Магистерская диссертация на тему:

Построение множества достижимости для гибридной системы с одним преключением с неопределённостью

Выполнил : Селиверстов Д.С.
Научный руководитель: к.ф.-м.н. Точилин П.А.

Московский Государственный университет им. М.В. Ломоносова
Кафедра системного анализа

Апрель 2010

Модель гибридной системы

$$
\left\{
\begin{array}{l}
\left[
\begin{array}{l}
\begin{cases}
\dot{x}^{(1)} = A^{(1)}(t)x^{(1)} + B^{(1)}(t)u^{(1)}(t) + C^{(1)}(t)v(t); \\
x(t_0) \in \mathcal{E}(x_0, X_0) = \mathcal{X}^0; \\
u^{(1)}(t) \in \mathcal{E}(p^{(1)}(t), P^{(1)}(t)) \subset \mathcal{P}[t_0, t_1]; \\
v^{(1)}(t) \in \mathcal{E}(w^{(1)}(t), W^{(1)}(t)) \subset \mathcal{V}[t_0, t_1];
\end{cases} \\
\\
\begin{cases}
\dot{x}^{(2)} = A^{(2)}(t)x^{(2)} + B^{(2)}(t)u^{(2)}(t) + C^{(2)}(t)f(t)^{(2)}; \\
x(\tau) \in \mathcal{X}^{(1)}(\tau, t_0) \cap H; \\
u^{(2)}(t) \in \mathcal{E}(p^{(2)}(t), P^{(2)}(t)) \subset \mathcal{P}[t_0, t_1]; \\
v^{(2)}(t) \in \mathcal{E}(w^{(2)}(t), W^{(2)}(t)) \subset \mathcal{V}[t_0, t_1];
\end{cases}
\end{array}
\right. \\
H = \{x \in \mathbb{R}^n : \ \langle x, c \rangle = \gamma\} \text{— гиперплоскость переключения;} \\
\tau : \ \left\langle x^{(1)}(\tau), c \right\rangle - \gamma = 0, \ \tau \in [t_0, t_1]
\end{array}
\right. \tag{1}
$$

Условие на переключение

При переключении гибридная система должна удовлетворять условию односторонней проницаемости (трансверсальности), что равносильно выполнению системы соотношений:

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} \langle \dot{x}, c \rangle \neq 0; \\ \langle x, c \rangle - \gamma \neq 0 \end{array} \right. \\ \mathrm{sign}(\left\langle \dot{x}^{(1)}(\tau), c \right\rangle) = \mathrm{sign}(\left\langle \dot{x}^{(2)}(\tau), c \right\rangle). \end{cases} \tag{2}$$

Это означает, что любая траектория гибридной системы не может касаться гиперплоскости, но пересекает эту плоскость только один раз.

Множество достижимости

Определение

Множеством достижимости $\mathcal{X}[t, t_0]$ *для задачи* (1) *называется*

$$\mathcal{X}[t] = \{x^* \mid \exists u_1(\cdot) \in \mathcal{P}^{(1)}, \exists u_2(\cdot) \in \mathcal{P}^{(2)} :$$

$$\forall v_1(\cdot) \in \mathcal{V}^{(1)}, \forall v_2(\cdot) \in \mathcal{V}^{(2)} :$$

$$x(t_0, t_1, x^*) \in \mathcal{X}_0, x(t, t_0, x^*) \cap H \neq \emptyset\}$$

Множество достижимости до переключения

$$V_1[t_0, t] = \left\{ \int_{t_0}^{t} v_1(s)ds \mid \forall v_1(\cdot) \in \mathcal{V}^1[t_0, t_1] \right\}$$

$\mathcal{C}[t] = \mathcal{X}_0 \dot{-} V_1[t, t_0]$ – множество гарантированного попадания

$$p^\alpha(\cdot) \in \mathcal{P}^{(1)} : \quad \mathcal{C}_H^\alpha[\tau] = \{(\mathcal{C}[\tau] + p^\alpha(t_0, \tau)) \cap H\}$$

$$T^\alpha = \{\tau \mid \mathcal{C}_H^\alpha[\tau] \neq \emptyset\} \overset{\text{(трансверсальность)}}{=} [\tau_1^\alpha, \tau_2^\alpha]$$

Множество достижимости при переключении

$$\mathcal{P}_2[t_0, t_1] = \left\{ \int\limits_{t_0}^{t_1} p_2(s)ds \mid \forall p_2(\cdot) \in \mathcal{P}^{(2)} \right\}$$

$$\mathcal{X}_2^{\alpha}[t_1] = \bigcap_{v_2 \in \mathcal{V}_2} \bigcup_{\tau \in T^{\alpha}} \left(\mathcal{C}_H^{\alpha}[\tau] + v_2(\tau, t_1) + \mathcal{P}_2[\tau, t_1]\right)$$

$$\mathcal{X}^{(2)}[t_1] = \bigcup_{p^{\alpha} \in \mathcal{P}_1} \mathcal{X}_2^{\alpha}[t_1]$$

Множество достижимости после переключения

$$x(t_1) = G_2(\tau, t_1)x(\tau) + \int\limits_{\tau}^{t_1} G_2(t_1, s)B_2(s)u_2(s)ds + \int\limits_{(}^{\tau})t_1G_2(t, s)C_2(s)v(s)ds$$

$$V_2[t_0, t] = \left\{ \int\limits_{t_0}^{t} v_2(s)ds \mid \forall v_2(\cdot) \in \mathcal{V}^2[t_0, t_1] \right\}$$

$$\xi(\tau) \overset{def}{=} G_2(\tau, t_1)x(\tau) + \int\limits_{t_1}^{\tau} G_2(t_1, s)B_2(s)u_2(s)ds$$

Появление фазовых ограничений.

$$Z(\tau) = \{\xi(\tau) \mid (\xi(\tau) + V_2[t, \tau]) \cap H \subset \mathcal{C}_H^{\alpha}[\tau]\}, \ \tau \in T^{\alpha}$$

Решение задачи с фазовыми ограничениями

Задача на поиск множества достижимости при фазовых ограничениях, но уже без помехи.

$$\mathcal{X}_2^{\alpha}[t_1] = \{x(t_1) \mid \exists u_2 : G(\tau, t_1)x(t_1) + \int\limits_{t_1}^{\tau} B_2(s)u_2(s)ds \in Z(\tau), \forall \tau \in T^{\alpha}\}$$

Функция цены при вычислении ограничений

$$V(t,x) = \min_{u_2} \left(d^2(x(\tau,t,x), \mathcal{C}_H^{\alpha}) + \int\limits_{\tau_1^{\alpha}}^{\tau_2^{\alpha}} d^2(x(s,u_2(\cdot)), Z(s))ds \right)$$

$$V(t,x) = \max \Big\{ \int\limits_{\tau}^{t} \langle w(t,\tau,\ell), x \rangle \, ds - \int\limits_{\tau}^{t} \rho \left(w(s,\tau,ell) \mid B_2(s)\mathcal{P}^2(s) \right) ds -$$

$$- \int\limits_{\tau}^{t} \rho \left(\lambda(s) \mid Z(s) \right) ds \mid \ \langle \ell, \ell \rangle = 1, \ \lambda(\cdot) \in V[\tau, t] \Big\}$$

Функция цены, исходный вид

$$V(t,x) = \min_{u_1,u_2} \max_{v_1,v_2} \min_{\tau} \left\{ d^2(x_0|_{x(t)=x}, \mathcal{X}_0) + (\langle x(\tau), c\rangle - \gamma)^2 \right\}$$

$$u_1(\cdot) \in \mathcal{P}^{(1)}[t_0,t_1],\ u_2(\cdot) \in \mathcal{P}^{(1)}[t_0,t_1],$$

$$v_1(\cdot) \in \mathcal{V}^{(1)}[t_0,t_1],\ v_2(\cdot) \in \mathcal{V}^{(2)}[t_0,t_1],$$

$$\tau \in [t_0,t_1]$$

Нелинейность по времени и теорема о минимаксе

Для перехода к опорным функциям требуется менять местами порядок минимумов и максимумов, но функционал вида

$$T(\tau, \Psi(\cdot)) = \int_t^\tau \Psi(s) ds$$

является нелинейным по τ. Используя класс функций ограниченной вариации $\phi(w) \in V[t_0, t_1]$ преобразуем к виду

$$T(\phi(w), \Psi(\cdot)) = \int_{t_0}^t d\phi(w) \int_t^w \Psi(w) ds.$$

Теперь функционал $T(\phi(\cdot), \Psi(\cdot))$ является линейным по $\phi(\cdot)$ и можно воспользоваться теоремой о минимаксе.

Функция цены, преобразования

$$S(t_0,t_1) = \int\limits_{t_0}^{t_1} \left\{ G_2^T(w,t) G_1^T(t_0,w)\ell(w) + \mu(w) G_2^T(w,t) c \right\} \, d\phi(w),$$

$$S_1(t_0,t_1) = \int\limits_{t_0}^{t_1} \left\{ G_1^T(t_0,w)\ell(w) \right\} \, d\phi(w),$$

$$K(\ell,\mu,\mathcal{X}_0) = \int\limits_{t_0}^{t} \left[\frac{\mu(w)^2}{4} + \rho(\ell(w) \mid \mathcal{X}_0) + \frac{\|\ell(w)\|^2}{4} \right] \, d\phi(w)$$

Функция цены, конечное выражение

$$V(t,x) = \min_{\phi(\cdot)} \max_{\ell(\cdot)} \max_{\mu(\cdot)} \Bigg\{ S^T(t_0,t)x - \int\limits_{t_0}^{t} \rho(S_1(s,t) \mid B_1(s)\mathcal{P}_1(s))\, ds -$$

$$- \int\limits_{t_0}^{t} \rho(S(t_0,s) \mid B_2(s)\mathcal{P}_2(s))\, ds - \mathrm{conv}\big\{K(\ell,\mu,\mathcal{X}_0) -$$

$$- \int\limits_{t_0}^{t} \rho(-S_1(s,t) \mid C_1(s)\mathcal{V}_1(s))\, ds - \int\limits_{t_0}^{t} \rho(-S(t_0,s) \mid C_2(s)\mathcal{V}_2(s))\, ds \big\} \Bigg\}$$

Выводы

В данной работе рассмотрены два подхода к решению задачи достижимости:

- При помощи функций цены и методов выпуклого анализа
- С помощью методов многозначного анализа.

В первом случае множества достижимости представлены в виде множеств уровней (множеств Лебега) для специальных функций, а во втором методе указанные множества построены в явном виде, за счет применения операций с выпуклыми компактами.
Решение данной задачи можно рассматривать как первый шаг к построению теории достижимости при неопределенности для гибридных систем с кусочно-линейной структурой в классах программных или позиционных управлений.

Список литературы

- *Куржанский А.Б., Варайя П.* Задачи динамики и управления в гибридных системах // Труды международного семинара “Теория управления и теория обобщенных решений уравнений Гамильтона-Якоби”. Екатеринбург: Изд-во Уральского университета, 2005. с.26–33.
- *Куржанский А.Б.* Управление и наблюдение в условиях неопределенности. М.: Наука, 1977.
- *Куржанский А.Б., Точилин П.А.* Слабо инвариантные множества гибридных систем // Дифференциальные уравнения. 2008. т. 44, N11.
- *Пшеничный Б.Н.* Выпуклый анализ и экстремальные задачи. М.: Наука, 1980.
- *Рокафеллар Р.* Выпуклый анализ. М.: Мир, 1973.