Devoir Maison calcul STOCHAStique

1)° Formule d'Itô pour EDS :

Soit l'EDS :

$$dS(t) = \mu S(t)\,dt + \delta S(t)\,dw(t)$$

où $w(t)$ est un mouvement brownien avec $S(0) = S_0$; on utilise la formule d'Itô pour $f(x,t) = \ln x$:

On a :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial t} = 0, \quad \dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{1}{x} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial^2 x} = \dfrac{-1}{x^2} \end{cases}$$

avec μ et $\delta \geq 0$.

la formule d'ITÔ donne :

$$d f(S(t),t) = d[\ln S(t)] =$$

$$\left(\mu S(t)\frac{1}{S(t)} + \frac{1}{2}\left((\delta S(t))^2 \frac{-1}{S(t)^2}\right)\right)dt$$

$$+ \delta S(t)\frac{1}{S(t)}\,dw(t)$$

$$= (\mu - \frac{1}{2}\delta^2)\, dt + \delta\, dW(t)$$

on intègre de 0 à t on obtiendra :

$$\ln\left(\frac{S(t)}{S(0)}\right) = (\mu - \frac{1}{2}\delta^2)t + \delta W(t)$$

et la solution est :

$$S(t) = S(0) \exp\left[(\mu - \frac{1}{2}\delta^2)t + \delta W(t)\right]$$

Les moments d'une EDS.

2)° Montrer la proposition 6.2 du cours sur la loi des rendements du Mouvement Brownien géométrique.

posons :

$$f(t) = \log(S(t)) \qquad h = dt$$

et $m = (\mu - \frac{1}{2}\delta^2)$

en Appliquant le Lemme d'ITÔ, on obtient l'équation différentielle stochastique suivante :

$$\begin{cases} df(t) = m\,dt + \delta\, dW(t) \\ f(0) = r_0 = \log(S_0) \end{cases}$$

Il en resulte que $R = \{R(t), t \geq 0\}$ est un processus de wiener généralisé de drift m et de variance δ^2 tel que :

$$r_j = \log\left(\frac{S(jh)}{S((j-1)h)}\right)$$

$$R(t) - R(0) = \log\left(\frac{S(t)}{S(0)}\right)$$

qui suit la loi

$$N(mt, \delta^2 t)$$

tq : $m = \mu - \frac{\delta^2}{2}$

$h = dt$

Conclusion : r_j est distribué selon une Loi normale de Moyenne $(\mu - \frac{1}{2}\delta^2).h$ et de variance $\delta^2 . h$.

- D'une manière équivalente, $R(t)$ est un processus de diffusion Log-normal caractérisé par la fonction de densité de transition suivante pour $s \leq t$:

$S(s) = r$

$$f(x, \tfrac{t}{r}, s) = \frac{1}{\delta x \sqrt{2\pi(t-s)}} e^{-\left\{\frac{1}{2\delta^2(t-s)}\left[\log x - \log y - (\mu - \frac{1}{2}\delta^2)(t-s)\right]^2\right\}}$$

où μ et δ^2 sont des paramètre à estimer.

3)° Montrer la proposition 6.2 sur les estimateurs du MAXIMUM de vraisemblance du mouvement brownien géométrique :

soit : $m = (\mu - \frac{1}{2}\delta^2)$

$$R_t = \log\left(\frac{X_t}{X_{t-1}}\right) \sim N(m, \delta^2)$$

r_t : l'observation de la V.A R_t à un instant t.

- les lois des grands nombres justifient l'usage $\bar{r}$ et s^2 comme estim de m et δ^2 :

$$\bar{R} \xrightarrow{ps} m \text{ et } S^2 \xrightarrow{ps} \delta^2$$

$\bar{R}$: V.A moyenne S^2 : V.A variance empirique de l'échantillon d'obs $\bar{r}$ et s^2.

- La fonction de vraisemblance s'écrit :

$$\boxed{L(x_{ij} / \mu, \delta^2) = \prod_{i=1}^{b} \prod_{j=1}^{m_i} f(x_{ij}, t_{ij} / x_{ij-1}, t_{ij-1})}$$

où $f(x_{ij}, t_{ij} / x_{ij-1}, t_{ij-1})$ est la fonction de densité de transition.

- La résolution des équations de vraisemblance fournit les estimateurs suivants :

pour μ : $\hat{\mu} = \dfrac{\sum \log\left(\frac{x_{i m_i}}{x_{i0}}\right)}{\sum (t_{i m_i} - t_{i0})} + \frac{1}{2}\hat{\delta}^2$

pour δ :

$$\hat{\delta}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{b} \sum_{j=1}^{m_i} (t_{ij} - t_{ij-1}) \left[\dfrac{\log\left(\frac{x_{ij}}{x_{ij-1}}\right) \sum \log\left(\frac{x_{i m_i}}{x_{i0}}\right)}{t_{ij} - t_{ij-1} \sum (t_{i m_i} - t_{i0})} \right]^2}{K}$$

où $K = \sum_{i=1}^{b} m_i$: le nbre TOTAL d'observations.

- $\hat{\mu}$ et $\hat{\delta}^2$ ont les representatio suivtes :

$$\hat{\mu} = \left(\mu - \frac{1}{2}\delta^2\right) + \frac{\delta N}{\sqrt{\sum_{i=1}^{b} (t_{i m_i} - t_{i0})}} + \frac{\delta^2}{2K} \sum_{i=1}^{K-1} N_i^2$$

$$\hat{\delta}^2 = \frac{\delta^2}{K} \sum_{i=1}^{K-1} N_i^2$$

$N, N_1, \ldots, N_{K-1}$: sont idp normales-réduites.

- l'estimateur du μ découle directement de la propriété d'additivité de la fonct d'esperance :

$$\boxed{\hat{\mu} = \bar{r} + \frac{1}{2}\hat{\delta}^2}$$

$$\hat{m} = \hat{u} - \frac{1}{2}\hat{\delta}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} r_i = \bar{r}$$

$$\hat{\delta}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(r_i - \hat{m})^2 = S^2$$

tq:

- $\hat{m} \sim N(m, \frac{S^2}{n})$
- $\frac{\hat{\delta}^2}{n} \sim \chi^2_{n-1}$

conclusion: Ces estimateurs sont Asymptotiques normaux. Leurs moments ne dépend que du nbre et la dureé des obs.

Ils sont biaisés par un simple Ajustes consiste à :

multiplier

$$\hat{\delta}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(r_i - \hat{m})^2 = S^2$$

par le facteur :

$$\frac{n}{n-1}$$

et on retrouve les estimateurs non biaisés de u, δ^2.