(\cdot) \in \mathcal{V}^{(1)}, v^{(2)}(\cdot) \in \mathcal{V}^{(2)} : \exists x_0 \in \mathcal{X}_0 :$$
$$x(t_1, t_0, x_0) = x_1, \exists \tau : x(\tau, t_0, x_0) \cap H \neq \emptyset, t_1 \geq \tau > t_0\},$$

где $x(\tau, t, x_0)$ – траектория гибридной системы при фиксированном управлении $u^{(1,2)}$ и помехе $v^{(1,2)}$.

3. Построение множества при помощи функции цены.

Поиск множества достижимости непосредственным расчетом каждой траектории ведет к большим вычислительным издержкам. Поэтому разумно прибегнуть к различным методам, которые позволили бы воспользоваться свойствами данной модели, такими как линейность системы уравнений и выпуклость множеств ограничений и начального множества, что позволит сократить количество вычислений с помощью параметризации множеств конечномерными функциями. Например, можно использовать множества уровней некоторой специальной функции, и по ним однозначно вычислять искомое множество. Другой подход основывается на применении приемов многозначного анализа. Так, если известна опорная функция к выпуклому компактному множеству, то по этой функции можно восстановить все множество. Рассмотрим сначала первый подход.

Будем искать множество достижимости с использованием функции цены, значениями которой будет расстояние выбранной точки $x(t)$ от искомого множества $\mathcal{X}[t, t_0, \mathcal{X}_0]$. Согласно (Опр.3.), необходимо найти наиболее подходящее управление, которое позволит сократить до минимума это расстояние при любой возможной реализации помехи. Для этого используется минимаксный подход, описанный в [2] .

Для поиска множества $\mathcal{X}[t, t_0]$ используется функция цены вида

$$V(t, x) = \min_{u(\cdot)} \max_{v(\cdot)} d^2(x_0 \mid_{x(t)=x}, \mathcal{X}_0),$$

где $d(x_0, \mathcal{X}_0)$ - расстояние между точкой x_0 и множеством $\mathcal{X}_0$, определяемое метрикой $d(x, \mathcal{X}) = \min_{y\in\mathcal{X}} \|x - y\|$. Поясним наш выбор. Мы ищем множество $\mathcal{X}[t, \mathcal{X}_0]$ всех таких точек, что для $\forall x^*(t) \in \mathcal{X}[t, \mathcal{X}_0]$ можно заранее подобрать некоторое управление $u^*(\cdot)$ и некоторое подмножество $\{x^*(t_0)\} \in \mathcal{X}_0$ так, чтобы при любой помехе $v(\cdot)$ гарантировать вхождение $x^*(t) \in \{x(t, u^*(\cdot), \{x^*(t_0)\})\}_{\forall v(\cdot)}$. В рассматриваемой здесь задаче кроме помехи $v(\cdot)$ появляется другой неизвестный параметр $\tau(u, v)$ – момент переключения, в который меняется динамика системы, что приводит к существенному усложнению задачи.

Рассмотрим функцию $\phi(x) = d^2(x, \mathcal{X})$,где $\mathcal{X}$ – выпуклый компакт. Тогда $\phi(x)$ – выпуклая, собственная, замкнутая, и тогда операция двойного сопряжения приводит к тождественному результату [4] . Удобно выразить $V(x, t)$ через двойное сопряжение функции расстояния $d^2(x,\mathcal{X}_0)$, что позволит заменить вычисление минимума на множестве в функции расстояния на вычисление максимума функции по n-мерному аргументу.

$$\phi^*(\ell^*) = \sup_x(\langle x,\ell^*\rangle - d^2(x,\mathcal{X}_0)) = \rho(\ell^* \mid \mathcal{X}_0) + \frac{\|\ell^*\|^2}{4},$$
$$\phi^{**}(\ell^{**}) = \sup_{\ell^*}\left(\langle \ell^*,\ell^{**}\rangle - \rho\left(\ell^* \mid \mathcal{X}_0\right) - \frac{\|\ell^*\|^2}{4}\right).$$

Поскольку $\phi(\ell)$ – замкнутая функция, sup достигается и его можно заменить на max , тогда

$$V(t,x) = \min_{u(\cdot)}\max_{v(\cdot)}\max_{\ell}\left(\langle \ell, x_0\mid_x\rangle - \rho\left(\ell \mid \mathcal{X}_0\right) - \frac{\|\ell^*\|^2}{4}\right). \tag{3.1}$$

Найдем выражения для поиска $x_0\mid_{x(t_1)=x}$. Пусть траектория точки в момент t_1 известна $x(t_1)=x$. Идя в обратном времени, найдем её значение в момент $\tau \leqslant t \leqslant t_1$ при известных $B(s), C(s), u(s), v(s)$ до переключения:

$$x^{(2)}(t,x,u,v) = G_2(t,t_1)x + \int\limits_{t_1}^{t} G_2(t,s)\left[B_2(s)u_2(s) + C_2(s)v_2(s)\right]ds, \text{при}\, \tau \leqslant t \leqslant t_1,$$

и после для $t_0 \leqslant t \leqslant \tau$:

$$\begin{aligned} x^{(2,1)}(t,\tau,x,u,v) =& G_1(t,\tau)G_2(\tau,t_1)x + G_1(t,\tau)\int\limits_{t_1}^{\tau} G_2(t,s)\left[B_2(s)u_2(s) + C_2(s)v_2(s)\right]ds + \\ &+ \int\limits_{\tau}^{t_0} G_1(t,s)\left[B_1(s)u_1(s) + C_1(s)v_1(s)\right]ds\,,\ \text{при}\, t_0 \leqslant t \leqslant \tau. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Нам необходимо, чтобы момент τ в этих выражениях удовлетворял условию на переключение, так чтобы $\langle x(\tau), c\rangle = \gamma$. Поскольку $d^2(x,\mathcal{X}) \geqslant 0$, то $V(x,t) \geqslant 0$. Тогда если $\mathcal{X}[t,t_0] = \{x \mid V(t,x) \leqslant 0\}, \forall t \in [t_0,t_1]$, то достаточно ввести штрафующий член $\left(\langle x(\tau), c\rangle - \gamma\right)^2$ в выражение для $V(t,x)$, тем самым обеспечивая для $\mathcal{X}[t,t_0]$ включение только тех траекторий, которые удовлетворяют нашим двум системам и условию на момент переключения.

Так как мы рассматриваем задачу в классе программных управлений, мы не можем строить управление в зависимости от текущего состояния системы, а должны определять его заранее. Поэтому, в формуле для $V(t,x)$ нельзя искать отдельно $\min_{u^{(i)}}\max_{v^{(i)}}$ для каждой из подсистем "до" и "после", так как момент переключения τ не известен заранее. Это означает, что выбираемое управление не может меняться в зависимости от τ. Это описывается выражением

$$V(t,x) = \min_{\substack{u_1\,\in\,\mathcal{P}^1\\ u_2\,\in\,\mathcal{P}^2}}\ \max_{\substack{v_1\,\in\,\mathcal{V}^1\\ v_2\,\in\,\mathcal{V}^2}}\ \min_{\tau}\left\{d^2(x_0|_{x(t)=x},\mathcal{X}_0) + \left(\langle x(\tau), c\rangle - \gamma\right)^2\right\}.$$

Это значит, что искомое множество $\mathcal{X}[t,\mathcal{X}_0]$ в классе программных управлений содержит только те траектории, которые при любой допустимой помехе $v_1(\cdot), v_2(\cdot)$ и при любом τ гарантированно могут попасть на множество $\mathcal{X}[t,\mathcal{X}_0]$. Не ограничивая общности примем $\gamma = 0$. Для линеаризации условия на переключение сделаем подстановку

$$\langle x, c\rangle^2 \equiv \max_{\mu}\left\{\mu\,\langle x, c\rangle - \frac{\mu^2}{4}\right\},$$

и, используя (3.1), имеем

$$V(t,x) = \min_{u_1,u_2}\max_{v_1,v_2}\min_{\tau}\left\{\max_{\ell}\max_{\mu}\left\{\left\langle \ell, x_0\mid_{x(t)=x}\right\rangle + \mu\left\langle x(\tau), c\right\rangle - \frac{\mu^2}{4} - \rho(\ell \mid \mathcal{X}_0) - \frac{\|\ell\|^2}{4}\right\}\right\}.$$

Раскрывая (3.2), получим

$$\begin{gathered} V(t,x) = \min_{u_1,u_2}\max_{v_1,v_2}\min_{\tau\in[t_0,t]}\max_{\ell}\max_{\mu}\{ \\ \langle \ell, G_1(t_0,\tau)G_2(\tau,t)x\rangle + \int\limits_t^\tau \langle \ell, G_1(t_0,\tau)G_2(\tau,s)\left[B_2(s)u_2(s)+C_2(s)v_2(s)\right]\rangle\, ds+ \\ +\int\limits_\tau^{t_0} \langle \ell, G_1(t_0,s)\left[B_1(s)u_1(s)+C_1(s)v_1(s)\right]\rangle\, ds + \mu\langle c, G_2(\tau,t)x\rangle + \\ +\mu\int\limits_t^\tau \langle c, G_2(\tau,s)\left[B_2(s)u_2(s)+C_2(s)v_2(s)\right]\rangle\, ds- \\ -\frac{\mu^2}{4} - \rho(\ell\mid\mathcal{X}_0) - \frac{\|\ell\|^2}{4}\} \end{gathered}$$

Сгруппируем слагаемые

$$\begin{aligned} \tilde{S}(\tau,t) &= G_2^T(\tau,t)G_1^T(t_0,\tau)\ell + \mu G_2^T(\tau,t)c, \\ \tilde{S}_1(t_0,\tau) &= G_1^T(t_0,\tau)\ell, \end{aligned}$$

имеем

$$\begin{gathered} V(t,x) = \min_{u_1,u_2}\max_{v_1,v_2}\min_{\tau\in[t_0,t]}\max_{\ell}\max_{\mu}\{ \\ \tilde{S}^T(\tau,t)x + \int\limits_t^\tau \tilde{S}^T(\tau,s)\left[B_2(s)u_2(s)+C_2(s)v_2(s)\right]\, ds+ \\ +\int\limits_\tau^{t_0} \tilde{S}_1^T(t_0,s)\left[B_1(s)u_1(s)+C_1(s)v_1(s)\right]\, ds- \\ -\frac{\mu^2}{4} - \rho(\ell\mid\mathcal{X}_0) - \frac{\|\ell\|^2}{4}\} \end{gathered} \tag{3.3}$$

Чтобы эффективно вычислять множества достижимости используется прием, который позволяет заменить поиск множества допустимых траекторий вычислением опорной функции к этому множеству. Для перехода к опорным функциям требуется менять местами порядок минимумов и максимумов в (3.3), а для этого необходимо выполнение условий теоремы минимакса. Поэтому дальнейшие преобразования выполняются с целью обеспечения этих условий. Одним из достаточных условий перестановки является линейность по минимизирующему или максимизирующему параметру. Наша цель состоим в том, чтобы перенести операции минимума по u_1, u_2 и максимума по v_1, v_2 внутрь выражения функции цены, тем самым сводя задачу поиска минимума(максимума) на функциональном пространстве $\mathcal{P}, \mathcal{V}$ к поиску минимумов(максимумов) в $\mathbb{R}^n$ для выпуклых(вогнутых) функций. Первыми меняются местами $\max_{v_1,v_2}\min_\tau(\cdot) = \min_\tau\max_{v_1,v_2}(\cdot)$. Рассмотрим функционал

$$T(\tau, v(s)) = \int\limits_t^\tau v(s)ds$$

Легко видеть, что $T(\tau, v(s))$, являясь линейным по v, не является таковым по τ. Тогда вместо τ возьмем функцию ограниченной вариации $\tau(w) = \phi(w)$ и преобразуем

$$T(\phi(w), v(s)) = \int\limits_{t_0}^{t} d\phi(w) \int\limits_{t}^{w} v(s)ds.$$

Мы заменили множество τ более широким множеством функций $\phi(w)$. Условием нормировки для этих функций служит следующее выражение

$$\int\limits_{t_0}^{t} d\phi(w) = 1.$$

Теперь функционал $T(\phi, v)$ является линейным по всем аргументам.

Аналогично поступим с $V(t, x)$:

$$V(t,x) = \min_{u_1,u_2} \max_{v_1,v_2} \min_{\phi(w)} \max_{\ell(w)} \max_{\mu(w)} \int\limits_{t_0}^{t} d\phi(w) \Bigg\{$$

$$\tilde{S}^T(w,t)x + \int\limits_{t}^{w} \tilde{S}^T(w,s) \left[B_2(s)u_2(s) + C_2(s)v_2(s)\right] ds +$$

$$+ \int\limits_{w}^{t_0} \tilde{S}_1^T(t_0,s) \left[B_1(s)u_1(s) + C_1(s)v_1(s)\right] ds -$$

$$-\frac{\mu^2}{4} - \rho(\ell \mid \mathcal{X}_0) - \frac{\|\ell\|^2}{4} \Bigg\},$$

Мы здесь воспользовались перестановкой

$$\int \max_{\ell,\mu} f(w,\ell,\mu)d\phi(w) = \max_{\ell(w),\mu(w)} \int f(w,\ell(w),\mu(w))d\phi(w),$$

и теперь ℓ, μ есть функции от w.

Утверждение 1.

$$\max_{x(\cdot)} \int\limits_{t_0}^{t} f(x(s))ds = \int\limits_{t_0}^{t} \max_{x(s)} f(x(s))ds$$

Доказательство. Пусть

$$x^*(\cdot) = \arg\max_{x(\cdot)} \int\limits_{t_0}^{t} f(x(s))ds$$

$$x^\circ(\cdot) : \int\limits_{t_0}^{t} f(x^\circ(s)) = \int\limits_{t_0}^{t} \max_{x(s)} f(x(s))ds.$$

Предположим, что $x^*(\cdot) \neq x^\circ(\cdot)$ и $\int\limits_{t_0}^{t} f(x^*(s))ds \neq \int\limits_{t_0}^{t} f(x^\circ(s))ds$.

Тогда для выражения $m(s) = f(x^*(s)) - f(x^\circ(s))$ можно указать не пересекающиеся отрезки $T_<, T_>, T_=$, на которых выполняются неравенства

$$\forall s \in T_< : m(s) < 0, \ \forall s \in T_> : m(s) > 0, \ \forall s \in T_= : m(s) = 0.$$

Для $T_>$ получаем, что

$$\forall s \in T_> : f(x^*(s)) > f(x^\circ(s)) = \max_{x(s)} f(x(s)$$

– противоречие.
Для $T_<$ получаем, что

$$\max_{x(\cdot)} \int\limits_{T_<} f(x(s))ds = \int\limits_{T_<} f(x^*(s))ds < \int\limits_{T_<} f(x^\circ(s))ds$$

– противоречие.
Остается единственный вариант, который и доказывает утверждение. $\square$

Можно заметить, что от w зависят только переменные $\tilde{S}, \tilde{S}_1$ и пределы интегрирования. Поменяем порядок интегрирования, чтобы собрать вместе члены, зависящие от w. Применяя правила замены

$$\int\limits_{t_0}^{t} d\phi(w) \int\limits_{t}^{w} ds(\cdot) = \int\limits_{t}^{t_0} ds \int\limits_{t_0}^{s} d\phi(w)(\cdot),$$

$$\int\limits_{t_0}^{t} d\phi(w) \int\limits_{w}^{t_0} ds(\cdot) = \int\limits_{t}^{t_0} ds \int\limits_{s}^{t} d\phi(w)(\cdot),$$

и делая замену переменных

$$S(t_0, t_1) = \int\limits_{t_0}^{t_1} \tilde{S}(w, t_1)\, d\phi(w) = \int\limits_{t_0}^{t_1} \left\{ G_2^T(w, t) G_1^T(t_0, w)\ell(w) + \mu(w) G_2^T(w, t)c \right\}\, d\phi(w),$$

$$S_1(t_0, t_1) = \int\limits_{t_0}^{t_1} \tilde{S}_1(t_0, w)\, d\phi(w), = \int\limits_{t_0}^{t_1} \left\{ G_1^T(t_0, w)\ell(w) \right\}\, d\phi(w),$$

$$K(\ell, \mu, \mathcal{X}_0) = \int\limits_{t_0}^{t} \left[\frac{\mu(w)^2}{4} + \rho(\ell(w) \mid \mathcal{X}_0) + \frac{\|\ell(w)\|^2}{4} \right] d\phi(w)$$

придем к

$$\begin{gathered} V(t,x) = \min_{u_1,u_2} \max_{v_1,v_2} \min_{\phi(w)} \max_{\ell(w)} \max_{\mu(w)} \Bigg\{ \\ S^T(t_0,t)x + \int\limits_{t}^{t_0} S^T(t_0,s)\left[B_2(s)u_2(s) + C_2(s)v_2(s)\right]\, ds + \\ + \int\limits_{t}^{t_0} S_1^T(s,t)\left[B_1(s)u_1(s) + C_1(s)v_1(s)\right]\, ds - \\ -K(\ell,\mu,\mathcal{X}_0) \Bigg\}, \end{gathered} \tag{3.4}$$

где $K(\ell, \mu, \mathcal{X}_0)$ – выпуклая функция.

Будем искать опорную функцию ко множеству достижимости $\mathcal{X}[t, \mathcal{X}_0]$, определяемому по найденному выше выражению (3.4) для $V(t, x)$. Пользуясь линейностью по ϕ, теперь можно переставить

$$\max_{v_1,v_2} \min_{\phi} \max_{\ell} \max_{\mu}(\cdot) = \min_{\phi} \max_{\ell} \max_{\mu} \max_{v_1,v_2}(\cdot),$$

и

$$\max_{v(\cdot)} \int\limits_{t}^{t_0} f(v(s))ds = \max_{v(\cdot)} \int\limits_{t_0}^{t} -f(v(s))ds = \int\limits_{t_0}^{t} \max_{v(s)}[-f(v(s))]ds$$

тогда

$$V(t,x) = \min_{u_1,u_2} \min_{\phi} \max_{\ell} \max_{\mu} \Bigg\{$$

$$S^T(t_0,t)x + \int\limits_{t}^{t_0} S^T(t_0,s)B_2(s)u_2(s)\,ds + \int\limits_{t_0}^{t} \rho(-S^T(t_0,s) \mid C_2(s)\mathcal{V}_2(s))\,ds$$

$$+ \int\limits_{t}^{t_0} S_1^T(s,t)B_1(s)u_1(s) + \int\limits_{t_0}^{t} \rho(-S_1^T(s,t) \mid C_1(s)\mathcal{V}_1)\,ds -$$

$$-K(\ell,\mu,\mathcal{X}_0)\Bigg\}.$$

Далее, мы хотим поменять $\min_{u_1,u_2}(\cdot)$ на опорную функцию, но полученное выше выражение уже не является вогнутым по ℓ, μ. Поэтому, мы прибегаем к овыпуклению нужных членов и приходим к

$$V(t,x) = \min_{\phi} \max_{\ell} \max_{\mu} \Bigg\{$$

$$S^T(t_0,t)x - \int\limits_{t_0}^{t} \rho(S_1(s,t) \mid B_1(s)\mathcal{P}_1(s))\,ds - \int\limits_{t_0}^{t} \rho(S(t_0,s) \mid B_2(s)\mathcal{P}_2(s))\,ds -$$

$$-\mathrm{conv}\left\{-\int\limits_{t_0}^{t} \rho(-S_1(s,t) \mid C_1(s)\mathcal{V}_1(s))\,ds - \int\limits_{t_0}^{t} \rho(-S(t_0,s) \mid C_2(s)\mathcal{V}_2(s))\,ds + K(\ell,\mu,\mathcal{X}_0)\right\}\Bigg\}.$$

Искомое множество достижимости через функцию цены можно найти как множество уровня

$$\mathcal{X}[t,t_0,\mathcal{X}_0] = \{x \mid V(t,x) \le 0\}$$

Поскольку значения функции ищутся через вычисление $\min, \max$ по пространству функций, то построить в явном виде эту функцию представляется затруднительным. Однако, полученные формулы можно использовать для построения аппроксимаций функции цены (и соответственно, множества достижимости).

4. Построение множества методами многозначного анализа.

Перейдем к поиску решения задачи (2.1) с помощью оценивания множеств методами многозначного анализа.

В отличие от первого подхода, где была найдена функция, полностью характеризующая решение сразу для двух систем уравнений и условия на переключение, теперь будем рассматривать каждый этап по отдельности.

4.1 Множество достижимости до переключения.

Для системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{x}^{(1)} = A^{(1)}(t)x^{(1)} + B^{(1)}(t)u^{(1)}(t) + C^{(1)}(t)v^{(1)}(t); \\ x(t_0) \in \mathcal{E}(x_0, X_0) = \mathcal{X}_0; \\ u^{(1)}(t) \in \mathcal{E}(p^{(1)}(t), P^{(1)}(t)) = \mathcal{P}^{(1)}[t_0, t_1]; \\ v^{(1)}(t) \in \mathcal{E}(w^{(1)}(t), W^{(1)}(t)) = \mathcal{V}^{(1)}[t_0, t_1]; \end{cases} \tag{4.1}$$

требуется найти множество достижимости по (Опр.2.).

Это эквивалентно следующей задаче. Пусть нам даны $\mathcal{X}_0[t]$ –исходное множество, $\mathcal{P}(t)$ – множество допустимых управлений, $\mathcal{C}(t)$ – множество помех, X_0, $\mathcal{P}(t)$, $\mathcal{C}(t)$ – выпуклые компакты. Гарантированное множество достижимости находится как

$$\mathcal{X}[t] = \big(\mathcal{X}_0[t] \dot{-} \mathcal{C}(t)\big) + \mathcal{P}(t).$$

Здесь операция $\dot{-}$ — *геометрическая разность* (разность Минковского) двух компактных множеств.

Определение 4. *Геометрической разностью выражения $C = A \dot{-} B$ называется множество $C = \{c \mid c + B \subseteq A\}$.*

Решение задачи Коши для системы (4.1)

$$x(t) = G(t_0, t_1)x_0 + \int\limits_{t_0}^{t_1} G(t_1, s)B(s)u(s)ds + \int\limits_{t_0}^{t_1} G(t_1, s)C(s)v(s)ds,$$

где $x(t)$ – траектория системы, определяется выбранным управлением $u(\cdot)$ и неизвестной реализацией помехи $v(\cdot)$. Тогда гарантированная оценка множества достижимости имеет решение в виде

$$\mathcal{X}[t] = \left(G(t_0, t_1)\mathcal{X}_0 \dot{-} \int\limits_{t_0}^{t_1} G(t_1, s)\mathcal{V}(s)ds \right) + \int\limits_{t_0}^{t_1} G(t_1, s)B(s)\mathcal{P}(s)ds.$$

Поскольку напрямую решать данные интегралы от множеств затруднительно, прибегнем к аппарату эллипсоидальных оценок [2, 8, 9] . Мы можем оценить искомое множество через внешние и внутренние эллипсоидальные оценки. Так что

$$\mathcal{X}[t] \subseteq \bigcap_{\ell} \mathcal{E}(q_+^{\ell}(t), Q_+^{\ell}(t));$$

$$\mathcal{X}[t] \supseteq \bigcup_{\ell} \mathcal{E}(q_-^{\ell}(t), Q_-^{\ell}(t)),$$

где ℓ – вектор, в направлении которого оценивающий эллипсоид касается искомого множества, $\mathcal{E}(q^ell_+(t), Q_+^{\ell}(t))$ – внешняя эллипсоидальная оценка, $\mathcal{E}(q_-^{\ell}(t), Q_-^{\ell}(t)$ – внутренняя эллипсоидальная оценка. Поскольку ограничения на начальные условия, управление, помеху в задаче (4.1) выражены эллипсоидами, выпуклыми компактами, то само $\mathcal{X}[t]$ – также будет выпуклым [9] и справедливо

$$\bigcup_{\forall \ell} \mathcal{E}(q_-^{\ell}(t), Q_-^{\ell}(t)) = \mathcal{X}[t] = \bigcap_{\forall \ell} \mathcal{E}(q_+^{\ell}(t), Q_+^{\ell}(t)),$$

где пересечение и объединение берутся по всем возможным направлениям $\ell \in \mathbb{R}^n$.

Параметры внутренней эллипсоидальной оценки $\mathcal{E}(q^{\ell}_{-}(t), Q^{\ell}_{-}(t))$ берутся из уравнения

$$
\begin{gathered}
\dot{Q}_{-}(t) = A(t)Q_{-}(t) + Q_{-}(t)A^T(t) + Q_{-}^{-\frac{1}{2}}(t)S(t)P^{\frac{1}{2}}(t)B(t) + B(t)P^{\frac{1}{2}}(t)B^T(t)S^T(t)Q_{-}^{\frac{1}{2}}(t) - \\
-\pi(t)Q_{-}(t) - \pi^{-1}(t)C(t)W(t)C^t(t), \\
\dot{q}_{-}(t) = A(t)q(t) + B(t)p(t) + C(t)w(t),
\end{gathered}
\tag{4.2}
$$

где $S(t)$,$\pi(t)$ удовлетворяют соотношениям

$$
S(t)P^{\frac{1}{2}}(t)B^T(t)\ell(t) = Q_{-}^{\frac{1}{2}}(t)\ell(t)\lambda(t),
$$

$$
\pi(t) = \frac{\left\langle \ell(t), C(t)W(t)C^T(t)\ell(t)\right\rangle^{\frac{1}{2}}}{\langle \ell(t), Q_{-}(t)\ell(t)\rangle^{\frac{1}{2}}},
$$

$$
\lambda(t) = \frac{\left\langle \ell(t), B(t)P(t)B^T(t)\ell(t)\right\rangle^{\frac{1}{2}}}{\langle \ell(t), Q_{-}(t)\ell(t)\rangle^{\frac{1}{2}}}, \quad \ell(t) = G^T(t,t_0)\ell_0,\ \ell_0 \in \mathbb{R}^n.
$$

Параметры внешней эллипсоидальной оценки $\mathcal{E}(q_{+}(t), Q_{+}(t))$ находятся из

$$
\begin{gathered}
\dot{Q}_{+} = A(t)Q_{-}(t) + Q_{-}(t)A^T(t) + \pi(t)Q_{+}(t) + \pi^{-1}(t)B(t)P(t)B^T(t) - \\
-Q_{+}^{\frac{1}{2}}(t)S(t)W^{\frac{1}{2}}(t)C^T(t) - C(t)W^{\frac{1}{2}}(t)S^T(t)Q_{+}^{\frac{1}{2}}(t),
\end{gathered}
\tag{4.3}
$$

где

$$
S(t)W^{\frac{1}{2}}(t)C^T(t)\ell(t) = \lambda(t)Q^{\frac{1}{2}}(t)\ell(t),
$$

$$
\pi = \frac{\left\langle \ell(t), B(t)P(t)B^T(t)\ell(t)\right\rangle^{\frac{1}{2}}}{\langle \ell(t), Q_{+}(t)\ell(t)\rangle^{\frac{1}{2}}},
$$

$$
\lambda(t) = \frac{\left\langle \ell(t), C(t)W(t)C^T(t)\ell(t)\right\rangle^{\frac{1}{2}}}{\langle \ell(t), Q_{+}(t)\ell(t)\rangle^{\frac{1}{2}}}, \quad \ell(t) = G^T(t,t_0)\ell_0,\ \ell_0 \in \mathbb{R}^n
$$

Итак, с помощью эллипсоидальных оценок мы можем вычислить сколь угодно точную оценку множества достижимости $\mathcal{X}^{(1)}[t,t_0,\mathcal{X}_0]$ (по Опр.2.) для любого момента времени t и начального условия $\mathcal{X}_0$.

Необходимо отметить, что $\mathcal{X}[t,t_0]$ образовано композицией двух множеств. Первое,

$$
\left(G(t_0,t_1)\mathcal{X}_0 \dot{-} \int\limits_{t_0}^{t_1} G(t_1,s)\mathcal{V}(s) \right)
$$

– образующее, обеспечивает множество гарантированного попадания, а другое,

$$
\int\limits_{t_0}^{t_1} G(t_1,s)B(s)\mathcal{P}(s)
$$

– границы управляемого смещения первого множества. Кроме того, может оказаться, что начиная с некоторого $\tau > t$, $\mathcal{X}[t,t_0]$ окажется пустым, если $\left(\mathcal{X}_0[t] \dot{-} \mathcal{C}(t)\right)$ выродится. Соответственно, расчет для второй системы необходимо выполнять не с множеством

$$
\mathcal{X}^{(1)}[t,t_0,\mathcal{X}_0] \cap H(c,\gamma),
$$

а с пересечением образующего множества

$$\left(G(t_0, t_1)\mathcal{X}_0 \dot{-} \int\limits_{t_0}^{t_1} G(t_1, s)\mathcal{V}(s)ds + \phi^{\alpha} \right) \cap H(c, \gamma),$$

где

$$\phi^{\alpha} = \int\limits_{t_0}^{t_1} G(t_1, s)B(s)u^{\alpha}(s)ds, \quad u^{\alpha}(\cdot) \in \mathcal{P}(\cdot).$$

Поэтому, в дальнейшем мы будем искать множество достижимости второй системы для фиксированного $p^{\alpha}(\cdot)$.

4.2 Пересечение с гиперплоскостью.

Рассмотрим теперь вычисление множеств, образованных пересечением множества достижимости первой системы с гиперплоскостью $H(c, \gamma) = \{x \mid \langle x, c\rangle = \gamma\}$. Пусть

$$C(s) \stackrel{def}{=} \left(G(t_0, t_1)\mathcal{X}_0 \dot{-} \int\limits_{t_0}^{t_1} G(t_1, s)\mathcal{V}(s)ds \right),$$

$$\phi^{\alpha}(t) \stackrel{def}{=} \int\limits_{t_0}^{t} G(t_1, s)B(s)u^{\alpha}(s)ds,$$

$$C_H^{\alpha}(s) \stackrel{def}{=} (C(s) + \phi^{\alpha}(s)) \cap H$$

$$\mathcal{T}^{\alpha} \stackrel{def}{=} \{\tau \mid C_H^{\alpha}[\tau] \neq \emptyset\} = [\tau_1^{\alpha}, \tau_2^{\alpha}]$$

Мы предполагаем выполненным условие односторонней проницаемости (4.2) или , поэтому можем утверждать, что множество $C_H^{\alpha}(\mathcal{T}^{\alpha})$ – односвязное. В случае невыполнения условий трансверсальности (односторонней проницаемости), множество $C_H^{\alpha}(\mathcal{T}^{\alpha})$ может быть несвязным, в этом случае дальнейший анализ существенно затруднится (Рис.1).

$$\begin{cases} \langle x(\tau), c\rangle - \gamma = 0, \\ \langle x(\tau + \epsilon), c\rangle - \gamma > 0, \quad \forall \epsilon > 0. \end{cases}$$

В пункте 4.1 мы нашли оценку множества достижимости с помощью эллипсоидальных оценок. Вычислим теперь $C_H^{\alpha}[\tau]$

Утверждение 2. ([1]) *Пусть эллипсоид*

$$\mathcal{E}(q, Q) = \{x \mid \left\langle x - q, Q^{-1}(x - q) \leqslant 1 \right\rangle$$

и гиперплоскость

$$H = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, c\rangle = \gamma\}$$

таковы, что $\mathcal{E}(q, Q) \cap \mathcal{H}(c, \gamma) \neq \emptyset$. *Тогда* $\mathcal{E}(q, Q) \cap \mathcal{H} = \mathcal{E}(\tilde{q}, \tilde{Q})$ *- вырожденный эллипсоид (т.е.* $\tilde{Q} = \tilde{Q}^T \geqslant 0,\ det(\tilde{Q}) = 0$*).*

Доказательство. Пусть $T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ - такая невырожденная матрица, что $Tc = e_1$, где $e_1 = (1, 0, \ldots, 0)$. Используя замену переменных $x = T'y$ и $q = T'p$, преобразуем множество $\mathcal{E}(q, Q) \cap \mathcal{H}$:

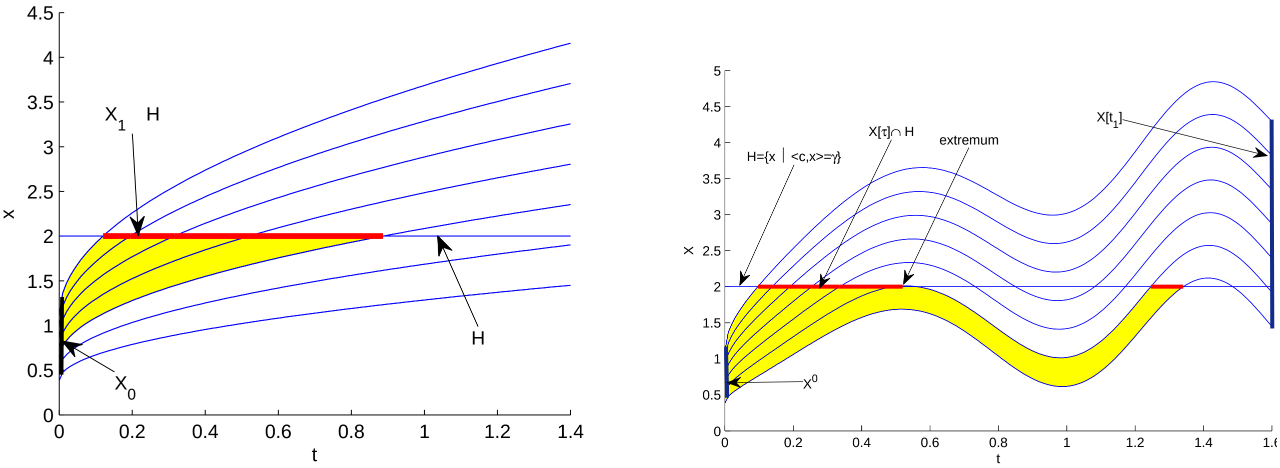

Рис. 1. Выполнение и невыполнение условий трансверсальности.

$$\mathcal{E}(q,Q)\cap\mathcal{H}=\{x\in\mathbb{R}^n:\langle x-q,Q^{-1}(x-q)\rangle\leqslant 1,\langle x,c\rangle=\gamma\}=$$
$$T'\{y=(\gamma,z)',z\in\mathbb{R}^{n-1}:\langle z-\tilde{q},\tilde{Q}(z-\tilde{q})\rangle\leqslant 1\}$$
$$TQ^{-1}T'=\left(\begin{array}{cc} a & c' \\ c & D\end{array}\right),\ D\in\mathbb{R}^{(n-1)\times(n-1)},p=\left(\begin{array}{c} p_1 \\ \tilde{p}\end{array}\right),\tilde{p}\in\mathbb{R}^{n-1}$$
$$\tilde{q}=\tilde{p}-D^{-1}(\gamma-p_1)c\ ,\ A=\frac{D}{1-(\gamma-p_1)^2(a-\langle c,\ D^{-1}c\rangle)}$$

И проверкой подстановки

$$\tilde{q}=T'\left(\begin{array}{c}\gamma\\ \tilde{q}\end{array}\right),\tilde{Q}=T'\left(\begin{array}{cc}0 & 0\\ 0 & A^{-1}\end{array}\right)T$$

завершаем доказательство утверждения. □

Нам важно найти не столько вырожденный эллипсоид $\mathcal{E}(\tilde{q},\tilde{Q})$, сколько его пересечение с гиперплоскостью. Легко видеть, что это будет эллипсоид с размерностью на единицу меньше, его параметры находятся как $q_H=\gamma D^{-1}c$, $Q_H=A^{-1}$. Вектор q_H указывает смещение эллипсоида относительно опущенного на плоскость перпендикуляра, выпущенного из центра пересекаемого эллипсоида (Рис.2).

Таким образом, для момента времени $\tau\in\mathcal{T}^\alpha$ мы получили семейство эллипсоидов размерности на единицу меньше, расположенные на плоскости H, которые, в свою очередь оценивают искомое сечение множества пересечения, которое остается выпуклым. Это семейство внутренних и внешних оценок также можно оценивать новыми оценками, с целью уменьшения дальнейших вычислений.

4.3 Вычисление множества достижимости для второй системы

На данном этапе у нас имеется семейство $(\mathcal{T}^\alpha,C_H^\alpha(\mathcal{T}^\alpha))$, которое является начальным условием для задачи

$$\begin{cases}\dot{x}^{(2)}=A^{(2)}(t)x^{(2)}+B^{(2)}(t)u^{(2)}(t)+C^{(2)}(t)v^{(2)}(t);\\ x(\tau)\in C_H^\alpha[\tau],\ \tau\in\mathcal{T}^\alpha\\ u^{(2)}(t)\in\mathcal{E}(p^{(2)}(t),P^{(2)}(t))=\mathcal{P}^{(2)}[t_0,t_1];\\ v^{(2)}(t)\in\mathcal{E}(w^{(2)}(t),W^{(2)}(t))=\mathcal{V}^{(2)}[t_0,t_1];\end{cases}\tag{4.4}$$

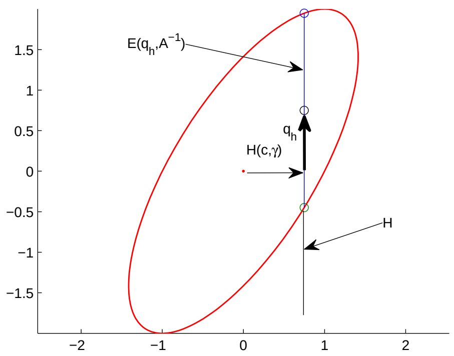

Рис. 2. Пересечение эллипсоида с плоскостью.

Мы не можем построить множество достижимости так же как и для первой системы, поскольку здесь начальные условия "распределены" во времени, и соответственно это надо учитывать, что отличает эту задачу от предыдущей. Здесь можно воспользоваться методами решения задач с фазовыми ограничениями [7], но в отличие от них нам требуется учитывать неопределённость. Гарантированная оценка множества достижимости $\mathcal{X}_2^\alpha[t, t_0]$ для (4.4) описывается как

$$\begin{gathered}\mathcal{X}_2^\alpha[t_1] = \{x_2 \mid \exists u_2(\cdot) \in \mathcal{P}^{(2)}[t_0, t_1] : \forall v_2(\cdot) \in \mathcal{V}^{(2)}[t_0, t_1] : \\ \exists \tau \in \mathcal{T}^\alpha, x_h(\tau) \in C_H^\alpha[\tau] : x(t, \tau, x_h(\tau), u_2(\cdot), v_2(\cdot)) = x_2\}\end{gathered} \tag{4.5}$$

Найдем множество точек $\mathcal{Q}[\tau]$ в момент времени τ, из которых мы можем прийти в точку $x_2 = 0$ в конечным момент t_1 при отсутствии управления.

$$\mathcal{Q}[\tau] = \int\limits_{t_1}^{\tau} G(\tau, s) C_2(s) \mathcal{V}_2(s) ds,$$

где

$$G(\tau, t) = \exp\left(\int\limits_{\tau}^{t} A_2(s) ds\right).$$

Согласно (4.5)

$$\forall \tau \in \mathcal{T}^\alpha : (\xi(\tau) + \mathcal{Q}[\tau]) \cap H \subseteq C_H^\alpha[\tau], \quad \text{где} \tag{4.6}$$

$$\xi(\tau) = G(\tau, t_1) x_2 + \int\limits_{t_1}^{\tau} G(\tau, t_1) u_2(s) ds.$$

Найдем множество фазовых ограничений

$$Z[\tau] = \{\xi(\tau) \mid (\xi(\tau) + \mathcal{Q}[\tau]) \cap H \subseteq C_H^\alpha\}$$

Для любого $\xi(\tau) \in Z[\tau]$ выполнено (4.6). Используя свойство выпуклости и симметрии множества $\mathcal{Q}[\tau]$, находим $Z[\tau]$ как дополнение ко множеству всех точек $\tilde{\xi}(\tau)$, в которых $(\tilde{\xi}(\tau) + \mathcal{Q}[\tau])$ касается $(H \setminus C_H^\alpha[\tau])$ или

$$Z[\tau] = \overline{H \setminus C_H^\alpha[\tau] + \mathcal{Q}[\tau]},$$

что проиллюстрировано на рис.3. Легко видеть, что оно строиться как дополнение к

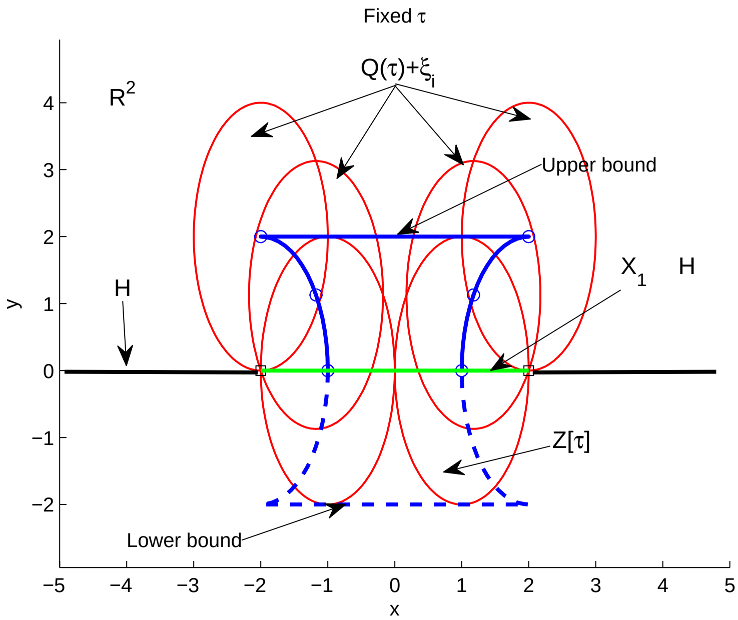

Рис. 3. Множество фазовых ограничений

некоторому семейству выпуклых множеств, и в данном случае для любых $\mathcal{Q}[\tau]$, $C_H^{\alpha}[\tau]$ не может быть выпуклым, что является ограничением для вычисления множества достижимости с учетом фазовых ограничений $Z[\tau]$. Поэтому, будем решать задачу поиска множества достижимости при условии огибания препятствия $\overline{Z[\tau]}$. Поскольку множество $\overline{Z[\tau]}$ состоит из множества эллипсоидов (эллипсоидальные оценки множества $\mathcal{Q}[\tau]$), выделим среди них те, которые непосредственно примыкают к $Z[\tau]$, тогда мы можем обойти только считанные из них (для момента τ), и попасть на целевое множество $\mathcal{X}_2^{\alpha}[t_1]$, Центры всех примыкающих эллипсоидов расположены на границе $C_H^{\alpha}[\tau]$. Если мы решаем задачу в $\mathbb{R}^1$, то множество $C_H^{\alpha}[\tau]$- это точка, множество примыкающих эллипсоидов состоит из отрезка с центром в этой точке. Для задачи в $\mathbb{R}^2$, $C_H^{\alpha}[\tau]$ – отрезок, концы которого служат центрами для выбранных эллипсоидальных оценок $\mathcal{Q}[\tau]$, см. рис.3. Для $\mathbb{R}^n, n \geq 3$, множество $C_H^{\alpha}[\tau]$ образует замкнутую линию ($n = 3$), или поверхность ($n > 3$), так что задача существенно усложняется.

Итак мы нашли условия на фазовые ограничения для траекторий $\xi(\tau)$, таких, что выполняется (4.6). Из условий (4.5) и трансверсальности (2.2) мы обнаруживаем, что, для того, чтобы траектория $\xi(\cdot)$ принадлежала множеству $\mathcal{X}_2[t_1]$ достаточно, чтобы она входила во множество $Z[\tau_1]$, в любой из моментов $\tau_1 \in \mathcal{T}^{\alpha}$, и покидало множество $Z[\tau_2]$ в любой момент $\tau_2 \in \mathcal{T}^{\alpha}, \tau_2 > \tau_1$. Можно обозначить множество $X_0^{(2)}[\tau_1^{\alpha}] = \{x \mid x \leq H + \mathcal{Q}[\tau_1^{\alpha}]$ как начальное множество в момент τ_1^{α} для задачи поиска множества достижимости с фазовыми ограничениями на огибание препятствия. Поскольку данное множество $X_0^{(2)}$ – задаёт полупространство, а мы хотим эллипсоидальную оценку, можно выбрать достаточно большой эллипсоид, который позволит нам для любого момента $\tau \in \mathcal{T}^{\alpha}$ полностью покрывать траекториями нижнюю границу (lower boundary на рис.3), двигаясь согласно правилу односторонней проницаемости.

Пусть имеется некоторый эллипсоид $\mathcal{E}(q(t), Y(t))$, который мы будем огибать, стартуя из множества $\mathcal{X}_0$. Уравнение на траекторию имеет вид $\dot{x} = A(t)x(t) + u(t), x \in \mathbb{R}^n$. Не умаляя общности, мы можем положить $q(t) \equiv 0$. Пусть

$$L^0(t) = \left\{ \lambda^0(t) = \frac{Y^{-1}(t)z}{\langle z, Y^{-1}z\rangle^{\frac{1}{2}}} \mid \forall z : \langle z, Y^{-1}z\rangle = 1 \right\}.$$

Тогда $x(t) \notin \mathcal{E}(0, Y(t)) \Leftrightarrow \exists \lambda^0 : \langle \lambda^0, x(t) \rangle \geq 1$. Имеем начальные ограничения на множество $\mathcal{X}_0$ и и фазовые ограничения на $x(s)$

$$\forall \ell : \langle \ell, x_0 \rangle \leq \rho\left(\ell \mid X_0\right),$$

$$-(\langle \lambda(s), x(s) \rangle - 1) \leq 0.$$

Введем множитель Лагранжа $\Lambda(\cdot) \in BV(t_0, t_1)$ во втором условии и сложим выражения, получим

$$\ell^T G(t_0, t_1) x_1 - \int\limits_{t_0}^{t_1} \langle \ell, G(t_0, s) u(s) ds \rangle -$$

$$-\Big(\int\limits_{t_0}^{t_1} \lambda^T(s) G(t_0, t_1) x_1 d\Lambda - \int\limits_{t_0}^{t_1} ds G^T(t_0, s) u(s) \int\limits_{t_0}^{s} \lambda(\xi) d\Lambda - \int\limits_{t_0}^{t_1} d\Lambda \Big) \leq \rho\left(\ell \mid X_0\right)$$

Сгруппируем слагаемые

$$\Big(G^T(t_0, t_1)\ell - \int\limits_{t_0}^{t_1} G^T(s, t_1) \lambda(s) d\Lambda(s) \Big)^T x_1 - \int\limits_{t_0}^{t_1} u^T(\xi) \Big(G^T(\xi, s)\ell - \int\limits_{t_0}^{s} G^T(\xi, s) \lambda(s) d\Lambda(\xi) \Big) ds +$$

$$+ \int\limits_{t_0}^{t_1} d\Lambda - \rho\left(\ell \mid \mathcal{X}_0\right) \leq 0$$

Обозначим

$$p(s) = G^T(t_0, s)\ell - \int\limits_{t_0}^{s} G^T(\xi, s) \lambda(\xi) d\Lambda(\xi),$$

и потребуем $\int\limits_{t_0}^{t_1} d\Lambda = 1$, тогда получим

$$p^T(t_1) x_1 - \int\limits_{t_0}^{t_1} p(s) u(s) ds - \rho\left(s(t_0) \mid \mathcal{X}_0\right) + 1 \leq 0, \quad \forall \ell, \lambda(\cdot) \in L^0(\cdot).$$

Запишем функцию цены, как в первой части данной работы.

$$V(t, x) = \max_{\lambda(\cdot) \in L^0} \min_{u(\cdot)} \max_{\ell, \Lambda(\cdot)} \Big\{ p^T(t_1) x_1 - \int\limits_{t_0}^{t_1} p(s) u(s) ds - \rho\left(s(t_0) \mid \mathcal{X}_0\right) + 1 \Big\}$$

Предполагаем, что $\max_{\ell, \Lambda(\cdot)}$ достигается. Выражение под max – вогнуто по ℓ, Λ. Пользуясь теоремой о минимаксе [5], придем к

$$V(t, x) = \max_{\lambda(\cdot) \in L^0} \max_{\ell, \Lambda(\cdot)} \Big\{ p^T(t_1) x_1 - \int\limits_{t_0}^{t_1} \rho\left(p(s) \mid \mathcal{P}(s)\right) ds - \rho\left(s(t_0) \mid \mathcal{X}_0\right) + 1 \Big\}$$

И тогда множество достижимости находится как множество уровней

$$\mathcal{X}_2^{\alpha}[t_1] = \{ x_2 \mid V(t_1, x_2) \leqslant 0 \}$$

Индекс α здесь указывает на то, что данное множество мы находили при фиксированном $u_1^{\alpha}(s) \in \mathcal{P}^{(1)}[t_0, t_1]$. Тогда полное множество достижимости найдется как

$$\mathcal{X}_2[t_1, t_0, \mathcal{X}_0] = \bigcup_{\alpha} \mathcal{X}_2^{\alpha}[t_1, \tau_1^{\alpha}]$$

4.4 Пример

Рассматривается модель гибридной системы, состоящей из двух связанных линейных дифференциальных уравнений с условием переключения

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} \dot{x}_1 = u_1 + v_1; \\ \dot{x}_2 = u_2 + v_2; \end{array}\right. \\ u_1(t) \in [0.4\cos(\pi \cdot t), 1.5 + 0.6\sin(\pi \cdot t)] = \mathcal{P}^{(1)}; \\ v_1(t) \in [0, 0.2 + 0.1\sin(\pi \cdot t)] = \mathcal{Q}^{(1)}; \\ u_2(t) \in [0.3 + \sin^2(\pi \cdot t), 0.5\cos^2(\pi \cdot t)] = \mathcal{P}^{(2)}; \\ v_2(t) \in [-0.1\sqrt{t}, 0.1\sqrt{t}] = \mathcal{Q}^{(2)}; \\ \mathcal{X}_0 = [-2, -1],\ x(t) \in \mathbb{R}^1 \\ t \in [0, 4]; \\ H = \{x = 0\}. \end{cases} \tag{4.7}$$

Для данной модели рассчитано множество достижимости для набора управлений, равномерно покрывающего множество управлений $\mathcal{P}_1$, что обеспечивает достаточно близкую оценку множества $\mathcal{X}_2[t_1, t_0, \mathcal{X}_0]$. На иллюстрации (Рис.4) отмечены множества $\mathcal{X}^{\alpha_1}[t, t_0, \mathcal{X}_0]$, $\mathcal{X}^{\alpha_2}[t, t_0, \mathcal{X}_0]$, которым соответствуют управления $u_1^{\alpha_1}$, $u_1^{\alpha_2}$, показаны их пересечения с гиперплоскостью $\mathcal{X}^{\alpha_1}[t, t_0, \mathcal{X}_0] \cap H$, $\mathcal{X}^{\alpha_2}[t, t_0, \mathcal{X}_0] \cap H$, на основе которых построено множество $\mathcal{X}_2[t_1, t_0]$.

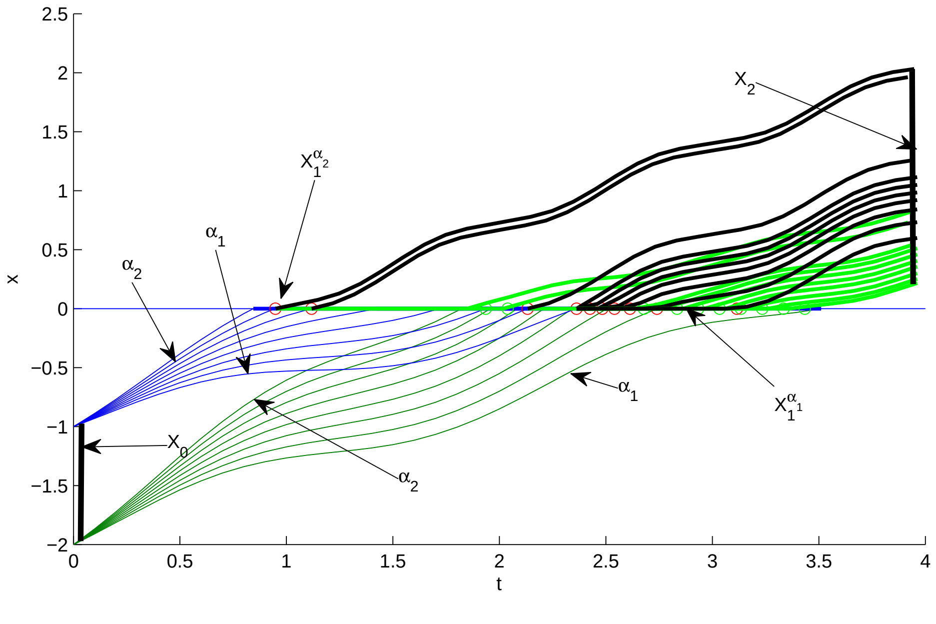

Рис. 4. Множество достижимости гибридной системы (4.7).

Круглыми маркерами помечены границы вложения множества неопределенности в множество начальных условий C_H^{α}. Темными линиями обозначены верхние границы подмножеств $\mathcal{X}_2$, светлыми линиями – нижние границы.

Также построен пример (Рис.5), иллюстрирующий, как множество помех (штриховка) должно вкладываться в множество $\mathcal{X}_1^{(2)} \cap H$, чтобы иметь гарантированную оценку в конечный момент t_1, показано другое множество $\mathcal{X}_1^{(1)} \cap H$, которое уже не может вместить множество помех, и, соответственно, не имеет гарантированной оценки в конечный момент времени t_1.

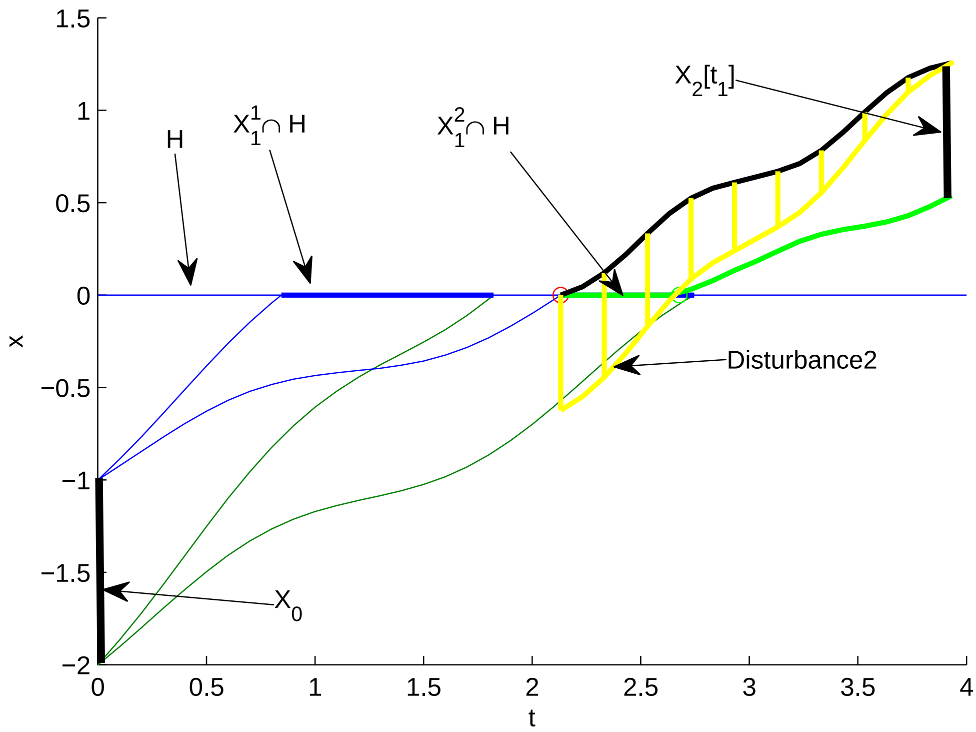

Рис. 5. Множество достижимости для двух выбранных управлений, вложение множества помех (штриховка).

5. Заключение

В данной работе были рассмотрены два подхода к построению множеств достижимости для двух систем линейных дифференциальных уравнений с неопределенностью, связанных друг с другом фазовым условием переключения. При рассмотрении данной задачи методами выпуклого анализа получен вид функции, совокупно характеризующей обе системы уравнений и условие переключения. Множество достижимости оценивается множеством уровня построенной функции. Второй подход заключается в исследовании задачи достижимости поэтапно методами многозначного анализа. Для каждого этапа были рассмотрены соответствующие решения. В результате было построено множество достижимости для примера модели гибридной системы в одномерном фазовом пространстве, на основе которого можно проследить различные особенности поведения этого вида моделей.

Список литературы

[1] *Куржанский А.Б., Варайя П.* Задачи динамики и управления в гибридных системах // Труды международного семинара “Теория управления и теория обобщенных решений уравнений Гамильтона-Якоби”. Екатеринбург: Изд-во Уральского университета, 2005. с.26–33.

[2] *Куржанский А.Б.* Управление и наблюдение в условиях неопределенности. М.: Наука, 1977.

[3] *Куржанский А.Б., Точилин П.А.* Слабо инвариантные множества гибридных систем // Дифференциальные уравнения. 2008. т. 44, N11.

[4] *Пшеничный Б.Н.* Выпуклый анализ и экстремальные задачи. М.: Наука, 1980.

[5] *Рокафеллар Р.* Выпуклый анализ. М.: Мир, 1973.

[6] *Branicky M.S., Borkar V.S., Mitter S.M.* A unified framework for hybrid control: model and optimal control theory. // IEEE transactions on automatic control, 43/1 p.31–45, 1998.

[7] *Kurzhanski A.B., Varaiya P.* Ellipsoidal techniques for reachability under state constraints.// SIAM Journal on Control. 2003. V.45. N.4. p.1369–1394.

[8] *Kurzhanski A.B., Varaiya P.* Ellipsoidal techniques for reachability analysis. Internal approximation // System and Control Letters. 2000. V.41. p.201–211.

[9] *Kurzhanski A.B., Varaiya P.* Ellipsoidal techniques for reachability analysis. Part I: External approximations. Part II: Internal approximations. Box-valued constraints // Optimization methods and software. 2002. V.17. p.177–237.

[10] *Liberzon D.* Switching in systems and control. Boston: Birkhäuser, 2003.

[11] *Van der Schaft A., Schumacher H.* An introduction to hybrid dynamical systems. Lecture Notes in Control and Information Sciences. N251. Springer, 2000.