МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Московский Государственный Университет им. М.В.Ломоносова

Факультет вычислительной математики и кибернетики

Кафедра системного анализа

Магистерская программа по направлению

Математические модели сложных систем: теория, алгоритмы, приложения

Магистерская диссертация на тему

Построение множества достижимости для гибридной системы с одним переключением с неопределенностью

Выполнил:

Селиверстов Д.С.

Научный руководитель:

к.ф-м.н. Точилин П.А.

2010

Файл annotation.tex:

Аннотация Тема данной дипломной работы —- "Построение множества достижимости для гибридной системы с одним переключением с неопределенностью" – в рамках которой была рассмотрена модель, состоящая из двух систем линейных дифференциальных уравнений и условием переключения между ними.

Задача состоит в оценивании множества траекторий этой гибридной системы в конечный момент времени, в которые гарантированно можно попасть, выбрав соответсвующее управление, внезависимости от реализации помехи.

Исходя из поставленной задачи, в дипломной работе рассматривается решение данной задачи с привлечением аппарата выпуклого анализа через сопряженные функции и функции цены минимаксного типа. В этом случае множества достижимости представлены в виде множеств уровней (множеств Лебега) для специальных функций. Также рассматривается решение задачи методами многозначного анализа, что позволяет явно построить искомое множество посредством операций над выпуклыми компактами.

Файл postanovka.tex:

1. Постановка задачи

Даны системы дифференциальных уравнений, описывающих состояние некоторой модели до переключения и после:

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \dot{x}^{(1)} = A^{(1)}(t)x^{(1)} + B^{(1)}(t)u^{(1)}(t) + C^{(1)}(t)v(t); \\ x(t_0) \in \mathcal{E}(x_0, X_0) = \mathcal{X}^0; \end{cases} \\ \begin{cases} \dot{x}^{(2)} = A^{(2)}(t)x^{(2)} + B^{(2)}(t)u^{(2)}(t) + C^{(2)}(t)v(t)^{(2)}; \\ x(\tau) \in \mathcal{X}^{(1)}(\tau, t_0) \cap H; \end{cases} \end{array} \right. \\ H = \{x \in \mathbb{R}^n\colon\ \langle x, c\rangle = \gamma\} \text{— гиперплоскость переключения;} \\ A(t) \in \mathbb{R}^{n\times n},\ B(t) \in \mathbb{R}^{n\times m},\ C(t) \in \mathbb{R}^{n\times k};\ A(t), B(t), C(t) \in L_1[t_0, t_1]; \\ \tau:\ \left\langle x^{(1)}(\tau), c\right\rangle - \gamma = 0,\ \tau \in [t_0, t_1] \\ u^{(1)}(t) \in \mathcal{E}(p^{(1)}(t), P^{(1)}(t)) = \mathcal{P}^{(1)}[t_0, t_1]; \\ v^{(1)}(t) \in \mathcal{E}(w^{(1)}(t), W^{(1)}(t)) = \mathcal{V}^{(1)}[t_0, t_1]; \\ u^{(2)}(t) \in \mathcal{E}(p^{(2)}(t), P^{(2)}(t)) = \mathcal{P}^{(2)}[t_0, t_1]; \\ v^{(2)}(t) \in \mathcal{E}(w^{(2)}(t), W^{(2)}(t)) = \mathcal{V}^{(2)}[t_0, t_1]; \end{cases} \tag{1.1}$$

где $\mathcal{P}^{(1,2)}[t_0, t_1], \mathcal{V}^{(1,2)}[t_0, t_1]$ - непрерывные (по Хаусдорфу) эллипсоидальнозначные отображения. В неизвестный заранее момент времени τ, при пересечении наперед известной гиперплоскости $H = \{x \in \mathbb{R}^n\colon\ \langle x, c\rangle = \gamma\}$, происходит переключение с первой системы на вторую. $v^{(i)}(t)$ - неизвестная функция, неопределенность, область значений которой в каждый момент t ограничена k-мерной эллипсоидальной областью $\mathcal{V}^i(t)$, и принадлежащая классу интегрируемых функций $L_1[t_0, t_1]$. Управление $(u^{(1)}(\cdot), u^{(2)}(\cdot))$ – интегрируемые в $L_1[t_0, t_2]$ функции, ограниченные в каждый момент t эллипсоидальными областями $u^{(1)}(t)\mathcal{P}^{(1)}(t), u^{(2)}(t)\mathcal{P}^{(2)}(t)$. Оно выбирается из класса программных управлений то есть так, что оно определяется к начальному моменту t_0 заранее и уже не изменяется в зависимости от поведения системы в дальнейшем, оно также не зависит от времени переключения τ. Для решения задачи важно, чтобы траектория гибридной системы удовлетворяла условию односторонней проницаемости, то есть чтобы при переходе через плоскость H в момент τ всегда выполнялось

$$\begin{cases} \langle x(\tau), c\rangle - \gamma = 0 \\ \langle x(\tau)(\tau + \epsilon, c\rangle > 0; \end{cases} \tag{1.2}$$

для любого малого $\epsilon > 0$. Это условие одинаково справедливо как для первой системы $x(t) = x^{(1)}(t)$, так и для второй $x(t) = x^{(2)}(t)$, где $x^{(1)}(t), x^{(t)}(t)$ – фазовые переменные (траектории) системы соответсвенно до переключения и после. Это означает, что траектория системы может пересекать эту плоскость только один раз с переходом к другой системе, что также гарантирует связность множеста пересечения $\{(x(\tau), \tau) \mid x(\tau) \cap H\}$. Требуется построить множество достижимости $\mathcal{X}[t, t_0]$ в классе допустимых управлений $\mathcal{P}[t_0, t_1]$ для момента времени $t > t_0$ и начального множества $\mathcal{X}^0$. Таким образом, необходимо найти множество точек $\mathcal{X}[t, t_0, \mathcal{X}^0] = \{x(t)\}$, в которые система может гарантированно прийти из начального множества $\mathcal{X}^0$ выбором соответствующего управления $(u^{(1)}(\cdot), u^{(2)}(\cdot))$ внезависимости от помехи $(v^{(1)}(\cdot), v^{(2)}(\cdot))$.

Определение 1. *Множеством достижимости* $\mathcal{X}[t_1, t_0, \mathcal{X}_0]$ *системы линейных дифференциальных уравнений в момент* t_1 *называется пучок траекторий* $\mathcal{X}[t_1, t_0, \mathcal{X}_0] = \{x_1 \mid \exists u(\cdot) : \ \forall v(\cdot), x$ *где* $x(\cdot, t, x)$ *– траектория системы при фиксированных* $u(\cdot), v(\cdot)$ *и начальном условии x(t).* $\mathcal{X}_0$ *– начальное множество в момент времени* t_0.

Будем искать множество достижимости для гибридной системы

Определение 2. *Множество достижимости* $\mathcal{X}[t_1, t_0, \mathcal{X}_0]$ *для задачи* (**??**) *называется* $\mathcal{X}[t_1, t_0, \mathcal{X}_0] = \{x_1 \mid \exists u^{(1)}(\cdot), u^{(2)}(\cdot) : \ \forall v^{(1)}(\cdot), v^{(2)}(\cdot), x(t_0, t_0, x_2) \in \mathcal{X}_0, \exists \tau : x(\tau, t_1, x_1) \cap H \neq \emptyset, t_1 > \tau \geq t_0\}$